UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

A aprendizagem dos conceitos básicos de Probabilidade com recurso ao Geogebra: um estudo com alunos da Costa Rica.

Guillermo Ramírez Montes

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Área de especialidade: Didática da Matemática

Dissertação orientada pela Professora Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques

2017

Esta dissertação foi desenvolvida no quadro do Projeto Technology Enhanced Learning at Future Teacher Education Lab financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia I.P. com a referência nº PTDC/MHC/CED/0588/2014”

RESUMO

Esta investigação surge da minha preocupação em melhorar as aprendizagens dos alunos de conceitos básicos de Probabilidade. Tem como objetivos compreender de que modo os alunos costarriquenhos do 10.º ano aprendem os conceitos básicos de Probabilidade, no quadro de uma experiência de ensino apoiada em tarefas exploratórias com recurso ao Geogebra, e quais os contributos deste software como recurso didático para a aprendizagem destes conceitos. As tarefas propostas na experiência de ensino, realizada no 1.º semestre do ano letivo de 2017 numa escola em San José da Costa Rica, tentam responder às orientações curriculares para o ensino da Probabilidade, tanto nacionais como internacionais, no que respeita à necessidade de utilização da tecnologia na sala de aula, assim como também à literatura de investigação relativa a recursos educacionais a usar na abordagem de conceitos de Probabilidade. Para além disso, previamente à experiência de ensino, foi realizado um estudo exploratório numa turma portuguesa de 9º ano de escolaridade, em Lisboa, procurando avaliar e melhorar a proposta pedagógica que serviu de base à experiência de ensino.

A metodologia utilizada para a análise de dados foi qualitativa e interpretativa, tendo por base a observação participante, a recolha documental e um questionário final.

Os resultados evidenciam que as tarefas exploratórias com recurso ao Geogebra permitiram os alunos inferir leis e propriedades associadas a conceitos básicos de Probabilidade e aprofundá-los, sendo a simulação um elemento essencial para os alunos observarem e estabelecerem conexões entre distintas representações desses conceitos. No entanto, algumas dificuldades associadas à identificação incorreta de padrões, à utilização pouco rigorosa da linguagem probabilística e a tendência para utilizarem a regra de Laplace para o cálculo de probabilidades, consequência das conceções e experiências prévias dos alunos, permaneceram até ao final da experiência. Os resultados obtidos permitem fazer uma avaliação positiva do uso de tarefas exploratórias com recurso ao Geogebra como metodologia de ensino e aprendizagem dos alunos em Probabilidade.

Palavras-chave: Probabilidade; Tarefas exploratórias; Simulação; Geogebra; Experiência de ensino.

ABSTRACT

This research arises from my concern in improving students' learning of basic concepts of Probability. Its objectives are to understand how Costa Rican 10th grade students learn the basic concepts of Probability throughout a teaching experience based on exploratory tasks using Geogebra and what are the contributes of this software, as didactic resource, for learning these concepts. The tasks proposed in the teaching experience, carried out in the first semester of the 2017 school year in a school in San José, Costa Rica, meet the curricular guidelines for teaching Probability, both national and international, regarding the need of using technology in the classroom, as well as the research on educational resources to use in approaching Probability concepts. In addition, prior to the teaching experience, an exploratory study was carried out in a Portuguese class of 9th grade, in Lisbon, trying to evaluate and improve the pedagogical proposal that served as the basis for the experience.

The methodology used for data analysis was qualitative and interpretative, based on participant observation, documents collection and a final questionnaire.

The results show that exploratory tasks using Geogebra allowed students to infer laws and properties associated with basic concepts of probability and to deepen them, while simulation was considered an essential element for students to observe and establish connections between different representations of these concepts. However, some difficulties associated with incorrect pattern identification, the poor use of probabilistic language, and the tendency to use the Laplace rule for the calculation of probabilities, as a consequence of the students' previous. The results obtained allow us to make a positive evaluation of the use of exploratory tasks using Geogebra as methodology of teaching and learning of the students in Probability.

Keywords: Probability; Exploratory tasks; Simulation; Geogebra; Teaching experience.

O presente trabalho surge como um alvo pessoal para a capacitação do professor na área de Didática da Matemática, visando contribuir para a Educação Matemática na Costa Rica, tanto em matéria de novas metodologias para o ensino e aprendizagem da Matemática, como também em matéria de investigação em Educação Matemática, campo de estudo que atualmente está em crescimento constante em vários países, sendo necessário que a Costa Rica não seja uma exceção neste crescimento da investigação.

Para poder desenvolver o presente trabalho o apoio económico foi de muita relevância, tendo sido necessário o financiamento da investigação e formação necessária para o seu desenvolvimento pela Universidade de Costa Rica. O dito financiamento é atribuído a partir de uma bolsa oferecida ao mestrando, apoiada no documento OAICE-CAB-08-125-2016 da *Oficina de Asuntos Internacionales y Cooperación Externa* da Universidade de Costa Rica, para levar a cabo os seus estudos de pós-graduação no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Agradecimentos

A experiência de elaborar um trabalho de investigação sempre vai acompanhada de horas de esforço, e em cada uma dessas horas de esforço sempre existe algo ou alguém que nos motiva a querer fazer as coisas da melhor maneira. Ao concluir uma etapa profissional mais da minha vida é inevitável ter a necessidade de dar as graças sinceras a todas aquelas pessoas que, de alguma ou outra forma, aportaram com o seu grão de areia para que este trabalho tenha sido culminado.

Em primeiro lugar devo dar as graças a Deus, a pessoa mais importante na minha vida, por quem hoje baixo a sua direção vim dar a um país desconhecido para mim, encontrando a oportunidade de seguir crescendo integralmente.

A seguir quero agradecer a minha família toda, sem exceção alguma, pois cada um deles sempre têm estado pendentes de mim desde o primeiro momento que comecei esta bela aventura em Portugal. Em particular, quero agradecer a minha tia Marieta, meu pai Guillermo, minha mãe Nury, meus irmãos Johan, Charol, Adriana, Verónica e Vanessa; pois com o seu amor e forma de ser complementam a minha vida, lembrando-me que sou muito privilegiado de os ter comigo.

Um agradecimento especial à pessoa que com o seu grande profissionalismo e forma humana de ser sempre esteve atenta a me dirigir da melhor forma possível, professora Doutora Ana Henriques. As suas revisões e sugestões sempre foram fundamentais para facilitar a estrutura, leitura e muitos outros aspetos mais que sem a ajuda dela fosse sido difícil perceber eu mesmo.

Assim também a cada um dos professores do mestrado em Didática da Matemática do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa quem, em algum momento do mestrado, aportaram com o seu conhecimento e sugestões também na minha formação como professor e investigador.

Por último, quero agradecer a meus amigos e amigas de vida, especialmente a Fabián, Mariana, Shara, Siviany, José Fernando, e Osvaldo; pessoas que formam parte desta grande família, estando sempre atentos a dar um conselho ou ajuda quando foi necessário para seguir crescendo e atingir os meus objetivos académicos.

ÍNDICE GERAL

RESUMO i
ABSTRACT iii
Agradecimentos vii
ÍNDICE GERAL ix
INTRODUÇÃO 1
1.1 Motivação e pertinência do estudo 1
1.2 Objetivo e questões de estudo 6
1.3 Organização do estudo 7
ENQUADRAMENTO TEORICO 9
2.1 Educação em Probabilidade 9
2.1.1 Orientações curriculares 11
2.2 Ensino e aprendizagem dos conceitos básicos de Probabilidade 14
2.2.1 Teoria de Conjuntos e representações na aprendizagem da Probabilidade 19
2.2.2 Dificuldades na aprendizagem da Probabilidade 22
2.2.3 Simulações e modelos no ensino e aprendizagem da Probabilidade 24
2.3 Tecnologia como recurso na aprendizagem da Probabilidade 25
2.3.1 Geogebra na aprendizagem dos conceitos básicos de Probabilidade 27
METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO 33
3.1 Opções metodológicas 33
3.1.1 Abordagem qualitativa e paradigma interpretativo 33
3.1.2 Experiência de ensino 35
3.1.3 Papel do investigador 36
3.2 Fases da investigação 37
3.3 Participantes 38
3.4 Métodos e instrumentos de recolha de dados 39
3.5 Análise de dados 43
ESTUDO EXPLORATÓRIO 47
4.1 Objetivo 47
4.2 Opções metodológicas 47
4.3 Contexto e Participantes 48

4.4 Planeamento da proposta pedagógica 48
4.4.1 Descrição e objetivos das tarefas 49
4.4.2 Planeamento das tarefas e seus objetivos 53
4.5 Recolha e Análise de dados 54
4.5.1 Recolha de dados 54
4.5.2 Resultados 55
EXPERIÊNCIA DE ENSINO 61
5.1 Caraterização do contexto escolar 61
5.2 Enquadramento curricular e objetivos 63
5.2.1 Introdução 63
5.2.2 Tópicos e objetivos 65
5.3 Planificação das tarefas e outros recursos 68
5.4 Abordagem de ensino na sala de aula 76
5.5 Avaliação dos alunos 78
ANÁLISE DE DADOS 81
6.1 Aprendizagem de conceitos probabilísticos 81
6.1.1 Conceitos associados à aleatoriedade: experiências aleatórias, experiências determinísticas variabilidade, acaso, incerteza, sorte. 81
6.1.2 Conceitos associados ao espaço amostral: casos favoráveis, casos possíveis acontecimentos, tipos de acontecimentos (disjuntos, complementares, provável, certo, impossível). 89
6.1.3 Conceitos associados aos significados clássico e frequencista de probabilidade e a sua relação com a equiprobabilidade: probabilidade, probabilidade clássica, probabilidade frequencista, equiprobabilidade. 99
6.2 Utilização do Geogebra como recurso de apoio às aprendizagens dos conceitos probabilísticos 109
CONCLUSÕES 119
7.1 SINTESE DO ESTUDO 119
7.2 PRINCIPAIS CONCLUSÕES DO ESTUDO 120
7.3 REFLEXÕES FINAIS 127
REFERÊNCIAS 131
ANEXOS 139

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, descrevo a importância da realização deste trabalho de pesquisa que contempla a aprendizagem dos conceitos básicos de Probabilidade na sala de aula, com alunos da Costa Rica, considerando principalmente para isso a minha motivação como professor de Matemática. Apresento também a pertinência do estudo a nível da aprendizagem curricular, a nível da importância da Probabilidade na vida cotidiana, e a importância da sua abordagem utilizando a Tecnologia. Por último descrevo o objetivo e as questões do estudo, como também a sua organização por capítulos.

1.1 Motivação e pertinência do estudo

A Estatística e a Probabilidade são campos de estudo em investigação em Educação Matemática e ferramentas úteis que contribuem para a formação básica de um cidadão (Burril, 2002; Garfield & Alhgren, 1988; Sharma, 2016). Na atualidade, as pessoas contactam cotidianamente com informação contendo gráficos e dados estocásticos, nomeadamente, revistas que vinculam notícias acompanhadas de conceitos estatísticos e probabilísticos cada vez mais complexos. Alguns conhecimentos probabilísticos, como por exemplo, tamanho da amostra, margem de erro, nível de confiança, entre outros, são manifestados com frequência como obstáculos ao cidadão na sua interpretação de um texto estatístico (Cazorla, 2004), evidenciando assim a importância da aprendizagem dos conceitos básicos de Estatística e Probabilidade na Educação Básica.

Nos últimos anos tem sido dada uma crescente atenção à importância de o ensino da Probabilidade ser considerado desde os primeiros anos da escola (Osorio, Suárez & Uribe, 2013). Esta atenção é justificada pela necessidade de se formar cidadãos críticos e preparados para interpretar dados probabilísticos e que estão presentes no cotidiano das pessoas, como a tomada de decisões em situações de incerteza, as ocorrências de fenómenos aleatórios ou o cálculo de chance ou azar (Branco & Martins, 2002; Cazorla, 2004; Lopes, 2010). Além disso, “a Probabilidade proporciona uma excelente oportunidade para mostrar os alunos

como matematizar, como aplicar a matemática para resolver problemas reais" (Diaz, Batanero & Cañizares, 1996, p.12), permitindo-lhe conceber a Probabilidade como uma área da Matemática com utilidade no seu dia a dia, e não só como mais uma disciplina do currículo escolar.

No que respeita ao currículo formal, os recentes programas de Matemática apontam a probabilidade como um dos tópicos importantes que o aluno deve aprender, permitindo tratar fenómenos como a incerteza (Branco & Martins, 2002). Em particular, no programa de Matemática da Costa Rica que está presente nas escolas desde 2012, a partir de 2016 este tópico começou a ser avaliado obrigatoriamente nos testes finais de conclusão de estudos da Educação Diversificada (educação secundária), sendo isso uma fonte de motivação para investigar o atual ensino e a aprendizagem da Probabilidade na Costa Rica.

Também a nível internacional, Franklin et al. (2007) nas *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education* (GAISE) destacam a Análise de Dados e a Probabilidade como um dos cinco conteúdos pilares do currículo em Educação Matemática, sendo necessário promover estes conhecimentos na sala de aula. De igual modo, o *National Council of Teachers of Mathematics* - NCTM (1989) salienta os objetivos de aprendizagem da Probabilidade, estabelecendo que nos níveis do 9º até 12º anos os alunos devem ser capazes de compreender as diferenças entre probabilidade teórica e probabilidade experimental, ampliar as suas experiências de anos anteriores com o objetivo a melhorar a sua intuição e compreender os conceitos de Probabilidade, de forma a não aplicarem fórmulas inapropriadamente na resolução de problemas de probabilidade mas tenham a capacidade de mobilizar os conceitos e aplicá-los segundo o contexto. Este aspeto é também salientado no GAISE, que refere a importância de os alunos compreenderem os conceitos de Probabilidade para saberem aplicá-los a contextos vários.

Apesar da importância que as orientações curriculares atribuem a uma sólida aprendizagem da Probabilidade, esta tem-se centrado num conjunto de procedimentos e técnicas para a recolha e apresentação de dados, deixando de lado a função principal para a qual têm sido criados, nomeadamente, aprofundar a mensagem que se pode extrair da aplicação destas técnicas e procedimentos (Chaves, 2016), isto é, analisar os dados obtidos a partir da interpretação do conceito.

Este enfoque na aprendizagem baseada em regras, acrescentado a outros elementos que intervêm na aprendizagem do aluno da Probabilidade, têm vindo a gerar uma série de dificuldades que se repercutem no aluno não gostar do tópico ou considerá-lo como um tópico difícil (Batanero, 2002, 2005; Bielher, 1991; Chaves, 2016). Dificuldades dos alunos como a incompreensão dos conceitos básicos de aleatoriedade, o uso da linguagem e notação probabilística e pouca habilidade na utilização da lei dos grandes números ou a lei de Bayes, entre outras, estão bem evidenciadas na literatura (Biehler, 1991; Garfield & Alhgren, 1988; Serradó, Cardeñoso & Azcárate, 2005). Especificamente quanto à utilização da lei dos grandes números, os alunos são capazes de a memorizar, tal como as definições dos conceitos básicos ligados à aprendizagem da Probabilidade, mas poucos são capazes de mobilizar os conceitos e aplicá-los a novas situações (Garfield & Alhgren, 1988), isto é, em contextos diferentes dos trabalhados na sala de aula, o que pode evidenciar dificuldades de compreensão dos conceitos probabilísticos. Estas dificuldades são constatadas, inclusive, nos últimos níveis do Ensino Básico (8.º e 9.º), onde se espera que os alunos possuam já maior familiaridade com estes conceitos probabilísticos (Munisamy & Doraisamy, 1998).

Da mesma forma, na minha experiência como professor da unidade curricular de Probabilidade do 10.º ano do ensino secundário na Costa Rica, identifiquei muitas dificuldades manifestadas pelos alunos na aprendizagem dos conceitos probabilísticos, nomeadamente, ao nível da linguagem probabilística, da interpretação e identificação de alguns conceitos básicos e do cálculo de probabilidades com diferentes tipos de acontecimentos.

A isto deve-se acrescentar a prática tradicional de sala de aula, frequentemente centrada na exposição dos conteúdos tendo o aluno como simples recetor, sem oportunidade de comunicação e interação na aprendizagem, que é outro fator que ajuda a manter esse quadro de dificuldades dos alunos no ensino dos conceitos probabilísticos (Santos & Moita, 2009). Todos estes pontos mencionados anteriormente têm convertido a Probabilidade em um dos conteúdos matemáticos mais complexos do aluno aprender (Ortiz, Batanero & Serrano, 2001; Serradó et al., 2005)

Neste contexto, parece-me que uma maneira pertinente de enfrentar tal situação é optar por estratégias didáticas que estimulem a autonomia e a participação mais efetiva dos alunos,

a partir de tarefas que considerem um tratamento exploratório dos conceitos básicos associados à Probabilidade, permitindo-lhe refletir sobre a natureza e o papel destes conceitos no contexto em que se encontra inserido (Ponte & Quaresma, 2012), ao invés de apenas promover a aplicação de fórmulas com transformações das soluções em percentagem. Como alternativa, e na procura dessa estratégia, os *Principles and Standars for School Mathematics* (NCTM, 2000) enfatizam a tecnologia como uma ferramenta valiosa para promover a aprendizagem da Matemática, ajudando os alunos a aprofundar conceitos, a resolver problemas e a tomar decisões, salientando também a potencialidade da tecnologia para os alunos trabalharem de modo interativo. Estas potencialidades da tecnologia tornam-na possível e necessária na sala de aula de matemática, a fim de considerar melhores metodologias para aprender certos conceitos de caráter abstrato. Além disso, atualmente existem "computadores, tablets, smartphones, e calculadoras com uma disponibilidade de aplicações, as quais ajudam os alunos na exploração matemática, como também dar sentido aos conceitos e procedimentos e a promover o seu raciocínio" (NCTM, 2014, p. 78). Assim, neste pensar de ensino e aprendizagem, as tecnologias convertem-se em potenciadores de motivação do aluno, permitindo uma maior participação e melhor desempenho na realização de tarefas escolares (Deaney, Ruthven & Hennessy, 2003).

O computador veio ocupar um papel importante no desenvolvimento educacional do aluno, pois "o uso do computador na Educação objetiva a integração deste no processo de aprendizagem dos conceitos curriculares em todas as modalidades e níveis de ensino, podendo desempenhar papel de facilitador entre o aluno e a construção do seu conhecimento" (Santos & Moita, 2009, p. 4). No que se refere ao ensino da Probabilidade em particular, as novas tecnologias, principalmente os computadores, são provavelmente mais relevantes para a Probabilidade do que para outros tópicos do currículo matemático (Bielher, 1991), permitindo trabalhar com simulações, sendo estas ferramentas valiosas para introduzir novos conceitos (Biehler, 2003). A realização de experiências a partir de simulações com *software* ajuda os alunos a resolver tarefas como a realização de experiências compostas, onde os alunos muitas vezes apresentam dificuldades por se tratar de tarefas de Probabilidade aparentemente simples, mas com uma certa complexidade no conceito (Batanero, 2005), sendo a simulação uma ferramenta que permite reduzir a complexidade dos cálculos e centrar a aprendizagem no conceito e análise de resultados.

Perante a vantagem da simulação, diverso *software* matemático é utilizado por professores e pesquisadores para o ensino e aprendizagem da Probabilidade, destacando-se o Geogebra, que é um *software* educativo de Matemática usado para trabalhar com geometria, álgebra, funções, e mais recentemente com Estatística e Probabilidade. A ferramentas disponibilizadas neste *software*, como a folha de cálculo e a visualização gráfica, entre outras, que permitem ao aluno a exploração e a manipulação de dados a partir de simulação, promovendo a realização de conjeturas sobre o conceito em estudo e a formulação das suas próprias conclusões (Del Pino, 2013; Ferreira, Carvalho & Becker, 2011; Romano, Martín & Tenorio, 2012).

Desta forma, acredito que a prática letiva com a utilização de tarefas exploratórias abordadas com simulação disponibilizada pelo *software* Geogebra, possibilita os alunos uma aprendizagem adequada dos conceitos básicos associados à Probabilidade, ajudando-os a superar as dificuldades identificadas na literatura. Além disso, considerando a minha experiência pessoal no ensino de conteúdos matemáticos com auxílio do uso de TIC (Tecnologias para a Informação e Comunicação), o potencial das TIC na aprendizagem dos conceitos probabilísticos e a oportunidade de realizar uma intervenção em sala de aula na Costa Rica, surge-me a motivação, como professor e investigador, de realizar uma pesquisa orientada para analisar como os alunos costarriquenhos podem realizar a aprendizagem dos conceitos básicos de Probabilidade com recurso ao Geogebra. Procurarei também perceber a utilidade do Geogebra como ferramenta de apoio para a aprendizagem exploratória de conceitos de Probabilidade. Uma vez que estes conceitos são parte integrante dos programas de Matemática, quer em Portugal, quer na Costa Rica, e tendo essa oportunidade, parece-me pertinente desenvolver primeiramente um estudo exploratório em Portugal, como forma de testar as tarefas da experiência de ensino a aplicar na Costa Rica, identificando as suas potencialidades e aspetos possíveis de serem melhorados.

Desta forma, considerando as motivações e a pertinência do estudo, acima mencionadas, este trabalho de investigação orienta-se a criar conhecimento no campo da educação probabilística, fornecendo uma nova abordagem de ensino que possa ser utilizada pelos professores nas suas aulas no estudo da Probabilidade e na procura de uma melhor compreensão do aluno dos conceitos probabilísticos básicos.

1.2 Objetivo e questões de estudo

Como referido, o meu interesse pela temática deste estudo tem a ver com a possibilidade de perceber de que forma o professor pode exercer uma prática letiva que permita os alunos desenvolver aprendizagens significativas no estudo da Probabilidade. Assim, o presente trabalho tem por base a realização de uma experiência de ensino assente num conjunto de tarefas de exploração, focadas em conceitos básicos de Probabilidade que fazem parte da unidade de ensino de Probabilidade do programa de Matemática costarriquenho. Estas tarefas, partem de questões que abordam a parte intuitiva do conceito, seguidas do trabalho exploratório com simulação apoiado pelo Geogebra para o tratamento de conceitos básicos de Probabilidade, os quais se visualizam com distintas representações do conceito (Erickson, 2006; NCTM, 2014). Para isso, a estrutura das tarefas faze uso de uma sequência de questões orientadoras que pretendem introduzir e consolidar os conceitos probabilísticos à medida que se trabalha com o Geogebra, finalizando com a sua discussão coletiva e formalização dos conceitos na sala de aula.

Neste contexto, este estudo tem como objetivos compreender de que modo os alunos costarriquenhos do 10.º ano aprendem os conceitos básicos de Probabilidade no quadro de uma experiência de ensino apoiada em tarefas exploratórias com recurso ao Geogebra. Para além disso, procuro perceber quais os contributos do Geogebra, como recurso, para a aprendizagem destes conceitos.

Tendo em conta estes objetivos, formulo as seguintes questões de investigação que guiarão o estudo:

1) Quais as aprendizagens evidenciadas pelos alunos no decorrer da experiência de ensino no que respeita aos conceitos básicos de Probabilidade? Quais as dificuldades que revelam?

2) De que modo a realização de tarefas exploratórias com recurso ao Geogebra pode contribuir para a aprendizagem dos alunos nos conceitos básicos de Probabilidade? Quais as principais dificuldades sentidas pelos alunos no uso deste *software*?

1.3 Organização do estudo

O presente estudo está estruturado nos seguintes capítulos: introdução, enquadramento teórico, metodologia, proposta pedagógica, análise de resultados, e conclusões.

No capítulo da introdução apresentado a pertinência do estudo como tópico de pesquisa, assim como a motivação que me levou ao desenvolvimento do estudo como profissional na área do Ensino da Matemática. Para além disso, apresento o objetivo e as questões de investigação.

No enquadramento teórico faço uma abordagem à literatura pesquisada, relativamente ao tratamento curricular da Educação em Probabilidade, elementos que intervêm no processo de ensino e aprendizagem da Probabilidade (dificuldades e erros comuns presentes na aprendizagem, teoria de conjuntos e representações, simulações na aprendizagem de probabilidades) e, por último, o papel das TIC na aprendizagem da Probabilidade, em particular, o papel do Geogebra na aprendizagem de conceitos probabilísticos.

O capítulo da metodologia está dirigido a apresentar as opções metodológicas gerais do estudo, os participantes e contexto alvo, e os procedimentos e instrumentos de recolha e análise de dados. O capítulo a seguir apresenta o estudo exploratório, cuja realização antecede ao estudo principal. A seguir apresento o capítulo da experiência de ensino a implementar na Costa Rica, considerando aspetos como: a planificação, as estratégias e recursos utilizados, os objetivos de aprendizagem e objetivos das tarefas, a descrição e abordagem das tarefas implementadas, e a avaliação. No capítulo seguinte apresento a análise das aprendizagens dos alunos e os seus resultados segundo as questões de pesquisa a responder.

Por fim, no último capítulo, faço uma síntese do estudo, apresento as principais conclusões inferidas da análise das aprendizagens em articulação com outros estudos salientados no enquadramento teórico, e elaboro algumas reflexões e recomendações finais do investigador para o ensino e aprendizagem dos conceitos de Probabilidade trabalhados durante a experiência de ensino.

Capítulo 2

ENQUADRAMENTO TEORICO

Neste capítulo apresento o enquadramento teórico que permite fundamentar a investigação. Faço uma revisão de alguns dos estudos que salientam a importância da educação em Probabilidade, como tópico da Matemática e a sua presença nas orientações curriculares internacionais e nacionais. Discuto também alguns elementos relacionados com a aprendizagem de conceitos básicos da Probabilidade, tais como: dificuldades manifestadas pelos alunos, representações da Teoria de Conjuntos utilizadas para a abordagem de conceitos probabilísticos e a utilização das TIC como ferramentas de ensino e aprendizagem. Em particular, destaco a utilização do Geogebra como *software* para trabalhar tarefas de Probabilidade a partir de simulação com o computador.

2.1 Educação em Probabilidade

A Probabilidade tem assumido distintos papéis através da história (Oliveira, 1990), os quais, quer para situações cotidianas como os jogos do acaso quer para a formalização de teorias matemáticas ou extra-matemáticas, têm vindo a contribuir para que esta área do conhecimento da Matemática adquirisse uma grande importância no dia-a-dia da sociedade (Lopes, 2008). A aplicabilidade desta área, como instrumento fundamental na tomada de decisões, tem levado a que áreas de estudo, como as engenharias, ciências da saúde e física, entre outras, tenham incorporado uma formação em Probabilidade nos seus currículos, sendo essencial para o tratamento de fenómenos com os quais as pessoas têm que se confrontar cotidianamente (ME, 2013). Assim por exemplo, no mundo dos negócios e em decisões políticas relativas à defesa nacional, a Probabilidade tem vindo a fornecer a linguagem para exteriorizar numericamente os resultados que levam à tomada de decisões (NCTM, 1989).

Quanto ao papel da Probabilidade como tópico da Matemática, esta fornece ferramentas básicas para trabalhar conteúdos estatísticos, servindo para avaliar a fiabilidade de dados, os quais servirão para tirar conclusões para a população partindo de amostras, isto é, fazer inferências estatísticas (Mendenhall, Beaver & Beaver, 2010). Neste sentido, "o conceito de

amostra introduz-nos à inferência e estabelece uma ponte entre Estatística e Probabilidade" (Batanero, 2002, p.25), evidenciando que a Probabilidade, mais que um tópico da Matemática isolado, é um complemento da Estatística, sendo necessário quer para compreender a Estatística quer para compreender fenómenos da vida cotidiana e tomar decisões baseadas na inferência estatística.

Vários autores manifestam-se sobre as vantagens de uma educação em Probabilidade como meio para se enfrentar as situações cotidianas (Diaz et al., 1996; Batanero 2002, 2006; Burril, 2002; Lopes, 2008, 2010). Assim por exemplo, Burril (2002) e Lopes (2010) salientam que a probabilidade tem vindo a ser usada como uma ferramenta analítica ótima para quantificar a ocorrência de um comportamento observado, referindo-se neste contexto à probabilidade como objeto ligado a tomada de decisões. Diaz et al. (1996) acrescentam nesta mesma linha que "a probabilidade proporciona uma excelente oportunidade para mostrar os alunos como matematizar, como aplicar a matemática para resolver problemas reais" (p. 12) e, portanto, fornece bases para incentivar a aprendizagem na sala de aula ao mostrar que a Probabilidade pode-se contextualizar mediante fenómenos de interesse dos alunos.

Paralelamente, Batanero (2006) refere algumas aplicações da Probabilidade em contextos específicos, analisando a sua utilidade na tomada de decisões a partir de dois exemplos, a avaliação de erros médicos nas provas de prevenção massiva e os processos judiciais de roubo onde intervém o erro conhecido como a "falácia do Fiscal". Esta autora afirma que uma pobre intuição sobre Probabilidade pode levar a fortes consequências na vida cotidiana dos indivíduos e, por isso, a importância de uma educação escolar em Probabilidade que permita aprender apropriadamente estes conceitos formalmente.

Por outro lado, Branco e Martins (2002) destacam alguns requisitos ou capacidades que um cidadão deve desenvolver para enfrentar uma sociedade onde dominam os números, entre estes:

1) Perceber a necessidade de trabalhar e produzir dados em um determinado contexto, assim como também a origem destes;
2) Estar familiarizado com a informação básica de Estatística descritiva para simplificar a informação contida nos dados;

3) Compreender noções básicas de Probabilidade;
4) Ser capaz de fazer inferências a partir de dados.

Destas quatro capacidades enumeradas acima, as duas últimas são destacadas nas orientações curriculares e estão ligadas diretamente a uma educação em Probabilidade baseada na compreensão de conceitos probabilísticos, para além do cálculo e aplicação de fórmulas, evidenciando a importância do tratamento dos conceitos básicos de Probabilidade para o desenvolvimento do individuo.

2.1.1 Orientações curriculares

A Estatística e a Probabilidade têm vindo a tomar cada vez mais importância no campo da Educação Matemática, como se pode observar nas orientações curriculares de distintos países que destacam a necessidade de incorporar a Probabilidade como parte dos conteúdos a serem ensinados na sala de aula (NCTM, 1989, 2000, 2014; Franklin et al., 2007; MEP, 2012; ME, 2013; Nacarato & Grando, 2014; Paul & Hlanganipai, 2014).

Por um lado, o NCTM (1989) salienta que o aluno deve ser capaz de diferenciar entre noções de Probabilidade, por exemplo, probabilidade teórica e probabilidade experimental ou frequencista, argumentando a necessidade do aluno ter uma sólida base do conceito, sendo capaz de aplicar fórmulas com base num raciocínio que lhe permita a interpretação dos resultados que está a calcular. Paralelamente, Franklin et al. (2007), referindo-se às capacidades que o aluno deve desenvolver para conseguir uma compreensão da Estatística inferencial em níveis superiores, também salientam que é preciso o aluno seja capaz de compreender o conceito de frequência relativa, como assim mesmo o conceito de independência, e compreender as diferentes formas como a Probabilidade pode ser aplicada na vida cotidiana.

No caso particular do programa de Matemática da Costa Rica, é salientado que a aprendizagem da Probabilidade deve ser baseada na análise de dados e na resolução de problemas, e não na manipulação de fórmulas que não aprofundam o conceito (MEP, 2012). O programa de Matemática português também destaca a resolução de problemas como metodologia a seguir nos tópicos de Matemática e salienta algumas atividades metodológicas de sala de aula como a exploração, destacando que esta motiva o aluno, mas precisa ser

complementada com outras tarefas que permitam consolidar o conceito e proceder à sua formalização (ME, 2013).

Para efeitos desta investigação, os conceitos básicos de Probabilidade a trabalhar são aqueles que estão contemplados no Programa de Matemática de Ensino Básico português (ME,2013) para 9.º ano (tabela 2.1), os mesmos trabalhados no Programa de Matemática de Educação Geral Básica e Diversificada da Costa Rica (MEP, 2012).

Tabela 2.1. Tópicos e objetivos da Unidade de Probabilidade de 9.º ano (ME, 2013, p. 82-83).

Objetivo associado ao tópico	Tópicos
Objetivo 1	Experiência, tipos de experiência, espaço amostral de uma experiência e casos possíveis.
Objetivo 2	Acontecimento de uma experiência, casos favoráveis de um acontecimento.
Objetivo 3	Tipos de acontecimentos: impossível, certo, elementar, composto.
Objetivo 4	Relação entre dois acontecimentos: acontecimentos disjuntos e acontecimentos complementares.
Objetivo 5	Experiências aleatórias de acontecimentos elementares equiprováveis.
Objetivo 6	Calculo de probabilidade segundo a regra de Laplace e termos associados ao acontecimento segundo o valor de probabilidade: provável, igualmente provável, certo, impossível.
Objetivo 7	Relação de desigualdade para a probabilidade de um acontecimento A $(0 \leq P(A) \leq 1)$ e Relação de igualdade para acontecimentos complementares ($P(A) + P(\bar{A}) = 1$).
Objetivo 8	Relação de igualdade para acontecimentos disjuntos ($P(A) + P(B) = P(A \cup B)$).
Objetivo 9	Tabelas de dupla entrada e diagramas de árvore
Objetivo 10	Cálculo de probabilidades segundo a noção de probabilidade frequencista.

No caso do programa de Matemática costarriquenho, estes tópicos são abordados desde o primeiro ciclo do Ensino Básico, embora enfatizados de modo distinto em cada nível

partindo de uma base intuitiva nos níveis inferiores até chegar a uma formalização matemática a partir da Teoria de Conjuntos nos níveis superiores. Os tópicos enfatizados ao nível de 10.º ano no programa de Matemática costarriquenho estão organizados por categorias de conhecimentos a atingir, apresentados na tabela a seguir.

Tabela 2.2 Tópicos da Unidade de Probabilidade do 10.º ano (MEP, 2012, p.435-437).

Conhecimento associado ao tópico	Tópicos
Conhecimento 1	Relações entre acontecimentos • União • Interseção • Acontecimentos disjuntos e complementares.
Conhecimento 2	Regras básicas das probabilidades: • Axiomas básicos. • Relação de igualdade para acontecimentos disjuntos. $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$. • Relação de igualdade para acontecimentos complementares $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Em relação a recursos possíveis e necessários para a abordagem de conceitos probabilísticos referentes a estes tópicos estipulados em ambos os programas, o programa de Matemática costarriquenho aponta para a tecnologia, destacando a sua utilização para a aprendizagem da Probabilidade como meio de apoio para o aluno visualizar propriedades que, sem tecnologia, seria muito difícil identificar (MEP, 2012). No caso do programa português, salienta-se que estes instrumentos tecnológicos devem ser usados de maneira adequada, isto é, para compreender certos conceitos ou procedimentos, mas sem substituir a prática do cálculo de aqueles problemas cujas resoluções mediante os métodos analíticos sem tecnologia desenvolvem certas capacidades necessárias no aluno (ME, 2013). Neste sentido, ambos os programas aludem à tecnologia como um recurso mediador para a compreensão do conceito e não como um fim para a resolução de tarefas matemáticas.

Por sua parte, Franklin et al. (2007), salientam que a utilização da simulação é de particular importância para que o aluno consiga uma interpretação dos conceitos partindo da

estimação de probabilidades, pois esta permite que o aluno se centre na natureza do conceito e não nos cálculos, podendo observar graficamente caraterísticas que o definem, as quais dificilmente pode observar só com os cálculos. Desta forma, a simulação permite a abordagem de experiências aleatórias através de modelos visuais que ajudam o aluno a ter uma ideia do conceito matemático em estudo (NCTM, 2014).

Assim, as orientações curriculares apontam para um ensino da Probabilidade orientada a promover a motivação no aluno com novos recursos, onde os cálculos não deixam de ser importantes para atingir certas habilidades, mas o objetivo central fica na análise e interpretação de dados e na compreensão do conceito.

2.2 Ensino e aprendizagem dos conceitos básicos de Probabilidade

Estudos em educação probabilística permitem evidenciar que a Probabilidade é um campo de estudo jovem em comparação com outras áreas da Matemática (Shaughnessy, 1992), onde o conceito de probabilidade tem sido tratado de diferentes formas conforme o passar dos anos, tomando significados atribuídos segundo as condições de um contexto específico (Batanero, 2006). Em referência a estes significados adquiridos, a história permite observar como os primeiros significados foram de caráter intuitivo (Batanero, 2005) até se atingir uma noção de probabilidade ligada à aleatoriedade através dos jogos do acaso (Pedro, Santos & Cotrim, 2014) e chegar às noções e conceitos básicos de Probabilidade.

Desta forma, vemos que o conceito de probabilidade é complexo, pois o seu formalismo tem estado ligado a outros conceitos como a aleatoriedade, incerteza e o acaso, e como consequência, nas aulas o conceito de probabilidade sustenta-se nas noções que o aluno tem destes três termos, em particular do termo fenómeno aleatório, o qual é introduzido no ensino formal para se referir à aleatoriedade (Serradó et al., 2005).

Oliveira (1990), descreve os fenómenos aleatórios como

> fenómenos naturais em que se supõe intervir o acaso, isto é, em que a partir do passado não se pode prever deterministicamente o seu futuro, mas para os quais se podem encontrar, em certas condições, taxas de realização constante, que poderão permitir certas previsões de índole global. (p.6)

Neste mesmo sentido, Ortiz et al. (2001) destacam que quando o aluno se inicia no estudo escolar da Probabilidade, já vivenciou noções de aleatoriedade a partir dos jogos e

circunstancias diversas da sua vida diária, contemplando experiências aleatórias que com frequência não têm o mesmo sentido que este aprende formalmente na sala de aula, evidenciando desta forma o caráter complexo do conceito de aleatoriedade.

Especificamente falando da relação entre aleatoriedade e o conceito de probabilidade, Martins (2011) carateriza a aleatoriedade como um meio para estudar a probabilidade, dando por sua vez a seguinte definição:

> A *probabilidade* é uma propriedade associada a um *fenómeno aleatório*, que se possa repetir um grande número de vezes, nas mesmas condições, tendo por base o facto de que a aleatoriedade presente produz um *padrão de comportamento*, ao fim de muitas repetições, isto é, à medida que o número de realizações da experiência aleatória, associada a um fenómeno aleatório aumenta, o comportamento do fenómeno torna-se «previsível»!!!. (p.2, itálico no original)

No que respeita a esta relação, Ortiz et al. (2001) fazem um estudo sobre os termos ligados à probabilidade e aleatoriedade, utilizados comummente nos livros de texto. Neste estudo os autores analisam dois manuais escolares usados para os processos de ensino-aprendizagem da Probabilidade, encontrando que existe uma diversidade de termos usados, tais como: acaso, incerteza, ganhar, provável, urna, dado, moeda, entre outros. A aprendizagem destes termos, como também de outros conceitos probabilísticos, por vezes é influenciada pelas crenças ou experiências incorporadas no contato direto dos alunos com a vida cotidiana, levando a que estes sintam certa resistência a compreender os conceitos quando os abordam formalmente na sala de aula (Ireland & Watson, 2009), dando origem a dois significados associados ao conceito de probabilidade: a noção intuitiva e a noção subjetiva. Didaticamente falando, surge primeiro a noção intuitiva e, após a pessoa experimentar uma vivência com a noção subjetiva esta ideia intuitiva fica formalizada (Gómez, Contreras & Batanero, 2015). Assim, por exemplo, Amir e Williams (1999), no seu estudo referente ao papel do contexto no pensamento probabilístico das crianças, mencionam algumas crenças culturais que tendem a ter os alunos quanto os conceitos associados à Probabilidade. Entre estas crenças, os autores manifestam que alguns alunos tendem a achar que, na realização da experiência do lançamento de uma moeda, é mais provável obter "cruz" em vez do resultado "face", manifestando desta forma uma noção subjetiva da probabilidade.

Outros significados sobre o conceito de probabilidade têm surgido nos últimos três séculos, sendo de grande importância a noção clássica e a noção frequencista. Para Ortiz et

al. (2001), deve-se ter presente a diferença entre estas duas noções, pois são as consideradas atualmente nas orientações curriculares. Com respeito à noção clássica, Diaz et al. (1996) dão uma definição introduzida por Laplace na sua obra *Teoríe analytique des probabilités*, definindo a probabilidade como o número obtido a partir da razão formada pelo número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, sempre que todos os resultados sejam igualmente prováveis, fazendo referência neste sentido a resultados equiprováveis. Estes autores salientam ainda que a abordagem tradicional na sala de aula tem sido basada nesta noção clássica, no entanto, esta abordagem tem limitado o estudo da Probabilidade para o aluno, pois não permite trabalhar com sucessos não equiprováveis, levando a que o aluno possa apresentar dificuldades quando enfrenta novas tarefas (Oliveira, 1990), isto é, tarefas de diferente natureza onde não existe equiprobabilidade nos acontecimentos elementares.

Por seu lado, no que respeita à noção frequencista, Martins (2011), tal como Diaz et al. (1996), dão uma definição basada na lei dos grandes números, considerando a probabilidade frequencista como um valor fixo em torno do qual a frequência relativa de um acontecimento ou sucesso A tende a estabilizar após um grande número de repetições da experiência aleatória. Diaz et al. (1996) acrescentam ainda que "para o ensino elementar o enfoque frequencista é mais adequado na atribuição de probabilidades de fenómenos que têm uma forte evidencia experimental" (p. 25), querendo-se referir com experimental a fenómenos que se podem trabalhar na sala de aula, tais como: medir a altura de pessoas, o lançamento de um dado, entre outros.

Diversos autores (Batanero, 2002; Diaz et al., 1996; Oliveira, 1990) fazem referencia à probabilidade como uma função associada a certa axiomatização e formalização, e especificamente Oliveira (1990) alude à probabilidade como uma função que deve cumprir os seguintes axiomas:

1. $P(A) \geq 0$; A: acontecimento qualquer.
2. $P(U) = 1$; U: espaço amostral.
3. Se $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Estes axiomas têm vindo a dar à probabilidade o seu caráter formal, dependente de uma linguagem baseada na Teoria de Conjuntos, de onde se deduzem outras regras ou teoremas utilizados no cálculo de probabilidades.

Estes significados atribuídos à probabilidade que têm surgido através dos anos até nossos dias, estão sumariados por Batanero (2005) na tabela seguinte, onde inclui também os respetivos elementos que caraterizam cada significado.

Tabela 2.3 Significados atribuídos à probabilidade através da história (Batanero, 2005, p. 256)

Significado ou noção	Linguagem	Definições e propriedades
Intuitivo	-Ordinário	-Opinião -Crença.
Clássica	-Triângulo de Pascal. -Fórmulas combinatórias.	-Quociente de casos favoráveis e casos possíveis. -Equiprobabilidade de acontecimentos simples
Frequencista	-Tabelas e gráficos estatísticos -Tabelas de números aleatórios	-Limite das frequências relativas. -Caráter objetivo.
Subjetiva	-Expressão da probabilidade condicional	-Caráter subjetivo -Revisável com a experiência
Axiomática	-Simbologia de conjuntos	-Função mensurável

Na tabela anterior observa-se da primeira coluna que se tende a atribuir seis significados distintos ao conceito de probabilidade, cada um dos quais tende a usar distintos meios para transmitir ou identificar o seu uso (segunda coluna). No entanto, para poder dar uma definição de cada significado, utilizam-se outros conceitos ou elementos, quer matemáticos quer extra-matemáticos (terceira coluna).

Neste estudo de Batanero, a autora destaca que "tirando a aproximação intuitiva, os significados todos partilham os raciocínios de tipo indutivo" (p. 257), dando a perceber que só uma aproximação intuitiva da probabilidade não é suficiente para atingir raciocínio indutivo do aluno, mas que se faz necessária para introduzir a noção do conceito de

probabilidade, pois a noção intuitiva é a base daquilo que é aprendido pelo aluno desde os seus primeiros anos de ensino. A autora também salienta a importância de estudar a equiprobabilidade a partir da experimentação na sala de aula, com experiências concretas baseados na recolha de dados estatísticos, para logo trabalhar equiprobabilidade desde o ponto de vista teórico da noção clássica ou formal. Por seu lado, Parzys (1997) salienta a importância de dar atenção ao papel da articulação entre os campos estatístico e probabilístico, em particular a distinção entre as noções de frequência e probabilidade, de tal forma que o aluno não vá confundir estes dos conceitos, ainda que estejam muito ligados. Este aspeto é reforçado por Sharma (2016) que defende a importância de explorar as conexões entre as diferentes noções ou significados e os diferentes contextos onde podem ser mais úteis. Nesta mesma linha, Gonçalves (2014) salienta a relação direta entre a noção frequencista e a noção clássica, a qual fica estabelecida a través da relação entre a Estatística e a Probabilidade, pois a frequência relativa usada na Estatística descritiva também indica a probabilidade de ocorrer certo valor na amostra, dado que a probabilidade de um acontecimento ocorrer, no caso de um espaço amostral equiprovável, é calculada pela divisão do número de casos favoráveis de que o acontecimento ocorra pelo número de elementos do espaço amostral, que é justamente o que se faz quando se divide o número de elementos em cada classe pela frequência total.

Segundo Oliveira (1990), a partir de meados do século XX até nossos dias, os trabalhos feitos sobre Probabilidade no campo da investigação têm vindo a orientar-se por dois objetivos: 1) a pesquisa de novas aplicações em distintos campos da vida cotidiana, tais como: a física, economia, astronomia, saúde e educação, entre outras (Díaz et al., 1996); e 2) a melhoria da Educação Matemática. No que se refere a este último objetivo, diferentes autores têm feito recomendações sobre o ensino e a aprendizagem de distintas noções de probabilidade (Batanero, 2002, 2005, 2006; Diaz et al., 1996; Ortiz et al., 2001). Em particular, Batanero (2002) salienta que os teoremas matemáticos de limite da noção axiomática são difíceis de compreender e muito formalizados e, portanto, não é aconselhável a sua introdução no ensino primário ou secundário. Em vez disso, é desejável e possível o trabalhar com os alunos de estas idades algumas noções intuitivas sobre convergência experimental ou frequencista, ou inclusive a noção subjetiva com a noção frequencista de maneira conjunta (Inzunza, 2017), enquanto Diaz et al. (1996), nesta mesma linha mas

enfatizando mais a importância da noção formal, salienta que a Probabilidade não se tem tratado como deveria ser, pois se tem abordado com noções básicas ou erradicando-as quase por completo do currículo, trazendo problemas para o aluno na compreensão formal ou axiomática do conceito de probabilidade em anos posteriores.

Nos últimos anos, o interesse por investigar como é abordada a Probabilidade na sala de aula tem aumentado por parte de investigadores em Educação Matemática, orientando-se o dito interesse em duas distintas linhas de pesquisa: uma concentrada em crianças em idade escolar, e a outra concentrada em estudantes universitários e adultos (Garfield & Alhgren, 1988). Existe uma conexão entre estas duas linhas de pesquisa pois, segundo Diaz et al (1996), "resultados de inquéritos levados a cabo mostram que a maioria dos alunos entram na universidade com um conhecimento escasso ou nulo das noções probabilísticas e com erros na sua intuição profundamente arraigados" (p. 47), o que evidencia a necessidade de enfatizar a aprendizagem da Probabilidade nas aulas, como também uma investigação probabilística dirigida a jovens pré-universitários, isto é, alunos do ensino básico e secundário.

2.2.1 Teoria de Conjuntos e representações na aprendizagem da Probabilidade

Em parágrafos anteriores ficou evidente que há um conjunto de termos e noções associadas ao conceito de probabilidade que, abordados utilizando distintos termos matemáticos, interferem de alguma forma na aprendizagem do aluno.

Na atualidade, livros de probabilidade e manuais escolares recorrem à teoria de conjuntos como ferramenta para a abordagem da probabilidade formal ou axiomática, bem como da probabilidade clássica. Batanero (2002) referindo-se à probabilidade formal, destaca que,

> Não menos fundamental é a ideia devida a Kolmogorov de atribuir um conjunto (espaço amostral) de sucessos observáveis a cada experiência aleatória e representar cada sucesso possível como um subconjunto do espaço amostral, dando uma interpretação probabilística às operações com sucessos (…) e aplicar as potencialidades da álgebra de conjuntos para poder definir os demais sucessos, a partir dos sucessos elementais. (p. 14)

Desta forma, evidencia-se que a Teoria de Conjuntos tem vindo a servir como linguagem para trabalhar ambos os significados de probabilidade, clássica e formal, partindo da riqueza das operações e representações que fornece esta teoria.

A classificação dada por Gómez (2007) está orientada a categorizar os diferentes tipos de representações que comumente se apresentam na linguagem matemática, como sejam: simbólicas, algébricas, verbais ou gráficas. Em particular, as representações gráficas ajudam o aluno a avançar no seu entendimento matemático de conceitos e procedimentos, sendo os diagramas especialmente facilitadores de comunicação nas discussões de aula nas quais participa o aluno (NCTM, 2014). Um caso especial de diagramas de muita relevância são os diagramas de Venn, pois as representações de acontecimentos por meio destes simplificam a análise probabilística, reduzindo a dependência das fórmulas e visualizando mais fácil os elementos amostrais dos acontecimentos, como também a relação existente entre conceitos vários (MEP, 2012).

A figura a seguir (fig. 2.1) apresenta as distintas representações simbólicas, verbais e gráficas (diagramas de Venn) usadas na Teoria de Conjuntos para trabalhar conceitos básicos de Probabilidade. Junto a cada representação encontra-se o respetivo termo a que faz referencia, tanto a nível de Probabilidade como da Teoria de Conjuntos.

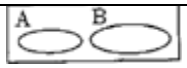
Linguagem em Probabilidade	Linguagem na Teoria de Conjuntos	Representação simbólica	Representação em Diagrama de Venn
Espaço de resultados	Conjunto universal	$\boldsymbol{\Omega}$	
Acontecimento	Subconjunto de $\boldsymbol{\Omega}$	$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$; etc	
Acontecimento impossível	Conjunto Vazio	$\emptyset$	
Não $\boldsymbol{A}$	Complemento de $\boldsymbol{A}$	$\mathbf{A}^{\boldsymbol{C}}$ ou $\overline{\boldsymbol{A}}$	
Ou $\boldsymbol{A}$ ou $\boldsymbol{B}$, ou ambos	União de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$	
Ambos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$	Interseção de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$	
$\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são mutuamente excludentes	$\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são disjuntos	$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$	
Se $\boldsymbol{A}$ então $\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A}$ é subconjunto de $\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$	

Figura 2.1. Termos e representações da Teoria de Conjuntos associados à aprendizagem dos conceitos básicos da Probabilidade.

Desta tabela observa-se que para um mesmo conceito básico de Probabilidade (espaço de resultados, acontecimento, entre outros) podem-se encontrar diversas representações na Teoria de Conjuntos, sendo fundamental que o aluno se envolva na realização de tarefas com distintas representações que lhe permitam fazer conexões com conhecimentos anteriores ou contextos familiares, promovendo por sua vez a sua discussão na sala de aula (NCTM, 2014). As representações gráficas têm grande importância na sala de aula, pois, ajudam o aluno na sua compreensão de conceitos e procedimentos e, portanto, guiam a sua aprendizagem. No entanto, tem que se ter presente a linguagem usada na Matemática formal, pois muitas vezes

difere da forma como o aluno utiliza os termos associados a estas representações gráficas (Nacarato & Grando, 2014; Paul & Hlanganipai, 2014).

2.2.2 Dificuldades na aprendizagem da Probabilidade

Nesta seção centro-me na caraterização das principais dificuldades que surgem na aprendizagem dos alunos quando se confrontam com conceitos básicos de Probabilidade. Em particular menciono a classificação de erros que apresentam os alunos como consequência imediata destas dificuldades (Seminara, Del Puerto & Minnaard, 2006).

Vários autores salientam dificuldades associadas à aprendizagem dos conceitos probabilísticos, entre estes Nacarato e Grando (2014) destacam que um dos grandes problemas apresentados pelos alunos, quando tentam resolver tarefas de Probabilidade, está relacionado com a interpretação da tarefa, onde a presença de lacunas na linguagem e utilização dos termos dificultam a interpretação do enunciado. Paralelamente, Groth, Butler e Nelson (2016) no seu estudo descrevem alguns mal-entendidos apresentados por alunos com idades entre os onze e doze anos e propõem atividades como jogos e organizadores visuais de probabilidade numa turma para que os alunos superem estes mal-entendidos. Em particular, estes autores salientam que o aluno comummente faz uma interpretação errada de alguns termos referidos a tipos de acontecimentos probabilísticos, tais como: impossível, certo, improvável, e menos provável.

Para Garfield e Alhgren (1988), a aprendizagem do conceito de probabilidade focada na memorização de fórmulas ou procedimentos sem formar uma representação interna do conceito, gera dificuldade no aluno quando trabalha em tarefas de diferentes níveis de dificuldade ou em contextos diferentes dos trabalhados na sala de aula.

Munisamy e Doraisamy (1998) realizam um estudo onde identificam que o grupo de alunos com idades entre 12 e 15 anos apresentam dificuldade para intuir os conceitos de acontecimentos complementares e a sua lei aditiva de probabilidade, bem como o conceito de probabilidade clássica. Os autores enfatizam que ainda que o aluno seja capaz de calcular frequências relativas, este não é capaz de aprofundar o significado matemático atribuído ao dito conceito.

Também para Garfield e Alhgren (1988) existem três razões pelas quais o aluno apresenta dificuldades em perceber as ideais fundamentais da Probabilidade, sem importar o nível em que se encontre:

i. O aluno apresenta problemas com os conceitos de números racionais e proporcionalidade;
ii. As experiencias na vida cotidiana interferem com a compreensão dos conceitos formais de Probabilidade;
iii. O aluno tende a não gostar dos tópicos de Probabilidade por ter sido exposto a uma introdução altamente formal e abstrata dos conceitos.

Pela sua parte, Mavshovitz–Hadar, Zaslavksy e Invar (1987), citado por Rico (1995), fazem uma classificação de erros, percebido o erro como a presença de um esquema cognitivo inadequado (Abrate, Pochulo & Vargas, 2006; Socas, 1997). Para estes autores, os erros na Probabilidade podem ser causados por:

1. Dados mal utilizados: tratamento incorreto dos dados por causas como ter dados estranhos, dados não contemplados na resolução do problema, leitura incorreta do enunciado, mistura de dados de várias variáveis, entre outros;
2. Interpretação incorreta da linguagem: são erros devidos a dificuldades com a linguagem da matemática, seja linguagem textual ou simbólica;
3. Inferências não válidas logicamente: mau uso da lógica-matemática na aplicação das suas leis, o que leva o aluno a fazer inferências não válidas;
4. Teoremas ou definições deformadas: teoremas, regras ou leis que são aplicados pelo aluno de modo incorreto ou que simplesmente não são válidos;
5. Falta de verificação da solução: bom planeamento do processo, mas má resposta devido a falta de verificação do resultado no contexto da tarefa;
6. Erros técnicos: todos os erros devidos a um cálculo incorretos ou má utilização de algoritmos;

Erros e dificuldades estão relacionados e imersos no processo de aprendizagem do aluno, permitindo o seu estudo conhecer como é que este está a aprender. Além disso,

> não podemos esquecer que a deteção de erros e preconceitos como parte das ideias prévias do aluno é um primeiro passo para a implementação de um modelo de ensino construtivista da matemática, permitindo identificar as áreas que são mais propensas a erros graves, e contribui positivamente no processo de aprendizagem e construção do conhecimento matemático nos alunos (Abrate et al, 2006, p.11).

Para Batanero (2002) "a construção do cálculo de probabilidades não tem sido simples, e é só o esforço e aprendizagem a partir da análise dos próprios erros o que leva o progresso da ciência" (p.10). Portanto, o programa em Matemática precisa ser avaliado constantemente em termos de saber quanto tempo se deveria dedicar à aprendizagem e compreensão dos conceitos probabilísticos antes de praticar procedimentos, pois o aluno tende a aprender a realizar os cálculos, mas a interpretação dos resultados fica desligada do conceito, o que leva o surgimento de erros (Munisamy & Doraisamy, 1998).

Desta forma, os erros podem ser ferramentas para retirar bastante informação referente à aprendizagem do aluno, principalmente se forem usados para garantir o seu progresso nessa aprendizagem, partindo da identificação das dificuldades que levam a ditos erros, para além de se poderem usar como meios para fazer a discussão na sala de aula.

2.2.3 Simulações e modelos no ensino e aprendizagem da Probabilidade

Por modelo entenderemos "uma representação abstrata, simplificada e idealizada de um objeto real, um sistema de relações ou um processo evolutivo, dentro de uma descrição da realidade" (Henry, 2001, p. 151). Os modelos jogam um papel importante na Probabilidade pois tanto a nível teórico como prático estes aparecem na análise de dados, permitindo fazer predições sobre o comportamento do objeto matemático em estudo (Batanero, 2009). No caso da aprendizagem, a criação e o trabalho com modelos na sala de aula favorece a ação investigativa do aluno (Burak, 2004).

A simulação está diretamente relacionada com a modelação, pois quando se faz simulação está-se a simplificar e a matematizar a realidade, fixando aspetos e hipóteses matemáticas da realidade que se querem simular (Fernandes, Batanero, Contreras & Diaz, 2009; Martins, 2011; MEP, 2012), tal como acontece no caso do processo de modelação matemática (Dantal, 1997).Por simulação considera-se ainda o processo artificial utilizado para imitar ou substituir o comportamento de um fenómeno aleatório, utilizando, de um modo

geral, *números aleatórios* para estimar o comportamento de dito fenómeno (Batanero & Godino, 2003; Martins, 2011).

Vários são os autores que enfatizam as vantagens da simulação como meio para o ensino e aprendizagem da Probabilidade. Por um lado, Fernandes et al. (2009) salientam a importância da simulação para a resolução de problemas probabilísticos que levam muito trabalho mediante métodos analíticos, além de incentivar o aluno através da exploração, pois o trabalho de problemas complexos pode ser resolvido hoje em dia com técnicas simples proporcionadas pela simulação. Por outro lado, a simulação permite ao aluno não só pensar em modelos concretos a partir da semelhança do modelo representado com a simulação, sem necessidade de recorrer a um modelo concreto da vida real, mas também construir um modelo matemático a partir de inferências que este possa tirar da realização de uma experiência aleatória simulada várias vezes com utilização de pouco tempo (Biehler, 2003).

Munisamy e Doraisamy (1998) defendem que a aprendizagem da Probabilidade deveria ser guiada através de ferramentas como a simulação, e não através de abstrações, aproveitando a representação da realidade que esta fornece e o seu potencial para promover métodos exploratórios de aprendizagem. No entanto, Erickson (2006) salienta a importância de fazer simulação tanto com tecnologia como sem tecnologia, de forma que axiomas que sustentam a definição do conceito e outros elementos matemáticos necessários para o definir não se limitem ao uso da simulação, mas se que a simulação seja um meio para aprofundar as representações e propriedades ligadas ao conceito, em vez de realizar cálculos grandes que demoram muito tempo onde já se conhece o processo analítico de resolução.

Desta forma, a simulação converte-se num meio para o aluno aprender num cenário diferente, com contacto idealizado da realidade, explorando teorias, e aplicando seus conhecimentos para completar tarefas complexas de forma dinâmica (Redecker, 2013).

2.3 Tecnologia como recurso na aprendizagem da Probabilidade

As atuais exigências da sociedade são diferentes das de algumas décadas atrás. Mudanças territoriais, aumento da população, necessidade de satisfazer pedidos das pessoas para as suas diferentes atividades, entre outros aspetos, são parte das razões que têm levado o ser humano a recorrer às TIC como ferramentas indispensáveis para enfrentar as exigências do seu dia-a-dia (Redecker, 2013).

A Matemática, para muitos alunos, é uma disciplina que oferece muitos desafios e dificuldades de aprendizagem. As razões frequentemente apontadas para estas dificuldades prendem-se com "a falta de comunicação nas aulas de Matemática é muito grande e a interação é quase inexistente" (Santos & Moita, 2009, p.3). Para além disso, "nesse processo parco de aprendizagem, todos os conceitos de Probabilidade são apresentados de forma bem tradicional", sem uso de outros recursos que poderiam facilitar a aprendizagem dos alunos desses conceitos que, pela sua abstração, se tornam difíceis de compreensão com uma aprendizagem tradicional.

Como meio para romper este tradicionalismo, têm-se procurado recursos que ajudem a mediar o ensino e aprendizagem não só da Probabilidade, mas também de diversos tópicos matemáticos na sala de aula. Neste sentido, as tecnologias surgem como um recurso alternativo na aula de Matemática promovendo novas práticas educativas e aprendizagens através de: o envolvimento do aluno para que se concentre na exploração e interpretação de dados, a possibilidade de ter mais representações ao seu alcance para resolver uma tarefa, visualizar conceitos abstratos, automatizar cálculos, trabalhar com simulações, investigar problemas da vida real, e promover a colaboração e participação da turma toda (Ben-Zvi, 2000; Chance, Ben-Zvi, Garfield & Medina, 2007).

Para Erickson (2006), o computador como meio tecnológico particular, é um recurso de relevância na aprendizagem da Probabilidade através de simulações, principalmente por três razões:

a) O computador permite fazer muito mais ensaios de uma simulação do que poderíamos imaginar fazer sem tecnologia;
b) O computador ajuda o aluno a subir a escada de abstração, pois permite-lhe focar-se na distribuição amostral e não em cada experiência individual, facilitando a sua compreensão do conceito como um todo do processo de simulação;
c) A rapidez do computador para fazer cálculos permite que o aluno observe e aprenda coisas novas sobre os fenómenos que está a estudar e, em geral, melhore a sua inferência, pois a dinâmica e as distintas representações do simulador no computador permite ao aluno concentrar-se na análise dos resultados representados.

No entanto, devem-se considerar também algumas limitações do trabalho com o computador. Esta e outras ferramentas tecnológicas, entre as quais as calculadoras, geram números pseudo-aleatórios. Esta caraterística destes meios tecnológicos leva a que os comportamentos específicos que estes descrevem não sejam ajustados perfeitamente nos modelos teóricos, podendo isso levantar dificuldades no aluno. Desta forma, é necessário manter um equilíbrio entre simulações de experiências aleatórias feitas com tecnologia e simulações com modelos concretos (Fernández et al., 2009).

Dificuldades como a não familiarização com o *software* e a resistência do aluno a usar tecnologia para resolver problemas cujo cálculo é direto e fácil manualmente (Coutinho, 2011), como também a dificuldade para identificar o valor teórico de probabilidade, partindo do valor estimado experimentalmente dado pela frequência relativa (Inzunza, 2017), podem apresentar-se quando se trabalha com o computador e com tecnologia em geral, pelo que se deve fazer uma utilização pertinente destes recursos na sala de aula.

Nesta investigação, o computador terá um papel predominante na resolução das tarefas para trabalhar os distintos conceitos de Probabilidade, em particular a noção de probabilidade frequencista, pois

> A introdução do computador na sala de aula permite-nos abordar na Escola a probabilidade desde este ponto de vista, devido a que não torna difícil, nem em esforço nem em tempo, simular um grande número de lançamentos de um dado, por exemplo, ou outras experiências similares. (Diaz et al, 1996, p. 25)

Desta forma o computador vem a ser um recurso físico de trabalho poderoso para que o aluno aprenda conceitos de Probabilidade, por exemplo usando software dinâmico como Geogebra (MEP, 2012), sempre e quando a sua utilização considere as suas limitações e, sobretudo, as suas potencialidades, neste caso, a facilidade para promover a exploração de conceitos básicos probabilísticos a partir de simulação.

2.3.1 Geogebra na aprendizagem dos conceitos básicos de Probabilidade

Na atualidade existem muitos instrumentos ou *software* para o ensino-aprendizagem da Estatística e Probabilidade (Mercado, 2013; Osorio et al., 2013), sendo especialmente relevantes os educacionais de natureza dinâmica, como o Geogebra (MEP, 20012).

Del pinto (2013) salienta algumas vantagens de usar o Geogebra na sala de aula:

- É gratuito, livre e de código aberto: pode ser usado por qualquer pessoa e escola sem precisar de alguma licença. Isso ajuda a não ter que investir recursos económicos na compra do *software* pelo centro educativo;
- É multiplataforma: funciona com diferentes sistemas operativos, ao mesmo tempo que existem versões para android no caso da pessoa desejar trabalhar com o software num dispositivo como tablets, telefone, entre outros. Isso ajuda a não ter problemas com a compatibilidade do *software* nos dispositivos;
- É fácil de usar: a sua interface *standard* e a linguagem de código (GeogebraScript) tornam de fácil utilização o *software*, ao mesmo tempo que existem manuais e formações sobre o uso do mesmo impulsionadas por coletivos de professores e universidades;
- É simples, mas potente: A grande quantidade de ferramentas que dispõe (folha de cálculo, visualização gráfica e algébrica do objeto matemático, cálculo simbólico, estatístico e probabilístico) para trabalhar distintos tópicos (álgebra, geometria, estatística, probabilidade, funções, análise) permite o usuário ter diferentes instrumentos para analisar um determinado conceito.

Inzunza (2014) salienta a importância do uso do Geogebra para o trabalho de conceitos de Estatística e Probabilidade, em comparação com a utilização de outros software dinâmicos, enfatizando que

> Uma caraterística adicional que distingue o Geogebra de outras ferramentas é a possibilidade de converter em ficheiros as construções matemáticas realizadas e inseri-las numa página web ou num material educativo. Desta maneira, é possível manipular certas variáveis ou parâmetros para visualizar comportamentos dos conceitos envolvidos. Em Probabilidade e Estatística, onde a variabilidade é um fenómeno intrínseco de seus conceitos, isto é particularmente relevante. (p.3)

Especificamente na aprendizagem da Probabilidade, o Geogebra permite trabalhar as simulações de experiências aleatórias (Mercado, 2013), pois a partir das ferramentas que dispõe como os seletores, botões, folha de cálculo e a folha gráfica, o aluno pode realizar

variações dos dados de entrada de uma determinada tarefa, levando a que os valores dos cálculos solicitados se atualizem, contribuindo para que o aluno participe na construção do seu próprio conhecimento (Inzunza, 2014). Assim mesmo, estas variações permitem que se trabalhe simultaneamente com os três registos de representações que contêm o Geogebra: algébrico, gráfico e folha de cálculo (Mercado, 2013), pelo que o aluno trabalha a visualização e compreensão de diferentes representações de um mesmo conceito (Ferreira et al., 2011) a partir de "explorar, provar ideias e conjeturar em forma visual, eficiente e dinâmica" (Mercado, 2013, p.310).

Mercado (2013) no seu trabalho utiliza alguns exemplos do portal do Geogebra para mostrar como usar o Geogebra didaticamente para o ensino e aprendizagem de conceitos probabilísticos no secundário. Em particular, o autor apresenta ficheiros para a exploração da regra de Bayes e a aproximação da distribuição normal a partir da distribuição binomial, comparando a resolução analítica com a resolução com o Geogebra. Estes ficheiros podem adaptar-se para a exploração de conceitos básicos como a regra da união e complemento das probabilidades. O autor também utiliza diagramas de Venn para trabalhar a exploração de propriedades probabilísticas, tal como mostra a figura a seguir:

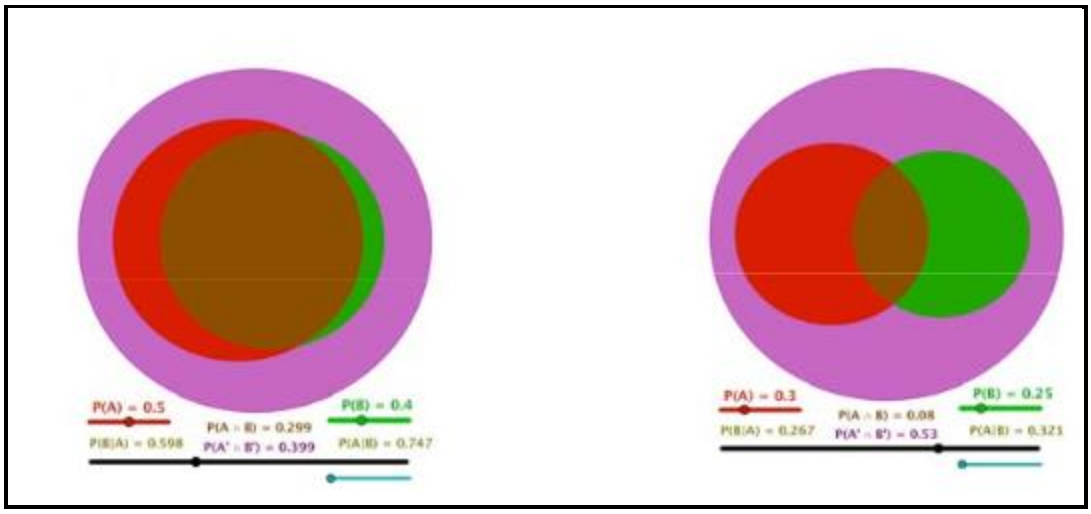


Figura 2.2 Diagrama de Venn e exploração de propriedades de probabilidade.

Neste caso, a partir de variações nos dados de entrada, $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$, ao deslocar os seletores que representam os valores de probabilidade, ajustam-se imediatamente os valores das outras probabilidades.

Nesta mesma linha, Inzunza (2014) salienta a utilização da calculadora probabilística, que o Geogebra integra, para a exploração de propriedades de distribuições probabilísticas, apresentando a seguinte figura referente à distribuição normal e a sua relação com a binomial:

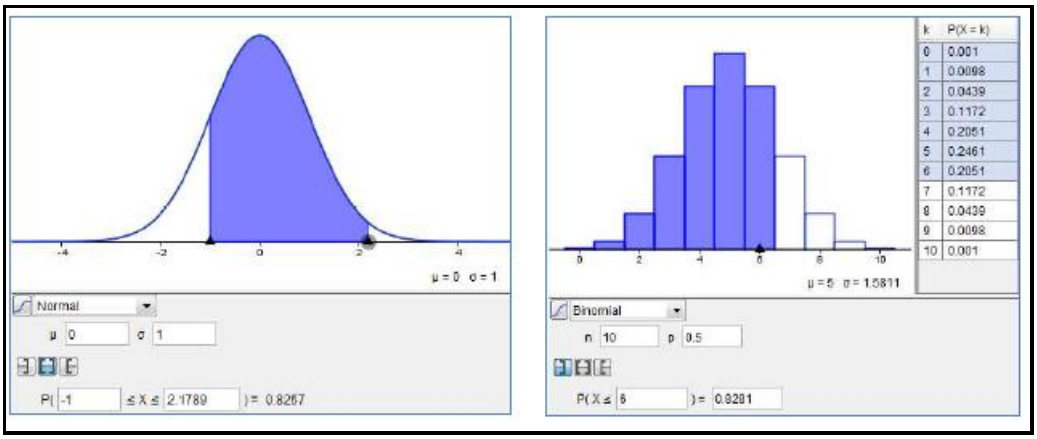


Figura 2.3 Aproximação da distribuição binomial à normal.

A mesma autora enfatiza no seu estudo a importância do Geogebra para o estudo de conceitos básicos de Probabilidade, destacando a utilização da folha de cálculo e a folha gráfica do Geogebra para estudar a lei dos grandes números e a sua aplicação para estabelecer a relação entre a probabilidade clássica e a probabilidade frequencista.

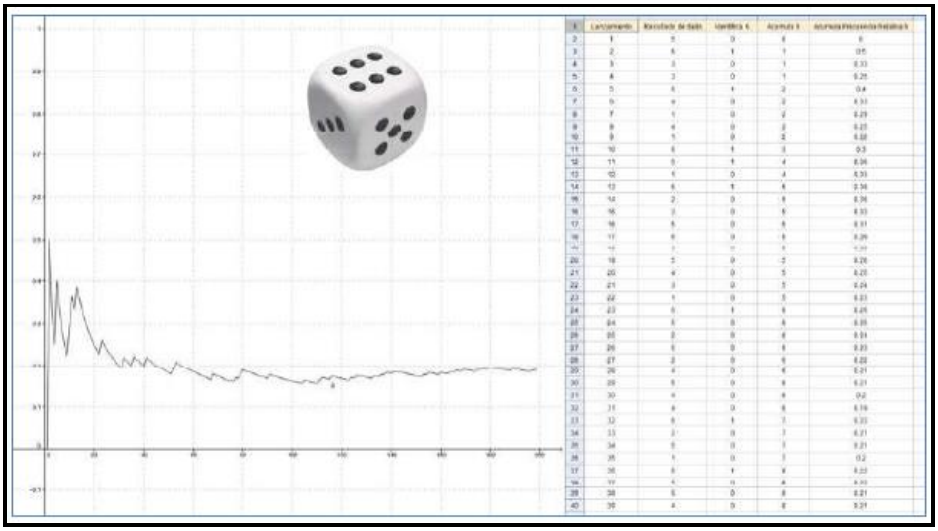


Figura 2.4 Simulação do lançamento de um dado para inferir a Lei dos grandes números.

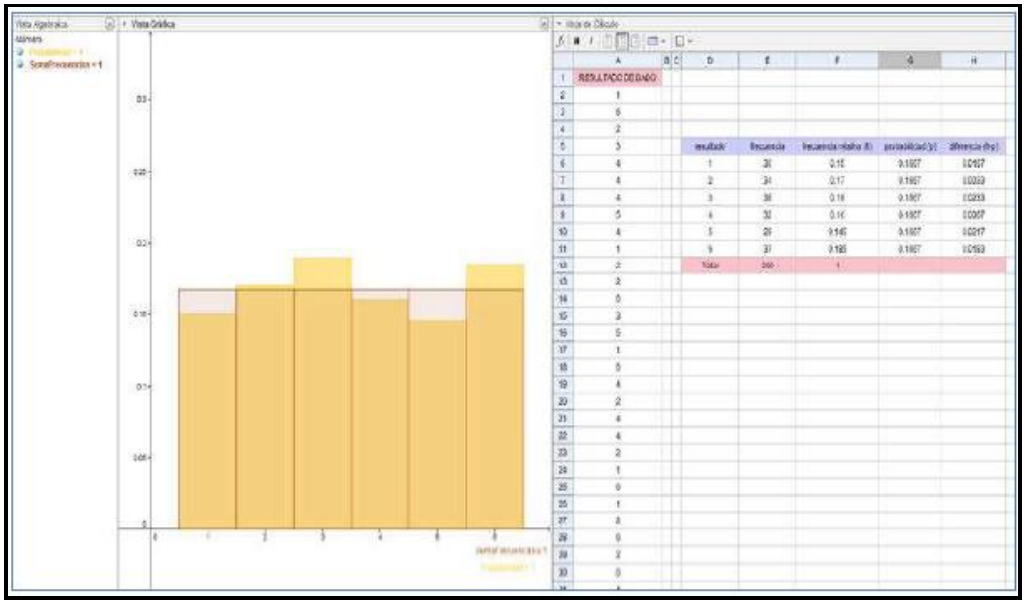


Figura 2.5 Simulação de um dado para obter a probabilidade a partir da noção frequencista.

As duas figuras anteriores mostram a utilidade do Geogebra para trabalhar o conceito intuitivo da lei dos grandes números (fig. 2.4) e introduzir a noção frequencista de probabilidade (fig. 2.5). As figuras mostram a simulação da experiência do lançamento de um dado uma 'grande' quantidade de vezes, observando que o valor da probabilidade para qualquer acontecimento elementar (obter uma face com um número específico) tende a aproximar-se para o valor teórico 0,16.

Desta forma, o uso do computador com simulações de probabilidades apoiadas com o Geogebra favorece abordagens de aprendizagem mais criativas, colaborativas, dinâmicas e construtivas (Redecker, 2013), onde a partir de múltiplas ferramentas e funções como a simulação de experiências aleatórias, o acesso a modelos probabilísticos estabelecidos e as construções partindo da linguagem de programação, convertem-se numa potente ferramenta para facilitar a aprendizagem da Probabilidade.

Capítulo 3

METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO

Neste capítulo descrevo e justifico a metodologia seguida no trabalho de investigação. Começo por apresentar as opções metodológicas gerais, o meu papel como investigador e os participantes do estudo, para depois descrever os processos de recolha e análise de dados.

3.1 Opções metodológicas

3.1.1 Abordagem qualitativa e paradigma interpretativo

Os objetivos da investigação são compreender de que modo os alunos costarriquenhos do 10.º ano aprendem os conceitos básicos de Probabilidade, num quadro de uma experiência de ensino apoiada em tarefas exploratórias com recurso ao Geogebra. Constitui ainda uma preocupação relevante perceber quais os contributos do Geogebra, como recurso, para a aprendizagem destes conceitos. Atendendo a estes objetivos e tendo em consideração que o objetivo e as questões de investigação têm que se articular com a abordagem metodológica a usar (Santos, 2000), recorri a uma metodologia de investigação qualitativa. Para Taylor e Bogdan (1987), este tipo de abordagem centra-se na realidade social de um grupo particular de pessoas, neste caso os alunos, considerando-os não como variáveis isoladas, mas como um todo que forma parte de um contexto particular, onde as situações que surgem entre todos os participantes da investigação têm importância. No caso particular do investigador, estes autores salientam que este é considerado como um individuo sensível aos próprios efeitos que possa causar na sua interação com os sujeitos alvo da investigação, tentando agir de forma natural e deixando de lado as suas crenças, isto é, o investigador preocupa-se por compreender o sujeito de estudo sem interferir no seu comportamento.

Além dos aspetos anteriores, outra caraterística da investigação qualitativa, a qual se justifica na flexibilidade salientada por Taylor e Bogdan (1987), é a possibilidade de o investigador poder fazer melhorias e aprofundamento às questões e métodos e instrumentos de recolha de dados durante todo o processo investigativo, através das suas observações durante cada intervenção do trabalho de campo (Robinson & Savenye, 2001). Esta

flexibilidade mencionada anteriormente foi relevante no momento de aplicar o estudo exploratório, permitindo considerar ajustes às questões previamente estabelecidas das tarefas e à abordagem em geral das mesmas através da aplicação das primeiras intervenções de trabalho na sala de aula.

Bogdan e Biklen (1994), por seu lado, destacam cinco caraterísticas de uma investigação qualitativa que se identificam neste estudo:

1. *A fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal*. Nesta investigação o ambiente natural corresponde à sala de aula, onde eu como investigador recolhi dados sobre as aprendizagens dos alunos.
2. *A investigação é descritiva*. O interesse na investigação centra-se na recolha de dados descritivos, os quais tentam capturar a maior quantidade de pormenores descritivos das pessoas envolvidas no estudo, neste caso dos alunos.
3. O *investigador preocupa-se mais com o processo do que com os resultados ou produtos*. O meu interesse, como investigador, esteve centrado nos processos de resolução dos alunos das tarefas propostas, assim como nas discussões de sala de aula que se levaram a cabo a partir destas tarefas, pois delas puderam-se obter outros indícios de significados que os alunos atribuem aos conceitos básicos de Probabilidade que não foram evidenciados explicitamente nas resoluções escritas das tarefas. Como parte importante destes processos, levados a cabo pelos alunos nas tarefas, identificaram-se algumas dificuldades que manifestam nos tópicos de Probabilidade, evidenciando desta forma que, mais que o resultado matemático da tarefa, importam os caminhos de resolução das mesmas.
4. O investigador *tende a analisar os seus dados de forma indutiva*. Dada a complexidade do ambiente social, em particular, do ambiente educativo, a investigação qualitativa parte do particular para o geral. **N**esta investigação parto de um ambiente de sala de aula com alunos que possuíam particularidades distintas, tentando identificar essas particularidades relativas à forma como compreendem conceitos básicos de Probabilidade, para desta forma obter um

conjunto de resultados que me levem a tirar conclusões em resposta às questões inicialmente formuladas.

5. *Os participantes são de importância vital para atingir os objetivos*. Tal como foi destacado por Tamayo (2011) em parágrafos anteriores, os significados atribuídos pelos alunos convertem-se em pontos de referência da investigação e, portanto, o aluno converte-se no centro do investigador a partir das distintas interpretações que estes dão aos conceitos básicos de Probabilidade trabalhados.

Dado que o estudo é centrado nas aprendizagens dos alunos enquanto atores sociais do contexto educativo, especificamente em como eles interpretam e atribuem significado aos diversos conceitos abordados, através das suas ações, a investigação assume uma natureza interpretativa (Gonzalez, 2001; Latorre, Del Rincón & Arnal, 1998). O paradigma interpretativo, em comparação com outros paradigmas qualitativos, tem a caraterística principal de que o investigador assume um papel relevante. Para Erickson (1986), este paradigma permite que o investigador estude abertamente o fenómeno em estudo com os mecanismos que considerar necessário, não tendo que se ajustar a uma estrutura específica de recolha de dados imposta inicialmente pelo paradigma. Quanto à análise dos dados, é realizada a partir das interpretações do investigador sobre as interpretações feitas pelo individuo observado sobre o objeto em estudo, segundo a organização que considere mais viável, sendo, portanto, o investigador e o sujeito investigado intérpretes e construtores do conhecimento (Usher, 1996).

Desta forma, interpretar as estratégias ou procedimentos e as dificuldades dos alunos no que respeita à aprendizagem, são parte dos elementos que permitem justificar a metodologia do paradigma interpretativo (Alvarez & Gayou, 2003) e parte dos elementos a considerar neste estudo investigativo como meio de responder às questões do estudo.

3.1.2 Experiência de ensino

Na realização de uma investigação em educação, o contacto com os alunos pode-se levar a cabo de distintas formas, algumas sem necessidade de intervenção direta do investigador ou inclusive sem uma intenção de ensino, mas apenas de observar certos elementos de estudo do aluno. O termo ‘experiência de ensino’ designa a realização de um modo de ensino que está longe das práticas de ensino vigentes, conduzido frequentemente com um pequeno

número de alunos e envolvendo uma monitorização cuidada de forma a captar o processo de aprendizagem 'em ação' e as mudanças que têm lugar como resultado desse processo (Borasi, 1992). Nesta perspetiva, numa experiência de ensino o investigador está consciente de que para uma noção matemática, cada aluno desenvolve conhecimentos diferentes segundo a forma como tem aprendido essas noções (Brousseau, 2000), pelo que o investigador não se limita a observar se os alunos estão aprendendo, mas foca-se a observar como cada aluno está desenvolvendo as suas aprendizagens através desse ensino.

No que respeita à presente investigação, o seu carater metodológico interpretativo leva-me a optar por uma experiencia de ensino através da qual poderei ter uma maior proximidade com o aluno, com o objetivo de interpretar a forma como este trabalha as suas aprendizagens probabilísticas, permitindo por sua vez investigar o potencial do recurso tecnológico do Geogebra como uma inovação educacional proposta numa perspetiva de inquirição naturalista (Borasi, 1992).

Nesta perspetiva, uma experiência de ensino, enquanto abordagem metodológica, privilegia a interpretação na procura de significados e visa descrever e interpretar os processos de desenvolvimento dos fenómenos sobre os quais se debruça, induzidos por meio de intervenções planificadas (Shulman, 1986). Estas intervenções, assim como também as tarefas que orientam a experiência de ensino, são descritas no capítulo da Experiência de Ensino, o qual apresenta a planificação total de abordagem do estudo principal.

3.1.3 Papel do investigador

A natureza qualitativa e interpretativa da investigação levou-me, como investigador, a ser um observador participante inserido num contexto de aula, observando como os alunos vão percebendo os distintos conceitos durante todo o processo de trabalho da experiência de ensino.

Para garantir o anterior, negociei com a professora da turma, no início da experiência de ensino, ser eu o encarregado de aplicar as tarefas, assumindo assim um duplo papel, de investigador e de professor. Cabe salientar que, antes da aplicação da experiência de ensino, a professora da turma estava habituada a trabalhar com os alunos mediante uma metodologia de ensino tradicional, onde apresentava e explicava os tópicos no quadro, numa aula

expositiva, e na aula a seguir a professora resolvia também no quadro as tarefas do manual de matemática previamente designadas para trabalho de casa, tendo os alunos um papel pouco ativo em sala de aula, embora fossem avaliados sumativamente pela resolução destas tarefas. Durante a experiência de ensino, a professora da turma esteve sempre presente, mas o seu papel foi de observadora não participante, intervindo na turma após o final da experiência para lhes lecionar aulas práticas dos tópicos de Probabilidade trabalhados com a experiência de ensino.

Durante a aplicação da experiência de ensino, como professor, dei indicações prévias à realização de cada tarefa, necessárias para que o aluno iniciasse o seu trabalho esclarecido do que se pretendia, assim como também realizei a formalização dos conceitos trabalhados após fazer a discussão em grande grupo de cada tarefa. Para além disso, tive a responsabilidade de monitorizar o trabalho autónomo dos alunos, tendo o cuidado de intervir cautelosamente quando algum aluno apresentava alguma dúvida nas tarefas, não lhe dando diretamente a resposta, mas questionando-o de forma a permitir observar o seu modo de pensar em referência nos conceitos em estudo. Por outro lado, como investigador tive um papel de observador participante (Guest, Namey & Mitchell, 2013) no trabalho dos alunos, tirando notas de campo no final da cada aula para considerar na aplicação das tarefas a seguir e para recolher dados do contexto em geral.

3.2 Fases da investigação

Como em toda a atividade humana planificada, e em particular na investigação, deve existir uma proposta cronológica que guie o investigador no seu estudo. Neste caso, o estudo foi desenvolvido entre julho de 2016 e julho de 2017, em três fases. A primeira fase - Indagação de antecedentes teóricos -, consistiu numa revisão de literatura para aprofundar os meus conhecimentos relativos às temáticas envolvidas no trabalho, como o ensino e aprendizagem da Probabilidade, simulação, estratégias de ensino com recurso a *software* educacional como o Geogebra e acerca da abordagem metodológica a usar. Esta fase serviu também para apoiar a conceção de um estudo exploratório, implementado na fase seguinte. Esta segunda fase - Estudo exploratório - envolveu a planificação de uma proposta pedagógica, incluindo um conjunto de tarefas exploratórias com recurso ao Geogebra visando a aprendizagem da Probabilidade e a sua aplicação em sala de aula com alunos

portugueses. Este estudo exploratório, apresentado no capítulo 4, teve como objetivo testar as tarefas da experiência de ensino antes de serem usadas no estudo principal numa turma com alunos costarriquenhos. A análise dos dados empíricos recolhidos no estudo exploratório permitiu reformular as tarefas e planificar a experiência de ensino que foi implementada na terceira e última fase deste processo investigativo. A análise dos dados recolhidos no estudo principal e as conclusões que emergiram de todo o trabalho realizado constituíram o final desta fase e, consequentemente, do estudo.

A opção de aplicar a proposta de tarefas em dois países diferentes - Portugal e Costa Rica - surgiu da minha motivação e oportunidade por estudar dois contextos geográficos diferentes onde tive oportunidade de trabalhar com alunos, ainda que não tenha objetivos comparativos. Tive, assim, possibilidade de refletir mais aprofundadamente sobre a problemática do estudo, atendendo à maior diversidade de dados empíricos recolhidos e analisados, bem como no refinamento das tarefas propostas a aplicar na experiência de ensino.

A tabela a seguir mostra um resumem cronológico das fases da investigação:

Tabela 3.1. Cronograma das fases da investigação

Cronograma de desenvolvimento das fases da investigação																
	2016						2017									
FASES	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez	Jan	Fev	Mar	Abr	Ma	Jun	Jul	Ago	Set	Out
Indagação de antecedentes teóricos																
Estudo exploratório																
Estudo principal																

3.3 Participantes

Os participantes do estudo que tem por base a experiência de ensino foram os 28 alunos (14 rapazes e 14 raparigas) de uma turma de 10.^{0} ano de um colégio de ensino secundário, na localidade de San Pedro de Montes de Oca, San José, na Costa Rica. A facilidade para o investigador se deslocar à instituição, a flexibilidade na instituição para ensinar os tópicos do programa em diferente ordem da planificação, a disponibilidade de um laboratório de computadores para o trabalho com *software* matemático e o nível cognitivo da turma foram elementos considerados para a escolha intencional destes alunos. Os alunos da turma tinham

idades compreendidas entre os 15 e os 16 anos, e apresentavam bom desempenho académico em anos anteriores, evidenciado na prova que realizaram para ingressar neste colégio, ao finalizar o 9.º ano da Educação Geral Básica. Estes alunos são considerados trabalhadores, em particular na sala de aula, tendo revelado desenvoltura na realização das tarefas propostas, o que permitiu aprofundar as discussões em torno das mesmas. Além disso, segundo a opinião da professora, quem me informou sobre o desempenho da turma com base na sua experiência de trabalhar nas aulas com eles, os alunos destacam-se como alunos disciplinados, que seguem as indicações propostas nos tempos estabelecidos e gostam de tópicos que os desafiem no seu trabalho, critérios que, em geral, pude comprovar efetivamente durante a realização da proposta pedagógica. Embora os alunos estivessem acostumados a trabalhar individualmente, por opção da professora titular da turma, revelaram trabalhar bem a pares na resolução das tarefas propostas.

Em termos gerais, e considerando os resultados do questionário aplicado antes da experiência de ensino para obtenção de dados caracterizadores da turma (Anexo B8), a maior parte dos alunos gostam de Matemática e de trabalhar com tecnologia (80% em ambos os casos) mas têm tido pouco contacto com *software* educativo de Matemática, sendo que só 20% dos alunos afirmaram ter trabalhado antes com o Geogebra. Além disso, aproximadamente 50% dos alunos afirmaram considerar a Probabilidade como um tópico fácil, o qual evidencia que alguns dos alunos estão suscetíveis a apresentar mais dificuldades do que outros.

Os alunos foram informados sobre a realização do estudo, nomeadamente, sobre os seus objetivos, os métodos e instrumentos de recolha de dados e a importância da sua participação para a realização do estudo. Para isto, foi solicitada autorização aos encarregados de educação dos alunos e à diretora da instituição mediante autorizações escritas. Todos os alunos apresentaram as autorizações dos pais assinadas antes de começarem a experiência de ensino.

3.4 Métodos e instrumentos de recolha de dados

Os métodos e instrumentos de recolha de dados usados procuraram aceder à diversidade de aprendizagens dos alunos da turma em estudo e às suas tentativas de dar significado aos conceitos de Probabilidade abordados (Coutinho, 2011). Dado que pretendo recolher informações sobre o desempenho dos alunos num contexto envolvendo observação ‘em

ação', o estudo não se limita a analisar o seu desempenho no final da sua participação na experiência de ensino, mas foi necessário recolher dados durante a realização das tarefas propostas e sobre as suas perceções do trabalho realizado.

Desta forma, a recolha dos dados empíricos foi realizada no decorrer do 1.º semestre do ano 2017, utilizando diversos instrumentos de recolha de dados, selecionados de entre as técnicas mais usadas na metodologia qualitativa, que se complementam (Bogdan & Biklen, 1994): (i) observação participante com registo áudio e vídeo das aulas realizadas e a elaboração de notas de campo; (ii) recolha documental das resoluções dos alunos das tarefas propostas para trabalhar com o Geogebra, de gravações de imagens específicas do trabalho com o Geogebra, do teste diagnóstico e do teste de avaliação final; (iii) um questionário final para considerar a opinião dos alunos sobre a Matemática e a Probabilidade e alguns aspetos relacionados com a experiência de ensino, incluindo o uso do Geogebra.

Observação participante. No decorrer da experiência de ensino recorri à observação participante (Guest et al., 2013), desenvolvida em diferentes momentos da experiência de ensino e com diferentes níveis de intervenção, quer nas discussões, quer durante o processo de trabalho dos alunos. A partir da observação participante pude identificar condutas manifestáveis no agir e o ritmo de trabalho dos alunos conforme trabalhavam nas aulas, mas também pude ter contato direto com estes para aceder a certa informação específica (Guest et al., 2013) sobre as suas aprendizagens, como assim também esclarecer aspetos das suas resoluções das tarefas, quer durante o trabalho autónomo quer durante as discussões em grande grupo.

O registro das observações foi levado a cabo através de notas de campo (Anderson & Arsenault, 2002; Bogdan & Biklen, 1994), usadas para descrever aspetos como: ambiente físico da sala de aula e Escola em geral, aprendizagens individuais e coletivas dos alunos, ambiente social e humano, e artefactos que utilizam os alunos para trabalhar na sala de aula. Estas observações realizaram-se durante toda a intervenção da aula, tendo sido feita uma observação não participante antes de iniciar a experiência para conhecer os alunos, ter uma noção do nível da turma, modo de trabalho, e possíveis intervenções dos alunos nas discussões, como assim também para me apresentar os alunos e que estes tivessem um primeiro contacto com a minha presença como um individuo a mais na sala de aula.

Recolha documental. Para Denscombe (2003) os documentos são uma fonte essencial de dados para os investigadores de Ciências Sociais, qualquer que seja o campo da sua investigação. Neste estudo os documentos forneceram uma base forte, constituindo-se a recolha documental um dos métodos mais importantes para obter dados sobre as aprendizagens dos alunos quanto aos conceitos probabilísticos trabalhados, incluindo as principais dificuldades que manifestaram, tanto a nível matemático como a nível de emprego do Geogebra. Nesta investigação, a recolha documental considerou as resoluções dos alunos num teste diagnóstico, nas cinco tarefas propostas com recurso ao Geogebra e num teste final de avaliação. Estas tarefas, incluindo a sua metodologia de trabalho na sala de aula e objetivos de aprendizagem de cada uma, são apresentadas no capítulo da Experiência de Ensino.

O teste diagnóstico (anexo A1) foi aplicado no início da intervenção da proposta, após a primeira observação. Segundo, Yang e Lin (2015), o teste diagnóstico permite interpretar as crenças ou ideias equivocadas do sujeito em estudo, e neste caso, o teste foi aplicado com o objetivo de evidenciar conhecimentos conceptuais prévios do aluno de alguns tópicos ligados à Probabilidade, necessários para o trabalho nas tarefas da experiência de ensino. Este teste constou de dez questões: duas questões referentes a conteúdos de estatística descritiva (tabelas de frequência e gráficos), uma questão sobre representações com diagramas de Venn, e sete questões referentes a conceitos básicos de Probabilidade. No caso das questões sobre estatística descritiva e diagramas de Venn, estas foram desenhadas para avaliar se os alunos tinham os conhecimentos prévios necessários para compreender os conceitos de Probabilidade a serem trabalhados, enquanto que as últimas questões sobre conceitos básicos de Probabilidade procuravam identificar se os alunos já tinham conhecimento de algum dos conceitos a trabalhar.

Quanto às cinco tarefas com recurso ao Geogebra (Anexos A2-A6), este recurso tecnológico e facilitador da aprendizagem foi de grande importância, permitindo abordar a exploração e introduzir conceitos a partir das questões planeadas, de forma a potenciar a aprendizagem (Mercado, 2013). Os registos das resoluções dos alunos nestas tarefas permitem observar as aprendizagens realizadas pelos alunos dos conceitos de Probabilidade durante a experiência de ensino e as dificuldades que manifestavam com alguns conceitos

O teste de avaliação final (Anexo A7) foi realizado na última aula da experiência de ensino, tendo como objetivo avaliar o desempenho dos alunos nos conceitos matemáticos abordados nas cinco tarefas trabalhadas com recurso ao Geogebra, como também permitir comparar estes resultados com os resultados do teste diagnóstico. Neste caso colocaram-se quatro questões abertas, cada uma focada em avaliar a interpretação do conceito, para além de cálculos.

Questionário. O questionário veio a constituir um instrumento mais orientado a conhecer as opiniões dos alunos quanto à Matemática, ao modo como os conteúdos de Probabilidade foram abordados e ao uso de tecnologia com o Geogebra, aspetos que não se podiam observar diretamente com as resoluções das tarefas e dos testes, que eram orientados para os conceitos matemáticos.

Neste estudo foram atendidos os principais passos referidos por Anderson et al. (2002) para a elaboração de um questionário: determinar as questões a serem abordadas, estabelecer os itens, criar uma sequência para os itens, realizar o desenho do questionário, criar um teste piloto do questionário, e o desenvolvimento de uma estratégia para a recolha e análise dos dados. O questionário (anexo A8) foi aplicado na última aula da experiência de ensino, imediatamente após os alunos terminaram o teste de avaliação. Este permitiu obter alguns dados estatísticos descritivos (Martin, 2004) sobre aprendizagens não evidenciados através das resoluções da recolha documental. Quanto ao desenho das questões, foram consideradas questões abertas e questões fechadas (Martin, 2004), distribuídas pelas três partes que estruturaram o questionário: a primeira parte é formada por duas questões abertas referentes a dados demográficos dos alunos como a idade e o género. Uma segunda parte contém 11 questões fechadas apresentadas numa tabela, onde se pedia para selecionar o nível de concordância em relação às afirmações formuladas, sendo 1 o indicador referente ao menor nível de concordância (“discordo totalmente”) e 5 o indicador referente ao maior nível de concordância (“concordo totalmente”). Os onze itens da tabela foram organizados em três seções com o objetivo de dar uma coerência e ordem às questões e facilitar a sua posterior análise, contendo questões de nível geral sobre a Matemática e a Probabilidade, seguidas por questões sobre experiência com o uso de tecnologia e do Geogebra antes de trabalhar se abordar a experiência de ensino, e concluindo com questões relativas à dinâmica de aula

empregada durante toda a experiência. Finalmente, a terceira parte, era constituída por quatro questões abertas onde o aluno podia dar o seu ponto de vista referente ao uso do Geogebra como recurso para a aprendizagem da Probabilidade.

3.5 Análise de dados

Após a recolha de dados prossegui para o passo seguinte de uma investigação qualitativa, a análise de dados. Uma análise de dados implica tomar decisões sobre o método a usar e como organizar e dividir todo o material recolhido em categorias, bem como identificar tendências ou padrões nessas divisões feitas, procurar relações num nível de abstração mais elevado entre essas tendências ou padrões, e apresentar os dados em forma clara e coerente (Ludke, 2013).

Procurando um tipo de análise que se ajustasse à metodologia da investigação, mas também que respondesse às questões de estudo, quanto à possibilidade de interpretar aprendizagens como investigador, decidi escolher uma análise descritiva e interpretativa dos dados (Wolcott, 2009), onde descrevo o que o aluno fez e apresento a minha interpretação das razões que podem estar na base do aluno decidir seguir tal processo de resolução.

Para levar a cabo a análise descritiva-interpretativa das aprendizagens dos conceitos probabilísticos e as dificuldades evidenciadas pelos alunos nessas aprendizagens, organizei a análise em três categorias: conceitos associados à aleatoriedade, conceitos associados ao espaço amostral e conceitos associados aos significados clássico e frequencista de probabilidade e a sua relação com equiprobabilidade. Para cada uma destas categorias de análise são definidos descritores associados ao significado atribuído ao conceito de probabilidade. A tabela a seguir mostra a referida organização de análise.

Tabela 3.2. Categorias de análise de conceitos

Dimensões de análise	Descrição
Conceitos associados à aleatoriedade	-Identificação de experiências aleatórias e deterministas. -Identificação de termos coloquiais associados à aleatoriedade.
Conceitos associados ao espaço amostral	-Determinação de casos totais, casos favoráveis e o espaço amostral de uma experiência aleatória. -Identificação de acontecimentos a partir do valor numérico de probabilidade ou da representação em diagramas de Venn do(s) acontecimento(s): elementar, composto, certo, impossível, provável, equiprováveis, disjuntos e complementares. -Inferência de propriedades da probabilidade: igualdade da união para acontecimentos disjuntos e não disjuntos, e igualdade para acontecimentos complementares.
Conceitos associados aos significados clássico e frequencista de probabilidade e a sua relação com a equiprobabilidade	-Inferência da regra de probabilidade a partir do significado clássico ou frequencista. -Identificação de equiprobabilidade a partir do significado clássico ou frequencista de probabilidade. -Determinação de probabilidades usando o conceito de probabilidade clássico ou frequencista.

Estas três categorias de análise foram definidas considerando os objetivos da investigação e também as questões utilizadas nas tarefas. Os descritores associados a cada conceito, por seu lado, foram definidos procurando responder os objetivos de aprendizagem, abordados no estudo exploratório e no estudo principal. Ambos, categorias e descritores, fazem referência a elementos da teoria indagada quanto à aprendizagem da Probabilidade. A primeira categoria faz referência aos conceitos que não definem Probabilidade, mas são relacionados com as primeiras ideias ou crenças que fundamentam o conceito de probabilidade (Batanero, 2002, 2005; Serradó et al., 2005). A segunda categoria faz referência aos conceitos básicos de Probabilidade associados à álgebra e representações da Teoria de Conjuntos (Batanero, 2002). Finalmente, a última categoria faz referência aos significados de Probabilidade abordados formalmente em ambos os programas de Matemática (MEP, 2012; ME, 2013) e como estes afetam a abordagem da equiprobabilidade (Sharma 2016), significados salientados por vários autores (Batanero, 2005; Diaz et al; Martins, 2011; Ortiz et al., 2001;) e descritos na tabela 3.2 (Batanero, 2005).

Quanto ao uso do Geogebra, faço uma análise considerando os principais contributos e limitações no trabalho dos alunos para o alcance dos objetivos de aprendizagem e, em geral, como recurso tecnológico para a aprendizagem dos conceitos probabilísticos trabalhados.

Para isso, faço uma análise das cinco tarefas apoiadas com o Geogebra, primeiro focada nos contributos de cada ficheiro do Geogebra, considerando para isso a teoria indagada quanto a contributos do Geogebra para: a exploração e construção de conceitos (Inzunza, 2014), inferência de propriedades probabilísticas mediante diferentes representações associadas a um mesmo conceito (Mercado, 2013) e o papel que o aluno reconhece ao *software* para o trabalho dos conceitos probabilísticos abordados (Redecker, 2013).

A análise das aprendizagens e dificuldades é evidenciada através de excertos das resoluções dos alunos e de diálogos obtidos das transcrições das discussões coletivas das tarefas em sala de aula. Para efeitos de manter o anonimato dos alunos, são utilizados nomes fictícios para cada aluno da turma. Nas aprendizagens e dificuldades dos conceitos probabilísticos alude-se a excertos das suas resoluções com o nome do(s) aluno(s), e a seguir a tarefa e questão específica da tarefa que faz referência dita resolução (nome(s) do(s) aluno(s). T#.Q#). No caso particular dos contributos e limitações do Geogebra, são consideradas algumas imagens do ecrã correspondentes a momentos específicos de trabalho do aluno, assim como também as respostas dadas pelos alunos ao questionário. No caso destas imagens do ecrã, são referidas mencionado o nome do ficheiro da simulação exemplificado, o nome(s) do(s) aluno(s), e a tarefa que faz referencia (nome de ficheiro. Nome(s) do(s) aluno(s). T#)

Para obter validade no estudo, considerei contribuições de diferentes alunos, sendo possível ser qualquer deles um bom candidato para evidenciar aprendizagens sobre os conceitos estudados (Walker, 1980), tentando deste modo, abranger a diversidade de aprendizagens observadas pelos alunos na resolução das tarefas. Procurei transmitir com cada diálogo ou imagem uma aprendizagem única ou saliente de um aluno em relação com os demais alunos da turma, ou uma aprendizagem de um aluno que representasse aprendizagens comuns a vários alunos. Quanto às discussões, serviram para obter algumas interpretações de aprendizagens probabilísticas particulares não evidenciadas nas resoluções das tarefas elaboradas pelos alunos.

Desta forma, a metodologia da análise de dados, para além de considerar os objetivos de aprendizagem dos alunos estabelecidos nas tarefas e a diversidade de dados obtidos, também estabelece uma articulação com as questões da investigação de modo a responder-lhes (Sampieri et al., 2010).

Capítulo 4

ESTUDO EXPLORATÓRIO

Neste capítulo descrevo o estudo exploratório realizado. Começo por apresentar os seus objetivos, contexto e opções metodológicas. Concluo com os principais resultados do estudo e os seus contributos para o estudo principal.

4.1 Objetivo

O estudo exploratório pretende contribuir para estruturar o estudo principal, sendo o seu principal objetivo a avaliação das tarefas que são usadas na experiência de ensino que suporta o estudo principal, focada em identificar aspetos na sua estrutura e conteúdo que possam dificultar ou facilitar grandemente as aprendizagens dos alunos. A realização de tarefas de exploração foi a forma escolhida para trabalhar os conceitos de Probabilidade na sala de aula, dado o facto das tarefas se centrarem no descobrimento e na compreensão do conceito, em vez da manipulação de fórmulas, procurando também ter acesso às aprendizagens dos alunos relativamente às interpretações que estes fazem dos diferentes conceitos trabalhados e a sua dinâmica de abordagem com o Geogebra. Desta forma, este estudo exploratório pode confirmar que as tarefas construídas, e que são propostas para os alunos durante a experiência de ensino, serão pertinentes e necessárias para ter uma fonte rica de evidência numa investigação em cognição matemática. Para além disso, também permitiu salientar quais os principais focos de interesse da análise a seguir no estudo principal.

4.2 Opções metodológicas

O foco deste estudo está na aprendizagem dos alunos quando se envolvem na realização de tarefas de investigação com Geogebra e na identificação dos potenciais ganhos educacionais de tal atividade, assim como também nas dificuldades que possam surgir. Assim, considero adequado recolher informações sobre o desempenho dos alunos através de um contexto que possa ser observado ‘em ação’, de forma a produzir uma interpretação do fenómeno essencialmente descritiva e fundamentada nos dados empíricos. Para isso, considero no estudo exploratório uma abordagem metodológica qualitativa interpretativa, onde o papel do investigador foi de relevância (Bogdan & Biklen, 1994; Usher 1996, Latorre

et al., 1998; Gonzalez, 2001) para identificar as aprendizagens e dificuldades evidenciadas pelos alunos nas tarefas propostas.

Como investigador, o meu papel foi de observador participante (Guest et al., 2013), embora o nível de participação tenha sido diferente segundo a etapa da intervenção. Durante a realização das tarefas e discussões coletivas tive que interagir constantemente com os alunos, quer para ter acesso a interpretações que estes faziam de conceitos, quer para esclarecer alguma dúvida das tarefas ou promover a sua discussão. No entanto, nas primeiras duas aulas tive um papel mais passivo como observador não participante, para conhecer o contexto de sala de aula e recolher dados referentes ao trabalho dos alunos, nomeadamente, a sua participação na sala de aula e o seu desempenho na resolução de tarefas e nos momentos de discussão, bem como a forma de trabalho da professora da turma.

4.3 Contexto e Participantes

Este estudo foi desenvolvido com alunos portugueses de uma turma do 9.º ano, entre novembro de 2016 e janeiro de 2017, precisando de um total de onze aulas de 45 minutos para aplicar as tarefas da proposta de pedagógica. A turma era formada por 8 raparigas e 15 rapazes com idades compreendidas entre os 14 e 16 anos, sendo que alguns deles provinham de um contexto social desfavorecido. Em geral, a turma caraterizava-se por ter tido bom desempenho académico nos anos anteriores, $7.^0$ e $8.^0$ anos, e por apresentar um desempenho médio no decorrer deste ano letivo em que se aplicou o estudo. Quanto ao trabalho em sala de aula, as aulas tinham uma natureza expositiva, com momentos de trabalho prático e, antes acabar a aula, a professora designava os alunos tarefas do manual escolar para, na aula a seguir, solicitar a uns quantos alunos para resolverem no quadro algumas das tarefas designadas, e com isto avaliava em parte o desempenho deles. Só uma parte dos alunos teve participação ativa nas discussões das tarefas neste estudo, possivelmente por não estarem habituados a estes momentos de trabalho. Os alunos estavam acostumados a trabalhar a pares nas aulas da professora, no entanto, isto em vez de promover o trabalho em equipa, permitia que os pares falassem muito de assuntos externos ao trabalho na sala de aula.

4.4 Planeamento da proposta pedagógica

Previamente à aplicação das tarefas da proposta pedagógica, tive a oportunidade de observar o trabalho de sala de aula dos alunos e da professora da turma em duas aulas, como

também para me apresentar à turma toda. Após estas duas observações comecei as intervenções da proposta de tarefas. A seguir são apresentadas as tarefas, nomeadamente, os seus objetivos e o seu planeamento ao longo da implementação da proposta pedagógica.

4.4.1 Descrição e objetivos das tarefas

Tarefa diagnóstico

A tarefa diagnóstico foi trabalhada individualmente, tendo os alunos que trabalhar 4 questões: duas de estatística descritiva, uma envolvendo representações de diagramas de Venn, e uma última sobre a noção associada ao conceito de probabilidade. Esta foi aplicada na primeira aula, sendo resolvida individualmente pelos alunos. A partir das resoluções dos alunos fiz uma discussão coletiva dos aspetos mais salientes destas resoluções, entre estes, as distintas formas de resolução, conexões entre conceitos, caraterísticas dos diagramas de barras e diagrama de Venn, e as dificuldades que aqui se manifestaram.

Objetivo específico: Evidenciar conhecimentos prévios conceptuais do aluno ligados a tópicos de Probabilidade, necessários para o trabalho da proposta pedagógica: tabelas de frequência, gráficos de barras, diagramas de Venn, noção de probabilidade.

Tarefa 1. Lançamento de dois dados

Esta tarefa foi trabalhada a pares e constou de duas partes, ambas relativas à simulação do lançamento de dois dados para estudar a experiência que consiste em registar a soma das pintas das faces. Na primeira parte o aluno é orientado a simular a realização da experiência um número pequeno de vezes, enquanto que na segunda parte já simula um número grande de vezes. A tarefa esteve, assim, dirigida à exploração dos conceitos de aleatoriedade, casos possíveis, casos favoráveis, acontecimento, e noção da lei dos grandes números.

Objetivos específicos:

- ✓ Identificar caraterísticas associadas à aleatoriedade a partir da simulação do lançamento de dois dados com o Geogebra;
- ✓ Identificar casos favoráveis, casos possíveis e acontecimentos a partir da simulação do lançamento de dois dados com o Geogebra.

Tarefa 2. Lançamento de um dado

Nesta tarefa os alunos trabalharam a pares, sendo orientados a explorar, mediante a simulação do lançamento de um dado, o conceito de equiprobabilidade. A tarefa, formada por duas questões, orienta o aluno a simular a experiência do lançamento de um dado primeiramente com um número pequeno de repetições da experiência e depois com um número elevado, procurando que o aluno visualize e infira que à medida que o número de repetições da experiência aumenta, as frequências correspondentes aos acontecimentos elementares estabilizam-se. Desta forma, a tarefa está orientada para explorar o conceito de equiprobabilidade.

Objetivo específico: Inferir o conceito de equiprobabilidade a partir de simulação com o Geogebra do lançamento de um dado.

Tarefa 3. Probabilidade clássica

Esta tarefa foi trabalhada a pares, e estruturada em três partes. Na primeira parte, a exploração com o Geogebra pretende introduzir o conceito da lei de Laplace, enquanto que nas outras duas partes pretendia-se consolidar este conceito, assim como também trabalhar conceitos ligados à classificação de um acontecimento segundo o valor da sua probabilidade, como sejam acontecimento impossível, acontecimento provável, e acontecimentos igualmente prováveis.

Na primeira parte o aluno é orientado a usar um ficheiro do Geogebra, representando barcos no mar, para identificar distintos tipos de acontecimentos e a atribuição de probabilidade como uma fração, levando ao conceito de probabilidade clássica. Na segunda e terceira parte, o aluno utiliza outro ficheiro do Geogebra para simular lançamentos de dois e três dados para calcular probabilidades mediante a regra de Laplace e classificar acontecimentos.

Objetivos específicos:

- ✓ Inferir a regra de Laplace a partir da representação gráfica de casos favoráveis, casos possíveis e acontecimentos compostos, utilizando uma grelha construída com a vista gráfica do Geogebra para a abordagem de experiências aleatórias de acontecimentos elementares equiprováveis;

- ✓ Identificar experiências aleatórias associadas a um mesmo modelo de probabilidade.
- ✓ Determinar a probabilidade de acontecimentos definidos ao lançar três dados e somar as pintas das faces a partir de simulação com o Geogebra para a consolidação da regra de Laplace;
- ✓ Determinar a probabilidade de acontecimentos definidos ao lançar dois dados e somar as pintas das faces a partir de simulação com o Geogebra para a classificação de acontecimentos em equiprováveis, mais prováveis e impossíveis.

Tarefa 4. Descobrindo propriedades de probabilidade

Esta tarefa foi trabalhada a pares, sendo estruturada em três partes. A primeira e a terceira foram implementadas sem recurso ao Geogebra, enquanto que a segunda parte esteve orientada para a exploração de propriedades de acontecimentos disjuntos, não disjuntos e complementares com o Geogebra.

Na primeira parte da tarefa, o aluno trabalhou o cálculo de probabilidades através de diagramas de Venn, representações que foram usadas na segunda e terceira partes da tarefa. Na segunda parte, o aluno trabalhou a simulação de acontecimentos disjuntos (complementares e não complementares) e não disjuntos, dirigido a inferir certos padrões ou leis a partir do registo de dados proporcionados por simular várias disposições dos diagramas de Venn. Por último, na terceira parte, o aluno foi orientado a consolidar os conceitos de acontecimentos disjuntos e complementares e a explorar leis de probabilidade que se podem estabelecer com estes tipos de acontecimentos, como são a lei da probabilidade para a união de acontecimentos e a lei de probabilidade para o complemento de acontecimentos.

Desta forma, a tarefa esteve dirigida à exploração dos conceitos de acontecimentos disjuntos e complementares e alguns teoremas que são estudados a partir do conceito de probabilidade clássica.

Objetivos específicos:

- ✓ Investigar os conceitos de acontecimentos disjuntos e acontecimentos complementares através da interpretação de diagramas de Venn;

- ✓ Inferir propriedades de probabilidade para acontecimentos disjuntos e complementares a partir de simulação com o Geogebra de diferentes disposições entre dois acontecimentos representados mediante diagramas de Venn;
- ✓ Utilizar as propriedades de acontecimentos disjuntos e complementares na resolução de tarefas ligadas a vida cotidiana para a consolidação das propriedades inferidas.

Tarefa 5. Probabilidade frequencista

Esta última tarefa foi trabalhada a pares e constou de duas partes, ambas relativas a exploração com simulação do Geogebra. Na primeira parte o aluno trabalhou com um ficheiro relativo ao lançamento de um dado, orientado a explorar o conceito de probabilidade frequencista a partir da noção de lei dos grandes números que foi abordada com o trabalho da primeira e segunda tarefas. Na segunda parte, trabalha-se com outro ficheiro de simulação do Geogebra, o qual permitia simular a experiência de lançar pontos dentro de um quadrado de dez unidades de comprimento de lado que tinha inscrito uma elipse. Esta segunda parte esteve dirigida a consolidar o conceito de probabilidade frequencista mediante uma tarefa contextualizada como foi o cálculo da área da elipse.

Objetivos específicos:

- ✓ Inferir o conceito de probabilidade frequencista a partir da simulação do lançamento de uma moeda com o Geogebra.
- ✓ Aproximar a área de uma elipse a partir da simulação com o Geogebra do lançamento de pontos no interior de um quadrado que contem uma elipse inscrita, para a consolidação do conceito de probabilidade frequencista.

Tarefa de avaliação

A tarefa era formada por quatro questões dirigidas a abranger os conceitos todos considerados na proposta pedagógica, sendo o foco de atenção o domínio do conceito e não os cálculos. A tarefa foi aplicada na última aula, de forma individual e com discussão coletiva da mesma.

- ✓ **Objetivo específico:** Avaliar o desempenho dos alunos na resolução de tarefas envolvendo os conceitos probabilísticos abordados nas tarefas com recurso ao Geogebra.

4.4.2 Planeamento das tarefas e seus objetivos

Na tabela a seguir resumo o trabalho realizado no estudo exploratório, apresentando o planeamento das tarefas ao longo das suas onze aulas.

Tabela 4.1. Planeamento das tarefas do estudo exploratório

Tarefa	Objetivos de aprendizagem	Atividade em sala de aula	Aula (data)
Teste diagnóstico Anexo B1		Aplicação do teste (45 min) Revisão e discussão do teste diagnóstico (45 min)	**AULA 1 (**10/11/2016) **AULA 2 (**17/11/2016)
Tarefa 1 Anexo B2	-Identificar experiências aleatórias e deterministas. -Determinar e identificar casos possíveis e casos favoráveis de um acontecimento em experiências aleatórias. -Estabelecer relações entre os elementos do espaço amostral de uma experiência aleatória respeito à repetição da experiência.	Aplicação da tarefa 1 (90 min) Discussão da tarefa 1 (30 min)	**AULA 3 (**23/11/2016) **AULA 4 (**24/11/2016)
Tarefa 2 Anexo B3	-Identificar acontecimentos equiprováveis.	Aplicação da tarefa 2 (40 min) Discussão da tarefa 2 (20 min)	**AULA 4** (24/11/2016) **AULA 4** (24/11/2016)
Tarefa 3 Anexo B4	-Inferir a regra de Laplace para o cálculo de probabilidades. -Determinar a probabilidade de um acontecimento usando a regra de Laplace. -Classificar acontecimentos a partir do valor numérico de probabilidade ou da representação em diagramas de Venn do(s) acontecimento(s): elementar, composto, certo, impossível, provável, equiprováveis, disjuntos e complementares.	Aplicação da tarefa 3 (60 min) Discussão da tarefa 3 (20 min) Entrega e indicações de tarefas 4 e 5 para elaborar na casa (10 min)	**AULA 5 (**30/11/2016) **AULA 5 (**30/11/2016) **AULA 5 (**30/11/2016)
Tarefa 4 Anexo B5	-Inferir propriedades de probabilidade para a união de acontecimentos disjuntos e não disjuntos, como também de acontecimentos complementares. -Aplicar as propriedades da probabilidade na resolução de tarefas.	Discussão da tarefa 4 (15 min)	**AULA 6 (**13/12/2016)
Tarefa 5 Anexo B6	-Inferir a lei dos grandes números para o cálculo de probabilidades. -Determinar probabilidades a partir da noção frequencista de probabilidade, segundo a situação.	Discussão da tarefa 5 (15 min)	**AULA 6 (**13/12/2016)
Teste de avaliação Anexo B7		Aplicação de teste (60 min) Discussão do teste (20 min)	**AULA 7** (19/1/2017) **AULA 7** (19/1/2017)

Da tabela 4.1 pode-se observar que foram utilizados onze blocos de aula de 45 minutos para o estudo exploratório. A tarefa 4 e a tarefa 5 foram realizadas pelos alunos em período

extra-letivo, devido à extensão de tempo que os alunos precisaram para a realização das tarefas anteriores na sala de aula, quer por algumas dificuldades técnicas relativas aos computadores, quer por dificuldades dos alunos na resolução das tarefas com o Geogebra, as quais não tinham sido previstas.

4.5 Recolha e Análise de dados

4.5.1 Recolha de dados

A recolha de dados considerou a observação participante, um teste diagnóstico dirigido a diagnosticar conceitos prévios necessários para atingir a aprendizagem dos conceitos de Probabilidade a trabalhar, a recolha documental baseada nas tarefas aplicadas com apoio do Geogebra e dirigidas a evidenciar aprendizagens de conceitos probabilísticos, e finalmente um teste de avaliação das aprendizagens.

Neste estudo foi valorizado o papel da observação pois através dela procurou-se identificar aspetos metodológicos usados nas discussões e nas tarefas aplicadas que não facilitaram a dinâmica de trabalho e, portanto, deverão ser considerados na melhoria da proposta pedagógica para ser considerados no estudo principal. Durante a observação tiro notas de campo, com o objetivo de registar informações pormenorizadas sobre os factos observados e descrições de episódios respeitantes às atividades desenvolvidas pelos alunos. O trabalho de observação é complementado com os registos escritos produzidos pelos alunos durante a exploração das tarefas propostas. Além disto, os registos elaborados por mim contemplam ainda reflexões sobre aspetos que, a meu ver, se revelam importantes para uma melhor planificação e condução das aulas do estudo principal.

Tendo em consideração os objetivos deste estudo exploratório, opto por uma análise descritiva e interpretativa (Wolcott, 2009) dos dados, focada em dois propósitos. Primeiro, determinar se as tarefas permitem o acesso às expressões de cognição matemática dos alunos e o papel que desempenham no desenvolvimento das suas aprendizagens. Depois, decidir quais os aspetos que emergem deste estudo e que devem ser seguidos ou reformulados no estudo principal.

A análise das aprendizagens e dificuldades dos conceitos probabilísticos, e da utilização do Geogebra para atingir estas aprendizagens, tem por base as aprendizagens e dificuldades

apresentadas por todos os alunos. As aprendizagens dos conceitos probabilísticos e dificuldades associadas são organizadas em três categorias de conceitos (Tabela 3.2), enquanto a análise do Geogebra salienta as potencialidades e limitações do software para a aprendizagem dos conceitos abordados. A análise procura responder os objetivos de aprendizagem, tentando, no caso de haver dificuldades do aluno, identificar quando estas dificuldades provêm do desenho da tarefa.

4.5.2 Resultados

1. **Aprendizagens ligadas à aleatoriedade**

No início do trabalho nas tarefas (tarefa diagnóstico), os alunos evidenciaram ter um conceito de probabilidade associado à regra de Laplace, o qual é uma consequência dos seus conhecimentos prévios associados as frações como percentagens.

A aleatoriedade foi um conceito que criou dificuldades iniciais ao determinar probabilidades. À medida que se foram realizando as tarefas, o conceito de aleatoriedade foi consolidado pela maior parte dos alunos, no entanto alguns dos alunos usavam a aleatoriedade incorretamente como um conceito que segue certo padrão não ligado a lei dos grandes números, mas ligado a evidenciar padrões a partir de um número pequeno de repetições de uma experiência. Esta dificuldade está associada ao facto do aluno usar o conceito de aleatoriedade com diferentes sentidos na sua vida cotidiana, empregando termos como "algo não previsível", "duvidoso", entre outros, os quais não abrangem todas as caraterísticas da aleatoriedade como conceito formal.

Por outra parte, todos os alunos foram capazes de identificar experiências aleatórias equivalentes, isto é, aquelas experiências que correspondem a diferentes fenómenos, mas cujo modelo de resolução é o mesmo. Esta facilidade do aluno para distinguir entre experiências equivalentes, foi fruto de ter este bem esclarecido os conceitos trabalhados previamente e fazer conexões entre os mesmos.

2. **Aprendizagens ligadas ao espaço amostral**

Todos os alunos foram capazes de inferir que à medida que se realizam mais repetições de uma experiência aleatória, obtêm-se mais casos favoráveis governados pelo acaso, inferência que foi consequência da sua interação com as representações gráficas proporcionadas pelo Geogebra. Para além disso, todos os alunos foram capazes de identificar

casos favoráveis de acontecimentos, mas alguns tiveram dificuldade para distinguir entre acontecimentos e casos possíveis. Esta dificuldade evidenciou-se após os alunos trabalharem com experiências aleatórias compostas, interpretando-se que os alunos consideram incorretamente os acontecimentos definidos na experiência serem os casos possíveis, quando na realidade isso só acontece quando se trabalha com experiências simples, pois neste caso os acontecimentos que definem a experiência aleatória são elementares. Esta dificuldade remete a que os alunos não estão acostumados a trabalharem com experiências aleatórias compostas, mesmo quando têm conhecimento do conceito de casos possíveis.

Quanto à classificação de acontecimentos, os alunos não tiveram dificuldades para identificar entre acontecimentos prováveis, impossíveis, disjuntos e equiprováveis. Quanto à inferência de propriedades associadas a tipos de acontecimentos, todos os alunos evidenciaram serem capazes de inferir a lei de probabilidade para acontecimentos complementares, e para deduzir a lei de probabilidade para a união de acontecimentos disjuntos. No entanto, tiveram alguma dificuldade para encontrar a relação no caso de identificar a lei para a união de acontecimentos não disjuntos, sendo que só um grupo encontrou a relação esperada $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$, enquanto que os outros estabeleceram $P(A) + P(B) > P(A \cup B)$, que mesmo sendo correta não era a inferência esperada. Esta dificuldade decorre do facto dos alunos se limitarem a interpretar os dados superficialmente, pois requer mais observação inferir a igualdade $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$ que a desigualdade $P(A) + P(B) > P(A \cup B)$.

3. Aprendizagens ligadas aos significados clássico e frequencista de probabilidade, e a sua relação com a equiprobabilidade

Os alunos evidenciaram não ter dificuldades para calcular probabilidades por meio da regra de Laplace, nem para interpretar que esta probabilidade pode representar-se como uma fração ou percentagem correspondente a uma parte com respeito ao todo, mas alguns tiveram dificuldade para estabelecer uma regra geral de como calcular a probabilidade em termos simbólicos, isto é, para representar a lei de Laplace usando linguagem probabilística. Esta dificuldade pode-se dever à falta de experiência para generalizar usando linguagem matemático, mas também porque a questão pode não ter sido específica em solicitar a resposta em termos simbólicos associados a casos favoráveis e casos possíveis.

Quanto à probabilidade frequencista, os alunos puderam deduzir sem dificuldade a relação entre a lei de Laplace e o comportamento das frequências dos acontecimentos elementares após realizada a experiência um número elevado de vezes, isto é, a lei dos grandes números. Não obstante, a turma toda teve dificuldades para utilizar o conceito de probabilidade frequencista na aplicação de contextos específicos, sendo os alunos capazes de identificar o conceito de probabilidade frequencista na tarefa proposta, mas não de o conectar com outros conceitos prévios para continuar na resolução da tarefa e responder ao solicitado, podendo ser isto um indicador da necessidade de uma maior orientação nas questões colocadas para atingir o objetivo.

Quanto a equiprobabilidade, este foi um conceito que os alunos todos alcançaram a inferir, mas limitado ao uso do significado clássico de probabilidade, consequência disso, a maior parte dos alunos consideravam equiprobabilidade a hora de calcular probabilidade, pois limitavam os seus raciocínios ao conceito clássico.

4. Aprendizagens ligadas ao uso do Geogebra

O Geogebra permitiu o aluno compreender os conceitos interiorizados com facilidade a partir das distintas representações do conceito e os dados proporcionados pela simulação com o Geogebra. A partir de distintas simulações os alunos puderam observar comportamentos de objetos (diagramas de Venn, grelhas, gráficos de barras, áreas de figuras no plano, etc) associados a conceitos probabilísticos podendo inferir propriedades para acontecimentos disjuntos, não disjuntos e complementares, inferir a regra de Laplace e a lei dos grandes números, observar comportamentos aleatórios de experiências, inferir o conceito de equiprobabilidade, identificar probabilidades de acontecimentos, e usar estas probabilidades para classificar acontecimentos. Não obstante, dificuldades houveram ao princípio para alguns alunos na manipulação do *software*, pois veiam no Geogebra uma ferramenta desconhecida, o que dificultou o seu ritmo de trabalho respeito dos outros colegas da turma e, portanto, houveram grupos que deixaram questões sem resposta na primeira tarefa, se calhar por não estar acostumados à utilização do *software*. Evidencia disto, no decorrer das tarefas algumas indicações com o Geogebra tiveram que ser esclarecidas pelo professor, dado o fato de não ser percebido pelo aluno a forma a como tinha que usar a informação fornecida pelo Geogebra. Este facto permite interpretar que existe uma falta de familiaridade no uso do

recurso por parte do aluno ou que se precisou uma melhor orientação nas questões guias colocadas referentes a como trabalhar a simulação com o Geogebra.

4.1 Conclusões

A análise anterior permitiu ter uma primeira aproximação às noções e aprendizagens que manifestam os alunos ao enfrentar os conceitos básicos de Probabilidade a partir de tarefas com recurso ao Geogebra. A análise evidencia que, ainda que o uso do Geogebra tenha ajudado os alunos a inferir propriedades e compreender conceitos probabilísticos, alguns ainda apresentam dificuldades para fazer conexões entre estes conceitos após a sua exploração, e inclusive após a sua formalização matemática. Estas dificuldades foram motivo de reflexão sobre as tarefas, centrada em melhorá-las e evitar que os alunos apresentassem novamente estas dificuldades no estudo principal.

Aspetos como a linguagem empregada em alguns enunciados, a reformulação de algumas questões que se identificou estarem mal redigidas para a compreensão do aluno ou porque o enunciado não precisava de tanta informação para o aluno compreender o que se lhe solicitava, a reformulação de folhas de registo de dados e a redistribuição dos tempos e perguntas a considerar nas discussões coletivas, foram considerados na preparação das tarefas do estudo principal. Para além disso, algumas questões foram eliminadas, dado que não abordavam informação relevante para atingir os objetivos da investigação ou existia outra questão suficiente para avaliar o mesmo objetivo. Do mesmo modo, novas questões foram acrescentadas para orientarem melhor os alunos na exploração e construção do seu conhecimento, enquanto outras reformulações foram consideradas para adaptar as tarefas e ficheiros do Geogebra ao contexto da Costa Rica. Desta forma, vários aspetos foram observados, procurando melhorar os tempos de trabalho dos alunos com as tarefas apoiadas com Geogebra no estudo principal e, portanto, atingir os objetivos de aprendizagem.

Quanto à tarefa diagnóstico, a questão 3 foi modificada, eliminando o pedido de explicação de como ler os diagramas de Venn. Além disso, foram acrescentadas seis questões referentes a conceitos básicos de Probabilidade a ser trabalhados. Quanto à tarefa 1 (lançamento de dois dados), a redação das indicações iniciais ficou mais clara, a questão 1c) foi retirada e, na parte I e parte II foi solicitado a gravação como imagem de alguns momentos

de simulação específicos. Na tarefa 2 (lançamento de um dado) foi retirado o primeiro parágrafo, a redação das indicações iniciais ficou mais clara, na questão 1 foi solicitada a gravação como imagem de alguns momentos de simulação específicos, solicitou-se simular até 1000 repetições da experiência, em vez de 500 como tinha sido no estudo exploratório, acrescentaram-se legendas à tabela registo de dados, e a última questão foi retirada. Na tarefa 3 (probabilidade clássica), retiraram-se as questões 1, 2, 5, 6 e 13, foram modificadas as questões 4, 7, 9 e 10, e na parte II foi solicitado os alunos para gravarem como imagem alguns momentos de simulação específicos. Quanto à tarefa 4 (descobrindo propriedades de probabilidade), foi solicitado os alunos para gravarem como imagem alguns momentos de simulação específicos, foi retirada a parte I, modificadas as indicações iniciais na redação das questões da parte II, acrescentada a definição de acontecimentos disjuntos na parte II, reformulado o enunciado da parte III, e reorganizados os elementos da tabela de registos de dados. Na tarefa 5 (probabilidade frequencista), foi solicitada a gravação como imagem de alguns momentos de simulação específicos, foram substituídas as questões 1, 2 e 3 por uma só questão mais orientada, foram retiradas as questões 4, 5, 9 e 10, reformulada a questão 6, acrescentadas questões na parte I e parte II da tarefa, e modificada a tabela registo de dados. Finalmente, na tarefa de avaliação, foi retirada a questão 3bI).

Quanto às discussões coletivas, no estudo exploratório foram consideradas como questões iniciais algumas questões da tarefa e a sua resolução por parte do aluno no quadro. Após o estudo exploratório considerou-se partir de questões que nalgum momento do processo de monitorização do professor, ajudassem os alunos a discutir entre eles, para depois o professor ir intervindo com questões específicas que ajudassem a formalizar os conceitos.

Desta forma, a análise permitiu identificar aprendizagens e dificuldades quanto a conceitos de Probabilidade e utilização do Geogebra. Esta análise, por sua vez, permitiu considerar aspetos a modificar nas tarefas propostas do estudo exploratório, permitindo melhorar a distribuição dos tempos da sua realização e a interpretação das tarefas pelo aluno.

Capítulo 5

EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Neste capítulo apresento a experiência de ensino que sustenta a intervenção de sala de aula. Começo por fazer a caraterização do contexto escolar onde se desenvolveu a experiência de ensino, para depois apresentar os princípios que orientaram e fundamentaram a sua implementação, nomeadamente as orientações curriculares que a justificam, os objetivos de aprendizagem a atingir pelos alunos, a trajetória de ensino proposta, o modo de trabalho na sala de aula e, por último, o planeamento e descrição das tarefas realizadas.

5.1 Caraterização do contexto escolar

A experiência de ensino desenvolvida neste trabalho foi implementada nos meses de março e abril de 2017, correspondentes ao 1.º período do ano letivo 2017 segundo o calendário da Costa Rica, numa turma de ensino regular do 10.º ano de um colégio do distrito de San Pedro de Montes de Oca, uma zona urbana circulada por muitos estudantes universitários. A turma era constituída por alunos oriundos de diferentes zonas do país, próximas à capital, e de diferentes níveis socioeconómicos que iam desde o nível baixo a médio, sendo reflexo disto o caráter público da instituição e o facto de que alguns dos alunos contarem com uma bolsa do governo para cobrir gastos escolares como o material de laboratório e livros, entre outros.

Quanto a aspetos académicos, estes alunos têm um bom desempenho académico em relação a alunos de outros colégios do país, tendo uma formação mais aprofundada em conteúdos do currículo de Matemática costarriquenho. Os alunos são disciplinados, o que se refletiu ao longo das tarefas todas, sendo muito ativos e empenhados no trabalho em sala de aula, cumprindo as indicações e desafios propostos pelo investigador. Desta forma, ficou facilitado o cumprimento dos tempos planificados para a aplicação de cada tarefa. A participação oral nas discussões foi desenvolvida por grande parte dos alunos, havendo uma diversidade de opiniões, crenças e aprendizagens evidenciadas, além das observadas na resolução das tarefas.

Quanto às instalações do colégio, este é relativamente pequeno devido a que só se aborda o ensino numa turma de 10º ano e uma turma de 11º ano. As instalações contam com quatro salas de aula, uma das quais é a sala de computadores, utilizada na implementação da proposta, onde se ensina a disciplina de informática, dispondo esta sala de 16 computadores de escritório em boas condições, permitindo desta forma o trabalho a pares, mas num espaço muito estreito, onde a deslocação da professora titular da turma e do investigador foi difícil quando os alunos estavam a trabalhar.

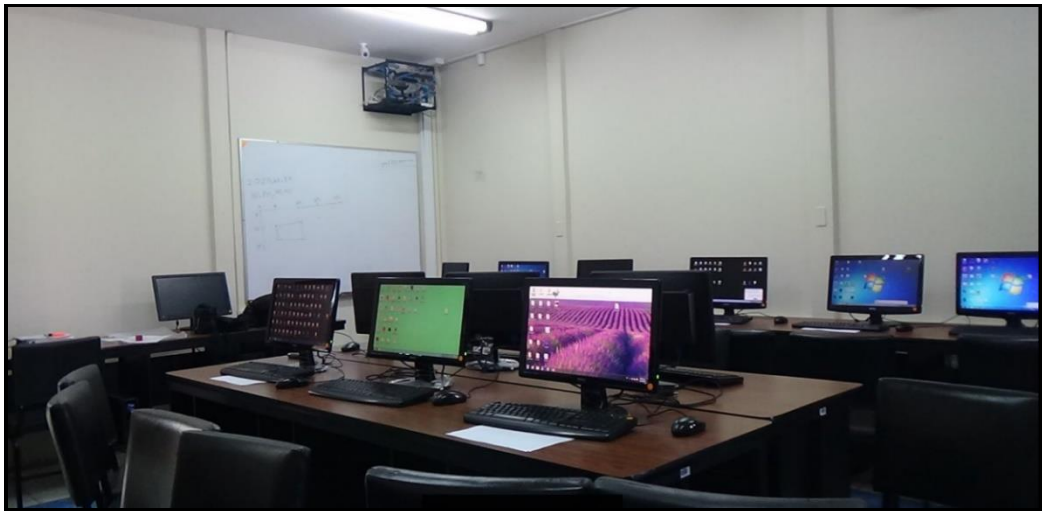


Figura 5.1. Laboratório de computadores onde se aplicou a experiência de ensino com a turma costarriquenha.

As instalações do colégio contam também com uma sala de refeitório, uma sala de recreio, e um espaço onde se realizam atividades de teatro e se pratica desporto físico. Além disso, mesmo que os alunos não contem com uma biblioteca de estudo própria no colégio, tinham acesso a algumas das bibliotecas de universidades públicas do país, podendo aceder desta forma a grandes fontes de informação para os seus trabalhos e estudo em geral.

Quanto à forma de trabalho, os alunos trabalharam a pares estabelecidos desde o começo da aplicação das tarefas da experiência de ensino, à exceção da tarefa diagnóstico, do teste final e do questionário, os quais foram realizados de forma individual pelos alunos. No caso das tarefas realizadas a pares com o Geogebra, cada par de alunos teve um computador com o ficheiro do Geogebra guardado numa pasta no computador, além dos enunciados da tarefa em papel.

5.2 Enquadramento curricular e objetivos

5.2.1 Introdução

A Probabilidade, como tópico do programa de Matemática, tem vindo a ser considerada cada vez mais relevante para capacitar o cidadão de conhecimento probabilístico e permitir responder às exigências da sociedade atual (NCTM, 2000; Sharma,2016), como é evidenciado nas reformas educativas que em muitos países se têm verificado nas últimas duas décadas.

Perante as mudanças na forma de conceber a Probabilidade na Educação Matemática, vários investigadores, como também orientações curriculares internacionais e nacionais, têm procurado estabelecer os pilares necessários para promover uma aprendizagem adequada da Probabilidade. Como parte destes pilares manifesta-se a tendência a capacitar o aluno para ser capaz de argumentar e fornecer evidências, analisar situações, aplicar conceitos, fazer conexões entre conceitos probabilísticos e representar ideias mediante diferentes estratégias ou representações (Sharma,2016).

Para atingir estes níveis de aprendizagem no aluno, é preciso procurar recursos ou ferramentas adequadas para a abordagem de tarefas matemáticas que garantem os objetivos de aprendizagem e procurem satisfazer as distintas recomendações curriculares. Um destes recursos disponíveis são as tecnologias, as quais têm vindo a mudar a forma de olhar a vida atual das pessoas, convertendo-se em ferramentas educativas inovadoras para o ensino e aprendizagem na sala de aula (ME, 2007; MEP, 2012), orientadas para que o aluno trabalhe a compreensão e aplicação de conceitos básicos de probabilidade com simulação (NCTM, 2000).

De particular importância é o computador, facilitando o uso da simulação, a qual por sua vez permite ao aluno aprofundar na exploração matemática, assim como também facilitar a compreensão dos procedimentos que envolvem o tratamento de um conceito (NCTM, 2014).

No programa de matemática costarriquenho, salienta-se como um dos eixos disciplinares a seguir “o uso inteligente e visionário de tecnologias digitais” (MEP, 2012, p.17), destacando em particular o uso da tecnologia como ferramenta fundamental para abordagem

das Probabilidades. Assim mesmo, o programa costarriquenho salienta que o uso das novas tecnologias adaptadas à abordagem da Matemática e focada na análise de dados e na modelação matemática, ajuda a processar os dados, permitindo que o aluno se foque na interpretação destes com a ajuda de software matemático como o Geogebra. Nesta mesma linha, o programa de Ensino Básico português (ME, 2013) salienta que "os alunos devem ser capazes de estabelecer conjeturas, em alguns casos, após a análise de um conjunto de situações particulares" (p.4), conjeturas que podem ser dinamicamente trabalhadas com simulação apoiada com o Geogebra.

Quanto à organização da Probabilidade no currículo, a Probabilidade é uma das unidades que foi retomada no atual programa de Matemática (MEP, 2012), mas outorgando-lhe uma grande importância, pois os conceitos probabilísticos são agora abordados desde os primeiros anos da Escola. Os primeiros dois ciclos da Educação Geral Básica são orientados para uma abordagem intuitiva dos conceitos probabilísticos, continuando com a abordagem destes conceitos no terceiro ciclo, mas de uma forma mais formal, sem aprofundar a linguagem da Teoria de Conjuntos, e retomando novamente estes e outros conceitos nos últimos níveis da escola mediante linguagem formalizada da Teoria de Conjuntos.

O gráfico a seguir mostra uma distribuição do peso em horas de aula que se tem dado à Probabilidade no programa atual costarriquenho (MEP, 2012), sendo os 8.º e 10.º anos os níveis com maior percentagem de aulas dedicados ao estudo da estocástico.

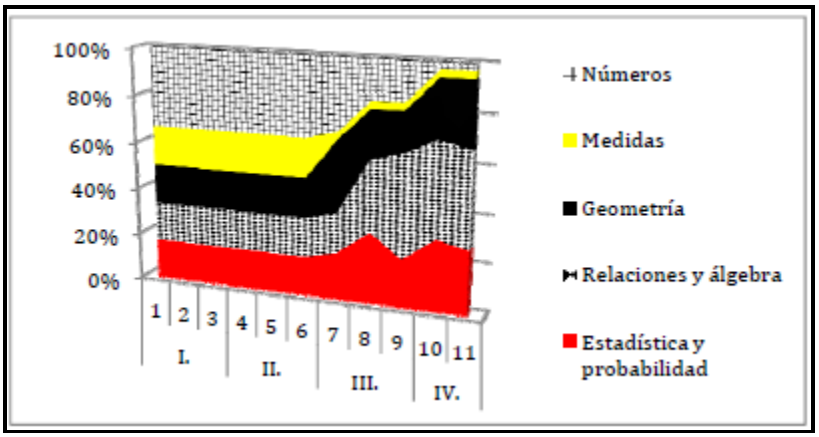


Figura 5.2. As cinco áreas da Matemática nos quatro ciclos de ensino do programa de Matemática costarriquenho (MEP, 2012).

É importante salientar que, ainda que o estudo exploratório e o estudo principal tenham sido aplicados em distintos níveis de escolaridade e distintos contextos educativos, os conteúdos e objetivos de aprendizagem dos alunos foram os mesmos a abordar. A experiência de ensino foi aplicada numa turma de 10.º ano, dado que é neste nível que os conteúdos de Probabilidade, vistos no 9.º ano da turma portuguesa, são abordados completamente na turma costarriquenha. A experiência de ensino considera tópicos em que, o aluno já deveria ter domínio de níveis anteriores e outros tópicos que são abordados na sala de aula pela primeira vez no 10.º ano. Esta trajetória de aprendizagem é fundamentada nas orientações curriculares do programa costarriquenho, ao salientar que

> É necessário que os diversos tópicos se repassem ao longo dos distintos anos. Mas isto não se deve fazer por meio de sistematizações gerais artificiais, mas sim por meio de novos problemas que façam lembrar inteligentemente os conhecimentos adquiridos no passado e formulem desta forma outras expectativas de aprendizagem. (MEP, 2012, p.34)

Ambos os programas de Matemática apontam para ensinar os mesmos tópicos até décimo ano, facilitando a aplicação da experiência de ensino e, portanto, considerando os mesmos objetivos de aprendizagem dos alunos a serem trabalhados na sala de aula.

Em geral, o desenvolvimento desta investigação surgiu do fato de propor uma abordagem pedagógica que, por um lado cumprisse com os objetivos de aprendizagem a desenvolver no aluno na unidade de Probabilidade e, por outro lado, permitisse abordar estas aprendizagens com emprego de tecnologia, com vista a evidenciar as aprendizagens, tanto a nível de conteúdo como também de utilização do recurso tecnológico do Geogebra, para trabalhar conceitos básicos de Probabilidade.

5.2.2 Tópicos e objetivos

Considerando o objetivo desta investigação, compreender de que modo os alunos costarriquenhos do 10.º ano aprendem os conceitos básicos de Probabilidade num quadro de uma experiência de ensino apoiada em tarefas exploratórias com recurso ao Geogebra, foram estabelecidos os conteúdos e objetivos enquadrados a nível curricular do programa de Matemática de 10º ano costarriquenho (MEP, 2012), mas também os conteúdos e objetivos do programa de 8º ano e 9º ano, como meio de considerar os conteúdos prévios que o aluno do 10.º ano deveria saber, propondo uma proposta de ensino dos conceitos básicos de

Probabilidade que um aluno deve adquirir em escolaridade pré-universitária, segundo o currículo do programa de Matemática costarriquenho.

A seguir são abordados os tópicos e objetivos da experiência de ensino, tanto a nível da aprendizagem do aluno como a nível do investigador.

Tópicos

- Experiências deterministas e aleatórias.
- Espaço amostral: casos possíveis, casos favoráveis, acontecimento.
- Probabilidade: significado clássico e frequencista.
- Classificação de acontecimentos segundo o seu valor de probabilidade e elementos que compartilha com outros acontecimentos.
- Propriedades da união e complemento para dois acontecimentos disjuntos ou não disjuntos.

Objetivos de aprendizagem

As tarefas aplicadas na experiência de ensino respondem aos propósitos de ensino do atual programa de Matemática da Costa Rica, quanto a identificar, recolher e interpretar informação necessária para a resolução de tarefas estocásticas, apoiando-se no uso da simulação e modelização de situações do contexto cotidiano para resolver tarefas matemáticas (MEP,2012).

Com a realização desta experiência de ensino pretendo responder às questões da investigação, mas também que os alunos trabalhem por si próprios conceitos básicos de Probabilidade, construindo o seu conhecimento a partir de simulação com o Geogebra, especificamente, simulando experiencias aleatórias que conduzem à dedução e compreensão de definições e propriedades dos conceitos básicos de Probabilidade.

Considerando que a experiência de ensino nasce da melhora das tarefas do estudo exploratório, foram definidos os mesmos objetivos de aprendizagem da tabela 3.2. Desta forma, pretendo que os alunos desenvolvam os seguintes objetivos de aprendizagem:

- Identificar experiências aleatórias e deterministas.
- Determinar e identificar casos possíveis e casos favoráveis de um acontecimento em experiências aleatórias.
- Identificar acontecimentos equiprováveis.
- Classificar acontecimentos a partir do valor numérico de probabilidade ou da representação em diagramas de Venn do(s) acontecimento(s): elementar, composto, certo, impossível, provável, equiprováveis, disjuntos e complementares.
- Inferir propriedades de probabilidade para a união de acontecimentos disjuntos e não disjuntos, como também de acontecimentos complementares.
- Aplicar as propriedades de probabilidade para a união de acontecimentos disjuntos e não disjuntos, como também de acontecimentos complementares na resolução de tarefas.
- Inferir a regra de Laplace e a lei dos grandes números para o cálculo de probabilidades.
- Determinar probabilidades a partir da noção clássica ou frequencista de probabilidade, segundo a situação.
- Estabelecer relações entre os elementos do espaço amostral de uma experiência aleatória com respeito à repetição da experiência.

Além destes objetivos, pretendo também com a experiência de ensino promover o desenvolvimento dos seguintes eixos disciplinares contemplados no programa de Matemática costarriquenho:

- A contextualização ativa como componente pedagógico especial.
- O uso inteligente e visionário de tecnologias digitais, em particular, a utilização do Geogebra como software didático para a aprendizagem de conceitos probabilísticos.

Assim como os seguintes eixos transversais contemplados no programa de Matemática português:

- A comunicação matemática na sala de aula.
- O raciocínio matemático.

Considerando os anteriores pontos mencionados, quanto às aprendizagens a atingir pelo aluno, faço uma proposta de ensino baseada em tarefas de natureza exploratória, através de

questões orientadoras, com e sem recurso ao software de geometria dinâmica Geogebra. Tento aplicar contextos reais que chamem a atenção do aluno, mas também procuro que a exploração, como metodologia de ensino e aprendizagem, promova raciocínios que os alunos não estão acostumados. Além disso, a partir das discussões a pares e coletivas de sala de aula, tento promover a comunicação como meio para evidenciar aprendizagens, assim como também as dificuldades associadas às tarefas propostas.

5.3 Planificação das tarefas e outros recursos

Segundo o NCTM (1991), as boas propostas de atividades são aquelas que não separam o pensamento matemático dos conceitos matemáticos ou aptidões, despertando a curiosidade dos alunos e convidando-os a especular e a prosseguir com as suas intuições, pelo que uma boa proposta de atividades requer tarefas que considerem o estudo dos conceitos matemáticos. Neste sentido, a proposta de tarefas desenvolvida neste estudo, mais do que evidenciar aprendizagens probabilísticas na utilização de fórmulas ou cálculos, procura centrar-se na aprendizagem dos conceitos, promovendo igualmente os processos de argumentação, as conexões entre ideias, a diversidade de representações, a comunicação na sala de aula e a resolução de problemas (MEP, 2012).

Para garantir estes processos, na planificação de tarefas, os conteúdos e a forma de os abordar na experiência de ensino convertem-se em fatores fundamentais a considerar. Segundo Ponte (2005), as tarefas podem-se dividir em exercícios, investigações, explorações e problemas. Em particular, quanto às tarefas de exploração que são relevantes na planificação desta experiência de ensino, Ponte (2005) salienta que **s**ão tarefas abertas, de duração media, onde o aluno é convidado a descobrir um método próprio para a resolução da tarefa a partir de seus conhecimentos prévios, realizando, portanto, uma parte importante do trabalho de aula para construir o seu conhecimento, assumindo o aluno o centro da sua aprendizagem. Neste sentido, as tarefas desenvolvidas nesta experiência procuram que o aluno se insira num cenário de investigação (Skovmose, 2000) onde deverá dar explicações argumentadas das suas respostas, quer mediante a exploração de dados obtidos com o Geogebra quer mediante propriedades de Probabilidade trabalhadas nas tarefas prévias.

Para a elaboração das tarefas foram usados alguns recursos, tais como: os Programas de Matemática Costarriquenho e Português (MEP, 2012; ME, 2013), os cadernos de apoio do

3º ciclo português (ME, 2013), os livros de teoria e prática de 9º ano (Conceição & Almeida, 2012), alguns materiais com propostas de tarefas para o ensino da Probabilidade (Grillo, 1995), e manuais do Geogebra e adaptações de ficheiros obtidos da página do Geogebra.

A experiência de ensino considera a aplicação de cinco tarefas com apoio do Geogebra, planificadas para se abordar em 5 aulas de dois blocos (45 minutos por bloco). Numa primeira aula, prévia às aulas com as tarefas, é feita a apresentação do investigador à turma, a observação geral da turma, e a entrega do teste diagnóstico para ser realizado em casa. Finalmente, na última aula é aplicado o teste de avaliação e um questionário final. Na tabela 5.1 (Anexo C) é apresentado o planeamento das 7 aulas e a distribuição das tarefas por aula.

As tarefas foram adaptadas a partir dos resultados do estudo exploratório, mas os conteúdos e objetivos de aprendizagem permaneceram invariantes. A reformulação das tarefas considera os aspetos salientados no capítulo do estudo exploratório e a tradução das tarefas para o espanhol. No que segue faço a descrição de cada tarefa aplicada na experiência de ensino, focando os conceitos que são trabalhados, os aspetos que foram reformulados e o seu porquê, os ficheiros utilizados com o Geogebra e possíveis dificuldades dos alunos na sua resolução.

TD 1: Teste diagnóstico

O teste diagnóstico considerou duas partes, uma primeira parte referente a conteúdos prévios necessários para o aluno trabalhar as tarefas e uma segunda parte de questões referentes a conceitos básicos de Probabilidade a trabalhar com a experiência de ensino (noção de probabilidade, cálculo de probabilidade clássica e frequencista, acontecimentos disjuntos e complementares, equiprobabilidade, tradução de informação de probabilidades em linguagem natural para linguagem simbólica). Quanto à primeira parte, o enunciado referente à leitura dos diagramas de Venn na questão 3 foi eliminado, dado que a turma costarriquenha já tinha conhecimento da Teoria de Conjuntos, unidade ensinada pelo professor da turma antes de aplicar a experiência de ensino. Quanto à segunda parte, consistiu da incorporação de 6 questões mais para além das 4 que tinha o estudo exploratório. Estas questões são referentes a tópicos de Probabilidade a serem explorados com as 5 tarefas, procurando identificar se os alunos tinham já alguns conceitos probabilísticos formalizados, pois alguns alunos da turma costarriquenha já tinham contactado nos níveis anteriores de 8.º

e 9.º ano com conceitos básicos de Probabilidade, contrariamente ao que ocorria na turma portuguesa em que não faria sentido incluir estas questões por serem os conceitos formais de Probabilidade, em geral, novos.

Como parte das dificuldades previstas que poderia o aluno ter estão: o desconhecimento dos conceitos de frequência absoluta e frequencista, não diferenciar entre gráficos de barras e histogramas, dificuldades para representar informação através de diagramas de Venn, dificuldade para fazer conexões entre a probabilidade e a aleatoriedade, e dificuldade para responder a questões envolvendo conceitos básicos de Probabilidade que não tenham visto em níveis anteriores ou que, tendo visto, esse conhecimento está limitado a cálculos sem aprofundar no conceito.

T1: lançamento de dois dados

A tarefa 1 é formada por duas partes, tal como no estudo exploratório, para introduzir os primeiros conceitos básicos ligados à Probabilidade: experiencia aleatória e determinística, espaço amostral, e acontecimentos de uma experiência aleatória. Na primeira parte de exploração com o ficheiro 'Lançamento de dois dados', os alunos são desafiados a explorar a aleatoriedade para um número pequeno de repetições da experiência do lançamento de dois dados. Na segunda parte os alunos continuam a exploração com o mesmo ficheiro, mas agora para um número mais elevado de repetições da experiência, procurando que o aluno observe o comportamento aleatório dos casos favoráveis correspondentes a acontecimentos definidos ao somar as pintas das faces viradas para acima dos dois dados, assim como também o comportamento dos casos possíveis ao simular as experiências e observar o registo dos dados. Desta forma, o ficheiro 'Lançamento de dois dados' está orientado para introduzir o conceito de aleatoriedade e elementos do espaço amostral como sejam os casos favoráveis, casos possíveis, e o conceito de acontecimento.

Em referência às reformulações consideradas, as indicações iniciais foram escritas com maior clareza, pois durante a etapa de monitorização no estudo exploratório observou-se que alguns alunos não interpretavam corretamente as indicações de como utilizar as ferramentas do Geogebra. A questão 1c) foi retirada, pois era possível avaliar o objetivo proposto com a questão 2c) da tarefa. Por último, foi solicitado gravar uma imagem da simulação dos dados

para 20 e 900 repetições da experiência, de forma a ter evidências visuais sobre o trabalho do aluno com o Geogebra para poucos e muitas repetições da experiência aleatória.

Como dificuldades previstas durante o trabalho dos alunos existe a possibilidade que, sendo a primeira vez que vários deles trabalham com o Geogebra, estes tenham dificuldade em manipular as ferramentas do *software* ou em interpretar a informação proporcionada pelo simulador. Além disso, os alunos podem ter dificuldades em identificar algum comportamento ao realizar a experiência poucas e muitas vezes, sendo resultado de não fazerem uma boa leitura do gráfico proporcionado pelo simulador, nomeadamente se o gráfico não tiver uma escala adequada para proceder à sua leitura.

T2: lançamento de um dado

Com a tarefa 2 os alunos foram desafiados novamente a explorar a aleatoriedade, mas nesta ocasião trabalhando com uma experiência simples de acontecimentos elementares equiprováveis. A tarefa é formada por uma única parte trabalhada com o ficheiro 'lançamento de um dado', tal como no estudo exploratório, sendo uma tarefa curta em tempo de realização, mas que complementa a tarefa 1 ao trabalhar ainda com o comportamento de experiências aleatórias, razão pela qual a discussão da tarefa 1 e da tarefa 2 foram realizadas em conjunto. A tarefa foi destinada a introduzir o conceito de equiprobabilidade sem ainda ter por base o cálculo de probabilidades e, portanto, não abordando a lei dos grandes números, mas sim deixando uma noção no aluno da lei para identificar acontecimentos equiprováveis.

Em referência as reformulações consideradas, as indicações iniciais também foram reescritas para maior clareza, pela mesma razão de utilização do Geogebra considerado na tarefa 1, procurando ainda nesta tarefa que o aluno se familiarizasse com a utilização das ferramentas do *software*. Foi retirado o primeiro parágrafo, pois não acrescentava informação para guiar o aluno. Considerou-se simular um número máximo de 1000 repetições da experiência, em vez de 500 como estava no estudo exploratório, pois isto facilitava a identificação de equiprobabilidade por parte dos alunos. Solicitou-se gravar uma imagem da simulação dos dados para 10 e 1000 repetições da experiência, de forma a ter evidencias visuais sobre dois momentos específicos de trabalho do aluno com simulação: o momento no qual não se pode ainda observar equiprobabilidade e o momento no qual existe equiprobabilidade dos dados. Acrescentaram-se duas legendas à tabela de registo de dados

para o aluno ter uma melhor leitura do significado das colunas e linhas da grelha correspondente à tabela de registo de dados. Finalmente, a última questão foi retirada, dado que pretendia ver se o aluno identificava acontecimentos elementares, mas o estudo exploratório permitiu observar que os alunos não tiveram dificuldades em identifica-los. Sendo o objetivo usar o conceito de acontecimento elementar na formalização do conceito de equiprobabilidade, considerou-se melhor questionar os alunos durante a discussão coletiva da tarefa com questões como: *quantos casos favoráveis tem cada acontecimento?*, *por quantos elementos é formado cada acontecimento?* .

Algumas dificuldades previstas são o tratamento da escala não adequada na folha gráfica do Geogebra e a tendência a não visualizar equiprobabilidade por não considerarem o limite das frequências, mas conceberem as frequências como números absolutos.

T3: probabilidade clássica

A tarefa 3 é formada por três partes, tal como no estudo exploratório. A primeira parte é trabalhada com o ficheiro 'batalha naval', que procura introduzir o conceito clássico de probabilidade mediante sete questões, aludindo a casos favoráveis e casos possíveis de uma experiência que foram trabalhados nas tarefas anteriores. Nesta parte o aluno recorre a seus conhecimentos prévios sobre percentagem para calcular a probabilidade de um acontecimento, chegando a inferir que essa percentagem representa a probabilidade do acontecimento em termos dos casos favoráveis e dos casos totais. Na segunda e terceira parte os alunos utilizam o ficheiro 'lançamento de dados', orientado para o aluno consolidar o conceito de probabilidade clássica trabalhado na primeira parte, fazendo para isso cálculos de probabilidades com a regra de Laplace para as experiências do lançamento de dois e três dados, respetivamente. Em particular, com a terceira parte, além de consolidar o conceito clássico de probabilidade, espera-se que os alunos possam usar estes cálculos para identificar alguns tipos particulares de acontecimentos, tais como os acontecimentos impossíveis, certos, equiprováveis, e mais prováveis. Procura-se, também, que os alunos identifiquem experiências associadas a um mesmo modelo de probabilidade como, aquelas onde se pode encontrar uma relação bijetiva entre os elementos do espaço amostral de duas experiências aleatórias e as suas respetivas probabilidades.

Em referência às reformulações consideradas, nas indicações iniciais acrescentou-se mais informação, tentando que o aluno tivesse mais interação com o ficheiro 'batalha naval'. Houve questões que foram retiradas, pois foram de resposta fácil para toda a turma, pelo que não acrescentava nem prejudicava as aprendizagens considerar estas questões. Além disso, algumas questões foram modificadas para esclarecer o enunciado da questão, sendo mais específico no que se solicitava ao aluno. Finalmente, solicitou-se o aluno a gravação de uma imagem da sua simulação com o Geogebra na segunda parte da tarefa, procurando ter um registo visual utilizado pelo aluno na simulação para calcular probabilidades.

Com esta tarefa o aluno poderá apresentar a dificuldade de não associar as percentagens calculadas na parte I a uma probabilidade, assim como também na segunda e terceira parte em calcular a probabilidade de um acontecimento corretamente, pelo facto de não identificar os casos favoráveis e os casos totais adequadamente. Por último, devido à extensão da tarefa, poderia acontecer que alguns alunos demorassem mais tempo do que o estimado, podendo não terminar a parte III.

T4: descobrindo propriedades de probabilidade

Na tarefa 4 verificaram-se mudanças a nível de conteúdo em relação ao estudo exploratório. A tarefa constou de duas partes, uma parte menos do que no estudo exploratório, pois foi eliminada a questão referente a diagramas de Venn, dado que se evidenciou no teste diagnóstico que os seus conhecimentos seriam suficientes para os alunos aprenderem a criá-los.

Na primeira parte da tarefa (parte II do estudo exploratório), as indicações iniciais foram modificadas para facilitar a leitura da questão, dado que a organização das questões foi também modificada. A primeira parte foi trabalhada com o ficheiro 'diagrama de Venn', sendo orientada esta parte para introduzir os acontecimentos disjuntos e complementares, a partir da representação em diagramas de Venn fornecida pela simulação dos acontecimentos. Os alunos tiveram que simular diferentes posições dos acontecimentos, sendo que à medida que as posições destes mudavam também mudavam as probabilidades associadas à união e interseção dos acontecimentos, orientando o aluno para estabelecer relações entre a representação gráfica e a representação simbólica das probabilidades dos acontecimentos. Além disso, foi solicitado os alunos a gravação de certos momentos da simulação,

especificamente, a simulação para acontecimento disjuntos e não disjuntos. Acrescentou-se ainda a definição de acontecimentos disjuntos, pois no estudo exploratório estava para ser pesquisado o conceito de acontecimento disjunto, enquanto que no estudo principal a tarefa 4 era para ser trabalhada em sala de aula. Quanto à segunda parte (parte III no estudo exploratório), esta foi trabalhada sem o Geogebra, procurando consolidar as propriedades inferidas na parte I. Para isso, a questão proposta no estudo exploratório mudou, pois se adaptou ao contexto costarriquenho, embora o objetivo da tarefa e os dados solicitados tenham permanecido. A tabela de registo de dados também sofreu algumas modificações para facilitar o preenchimento e a leitura dos dados por parte dos alunos, tanto na posição dos elementos da tabela como no conteúdo da mesma.

Algumas dificuldades dos alunos que podem surgir são o não fazer suficientes simulações com o Geogebra para permitir evidenciar as propriedades procuradas para os acontecimentos disjuntos, não disjuntos e complementares, e dificuldade para ler probabilidades mediante simbologia formal de conjuntos e não saber usar as propriedades inferidas para identificar acontecimentos disjuntos e complementares.

T5: probabilidade frequencista

A última das tarefas apoiadas pelo Geogebra veio a ser a tarefa 5 e, tal como no estudo exploratório, a tarefa é formada por duas partes. A primeira parte foi de introdução ao conceito de probabilidade frequencista, onde se trabalhou com o ficheiro 'lançamento de uma moeda' orientado para que o aluno inferisse a lei dos grandes números. Para isso, a sequência de questões que guiam o aluno na sua exploração, foi mais precisa no que se pedia, evitando assim que o aluno tivesse dificuldade para fazer conexões entre conceitos, caso evidenciado no estudo exploratório. Na segunda parte utiliza-se o ficheiro 'aproximação de áreas por meio de probabilidades' para consolidar o conceito de probabilidade frequencista. O aluno é orientado a calcular primeiro a probabilidade de um ponto cair no interior de uma elipse inserida num quadrado e, após isso, com esta probabilidade estimar a área da elipse sabendo a área do quadrado. Também aqui se solicitou a gravação de imagens do trabalho com a simulação feito com ambos os ficheiros utilizados, de modo a verificar que os dados obtidos nas suas resoluções, quanto à probabilidade frequencista, coincidiam com os dados proporcionados nas simulações. Finalmente, a tabela de registo de dados modificou-se de

forma a que o aluno faça tantas simulações como as que considerar necessárias para inferir a lei dos grandes números, não o limitando a uma quantidade fixa de simulações.

Possíveis dificuldades que os alunos podem enfrentar são o não serem capazes de estabelecer a lei dos grandes números pelo fato das frequências não coincidirem exatamente com a probabilidades teóricas dadas pela regra de Laplace, isto é, não atender ao limite das frequências. Na segunda parte existe a possibilidade do aluno não identificar o conceito frequencista de probabilidade no contexto das áreas, sendo impossível avançar para a estimação da área da elipse. Também é possível que mesmo quando o aluno possa encontrar a probabilidade frequencista de um ponto cair no interior da elipse, este não seja capaz de estabelecer conexão entre essa probabilidade e a razão dada entre a área da elipse a dividir pela área do quadrado, sendo impossível formar a equação que lhe permitirá aproximar a área da elipse.

TA: teste de avaliação

O teste de avaliação, tal como no estudo exploratório, é formado por 4 questões destinadas a avaliar todos os conceitos trabalhados. O teste foi aplicado na última aula da experiência de ensino, sendo discutida oralmente a sua resolução, em termos gerais, após a turma toda o ter finalizado. Retirou-se uma questão do enunciado da questão 3, correspondente a solicitar acontecimentos compostos, pois foi um conceito que, junto com o conceito de acontecimento elementar, observou-se durante as discussões não ter gerado dificuldades nos alunos.

Como dificuldades que podem enfrentar os alunos na realização do teste de avaliação estão o não se lembrarem de algum conceito trabalhado ou manter ainda dificuldades que surgiram durante a sua exploração, mesmo quando a discussão de cada tarefa tentou esclarecer essas dificuldades.

Em referência às discussões, estas foram outro recurso da proposta para além das tarefas físicas, formando parte importante do processo de aprendizagem do aluno, na medida em que criaram ambientes de trabalho onde o aluno pode confrontar os seus resultados e discutir sobre as suas estratégias empregadas no estudo de conceitos e representações (ME, 2007). As discussões coletivas das tarefas na sala de aula podem ser momentos importantes de aprendizagem para os alunos (Ponte, Mata-Pereira, Quaresma, 2013) quando estes

apresentam e fundamentam as suas ideias, inclusive as erróneas ou incompletas (Fonseca, 2009). Estas discussões realizam-se no final de cada tarefa, com base em questões formuladas pelo investigador que procuravam indagar a fundo os raciocínios dos alunos sobre os conceitos trabalhados em cada tarefa, visando complementar as suas resoluções para que evidenciem outras aprendizagens e dificuldades, tanto a nível dos conceitos probabilísticos como da utilização do Geogebra e, desta forma, obter informação suficiente para responder às questões da investigação. Assim, tendo a prévia permissão da professora da turma, tive a meu cargo realizar as discussões e, ainda que existissem um conjunto de questões iniciais a discutir, outras surgiram considerando observações feitas aos alunos tarefa a tarefa durante a fase de monitorização, assim como também na resolução das fichas de trabalho.

Finalmente, a proposta de tarefas exploratórias não tinha sido possível sem a utilização do software Geogebra. Para isso foi preciso usar o computador para visualizar e experimentar a Matemática (MEP, 2012, p.61), como também criar ficheiros do Geogebra com certo nível de desafio que encorajasse o aluno a níveis de raciocínio e pensamento distintos dos que teria com tarefas rotineiras de natureza procedimental (NCTM, 2014), sendo assim de relevância a utilização do Geogebra para realizar a exploração dos conceitos probabilísticos. Inicialmente os computadores não tinham instalado o software pelo que foi instalado em 16 computadores do laboratório, permitindo ter um computador por grupo de dois alunos. Dentro das instruções estabelecidas em cada tarefa pedia-se o aluno para gravar em certos momentos o seu trabalho com o Geogebra, sendo estes momentos gravados em uma pasta previamente criada no computador antes de começarem a trabalhar as tarefas. No final de cada aula, o investigador recolheu estas pastas, computador por computador, como meio de apoiar a informação recolhida sobre o trabalho com o Geogebra desenvolvido pelos alunos.

5.4 Abordagem de ensino na sala de aula

A organização da experiência de ensino foi baseada, primeiramente, considerando abarcar os conteúdos de Probabilidade da unidade de ensino sobre Probabilidade do programa da Costa Rica. Como segundo critério, considerei a organização e a temática de conceitos básicos de Probabilidade atendendo à minha experiência como professor, mas tentando, ao mesmo tempo, seguir uma trajetória de aprendizagem onde cada tarefa apoiada com o Geogebra se construísse a partir dos conceitos trabalhados nas anteriores tarefas,

enquanto o teste diagnóstico, o teste de avaliação, e o questionário foram considerados para ter um ponto de partida inicial e final das aprendizagens. A descrição geral da realização da experiência de ensino apresenta-se nos parágrafos a seguir.

Na primeira aula, apresento-me à turma e faço uma observação da forma como trabalham os alunos. Ao finalizar a aula proponho um teste diagnóstico para os alunos resolverem em casa, procurando avaliar os seus conhecimentos prévios necessários para o desenvolvimento adequado das tarefas da experiência de ensino. Nos primeiros momentos da aula a seguir faço uma revisão e discussão coletiva das primeiras quatro questões trabalhadas pelos alunos, como meio de esclarecer dificuldades identificadas quanto a conhecimentos prévios para afrontar as tarefas da experiência com apoio ao Geogebra.

Na segunda aula, após a discussão do teste diagnóstico, aplico a primeira tarefa de exploração com apoio do Geogebra. À medida que os alunos vão explorando a tarefa 1 o investigador vai monitorando as resoluções deles, atendendo a dúvidas quanto a indicações ou enunciados, como também escutando as discussões que surgem entre os alunos para considerá-las na discussão coletiva ao finalizar a tarefa na aula seguir.

Na terceira aula começo por recordar o que tinham trabalhado na tarefa 1 com apoio do Geogebra e, após isso, proponho a tarefa 2 com apoio do Geogebra. Ao terminarem a resolução da tarefa 2 faço a discussão das duas tarefas, em simultâneo, pois ambas as tarefas estão intimamente relacionadas com a aleatoriedade. Assim, retomo algumas questões de aleatoriedade da tarefa 1 e outras da tarefa 2 para formalizar os conceitos considerados por ambas as tarefas. Após a discussão formalizam-se os conceitos trabalhados em ambas as tarefas anteriores com questões tais *como: o que se pode dizer então que um acontecimento? o que são os casos favoráveis de um acontecimento?, o que podemos perceber por acontecimentos equiprováveis?, será que estes acontecimentos definidos a partir do lançamento de um dado são equiprováveis?.*

Na quarta aula aplico a tarefa 3 com apoio do Geogebra. Para isso a discussão coletiva desta tarefa divide-se em duas partes: uma orientada a discutir a introdução do conceito e a outra a consolidar o conceito. Após os alunos terminarem a tarefa e as discussões, faço a formalização da regra de Laplace, assim como também de algumas propriedades axiomáticas

de probabilidade ($0 \leq P(A) \leq 1$) inferidas desta regra a partir de questões do investigador na discussão coletiva, tais como: *pode ser a probabilidade de um acontecimento um valor negativo? será que toda percentagem equivale sempre a uma probabilidade? Pode ser a probabilidade de um acontecimento 120% ?*

Na quinta aula aplico a tarefa 4 com apoio do Geogebra. Tal como na tarefa anterior, a discussão coletiva é dividida em duas partes, uma para introduzir o conceito e outra para o consolidar. A discussão gira em torno de questões centradas nos dados recolhidos pelos alunos nas simulações, fazendo perguntas como: *quantas simulações precisaram para fazer a inferência da probabilidade associada à união de acontecimentos? Será suficiente a observação feita com uma simulação para inferir que os acontecimentos são disjuntos?*. Finalmente fiz a formalização dos conceitos.

Na sexta aula realizo a quinta e última tarefa exploratória com apoio do Geogebra, existindo também duas partes de discussão coletiva, uma após terminarem os alunos as questões tipo exploratório com a parte I da tarefa e a outra após acabarem as questões da parte II da tarefa. Perguntas de relevância na discussão coletiva foram, entre outras: *existe equiprobabilidade da moeda na experiência? Qual a probabilidade de um ponto cair no interior da elipse? Que lei estão a utilizar para o cálculo desta probabilidade?* No final faço a formalização do conceito frequencista de probabilidade.

Na última aula aplico o teste de avaliação dos conceitos trabalhados e o questionário. Ao terminarem de responder a ambos os documentos, realizo uma resolução do teste de avaliação a partir das respostas dadas pelos alunos para esclarecer alguns conceitos que ainda não ficaram totalmente aprendidos.

5.5 Avaliação dos alunos

Ao desenvolver uma intervenção em sala de aula, intrinsecamente estamos assumindo que existem objetivos de aprendizagem que se espera que o aluno atinja, mas também se deve estabelecer uma forma de medir o alcance destes objetivos. Neste sentido, a avaliação tem um papel importante, pois deve ser orientada a utilizar mecanismos de avaliação que promovam a discussão coletiva entre os alunos (Zawojewski et al., 1992) e permitam

compreender como aprende o aluno (NCTM, 2014), o que fica limitado com mecanismos tradicionais baseados na avaliação sumativa.

Neste sentido, uma avaliação sumativa centrada nos resultados finais dos alunos sem considerar os seus processos de resolução não ajuda o aluno a desenvolver a sua aprendizagem, pelo que a avaliação deve assumir um caráter formativo onde,

> a avaliação não se deve visualizar como uma atividade isolada com um sentido punitivo, mas como um processo inerente à mediação pedagógica, que lhe permita a cada aluno construir aprendizagens a partir das suas experiências, transcendendo desta forma a ideia de avaliação como mecanismo de sanção. (MEP, 2012)

Assim, a avaliação deve considerar metodologias para que o aluno construa o seu conhecimento, convidando-o a manifestar as suas ideias em coletivo para aprender em conjunto. Nesta mesma linha, o programa de Matemática costarriquenho destaca princípios para o planeamento da avaliação das aprendizagens. Estes princípios são integrar a avaliação no processo de ensino e aprendizagem, fomentar o trabalho colaborativo, criar instrumentos de recolha de dados apropriados às atividades de mediação e suficientes para à análise avaliativa da informação e comunicar os objetivos de aprendizagem a atingir pelo aluno para a sua motivação (MEP, 2012). Em resposta a atingir os princípios anteriores, foi combinado com a professora da turma, antes da realização da experiência de ensino, a avaliação a realizar. A avaliação da disciplina de Matemática para esta turma, no primeiro semestre do ano letivo 2017 em que foi aplicada a experiência, teve por base a realização de dois testes, contribuindo cada um com 35% para a nota final, um conjunto de tarefas tipo exercícios e problemas (Ponte, 2005) para realizar em casa e aplicadas ao finalizar cada unidade matemática, contribuindo com 25% da nota final, e a assistência às aulas com um peso de 5%.

Assim, foi combinado com a professora da turma que a aplicação das tarefas da experiência de ensino não deveria ter um valor percentual na nota dos alunos, mas sim deveriam servir formativamente para os preparar para os testes e as tarefas trabalhadas pela professora uma vez acabada a experiência. Desta forma, ao concluir a experiência de ensino, os objetivos de aprendizagem da unidade de Probabilidade deveriam estar abordados tendo

a professora a responsabilidade de trabalhar mais prática com a turma antes de aplicar os seus testes de avaliação sumativa.

Por último, o teste diagnóstico e o teste de avaliação permitiram obter informação antes e após a aplicação das tarefas com apoio ao Geogebra, revelando resultados das aprendizagens alcançadas e, portanto, servindo para a professora da turma ter uma visão das aprendizagens a reforçar nas práticas.

Capítulo 6

ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo apresento a análise dos dados recolhidos na experiência de ensino. A análise tem por base as resoluções escritas dos alunos nas tarefas, como também as suas representações gráficas geradas com o Geogebra no trabalho exploratório, e transcrições de discussões coletivas em sala de aula.

A análise está orientada para identificar as aprendizagens evidenciadas pelos alunos quanto aos conceitos de Probabilidade trabalhados e ao modo como o Geogebra contribuiu para estas aprendizagens. Começo por me referir às aprendizagens dos conceitos probabilísticos, considerando as resoluções de questões específicas para cada conceito, de modo sequencial desde a primeira tarefa (tarefa diagnóstico) até a última tarefa (tarefa de avaliação), tentando observar o percurso dos alunos no que respeita a essas aprendizagens. Para tal efeito, a análise das aprendizagens foi organizada em três grupos de conceitos: conceitos associados à aleatoriedade, conceitos associados ao espaço amostral e conceitos associados aos significados clássico e frequencista de probabilidade e a sua relação com a equiprobabilidade.

Por fim, analiso os contributos do Geogebra como recurso de trabalho na sala de aula, focando-me nas suas potencialidades e limitações para a aprendizagem dos conceitos probabilísticos.

6.1 Aprendizagem de conceitos probabilísticos

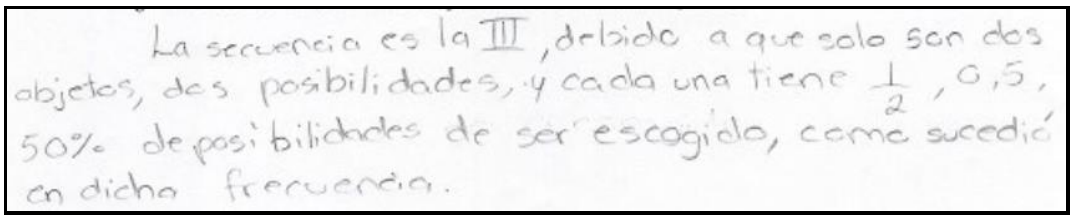
6.1.1 Conceitos associados à aleatoriedade: experiências aleatórias, experiências determinísticas variabilidade, acaso, incerteza, sorte.

O conceito de aleatoriedade foi um conceito avaliado no teste diagnóstico e no teste de avaliação, e trabalhado nas tarefas 1, 2 e 3 com recurso ao Geogebra. Para isso, analisaram-se questões que aludem à presença da aleatoriedade, embora outros conceitos como

variabilidade, incerteza e acaso tenham surgido espontaneamente das resoluções de alguns alunos para se referirem à aleatoriedade em termos coloquiais.

Com a tarefa diagnóstico pretendia observar se os alunos eram capazes de identificar a aleatoriedade em sequências de acontecimentos equiprováveis, como a extração de bolas de uma caixa. Quanto às tarefas com o Geogebra, os alunos simularam o lançamento de dois dados e extrações de bolas numeradas de duas caixas, pretendendo que estes observassem e identificassem o comportamento aleatório de acontecimentos, no estudo da equiprobabilidade, assim como também identificassem experiências associadas a um mesmo modelo probabilístico, isto é, experiências onde é possível estabelecer uma relação biunívoca entre os elementos dos seus espaços amostrais. Finalmente, o teste de avaliação, para além de avaliar os objetivos anteriores, pretende ver se o aluno é capaz de identificar experiências aleatórias e determinísticas, diferenciando-as.

No teste diagnóstico, quando questionados sobre qual a sequência mais provável de um conjunto de sequências aleatórias, a maioria dos alunos respondeu de forma incorreta. Alguns alunos fundamentam os seus raciocínios no conceito clássico de probabilidade e não consideram a aleatoriedade, como é o caso de Filipa cuja resposta apresento na figura seguinte.

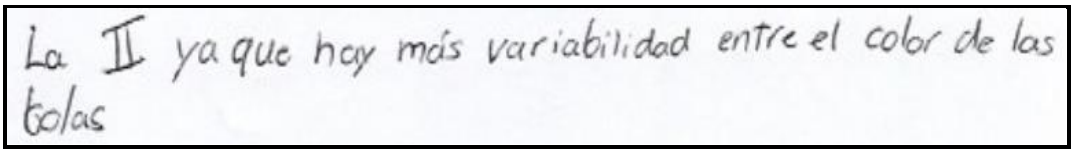

La secuencia es la III, debido a que solo son dos objetos, dos posibilidades, y cada una tiene $\frac{1}{2}$, 0,5, 50% de posibilidades de ser escogido, como sucedió en dicha frecuencia.

[a sequência é a III, dado que são só dois objetos, duas possibilidades, e cada possibilidade tem 1/2, 0.5, 50% de possibilidade de ser escolhido, como sucede com esta frequência]

Figura 6.1. Resolução de Filipa. TD. Q4

Para a aluna, a sequência III é a mais provável dado que tem o mesmo número de bolas amarelas e de bolas vermelhas, o que lhe permite decidir em optar por esta sequência como a mais provável baseado no seu conceito clássico de probabilidade, o qual é evidenciado com três representações simbólicas para se referir ao mesmo conceito. No entanto, Filipa comete um erro, dado que o seu raciocínio evidencia que para ela qualquer sequência deve manter as proporções de probabilidade (assumindo a definição clássica), quando na realidade não tem que ser assim dado a caráter aleatório da experiência.

Outros alunos, apesar de considerarem a presença da aleatoriedade utilizando termos como variabilidade e acaso, responderam também incorretamente, pois associaram-lhe significados caraterizados pela presença de padrões não estritamente corretos, de que é exemplo a resposta de Tiago (fig. 6.2).

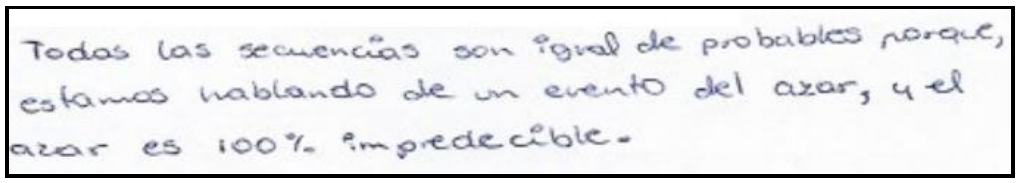


[a sequência II, dado que tem mais variabilidade entre a cor das bolas]

Figura 6.2 Resolução de Tiago. TD. Q4

Desta justificação podemos inferir que Tiago recorre ao termo "variabilidade" como propriedade da aleatoriedade, associando-lhe a variabilidade de um padrão de alternância entre a cor das bolas, sendo esta alternância o que esteve na base da sua opção pela sequência mais provável.

Os restantes alunos, ainda que poucos, evidenciam aprendizagens corretos sobre a aleatoriedade, como é o caso de Margarida (fig. 6.3) que alude ao termo "acaso".



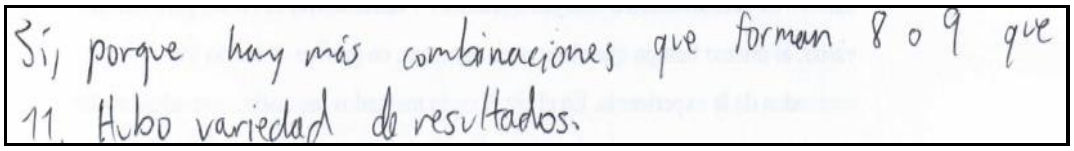
[todas as sequências são igualmente prováveis porque estamos a falar de um acontecimento do acaso, e o acaso é 100% imprevisível]

Figura 6.3. Resolução de Margarida. TD. Q4

No caso da Margarida, a aluna considera que todas as sequências de extração de bolas são igualmente prováveis pois "o acaso" domina e, como tal, a ordem de extração das bolas não importa, caraterística que alude ao conceito de aleatoriedade.

Ao explorarem as primeiras tarefas apoiadas pelo Geogebra, a maioria dos alunos continuou tendo dificuldades em identificar a aleatoriedade, como se evidencia nas tarefas 1 e 2. Estes alunos associam ainda significados caraterizados pela presença de padrões nem sempre corretos quando realizam uma experiência aleatória um número pequeno de vezes, situação frequentemente designada por 'lei dos pequenos números'.

Por exemplo, Tiago e Simão, na T1.Q1, afirmam que os resultados obtidos na simulação eram os esperados por terem coincidido com os teóricos, em que as somas de oito e nove são as mais prováveis de sair.

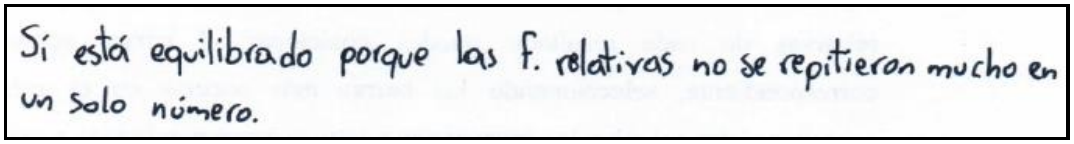


[sim, porque existem mais combinações que formam 8 ou 9 do que 11. Houve variedade de dados]

Figura 6.4. Resolução de Tiago e Simão. T1.Q1

Esta argumentação de Tiago e Simão é considerada incorreta, dado que não tem necessariamente que sair as somas das pintas de oito e nove em maior quantidade do que a soma de onze, isto devido ao caráter aleatório da experiência, evidenciando que estes alunos têm uma conceção errada de que as probabilidades tendem a permanecer inalteráveis desde as primeiras repetições de uma experiência, se calhar porque não têm ainda esclarecido o papel da aleatoriedade.

No que respeita à identificação da aleatoriedade para estudar a equiprobabilidade de acontecimentos, também se verificaram incorreções associadas à presença de padrões, como se observa na resolução da questão T2.Q1 (fig. 6.5) de Rosa e Fábio, considerando o dado equilibrado após simular o seu lançamento uma pequena quantidade de vezes.

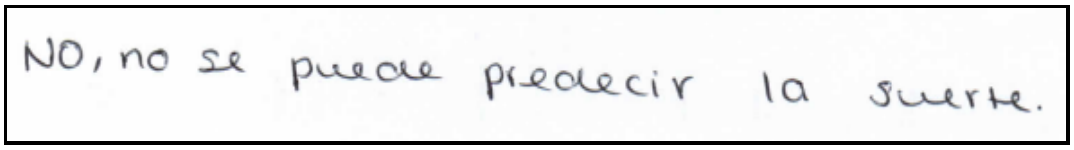


[sim, está equilibrado porque as frequências relativas não se repetiram muito num só número]

Figura 6.5. Resolução de Rosa e Fábio. T2. Q1.

Para Rosa e Fábio, o facto de "as frequências relativas não se repetirem muito num só número" revela a sua ideia dos números do dado (acontecimentos elementares) manterem frequências iguais e, portanto, serem equiprováveis. No entanto, Rosa e Fábio não consideraram a possibilidade de poderem ter obtido diferentes resultados na distribuição das frequências se tivessem feito a simulação novamente para o mesmo número de lançamentos, e também não consideram que precisam de fazer mais repetições da experiência para tomarem a decisão sobre equiprobabilidade dos acontecimentos, dificuldades devidas novamente a desconhecer o papel da aleatoriedade.

Tal como no teste diagnóstico, apenas alguns alunos foram capazes de identificar a aleatoriedade antes da sua formalização, como é o caso de Dadiva e Ana que, na sua resolução da questão T1. Q5 referente à possibilidade de saberem com antecipação o resultado do oitavo lançamento de dois dados, aludem à aleatoriedade como "sorte".



[Não, não se pode predizer a sorte]

Figura 6.6. Resolução da Dadiva e a Ana.T1. Q5

Neste contexto, para Dadiva e Ana, a aleatoriedade está associada a uma caraterística de certos acontecimentos sobre os quais não é possível prever o resultado. Desta forma, estas alunas, a partir das suas experiências quotidianas envolvendo a sorte, são capazes de identificar experiências onde está presente a aleatoriedade.

Durante a discussão da tarefa 1 surgiram outras noções associadas ao conceito de aleatoriedade, utilizando termos como incerteza e variável.

Investigador: qual a diferença para vocês entre acaso e probabilidade? Ou será que ambos os termos significam o mesmo?
João: acaso é não saber o que vai acontecer, é ter incerteza de algo.
Ana: São coisas que não seguem um padrão. É o resultado de algo que pode ter muitos resultados.
Investigador: muito bem. E será que é o mesmo acaso e aleatoriedade?
João: é o mesmo.
Diogo: aleatoriedade é uma caraterística de algo que tem probabilidade.
Investigador: quando diz que tem probabilidade a que se refere?
Diogo: tenho certa quantidade de casos delimitados, e é quando a experiência é aleatória que eu posso distinguir esses casos e, portanto, eu posso definir a probabilidade.

Neste diálogo podemos evidenciar dois aspetos. Por um lado, quanto ao conceito de aleatoriedade, alguns alunos como Diogo manifestam a ideia que a probabilidade é uma consequência da aleatoriedade e, portanto, nesta visão podemos definir a probabilidade só para experiências aleatórias. Esta argumentação parcialmente incorreta de Diogo é devida a ter já trabalhado o conceito de probabilidade clássica em anos, tal como o permite confirmar uma das suas resoluções que apresento mais adiante (fig. 6.32), mas se calhar não tem percebido ainda que a probabilidade também pode-se calcular para experiências

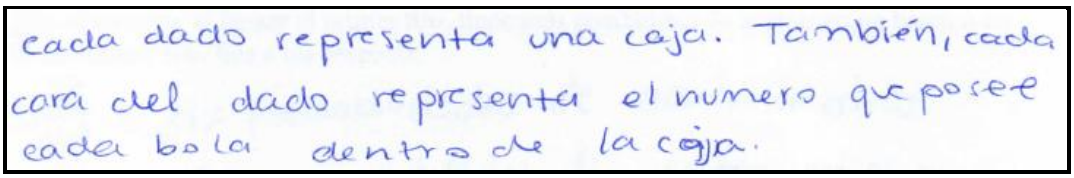
determinísticas. Por outro lado, existem alguns alunos que incorretamente consideram a aleatoriedade e o acaso como sinónimos, como é manifestado, por exemplo, na resposta dada por João. Possivelmente, para João, esta interpretação é devida à semelhança que têm ambos os conceitos ao partilharem algumas propriedades como a incerteza, salientada na intervenção de Ana.

A discussão da tarefa 2, por seu lado, permitiu observar que alguns alunos, ainda que considerassem a incerteza como caraterística das experiências aleatórias, mostraram não considerarem outras caraterísticas como a "lei dos grandes números", tal como se evidencia no diálogo com Dadiva.

Tiago: se sai o mesmo número não está equilibrado o dado.
Dadiva: seria isso algo aleatório?
Investigador: a experiencia de lançar um dado é aleatória, turma?
Dadiva: pode ser possível que eu atire o dado dez mil vezes e saiam dois em todos os lançamentos, mas se calhar no lançamento dez mil e um saía outro número.

Deste diálogo, referente à discussão prévia sobre equiprobabilidade, observamos que Dádiva, na última linha do diálogo, associa corretamente a aleatoriedade a uma caraterística de certo tipo de experiências, como o lançamento de um dado equilibrado, onde não se pode saber o número da face a sair num lançamento particular. No entanto, também se interpreta que ela não identifica que numa experiência aleatória, obter sucessivamente dez mil vezes um mesmo resultado é uma situação não suportada pela lei dos grandes números, caraterística das experiências aleatórias.

Após a formalização do conceito de aleatoriedade desenvolvida pelo professor junto com os alunos, onde se enfatizaram as caraterísticas que apresentam as experiências aleatórias e as experiências determinísticas, a turma toda trabalhou a tarefa 3. Nesta ocasião os alunos foram desafiados a realizar experiências aleatórias tais como: o lançamento de dois e três dados, e a extração de bolas de duas caixas. A partir da simulação com o Geogebra da experiência aleatória do lançamento de dois dados, todos os alunos foram capazes de identificar experiências associadas a um mesmo modelo probabilístico, interiorizando esta aprendizagem sem problema, como por exemplo evidencia a resolução de Vanuza e Charol na figura seguinte.

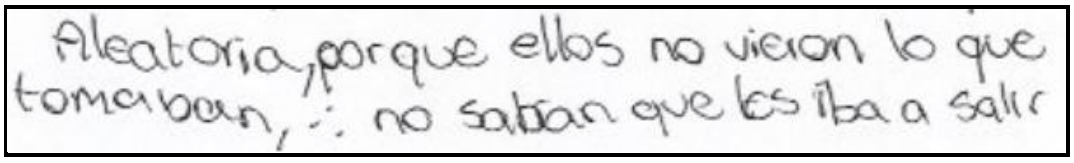


[cada dado representa uma caixa. Também, cada face do dado representa o número que possui cada bola dentro da caixa]

Figura 6.7. Resolução de Vanuza e Charol. T3.Q10

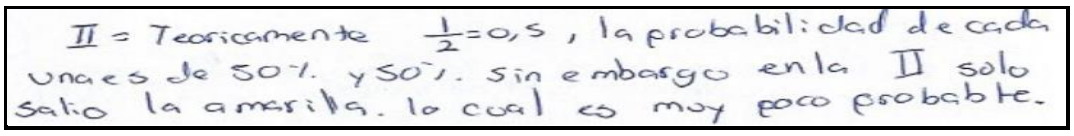
As alunas identificaram que o modelo de caixas contendo seis bolas numeradas de 1 a 6 também permite representar um dado de seis faces, podendo-se interpretar que ambas as alunas são capazes de fazer conexões entre objetos de diferentes contextos a partir da identificação um a um dos elementos que os compõem, neste caso os números das faces do dado e as bolas da caixa.

Além disso, nas tarefas a seguir observou-se que os alunos já não tiveram dificuldades em diferenciar experiências aleatórias e determinísticas, mantendo esta aprendizagem até o final da experiência de ensino, como evidencia a resolução de Laura (fig. 6.8). No entanto, ainda uma parte significativa da turma apresenta dificuldades para recorrer ao conceito de aleatoriedade na identificação de sequências equiprováveis. O anterior é evidenciado nas resoluções das figuras 6.9 e 6.10.



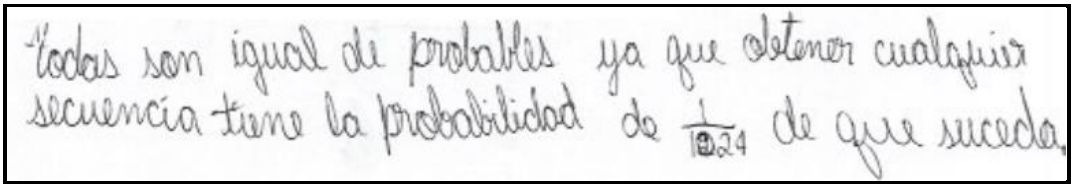
[aleatória, porque eles não viram o que tomavam, … Não sabiam o que lhes ia sair]

Figura 6.8. Resolução de Laura. TA.Q4a



[a sequência II, teoricamente $1/2 = 0.5$, a probabilidade de cada uma é 50%. No entanto, na sequência II só saiu a amarela, o qual é muito pouco provável]

Figura 6.9. Resolução de Ana. TA.Q4b



[todas são igualmente prováveis, dado que obter qualquer sequência tem probabilidade $1/1024$ de acontecer]

Figura 6.10. Resolução de Johan. TA.Q4b

No caso da resolução de Laura, ela utiliza a frase "*não sabiam que lhes ia sair*", aludindo à incerteza como propriedade da aleatoriedade para justificar a sua resolução e dessa forma identificar que a experiência é aleatória e não determinística. Por seu lado, as resoluções de Ana e Johan evidenciam que alguns alunos recorrem a mecanização para justificar as suas resoluções, de forma incorreta no caso de Ana e correta no caso de Johan. No caso de Ana, o fato das cores das bolas estarem distribuídas na sequência em percentagens muito distintas, leva-a a dar uma resposta desligada do contexto do enunciado e apoiada na probabilidade clássica. No caso de Johan, ainda que utilize corretamente a regra de Laplace e a regra do produto para inferir mediante cálculos probabilísticos que todas as experiências são igualmente prováveis, recorre igualmente a técnicas de forma mecânica, podendo ter evitado trabalho se tivesse identificado que todas as sequências eram igualmente prováveis pelo fato de a experiência ser aleatória.

Resumindo, pode-se considerar que a maioria dos alunos no início da experiência de ensino tinha um conceito de aleatoriedade associado a padrões onde dominava um conceito incorreto de 'lei dos pequenos números', e uma utilização descontextualizada do conceito de probabilidade clássica e alguns termos como variabilidade e incerteza. No entanto, os restantes alunos aludem corretamente a termos como acaso e sorte, e ao calculo de probabilidade clássica para identificar corretamente a aleatoriedade em diversas situações. À medida que se avançou na exploração das tarefas e sua discussão, todos os alunos foram capazes de identificar experiências aleatórias e determinísticas, como também identificar experiências aleatórias associadas a um mesmo modelo probabilístico. No entanto, a formulação de padrões iniciais incorretos, associadas à identificação de sequências aleatórias equiprováveis e a identificação da aleatoriedade em acontecimentos equiprováveis, permaneceram até o final da experiência de ensino na maioria dos alunos, guiados pelas suas crenças quotidianas e cálculos probabilísticos desligados do contexto do enunciado, em vez de refletir sobre a natureza aleatória da tarefa. Estes resultados evidenciam as dificuldades do aluno para fazer conexões entre o conceito de aleatoriedade e outros conceitos ligados à probabilidade, possivelmente devido a ser a aleatoriedade de um conceito mais abstrato em relação ao conceito de probabilidade, o qual podem associar a um número possível de obter usando regras usadas de modo mecânico.

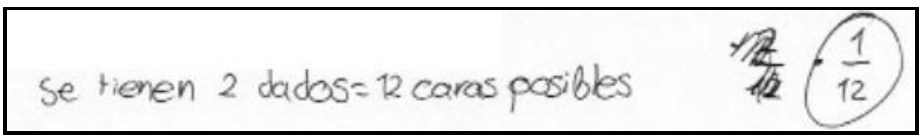
6.1.2 Conceitos associados ao espaço amostral: casos favoráveis, casos possíveis acontecimentos, tipos de acontecimentos (disjuntos, complementares, provável, certo, impossível).

Em todas as tarefas, à exceção da tarefa 5, foram trabalhados conceitos básicos que a teoria de conjuntos comumente aborda, por vezes assumindo nomes distintos na linguagem probabilística, mas referidos ao mesmo objeto matemático. Desta forma, os conceitos analisados nesta sessão correspondem a conceitos referentes à estrutura do espaço amostral e algumas relações matemáticas que se estabelecem entre estes.

a) Casos favoráveis, casos possíveis e acontecimento

Os conceitos de casos favoráveis, casos possíveis e acontecimentos foram os primeiros trabalhados com os alunos, sendo a tarefa 1 a mais relevante para a sua introdução, embora as outras tarefas permitam consolidar e avaliar as aprendizagens destes conceitos. Com a aplicação do teste diagnóstico esperava identificar as noções que os alunos tinham destes conceitos. Posteriormente, a partir da exploração de simulações com o Geogebra, esperava que eles desenvolvessem a capacidade de determinar casos possíveis, casos favoráveis e acontecimentos, como também estabelecer relações entre estes conceitos à medida que a repetição da experiência se realiza em maior número.

O teste diagnóstico permitiu observar que inicialmente a maioria dos alunos não tinham conhecimento dos termos casos favoráveis e casos possíveis, deixando sem resposta a questão TD.Q5 referente à experiência de lançamento de dois dados, onde se pedia para identificarem os casos favoráveis correspondentes ao acontecimento "*obter três como número maior*". Embora os outros (poucos) alunos tenham feito referência a estes dois conceitos, a maioria determina incorretamente os casos favoráveis e os casos possíveis, como se observa nas resoluções da TD.Q5, apresentadas nas figuras seguintes.



[têm-se 2 dados = 12 faces possíveis]

Figura 6.11. Resolução de Pedro.TD. Q5

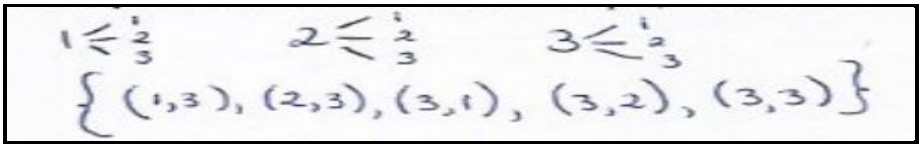
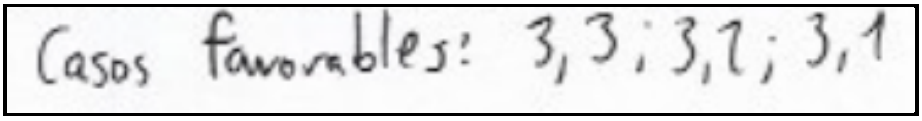


Figura 6.12. Resolução da Margarida.TD.Q5

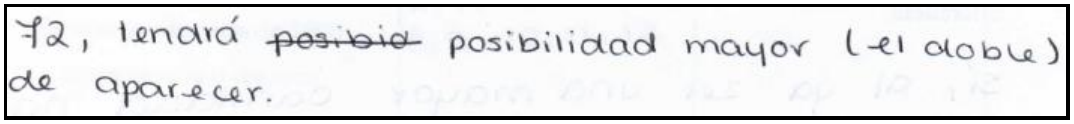


[Casos favoráveis: (3,3); (3,2); (3,1)]

Figura 6.13. Resolução do Simão.TD. Q5

Nas resoluções associadas a esta questão, quase todos os alunos utilizaram linguagem simbólica para representar os casos favoráveis na forma de pares ordenados, embora os casos possíveis não tenham sido enunciados explicitamente, mas apenas referidos no seu total, como se observa na resolução incorreta de Pedro. Este aluno, para além de responder sem fazer ligação ao contexto da questão, apresentando apenas o cálculo da probabilidade, assume incorretamente que os casos possíveis da experiência são doze, correspondentes à quantidade total de faces dos dois dados, transformando assim uma experiência composta numa simples. Esta dificuldade de Pedro pode evidenciar falta de trabalho com experiências compostas, ou falta de compreensão sobre quando se deve aplicar a regra do produto. No caso de Margarida, a aluna considera corretamente a ordem de saída dos números, elaborando para isso um diagrama em árvore, ao contrário de Simão e de outros alunos que, ainda que manifestem conhecer o conceito de casos favoráveis, não consideram a ordem de lançamento dos dados, levando-os a identificar menos casos favoráveis do que os devidos. Os restantes alunos utilizam linguagem verbal, mas seguindo os mesmos raciocínios de Pedro ou Simão, isto é, revelando algumas dificuldades para determinarem casos favoráveis e possíveis.

A partir da tarefa 1, todos os alunos tiveram oportunidade de explorar com o Geogebra a experiência do lançamento de dois dados, com o objetivo de introduzi-los aos conceitos de casos favoráveis, casos possíveis e acontecimento. Com o trabalho desta tarefa identificou-se novamente a dificuldade anteriormente manifestada por Pedro, sendo que só apenas alguns alunos mostraram saber determinar os casos possíveis com experiências compostas, como Dádiva e Ana ao responderem à questão T1.Q4.



[72, terá possibilidade maior (o dobro) de aparecer]

Figura 6.14. Resolução de Dadiva e Ana.T1.Q4

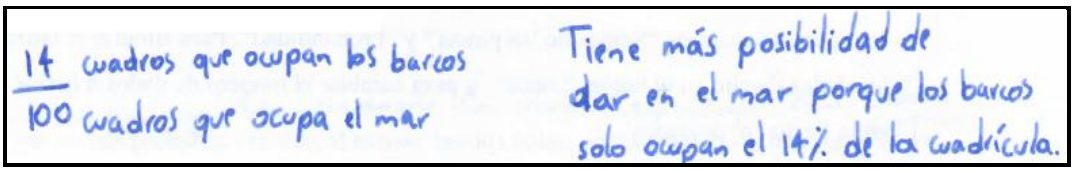
Nesta resolução de Dadiva e Ana é importante salientar que quando consideram 72 lançamentos, as alunas reconhecem 36 como uma possível resposta, evidenciado ao usarem a expressão "72 terá possibilidade maior (o dobro)". Para estas alunas é necessário lançar os dados pelo menos 72 vezes, sendo o dobro de trinta e seis, que é o número de casos possíveis da experiência, o que evidencia que estas alunas não só sabem o significado e como calcular casos possíveis, mas também consideram a aleatoriedade desses resultados ao assumir que lançar só 36 vezes os dados as condiciona a obter em cada lançamento um resultado possível, que é muito pouco provável em comparação às 72 vezes, onde poderiam obter diversas configurações na distribuição das frequências e ainda assim obter todos os casos possíveis.

Após o trabalho na tarefa 1, todos os alunos foram capazes de determinar casos favoráveis de acontecimentos simples e compostos, tal como evidenciam as suas resoluções nas tarefas seguintes, mas também o excerto seguinte da discussão da tarefa 1.

Investigador: simulando a experiência do lançamento de dois dados com "$n = 20$" obtiveram todos os resultados das somas possíveis?
Patrícia: sim
Marta: não, nós não.
Investigador: qual acham ser a causa de ter acontecido que alguns sim e outros não?
Diogo: cada número tem diferentes probabilidades de acontecer, aliás, não é o mesmo obter um sete e obter um dois. O dois você o pode obter só de uma forma, um no primeiro dado e um no segundo dado, enquanto que sete pode ser obtido com um dois e um cinco, quatro e três, etc.

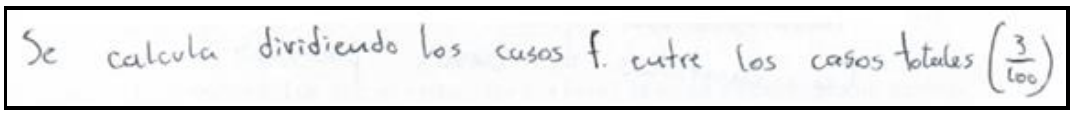
Nesta discussão, Diogo evidencia reconhecer casos favoráveis para distintos acontecimentos para justificar o porquê de Patrícia e Marta não obterem todos os resultados possíveis das somas das pintas das faces do dado.

Da mesma forma, os outros alunos mostraram ter compreendido o conceito de casos favoráveis e casos possíveis, determinando-os nas experiências das tarefas seguintes, como evidenciam as resoluções a seguir, referentes ao jogo batalha naval e a uma tarefa de avaliação.



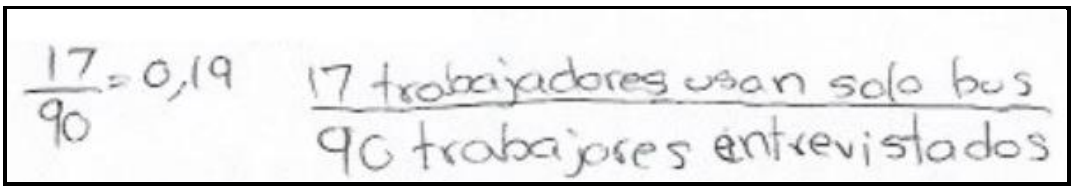
[Lado esquerdo: 14 quadrados que os barcos ocupam e 100 quadrados que o mar ocupa.
Lado direito: tem mais possibilidade de ser no mar porque os barcos só ocupam 14% da quadrícula]

Figura. 6.15. Resolução de Rosa e Fábio.T3.Q1



[calcula-se dividindo os casos favoráveis pelos possíveis $\left(\frac{3}{100}\right)$]

Figura 6.16. Resolução de António e Marcosos.T3.Q4



$\left[\frac{17}{90} = 0.19 \quad \frac{17\ trabalhadores\ utilizam\ só\ autocarro}{90\ trabalhadores\ entrevistados}\right]$

Figura 6.17. Resolução de Filipa.TA.Q3

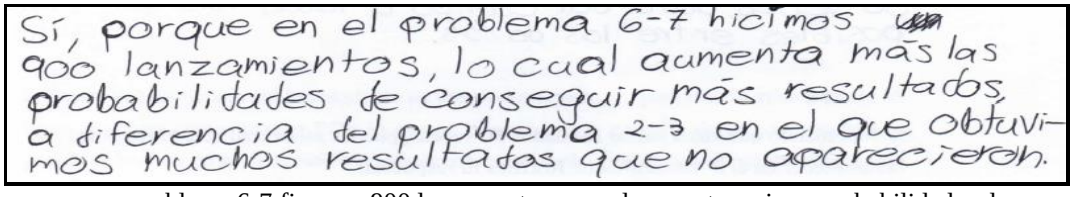
Por um lado, Rosa e Fábio aludem a expressão "quadrados que os barcos ocupam" para se referirem aos 14 casos favoráveis correspondentes a acertar em algum barco do jogo, e a "quadrados que o mar ocupa" para se referirem aos 100 casos possíveis da experiência aleatória, e usam estes conceitos para uma primeira aproximação ao cálculo da probabilidade clássica. No caso de António e Marcos, no que se refere à questão T3.Q4 que visava a inferência da regra de Laplace, eles também são capazes de determinar casos favoráveis e possíveis, destacando explicitamente como conceitos necessários para o cálculo da probabilidade. A resolução de Filipa na tarefa de avaliação, exemplificativa da dos outros alunos, e referente a dados de meios de transporte utilizados para a deslocação ao trabalho representados em Diagramas de Venn, confirma a aprendizagem do conceito de casos favoráveis e casos possíveis no final da experiência de ensino. Filipa é capaz de identificar acontecimentos através das representações em diagramas de Venn, podendo usar a informação proporcionada por estes para determinar corretamente os casos favoráveis do acontecimento A: "os trabalhadores usam só autocarro", como também os casos possíveis da experiência, e usar estes para calcular a probabilidade de um acontecimento.

Cabe salientar que alguns alunos revelaram dificuldades iniciais para diferenciar entre casos possíveis e acontecimentos quando a experiência aleatória era composta, como permite evidenciar a discussão da tarefa 1.

Investigador: qual a diferença entre casos possíveis e acontecimentos?
Dádiva: para mim a diferença entre os casos possíveis e os acontecimentos é que uns são mais propensos que outros. Por exemplo, oito é mais propenso a ser um acontecimento, pois tem mais formas de se obter esse resultado em comparação com outros como o dois.
Diogo: os casos possíveis e os acontecimentos para mim é o mesmo, são os resultados possíveis que se podem definir da experiência, e para cada um destes resultados se pode obter certos casos favoráveis.

Do diálogo anterior interpreta-se que para Dadiva o conceito de acontecimento está associado (sendo sinónimos) ao conceito de 'mais provável', pois para ela o acontecimento não é um qualquer subconjunto do espaço amostral, mas sim os subconjuntos com maior probabilidade. No caso de Diogo e grande parte dos alunos, os conceitos acontecimento e casos possíveis também são sinónimos, possivelmente por terem trabalhado só com experiências simples, como por exemplo o lançamento de um dado, nas quais o número de acontecimentos (obter um, obter dois, …, obter seis) coincide com os casos possíveis (1,2,3,4,5,6), manifestando assim dificuldade com a linguagem formal dos termos matemáticos. No entanto, tal como foi salientado em parágrafos anteriores, após a formalização da tarefa 1 todos os alunos foram capazes de determinar casos possíveis, casos favoráveis, acontecimentos, quer sendo a experiência simples quer sendo composta.

Por outro lado, é importante assinalar o contributo da questão T1.Q8, onde os alunos foram desafiados a abordar a noção da lei dos grandes números, podendo estabelecer uma relação entre os acontecimentos e o número de repetições de uma experiência, tal como se mostra na resolução da figura seguinte.



[sim, porque no problema 6-7 fizemos 900 lançamentos, o qual aumenta mais as probabilidades de conseguir mais resultados, diferentemente do problema 2-3 no qual obtivemos muitos resultados que não apareceram]

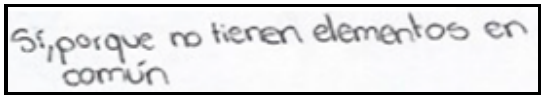
Figura 6.18. Resolução de Pedro e Kévim. T1.Q8

Pedro e Kévim, à semelhança dos restantes alunos da turma, inferem com ajuda das simulações realizadas com o Geogebra, que quanto mais repetições da experiência realizarem maior será a probabilidade de obter todos os acontecimentos associados à experiência, justificando assim porque para 10 e 20 repetições não obtiveram todos os acontecimentos, enquanto que para 900 lançamentos sim.

b) Tipos de acontecimentos: disjuntos, complementares, certos, impossíveis, mais prováveis e igualmente prováveis.

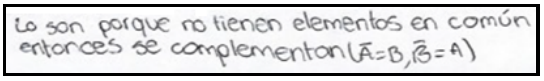
A análise destes conceitos foi orientada para dois aspetos: identificar se os alunos eram capazes de inferir as relações matemáticas de igualdade associadas a acontecimentos disjuntos, não disjuntos e complementares, e classificar tipos de acontecimentos a partir do valor numérico de probabilidade ou da representação do acontecimento em diagramas de Venn.

No início da experiência de ensino, o teste diagnóstico (TD.Q6) permitiu evidenciar que todos os alunos, à exceção de Laura, não reconhecem os conceitos de acontecimentos disjuntos e complementares, deixando sem resposta a questão ou manifestando explicitamente que não conheciam esses termos. Por exemplo, António manifesta "não sei a que se refere" e Afonso salienta "não o vi em oitavo nem nono ano", evidenciando desta forma ser a primeira vez que se confrontam com os termos. No caso de Laura, embora saiba enunciar a definição teórica dos conceitos de acontecimentos disjuntos e complementares, as suas respostas (fig. 6.19, fig. 6.20) referentes à identificação de acontecimentos disjuntos e complementares, respetivamente, revelam que a aluna não estabelece conexão com os dados do enunciado, os quais são probabilidades numéricas dos acontecimentos A e B.



[sim, porque não têm elementos em comum]

Figura 6.19. Resolução de Laura.TD.Q6a



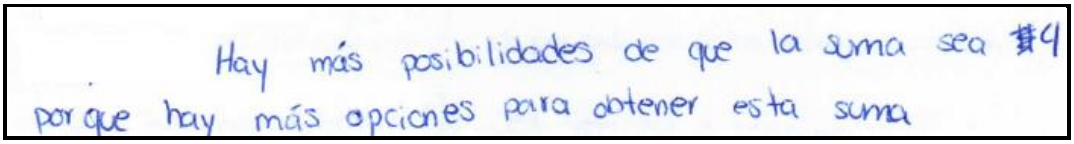
[são porque não tem elementos em comum, então se complementam]

Figura 6.20. Resolução da Laura.TD.Q6b

Laura não relaciona o conceito de acontecimentos disjuntos com a propriedade da probabilidade para a união de acontecimentos $\big(P(A \cup B) = P(A) + P(B)\big)$, limitando-se a enunciar uma definição carente de sentido no contexto da questão, o que a conduz a uma resposta errada. Além disso, da justificação para acontecimentos complementares (figura

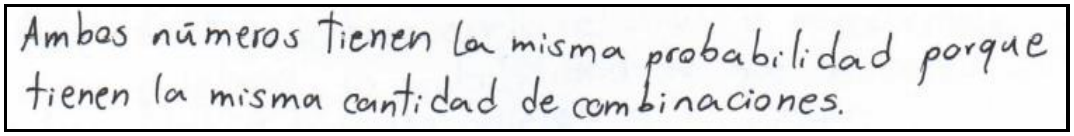
6.20), pode-se interpretar que para Laura todo par de acontecimentos disjuntos serão também complementares, o que é incorreto, manifestado por ela possivelmente devido ao uso que se lhe dá ao termo 'complemento' na vida quotidiana.

Após a exploração da primeira parte da tarefa 3, onde os alunos foram desafiados a inferir a regra de Laplace, estes realizaram simulações do lançamento de dados para classificar acontecimentos em certos, impossíveis, mais prováveis e equiprováveis nas questões T3.Q11, T3.Q12, T3.Q13 e T3.Q14, referentes à extração de bolas de duas caixas. As resoluções evidenciaram que todos os alunos são capazes de classificar acontecimentos olhando para o valor de probabilidade clássica. Em particular, nas suas resoluções, a maioria dos alunos identifica que basta olhar para os casos favoráveis, pois apercebem-se corretamente que os acontecimentos aludem à mesma experiência, e , portanto, os casos possíveis são os mesmos, dependendo o valor de probabilidade só dos casos favoráveis, como se observa nas resoluções a seguir.



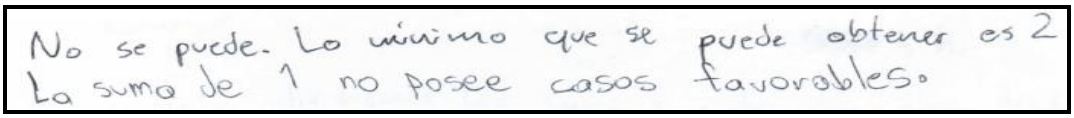
[há mais possibilidades que a soma seja 4 porque há mais opções para obter esta soma]

Figura 6.21. Resolução de Margarida e Esther.T3.Q11



[ambos os números têm a mesma probabilidade porque têm a mesma quantidade de combinações]

Figura 6.22. Resolução de Filipa e Isabel.T3.Q12



[não se pode. O mínimo que se pode obter é 2. A soma de 1 não possui casos favoráveis]

Figura 6.23. Resolução de António e Marcos.T3.Q13

No caso da resolução de Margarida e Esther, as alunas evidenciam que a soma de quatro é mais provável que a soma de onze, aludindo a que a soma de quatro tem "mais opções" para se referirem aos casos favoráveis da soma de quatro (1-3, 3-1, 2-2), em comparação com os casos favoráveis para a soma de onze (5- 6, 6-5). Por seu lado, Filipa e Isabel, referindo-se a acontecimentos de obter somas de oito e seis, usam o termo "mesma probabilidade" para aludir a acontecimentos equiprováveis, fundamentando a sua argumentação no facto dos

acontecimentos “terem a mesma quantidade de combinações”. Por último, António e Marcos recorrem à frase “Não se pode” para se referir ao acontecimento “obter uma soma de um” como um acontecimento impossível.

Com a discussão da tarefa 3 os conceitos de acontecimento impossível, acontecimento certo, acontecimento mais provável e equiprovável acabaram por se formalizar, sendo capazes os alunos de dar exemplos concretos de acontecimentos, tal como evidencia, por exemplo, o dialogo a seguir.

Investigador: quanto é o valor mínimo que pode ter a probabilidade de um acontecimento?
Diogo: zero, pois seria quando não há casos favoráveis.
Investigador: e quando pode acontecer isto? Aliás, para que tipo de acontecimentos?
Diogo: para o conjunto vazio, pois não tem elementos, portanto, é impossível que aconteça.

Do diálogo observa-se que Diogo identifica que qualquer acontecimento com probabilidade igual a zero será um acontecimento impossível, aludindo para isso a acontecimentos que não têm casos favoráveis, como o conjunto vazio.

A tarefa 4 continua o trabalho com tipos de acontecimentos, mas desta vez desafiando os alunos a explorar propriedades dos acontecimentos disjuntos e não disjuntos. Todos os alunos evidenciaram ser capazes de inferir a regra de probabilidade para a união de acontecimentos disjuntos e a regra de probabilidade para acontecimentos complementares, utilizando para isso o registo dos resultados de pelo menos duas simulações, correspondentes a distintas posições de dois conjuntos representados mediante diagramas de Venn. Os alunos todos reconheceram que só com uma observação não seria suficiente para encontrar um padrão, tal a como mostra o registro apresentado na figura a seguir.

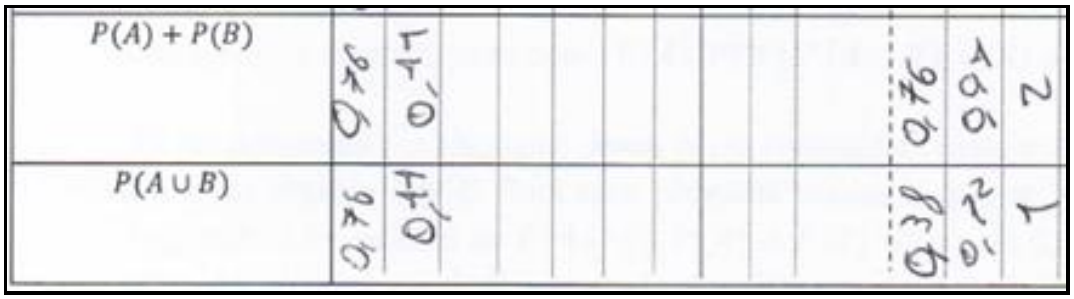
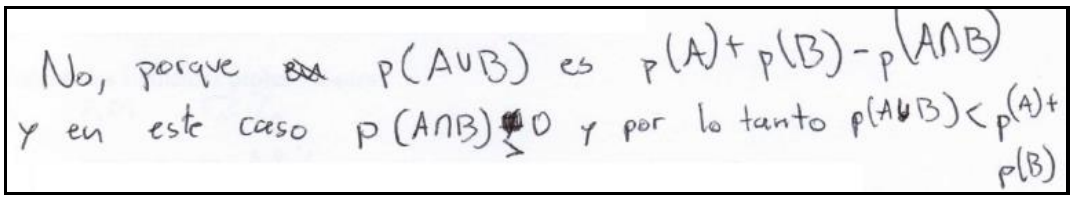


Figura 6.24. Resolução de António e Marcos. Tabela de registo de dados T4.

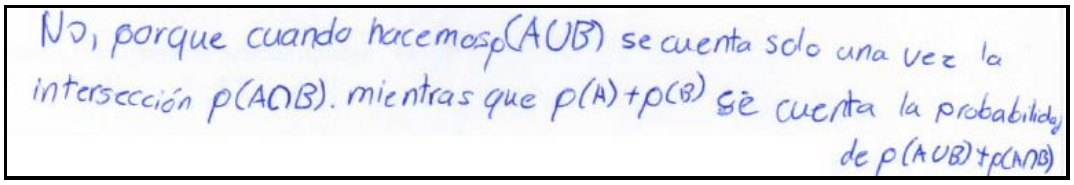


[não, porque $P(A \cup B)$ é $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ e neste caso $P(A \cap B) > 0$ e portanto $P(A \cup B) < P(A) + P(B)$]

Figura 6.25. Resolução de António e Marcos. T4.Q3b

Na tabela observamos do lado esquerdo os dados registados para acontecimentos disjuntos e do lado direito os dados registados para acontecimentos não disjuntos. Tanto António como Marcos evidenciam, depois de fazer duas simulações, que quando os acontecimentos são disjuntos verifica-se a igualdade entre as probabilidades $P(A \cup B)$ e $P(A) + P(B)$. No entanto, para inferirem uma relação entre estas probabilidades, no caso de os acontecimentos não serem disjuntos, precisaram de mais simulações para encontrar um padrão, chegando a inferir que a igualdade neste caso não se cumpre (fig. 6.25), mas sim que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, dado que $P(A \cap B) > 0$.

Os alunos que fizeram mais registos e, consequentemente, mais simulações, evidenciaram ir mais além dos dados numéricos, como no caso de Tiago e Simão (fig. 6.26), que identificam que a área associada ao número $P(A \cap B)$ está considerada tanto no número $P(A)$ como também no número $P(B)$, pois $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$, e $P(A \cap B) > 0$, pelo que a soma $P(A) + P(B)$ considera duas vezes o número $P(A \cap B)$, enquanto que o número $P(A \cup B)$ só considera uma vez ao número $P(A \cap B)$.



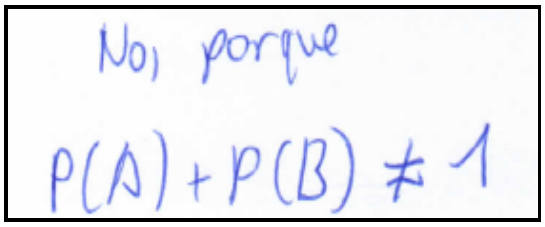
[não, porque quando fazemos $P(A \cup B)$ se conta só uma vez a interseção $P(A \cap B)$, enquanto que $P(A) + P(B)$ considera as probabilidades de $P(A \cup B) + P(A \cap B)$]

Figura 6.26. Resolução de Tiago e Simão. T4.Q3a

Assim, Tiago e Simão, ao trabalharem com o Geogebra, inferem que a igualdade para acontecimentos disjuntos não se mantém para os acontecimentos não disjuntos, partindo de uma análise gráfica, considerando as áreas dos acontecimentos $A, B, A \cap B, A \cup B$ como probabilidades, tal como nas simulações com o Geogebra, mas sem recorrer aos dados numéricos da simulação.

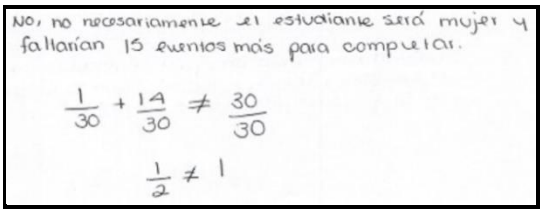
No caso da exploração dos acontecimentos complementares, os alunos todos chegaram à igualdade $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ sem dificuldades, observando que a propriedade não depende dos acontecimentos serem disjuntos, e inclusive alguns aludindo à Teoria de Conjuntos para justificar, tal como Laura e Johan, que manifestam com as suas palavras que *"*$P(\bar{A})$ e $P(\bar{B})$ vão ser o que lhe falta *a* $P(A)$ e $P(B)$ respetivamente para ser 1*"*, podendo-se interpretar que Laura e Johan identificam que a probabilidade do acontecimento universal é 1.

No final da experiência de ensino a maioria dos alunos utiliza corretamente a definição para identificar acontecimentos disjuntos e complementares, quer usando linguagem simbólica, quer graficamente, e inclusive alguns alunos (embora em menor número) recorram corretamente à propriedade de acontecimentos complementares $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, em vez de aludir à definição como igualdade entre a união de dois acontecimentos e o acontecimento universal, o que não se tinha observado no teste diagnóstico. Por exemplo, no caso de Dádiva, como também acontece com Tiago Simão, a aluna refere que $P(A) = \frac{1}{30}$ e $P(B) = \frac{14}{30}$, pelo que não se cumpre a propriedade de acontecimentos complementares, concluindo que os acontecimentos não são complementares.



[não, porque $P(A) + P(B) \neq 1$]

Figura 6.27. Resolução de Tiago e Simão.TA.Q1e



[não, não necessariamente o estudante será mulher, e faltariam 15 acontecimentos mais para completar]

Figura 6.28. Resolução da Dádiva.T4.Q4c

A tarefa de avaliação permitiu evidenciar que apenas alguns alunos ainda mantêm incompreensões sobre acontecimentos complementares, nomeadamente quando um acontecimento é subconjunto do outro. É o caso da resolução de Pedro (fig. 6.29), em que se pode interpretar que o aluno, mediante o esquema que apresenta, acha que sendo Z subconjunto de A, torna os acontecimentos complementares. Neste contexto, para Pedro o significado de acontecimentos complementares está associado a um conceito intuitivo que qualquer subconjunto (as partes) complementa o conjunto que o contém (o todo).

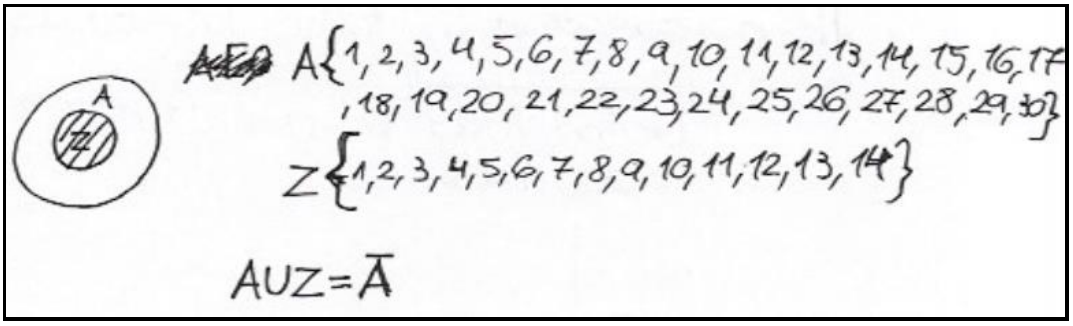


Figura 6.29. Resolução do Pedro.TA.Q1

Resumindo, após considerar as aprendizagens evidenciadas pelos alunos sobre conceitos associados ao espaço amostral, pode-se afirmar que a abordagem com o Geogebra dos conceitos de acontecimento, casos favoráveis e casos possíveis, permitiram os alunos compreender os conceitos, podendo determinar casos favoráveis e casos possíveis de acontecimentos e usar os mesmos para calcular probabilidades teóricas e classificar acontecimentos equiprováveis, mais prováveis e impossíveis. Inclusive, foram capazes de estabelecer relações entre os casos possíveis e a lei dos grandes números. Além disso, todos os alunos foram capazes de inferir as relações de igualdade para acontecimentos disjuntos, não disjuntos e complementares estipuladas para trabalhar na proposta de ensino, partindo da exploração de probabilidades obtidas em simulações com o Geogebra, e usando-as para classificar acontecimentos disjuntos e complementares em alguns casos. No entanto, um número pequeno de alunos não foi capaz de superar algumas das suas noções intuitivas, particularmente as relativas a acontecimentos complementares, considerando qualquer subconjunto como complementar ao respetivo conjunto, mostrando dificuldade para resolverem tarefas envolvendo acontecimentos complementares com base nas suas propriedades formais.

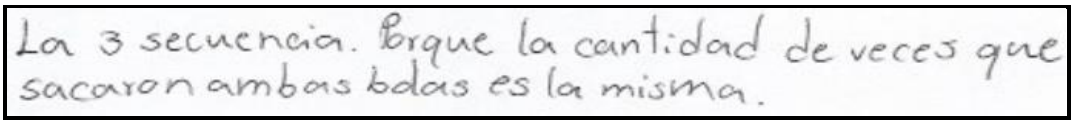
6.1.3 Conceitos associados aos significados clássico e frequencista de probabilidade e a sua relação com a equiprobabilidade: probabilidade, probabilidade clássica, probabilidade frequencista, equiprobabilidade.

a) Probabilidade clássica

O conceito clássico de probabilidade foi um conceito trabalhado em todas as tarefas, à exceção das tarefas 1 e 2, e avaliado a partir do teste diagnóstico e o teste de avaliação. Com o teste diagnóstico esperava observar se os alunos já tinham tido contato com o conceito

formal da regra de Laplace ou se existia só uma noção do conceito. Com as outras tarefas esperava que os alunos inferissem a regra de Laplace para logo determinar a probabilidade de acontecimentos elementares equiprováveis, assim como também utilizar a regra para identificarem equiprobabilidade de acontecimentos elementares.

O teste diagnóstico revelou que a maior parte dos alunos apresenta uma noção de probabilidade atribuída à divisão em partes iguais e, portanto, equiprobabilidade dos acontecimentos elementares, como acontece por exemplo com Flor na sua resolução da questão TD. Q4, correspondente a identificar sequências igualmente prováveis.

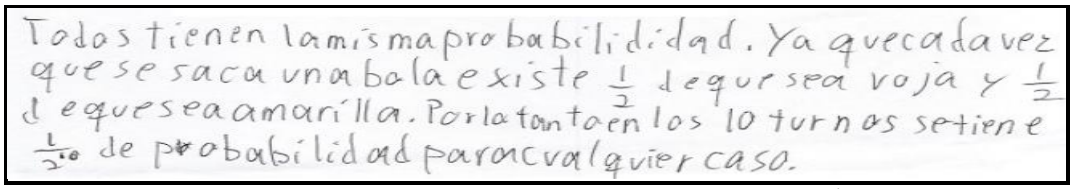


[a sequência 3, porque a quantidade de vezes que tiraram ambas as bolas é a mesma]

Figura 6.30. Resolução da Isabel. TD.Q4

Isabel responde incorretamente que a sequência de extração de bolas mais provável é a terceira, dado que o número de bolas vermelhas é igual ao número de bolas amarelas, possivelmente aludindo à sua experiência quotidiana com o cálculo de percentagens.

Por outro lado, alguns alunos, embora poucos, tal como o Diogo, evidenciaram ter tido contato com a regra de Laplace antes de começar o trabalho com as tarefas do Geogebra.



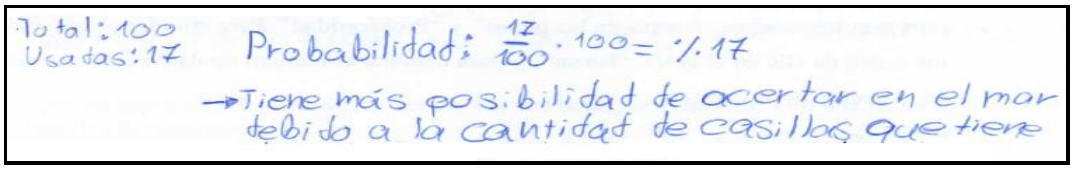
[todos têm a mesma probabilidade, dado que cada vez que se tira uma bola existe $1/2$ de que seja vermelha e $1/2$ de que seja amarela, por tanto, em 10 extrações se tem $\frac{1}{2^{10}}$ de probabilidade para qualquer caso]

Figura 6.31. Resolução de Diogo. TD.Q4

Diogo utiliza a regra de Laplace para calcular a probabilidade de sair a cor de bola vermelha e a probabilidade de sair a cor de bola amarela, após isso aplica a regra do produto e obtém as probabilidades das três sequências, aludindo que as três sequencias têm a mesma probabilidade porque os cálculos levam ao mesmo valor que é $\frac{1}{2^{10}}$.

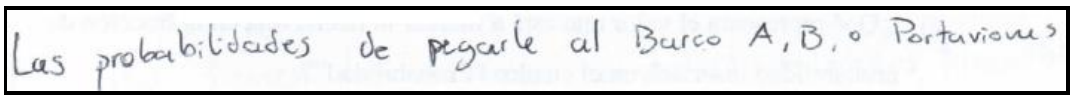
Com a tarefa 3, referente ao jogo da 'batalha naval' e a experiências de lançamentos de dois e três dados, trabalhou-se a exploração do conceito clássico de probabilidade. As

questões T3.Q1 e T3.Q3 foram de muita importância, evidenciando que nas resoluções da maioria dos alunos permanece um conceito de percentagem associado ao cálculo de probabilidades, como mostram as figuras a seguir.



[tem mais possibilidade acertar no mar dado a quantidade de quadradinhos que tem]

Figura 6.32. Resolução de Kévim e Pedro. T3.Q1

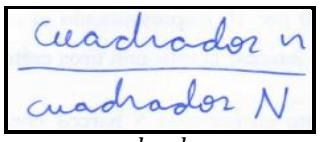


[as possibilidades de acertar no barco A, B, ou portaviões]

Figura 6.33. Resolução de António e Marcos. T3.Q3

Kévim e Pedro, partindo da quantidade de 'quadradinhos' dos barcos, determinam uma percentagem, a qual associam ao valor de probabilidade de acertar em algum barco, facto que é também salientado, explicitamente, com a resolução de António e Marcos, fazendo referência ao significado das frações calculadas na questão T3.Q2 como probabilidades, mesmo sem conhecer a regra de Laplace.

A partir da sequência das questões T3.Q2, T3.Q3, T3.Q4, T3.Q5 e T3.Q6, os alunos todos puderam inferir a regra de Laplace, proporcionando respostas como a da figura a seguir, referida a uma forma geral de calcular a probabilidade em termos de n y N.



$\left[\frac{quadrados\ n}{quadrados\ N}\right]$

Figura 6.34. Resolução de Rosa e Fábio.T3.Q7

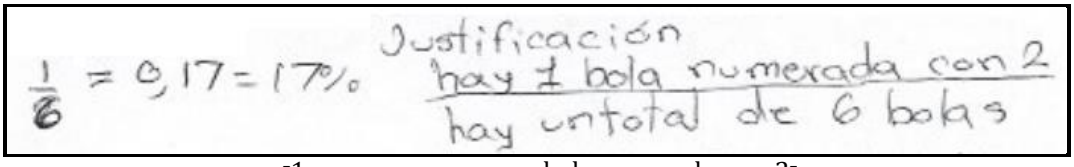
Rosa e Fábio aludem aos termos "quadrados n" e "quadrados N" para se referirem a casos favoráveis e a casos possíveis respetivamente, mas não a que estes 'quadrados' devam de ter 'o mesmo tamanho', isto é, sejam equiprováveis.

Ainda que nenhum dos alunos tenha explicitado esta condição nas suas resoluções, isso foi explicitado na discussão da tarefa 3:

Investigador: Em geral, para um barco A de dimensão n, o qual está no mar/água de dimensão N, como calculas a probabilidade do teu adversário acertar no barco A?, sendo n e N números inteiros.
A turma toda: n a dividir por N.
Investigador: concordam todos?
A turma toda: sim
Investigador: e o que acontece se um dos quadradinhos fosse maior que os outros?
Pedro: há que pôr uma unidade básica de medida, se houver algum maior do que outro deve-se obter a proporção que representa esse quadradinho maior em relação com outros da medida standard.

Do diálogo anterior observamos que Pedro usa as frases "há que pôr uma unidade básica de medida" e "medida standard" para argumentar que, para aplicar a regra de Laplace, os 'quadradinhos' (referidos a casos possíveis) devem ser equiprováveis, sendo a quantidade de casos favoráveis e casos possíveis determinada a partir da definição desta 'medida standard'.

No final da experiência a maioria dos alunos foram capazes de determinar probabilidades com a regra de Laplace, quer com experiências aleatórias simples quer em compostas, tal a como evidencia a resolução de Filipa. A aluna usa a regra de Laplace para o cálculo de probabilidades de bolas numeradas contidas numa caixa, aludindo à definição clássica de probabilidade para dar a sua justificação, pois é o conceito imediato de probabilidade que permanece no seu raciocínio, utilizando inclusive diferentes representações como: fração, notação decimal e percentagem, para expressar a probabilidade.



$$\left[\frac{1}{6} = 0.17 = 17\%, \frac{\text{uma bola numerada com 2}}{\text{um total de 6 bolas}}\right]$$

Figura 6.35. Resolução de Filipa. TA.Q2

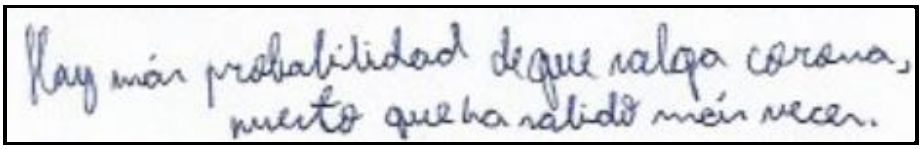
Os restantes alunos, mesmo tendo inferido a regra de Laplace, revelaram dificuldade em determinar probabilidades clássicas a partir de representações com diagramas de Venn até o final da experiência de ensino. Assim por exemplo, no caso de Dádiva e Ana, elas na questão T4.Q4 interpretam as probabilidades dadas no enunciado como casos favoráveis, salientando incorretamente que $P(D) = \frac{3}{25}$, quando na realidade o enunciado já estabelece implicitamente que a probabilidade do acontecimento D corresponde a 3. Algo similar acontece com Joana na questão TA.Q3, respondendo incorretamente que "$P(A) = 17$",

evidenciando considerar os dados do enunciado do diagrama de Venn como probabilidades, quando realmente correspondem a casos favoráveis do acontecimento, se calhar porque interpreta o símbolo $P(D)$ como um símbolo referido a casos favoráveis do acontecimento D e não como uma probabilidade do acontecimento. Desta forma, interpreta-se destas duas respostas que estes alunos ainda não fazem conexões entre o enunciado e as representações gráficas outorgadas pelos diagramas de Venn, ou inclusive, apresentam possivelmente dificuldade associada à linguagem simbólica.

b) Probabilidade frequencista

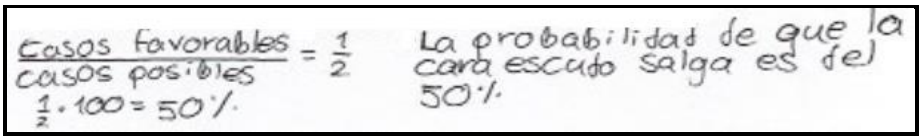
O conceito de probabilidade frequencista foi avaliado no teste diagnóstico e no teste de avaliação, e trabalhado na tarefa 5, de modo que os alunos fossem capazes de inferir a lei dos grandes números para o cálculo da probabilidade frequencista e utilizar o seu significado, quer para determinar a probabilidade de um acontecimento quer para identificar equiprobabilidade.

As primeiras resoluções dos alunos, observadas na questão TD.Q8, referente à realização de duas experiências de lançamento de uma moeda com um número de repetições diferentes, evidenciaram que os alunos não tinham um conceito formal de probabilidade frequencista. Como consequência, cerca da metade dos alunos não responderam à questão por não saberem qual das duas experiências deveriam usar para o cálculo da probabilidade. Quanto aos alunos que responderam à questão, alguns como Afonso (fig. 6.36) e Pedro (fig 6.37) evidenciam não conhecer o conceito frequencista.



[há mais probabilidade de sair coroa, pois tem saído mais vezes]

Figura 6.36. Resolução do Afonso.TD.Q8

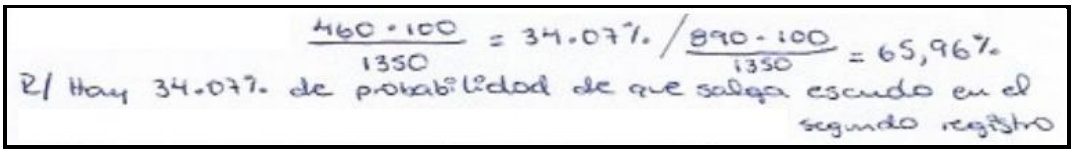


[$\frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}} = \frac{1}{2}$, a probabilidad de sair a face escudo é 50%]

Figura 6.37. Resolução de Gabriel.TD.Q8

Da argumentação de Afonso interpreta-se que associa a maior frequência absoluta a uma maior probabilidade do acontecimento, mas não sabe como determinar a probabilidade através do conceito frequencista, pois não faz nenhum cálculo de probabilidade, sendo isso o solicitado na questão. No caso da resolução de Pedro, o aluno alude ao conceito clássico de probabilidade, interpretando-se que não sabe que tabela usar e, portanto, não conhece o conceito frequencista.

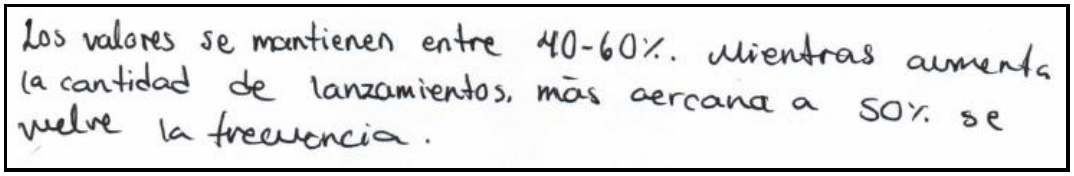
Os restantes alunos da turma manifestaram ter certa noção associada ao conceito frequencista, manifestado por saberem que tabela utilizar para o cálculo da probabilidade e como proceder para seu cálculo, como é o caso de Margarida.



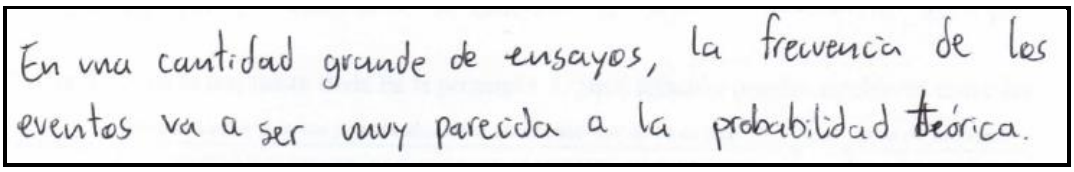
[R/ existe 34.07% de probabilidade de sair escudo no segundo registro]
Figura 6.38. Resolução da Margarida.TD.Q8

Da resolução de Margarida interpreta-se que as frações calculadas permitem identificar uma noção frequencista de probabilidade, mas limitando-se a utilizar decimais, evidenciando que o conceito formal de lei dos grandes números como limite das frequências relativas não existe ainda como parte das suas aprendizagens.

Com a exploração da tarefa 5, os alunos foram introduzidos ao conceito de probabilidade frequencista, sendo de relevância as questões T5.Q2 e T5.Q3 trabalhadas com o Geogebra. Das resoluções seguintes (fig. 6.39, fig. 40.6), e com base nas simulações realizadas pelos alunos, pode interpretar-se que eles são capazes de inferir corretamente a lei dos grandes números como limite das frequências que tende à probabilidade teórica ou clássica.



[os valores mantêm-se entre 40% e 60%. Quanto mais aumenta a quantidade de lançamentos mais perto do 50% está a frequência]
Figura 6.39. Resolução de Afonso e Leonardo.T5.Q2

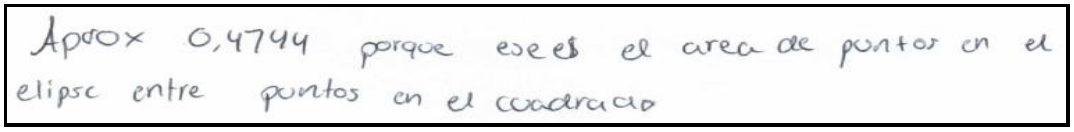


[Numa quantidade grande de ensaios, a frequência dos acontecimentos vai ser muito parecida à probabilidade teórica]

Figura 6.40. Resolução de António e Marcos.T5.Q3

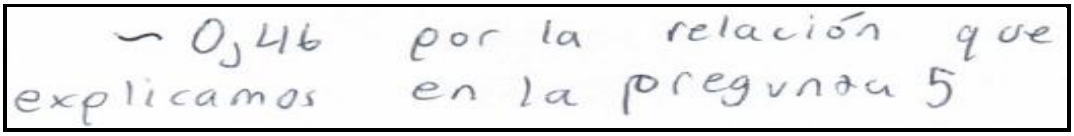
No caso de Afonso e Leonardo, os alunos evidenciam que à medida que realizam mais repetições da experiência as frequências vão convergindo para o valor de 0.5, evidenciando que aprendem o conceito frequencista, enquanto António e Marcos, tal como o resto da turma, evidenciam ser capazes de inferir a lei dos grandes números de onde deriva o conceito frequencista, manifestado pela relação de limite entre o valor das frequências relativas e o valor teórico de probabilidade.

Após a formalização do conceito de probabilidade frequencista, todos os alunos foram capazes de aplicá-lo no contexto do cálculo de áreas apresentado na segunda parte da tarefa 5. Os alunos fizeram uso de simulação para trabalhar a experiência de inscrever pontos dentro de um quadrado, em cujo interior se encontrava uma elipse, sendo necessário recorrer ao conceito de probabilidade frequencista para determinar a probabilidade de um ponto se situar no interior da elipse (T5.Q6) e, assim, obter uma aproximação para a área da elipse (T5. Q8), como mostram as resoluções seguintes.



[aproximadamente 0.4744 pois essa é a área de pontos na elipse entre pontos no quadrado]

Figura 6.41. Resolução de Tiago e Simão.T5.Q6



[aproximadamente 0.46 pela relação que explicamos na questão 5]

Figura 6.42. Resolução de Enrique e Ricardo.T5.Q6

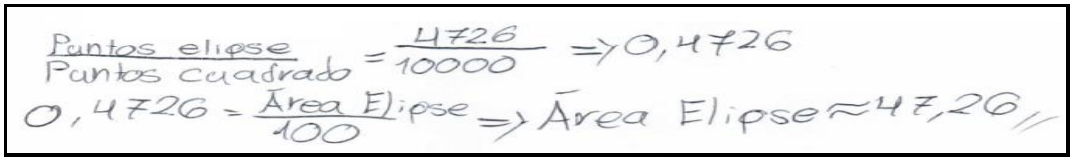
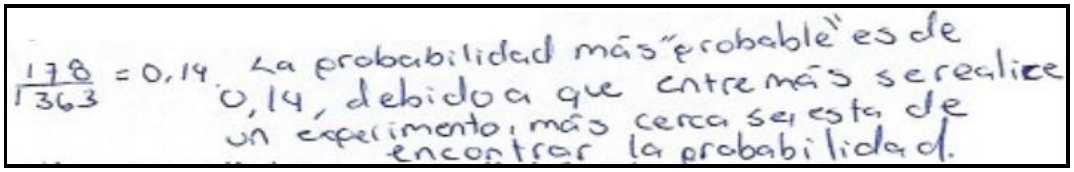


Figura 6.43. Resolução de Kévim e Pedro.T5.Q8

Das duas primeiras resoluções, observa-se que Tiago e Simão, como também Enrique e Ricardo, evidenciam serem capazes de recorrer ao conceito de probabilidade frequencista para determinar a probabilidade de um ponto ser inscrito no interior da elipse usando dez mil repetições da experiência, o que aproxima muito bem o valor teórico de probabilidade segundo a lei dos grandes números. Em ambas as resoluções, os alunos estabelecem conexões entre a razão obtida entre a quantidade de pontos no interior da elipse e no interior do quadrado, e a razão entre as áreas da elipse e do quadrado, facto que é salientado explicitamente por Enrique e Ricardo quando referem que usam a relação da questão 5 desta tarefa para justificar corretamente o seu cálculo de probabilidade. A partir da relação referida por Enrique e Ricardo, todos os alunos puderam encontrar a área aproximada da elipse, sendo de importância as questões anteriores para os guiar a estabelecer a equação que permite obter esse valor, tal a como se observa na resolução de Kévim e Pedro.

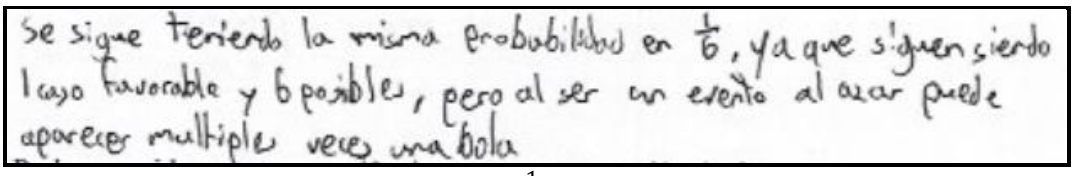
Finalmente, no teste de avaliação, aproximadamente a metade dos alunos recorreu ao conceito de probabilidade frequencista para determinar a probabilidade do acontecimento definido como 'obter a bola com o número dois', tal como Ana (fig. 6.44), o que permitiu também concluir corretamente que não havia equiprobabilidade do dado da experiência.



[a probabilidade mais "provável" é de 0.14, dado que quanto mais se realizar uma experiência, mais perto se está de encontrar a probabilidade]

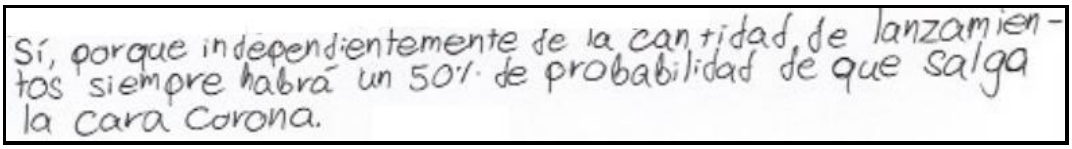
Figura 6.44. Resolução de Ana.TA.Q2a

No entanto, a outra parte dos alunos, a que pertence Leonardo, manifesta tendência para estabelecer equiprobabilidade dos acontecimentos elementares em todas as experiências e calcular a probabilidade usando a regra de Laplace, sendo a aleatoriedade de uma justificação para algumas bolas ter mais frequência que outras, possivelmente por ser esta regra mais adaptável às suas crenças ou experiências com fenómenos probabilísticos. Da resolução seguinte de Leonardo, pode-se interpretar que a probabilidade teórica e a probabilidade frequencista serão sempre iguais, pelo que utilizando a regra de Laplace não é necessário usar os registos das frequências.

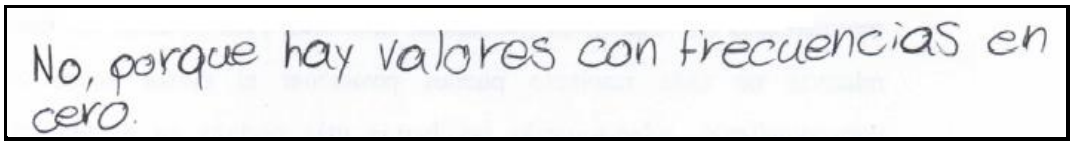


[segue-se tendo a mesma probabilidade de $\frac{1}{6}$, dado que segue sendo um caso favorável e seis possíveis, mas sendo um acontecimento ao acaso pode aparecer muitas vezes a bola]
Figura 6.45. Resolução do Leonardo.TA.Q2a

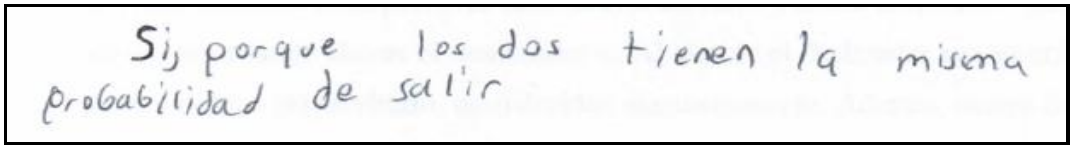
Especificamente falando do conceito de equiprobabilidade, desde o princípio e até o final da experiência de ensino, alguns alunos manifestaram ter a crença de que a equiprobabilidade está sempre presente nos acontecimentos elementares, como evidenciam as resoluções seguintes de Pedro, Enrique e Ricardo, referidas ao lançamento de uma moeda.



[sim, porque independentemente da quantidade de lançamentos sempre haverá um 50% de probabilidade de sair a face coroa]
Figura 6.46. Resolução do Pedro.TD.Q8



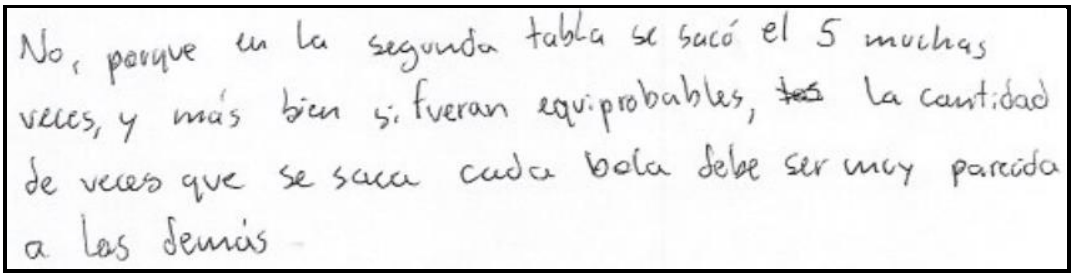
[não, porque existem valores com frequências em zero]
Figura 6.47. Resolução de Filipa e Isabel.T2. Q1



[sim, porque os dois têm a mesma probabilidade de sair]
Figura 6.48. Resolução de Enrique e Ricardo.T5.Q1

No caso de Pedro, inicialmente manifesta conhecer a regra de Laplace mas não reflete que esta se aplica só para acontecimentos elementares equiprováveis, levando-o a pensar que sempre pode aplicar a regra para o lançamento de uma moeda. No caso de Filipa e Isabel, ainda que o dado da experiência tenha sido criado para ser equilibrado, para as alunas repetir a experiência aleatória poucas vezes (dez repetições da experiência) é suficiente para tomar uma decisão, recorrendo à 'lei dos pequenos números' e, portanto, encontrando incorretamente que não havia equiprobabilidade no dado.

Os restantes alunos manifestaram desde o início associar corretamente identificar equiprobabilidade após a formalização do conceito na tarefa 2, mantendo esta postura até o final, como mostra a resolução seguinte, referente a identificar se existe equiprobabilidade no dado partindo do registo de duas tabelas.



[não, porque na segunda tabela saiu o cinco muitas vezes, e se fossem equiprováveis a quantidade que se extrai cada bola deve ser muito parecida às outras]

Figura 6.49. Resolução de Marcos. TA.Q2

Marcos evidencia saber que precisa do conceito frequencista e da segunda tabela para calcular a probabilidade, sendo capaz de identificar que não existe equiprobabilidade pelo facto de não tender ao mesmo valor as frequências dos acontecimentos elementares, isto é, não cumprir o conceito de equiprobabilidade.

Deste modo, no final da experiência, parte dos alunos ainda mostram ter um conceito de equiprobabilidade condicionado ao significado de probabilidade usado (clássica ou frequencista), o qual repercute na decisão sobre a mesma.

Sintetizando, e no que se refere às aprendizagens dos conceitos associados ao significado de probabilidade, os resultados evidenciam que no início da experiência de ensino a maioria dos alunos tinha uma noção de probabilidade associada ao conceito clássico, embora alguns já revelassem ter uma noção frequencista de probabilidade, mas desligada da lei dos grandes números. Após à exploração dos conceitos de equiprobabilidade, probabilidade clássica e probabilidade frequencista, todos os alunos foram capazes de inferir a regra de Laplace e a lei dos grandes números. No entanto, alguns alunos tiveram dificuldade em calcular probabilidades clássicas a partir de Diagramas de Venn, como também em usar a probabilidade frequencista em experiências onde podiam também usar a probabilidade clássica, como por exemplo o lançamento de uma moeda e o lançamento de um dado, privilegiando a probabilidade clássica e levando-os a assumir equiprobabilidade, mesmo nos casos em que não existia. Esta dificuldade com a probabilidade frequencista pode ser

consequência, das suas crenças cotidianas e do cálculo de probabilidades por meio da regra de Laplace, a qual é aprendida antes do cálculo frequencista, inclusive em alguns alunos dos anos anteriores. Ainda assim, todos os alunos foram capazes de identificar o conceito de probabilidade frequencista em tarefas onde não era possível recorrer ao conceito clássico, como por exemplo na aproximação da área da elipse.

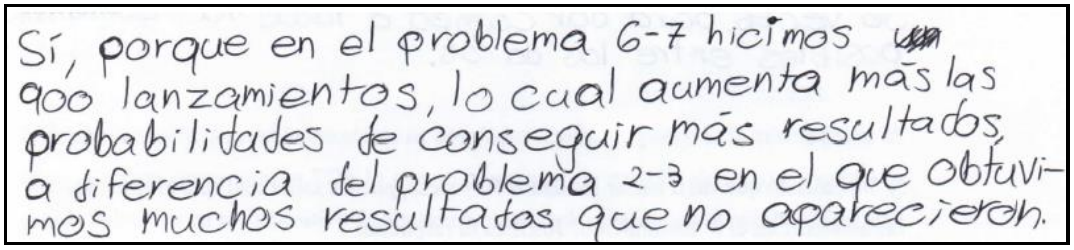
6.2 Utilização do Geogebra como recurso de apoio às aprendizagens dos conceitos probabilísticos

Na exploração das cinco tarefas envolvendo os conceitos probabilísticos, o Geogebra desempenhou um papel fundamental na simulação de experiências aleatórias, permitindo realizar simulações para introduzir e consolidar conceitos, bem como também inferir propriedades associadas a esses conceitos, promovendo aprendizagens como: a identificação do conceito de equiprobabilidade, a inferência das propriedades de igualdade em probabilidade para acontecimentos disjuntos, não disjuntos e complementares, a inferência da lei de Laplace para o cálculo de probabilidade mediante o significado clássico e da lei dos grandes números para o cálculo de probabilidade mediante o significado frequencista, e a identificação de probabilidades de acontecimentos simples e compostos.

No entanto, o uso do Geogebra também pode ser limitativo na compreensão total de alguns conceitos quando, no início, os alunos estão pouco familiarizados com a utilização das ferramentas do *software.* Para estes alunos poderem trabalhar as tarefas com o Geogebra foi necessário promover, previamente à realização da experiência de ensino, a exploração do *software* em casa para que se familiarizassem, pois alguns nunca tinham trabalhado com este ou outro *software* educacional, manifestando bastantes dificuldades no seu uso, mesmo quando no enunciado de cada tarefa constavam as indicações iniciais da função de cada elemento da simulação e como proceder à simulação. Inicialmente com a exploração da tarefa 1 como apoio ao Geogebra, os alunos requereram mais tempo do que o previsto, deixando inclusive algumas questões sem responder por falta de tempo. O trabalho com as simulações nas tarefas seguintes foi-se tornando mais fácil e toda a turma avançou a um ritmo semelhante, tal como manifesta um dos alunos na sua resposta à questão 2 da terceira parte do questionário final, ao se referir às dificuldades que enfrentou no trabalho com o Geogebra: "não sabia como usá-lo, mais adiante fui compreendendo melhor".

Na tarefa 1, o Geogebra permitiu que os alunos simulassem experiências aleatórias de acontecimentos compostos, como foi o lançamento de dois dados, permitindo os alunos observar de modo dinâmico a alteração na distribuição das frequências de cada acontecimento à medida que aumentava o número de lançamentos, para desta forma identificar os acontecimentos possíveis para a soma das pintas das faces dos dados, como também os casos possíveis. O facto de os alunos usarem simulação para introduzir os conceitos de casos possíveis e casos favoráveis teve benefícios também a nível de conteúdos, pois permitiu abordar este conceito de uma forma complementar ao uso comum de diagramas de árvore ou tabelas de dupla entrada no ensino tradicional para introduzir estes conceitos.

Por exemplo, na questão T1.Q8, o ficheiro 'lançamento de dois dados' permitiu os alunos responderem corretamente, observando que à medida que aumenta a quantidade de lançamentos se obtém maior diversidade de acontecimentos possíveis para a soma das pintas dos dados e também mais casos favoráveis para os distintos acontecimentos. Exemplo disso é evidenciando com a resposta de Kévim e Pedro (fig. 6.50).



[sim, porque no problema 6-7 fizemos 900 lançamentos, o quel aumenta mais as probabilidades de conseguir mais resultados, ao contrário do problema 2-3 no que obtivemos muitos resultados que não apareceram]

Figura 6.50. Resolução de Marcos. T1.Q8

Kévim e Pedro manifestam que a simulação de mais lançamentos (900 e 1000 lançamentos) dos dados, permitiu-lhes identificar mais resultados em comparação com as primeiras simulações (10 e 20 lançamentos), referindo-se com "resultados" aos casos favoráveis, os casos possíveis e os acontecimentos definidos.

No entanto, a utilização da simulação com diferentes valores de repetição da experiência (10, 20, 900 e 1000 lançamentos) não foi suficiente, pois alguns (poucos) alunos ao responderem a questão T1.Q4, referente ao número de lançamentos necessários para obter todos os casos possíveis, não foram capazes de identificar que não existe um número fixo de lançamentos devido ao carater aleatório da experiência, o qual tentava mostrar a simulação

com o Geogebra. Exemplo disto é manifestado por Kaled e Jennifer, quem aludem que se necessitam "mínimo onze vezes e máximo infinito", referindo-se nesse sentido aos onze acontecimentos possíveis, mesmo assim Kaled e Jennifer não conseguem identificar com a simulação dos 900 e 1000 lançamentos que, não são necessários 'infinitos' lançamentos para obter todos os casos possíveis no caso de ser aleatória a experiência.

A tarefa 2 permitiu que os alunos experimentassem novamente uma simulação com dados, neste caso só um dado, com o objetivo de introduzir o conceito de equiprobabilidade. Nesta ocasião, já todos os alunos foram capazes de manipular com facilidade o ficheiro do Geogebra, tanto os botões do arquivo como as escalas representadas nos eixos, permitindo que os alunos aprendessem o conceito de equiprobabilidade e tivessem uma primeira aproximação à noção da lei dos grandes números. Para isso, a simulação de um pequeno e grande número de repetições da experiência foi relevante (figuras 6.51 e 6.52), permitindo o aluno inferir que a equiprobabilidade se verifica uma vez feito grande quantidade de lançamentos.

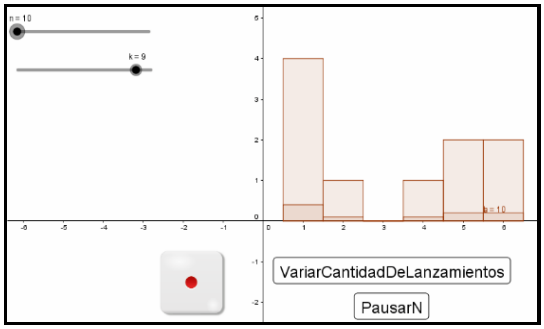


Figura 6.51. Simulação para $n = 10$. Vanuza e Charol. T2

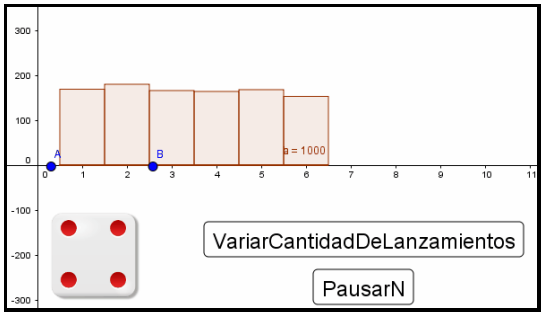


Figura 6.52. Simulação para $n = 1000$. Tiago e Simão. T2

Na figura 6.51 observa-se que as escalas utilizadas por Vanuza e Charol são adequadas para o aluno identificar que as frequências dos seis acontecimentos tendem a ser diversas para um número pequeno de lançamentos do dado ($n = 10$). O conceito de aleatoriedade também pôde ser aprofundado com esta parte da tarefa, pois alguns alunos, após a simulação, não obtiveram alguns acontecimentos, como é o caso de Vanuza e Charol, enquanto que outros sim. No caso da figura 6.52, mostra-se a simulação da experiência para um grande número de lançamentos ($n = 1000$), sendo Tiago e Simão capazes de ajustar a escala do ecrã para inferirem a equiprobabilidade dos dados, como evidencia a sua resposta à questão

T2.Q2, manifestando que “cada vez que aumenta a quantidade de vezes que se lança o dado, as frequências tendem a se parecer mais”. Neste sentido, Tiago e Simão identificam um comportamento nas frequências dos acontecimentos elementares do dado, após fazer a simulação com mil lançamentos, faltando só denominá-los formalmente por acontecimentos equiprováveis.

Quanto à tarefa 3, os ficheiros disponibilizados permitiram os alunos apropriarem-se do significado clássico de probabilidade. No caso do ficheiro Batalha Naval, os alunos tiveram que observar e atender às caraterísticas da grelha disponibilizada no ficheiro do Geogebra para inferir que a totalidade das quadrículas da grelha, que representava o mar, correspondia a casos possíveis da experiência que consistia em acertar nalgum barco e que o número específico de quadrículas que representa cada barco correspondia a casos favoráveis. Isto mesmo é evidenciado na resolução de Rosa e Fábio (fig 16.6), onde além de calcularem a probabilidade de acertar em algum barco, destacam os casos favoráveis e os casos possíveis como os valores correspondentes às quadrículas que representam os barcos e o mar, respetivamente. Para além disso, considerando a análise das aprendizagens referidas ao significado clássico de probabilidade, a abordagem gráfica com a ‘Batalha Naval’ possibilitou que o aluno observasse que a regra de Laplace era permitida quando cada quadrícula da grelha fosse do mesmo tamanho, isto é, quando os acontecimentos elementares são equiprováveis. Este facto foi evidenciado na discussão da tarefa 3, num dos diálogos que foram analisados sobre as aprendizagens do significado clássico de probabilidade, onde Pedro afirma que “há que pôr uma unidade básica de medida”, referindo-se a que todas as quadrículas da grelha deveriam ter o mesmo tamanho para assim poder aplicar a regra de Laplace.

Após a formalização da regra de Laplace pelo professor, os alunos simularam experiências com acontecimentos compostos usando o ficheiro ‘lançamento de dados’, como o lançamento de dois e três dados. Esta simulação permitiu os alunos observarem e consolidarem os conceitos de casos favoráveis e possíveis, como também explorarem acontecimentos que se podiam definir ao somar as pintas das faces dos dados, calculando as probabilidades associadas a esses acontecimentos, tal como já foi comentado na análise das

aprendizagens e pode ser exemplificado com a manipulação do Geogebra por Kévim e Pedro (fig 6.53), e a sua resolução consequente na questão T3.Q12 (fig. 6.54).

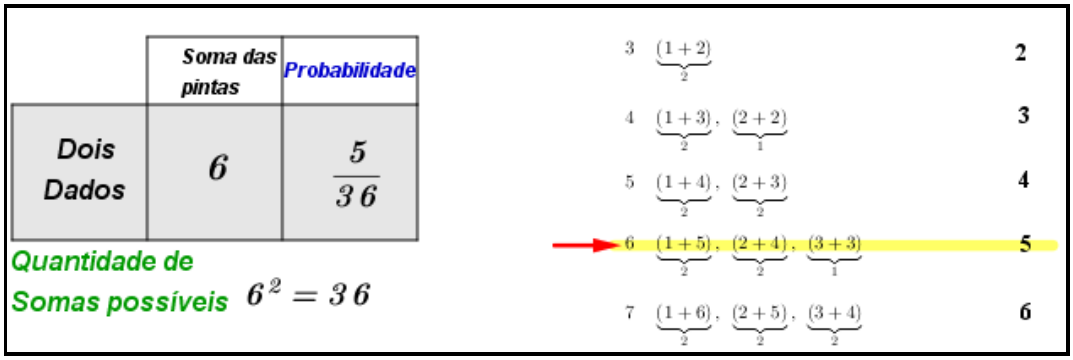


Figura 6.53. Simulação lançamento de dados. Kévim e Pedro. T3

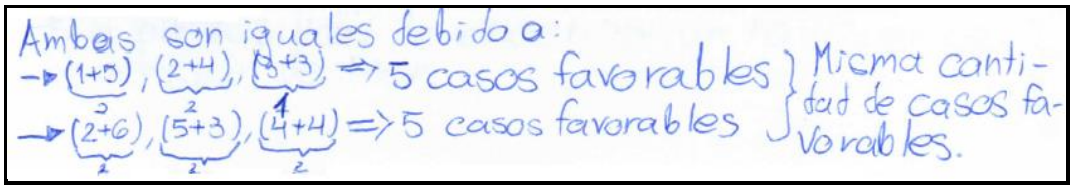


Figura 6.54. Resolução do Kévim e o Pedro.T3.Q12

A exploração da tarefa com o Geogebra permitiu a Kévim e Pedro (fig 53.6) distinguir casos favoráveis e casos possíveis, e identificar acontecimentos compostos. Isso é evidenciado nas suas palavras, quando interpretam a seta vermelha (na figura anterior) como "os casos favoráveis ou a quantidade de vezes que acontece um acontecimento desejado" e o denominador da fração para o cálculo da probabilidade como "os casos possíveis do lançamento ou a quantidade de somas possíveis". Kévim e Pedro utilizam também a simulação anterior para identificar probabilidades de acontecimentos, como por exemplo a probabilidade de obter as somas de seis e oito, chegando a observar que ambas as somas têm a mesma quantidade de casos favoráveis (fig. 6.54) e, portanto, os acontecimentos têm a mesma probabilidade de acontecer. Desta forma, evidencia-se que o ficheiro 'lançamento de dados' contribuiu não só para que o aluno inferisse a regra de Laplace, mas também para distinguir casos favoráveis e casos possíveis necessários para o cálculo de probabilidades de um acontecimento pela regra de Laplace.

Na tarefa 4, os alunos foram desafiados a simular relações entre acontecimentos a partir de diagramas de Venn. É importante aqui referir que antes de começar a experiência de ensino e quando se confrontaram na tarefa diagnóstico com questões relativas à Teoria de Conjuntos,

os alunos apresentaram dificuldades para interpretar a informação referente a dados numéricos representados em diagramas de Venn, sendo que só 23% dos alunos responderam corretamente à questão 3. Com a exploração do ficheiro 'Diagrama de Venn' do Geogebra, os alunos trabalharam com a representação gráfica de acontecimentos mediante o Diagrama de Venn e, ao mesmo tempo, a representação simbólica de probabilidades associadas aos elementos que integravam os conjuntos do Diagrama de Venn, contribuindo para que o aluno observasse, de modo dinâmico, como as diferentes relações entre os acontecimentos afetam as probabilidades desses acontecimentos e para que pudessem inferir as propriedades de igualdade associadas a acontecimentos disjuntos e complementares. Assim, por exemplo, Esther e Margarida, a partir dos dados observados no Geogebra com a primeira simulação (fig 6.56), preenchem a primeira coluna da tabela de registos de dados da tarefa 4 para acontecimentos disjuntos (fig 55.6).

$P(A)$	0,22	0,17	0,67	0,21	0,5	0,5
$P(\bar{A})$	0,78	0,83	0,33	0,79	0,5	0,5
$P(B)$	0,22	0,26	0,09	0,41	0,5	0,46
$P(\bar{B})$	0,78	0,74	0,91	0,59	0,5	0,54
$P(A) + P(B)$	0,44	0,43	0,76	0,62	~~1~~	0,96
$P(A \cup B)$	0,44	0,43	0,76	0,62	1	0,96

Figura 6.55. Registro de dados. Esther e Margarida. T4

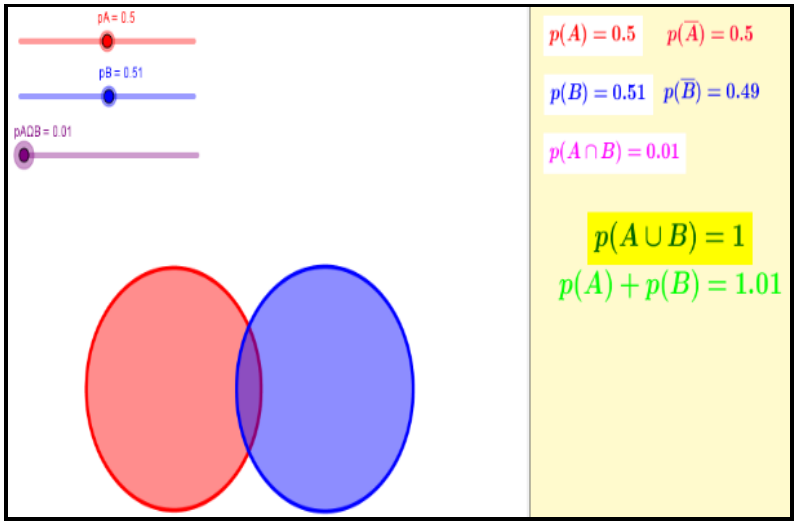


Figura 6.56. Simulação Diagrama de Venn. Esther e Margarida. T4

Esther e Margarida fazem um total de seis simulações para os acontecimentos disjuntos, chegando a inferir, tal como os alunos da turma em geral, que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Do mesmo modo, a igualdade para acontecimentos complementares foi explorada e inferida pelos alunos fazendo uso desta simulação, contribuindo assim o Geogebra na formulação matemática de propriedades da probabilidade de acontecimentos disjuntos e complementares.

O conceito de probabilidade frequencista foi abordado na última tarefa, sendo novamente a utilização da simulação um aspeto essencial devido à natureza do conceito frequencista associado à lei dos grandes números. Desta forma, enquanto o ficheiro 'lançamento de uma moeda' contribuiu para que os alunos inferissem a lei dos grandes números e, portanto, um novo significado de probabilidade de um acontecimento, o ficheiro 'aproximação de áreas por meio de probabilidades' contribuiu para aplicar o conceito frequencista na estimação da área de uma elipse, sendo todos os alunos capazes de aproximar a área da elipse a partir do valor de probabilidade adequadamente simulado com o Geogebra. Assim por exemplo, Enrique e Ricardo observam que para calcular a probabilidade de um ponto se situar no interior da elipse, precisam de recorrer à lei dos grandes números e, consequentemente, precisam fixar o deslizador n em 1000.

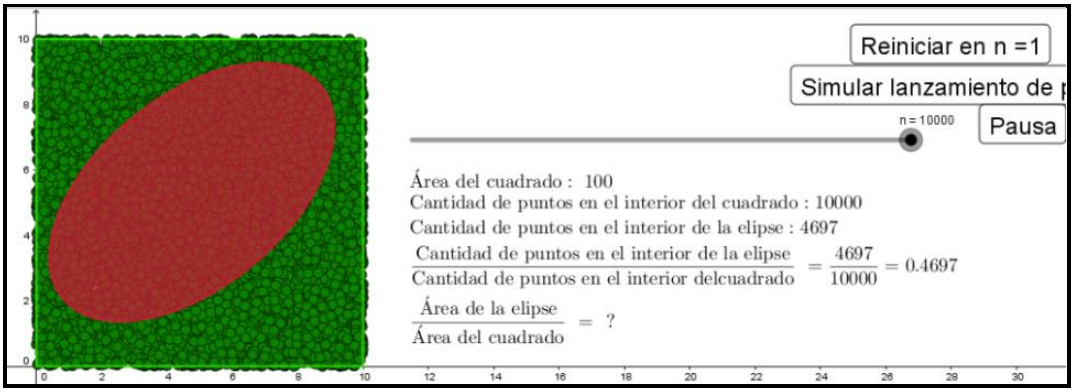


Figura 6.57. Simulação Aproximação de áreas por medio de probabilidades. Enrique e Ricardo. T5

Como observado, os alunos não revelaram dificuldades em identificar a necessidade de aplicar o conceito frequencista neste problema e, desta forma, estimar a área da elipse a partir do valor de probabilidade fornecido pela simulação. No entanto, tiveram dificuldade em aplicar o conceito quando precisaram de aplicar o conceito na resolução de outras questões sem recorrer à simulação, tal como foi evidenciado na análise das aprendizagens, especificamente, nas questões TD.Q8 e TA.Q2. Este resultado parece evidenciar que, a simulação ajuda o aluno a inferir e a trabalhar com o conceito frequencista, mas não é suficiente para consolidarem o conceito, sendo necessário apresentar o aluno outras tarefas sem simulação, as quais requeiram diferentes experiências aleatórias, onde o aluno precise de identificar quais podem ser trabalhadas com o significado clássico e quais com o significado frequencista.

Com a realização do questionário foi possível obter indicações sobre outras potencialidades do Geogebra que, desde o ponto de vista dos alunos, contribuiu para a aprendizagem dos conceitos probabilísticos. Nas questões 4 e 5 da parte II do questionário, a maior parte dos alunos afirmaram gostar de trabalhar com tecnologia, ainda que só uma pequena percentagem tenha confirmado já ter trabalho previamente com o Geogebra, sendo o trabalho nas tarefas com tecnologia um fator de motivação para os alunos. No entanto, o uso da tecnologia foi também um desafio e uma limitação inicial para aqueles que nunca tinham experimentado trabalhar com o Geogebra, quer na sala de aula quer autonomamente, tendo um aluno referido como sua principal dificuldade que "o tempo foi limitado". Ainda assim, ao finalizar a experiência de ensino, os resultados do questionário final permitiram

evidenciar que 92% dos alunos consideram que o tempo de realização das tarefas foi suficiente.

No questionário final os alunos foram também solicitados a mencionar quais consideram ser as principais vantagens e dificuldades do trabalho realizado com o Geogebra. A tabela 6.1 apresenta uma síntese dos aspetos mencionados pelos alunos nas suas respostas.

Tabela 6.1. Síntese das respostas dos alunos ao questionário.

Questão 3, parte 3-ANEXO 8b-Questionário	
Quais pensas serem as vantagens do uso do Geogebra na resolução de tarefas de probabilidade?	Quais as principais dificuldades que sentiste na resolução destas tarefas com o Geogebra?
RESPOSTAS DOS ALUNOS	
Ajuda visualizar o problema e a realizar cálculos que implicam uma grande quantidade de dados.	O tempo limitado de realização.
É interativo, uma vez que se aprende e é fácil de usar, ajuda a compreender a probabilidade.	Ao principio foi difícil perceber como usá-lo.
O uso do Geogebra dá-nos um ponto de vista mais didático, o que faz com que a familiarização de conceitos de probabilidade seja mais fácil. Faz com que a matéria não seja complicada nem aborrecida.	Falhas na captura de imagens no momento de gravar no computador.
Simplifica o trabalho e ajuda a visualizar melhor os conceitos de probabilidade.	Concentração, devido ao ambiente de trabalho que era um pouco incómodo.
Utiliza elementos visuais ajudando a compreensão, assim também o fato da simulação e gerador de exemplos.	A falta de conhecimentos básicos sobre o Geogebra, no entanto, as instruções das tarefas ajudaram-me a poder realizá-las.

Em geral, como potencialidades assinaladas pelos alunos, estão o dinamismo visual que o Geogebra possibilita ao trabalhar conceitos matemáticos de probabilidade, os quais muitas vezes são um pouco abstratos para eles. Para além disso, alguns alunos destacam dificuldades em trabalhar com o software, limitando-lhes o seu tempo de trabalho com as tarefas. Outras dificuldades tais como a captura de imagens e o ambiente de trabalho, foram limitações apontadas, não diretamente com as tarefas e os ficheiros do Geogebra, mas sim com o equipamento que a sala de aula dispunha e as dimensões da mesma. Mesmo assim, o contexto de sala de aula foi uma limitação importante a considerar, sobretudo ao princípio de cada sessão, onde o tempo despendido para os alunos ocuparem os seus lugares e para o investigador se deslocar dentro da sala de aula para acompanhar o trabalho dos alunos foi demais.

Desta forma, o trabalho com o Geogebra desempenhou um papel importante nas aprendizagens dos conceitos probabilísticos, permitindo o aluno explorar conceitos e inferir leis a partir desta exploração, como assim também trabalhar de forma mais dinâmica nas aulas com experiências apoiadas por simulação com o Geogebra que, no caso por exemplo do lançamento de três dados, o tempo de abordagem de estudo sem computador tornaria o trabalho inviável.

Também se destaca a metodologia de trabalho com as tarefas apoiadas com o Geogebra, onde as respostas dos alunos à questão 9 da parte II do questionário permitiram evidenciar que mais de metade dos alunos destaca que a realização de cada uma das tarefas contribuiu para o trabalho nas tarefas seguintes. As discussões na sala de aula também foram referidas por alguns alunos como aspeto fundamental nas aprendizagens realizadas com o Geogebra. Por exemplo, um aluno comentou na questão 3 da parte III do questionário, referente a aquilo que mais gostou da experiência de ensino, que "o que mais me agradou foi que podia discutir com os meus colegas de grupo e assim facilitar a minha aprendizagem". Outros alunos também se referiram ao Geogebra afirmando "agradou-me utilizar uma ferramenta moderna e útil", evidenciando assim que os alunos consideram que a exploração de tarefas com o Geogebra ajuda a compreender conceitos probabilísticos.

Capítulo 7

CONCLUSÕES

Neste capítulo começo por apresentar uma síntese do estudo, considerando os aspetos que fundamentaram o seu desenvolvimento prévio e posterior à recolha de dados, como também o processo de intervenção em sala de aula que lhe serve de base. Após isso, prossigo para a resposta às questões do estudo, recorrendo nos resultados evidenciados na análise das aprendizagens dos alnos dos conceitos básicos de Probabilidade e do papel do Geogebra para atingir essas aprendizagens, articulando-os com a teoria. Finalmente desenvolvo algumas reflexões finais que o desenvolvimento desta investigação me suscitou.

7.1 SINTESE DO ESTUDO

Educação é um campo complexo onde intervêm muitas variáveis: aluno, professor, conteúdo, contexto, metodologias de ensino e aprendizagem, entre outras. Neste sentido, a aprendizagem de conceitos probabilísticos assume também um caráter complexo. Por isso, é necessário focar a sua aprendizagem na análise da informação e na resolução de problemas (Franklin et al., 2007; MEP, 2012), considerando tarefas que permitam o aluno aperceber-se da aplicabilidade da Matemática no seu contexto quotidiano (Burril, 2002; Garfield & Alhgren, 1988; Sharma, 2016), em vez de técnicas mecânicas que não permitem desenvolver capacidades de inferência (Batanero, 2002, 2005; Bielher, 1991; Chaves, 2016; Garfield & Alhgren, 1988).

Orientações curriculares nacionais e internacionais têm-se preocupado em destacar a importância de novas metodologias para o ensino e aprendizagem da Probabilidade na sala de aula (Franklin et al., 2007; MEP, 2007, 2012; NCTM, 2000, 2014). No mesmo sentido, investigadores em Educação Matemática, na sua preocupação em incentivar a inferência que deve promover o estudo da Probabilidade (Biehler, 2003; Munisamy & Doraisamy, 1998), destacam as simulações como ferramenta de relevância para ajudar os alunos a aprender de forma dinâmica (Redecker, 2013) e recorrendo a estratégias de exploração (Fernández et al., 2009). Em particular, o Geogebra, como software matemático educativo que permite a

simulação, oferece uma alternativa dinâmica para o trabalho na sala de aula, permitindo a exploração e visualização de diferentes representações de um conceito matemático (Ferreira et al., 2008).

Neste estudo, pretende-se compreender de que modo os alunos costarriquenhos do 10.º ano aprendem os conceitos básicos de Probabilidade no quadro de uma experiência de ensino apoiada em tarefas exploratórias com recurso ao Geogebra e quais os contributos do Geogebra, como recurso, para a aprendizagem destes conceitos. Para atingir estes objetivos colocaram-se duas questões de investigação: 1) Quais as aprendizagens e dificuldades evidenciadas pelos alunos no decorrer da experiência de ensino no que respeita a conceitos básicos de Probabilidade? e 2) De que modo a realização de tarefas exploratórias com recurso ao Geogebra pode contribuir para a aprendizagem dos alunos nos conceitos básicos de Probabilidade? Quais as principais dificuldades sentidas pelos alunos no uso deste *software*?

Para responder as questões utilizou-se uma metodologia qualitativa interpretativa. O estudo foi dividido em duas fases: um estudo exploratório numa turma portuguesa para testar as tarefas da experiência de ensino, e uma experiência de ensino de onde se obtém os dados para a análise das aprendizagens dos alunos. No decorrer desta experiência de ensino foram utilizados vários métodos e instrumentos de recolha de dados, especificamente, recolha documental das resoluções dos alunos das tarefas realizadas na experiência de ensino, um questionário para conhecer as suas opiniões sobre a experiência do trabalho em tarefas com o Geogebra, e a observação participante com gravação a áudio e vídeo do trabalho dos alunos e das discussões coletivas em sala de aula.

7.2 PRINCIPAIS CONCLUSÕES DO ESTUDO

a) ***Quais as aprendizagens evidenciadas pelos alunos no decorrer da experiência de ensino no que respeita aos conceitos básicos de probabilidade? Quais as dificuldades que revelaram?***

A análise dos dados relativos às aprendizagens dos alunos evidenciou que antes de serem introduzidos ao conceito formal de aleatoriedade, associam-no a termos cotidianos, como sejam: acaso, sorte, variabilidade e incerteza. Isto mesmo se evidenciou também nos estudos de Ortiz et al. (2001) e de Ireland e Watson (2009), por alguns destes termos terem para o

aluno um sentido diferente a nível formal matemático em relação às suas crenças adquiridas com experiências vividas no seu cotidiano, causando dificuldades para a sua compreensão, tal como limitar o termo variabilidade simplesmente à alternância dos dados. Os alunos foram capazes de identificar experiências aleatórias e determinísticas após a formalização do conceito de aleatoriedade, mas a maior parte deles revelou dificuldade em identificar o papel da aleatoriedade em duas situações: 1) na realização reiterada de uma experiência aleatória, quando estabelecem conjeturas incorretas sobre equiprobabilidade, realizando poucas vezes uma experiência aleatória ('lei dos pequenos números'); e 2) na realização de sequências aleatórias com o mesmo espaço amostral, não sendo capazes de usar o conceito de aleatoriedade para identificar sequências aleatórias equiprováveis. Estas dificuldades podem estar relacionadas com a mecanização de cálculos que os alunos priorizam para argumentar as suas respostas, em vez de se centrarem na compreensão do conceito usando diferentes representações do conceito que lhes permita fazer conexões entre os vários conceitos, tal como referido em Garfield e Alhgren (1988), levando o aluno a apresentar dificuldades quando trabalha com tarefas de diferente nível de dificuldade ou em diferentes contextos dos habituais na sala de aula.

Em relação ao conceito de probabilidade, a maior parte dos alunos evidencia ter uma noção de probabilidade clássica, ligada às suas experiências com cálculo de percentagens ou inclusive com crenças cotidianas erradas, tal como salientam Amir e Williams (1999) no seu estudo sobre as crenças que as crianças tendem a ter sobre Probabilidade resultantes da sua experiência quotidiana. Estes autores observaram que alguns alunos consideram mais provável obter uma face da moeda que a outra, facto também evidenciado durante esta experiência de ensino. Outros alunos, no início da experiência já evidenciam ter um correto significado de probabilidade clássica, mas apenas uma pequena parte destes tinha uma noção do conceito de probabilidade frequencista, embora sem conhecimento da lei dos grandes números. Os alunos todos foram capazes de inferir a regra de Laplace e a lei dos grandes números que fundamentam, respetivamente, o significado clássico e frequencista de probabilidade. Também souberam calcular probabilidades de acontecimentos onde, pela natureza da experiência e dos dados disponibilizados, podiam recorrer só ao significado clássico ou só ao significado frequencista. O conceito frequencista foi trabalhado propriamente na última tarefa, com apoio do Geogebra, mas a segunda tarefa com apoio do

Geogebra já permitiu dar um primeiro acercamento do aluno à lei dos grandes números, de forma a trabalhar algumas noções intuitivas sobre convergência experimental, como foi recomendado por Batanero (2002). No entanto, a resolução do teste de avaliação evidenciou que nas experiências onde os alunos tinham que utilizar o significado frequencista para o cálculo de probabilidade, mas tendo como possibilidade também aplicar o significado clássico, davam prioridade ao cálculo mediante o significado clássico. Este facto levou a que a maior parte dos alunos errassem nas suas respostas, pois como foi observado no estudo de Oliveira (1990), o significado clássico não permite trabalhar com acontecimentos elementares não equiprováveis, levando os alunos a apresentarem dificuldades quando enfrentam novas tarefas, como no caso da tarefa do teste de avaliação, onde os valores de probabilidade clássica e frequencista não são iguais devido dado que os acontecimentos não serem equiprováveis. No que respeita ao conceito de equiprobabilidade, todos os alunos foram capazes de associar a equiprobabilidade com a igualdade de probabilidade nos acontecimentos de uma experiência. No entanto, a identificação da equiprobabilidade em tarefas permaneceu igualmente limitada à utilização do significado de probabilidade utilizado, isto é, a utilizar a lei de Laplace ou a lei dos grandes números para calcular a probabilidade de um acontecimento para, após isso, tomar a decisão de equiprobabilidade.

Os aspetos anteriores permitem concluir que o conceito de probabilidade frequencista deve ser tratado com particular atenção, pois a sua aprendizagem deve ficar bem consolidada para evitar dificuldades no trabalho de outros conceitos, como o conceito de equiprobabilidade. Este, por sua vez, é recomendável ser tratado com objetos concretos antes da abordagem clássica ou frequencista, como defende Batanero (2005), de modo a que o aluno perceba mediante a experimentação que nem todas as experiências conduzem sempre a acontecimentos equiprováveis. No entanto, deve-se considerar que abordar algumas noções intuitivas sobre convergência antes de trabalhar o conceito frequencista de probabilidade (Batanero, 2002) chega a ser necessário, mas não suficiente, pois os contextos de sala de aula variam de lugar em lugar, sendo algumas metodologias propostas no campo da Educação Matemática suficientes para garantir as aprendizagens de conceitos nalgumas populações, mas não suficientes para outras. No caso deste estudo, o facto de os alunos apresentarem diferentes ritmos de aprendizagem, privilegiarem a regra de Laplace por ser a primeira forma de cálculo de probabilidade a aprender, e não estarem habituados a trabalhar numa perspetiva

exploratória de conceitos, foi motivo para não serem capazes de identificar as situações em que será adequado usar a regra de Laplace ou a lei dos grandes números. Como tal, sugere-se uma abordagem dos significados de probabilidade clássica e frequencista em paralelo e em etapas, isto é, baseada primeiramente na introdução exploratória e clássica, e depois a formalização de ambos os significados em simultâneo. A seguir à identificação de situações onde se pode aplicar cada significado, e finalmente trabalhar o cálculo de probabilidades mediante estes significados.

Quanto aos conceitos associados ao espaço amostral, todos os alunos determinaram corretamente casos favoráveis, casos possíveis e acontecimentos de experiências, usando os mesmos para calcular probabilidades teóricas e classificar acontecimentos em equiprováveis, mais prováveis ou impossíveis. Além disso, todos os alunos foram capazes de inferir as relações de igualdade para acontecimentos disjuntos $\big(P(A \cup B) = P(A) + P(B)\big)$, acontecimentos não disjuntos $\big(P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big)$ e acontecimentos complementares $(P(A) + P(\bar{A}) = 1)$. Alguns alunos utilizaram estas relações de igualdade para classificar acontecimentos disjuntos e complementares nos casos em que eram disponibilizadas probabilidades, como dados, no enunciado da tarefa. No entanto, algumas dificuldades associadas aos acontecimentos complementares apresentaram-se no teste de avaliação, quando alguns alunos acabaram considerando um conjunto e qualquer subconjunto deste como acontecimentos complementares. Este facto confirma o observado por Munisamy e Doraisamy (1998), com alunos com idades aproximadas aos quinze anos, em que comummente apresentam dificuldade para compreender o conceito de acontecimentos complementares. Esta dificuldade pode estar associada ao uso da linguagem matemática, onde termos como acontecimentos complementares diferem no seu significado na linguagem cotidiana, pois o conceito complementar comummente é utilizado na vida cotidiana para o aluno como sinónimo de acrescentar, incorporar, ‘aquilo que falta para completar o todo’, entre outros termos, referidos todos a formar parte de uma unidade ou conjunto, não considerando a condição de partes disjuntas requerida no tratamento formal da Probabilidade.

Outras aprendizagens como a identificação de experiências aleatórias associadas a um mesmo modelo probabilístico e de relações entre conceitos associados ao espaço amostral foram evidenciadas. Por um lado, todos os alunos estabeleceram uma relação biunívoca entre os elementos de uma experiência de lançamentos de dois dados e de uma experiência de extração de bolas de duas caixas, que se modelam mediante o mesmo modelo de probabilidade. Por outro lado, todos os alunos identificaram e estabeleceram relações entre o número de casos possíveis, casos favoráveis e os acontecimentos que resultam da realização de uma experiência aleatória considerando a quantidade de vezes que se realiza a experiência, podendo identificar que à medida que se realiza mais vezes a experiência aleatória se obtém mais casos possíveis e casos favoráveis.

Quanto às representações com diagramas de Venn, gráficos de barras e a grelha para a introdução da regra de Laplace, estas facilitaram a introdução e compreensão dos conceitos, tal como manifestaram os alunos no questionário, sendo de relevância particular os diagramas de Venn, importantes para a inferência das propriedades de acontecimentos disjuntos, não disjuntos e complementares. Mesmo assim, no cálculo de probabilidades a partir de diagramas de Venn, alguns alunos apresentaram uma das dificuldades frequentemente observadas nos alunos, destacadas por Rico (1995), nomeadamente, uma incorreta interpretação dos dados do enunciado da tarefa quando interpretam dados numéricos como probabilidades, sendo casos favoráveis no enunciado, mesmo sabendo a regra de Laplace.

Desta forma, as aprendizagens evidenciadas pelos alunos permitem concluir que, nesta abordagem de conceitos probabilísticos, os alunos revelaram capacidade para inferir leis e propriedades associadas ao cálculo de probabilidades, favorecendo a capacidade de raciocínio indutivo poucas vezes trabalhada na sala de aula. No entanto, muitas das suas crenças sobre termos probabilísticos usados na sua vida cotidiana e a tendência de uma aprendizagem baseada na mecanização de fórmulas (Batanero, 2002, 2005; Bielher, 1991; Chaves, 2016) influenciaram a sua aprendizagem de conceitos como aleatoriedade e probabilidade frequencista, limitando a sua opção a cálculos mediante a utilização da regra de Laplace quando precisavam de analisar aleatoriedade ou calcular a probabilidade mediante o significado frequencista.

b) De que modo a realização de tarefas exploratórias com recurso ao Geogebra pode contribuir para a aprendizagem dos alunos nos conceitos básicos de Probabilidade? Quais as principais dificuldades sentidas pelos alunos no uso deste software?

As diferentes representações visuais utilizadas com o Geogebra (diagramas de Venn, grelhas, gráficos de distribuições de frequências dos acontecimentos, entre outros), ajudaram o aluno na sua exploração para estabelecer relações entre estas representações visuais e as leis e propriedades de conceitos probabilísticos que comummente não se observam sem a ajuda de simulação, como salientado em algumas orientações curriculares (Franklin et al., 2007; NCTM, 2014). Assim, propriedades como a igualdade para acontecimentos disjuntos, não disjuntos e complementares, e leis como a regra de Laplace e a lei dos grandes números foram inferidas pelos alunos mediante a exploração de dados simulados com o Geogebra. Estas simulações baseadas em representações de objetos matemáticos associados aos conceitos probabilísticos, permitiram que o aluno adquirisse as aprendizagens ligadas à inferência de conceitos probabilísticos, evitando a abstração que comummente gera os alunos a introdução destes conceitos mediante o ensino tradicional sem tecnologia.

Além disso, a simulação com Geogebra permitiu o aluno calcular probabilidades de vários acontecimentos trabalhados nas tarefas mediante o significado clássico e frequencista, como assim também utilizar as probabilidades clássicas outorgadas pela simulação com o Geogebra para identificar entre acontecimentos impossíveis, mais prováveis e equiprováveis. Desta forma, os alunos foram encaminhados a evitar o cálculo mecânico baseado em algoritmos para se centrarem na leitura dos dados simulados e na interpretação da informação proporcionada em linguagem probabilística, capacidade que é necessária desenvolver no aluno, segundo o Programa de Matemática costarriquenho (MEP, 2012).

O Geogebra também permitiu que o aluno explorasse situações matemáticas particulares, aspeto que as NCTM (2014) salientam a ser tido em consideração no uso de software educativos. Assim por exemplo, o comportamento aleatório do lançamento de dois dados associado à incerteza dos resultados das somas das pintas dos dados, à medida que se repetia a experiência e a estimação da área de uma elipse inserida no interior de um quadrado, foram situações particulares que permitiram o aluno diferenciar entre experiências aleatórias

e experiências determinísticas. Para além disso, o facto destas situações particulares levarem muito tempo para se realizar com objetos concretos, levou os alunos a manifestarem ver no Geogebra uma ferramenta que lhes permitiu poupar tempo com a realização das simulações nas distintas experiências feitas.

Embora o uso do Geogebra tenha contribuído para a inferência de regras e cálculo de probabilidades, não foi suficiente para que a maior parte dos alunos interiorizasse o conceito de aleatoriedade totalmente, nem para saberem quando aplicar o conceito frequencista e o conceito clássico de probabilidade. Estas dificuldades podem estar associadas a não terem tido oportunidade de o trabalhar frequentemente com tecnologia para fazerem conexões entre conceitos e, como consequência, nas primeiras tarefas alguns alunos deixaram questões sem responder por precisarem de mais tempo.

É importante salientar que, mesmo quando vários autores destacam a abordagem do conceito frequencista de probabilidade com uso de simulação (Fernandes e al., 2009; Martins, 2011), é necessário manter um equilíbrio entre o uso de simulações com Geogebra ou outro software matemático e o uso de simulações feitas com objetos concretos pois, embora as simulações ajudem à exploração do conceito, os objetos concretos ajudam a ter uma primeira aproximação real ao conceito (Batanero, 2005; Fernandes et al., 2009). No entanto, as simulações com o Geogebra devem ajudar a romper com crenças incorretas, como por exemplo, uma moeda poder originar acontecimentos não equiprováveis, crença que para ser superada com objetos concretos precisa muito tempo, enquanto que com o Geogebra é de fácil exploração.

Estes aspetos revelam a necessidade de reforçar os conceitos probabilísticos em anos iniciais (MEP, 2012), mantendo um equilíbrio entre a utilização de tecnologia e a utilização de outras metodologias para o ensino dos conceitos, priorizando uma aprendizagem fundamentada na análise de dados e na realização de experiências que permitam o aluno reconhecer e aplicar determinado conceito em diferentes contextos (NCTM, 1989).

Os resultados obtidos evidenciam que os alunos ficam motivados ao trabalharem a exploração de conceitos probabilísticos com o Geogebra, manifestando que as aulas são mais dinâmicas e permitem a construção autónoma do seu conhecimento (Inzunza, 2014;

Redecker, 2013), ainda que ao início da experiência não estivessem familiarizados com o *software*. Aprendizagens novas, como a inferência de propriedades e leis, foram realizadas pelos alunos com a utilização dinâmica do Geogebra, mas também se evidenciaram dificuldades na aprendizagem de conceitos específicos que não puderam ser superadas com o software. Assim, resulta necessário promover o trabalho com *software* educacional na sala de aula de forma consistente e complementado com outras metodologias, incluindo a simulação com objetos concretos, rompendo com o absolutismo do ensino tradicional e procurando que os conceitos probabilísticos sejam vistos pelos alunos como uma ferramenta para perceber o mundo que o rodeia, aproveitando o potencial das novas tecnologias, em particular o Geogebra.

7.3 REFLEXÕES FINAIS

O desenvolvimento de uma investigação em Educação Matemática envolve enfrentar desafios nas aulas, pois tratando-se a Matemática uma das disciplinas mais difíceis para muitos alunos, encontramo-nos num campo exposto a muitas variáveis que se podem manifestar, como o medo ou a falta de gosto pela disciplina. No entanto, existe um desafio grande para o investigador, que é selecionar métodos de recolha de dados pertinentes para o estudo e organizar os dados sistematicamente para realizar uma análise que permita atingir os objetivos propostos.

No decorrer desta investigação fui confrontado com vários desafios como investigador: recolher dados numa turma com um idioma distinto ao idioma de origem, trabalhar com alunos de contextos diferentes, aprender a utilizar metodologias de investigação não utilizadas, entre outras. Cada um destes desafios serviram para obter informação necessária ao estudo escrito, mas também para crescer profissionalmente como investigador, pois uma das coisas que tenho aprendido é que para aprender a investigar há que estar no campo investigando, da mesma forma que para aprender Matemática há que fazer Matemática.

O tema de investigação foi de fundamental importância, sendo um incentivo acrescido para mim. Por um lado, tive a oportunidade de pesquisar numa área da Educação Matemática onde têm-se investigado pouco, quer na Costa Rica como inclusive em Portugal, podendo obter informação relevante para criar conhecimento novo a nível do contexto educativo costarriquenho na área da aprendizagem da Probabilidade, mas também abrindo portas para

futuras pesquisas na área da Probabilidade do contexto educativo português. Por outro lado, os tópicos de Probabilidade abordados foram um incentivo para mim, como professor, pois os considerei como tópicos que podem incentivar o aluno a olhar para a Matemática como uma disciplina de utilidade, num currículo onde a Probabilidade é recente como parte do programa de Matemática (MEP, 2012), como também um dos tópicos onde os alunos apresentam comummente dificuldades, dado o caráter abstrato de alguns conceitos e a similitude de alguns termos com a vida cotidiana (Nacarato & Grando, 2014).

Além disso, realizar esta investigação em duas turmas de países distintos permitiu-me por um lado conhecer como se abordam os conteúdos em ambos contextos, encontrando similitudes e diferenças que me permitem como professor tomar os aspetos mais positivos de cada contexto curricular para futuras aulas e investigações. Em particular, a implementação de um estudo exploratório em Portugal e o estudo principal na Costa Rica ajudou-me a ver que, as melhorias feitas às tarefas a partir do estudo exploratório serviram para melhorar os tempos de aplicação das tarefas da experiência de ensino e para decidir as questões a modificar parcial ou totalmente de alguma tarefa, de modo a promover as aprendizagens dos alunos na sua compreensão de conceitos probabilísticos.

O uso do Geogebra foi outro incentivo no qual me senti confortável trabalhar, primeiro por ser um software com o qual tinha trabalhado como professor em outras ocasiões, e segundo por permitir abordar uma metodologia de ensino não tradicional que ajudou o aluno a perceber certos conceitos com recurso a uma maior quantidade de representações, como assim também inferir propriedades que frequentemente o professor apresenta como verdadeiras na sala de aula. O facto de haver conceitos particulares de Probabilidade não interiorizados totalmente com a abordagem do Geogebra, como são a aleatoriedade e o conceito de probabilidade frequencista, sugere, como Erickson (2016) destaca, a introdução de conceitos básicos de Probabilidade primeiramente com objetos concretos, de forma a que o aluno desenvolva no seu entorno uma primeira ideia do conceito a ser trabalhado, para depois complementar o ensino com simulação de experiências simples e compostas com o Geogebra, aprofundando o conceito para trabalhar experiências mais complexas até ser formalizado o conceito.

Quanto à metodologia da experiência de ensino, é importante criar espaços de discussão coletiva na sala de aula, pois estes, tal a como foi evidenciado neste estudo, permitem que o aluno seja crítico e que o professor aceda a aprendizagens e dificuldades que por vezes não são identificadas nas resoluções dos alunos. Assim também, é necessário que o professor considere incorporar na sala de aulas novas metodologias baseadas em recursos atuais e dinâmicos acessíveis ao aluno, tais como computador e software, tablets, entre outros. Estes recursos podem marcar a diferença na introdução de conceitos probabilísticos, fazendo o aluno ver a Matemática menos abstrata. No entanto, a experiência de ensino abordada no presente estudo permite sugerir que estas metodologias de ensino devem ser acompanhadas do trabalho com outros recursos didáticos, e principalmente de um trabalho consistente com o software educacional para o aluno se acostumar aos tempos estabelecidos de trabalho, de tal forma que o aluno desenvolva capacidades de interpretação de dados e manipulação das ferramentas do software, quer com o Geogebra quer com qualquer outro software educacional. Finalmente, a elaboração de testes diagnósticos deve ser um elemento a considerar pelo professor e investigador, tão importante como o teste de avaliação, pois possibilita acesso a intuições, aprendizagens e dificuldades dos alunos que devem considerar-se na elaboração das tarefas a propor para introduzir os conceitos, como também possibilita ter um ponto de referência para avaliar as conceções iniciais incorretas do aluno, as quais foram superadas no final da experiência de ensino.

Desta forma, este estudo fornece informação importante para professores e investigadores que desejem melhorar a abordagem da Probabilidade no currículo costarriquenho, assim como também no currículo português, abrindo portas para propor metodologias inovadoras de ensino e aprendizagem da Matemática orientadas a melhorar os conceitos de Probabilidade que geram dificuldade. A Educação em Probabilidade é um direito de todos os cidadãos, como assim também é direito do aluno aprender estes conceitos com metodologias que sejam adaptadas à nova geração tecnológica que estamos a viver, fazendo ver a Probabilidade não como um tópico abstrato da Matemática, mas como uma oportunidade para desenvolver a capacidade dos alunos sobre a tomada de decisões com base em dados. Neste sentido, aluno, professor e investigador assumem um papel no currículo, onde todos devem estar dispostos a aprender uns com os outros, convertendo-se a

aprendizagem de conceitos básicos de Probabilidade numa oportunidade para aprender construindo conhecimento.

REFERÊNCIAS

Abrate, R., Pochulu, M., & Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática: Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Álvarez-Gayou, J. L. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología*. Ciudad de México: Paidós educador.

Amir, G., & Williams, J. (1999). Cultural influences on children's probabilistic thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(10*)*, 85-107.

Anderson, G., & Arsenault, N. (2002). *Fundamentals of educational research* (2nd ed.). London: The Falmer Press.

Batanero, C. (2002). Ideas estocásticas. ¿Qué contenidos se deben enseñar en la clase de probabilidad. In J. A. Fernández, M. V. Sousa, & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística - Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 9-30). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade de Minho.

Batanero, C., & Godino, J. (2003). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Retrieved from http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – RELIME*, *8*(3), 247-263.

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. In P. Flores & J. Lupiañez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar* [CD-ROM]. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales.

Batanero, C. (2009). La simulación como instrumento de modelización en probabilidad. *Revista Educación y Pedagogía*, *15*(35), 39-54.

Ben-Zvi, C. (2000). Towards understanding the role of technological tools in statistical learning. *Mathematical Thinking and Learning*, *2*(1-2), 127-155. doi: 10.1207/S15327833MTL0202_6

Biehler, R. (1991). Computers in probability education. In R. Kapadia & M. Borovcnick (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 169–211). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Biehler, R. (2003). Interrelated learning and working environments for supporting the use of computer tools in introductory classes. In L. Weldon & J. Engel (Eds.), *Proceedings of IASE Conference on Teaching Statistics and the Internet* [CD-ROM]. Voorburg, The Netherlands: IASE.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Borasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. Portsmouth: Heinemann.

Branco, J., & Martins, M. (2002). Literacia estatística. *Educação e Matemática*, *69*, 9-13.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática, 12*, 5-38.

Burak, D. (2004). Modelagem Matemática e a Sala de Aula. In *Anais do I Encontro Paranaense da Modelagem na Educação Matemática* [CD-ROM]. Londrina, Brasil: UEL.

Burrill, G. (2002). Simulation as a tool to develop statistical understanding. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. Cape Town, South Africa: International Association for Statistics Education. Retrieved from https://iaseweb.org/Conference_Proceedings.php?p=ICOTS_6_2002

Cazorla, I. M. (2004). Estatística ao alcance de todos. In *VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*, minicurso GT12-Ensino da Probabilidade e a Estatística (pp.1-10*)*. Recife, Brasil: UFPE. Retrieved from http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/12/MC11915634806.pdf

Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J., & Medina, E. (2007). The Role of Technology in Improving Student Learning of Statistics. *Technology Innovations in Statistics Education, 1*(1). Retrieved from http://escholarship.org/uc/uclastat_cts_tise

Chaves, E. (2016). La enseñanza de la Estadística y la probabilidad, más allá de procedimientos y técnicas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *15*, 21-31.

Conceição, A., & Almeida, M. (2012). *Matematicamente falando 9º. Caderno de atividades*. Porto: Areal Editores.

Conceição, A., & Almeida, M. (2012). *Matematicamente falando 9º. Parte 2*. Porto: Areal Editores.

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas. Teoria e Prática*. Coimbra: Edições Almedina.

Dantal, B. (1997). Les enjeux de la modélisation en probabilité. In *Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 57-59). Reims: Commission Inter-IREM Statistique e Probabilités.

Deaney, R., Ruthven, K., & Hennessy, S. (2003). Pupil perspectives on the contribution of Information and Communication Technology to teaching and learning in the Secondary school. *Research Papers in Education, 18*(2), 141-165.

Denscombe, M. (2003). *The Good Research Guide: for small-scale social research projects* (2nd ed.). New york, NY: McGraw Hill.

Del Pino Ruiz, J. (2013). El uso de Geogebra como herramienta para el aprendizaje de las medidas de dispersión. In J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea & P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad*

y Combinatoria (pp. 243-250). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Díaz, J., Batanero, C., & Cañizares, J. (1996). *Azar y Probabilidad. Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Madrid: Editorial Síntesis.

Erickson, F. (1986). Qualitative Methods in Research on Teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp.119-161*)*. New York, NY: Macmillan.

Erickson, T. (2006). Using simulation to learn about inference. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the 7th International Conference on Teaching Statistics* (pp. 2-7). Voorburg, The Netherlands: International Statistics Institute.

Fernandes, J. A., Batanero, C., Contreras, J. M., & Díaz, C. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: Potencialidades e limitações. *Quadrante, 18*(1), 161-183.

Ferreira, I. F., Carvalho, K. S., & Becker, A. J. (2011). Applets no Geogebra: Atividades de Estatística e Probabilidade no Ensino Médio. In *Anais da XIII Conferencia Internacional de Educação Matemática – CIAEM* [CD-ROM]. Recife, Brasil: UFPE. Retrieved from http://www.lematec.net.br/CDS/XIIICIAEM/index.html

Fonseca, L. (2009). A comunicação matemática na sala de aula: Episódios do 1º ciclo do ensino básico. *Educação e Matemática, 103,* 2-6.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Schaeffer, R. (2007). *The GAISE* (*Guidelines for assessment and instruction in statistics education) report: A pre-K-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association.

Garfield, J. B., & Alhgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education, 19* (1), 44-63.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral, Universidad de Granada, España). Retrieved from https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=1335

Gómez, E., Contreras, J. M., & Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para Educación Primaria en Andalucía. In C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 73-87). Alicante: SEIEM.

Gonçalves, P. (2014). *Uma abordagem da distribuição normal através da resolução de uma situação problema com a utilização do software Geogebra* (Tese de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Goiás, Jataí, Brasil). Retrieved from http://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/4760

González Monteagudo, J. (2001). El paradigma interpretativo en la investigación social y educativa: Nuevas respuestas para viejos interrogantes. *Cuestiones pedagógicas: Revista de ciencias de la educación, 15*, 227-246.

Grillo, L. (1995). Probabilidades na batalha Naval. In A. Precatado, H. Guimarães (Eds.), *Materiais para a aula de Matemática* (pp. 57-58). Lisboa: APM.

Groth, R. E., Butler, J., & Nelson, D. (2016). Overcoming challenges in learning probability vocabulary. *Teaching Statistics*, *38*(3), 102-107.

Guest, G., Namey, E., & Mitchell, M. (2013). *Collecting Qualitative Data: A Field Manual for Applied Research*. London: SAGE.

Henry, M. (2001). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. In Commission Inter-IREM Statistiques et Probabilités (Ed.), *Autour de la modélisation en probabilités* (pp.149-159). Besançon: PUFC.

Inzunsa, S. (2014). Geogebra: Una herramienta cognitiva para la enseñanza de la probabilidad. In J. Asenjo, O. Macías, & J. C. Toscano (Eds.), *Actas do Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación* (pp. 141-146). Buenos Aires: OEI.

Inzunza, S. (2017). Conexiones entre las aproximaciones clásicas y frecuencial de la probabilidad en un ambiente de modelación computacional. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *11*, 69-86.

Ireland, S., & Watson, J. (2009). Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 4(3*), 230-260.

International Geogebra Institute. Geogebra [On-line]. Retrieved from http://www.Geogebra.com

Martín, M. (2004). Diseño y validación de cuestionarios. *Matronas Profesión, 5(17),* 23-29.

Martins, M. E. G. (2011). Como Estimar a Probabilidade de um acontecimento por Simulação. In *Actas do PROFMAT 2011* (pp. 1-16). Lisboa: APM.

Mendenhall, W., Beaver, R. J., & Beaver, B. M. (2010). *Introducción a la probabilidad y la estadística* (13ª ed.). Ciudad de México: Cengage Learning.

Mercado, M. (2013). Exploración de conceptos de probabilidad con Geogebra. In J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea, & P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 309-317). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Ministério de Educação (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa, Portugal: autor. Retrieved from http://www.dge.mec.pt/matematica

Ministério de Educação. (2013). *Caderno de apoio 3º ciclo*. Lisboa, Portugal: autor. Retrieved http://www.dge.mec.pt/matematica

Ministerio de Educación Publica. (2012). *Programas de Estudio de Matemática.* San José, Costa Rica: autor. Retrieved from http://www.mep.go.cr

Munisamy, S., & Doraisamy, L. (1998). Levels of understanding of probability concepts among secondary school pupils. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 29*(1), 39-45. doi: 10.1080/0020739980290104

Murillo, M. (2009). *Introducción a la Matemática Discreta* (3ª ed.). Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica.

Nacarato, A. M., & Grando, R. C. (2014). The role of language in building probabilistic thinking. *Statistics Education Research Journal, 13*(2), 93-103.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. Reston, VA: Author.

La torre, A., Del Rincón, D., & Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa.* Barcelona: Hurtado Ediciones.

Lopes, C. E. (2008). O ensino da Estatística e da Probabilidade na Educação Básica e a formação de professores. *Cad. Cedes, Campinas, 28*(74), 57-73. doi:10.1590/S0101-32622008000100005

Lopes, C. E. (2010). *A Educação Estatística no Currículo de Matemática: Um Ensaio Teórico*. In Anais da *33ª Reunião Anual da ANPEd* (pp. 1-15). Caxambu, Rio de Janeiro: ANPED.

Ludke, M., & André, M. (2013). *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas* (2ª ed.). Rio de Janeiro: E.P.U.

Oliveira, J. T. (1990). *Probabilidades e Estatística: conceitos, métodos e aplicações*. Lisboa: Editora McGraw-Hill.

Ortiz, J. J., Batanero, C., & Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma, 38*, 5-14.

Osorio, M. A., Suárez, A., & Uribe, C. (2013). Revisión de alternativas propuestas para mejorar el aprendizaje de la Probabilidad. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, *38*, 127-142. Retrieved from de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=194225730010

Parzys, B. (1997). Utilisation des arbres dans l'enseignement des probabilités. In IREM de Reims (Eds.), *Probabilités au lycée* (pp. 225-238). Reims: Commission inter-IREM de Statistique et Probabilités.

Paul, M., & Hlanganipai, N. (2014). The nature of misconceptions and cognitive obstacles faced by secondary school mathematics students in understanding probability: A case study of selected Polokwane secondary schools. *Mathematical Journal of Social Sciences*, *5*(8), 446-455.

Pedro, S., Santos, R., & Cotrim, L. (2014). Simulação–uma Aplicação ao Problema da Ruína do Jogador. *Economia e sociedade*, *70*(1), 85-103.

Pitman, J. (1993). *Probability*. New York, NY: Board.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. *Interações*, *22*, 196-216.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, *22*(2), 55–81.

Redecker, C. (2013). *JRC scientific and policy reports: The Use of ICT for Assessment of Key Competences*. Luxembourg: Publications Office of European Union. doi:10.2791/87007

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. In J. Kilpatrik, P. Gómez, & L. Rico (Eds.), *Educación Matemática* (pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Robinson, R., & Savenye, W. (2001). Qualitative research issues and methods: an introduction for educational technologists. In D. Jonassen, & D. Jonassen (Eds.), *Handbook of research for educational communications and technology* (pp. 1171-1195). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Romano, I., Martín, A. M., & Tenorio, A. F. (2012). Teaching statistics using Geogebra. In L. Gómez, I. Candel, & A. López (Eds.), *Proceedings of* 4th *International Conference on Education and New Learning Technologies - EDULEARN12 (*pp. 1307-1314). Barcelona: IATED.

Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista Pilar. (2010). *Metodología de la Investigación* (5ª ed.). Ciudad de México: McGraw-Hill.

Santos J. A., & Moita, F. M. (2009). Objetos de Aprendizagem e o Ensino de Matemática: Análise de sua importância na aprendizagem de conceitos de probabilidade. In *2° Encontro regional de educação matemática* – EREM, Rio Grande do Norte, Brasil. Retrieved from http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/artigos/objetos/comunica13.pdf

Santos, L. (2000*). A prática letiva como atividade de resolução de problemas: um estudo com três professoras do ensino secundário* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Portugal). Retrieved from http://hdl.handle.net/10451/3980

Seminara, S. A., Del Puerto, S. M., & Minnaard, C. L. (2006). Análisis de los errores: Una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, *38*(4), 1-13.

Serradó, A., Cardeñoso, J. M., & Azcárate, P. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: Su incidencia desde los libros de texto. *Statistics Education Research Journal*, *4*(2), 59-81.

Sharma, S. (2016). Probability from a socio-cultural perspective. *Statistics Education Research Journal, 15* (2), 126-144.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York, NY: Macmillan.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema, 14*, 66-91.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. In L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Tamayo, M. (2011). *El proceso de la investigación científica*. Ciudad de México: LIMUSA.

Taylor, S. J., & Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona: Paidós.

Usher, R. (1996). A critique to the neglected epistemological assumptions of educational research. In D. Scott, & R. Usher (Eds.), *Understanding educational research* (pp. 9-32). London: Routledge.

Walker, R. (1980). The conduct of educational case study: ethics, theory and procedures. In W. B. Dockrell, & D. Hamilton (Eds.), *Rethinking educational research* (pp. 30-63). London: Hodder & Stoughton.

Wolcott, H. (2009). *Writing up qualitative research* (3rd ed.). Oregon, OR: SAGE.

Yang, Der-Ching., & Lin, Yung-Chi. (2015). Assessing 10- to 11-year-old children's performance and misconceptions in number sense using a four-tier diagnostic test. *Educational Research, 57*(4), 368-388.

Zawojewski, J et al. (1992). Dealing with data and chance (3th ed.). Reston, VA: NCTM.

ANEXOS

ANEXOS A

Prueba Diagnóstico[1]
Matemática, 10.^{0} año

PARTE I

1) Un grupo de 9º año de un colegio tiene 30 alumnos, entre mujeres y hombres. Se aplicó un cuestionario para investigar las características de los alumnos de este grupo y, en lo que respecta a su color de ojos se obtuvieron los siguientes datos:

Color de ojos	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa** (%)
Cafés	14	
Azules		40
Verdes	3	
Negros		

Con base en la información anterior,

a) Completa la tabla calculando las frecuencias absolutas y relativas que faltan. Explica como determinaste las frecuencias.
b) Construye un gráfico de barras para representar el número de estudiantes con determinado color de ojos. Coloca dentro de cada barra las respectivas frecuencias relativas.

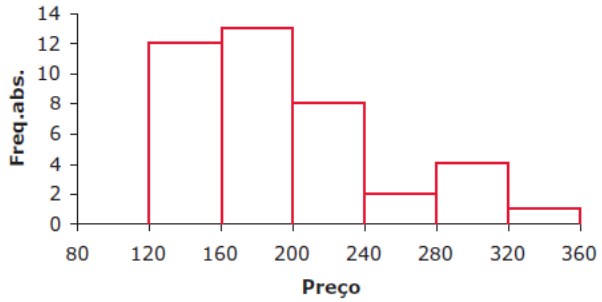
c) ¿Cuál es el color de ojos que está menos presente en el grupo? Explica tu respuesta.

d) ¿Cuál es la cantidad de alumnos que tienen el color de ojos que predomina en el grupo?

2) El siguiente gráfico muestra los resultados de una entrevista realizada a N personas que tienen un apartamento alquilado en una determinada región del país.

[1] **Adaptado de:** Conceição e Almeida (2012) e Murillo (2009).

Número de personas con apartamento alquilado según precio (preço), en miles de colones.



a) ¿Cuál es el valor de *N*? Explica como llegaste a ese resultado.

b) ¿Considerando la respuesta dada en la pregunta anterior?, ¿Cuál es el porcentaje de personas en esta región, que pagan por el alquiler del apartamento a un precio entre los 240 y los 280 mil colones?

c) ¿Qué apartamentos son menos buscados por las personas de esta región? ¿Cuál podrá ser una razón de este resultado?

3) Ya debes conocer el juego llamado "stop", donde pueden participar varios jugadores. En este juego, los participantes seleccionan una letra y, a partir de ese momento, tienen que ser capaces de registrar en una tabla un conjunto de nombres de, por ejemplo, persona, animal, país, color, fruta, etc., que comience por la letra seleccionada. El primer jugador en acabar de llenar todas las categorías definidas en la tabla termina la jugada, haciendo que los demás jugadores dejen de escribir. El juego acaba cuando se hayan completado todas las letras del abecedario, ganando el jugador que más puntos tenga acumulado al registrar correctamente los nombres en las varias categorías, para la letra indicada en cada una de las jugadas.
Supón ahora que 20 personas jugaron "stop" con 3 categorías: animal, fruta y país. Después de finalizar una jugada con determinada letra se observó que:

- 7 personas acertaron las 3 categorias;
- 1 acertó solo la categoría animal;
- 2 acertaron solo las categorías animal y país;
- 3 acertaron solo las categorías país y fruta;
- 12 personas acertaron la categoría animal; y
- 14 personas acertaron la categoría fruta.

a) Construye un diagrama de Venn para representar la situación descrita anteriormente en relación a las distintas categorías del juego, es decir, la relación entre los elementos de los conjuntos animal, fruta y país.

b) Responda las siguientes preguntas:

I. ¿Cuál es el número de jugadores que acertaron solo las categorías animal y fruta?

II. ¿Cuál es el número de jugadores que acertaron solo la categoría fruta?

III. ¿Cuál es el número de jugadores que acertaron solo la categoría país?

PARTE II

4. Supón que tienes una urna conteniendo dos bolas idénticas, pero distintas en su color: una bola roja y una bola amarilla. 10 alumnos hicieron la extracción de una bola, sin ver, volviendo a insertar la misma en la urna después de registrar su color. Se realizó esta experiencia 3 veces. Después de las 3 repeticiones de las 10 extracciones, realizadas por los alumnos, se obtuvieron las siguientes secuencias de resultados registrados:

   I. RRRRRRARRA
   II. ARARARAARA
   III. RRAARRAAAR **(**donde R significa bola roja y A significa bola amarilla**)**.

   ¿Cuál de las 3 secuencias es más probable? Justifica tu respuesta.

5. Supón que tienes dos dados equilibrados. Se quiere realizar la experiencia de lanzar los dados y registrar el número mayor que salió. ¿Cuáles son los casos favorables correspondientes al evento A definido por, "obtener 3 como número mayor" ?

6. Se tienen dos eventos A, B de un espacio muestral Ω, tales que $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.25$, $P(A \cup B) = 0.6$
   a) ¿Son los eventos A y B disjuntos? Justifica.
   b) ¿Son los eventos A y B complementares? Justifica.

7. En la tabla siguiente se presenta una distribución de las edades de 24 alumnos de un grupo de amigos de cierto colegio. Existen 9 alumnos cuyas edades, todas iguales, están representadas por "$\boldsymbol{a}$", siendo "$\boldsymbol{a}$" mayor a 13, mientras que b alumnos tienen una edad de 12 años.

Edad (en años)	11	12	13	$\boldsymbol{a}$
N.º de alumnos	6	b	3	9

Se escoge, al azar, uno de los 24 alumnos. ¿Cuál es la probabilidad de que el aluno escogido tenga una edad superior a 13 años? presenta el resultado en la forma de porcentaje.

8. Se realizó la experiencia de lanzar una moneda. Se repetió la experiencia varias veces con dos personas, habiendo por lo tanto dos registros independientes. En el primer registro se obtuvieron los datos de la tabla "*Primer registro*", mientras que en el segundo registro se obtuvieron los datos de la tabla "*Segundo registro*".

Tabla 1. Primer registro

Cara	Número de veces obtenida
Escudo	4
Corona	4

Tabla 2. Segundo registro

Cara	Número de veces obtenida
Escudo	460
Corona	890

a) ¿Cuál es la probabilidad de salir la cara escudo para la moneda de esta experiencia? Justifica tu respuesta.

b) ¿Está la moneda de esta experiencia equilibrada? Justifica tu respuesta.

PARTE III

9. En un saco hay 4 paquetes de café **(C)** y 5 de crema en polvo **(P),** ambos de igual tamaño y peso.
   Un paquete es retirado al azar y, en seguida, **tras reponer** el primero, es retirado un segundo paquete.

   La probabilidad de salir en ambas extracciones un paquete de café es:

   a) $\frac{4}{9}$
   b) $\frac{8}{9}$
   c) $\frac{16}{81}$
   d) $\frac{1}{9}$

10. La siguiente tabla muestra un registro del gusto por la matemática de hombres y mujeres de un grupo de 10º año. Se realizó la experiencia de escoger un alumno del grupo señalándolo en lista de clase, sin ver, para registrar el sexo y gusto por la matemática, obteniendo la información siguiente:

	Hombre	Mujer
Gusta de matemática	7	8
No gusta de matemática	5	9

Se definieron los siguientes eventos:

A: El alumno seleccionado es mujer.

B: El alumno seleccionado gusta de matemática.

Con base en la información anterior, calcula:

a) $P(\bar{A})$

b) $P(A \cap B)$

c) $P(B \cup \bar{B})$

Tarea 1
Matemática, 10.^{0} año

Lanzamiento de dos dados

Ciertamente ya experimentaste lanzar dados. ¿**Si lanzares dos dados, en simultáneo, y sumares el número de pintas de las caras que quedan viradas para arriba, que resultados puedes obtener? Justifica tu respuesta.**

En esta tarea te proponemos la realización de varias experiencias de lanzamiento de dos dados, recurriendo a Geogebra para ayudarte en esos lanzamientos. Considera las indicaciones siguientes que te explican cómo usar Geogebra para simular el lanzamiento de dos dados:

Abre el archivo de Geogebra con nombre *lanzamiento de dos dados.* Al abrir el archivo encontrarás diversos objetos que simulan la experiencia de lanzamiento de dos dados.

a) En la parte superior de la hoja gráfica observarás un deslizador n que indica el número de lanzamientos o repeticiones de la experiencia a realizar. Puedes mover el cursor para hacerlo variar, al mismo tiempo que observarás aparecer, en un gráfico de barras, los resultados de la experiencia. En el eje *X* están marcados los distintos resultados que se pueden obtener al sumar el número de pintas de las caras de dos dados, mientras que en el eje *Y* están representadas las respectivas frecuencias absolutas. Para observar las frecuencias relativas de cada resultado puedes posicionar el cursor sobre la barra correspondiente.
b) En la parte inferior de la hoja gráfica observarás el deslizador *e*, que indica el número de lanzamiento simulado. Puedes alterarlo con el cursor para observar los resultados obtenidos en cada uno de los *n* lanzamientos simulados. También tienes la imagen de las dos caras de los dos dados lanzados, que se alteran según el valor de *e*.
c) Para simular el lanzamiento de los dos dados *n* veces, debes dar click en el botón "recalcular experiencia". Cada vez que lo hagas estarás simulando el lanzamiento de los dos dados *n* veces.
d) Para ajustar la escala del gráfico de modo a visualizar mejor las barras y las respectivas frecuencias absolutas, posiciónate sobre uno de los ejes, da click en el botón del lado derecho del mouse, selecciona la opción EjeX:EjeY y selecciona una escala adecuada.

Tienes ahora oportunidad de simular varios lanzamientos de dados para resolver las preguntas que te proponemos.

PARTE I

1. Simula el lanzamiento de dos dados, repitiendo para esto la experiencia del lanzamiento de los dados 10 veces (fija el deslizador *n* en 10). Después ve alterando el deslizador *e* para observar los resultados obtenidos en cada lanzamiento.

a) ¿Qué resultados obtuviste para la suma de las pintas de las dos caras de los dados? Regístralos en la hoja "Registro de datos".
b) ¿Los valores que obtuviste fueron los que esperabas? Explica el porqué.

2. Realiza la experiencia del lanzamiento de dos dados nuevamente repitiendo para esto la misma ahora 20 veces. Exporta como **imagen png** lo que se muestra en la pantalla de tu computadora, y guarda la imagen en tu dispositivo de almacenamiento usb (guarda con el nombre "*parte 1*").

a) ¿Qué resultados obtuviste para la suma de las pintas de las dos caras de los dados? Regístralos en la hoja "Registro de datos".

b) ¿Los valores que ahora obtuviste fueron los que esperabas? Explica el porqué.

c) ¿Cuál es el resultado que salió más veces para esta simulación? ¿De cuántas formas diferentes se puede obtener este resultado? Utilizando el deslizador *e*, presenta tu respuesta en la siguiente tabla (puedes añadir a la tabla las líneas que necesitares).

	Resultado que salió más veces = ____	
Formas posibles de obtener el resultado	Dado1	Dado 2

3. ¿Existen resultados posibles de la experiencia que indicaste al inicio de la tarea que no hayas obtenido tras las dos simulaciones que realizaste? Regístralos también en tu hoja de registro.

4) ¿Cuántas veces piensas que sería necesario lanzar los dados para obtener todos los resultados posibles? Justifica tu respuesta.

5) Suponiendo que vas a lanzar los dados 50 veces, ¿puedes saber cuál será el resultado que vas a obtener en el 8º lanzamiento? Justifica tu respuesta.

PARTE II

Simula nuevamente el lanzamiento de dos dados, pero ahora repitiendo la experiencia del lanzamiento 900 y 1000 veces respectivamente. Exporta como **imagen png** lo que se muestra en la pantalla de tu computadora para $n = 900$, y guarda la imagen en tu dispositivo de almacenamiento usb (guarda con el nombre "*parte 2*").

Con base en esas simulaciones responde las siguientes preguntas:

6. ¿Qué resultados obtuviste para la suma de las pintas de las dos caras de los dados? Regístralos en la hoja "Registro de datos".

7. ¿Existen resultados posibles de la experiencia que no hayas obtenido en estas nuevas simulaciones? Regístralos en tu hoja "Registro de datos".

8. Compara tus respuestas de las preguntas 3 y 7, considerando tus resultados registrados en la hoja "Registro de datos". ¿Son diferentes las respuestas? En caso de responder si, presenta una justificación para esa diferencia.

Hoja de registro de datos. Tarea 1

Pregunta	**Resultados obtenidos**	**Resultados no obtenidos**
1 y 3 Resultados después de 10 lanzamientos o ensayos		
2 y 3 Resultados después de 20 lanzamientos o ensayos		
6 y 7 Resultados después de 900 lanzamientos o ensayos		
6 y 7 Resultados después de 1000 lanzamientos o ensayos		

Tarea 2
Matemática, 10.^{0} año

Lanzamiento de un dado

En esta tarea te proponemos la realización de varias experiencias de lanzamiento de un dado, recurriendo al uso de Geogebra para ayudarte en los lanzamientos.

Según tu experiencia, **¿Cuáles son los resultados posibles al lanzar un dado?**

Considera las indicaciones siguientes que te explican cómo usar Geogebra para simular el lanzamiento de un dado:

Abre el archivo de Geogebra com el nombre *lanzamiento de un dado.* Al abrirlo encontrarás diversos objetos que simulan la experiencia de lanzamiento de un dado.

a) En la parte superior de la hoja gráfica observarás un deslizador n que indica el número de lanzamientos a realizar. Puedes mover el cursor para hacerlo variar, al mismo tiempo que observarás aparecer, en un gráfico de barras, los resultados de la experiencia. En el eje X están marcados los distintos resultados posibles que se pueden obtener al lanzar el dado, mientras que en el eje Y están representadas las respectivas frecuencias absolutas. Para observar las frecuencias relativas de cada resultado puedes posicionar el cursor sobre la barra correspondiente, seleccionando las barras más oscuras en el gráfico según necesites. Éstas te permiten calcular las frecuencias relativas correspondientes a cada resultado posible según el número de lanzamientos simulados. Además de eso, tienes el deslizador k, que indica el número de ensayo simulado. Puedes alterarlo con el cursor para observar los resultados obtenidos en cada uno de los *n* ensayos simulados.

1) En la parte inferior de la hoja gráfica puedes observar el botón *VariarCantidadDeLanzamientos* y el botón *PausarN*. El primero permite observar simulaciones sucesivas de n lanzamientos, de forma dinámica, a medida que se va incrementando el valor de n, mientras que el segundo botón permite parar la animación. También tienes **imagen png** lo que se muestra en la pantalla de tu computadora para $n = 10$, y guarda la imagen en tu dispositivo de almacenamiento usb (guarda con el nombre "*pregunta 1*"). **No olvides ajustar la escala de la experiencia para visualizar bien las frecuencias absolutas de cada barra.**

   ¿Consideras que el dado esta equilibrado? Justifica tu respuesta.

2) Registra en la tabla "*Registro de datos*" las frecuencias relativas de los resultados posibles del lanzamiento del dado para $n = 50$, $n = 500$, $n = 1000$ Exporta como **imagen png** lo que se muestra en la pantalla de tu computadora para $n = 1000$, y guarda la imagen en tu dispositivo de almacenamiento usb (guarda con

el nombre "*pregunta 2*"). **No olvides ajustar la escala de la experiencia para visualizar bien las frecuencias absolutas de cada barra.**

¿Qué comportamiento observas en las frecuencias relativas (o frecuencias absolutas) de los resultados posibles de esta experiencia aleatoria a medida que el número de lanzamientos aumenta?

b) la imagen del dado, la cual cambiará conforme muevas el deslizador *k*, indicando de esta forma el resultado que salió en el lanzamiento k-ésimo, es decir, el lanzamiento número k.

c) Para ajustar la escala del gráfico y **visualizar mejor las barras y las respectivas frecuencias absolutas y relativas**, posiciónate sobre uno de los ejes, da clic en el botón derecho del cursos, selecciona la opción EjeX:EjeY y, finalmente, selecciona una escala adecuada.

Simula el lanzamiento de un dado para algunos valores de n entre $n = 1$ e $n = 500$, como se indica a seguir:

3) Registra en la tabla "*Registro de datos*" las frecuencias relativas de los resultados posibles del lanzamiento del dado para $n = 1,\ n = 5,\ n = 10$. Exporta como

Hoja de registro de datos. Tarea 2

	Resultados posibles					
f_{rel} → / n ↓	1	2	3	4	5	6
1						
5						
10						
50						
500						
1000						

***f*rel**: *Frecuencia* relativa de los resultados posibles del dado.

***n**: Número de repeticiones de la experiencia del lanzamiento del dado.*

Tarea 3
Matemática, 10.^{0} año

Probabilidad clásica[2]

PARTE I
Probabilidades en la batalla Naval

La Batalla Naval es un conocido juego utilizado para hacer pasar más deprisa una u otra clase aburrida. Este juego es formado por una cuadrícula 10 por 10 (representando el mar/agua), donde se disponen varios barcos que el "enemigo" irá a intentar hundir con tiros certeros.

Abre el archivo de Geogebra "Batalla Naval". En este encontraras 5 barcos con diversas configuraciones (A, B, C, D, E) colocados en el primer cuadrante del sistema de ejes cartesianos 10 x 10. Puedes alterar la posición del barco A con los deslizadores a y b presentes, mientras que los dos demás barcos puedes moverlos con el cursor siempre y cuando no te salgas de la zona de mar/agua.

1. ¿Tu adversario, al lanzar el primer tiro, tiene más posibilidad de acertar en un barco o en el mar/agua? Justifica tu resposta.

2. ¿Qué fracción del mar/agua está ocupada por los barcos: portaviones, A, B?

3. En términos de probabilidad, ¿qué representan las fracciones calculadas anteriormente?

4. ¿Cómo calculas la probabilidad de que tu adversario acierte en el barco A en términos de los casos favorables para el barco A y los casos totales?

5. ¿Cómo calculas la probabilidad de que tu adversario **no** acierte en el barco B en términos de los casos favorables para el barco B y los casos totales?

6. Desplaza el barco A para otra posición, moviendo para esto los deslizadores a e b. ¿Este cambio altera la probabilidad de que tu adversario acierte en el barco? Explica el porqué.

7. En general, ¿cómo calcularías la probabilidad de que tu adversario acierte en un barco de dimensión n el cual está introducido en un mar/agua de dimensión N?

Adptado de: Grillo (1995) e Geogebra (International Geogebra Institute)

PARTE II
Lanzamiento de dados equiprobables y cálculo de probabilidades

Abre el archivo de Geogebra "lanzamiento de dados". En este podrás simular el lanzamiento de uno, dos, tres o cuatro dados. Cuando lanzas los dados puedes también observar todos los casos posibles (casos totales) de la experiencia, bien como los casos favorables y la probabilidad del evento A: "la suma de las pintas de las caras de los dados es *x*", mirando para esto para los cuadros "Sumas de las pintas" y "Probabilidad". Para simular el lanzamiento de los dados da clic en el botón "lanzar", y para cambiar el número de dados a lanzar seleccione en la flecha "n^0 de dados".

8. Simula el lanzamiento de dos, tres o cuatro dados y observa cómo cambia la flecha roja intentando relacionar esto con el valor en "Probabilidad" a medida que haces un nuevo lanzamiento. Según lo observado:

   a) ¿Qué representa el valor que está a marcar la flecha roja en la fracción de probabilidad insertada en el cuadro "Probabilidad"?

   b) ¿Qué representa el denominador en la fracción de la probabilidad mostrada en el cuadro "Probabilidad"?

9. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de 10 al lanzar tres dados?

Exporta como **imagen png** lo que se muestra en la pantalla de tu computadora, y guarda la imagen en tu dispositivo de almacenamiento usb (guarda con el nombre "*pregunta 9*").

PARTE III
Extracción de bola de una urna

Considera que tienes dos cajas, cada una conteniendo 6 bolas enumeradas de uno a seis. Tienes la oportunidad de realizar la experiencia aleatoria de tirar una bola de cada caja y observar la suma de los números extraídos.

10. Explica ¿cómo puedes usar el archivo "lanzamiento de dados" para simular las extracciones de las bolas de las dos cajas?

11. ¿Qué es más probable, obtener, al extraer las dos bolas, una suma de 11 o una suma de 4? Justifica tu respuesta.

12. ¿Qué es más probable, obtener, al extraer las dos bolas, una suma de 6 o una suma de 8? Justifica tu respuesta.

13. ¿Cuál es la probabilidad de, al extraer las dos bolas, obtener una suma de 1? Justifica tu respuesta.

14. ¿Cuál es la probabilidad de que, al extraer las dos bolas, la suma obtenida sea un número entre 2 e 12? Justifica tu respuesta.

Tarea 4
Matemática, $10.^0$ año

Descubriendo propiedades de la probabilidad[3]

PARTE I
Diagramas de Venn y cálculo de probabilidades

Abre el archivo de Geogebra con el nombre *Diagrama de Venn.* Al abrirlo, del lado izquierdo de la pantalla observarás un diagrama de Venn correspondiente a dos eventos: A y B. Arriba de este diagrama tienes tres selectores $P(A)$, $P(B)$, e $P(A \cap B)$ que representan las probabilidades de los eventos A, B e $A \cap B$ respectivamente. Del lado derecho observarás algunos cálculos de probabilidades de estos y otros eventos, tales como $P(A), P(B)$, $P(A \cup B), P(A) + P(B)$, $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$.

En las preguntas 1 y 2 siguientes tienes la oportunidad de simular diferentes posiciones entre los eventos A y B. Para cada pregunta realiza lo que se te pide varias veces, registrando los valores de $P(A \cup B), P(A) + P(B)$, $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(A)$, $P(B)$ en la hoja de registro de dados en cada ocasión que realizares la experiencia, hasta encontrar un patrón (relación matemática =, >, <) entre los valores de $P(A \cup B)$ y $P(A) + P(B)$, $P(\bar{A})$ y $P(A)$, $P(\bar{B})$ y $P(B)$.

1. Mueve los deslizadores $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cap B)$ hasta obtener A y B como eventos disjuntos. Exporta como **imagen png** lo que se muestra en la pantalla de tu computadora, y guarda la imagen en tu dispositivo de almacenamiento usb (guarda con el nombre "*pregunta 1*").

Determina las siguientes probabilidades:

a) $P(A) + P(B)$

b) $P(A \cup B)$ Nota: $\bar{C}$ es el complemento de $C \Leftrightarrow \bar{C} \cup C = \Omega \ \wedge \ \bar{C} \cap C = \emptyset$

c) $P(\bar{B})$ Nota: A y B *son disjuntos* $\Leftrightarrow \ A \cap B = \emptyset$

d) $P(\bar{A})$

Anota tus resultados en la hoja "registro de datos".

[3] **Adaptado de:** Geogebra (International Geogebra Institute)

2. Mueve los deslizadores $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cap B)$ hasta obtener A y B como eventos **NO** disjuntos. Exporta como **imagen png** lo que se muestra en la pantalla de tu computadora, y guarda la imagen en tu dispositivo de almacenamiento usb (guarda con el nombre "*pregunta 2*").

Determina las siguientes probabilidades:

a) $P(A) + P(B)$

b) $P(A \cup B)$ Nota: $\bar{C}$ es el complemento de $C \Leftrightarrow \bar{C} \cup C = \Omega \ \wedge \ \bar{C} \cap C = \emptyset$

c) $P(\bar{B})$ Nota: A e B *são disjuntos* $\Leftrightarrow \ A \cap B = \emptyset$

d) $P(\bar{A})$

Anota tus resultados en la hoja "registro de dados".

3. Con base en los datos registrados en la tabla registro de datos, específicamente, los valores observados en las preguntas 1 y 2,
   a) ¿qué relación puedes establecer entre las probabilidades $P(A) + P(B)$ y $P(A \cup B)$, en el caso de que A y B sean eventos disjuntos?

   b) ¿se cumple la relación encontrada en el punto anterior en el caso de que A y B sean eventos **NO** disjuntos? Justifica tu respuesta.

   c) ¿qué relación puedes establecer entre las probabilidades $P(A)$ y $P(\bar{A})$, $P(B)$ y $P(\bar{B})$?

   d) ¿depende tu respuesta anterior de **ser** o **no** disjuntos los acontecimentos A y B? Justifica tu respuesta.

PARTE II

Uma vida atada nos estudos, televisor, videojogos e à comida rápida. ¿e o exercício?

4. Un estudio realizado en el 2014 con 3 373 estudiantes de secundaria, con edades entre los 12 y 18 años en la Gran Área Metropolitana de Costa Rica, evidencia que 63% de los jóvenes solo efectúan ejercicio un día por semana (en la clase de educación física), mientras que 22% dijo hacer ejercicio todos los días, y 12% dijo nunca hacer ejercicio. Como consecuencia, el estudio evidenció también que 21% de los adolescentes costarricenses tenían sobrepeso o obesidad para esas fechas.

Con base en la información proporcionada anteriormente, y definidos los siguientes eventos

A: el estudiante hace ejercicio solo una vez por semana.
B: el estudiante hace ejercicio los días todos.
C: el estudiante hace ejercicio más de una vez, pero menos de siete veces por semana.
D: el estudiante nunca hace ejercicio.

a) Construye un diagrama de Venn para relacionar los eventos A, B, C e D.

b) Calcula las siguientes probabilidades:
   I. $P(D)$

   II. $P(A \cup B \cup C)$

   III. $P(A \cup B \cup C \cup D)$

c) ¿Son los eventos A y B complementares? Justifica tu respuesta.

d) ¿Son los eventos A y B disjuntos? Justifica tu respuesta.

Hoja de registro de datos. Tarea 4

Probabilidad	*Eventos disjuntos*			*Eventos NO disjuntos*		
$P(A)$						
$P(\bar{A})$						
$P(B)$						
$P(\bar{B})$						
$P(A) + P(B)$						
$P(A \cup B)$						

Tarea 5
Matemática, 10.^{0} año

Probabilidad frecuencial[4]

PARTE I
Lanzamiento de una moneda

En esta tarea tienes la oportunidad de realizar una experiencia aleatoria que consiste en el lanzamiento al aire de una moneda costarricense de 500 colones, esto para calcular la probabilidad del evento A: "Obtener escudo al lanzar la moneda".

a) ¿Si lanzaras una moneda al aire, que resultados podrías obtener?

b) ¿Cuál es la probabilidad de los eventos

- A: obtener escudo al lanzar la moneda. _____
- B: obtener corona al lanzar la moneda. _____

Abre ahora el archivo de Geogebra con el nombre *lanzamiento de una moneda*. Al abrir el archivo encontrarás diversos objetos que simulan la experiencia de lanzamiento de una moneda.

a) En la parte superior de la hoja gráfica observarás un deslizador n que indica el número de lanzamientos o ensayos a realizar. Puedes mover el cursor para hacerlo variar, al mismo tiempo que observarás aparecer, en un gráfico de barras los resultados de la experiencia. En el eje X están marcados los distintos resultados posibles que se pueden obtener al lanzar la moneda, mientras que en el eje Y están representadas las respectivas frecuencias relativas correspondientes a cada resultado posible según el número de lanzamientos o ensayos simulados. Además, tienes el deslizador k, el cual indica el número de ensayo simulado. Puedes alterar con el cursor este deslizador k para observar los resultados obtenidos en cada uno de los n ensayos simulados.

b) En la parte inferior de la hoja gráfica observarás dos botones: el botón VariarCantidadDeLanzamientos y el botón PausarN. El primero permite observar la animación de distintas simulaciones de n lanzamientos sucesivos conforme se va aumentando el valor de n, mientras que el segundo permite pausar la

[4] **Adaptado de:** Geogebra (International Geogebra Institute)

animación. También tienes la imagen de la moneda, la cual cambiará conforme muevas el deslizador k o conforme varíes el valor de n, indicando de esta forma el resultado que salió en el respectivo ensayo.

c) Si necesitaras ajustar la escala del gráfico para visualizar mejor las respectivas frecuencias relativas de cada resultado posible, posiciónate sobre uno de los ejes, dá click en el botón derecho del ratón y selecciona la opción EjeX:EjeY y, finalmente, selecciona una escala adecuada.

A continuación, tienes la oportunidad de simular el lanzamiento de la moneda, para eso realiza lo siguiente:

1. Experimenta con diversos valores de n dando click en el botón *VariarCantidadDeLanzamientos,* y observa el comportamiento de las frecuencias relativas para cada valor simulado. *Registra cada valor en la hoja registro de datos.*

a) ¿Son los eventos salir corona y salir escudo equiprobables? Justifica.

b) ¿A qué valor se aproximan o tienden las frecuencias relativas de los eventos salir corona y salir escudo a medida que aumenta el valor de lanzamientos n?

2. A partir de los datos registrados en la hoja de registro de datos, y en referencia a la pregunta 1, ¿qué relación observas en el comportamiento de los valores de las frecuencias obtenidas en la pregunta anterior; esto a medida que aumenta el número de lanzamientos en relación al valor de probabilidad que definiste al inicio de la tarea?

3. Con base en tu respuesta anterior, ¿qué relación puedes establecer entre la probabilidad teórica (Regla de Laplace) y la frecuencia relativa de un evento?, esto tras realizarse una cantidad n "grande" de ensayos de una experiencia aleatoria envolviendo eventos elementales equiprobables?

PARTE II
Aproximando áreas por medio de probabilidad

Abre el archivo de Geogebra con el nombre *Estimando áreas por medio de probabilidad.* Al abrirlo encontrarás diversos objetos que simulan la experiencia de aproximar áreas por medio de probabilidad.

a) Al abrir el archivo, del lado izquierdo de la pantalla observarás un cuadrado de lado 10 unidades con una elipse introducida dentro de este.

b) Del lado derecho de la pantalla encontrarás algunos valores numéricos que se actualizan cuando alteras el deslizador *n*. Al alterar el deslizador aparecerán *n* puntos dentro del cuadrado, distribuidos aleatoriamente. Además, tienes dos botones, el botón *simular lanzamiento de puntos* permite comenzar la simulación del lanzamiento de un punto dentro del cuadrado, aumentando la cantidad de puntos a medida que aumenta el número de lanzamientos. El botón *Reiniciar en* $n = 1$ permite volver a comenzar la simulación desde el primer lanzamiento. Finalmente, el botón *pausa* te permite pausar la simulación.

4. Mueve el deslizador n o usa el botón *simular lanzamiento de puntos* para simular el lanzamiento de puntos dentro del cuadrado. ¿Qué observas en la distribución de los puntos en el sentido de la proporción puntos en el interior de la elipse entre puntos en el interior del cuadrado?, esto a medida que aumenta el valor de n.

5. Con base en la respuesta dada en la pregunta 4, ¿qué relación puedes establecer entre las razones $\frac{Área\ cubierta\ por\ los\ puntos\ situados\ en\ el\ interior\ de\ la\ elipse}{Área\ cubierta\ por\ los\ puntos\ situados\ en\ el\ interior\ del\ cuadrado}$ y $\frac{Área\ de\ la\ elipse}{Área\ del\ cuadrado}$, cuando el valor de n es grande?

6. Supón que defines el evento A: "un punto se sitúa en el interior de la elipse",

a) ¿Cómo puedes calcular $P(A)$?

b) ¿Cuánto es aproximadamente $P(A)$? Exporta como **imagen png** lo que se muestra en la pantalla de tu computadora, y guarda la imagen en tu dispositivo de almacenamiento usb (guarda con el nombre "*tarea 5*") Justifica tu respuesta.

7. ¿Qué relación matemática puedes establecer entre $P(A)$ y $\frac{Área\ de\ la\ elipse}{Área\ del\ cuadrado}$? Justifica tu respuesta.

8. Con base en los resultados obtenidos en las preguntas 6 y 7, calcula el valor aproximado del área de la elipse.

Hoja de registro de datos. Tarea 5

	Frecuencia relativa para diferentes valores de n						
VALOR DE N							
Frecuencia $Corona$							
Frecuencia $Escudo$							

Prueba de Evaluación[5]
Matemática, 10.^{0} año

Responda a cada una de las siguientes preguntas de forma clara y justificando cuando se le solicita.

1) En un grupo, constituido por 14 hombres – entre ellos Tiago y Ricardo-, y 16 mujeres, era necesario escoger un alumno hombre, para pertenecer a una comisión que tenían que integrar los dos sexos. Como era necesario escoger un hombre decidieron escribir los nombres de todos los alumnos en papeles de igual tamaño y textura, para luego insertarlos en una caja:

   a) ¿Cuál es el espacio muestral de esta experiencia?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de escoger un hombre del grupo? y una mujer?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de escoger a Tiago o Ricardo como miembro de la comisión si consideramos que se extrayeron de la caja los papeles con los nombres de las mujeres?

   d) ¿Son los eventos A: escoger cualquier alumno como miembro de la comisión, y Z: escoger un hombre como miembro de la comisión, eventos disjuntos? Justifique su respuesta

   e) ¿Son los eventos A y Z complementales? Justifique su respuesta

2) En una caja están 6 bolas del mismo tamaño y color enumeradas de 1 a 6.

   a) ¿Cuál es la probabilidad teórica de extraer la bola enumerada con el número 2? Justifique su respuesta.

   b) Se repitió la experiencia de extraer una bola de la caja varias veces, pero con dos personas, haciendo, por tanto, dos registros independientes de esta experiencia presentados en las siguientes tablas: "*Primer registro*" y "*Segundo registro*".

Tabela 1. Primer registro

Bola	Número de veces obtenida la bola
1	4
2	4
3	3

[5] **Adaptado de:** Conceição e Almeida (2012)

4	4
5	3
6	4

Tabela 2. Segundo registro

Bola	**Número de veces obtenida la bola**
1	189
2	178
3	185
4	194
5	426
6	191

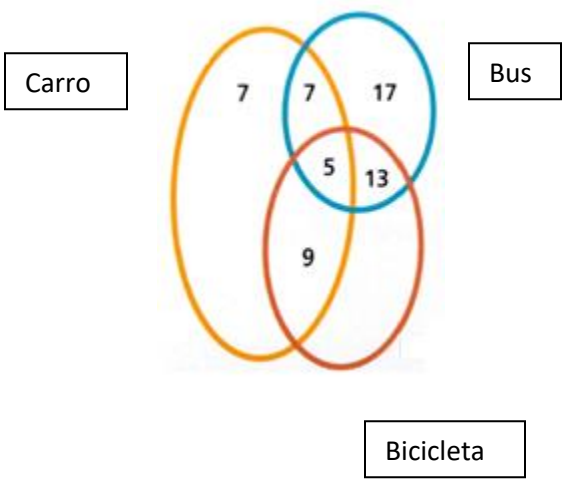
I. Con base en estos registros, ¿cuál sería la probabilidad de extraer la bola con el número 2 para esta experiencia? Justifica tu respuesta.

II. ¿Puedes considerar esta experiencia como una experiencia formada por eventos elementales equiprobables? Justifica tu respuesta.

3) En una encuesta sobre medios de transporte, 90 trabajadores de una empresa respondieron a la pregunta: ¿Qué transporte utiliza para ir para el trabajo? Después de que todos los trabajadores respondieron a la encuesta, se evidenció que los medios de transporte que usan son el carro, el bus o la bicicleta. Para organizar los datos se definieron los siguientes eventos:

A: El trabajador utiliza como medio de transporte sólo bus.
B: El trabajador utiliza como medio de transporte sólo bicicleta.
C: El trabajador utiliza como medio de transporte sólo carro.

Se organizó el contaje de dichas respuestas de manera visual, a través de un diagrama de Venn, obteniendo la siguiente información



A partir de la información proporcionada completa el diagrama anterior, y responde lo que se le solicita:

a) ¿Cuál es el valor de $P(A)$? Justifica.

b) Para esta experiencia, a partir de los eventos A, B y C, y operaciones de conjuntos (intersección, unión, etc) entre ellos, define eventos nuevos G, H, $I, J, K, L\ y\ M$; tales que:

I. G es evento compuesto:

II. H es evento imposible:

III. I es evento cierto:

IV. J y K son eventos disjuntos:

V. L y M son eventos complementares:

4) Suponga que se tiene una urna que contiene dos bolas idénticas, pero distintas en su color: una bola roja y una bola amarilla. 10 estudiantes realizan una experiencia que consiste en extraer de la urna, sin ver, una de las dos bolas. Los 10 alumnos hicieron la extracción de una bola, sim ver, volviendo a insertarla en la urna, después de registrar su color. Se realizó esta experiencia 3 veces. Después de las 3 repeticiones de las diez extracciones realizadas por los alumnos, se obtuvieron las siguientes secuencias de resultados:

IV. VAVAVAVAVA
V. AAAAAAAAAA
VI. AVAAAVAAVA **(**donde V es bola verde y A es bola amarilla).

a) ¿Es esta una experiencia aleatoria o determinista? Justifica tu resposta.

b) ¿Cuál de las 3 secuencias es menos probable? Justifica tu respuesta.

Cuestionario
Matemática, 10.^{0} año

Pretendo, con este cuestionario, conocer su opinión sobre el trabajo realizado con Geogebra en el aprendizaje de las Probabilidades. Este cuestionario es anónimo y no tendrá cualquier influencia en su calificación. Responda, por favor, con la misma sinceridad. Gracias por su colaboración.

PARTE I

Responda las siguientes preguntas:

1. Edad _____

2. Género

   - Masculino
   - Femenino

PARTE II

Para cada una de las siguientes afirmaciones, manifiesta tu nivel de acuerdo, indicando con una marca la opción que te parece más adecuada:
1 – Esto en desacuerdo totalmente; **2** – Estoy en desacuerdo parcialmente; **3** – No estoy en desacuerdo ni de acuerdo; **4** – Estoy de acuerdo parcialmente; y **5** – Estoy de acuerdo totalmente.

		1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	Me gusta la Matemática					
2	Considero las Probabilidades uno de los temas más fáciles de aprender, en relación a otros temas aprendidos en Matemática hasta el día de hoy.					
3	Acostumbro usar la computadora todos los días					
4	Me gusta trabajar con tecnología en clase					
5	Antes de estas aulas, yo ya sabía trabajar con Geogebra					
6	Las indicaciones dadas por el profesor fueron suficientes para la realización de las tareas con Geogebra					
7	El tiempo disponibilizado para la realización de las tareas fue suficiente					
8	Los asuntos tratados en las tareas son motivadores					
9	La realización de cada tarea me ayudaba en las tareas siguientes					
10	La realización de las tareas con Geogebra me ayudó a comprender mejor los conceptos de probabilidad					

11	Las discusiones de las tareas en clase me ayudaron en mi aprendizaje					

PARTE III

1. ¿Cuáles piensas son las ventajas del uso de Geogebra en la resolución de las tareas de Probabilidad?

2. ¿Cuáles son las principales dificultades que tuviste en la resolución de estas tareas con Geogebra?

3. ¿Qué te agradó más y qué te agradó menos a lo largo de las clases en que se realizaron las tareas con Geogebra?

_____
_____
_____
_____
_____

4. ¿Hay alteraciones que gustarías de sugerir en relación al trabajo realizado en estas clases?

ANEXOS B

Teste Diagnóstico[6]
Matemática, 9.º ano

1) Uma turma do 9º ano de uma escola, tem 30 alunos, entre raparigas e rapazes. Aplicou-se um inquérito para investigar as características dos alunos desta turma e, no que respeita à sua cor dos olhos obteve-se os seguintes dados:

Cor de olhos	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa** (%)
Castanhos	14	
Azuis		40
Verdes	3	
Cinzentos		

Com base na informação anterior,

a) Completa a tabela calculando as frequências absolutas e relativas que estão em falta.

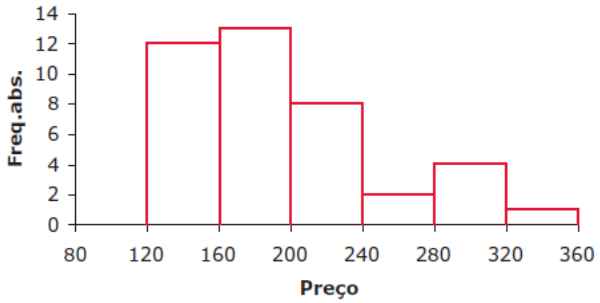
b) Constrói um gráfico de barras para representar o número de estudantes com determinada cor de olhos. Coloca dentro de cada barra as respetivas frequências relativas.

c) Qual a cor de olhos que está menos presente na turma? Explica a tua resposta.

d) Qual a quantidade de alunos que tem a cor de olhos que predomina na turma?

2) O gráfico seguinte mostra os resultados deum inquérito realizado a N pessoas que têm um apartamento alugado numa determinada região do país.

Número de pessoas com apartamento alugado segundo o seu preço (em euros)



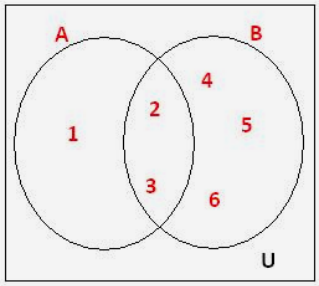
[6] **Adaptado de:** Conceição e Almeida (2012) e Murillo (2009).

a) Qual o valor de *N*? Explica como chegaste a esse resultado.

b) Considerando a resposta dada na questão anterior, qual é a percentagem de pessoas, nesta região, que pagam pelo aluguer do apartamento um preço entre os 240 e os 280 euros?

c) Que apartamentos são menos procurados pelas pessoas desta região? Qual poderá ser a razão deste resultado?

3) Os diagramas de Venn permitem-nos representar graficamente relações entre conjuntos. Por exemplo, considera os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e o seguinte diagrama de Venn:



Neste diagrama pode observar-se que tanto o conjunto A como o conjunto B são representados através de círculos, os quais tem no seu interior os elementos que o compõem. Além disso, os elementos 2 e 3 estão representados na intersecção dos círculos do conjunto A e do conjunto B, dado que são elementos comum aos dois conjuntos, enquanto que o elemento 1 só pertence ao conjunto A e os elementos 4,5,6 só pertencem ao conjunto B. Por último, pode observar-se que todos os elementos, de A como e de B pertencem a um conjunto U, designado por conjunto universo e representado por um quadrado.

De acordo com o explicado anteriormente, resolve a tarefa a seguir:

Já deves conhecer um jogo chamado "stop", onde podem participar vários jogadores. Neste jogo, os participantes selecionam uma letra e, a partir desse momento, têm que ser capazes de registar numa grelha um conjunto de nomes de, por exemplo, pessoa, animal, país, cor, fruta, etc., que comece pela letra selecionada. O primeiro jogador a acabar de preencher todas as categorias definidas na grelha termina a jogada, fazendo que os demais jogadores deixem de escrever. O jogo acaba quando forem percorridas todas as letras do abecedário, ganhando o jogador que mais pontos tenha acumulado ao registar corretamente os nomes nas várias categorias, para a letra indicada em cada uma das jogadas.

Supõe agora que 20 pessoas jogaram ao "stop" com três categorias: animal, fruta e país. Após finalizar-se uma jogada com determinada letra, observa-se que:

- 7 pessoas acertaram as três categorias;
- 1 acertou só a categoria animal;
- 2 acertaram só as categorias animal e país;
- 3 acertaram só as categorias país e fruta;

- 12 pessoas acertaram a categoria animal; e
- 14 pessoas acertaram a categoria fruta.

a) Construa um diagrama de Venn para representar a situação descrita em relação às distintas categorias do jogo.

Responda às seguintes questões:

I. Qual o número de jogadores que acertaram só as categorias animal e fruta?

II. Qual o número de jogadores que acertaram só a categoria fruta?

III. Qual o número de jogadores que acertaram só a categoria país?

4) Suponha que se tem uma urna contendo duas bolas idênticas, mas distintas na sua cor: uma bola vermelha e uma bola amarela. 10 estudantes realizam uma experiência que consiste em extrair da urna, sem ver, uma das duas bolas.

a) Qual a probabilidade de extrair a bola amarela? Justifica a tua resposta.

Supõe agora que os 10 alunos fizeram a extração de uma bola, sem ver, que voltam a inserir na urna após registarem a sua cor. Realizou-se esta experiência 3 vezes. Após as 3 repetições das dez extrações realizadas pelos alunos, obteve-se as seguintes sequências de resultados:

VII. VVVVVVAVVA
VIII. AAVAVVAVVA
IX. AAAAAVAAA **(**em que V é bola vermelha e A é bola amarela).

a) Qual das 3 sequências é mais provável? Justifica a tua resposta.

Tarefa 1
Matemática, 9.^{0} ano

Lançamento de dois dados

Certamente já experimentaste lançar dados. Se lançares dois dados, em simultâneo, e somares o número de pintas das faces que ficam viradas para cima, que resultados podes obter? Justifica a tua resposta.

Nesta tarefa propomos-te a realização de várias experiências de lançamento de dois dados, recorrendo ao Geogebra para te auxiliar nesses lançamentos. Considera as indicações seguintes que te explicam como usar o Geogebra para simulares o lançamento de dois dados:

Abre o arquivo do Geogebra com nome *lançamento de dois dados.* Ao abrir o arquivo encontrarás diversos objetos que simulam a experiência do lançamento de dois dados.

e) Na parte superior da folha gráfica observarás um seletor n que indica o número de lançamentos ou ensaios a realizar. Podes mexer o cursor para o fazer variar, ao mesmo tempo que observarás aparecer, num gráfico de barras os resultados da experiência. No eixo X estão marcados os distintos resultados que se podem obter somando o número de pintas das faces de dois dados, enquanto no eixo Y estão representadas as respetivas frequências absolutas. Para observares as frequências relativas de cada resultado podes posicionar o cursor sobre a barra correspondente.
f) Na parte inferior da folha gráfica observarás o seletor e, que indica o número do ensaio simulado. Podes alterá-lo com o cursor para observares os resultados obtidos em cada um dos n ensaios simulados. Também tens a imagem das duas faces dos dois dados lançados, que se alteram segundo o valor de e.
g) Para simulares o lançamento dos dois dados n vezes deverás clicar no botão "re-calcular experiência". Cada vez que o fizeres, estarás a simular o lançamento dos dois dados n vezes.
h) Para ajustares a escala do gráfico de modo a visualizares melhor as barras e as suas respetivas frequências absolutas, posiciona-te sobre uns dos eixos, clica no botão do lado direito do rato, seleciona a opção EixoOx:EixoOy e seleciona uma escala adequada.

Tens agora oportunidade de simular vários lançamentos de dados para resolveres as questões que te propomos:

PARTE I

1. Simula o lançamento de dois dados fazendo 10 ensaios (fixa o seletor n em 10). Depois vai alterando o seletor e para observares os resultados de cada lançamento.

a) Que resultados obtiveste para a soma das pintas das duas faces dos dados? Regista-os na folha "Registro de dados".
b) Os valores que obtiveste foram os que esperavas? Explica porquê.
c) Qual o resultado da soma que saiu mais vezes?

2. Repete a experiência do lançamento de dois dados fazendo agora 20 ensaios.

a) Que resultados obtiveste para a soma das pintas das duas faces dos dados? Regista-os na folha "Registro de dados".

b) Os valores que agora obtiveste foram os que esperavas? Porquê?

c) Qual o resultado que saiu mais vezes? De quantas formas diferentes se pode obter este resultado? Utilizando o seletor *e*, apresenta a tua resposta na tabela a seguir (podes acrescentar na tabela as linhas que precisares).

	Resultado que saiu mais vezes = ____	
Formas possíveis de obter o resultados	Dado1	Dado 2

3. Existem resultados possíveis da experiência, que indicaste no início da tarefa, que não tenhas obtido nas duas simulações que realizaste? (Regista-os também na tua folha de registro). Porque achas que isso aconteceu?

4) Quantas vezes pensas que seria necessário lançar os dados para obter todos os resultados possíveis? Justifica a tua resposta.

5) Supondo que vais lançar os dados 50 vezes, podes indicar à partida qual o resultado que vais obter no 8º lançamento? Justifica a tua resposta.

PARTE II

Simula novamente o lançamento de dois dados fazendo, desta vez, 900 e 1000 ensaios. Com base nessas simulações responde às perguntas seguintes:

6. Que resultados obtiveste para a soma das pintas das duas faces dos dados? Regista-os na folha "Registro de dados".
7. Existem resultados possíveis da experiência que não tenhas obtido nestas novas simulações? Regista-os na tua folha "Registro de dados".

8. Compara as tuas respostas às questões 3 e 7, com base nos resultados registados na tua folha "Registro de dados". São diferentes? Se sim, apresenta uma justificação para essa diferença.

Folha de registro de dados. Tarefa 1

Casos possíveis		
Questão	**Resultados obtidos**	**Resultados não obtidos**
1 e 3 Resultados após 10 ensaios		
2 e 3 Resultados após 20 ensaios		
6 e 7 Resultados após 900 ensaios		
6 e 7 Resultados após 1000 ensaios		

Tarefa 2
Matemática, 9.^{0} año

Lançamento de um dado

Já tiveste a experiência de simular o lançamento de dois dados e observar os distintos resultados que podes obter ao somares as pintas das faces viradas para cima, bem como as distintas formas de os obter.

Nesta tarefa propomos-te a realização de várias experiências de lançamento de um dado, recorrendo ao Geogebra para te auxiliar nesses lançamentos. Segundo a tua experiência,

Quais são os resultados possíveis ao lançar um dado?

Considera as indicações seguintes que te explicam como usar o Geogebra para simulares o lançamento de um dado:

Abre o arquivo do Geogebra com nome *lançamento de um dado.* Ao abrir o arquivo encontrarás diversos objetos que simulam a experiência de lançamento de um dado.

a) Na parte superior da folha gráfica observarás um seletor n que indica o número de lançamentos ou ensaios a realizar. Podes mexer o cursor para o fazer variar, ao mesmo tempo que observarás aparecer, num gráfico de barras os resultados da experiência. No eixo X estão marcados os distintos resultados possíveis que se podem obter ao lançar o dado, enquanto que no eixo Y estão representadas as respetivas frequências absolutas. Para observares as frequências relativas de cada resultado podes posicionar o cursor sobre a barra correspondente, ou olhar para as barras mais escuras no gráfico, estas calculam as frequências relativas correspondentes a cada resultado possível segundo o número de lançamentos ou ensaios simulados. Além disso, tens o seletor k, que indica o número do ensaio simulado. Podes alterá-lo com o cursor para observares os resultados obtidos em cada um dos n ensaios simulados.
b) Na parte inferior da folha gráfica podes observar o botão *VariarQuantidadeDeLançamentos* e o botão *PausarN* . O primeiro permite observar simulações sucessivas de n lançamentos, de forma dinâmica, à medida que se vai acrescentando o valor de n, enquanto o segundo botão permite parar a animação. Também tens a imagem do dado, a qual mudará conforme mexeres o seletor k ou variar o n, indicando desta forma o resultado que saiu no respetivo ensaio.
c) Para ajustares a escala do gráfico e visualizares melhor as barras e as respetivas frequências absolutas, posiciona-te sobre um dos eixos, clica o botão direito do rato, seleciona a opção EixoOx:EixoOy e, finalmente, seleciona uma escala adequada.

Simula o lançamento de um dado fazendo variar *n* desde $n = 1$ até $n = 500$ segundo indica-se a seguir.

1) Regista na tabela "*Registo de experiências*" as frequências relativas dos resultados possíveis do lançamento do dado para $n = 1,\ n = 5,\ n = 10$. Consideras que o dado é equilibrado? Justifica a tua resposta.

2) Regista na tabela "*Registro de experiências*" as frequências relativas dos resultados possíveis do lançamento do dado para $n = 50,\ n = 100,\ n = 500$. O que observas nas frequências relativas dos resultados possíveis desta experiência aleatória à medida que o número de lançamentos aumenta?

Registro de experiências

	Frequências relativas					
f_{rel} / n	1	2	3	4	5	6
1						
5						
10						
50						
100						
500						

a) A tendência que encontraste na questão anterior também se verifica com as frequências absolutas?

b) De quantas formas diferentes se pode obter cada resultado possível?

Tarefa 3
Matemática, 9.^{0} ano

Probabilidade Clássica[7]

PARTE I
Probabilidades na batalha Naval

A Batalha Naval é um conhecido jogo muitas vezes utilizado para fazer passar mais depressa uma ou outra aula mais aborrecida. É formado por uma quadrícula de 10 por 10 (representando o mar) onde se dispõem os vários barcos que o "inimigo" irá tentar afundar com tiros certeiros. Abre o arquivo do Geogebra "Batalha Naval". Neste encontras 5 barcos com diversas configurações (A, B, C, D, E) colocados no primeiro quadrante do sistema de eixos cartesianos 10 x 10. Podes alterar a posição dos barcos com o cursor, caso queiras, desde que fiquem sempre coincidentes com os quadrados da quadrícula.

1. Qual é o barco em que é mais provável acertar? Justifica a tua resposta.

2. O que é mais provável, acertar no barco B ou no barco C? Justifica a tua resposta.

3. O teu adversário, ao lançar o primeiro tiro, tem mais possibilidade de acertar num barco ou na água? Justifica a tua resposta.

4. Que fração do mar está ocupada por cada um dos barcos: portaviões, A, B, C, D e E?

5. Para um barco qualquer, explica como podes encontrar a fração de mar por ele ocupada?

6. Como calculas a probabilidade do teu adversário acertar no barco A?

7. Como calculas a probabilidade do teu adversário não acertar no barco B?

8. Desloca o barco A para outra posição, mexendo os seletores a e b. Esta mudança altera a probabilidade do teu adversário acertar no barco? Explica porquê.

9. Como calculas a probabilidade de que o teu adversário acertar num barco de dimensão F introduzido num mar de dimensão T?

[7] **Adaptado de**: Grillo (1995) e Geogebra (International Geogebra Institute)

PARTE II
Lançamento de dados equiprováveis e cálculo de probabilidades

Abre o arquivo de Geogebra "lançamento de dados". Neste poderás simular o lançamento de um, dois, três ou quatro dados. Quando lanças os dados podes também observar todos os casos possíveis da experiencia bem como os casos favoráveis e a probabilidade do acontecimento A: "a soma das pintas das faces dos dados é *x*". Para simular o lançamento dos dados clique no botão "lançar", e para mudar o número de dados a lançar selecione no 'n^0 de dados'.

10. Simula a experiência de lançar um número diferente de dados: dois dados, e três dados respetivamente. Para cada caso, simula o lançamento de dados até observares o valor da probabilidade teórica de obter 6 na soma das pintas das faces dos dados lançados, olhando para isto para os quadros "Somas das pintas" e "Probabilidade" até obter o valor de 6 no quadro "Somas das pintas", em cujo caso no quadro "Probabilidade" observarás a respetiva probabilidade. A medida que clicas no botão "lançar" olha também como muda a seta vermelha e tenta relacionar isto com o valor em "Probabilidade". Regista os teus resultados na tabela a seguir:

	Probabilidade teórica de **obter 6 na soma das pintas das faces dos dados lançados.**
Lançamento de dois dados	
Lançamentos de três dados	

a) O que representa o valor que esta a marcar a seta vermelha na fração de probabilidade inserida no quadro "Probabilidade"?

b) O que representa o denominador na fração da probabilidade inserida no quadro "Probabilidade"?

11. Qual a probabilidade de obter uma soma de 10 ao lançar três dados?

PARTE III
Extração de bola de uma urna

Considera que tens duas caixas, cada uma contendo 6 bolas numeradas de um a seis, e que vais realizar a experiência aleatória de tirar uma bola de cada caixa e observar a soma dos seus números.

12. Explica como poderias usar o arquivo "lançamento de dados" para simular as extrações das bolas das duas caixas?

13. Qual a probabilidade de ao extrair as duas bolas a soma dos seus números seja 7?

14. O que é mais provável obter, ao extrair as duas bolas, uma soma de 11 ou uma soma de 4? Justifica a tua resposta.

15. O que é mais provável obter, ao extrair as duas bolas, uma soma de 6 ou uma soma de 8? Justifica a tua resposta.

16. Qual a probabilidade de, ao extrair as duas bolas, obter uma soma de 1? Justifica a tua resposta.

17. Qual a probabilidade de que ao extrair as duas bolas, a soma obtida seja um número entre 2 e 12? Justifica a tua resposta.

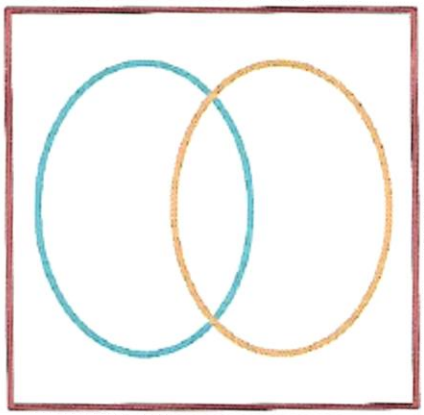
Tarefa 4
Matemática, 9.^{0} ano

Descobrindo propriedades da probabilidade[8]

PARTE I
Diagrama de Venn

Participam num jantar 15 jovens que falam diferentes línguas: 8 falam inglês e francês, 3 não falam inglês nem francês, e 9 falam inglês.

1. Completa o diagrama de Venn com a informação dada.



2. Quantos jovens falam francês?

3. Determina a probabilidade de, escolhendo um jovem ao acaso,

   a) encontrar um que apenas fale francês.

   b) encontrar um que apenas fale inglês.

   c) encontrar um que não saiba falar nem francês nem inglês.

PARTE II
Diagramas de Venn e cálculo de probabilidades

Abre o arquivo do Geogebra com nome *Diagrama de Venn.* Ao abrir o arquivo, do lado esquerdo do ecrã observarás um diagrama de Venn correspondente a dois acontecimentos: A e B. Acima deste diagrama tens três seletores $P(A)$, $P(B)$, e $P(A \cap B)$ que representam as probabilidades dos acontecimentos A, B e $A \cap B$ respetivamente. No lado direito observarás

[8] **Adaptado de**: Conceição e Almeida (2012) e Geogebra (International Geogebra Institute)

alguns cálculos de probabilidades destes acontecimentos, tais como $P(A), P(B)$, $P(\overline{A \cup B}), P(A \cup B), P(A) + P(B)$

4. Mexe os seletores $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$ uma primeira vez até obter A e B como acontecimentos disjuntos. Qual o valor das seguintes probabilidades:

   e) $P(A) + P(B)$

   f) $P(A \cup B)$

   g) $P(\bar{B})$

   h) $P(\bar{A})$ Nota: $\bar{C}$ é o complemento de C

   Anota os teus resultados na folha "registro de dados".

5. Volta a mexer os seletores $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$ uma segunda vez até obter A e B como acontecimentos disjuntos. Qual o valor das seguintes probabilidades:

   a) $P(A) + P(B)$

   b) $P(A \cup B)$

   c) $P(\bar{B})$

   d) $P(\bar{A})$ Nota: $\bar{C}$ é o complemento de C

   Anota os teus resultados na folha "registro de dados".

6. Mexe uma terceira vez mais os seletores $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$ até obter A e B como acontecimentos disjuntos. Qual o valor das seguintes probabilidades:

   a) $P(A) + P(B)$

   b) $P(A \cup B)$

   c) $P(\bar{B})$

   d) $P(\bar{A})$ Nota: $\bar{C}$ é o complemento de C

   Anota os teus resultados na folha "registro de dados".

7. Mexe os seletores $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$ até obter A e B como acontecimentos **não** disjuntos. Qual o valor das seguintes probabilidades:

   a) $P(A) + P(B)$

   b) $P(A \cup B)$

   c) $P(\bar{B})$

   d) $P(\bar{A})$ Nota: $\bar{C}$ é o complemento de C

   Anota os teus resultados na folha "registro de dados".

8. Volta a mexer os seletores $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$ até obter A e B como acontecimentos **não** disjuntos. Qual o valor das seguintes probabilidades:

   a) $P(A) + P(B)$

   b) $P(A \cup B)$

   c) $P(\bar{B})$

   d) $P(\bar{A})$ Nota: $\bar{C}$ é o complemento de C

   Anota os teus resultados na folha "registro de dados".

9. Mexe uma terceira vez os seletores $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$ até obter A e B como acontecimentos **não** disjuntos. Qual o valor das seguintes probabilidades:

   a) $P(A) + P(B)$

   b) $P(A \cup B)$

   c) $P(\bar{B})$

   d) $P(\bar{A})$ Nota: $\bar{C}$ é o complemento de C

   Anota os teus resultados na folha "registro de dados".

10. Com base nos valores observados nos pontos 4, 5 e 6, consegues identificar uma relação entre as probabilidades $P(A) + P(B)$ e $P(A \cup B)$, no caso de A e B serem acontecimentos disjuntos? Depende a sua resposta do valor de $P(A)$ e $P(B)$? Justifica a tua resposta. Anota a relação encontrada na folha "registro de dados".

11. Com base nos valores observados nos pontos 7,8 e 9, consegues identificar uma relação entre as probabilidades $P(A) + P(B)$ e $P(A \cup B)$, no caso de A e B serem acontecimentos **não** disjuntos? Depende a sua resposta do valor de $P(A)$ e $P(B)$? Justifica a tua resposta. Anota a relação encontrada na folha "registro de dados".

12. Com base nos valores observados nas questões anteriores, que relação matemática podes estabelecer entre as probabilidades $P(A)$ e $P(\bar{A})$,e $P(B)$ e $P(\bar{B})$, isto é, entre a probabilidade de um acontecimento e a probabilidade do complementar desse acontecimento?

13. Esta relação que encontraste na questão anterior, depende dos acontecimentos serem disjuntos? Justifica a tua resposta. Anota a relação encontrada na folha "registro de dados".

PARTE III
Refeições rápidas

Numa cidade da Europa está a realizar-se um estudo sobre alimentos que prejudicam a saúde. Após ser feita uma análise de dados às respostas a um inquérito, chegou-se à conclusão que nesta cidade as pessoas recorrem muito a refeições rápidas, principalmente a hambúrguer e pizzas que designamos por refeição A e B, respetivamente.

Do total de pessoas inquiridas, 28% respondeu que consome a refeição A e 20% a refeição B. Além disso, 6% dos inquiridos consome os dois tipos de refeição A e B.

Com base nos resultados anteriores, responde às questões seguintes:

14. Constrói um diagrama de Venn para representar os resultados do inquérito.

15. Considera os seguintes acontecimentos referentes às refeições investigadas no inquérito:

    A: a pessoa come refeição tipo A.
    B: a pessoa come refeição tipo B.
    C: a pessoa não come refeição A nem B.

    Calcula as seguintes probabilidades:

    IV. $P(A \cup B)$

    V. $P(A) + P(B)$

    VI. $P(C)$

    VII. $P(C) + P(A \cup B)$

16. A partir dos cálculos que fizeste na questão 14 e a relação encontrada na questão 10, podes afirmar que os acontecimentos A e B são disjuntos? Justifica a tua resposta.

17. A partir dos cálculos que fizeste na questão 14 e a relação encontrada na questão 12, podes afirmar que os acontecimentos C e $A \cup B$ são complementares? Justifica a tua resposta.

Registro de dados

Tarefa 4.

Número de pergunta	$P(A)$	$P(\bar{A})$	$P(B)$	$P(\bar{B})$	$P(A) + P(B)$	$P(A \cup B)$
4 Acontecimentos disjuntos: simulação 1						
5 Acontecimentos disjuntos: simulação 2						
6 Acontecimentos disjuntos: simulação 3						
7 Acontecimentos **não** disjuntos: simulação 1						
8 Acontecimentos **não** disjuntos: simulação 2						
9 Acontecimentos **não** disjuntos: simulação 3						
10 Relação matemática Para acontecimentos disjuntos						
11 Relação matemática Para acontecimentos **não** disjuntos						
12 Relação matemática Para acontecimentos complementares						

Tarefa 5
Matemática, 9.^{0} ano

Probabilidade Frequencista[9]

PARTE I
Lançamento de uma moeda

Nesta tarefa tens a oportunidade de realizar uma experiência aleatória que consiste no lançamento de uma moeda ao ar para calcular a probabilidade do acontecimento A: "obter face nacional ao lançar a moeda".

a) Se lançares uma moeda ao ar, que resultados podes obter?

b) Qual a probabilidade dos acontecimentos:

- A: obter face nacional ao lançar a moeda. _____
- B: obter face europeia ao lançar a moeda. _____

Abre o arquivo do Geogebra com nome *lançamento de uma moeda.* Ao abrir o arquivo encontrarás diversos objetos que simulam a experiência de lançamento de uma moeda

a) Na parte superior da folha gráfica observarás um seletor n que indica o número de lançamentos ou ensaios a realizar. Podes mexer o cursor para o fazer variar, ao mesmo tempo que observarás aparecer, num gráfico de barras os resultados da experiência. No eixo X estão marcados os distintos resultados possíveis que se podem obter ao lançar a moeda, enquanto no eixo Y estão representadas as respetivas frequências relativas correspondentes a cada resultado possível segundo o número de lançamentos ou ensaios simulados. Além disso, tens o seletor k, que indica o número do ensaio ou lançamento simulado. Podes alterá-lo com o cursor para observares os resultados obtidos em cada um dos n ensaios simulados.
b) Na parte inferior da folha gráfica observarás dois botões, o botão *VariarQuantidadeDeLançamentos* e o botão *PausarN* . O primeiro permite observares a animação de distintas simulações de n lançamentos sucessivos conforme se vai aumentando o valor de n, enquanto o segundo permite pausar a animação. Também tens a imagem da moeda, a qual mudará conforme mexes o seletor k ou conforme varia n, indicando desta forma o resultado que saiu no respetivo ensaio.
c) Se precisares ajustar a escala do gráfico para visualizares melhor as respetivas frequências relativas de cada resultado possível, posiciona-te sobre uns dos eixos, clica no botão direito do rato e seleciona a opção EixoOx:EixoOy e, finalmente, seleciona uma escala adequada.

[9] **Adaptado de**: Geogebra (International Geogebra Institute)

1. Simula o lançamento de uma moeda 10 vezes, fixando o seletor n em $n = 10$. Observa a frequência relativa dos resultados possíveis da experiência (sair face nacional e sair face europeia). Registra o teu resultado na folha registro de dados.

2. Simula o lançamento de uma moeda com 20 lançamentos, isto é, fixa o seletor n em $n = 20$. Observa a frequência relativa dos resultados possíveis da experiência (sair face nacional e sair face europeia). Registra o teu resultado na folha registro de dados.

3. Começa a aumentar o valor de "*n*", clicando no botão *VariarQuantidadeDeLançamentos.* As frequências relativas dos resultados possíveis tendem a estabilizar-se? São os acontecimentos sair face nacional e sair face europeia equiprováveis? A que valor se aproximam ou tendem as frequências relativas dos acontecimentos sair face nacional e sair face europeia à medida que aumenta o valor de lançamentos n?

4. Se lançares mais uma vez a moeda após simular 1200 lançamentos, que frequência relativa esperas obter para os acontecimentos sair face nacional e sair face europeia? Justifica a tua resposta.

5. Compara os valores das frequências obtidas na questão anterior para os acontecimentos sair face nacional e sair face europeia com o valor da probabilidade que definiste no inicio da tarefa.

6. Que relação podes estabelecer entre a probabilidade teórica (Regra de Laplace) e a frequência relativa de um acontecimento depois de se realizar uma quantidade "grande" de *n* ensaios de uma experiencia aleatória formada por acontecimentos elementares equiprováveis?

PARTE II
Aproximando áreas com probabilidade

Abre o arquivo do Geogebra com nome *Aproximação de áreas por meio de probabilidade.* Ao abrir o arquivo encontrarás diversos objetos que simulam a experiência de aproximar áreas através de probabilidade.

a) Ao abrir o arquivo do lado esquerdo do ecrã observarás um quadrado de lado 10 unidades com uma elipse inserida nele.
b) Do lado direito do ecrã encontrarás alguns valores numéricos que se atualizam quando alteras o seletor *n*. Ao alterar o seletor aparecerão *n* pontos dentro do quadrado, distribuídos aleatoriamente. Além disso, tens dois botões, o botão *simular lançamento de pontos* permite-vos começar a simular o lançamento de um ponto dentro do quadro, aumentando a quantidade de pontos a medida que aumenta o número de lançamentos; o botão *Reiniciar em* $n = 1$ permite-vos voltar a começar a simulação desde o primeiro lançamento; finalmente *pausa* permite-vos pausar a simulação.

7. Mexe o seletor *n* ou usa o botão *simular lançamento de pontos* para simular o lançamento de pontos dentro do quadrado. O que acontece com os pontos simulados dentro do quadrado a medida que aumenta o valor de n?

8. Na questão 7 encontraste uma relação entre a probabilidade teórica de um acontecimento A e a frequência relativa de esse acontecimento A depois de se realizar um grande número "*n*" de ensaios da experiencia aleatória. Se definires o acontecimento A: "um ponto cai dentro da elipse", como podes calcular a probabilidade do acontecimento A a partir da relação encontrada na questão 7? Qual é esta probabilidade?

9. Qual a área do quadrado?

10. Quanto é, aproximadamente, a razão $\frac{Área\ da\ elipse}{Área\ do\ quadrado}$?

11. A partir das respostas anteriores, calcula aproximadamente a área da elipse. Explica a tua resposta.

Registro de dados.
Tarefa 5

Número de pergunta	**Dados obtidos**	
1 Frequência relativa para 10 lançamentos.	Face nacional	Face europeia
2 Frequência relativa para 20 lançamentos.	Face nacional	Face europeia

Teste de avaliação[10]
Matemática, 9.^{0} ano

1) Numa turma, constituída por 14 rapazes – entre eles o Tiago e o Ricardo-, e 16 raparigas, era necessário escolher um aluno rapaz, para pertencer a uma comissão que tinha de integrar os dois sexos. Como era necessário escolher um rapaz decidiram colocar os nomes de todos os alunos numa caixa em papeis de igual tamanho e textura:

   a) Qual o espaço amostral desta experiência?

   b) Qual a probabilidade de na turma, escolher um rapaz? E uma rapariga?

   c) Qual a probabilidade de escolher ao Tiago ou o Ricardo como rapaz membro da comissão?

   d) São os acontecimentos A: escolher qualquer aluno como membro da comissão, e Z: escolher um rapaz como membro da comissão, acontecimentos disjuntos? Justifica a tua resposta

   e) São os acontecimentos A e Z complementares? Justifica a tua resposta.

2) Numa caixa estão 6 bolas do mesmo tamanho e cor numerada de 1 a 6.

   a) Qual a probabilidade teórica de extrair a bola numerada com o 2? Justifica a tua resposta.

   b) Repetiu-se a experiência de extrair uma bola da caixa várias vezes, mas com duas pessoas, havendo, portanto, dois registos independentes desta experiência apresentados nas seguintes tabelas: "*Primeiro registo*" e "*Segundo registo*".

Tabela 1. Primeiro registo

Bola	Número de vezes obtida
1	4
2	4
3	3
4	4
5	3
6	4

[10] **Adaptado de:** Conceição e Almeida (2012)

Tabela 2. Segundo registo

Bola	Número de vezes obtida
1	189
2	178
3	185
4	194
5	426
6	191

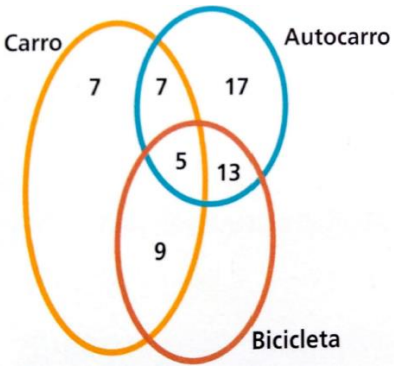
I. Com base nestes registos, qual seria a probabilidade de extrair a bola com o número 2 para esta experiência? Justifica a tua resposta.

II. Podes considerar esta experiência como uma experiência formada por acontecimentos elementares equiprováveis? Justifica a tua resposta.

5) Num inquérito sobre meios de transporte, 90 trabalhadores de uma empresa responderam à pergunta: "Que transporte utiliza para ir para o trabalho?". Após todos os trabalhadores responderem ao inquérito, evidenciou-se que os meios de transporte que usam são o carro, o autocarro ou a bicicleta. Para organizar os dados definiram-se os seguintes acontecimentos:

A: o trabalhador utiliza como meio de transporte só autocarro.
B: o trabalhador utiliza como meio de transporte só bicicleta.
C: o trabalhador utiliza como meio de transporte só carro.

Organizou-se a contagem de ditas respostas de maneira visual, através de um diagrama de Venn, obtendo a seguinte informação:



A partir da informação proporcionada completa o diagrama anterior, e responde o que se vos solicita:

a) Qual o valor de $P(A)$? Justifica.

b) Para esta experiência, a partir dos acontecimentos A, B e C, e operações de conjuntos (interseção, união, etc) entre eles, define acontecimentos novos E, F, G, H, I, J, K, L; tais que:

I. G é acontecimento composto:

II. H é acontecimento impossível:

III. I é acontecimento certo:

IV. J e K são acontecimentos disjuntos:

V. L e M são acontecimentos complementares:

6) Suponha que se tem uma urna contendo duas bolas idênticas, mas distintas na sua cor: uma bola vermelha e uma bola amarela. 10 estudantes realizam uma experiência que consiste em extrair da urna, sem ver, uma das duas bolas. Os 10 alunos fizeram a extração de uma bola, sem ver, voltando a inserir na urna após registarem a sua cor. Realizou-se esta experiência 3 vezes. Após as 3 repetições das dez extrações realizadas pelos alunos, obteve-se as seguintes sequências de resultados:

I. VAVAVAVAVA
II. AAAAAAAAAA
III. AVAAAVAAVA **(**em que V é bola vermelha e A é bola amarela).

a) É esta uma experiência aleatória ou determinista? Justifica a tua resposta.

b) Qual das 3 sequências é menos provável? Justifica a tua resposta.

Anexo C

Tabela 5.1. Cronograma das tarefas da experiência de ensino

Tópicos	**Objetivos das tarefas**	**Tarefa**	**Atividade em sala de aula**	**Aulas**
A1) Tabelas de frequência **A2)** Gráficos de barras **A3)** Diagramas de Venn **A4)** conceitos básicos de probabilidade abordados na proposta de tarefas com o Geogebra.	▪ Evidenciar conhecimentos prévios conceptuais do aluno ligados a tópicos de probabilidade, necessários para o trabalho da proposta pedagógicas. ▪ Evidenciar se o aluno tem aprendizagem algum sob os conceitos básicos de probabilidade a trabalhar na proposta pedagógica.	**TD**: Teste diagnóstico	-Observação (85 min) -Entrega de TD (5 min)	**Aula 1 (3/3/17)**
B1) Experiências aleatórias **B2)** Espaço amostral: casos favoráveis, casos possíveis, acontecimento	▪ Identificar caraterísticas associadas à aleatoriedade a partir da simulação do lançamento de dois dados com o Geogebra. ▪ Identificar casos favoráveis, casos possíveis e acontecimentos a partir da simulação do lançamento de dois dados com o Geogebra.	**T1**: Lançamento de dois dados	-Discussão TD (15 min) -Trabalho T1 (75 min)	**Aula 2 (10/3/17)**
C1) Acontecimentos equiprováveis.	▪ Inferir o conceito de equiprobabilidade a partir de simulação com o Geogebra do lançamento de um dado.	**T2**: Lançamento de dado	-Discussão T1 (15 min) -Trabalho T2 (50 min) -Discussão T2 (10 min) -Formalização (15 min)	**Aula 3 (17/3/17)**
D1) Probabilidade clássica: regra de Laplace	▪ Inferir a regra de Laplace a partir da representação gráfica de barcos de diferentes dimensões utilizando a vista gráfica do Geogebra.	**T3**: Probabilidade clássica	-Trabalho T3 (60 min) -Discussão T3	**Aula 4 (24/3/17)**

D2) Acontecimentos certos, impossíveis, mais prováveis.	▪ Determinar a probabilidade de acontecimentos definidos ao lançar três dados e somar as pintas das faces a partir de simulação com o Geogebra para a consolidação da regra de Laplace. ▪ Determinar a probabilidade de acontecimentos definidos ao lançar dois dados e somar as pintas das faces a partir de simulação com o Geogebra para a classificação de acontecimentos em equiprováveis, certos e impossíveis.		(15 min) -Formalização (10 min)	
E1) Propriedades da união e complemento para dois acontecimentos disjuntos ou não disjuntos.	▪ Inferir propriedades de probabilidade para acontecimentos disjuntos e complementares a partir de simulação com o Geogebra de diferentes posições entre dois acontecimentos representados mediante diagramas de Venn. ▪ Utilizar as propriedades de acontecimentos disjuntos e complementares na resolução de tarefas ligadas a vida cotidiana para a consolidação das propriedades.	**T4**: descobrindo propriedades de probabilidade	-Trabalho T4 (60 min) -Discussão T4 (15 min) -Formalização (10 min)	**Aula 5 (7/4/17)**
F1) Probabilidade frequencista: lei dos grandes números.	▪ Inferir o conceito frequencista de probabilidade a partir da simulação com o Geogebra do lançamento de uma moeda. ▪ Aproximar a área de uma elipse a partir da simulação com o Geogebra do lançamento de pontos no interior de um quadrado que contem uma elipse no seu interior para a consolidação do conceito frequencista de probabilidade.	**T5**: Probabilidade frequencista	-Trabalho T5 (60 min) -Discussão T5 (15 min) -Formalização (10 min)	**Aula 6 (14/7/17)**
Todos os conceitos básicos de probabilidade trabalhados nas tarefas com apoio ao Geogebra	▪ Avaliar o desempenho dos alunos nos conceitos matemáticos abordados nas tarefas com recurso ao Geogebra.	**TA**: Teste de avaliação	-Aplicação (70 min)	**Aula 7 (21/4/17)**