

MA-1003: Apuntes de Cálculo III

Joseph C. Várilly

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

II Ciclo Lectivo del 2022

Introducción

Este es un curso de *cálculo en varias variables*. Como es tradicional la palabra “cálculo” aquí se refiere a aquellos cálculos que involucran derivadas o integrales de funciones.¹ En los cursos anteriores esas operaciones se aplicaban a funciones de una sola variable real. Ahora se va a abarcar funciones de más variables – generalmente dos o tres variables en la gran mayoría de los ejemplos.

Esto requiere cierta familiaridad con la estructura del plano real \mathbb{R}^2 y del espacio real tridimensional \mathbb{R}^3 . Es importante poder visualizar las superficies y los sólidos que servirán como regiones de integración; este curso tiene un contenido visual más alto que los cursos anteriores, pero siempre al servicio de obtener las expresiones algebraicas o las cantidades numéricas buscadas.

Programa de materias

1 Superficies y curvas

Rectas y planos en dos o tres dimensiones. Elementos de dibujo en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 . Superficies cuadráticas en \mathbb{R}^3 : elipsoides, hipérboloides y paraboloides. Curvas en el espacio \mathbb{R}^3 , longitud de arco. Velocidad y aceleración a lo largo de una curva. La curvatura y la torsión de una curva, el uso del triedro móvil para calcularlas.

2 Derivadas parciales

Funciones de dos o tres variables reales. Derivadas parciales de primer y segundo orden, vectores gradientes y derivadas direccionales. Planos tangentes y rectas normales. La regla de la cadena en varias variables. Derivación implícita. La fórmula de Taylor en varias variables. Puntos críticos y su clasificación. Extremos absolutos en regiones con borde. Extremos ligados, multiplicadores de Lagrange.

¹La palabra latina *calculus*, el diminutivo de *calx* (piedra caliza) originalmente denotaba una pequeña piedra usado para contar o ayudar cálculos aritméticos.

3 Integrales múltiples

Integrales dobles de regiones planas. Regiones planas no rectangulares, cambio del orden de integración. Cambio de variables en integrales dobles. Integrales triples: parametrización y graficación de regiones sólidas en \mathbb{R}^3 . Cálculo de áreas y volúmenes por integrales dobles y triples. Uso de coordenadas cilíndricas y esféricas en \mathbb{R}^3 .

4 Análisis vectorial

Integrales de línea. Parametrización de curvas en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 . Campos vectoriales conservativos y sus funciones potenciales. El teorema de Green en el plano \mathbb{R}^2 . Integrales de superficie. Parametrización de superficies en \mathbb{R}^3 . Cálculo de flujos de un campo vectorial. El teorema de Gauss para superficies cerradas. Orientación de superficies con borde. El teorema de Stokes.

Bibliografía

En la página web del curso, se colocará semanalmente unos apuntes detallados. Abundan los libros sobre cálculo en varias variables; a continuación se ofrece una selección de libros recomendables.

- 1 Tom M. Apostol, *Calculus 2*, 2ª edición, Reverté, Barcelona, 1985.
- 2 Juan Félix Ávila Herrera, *Cálculo en varias variables*. Editorial UCR, San José, 2017.
- 3 Boris P. Demidovich, *Problemas y ejercicios de análisis matemático*, Mir, Moscú, 1977.
- 4 C. Henry Edwards y David E. Penney, *Cálculo con trascendentes tempranas*, 7ª edición, Pearson Educación, México, DF, 2008.
- 5 Stanley I. Grossman, *Calculus*, Academic Press, New York, 1981.
- 6 Jerrold E. Marsden y Anthony J. Tromba, *Cálculo vectorial*, Addison-Wesley Latinoamericana, Wilmington, DE, 1991.
- 7 James Stewart, *Cálculo en varias variables*, 8ª edición, Cengage, México, DF, 2018. (Disponible para lectura en línea en $\langle \text{http://sibdi.ucr.ac.cr/buscardbb.php} \rangle$)

Índice general

I Superficies y curvas	I-I
I.1. Geometría analítica plana	I-I
I.2. Planos y rectas en \mathbb{R}^3	I-4
I.3. Superficies especiales en \mathbb{R}^3	I-10
I.4. Curvas en el espacio \mathbb{R}^3	I-13
2 Derivadas parciales	2-I
2.1. Funciones de varias variables reales	2-I
2.2. Planos tangentes y rectas normales	2-7
2.3. La regla de la cadena	2-10
2.4. Derivación implícita	2-17
2.5. La fórmula de Taylor en varias variables	2-23
2.6. Máximos y mínimos	2-30
3 Integrales múltiples	3-I
3.1. Integrales dobles en regiones planas	3-3
3.2. Cambio de variables en integrales dobles	3-14
3.3. Integrales triples	3-27
3.4. Coordenadas cilíndricas y esféricas	3-36
4 Análisis vectorial	4-I
4.1. Integrales de línea	4-I
4.2. Integrales de superficie	4-20
4.3. El teorema de Stokes	4-32

I Superficies y curvas

At any given Point of a given Curve, to find the Quantity of Curvature. There are few Problems concerning Curves more elegant than this, or that give a greater Insight into their nature.

— Isaac Newton¹

I.I. Geometría analítica plana

Antes de abordar superficies y curvas en el espacio tridimensional, conviene hacer un breve repaso de las rectas y algunas curvas en el plano.

Los puntos del plano real \mathbb{R}^2 se denotan por sus coordenadas cartesianas (x, y) . El espacio real tridimensional se denota por \mathbb{R}^3 y sus puntos tiene tres coordenadas cartesianas: el punto general es (x, y, z) . Las coordenadas de puntos serán *reales* (no complejas) a lo largo de este curso.

En \mathbb{R}^3 , conviene usar una *notación vectorial*: se escribe

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

para denotar la posición de un punto del espacio. Esta cantidad \vec{r} se llama un *vector*. Los vectores se pueden sumar y es posible multiplicar un vector por un número real (un *escalar*):

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \quad c\vec{r} = (cx, cy, cz).$$

Rectas en el plano \mathbb{R}^2

Una recta en \mathbb{R}^2 tiene una **ecuación de primer grado**:

$$Ax + By + C = 0,$$

con $A^2 + B^2 > 0$ (es decir, se prohíbe el caso $A = B = 0$, por razones obvias).

La recta que pasa por el punto (x_0, y_0) con pendiente m tiene la ecuación:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

La **recta que pasa por dos puntos** distintos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) tiene la ecuación:

$$\boxed{(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0.} \quad (\text{I.I})$$

Esta ecuación (a) es de primer grado; y (b) pasa por los dos puntos indicados.

¹En el libro *The Method of Fluxions and Infinite Series*, publicado póstumamente en Londres, 1736.

La ecuación anterior se puede reorganizar en la forma:²

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

y estas fracciones determinan una nueva variable auxiliar o **parámetro** t , al poner

$$t := \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Nótese que los denominadores son *constantes*; al escribir $a = x_2 - x_1$ y $b = y_2 - y_1$, el sistema

$$\frac{y - y_1}{b} = \frac{x - x_1}{a} = t$$

se convierte en un par de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \end{cases} \quad (I.2)$$

que *representa la misma recta en forma paramétrica*. Se ha reemplazado la sola ecuación (I.1) por dos ecuaciones, que involucran una variable extra t (el parámetro). Ahora bien, si se *elimina la t* de entre estos dos ecuaciones, se regresa a la sola ecuación (I.1) en las variables originales x, y .

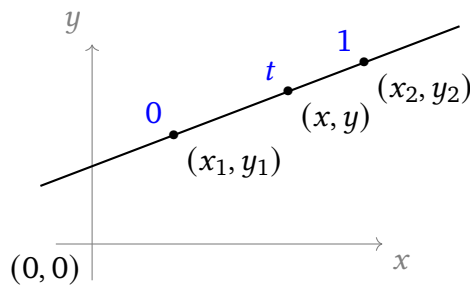


Figura I.1: Una recta que pasa por dos puntos del plano \mathbb{R}^2

El parámetro t sirve para identificar los puntos individuales de la recta. Al restaurar $a = x_2 - x_1$ y $b = y_2 - y_1$ en la fórmula (I.2), se obtiene

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1), \end{aligned}$$

²Esta igualdad de fracciones es equivalente a la ecuación (I.1), excepto si $x_2 = x_1$ o bien $y_2 = y_1$, porque en tales casos uno de los denominadores es cero. Para tomar esos casos en cuenta, se decreta que si el denominador vale 0 entonces el numerador es también 0. Así pues, si $x_2 = x_1$, se deduce que $x = x_1$ (una recta vertical); y si $y_2 = y_1$, se concluye que $y = y_1$ (una recta horizontal).

o bien:

$$\begin{cases} x = (1-t)x_1 + tx_2 \\ y = (1-t)y_1 + ty_2 \end{cases} \quad (1.3)$$

Esta fórmula representa *la recta que pasa por dos puntos* distintos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , ahora *en forma paramétrica*. Cuando $t = 0$ se ve que $(x, y) = (x_1, y_1)$; cuando $t = 1$ se ve que $(x, y) = (x_2, y_2)$. Los valores $0 \leq t \leq 1$ corresponden a los puntos del **segmento de recta** con extremos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) ; véase la Figura 1.1.

Los otros valores de t , es decir, los casos $t < 0$ y $t > 1$ respectivamente, corresponden a las dos semirrectas complementarias a ese segmento.

Curvas cuadráticas en \mathbb{R}^2

Una *ecuación de segundo grado* en el plano es de la forma

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0. \quad (1.4)$$

Dependiendo de las coeficientes A, B, C, F, G, H en esta fórmula, esta ecuación representa curvas de diversa naturaleza. Por ejemplo,

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \text{es un solo punto} \quad (x, y) = (0, 0).$$

Peor todavía, la ecuación

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \quad \text{es una curva vacía,}$$

que no tiene punto alguno porque la ecuación no tiene solución para x, y números reales. (En este curso, no interesan las soluciones complejas.)

► Al excluir tales “casos degenerados”, queda el *caso reducible* en donde el lado izquierdo se factoriza en el producto de dos expresiones de primer grado:

$$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Esta ecuación representa el **par de rectas** $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Un punto (x, y) sobre cualquiera de estas dos rectas cumple la ecuación compuesta.

► La mayoría de las ecuaciones cuadráticas no son degenerados ni reducibles. Se destacan tres casos importantes (Figura 1.2):

(a) La ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es una **elipse** con *semiejes* $a > 0$ y $b > 0$.

Cuando $a = b$, este es $x^2 + y^2 = a^2$, el *círculo* de radio a centrado en $(0, 0)$.

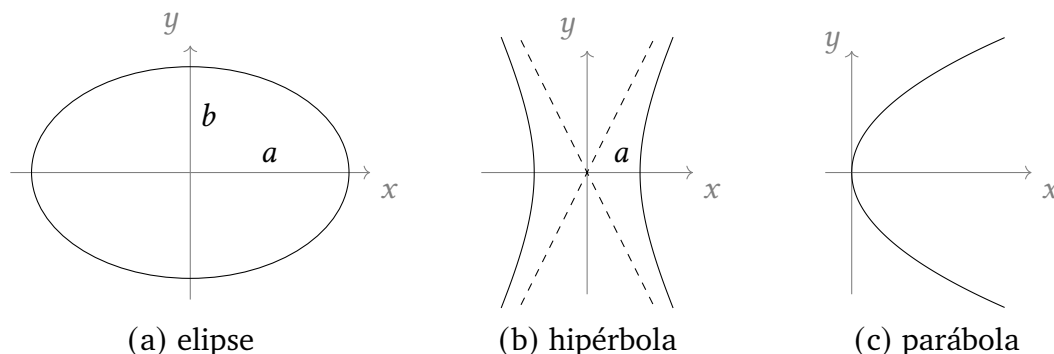


Figura 1.2: Curvas cuadráticas irreducibles

(b) La ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ es una **hipérbola** con *asíntotas*: $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$.

Las asíntotas de la hipérbola son dos rectas, que no tienen puntos en común con la hipérbola porque vienen de la ecuación cuadrática: reducible $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

(c) La ecuación $y^2 = 4cx$ es una **parábola**. La recta $y = 0$ (que es el eje x) es un *eje de simetría* de esta parábola: la reflexión $x' = x, y' = -y$ deja la parábola invariante.

Ahora bien: cualquier transformación $(x, y) \mapsto (x', y')$ del plano que lleva rectas en rectas tiene la forma general:

$$\begin{aligned}x &= l x' + m y' + n, \\y &= p x' + q y' + r,\end{aligned}$$

con $lq - mp \neq 0$. Tales cambios de coordenadas no cambian el aspecto general de una curva cuadrática. Resulta que *cualquier curva no degenerada con ecuación cuadrática irreducible* puede cambiarse, de este modo, en una de las tres formas mencionadas: es una elipse, una hipérbola o una parábola.

1.2. Planos y rectas en \mathbb{R}^3

Planos en el espacio \mathbb{R}^3

En el espacio tridimensional, una *ecuación de primer grado* representa un **plano**:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

con $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. [[Se prohíbe el caso $A = B = C = 0$, porque no da información sobre la ubicación de los puntos (x, y, z) .]]

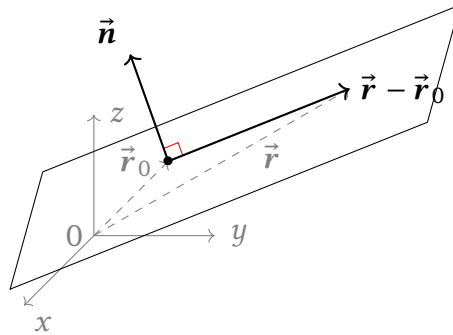


Figura 1.3: El plano que pasa por el punto \vec{r}_0 con vector normal \vec{n}

Un plano que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) tiene una ecuación de la forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{1.5a}$$

El lado izquierdo de esta ecuación es un *producto escalar* (producto punto) de vectores:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0, \tag{1.5b}$$

donde $\vec{n} = (A, B, C)$, $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$; y $\vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$.

(El *producto punto* de dos vectores $\vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{v} = (l, m, n)$ es el número real $\vec{u} \cdot \vec{v} := al + bm + cn$.)

Dos vectores en \mathbb{R}^3 son *ortogonales* (o perpendiculares) si y solo si su producto punto es igual a 0. La ecuación (1.5b) dice que el vector fijo \vec{n} es ortogonal al vector variable $\vec{r} - \vec{r}_0$ que se representa por una flecha desde el punto \vec{r}_0 al punto \vec{r} . Entonces el plano comprende el punto particular \vec{r}_0 y todos los otros puntos \vec{r} que cumplen esta condición. (Véase la Figura 1.3.) Este \vec{n} es un **vector normal** al plano. La dirección del vector \vec{n} determina la *inclinación* del plano; el punto \vec{r}_0 ubica este plano entre la familia de planos paralelos con esa misma inclinación.

► Tres puntos (no colineales) determinan un plano. Para obtener el plano que pasa por tres puntos $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$, se puede aceptar el primer punto \vec{r}_0 y usar la fórmula (1.5b) para escribir la ecuación del plano; sólo falta averiguar el vector normal \vec{n} . Ahora las flechas $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$ y $\vec{r}_2 - \vec{r}_0$ representan direcciones en el plano y \vec{n} debe ser ortogonal a ambas flechas. Por eso, se toma:

$$\vec{n} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_0).$$

Se debe recordar que el *producto cruz* $\vec{u} \times \vec{v}$ es un vector en \mathbb{R}^3 que es ortogonal a \vec{u} y también a \vec{v} ; y que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ si y solo si \vec{u}, \vec{v} son paralelos (es decir, proporcionales). La fórmula anterior da $\vec{n} = \vec{0}$ si y solo si $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$ y $\vec{r}_2 - \vec{r}_0$ son proporcionales, si y solo si $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ son colineales – en cuyo caso determinan una recta y no un plano.

Rectas en el espacio \mathbb{R}^3

Una **recta** en el espacio tridimensional es simplemente *la intersección de dos planos*:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Luego, se requiere **dos** ecuaciones de primer grado para caracterizar una recta en \mathbb{R}^3 .

► Tal como se hizo en \mathbb{R}^2 , es posible introducir un *parámetro* t que marca los diversos puntos de la recta. La *forma paramétrica* de las ecuaciones de una recta entonces requiere tres ecuaciones (siempre de primer grado) en las cuatro variables x, y, z, t .

Por ejemplo, la recta que pasa por un punto $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ en la dirección $\vec{v} = (l, m, n)$ –un vector constante, no nulo– obedece

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.6a)$$

Esta ecuación vectorial es equivalente a tres ecuaciones escalares:

$$x = x_0 + lt,$$

$$y = y_0 + mt, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$z = z_0 + nt,$$

Al despejar la variable t de cada una de ecuaciones, se obtiene

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t.$$

Ahora se puede suprimir la última ecuación, *eliminando* la variable extra t . El resultado es la llamada *forma simétrica* de las ecuaciones de la recta:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (1.6b)$$

Fíjese bien: al haber eliminado el parámetro t , quedan *dos ecuaciones* (hay dos signos de igualdad visibles) para las variables cartesianas x, y, z .

► La **recta que pasa por dos puntos**, $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, puede analizarse de modo similar. Sus ecuaciones vienen de la fórmula (1.6a) al cambiar \vec{r}_0 en \vec{r}_1 y al tomar $\vec{v} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Su forma paramétrica es entonces:

$$\boxed{\vec{r} = (1 - t)\vec{r}_1 + t\vec{r}_2} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}. \quad (1.7a)$$

De nuevo, el valor $t = 0$ corresponde al punto $\vec{r} = \vec{r}_1$, el valor $t = 1$ corresponde al punto $\vec{r} = \vec{r}_2$; y el rango de valores $0 \leq t \leq 1$ corresponde al **segmento de recta** con los extremos \vec{r}_1 y \vec{r}_2 .

La forma simétrica correspondiente (después de eliminar t) es:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (1.7b)$$

Si algún denominador es 0, el numerador debe ser 0 también. Por ejemplo, si $y_1 = y_2$ pero $x_1 \neq x_2$ y $z_1 \neq z_2$, este último par de ecuaciones es lo mismo que

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \quad y = y_1.$$

Elementos de dibujo en \mathbb{R}^3

En el espacio tridimensional real, denotado por \mathbb{R}^3 , se denota el origen por 0; los tres **ejes coordenados** $\vec{0x}$, $\vec{0y}$, $\vec{0z}$ forman un *triedro* que se representan en un plano (una hoja de papel o una pantalla) como sigue. El eje y positivo (esto es, la semirrecta $\vec{0y}$) apunta hacia la derecha; el eje z positivo apunta hacia arriba; y el eje x positivo apunta “hacia adelante”. Se traza el eje x en una dirección aproximadamente sur-oeste, para crear la ilusión óptica de una flecha que sale del plano yz de modo perpendicular: véase la Figura 1.4.

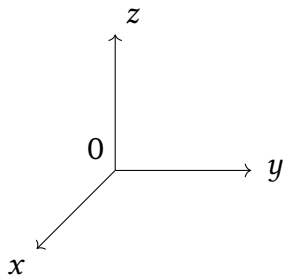


Figura 1.4: El triedro de los ejes cartesianos

Un *plano* se representa por un paralelogramo, que indica su posición e inclinación de modo esquemático. (Se quiere indicar una lámina de acrílico transparente que ocupa la posición del plano en el espacio. Véase la Figura 1.3.)

Si se conoce los tres puntos en donde el plano corta los ejes, el triángulo formado por estos tres vértices también sirve para representar el plano. A veces conviene extender los lados del triángulo un poco, para indicar que el plano se extiende en el espacio pero incluye el triángulo con los vértices dados. Los planos coordenados (el plano xy , horizontal; el plano xz y el plano yz , verticales) quedan delineados por los ejes cartesianos.

Una **superficie** que no sea un plano puede representarse por un sistema de **cortes verticales y horizontales**, como sigue.

- ◊ Al poner $x = 0$, se obtiene la intersección de la superficie con el plano yz (vertical, de la hoja o pantalla), que en muchos casos – aunque no siempre – es la *silueta* de la superficie.
- ◊ Al poner $y = 0$, se obtiene la intersección de la superficie con el plano xz (vertical pero lateral).
- ◊ Al poner $z = k$ para varios valores constantes de k , se obtiene las *cortes horizontales* de la superficie a las alturas k .

Todas estas curvas sirven para montar una representación visual de la superficie.

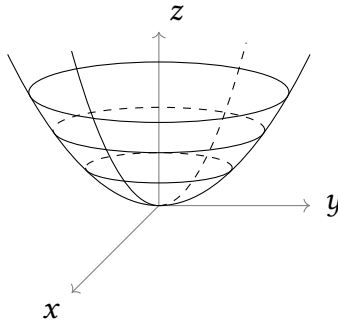


Figura 1.5: El paraboloides elíptico $x^2 + y^2 = 4z$

Ejemplo 1.1. Para dibujar la superficie $x^2 + y^2 = 4z$ se trazan las siguientes curvas:

- ◊ Corte $x = 0$: se obtiene la curva $y^2 = 4z$ en el plano yz , la cual es una *parábola*.
- ◊ Corte $y = 0$: se obtiene la curva $x^2 = 4z$ en el plano xz , la cual es otra *parábola*.
- ◊ Cortes $z = k$: se obtiene la familia de curvas horizontales $x^2 + y^2 = 4k$ en los planos respectivos $z = k$. Si $k > 0$, estos son *círculos* de radios $2\sqrt{k}$. Si $k = 0$, la “curva” se reduce a un punto, el origen. Si $k < 0$, la ecuación $x^2 + y^2 = 4k$ no tiene soluciones reales; por eso, no hay puntos de la superficie debajo del plano $z = 0$.

Al trazar las dos parábolas y dos o tres de los círculos, se obtiene la forma de una canasta redonda: Figura 1.5. Esta superficie es un *paraboloides elíptico*. ◊

Ciertas líneas de este dibujo quedarían ocultas detrás de la superficie si la parte anterior se vuelve opaco. Es costumbre trazar *líneas quebradas* para indicar las curvas que estarían escondidas en tales condiciones.

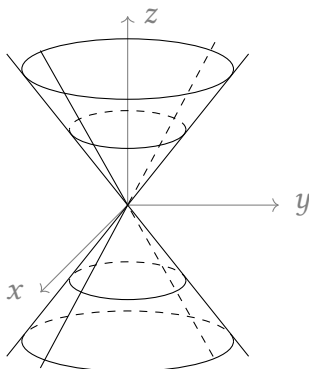


Figura 1.6: El cono recto circular $x^2 + y^2 = z^2$

Ejemplo 1.2. Para dibujar la superficie $x^2 + y^2 = z^2$ se trazan las siguientes curvas:

- ◇ Corte $x = 0$: se obtiene $y^2 = z^2$ en el plano yz ; este es una *par de rectas* $y = \pm z$.
- ◇ Corte $y = 0$: se obtiene $x^2 = z^2$ en el plano xz ; este es otro par de rectas $x = \pm z$.
- ◇ Cortes $z = k$: se obtiene la familia de curvas horizontales $x^2 + y^2 = k^2$ en los planos respectivos $z = k$. Si $k \neq 0$, estos son círculos de radios $\sqrt{k^2} = |k|$. (En este caso, k puede ser negativo.) Si $k = 0$, la “curva” se reduce a un punto, el origen.

Al trazar las cuatro rectas y algunos de los círculos, se obtiene la forma de un cono (de dos embudos), con un “vértice” en el origen: véase la Figura 1.6. Esta superficie es un *cono recto circular*. ◇

Ejemplo 1.3. Para dibujar la superficie $4x^2 + y^2 = 4$ se trazan las siguientes curvas:

- ◇ Corte $x = 0$: se obtiene $y^2 = 4$ en el plano yz ; este es una *par de rectas* $y = \pm 2$. Estas rectas son *verticales*, porque sus ecuaciones no dependen de la altura z .
- ◇ Corte $y = 0$: se obtiene $x^2 = 1$ en el plano xz ; este es otro par de rectas $x = \pm 1$, que son también verticales.
- ◇ Cortes $z = k$: se obtiene la familia de curvas horizontales $4x^2 + y^2 = 4$ en los planos respectivos $z = k$. Todas ellas son elipses de semiejes 1 y 2, colocadas a varias alturas.

Al trazar las cuatro rectas y algunos de los círculos, se obtiene la forma de un *cilindro recto elíptico*: Figura 1.7. ◇

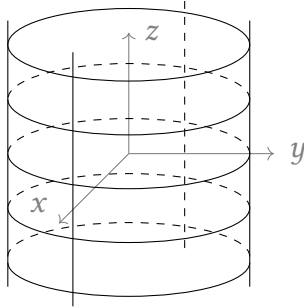


Figura 1.7: El cilindro recto elíptico $4x^2 + y^2 = 4$

Ejemplo 1.4. Algunas otras superficies que se pueden trazar, mediante la técnica de los cortes verticales y horizontales, son las siguientes:

(a) El *elipsoide* $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$.

(b) El *hiperboloide de un manto* $x^2 + y^2 - z^2 = 4$.

(c) El *cilindro parabólico* $y = x^2$.

◇

1.3. Superficies especiales en \mathbb{R}^3

La clasificación de superficies cuadráticas en el espacio \mathbb{R}^3 es más compleja que la clasificación de las curvas cuadráticas en \mathbb{R}^2 . En este curso no se abordará este problema en su totalidad, sino que se considerará ejemplos típicos de tales superficies.

Esferas

Una **esfera** posee un *centro* (x_0, y_0, z_0) y un *radio* R ; es la totalidad de puntos (x, y, z) cuya distancia del centro es igual a R . La fórmula de Pitágoras para el cuadrado de esta distancia produce la ecuación de la esfera:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \tag{1.8}$$

Al expandir las paréntesis, este es lo mismo que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0.$$

Entonces se ve que una ecuación cuadrática representa una esfera si y solo si su parte cuadrática es (un múltiplo constante de) $x^2 + y^2 + z^2$. De hecho, la ecuación cuadrática

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Gx + 2Fy + 2Ez + C = 0$$

representa una esfera, con centro $(-G, -F, -E)$ y radio $R = \sqrt{G^2 + F^2 + E^2 - C}$.

Cilindros

Un **cilindro** es una superficie formada por una familia de *rectas paralelas*, llamadas **generatrices**, que pasan por los puntos respectivos de una cierta **curva directriz**.

Un caso conocido es el *cilindro recto circular* $x^2 + y^2 = a^2$, formado por una familia de rectas verticales (todas ellas paralelas al eje z). Cada una de estas rectas pasa por un punto del círculo horizontal de centro $(0, 0, 0)$ y de radio a . Dicho círculo es la curva directriz. La recta vertical $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$ pasa por el punto $(a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$ del círculo. La unión de todas estas rectas generatrices es el cilindro.

El cilindro recto elíptico de la Figura 1.7 es algo parecido: las generatrices son las rectas verticales que lo conforman; la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ en el plano $z = 0$ es una curva directriz.

Conos

Un **cono** es una superficie formada por una familia de rectas, sus *generatrices*, que pasan por un punto fijo, el **vértice** del cono, y también por los puntos respectivos de una cierta *curva directriz*.

Un caso conocido es el *cono recto circular* $x^2 + y^2 = z^2$, formado por una familia de rectas que pasan por el origen $(0, 0, 0)$. Cada una de estas rectas pasa también por un punto del círculo horizontal de centro $(0, 0, 1)$ y de radio 1, el cual es una curva directriz. La recta oblicua: $x = t \cos \theta$, $y = t \sin \theta$, $z = t$ pasa por el origen (cuando $t = 0$) y por el punto $(\cos \theta, \sin \theta, 1)$ de ese círculo; la unión de todas las rectas generatrices es el cono.

Superficies de revolución

Una **superficie de revolución** se forma por una familia de **círculos generatrices** en planos paralelos, cuyos centros son los puntos de una recta fija, el **eje** de la superficie de revolución, perpendicular a esos planos; además, los círculos generatrices deben pasar por los puntos respectivos de una cierta *curva directriz*.

Cuando el eje es uno de los ejes coordenados, esta descripción se puede simplificar. Por ejemplo, si el eje de una superficie de revolución coincide con *el eje z cartesiano*, entonces cada círculo generatriz queda en un plano horizontal $z = t$ (perpendicular al eje, que es vertical) con centro en el punto $(0, 0, t)$ de ese plano:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad z = t.$$

El radio r del círculo depende de t : la dependencia viene de una relación $f(r^2, t) = 0$ que define la *silueta* (la cual es la curva directriz).

En breve, al reunir todos los requisitos se llega a una fórmula:

$$f(x^2 + y^2, z) = 0, \quad (1.9)$$

la cual es la ecuación de la superficie de revolución alrededor del eje z .

Dicho de otra manera: si una superficie tiene una ecuación de la forma (1.9), en donde las variables x, y aparecen únicamente en la combinación $(x^2 + y^2)$, entonces se trata de una superficie de revolución cuya eje es el eje z . Unos ejemplos son los cilindros rectos circulares $x^2 + y^2 = k^2$, el cono $x^2 + y^2 = z^2$ y el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

De modo similar, una ecuación de la forma $f(x^2 + z^2, y) = 0$ representa una superficie de revolución alrededor del eje y ; y una ecuación de tipo $f(y^2 + z^2, x) = 0$ representa una superficie de revolución alrededor del eje x .

Elipsoides

Un **elipsoide** es una superficie cerrada, de extensión finita, formada por la distorsión de una esfera en tres direcciones ortogonales. Sus cortes planas son elipses. La ecuación cuadrática:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1.10)$$

representa un elipsoide con centro en el origen y tres *semiejes* $a > 0, b > 0, c > 0$.

La ecuación (1.10) implica que $x^2 \leq a^2, y^2 \leq b^2, z^2 \leq c^2$. Esto significa que el elipsoide queda encerrado en la caja rectangular cuyos 8 vértices son $(\pm a, \pm b, \pm c)$.

Hiperboloides

Al cambiar uno o dos de los signos al lado izquierdo de (1.10), se obtiene otras superficies cuadráticas, llamados **hiperboloides**. Algunas de sus cortes planas son hipérbolas, otros son elipses.

Con un solo signo negativo al lado izquierdo, se obtiene un hiperboloide **de un manto**, una superficie no acotado pero conexo; por ejemplo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1.11)$$

Con dos signos negativos al lado izquierdo, se obtiene un hiperboloide **de dos mantos**, una superficie no acotado y disconexo:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.12)$$

En este caso, $z^2/c^2 = 1 + x^2/a^2 + y^2/b^2 \geq 1$, así que $z \geq c$ o bien $z \leq -c$. La franja horizontal entre los dos planos paralelos $z = c$ y $z = -c$ no contiene puntos de esta superficie. Por lo tanto, este hiperboloide queda separado en dos “mantos”.

Paraboloides

Otros dos tipos de superficies cuadráticas son las **paraboloides**, que a su vez se dividen en dos clases. La superficie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \quad (1.13)$$

es un **paraboloides elíptico**: sus cortes por planos verticales son parábolas mientras sus cortes por planos horizontales o oblicuos son elipses.

Un ejemplo de un **paraboloides hiperbólico** es la superficie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z. \quad (1.14)$$

Sus cortes por planos verticales son parábolas, pero sus cortes por planos horizontales o oblicuos son hipérbolas.

Los ejemplos presentados en los ejemplos (1.10) a (1.14) son casos especiales de la ecuación cuadrática general en tres variables. Se puede obtener gran cantidad de otros ejemplos por cambios de coordenadas cartesianas (por ejemplo, traslación del origen o rotación del triedro de los ejes).

Un sexto ejemplo es el **cono elíptico**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad (1.15)$$

que tiene un punto singular en el origen. Resulta que estos seis ejemplos tipifican las diversas cualidades geométricas de las superficies de segundo orden.³

1.4. Curvas en el espacio \mathbb{R}^3

La trayectoria de una curva en el espacio \mathbb{R}^3 se parametriza por una función vectorial:

$$\underline{\vec{r}}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Las primeras dos derivadas de esta función dan la **velocidad** $\underline{\vec{v}}(t)$ y la **aceleración** $\underline{\vec{a}}(t)$ de esta trayectoria:

$$\begin{aligned} \underline{\vec{v}}(t) &:= \underline{\vec{r}}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), \\ \underline{\vec{a}}(t) &:= \underline{\vec{v}}'(t) := \underline{\vec{r}}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)). \end{aligned}$$

³Hay muchas aplicaciones gráficas aptas para trazar dibujos de estas superficies cuadráticas. Se recomienda, por ejemplo, la tabla ilustrada en la página 837 de libro: James Stewart, *Cálculo en varias variables*, 8ª edición, Editorial Cengage, 2018.

La **rapidez** del recorrido es la longitud $\|\vec{r}'(t)\|$ del vector de velocidad,

$$\|\vec{r}'(t)\| := \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

La **longitud de arco** de la curva, que se mide a partir de un punto $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ – donde $t_0 = 0$ en la mayoría de los casos – es *la integral indefinida de la rapidez* del recorrido:

$$s(t) := \int_{t_0}^t \|\vec{r}'(\tau)\| d\tau. \tag{1.16a}$$

Por el teorema fundamental del cálculo, la derivada de $s(t)$ es la rapidez:

$$s'(t) = \|\vec{r}'(t)\|. \tag{1.16b}$$

En estos apuntes, siempre se supondrá que la parametrización $\vec{r}(t)$ es *regular*. Esto quiere decir que *la velocidad del recorrido nunca se anula*: $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ para todo t . Entonces el punto $\vec{r}(t)$ avanza sobre la trayectoria,⁴ sin pausar ni detenerse (ni mucho menos retroceder por el camino). En consecuencia, *la rapidez es siempre positiva*: $s'(t) > 0$ para todo t .

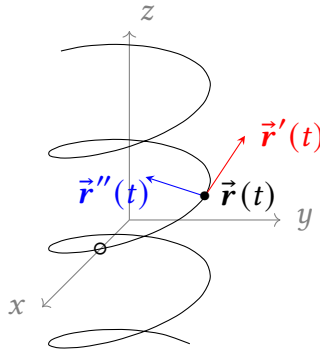


Figura 1.8: Una curva espiral, la hélice

Ejemplo 1.5. La *hélice* $\vec{r}(t) = (\cos 3t, \sin 3t, 4t)$. Véase la Figura 1.8.

Su velocidad es

$$\vec{r}'(t) = (-3 \sin 3t, 3 \cos 3t, 4).$$

La rapidez del recorrido es

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{9 \sin^2 3t + 9 \cos^2 3t + 16} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

⁴Un detalle de terminología: la **trayectoria** de una curva es la totalidad de puntos de \mathbb{R}^3 por donde pasa; la **curva** en sí incluye el recorrido (en función del tiempo) sobre esa trayectoria. Es útil imaginar la trayectoria como un alambre fino suspendido en el espacio, y sobre este alambre camina una hormiga pequeña; la *curva* es la historial de esa hormiga.

En este caso particular, el recorrido tiene *rapidez constante*, aunque la velocidad $\vec{r}'(t)$ no es constante, sino que cambia continuamente de dirección. La aceleración es

$$\vec{r}''(t) = (-9 \cos 3t, -9 \sin 3t, 0),$$

que es un vector horizontal dirigido hacia el eje z (Figura 1.8).

La longitud del arco, medida a partir de $\vec{r}(0) = (1, 0, 0)$, es

$$s(t) := \int_0^t 5 \, d\tau = 5t.$$

Como $t = s/5$, es posible *reparametrizar* la curva, usando s como nuevo parámetro:

$$\vec{r}(s) = \left(\cos \frac{3s}{5}, \sin \frac{3s}{5}, \frac{4s}{5} \right).$$

Fíjese que $\cos^2 3t + \sin^2 3t = 1$, así que esta curva se describe en la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$. (La relación $z = 4t$ dice que la altura del punto $\vec{r}(t)$ sube con un ritmo constante, proporcional a la velocidad angular de rotación de su “sombra” $(\cos 3t, \sin 3t, 0)$ en el plano xy .) Nótese también que

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \left(-\frac{3}{5} \sin \frac{3s}{5}, \frac{3}{5} \cos \frac{3s}{5}, \frac{4}{5} \right),$$

el cual es un vector de longitud 1 (es decir, un “vector unitario”). ◇

Ejemplo 1.6. La curva cúbica $\vec{r}(t) = \left(t, \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \frac{t^3}{3} \right)$. Véase la Figura 1.9.

Su velocidad es

$$\vec{r}'(t) = (1, \sqrt{2}t, t^2). \tag{1.17a}$$

La rapidez del recorrido es

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{1 + 2t^2 + t^4} = 1 + t^2, \tag{1.17b}$$

y la longitud de arco, medida a partir de $\vec{r}(0) = (0, 0, 0)$, es

$$s(t) := \int_0^t (1 + \tau^2) \, d\tau = t + \frac{1}{3}t^3.$$

Es posible despejar t en términos de s , al resolver la ecuación $t^3 + 3t - 3s = 0$, pero esto conduciría a fórmulas engorrosas para las componentes de $\vec{r}(s)$. En general, *no vale la pena despejar $t = t(s)$ explícitamente.*

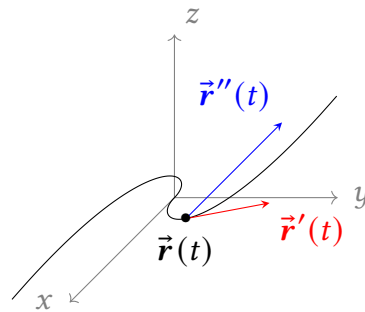


Figura 1.9: Una curva cúbica que pasa por el origen

En todo caso, se debe notar que la función $s = s(t)$ es una función estrictamente creciente, al ser la integral de una función $s'(t) > 0$. Una función creciente posee una función inversa, porque a cada valor de s le corresponde un solo valor de t . Es recomendable prescindir de la fórmula explícita para esta función inversa $t = t(s)$, porque se puede calcular las derivadas como $d\vec{r}/ds$ mediante la regla de la cadena:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\vec{r}'(t)}{s'(t)} = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}.$$

Fíjese que este vector es *unitario* (es decir, su longitud es 1). Además, es un múltiplo del vector tangente $\vec{r}'(t)$. Conviene denotarlo por $\vec{T}(t)$, el **vector tangente unitario** en el punto $\vec{r}(t)$ de la curva:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}. \tag{1.18}$$

Para la curva cúbica en cuestión, del par de fórmulas (1.17) se obtiene en seguida:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T}(t) = \left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{\sqrt{2}t}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2} \right),$$

sin la necesidad de despejar t en función de s . ◇

Ejemplo 1.7. La curva alabeada $\vec{r}(t) = (2 \cosh 3t, -2 \sinh 3t, 6t)$. Véase la Figura 1.10. Su velocidad es

$$\vec{r}'(t) = (6 \sinh 3t, -6 \cosh 3t, 6).$$

La rapidez del recorrido es

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{36 \sinh^2 3t + 36 \cosh^2 3t + 36} = \sqrt{72 \cosh^2 3t} = 6\sqrt{2} \cosh 3t,$$

al usar la fórmula $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$.

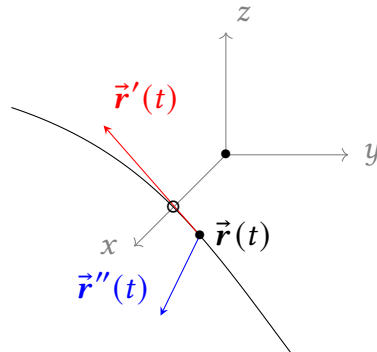


Figura 1.10: Una curva leveamente alabeada

La longitud de arco, a partir de $\vec{r}(0) = (2, 0, 0)$, es

$$s(t) := \int_0^t 6\sqrt{2} \cosh 3\tau \, d\tau = 2\sqrt{2} \sinh 3t.$$

El **vector tangente unitario** es

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{6\sqrt{2} \cosh 3t} \vec{r}'(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tanh 3t, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sech} 3t \right).$$

¶ Para hallar este vector, no era necesario reparametrizar la curva en términos de s . En este caso, es factible cambiar de parámetro, porque la ecuación $s = 2\sqrt{2} \sinh^2 3t$ admite la solución

$$t = \frac{1}{3} \log(s + \sqrt{s^2 + 8}) - \frac{1}{2} \log 2.$$

Al sustituir esta expresión en $\vec{r}(t)$, resulta

$$\vec{r}(s) = \left(\sqrt{\frac{s^2 + 8}{2}}, -\frac{s}{\sqrt{2}}, 2 \log(s + \sqrt{s^2 + 8}) - 3 \log 2 \right).$$

Se puede verificar ahora que las fórmulas para $d\vec{r}/ds$ y para $\vec{T}(t)$ coinciden, al emplear una vez más la sustitución $t = t(s)$ de arriba; pero este es un cálculo arduo. En fin, es más aconsejable efectuar todos los cálculos en términos del parámetro original t . ¶ \diamond

La aceleración y sus componentes

En términos del vector tangente unitario $\vec{T}(t)$, la velocidad es simplemente

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = s'(t) \vec{T}(t).$$

La derivada de esta relación es, por la regla de producto,

$$\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = s''(t)\vec{T}(t) + s'(t)\vec{T}'(t). \quad (1.19)$$

El segundo sumando a la derecha no es paralelo a la dirección tangente. Lejos de eso, resulta ser *perpendicular* a esa dirección. De hecho, como el vector tangente $\vec{T}(t)$ tiene longitud constante (igual a 1) por su definición, así que

$$\vec{T}(t) \cdot \vec{T}(t) = \|\vec{T}(t)\|^2 = 1,$$

su derivada es cero:⁵

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{T}(t) \cdot \vec{T}(t)) &= \vec{T}'(t) \cdot \vec{T}(t) + \vec{T}(t) \cdot \vec{T}'(t) \\ &= 2\vec{T}(t) \cdot \vec{T}'(t) = 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Esto significa que el vector $\vec{T}'(t)$ es ortogonal (perpendicular) al vector tangente $\vec{T}(t)$.

Sin embargo, el vector derivado $\vec{T}'(t)$ no es unitario, en general. El vector de longitud 1 que apunta en esa dirección es el **vector normal unitario**, $\vec{N}(t)$, definido por:

$$\vec{N}(t) := \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}. \quad (1.21)$$

El vector de aceleración $\vec{a}(t)$ es entonces, por la fórmula (1.19), una suma de dos pedazos, uno en la dirección tangente y otro en la dirección normal. Sus **componentes** en estas dos direcciones son

$$\underline{a_T}(t) := \vec{a}(t) \cdot \vec{T}(t), \quad \underline{a_N}(t) := \vec{a}(t) \cdot \vec{N}(t). \quad (1.22)$$

La componente tangencial se obtiene inmediatamente de (1.19):

$$a_T(t) = s''(t).$$

Para calcular la componente normal $a_N(t)$, es necesario examinar más de cerca la magnitud del vector $\vec{T}'(t)$.

⁵Nótese que aquí se ha aplicado la regla del producto a un producto de vectores, sin mayor explicación. Se invita al lector chequear que esto es válido, y análogamente para el producto cruz. Explícitamente, $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)) = \vec{u}'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}'(t)$ y también $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)) = \vec{u}'(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \vec{v}'(t)$. Es cuestión de expandir estas fórmulas en sus tres coordenadas cartesianas.

El triedro móvil $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$

Se debe recordar que $\vec{T}(t) = d\vec{r}/ds$ es un vector unitario. Al derivarlo con respecto a s en vez de t , la regla de la cadena implica que

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{T}'(t)}{s'(t)}.$$

Entonces $d\vec{T}/ds$, que es proporcional a $\vec{T}'(t)$ y también a $\vec{N}(t)$: apunta en la dirección normal a la curva.

Se define la **curvatura** $\kappa(t)$ de la curva, en el punto $\vec{r}(t)$, como la longitud de ese vector:

$$\kappa(t) := \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{s'(t)}. \quad (1.23)$$

Esto dice, por un lado, que $\|\vec{T}'(t)\| = \kappa(t) s'(t)$; y por otro, que

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa(t) \vec{N}(t),$$

o bien, lo que es lo mismo,

$$\vec{T}'(t) = \kappa(t) s'(t) \vec{N}(t).$$

Vale la pena introducir un tercer vector unitario, para completar la descripción de la curva $t \mapsto \vec{r}(t)$. Como $\vec{T}(t)$ y $\vec{N}(t)$ son vectores unitarios y ortogonales, su producto cruz en un tercer vector unitario, ortogonal a ellos dos:⁶

$$\vec{B}(t) := \vec{T}(t) \times \vec{N}(t). \quad (1.24)$$

Este $\vec{B}(t)$ se llama el **vector binormal unitario** a la curva en el punto $\vec{r}(t)$.

Para cada valor de t , el juego de estos tres vectores

$$\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$$

es un **triedro** (*dreiecks*, en alemán), esto es, un triple de vectores unitarios y mutuamente ortogonales. Se puede considerarlo como sistema de referencia cartesiana, que difiere del sistema estándar $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ por una rotación del espacio ambiente \mathbb{R}^3 . Su orientación en \mathbb{R}^3 cambia con el avance del punto $\vec{r}(t)$: por eso se habla del **triedro móvil** de la curva.

⁶La longitud del producto cruz de dos vectores en \mathbb{R}^3 es dado por la fórmula $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$ donde θ es el ángulo entre \vec{u} y \vec{v} , determinado por $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$. Si \vec{u}, \vec{v} son ortogonales, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, entonces $\cos \theta = 0$ y por ende $\sin \theta = \pm 1$; en tal caso, se ve que $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$.

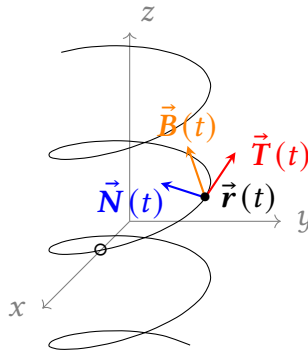


Figura 1.11: El triedro móvil de la hélice

Ejemplo 1.8. La hélice $\vec{r}(t) = (\cos 3t, \sin 3t, 4t)$ de nuevo (continuación del Ejemplo 1.5). Se sabe que

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{\vec{r}'(t)}{s'(t)} = \left(-\frac{3}{5} \sin 3t, \frac{3}{5} \cos 3t, \frac{4}{5} \right).$$

Entonces

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{T}'(t)}{s'(t)} = \frac{\vec{T}'(t)}{5} = \left(-\frac{9}{25} \cos 3t, -\frac{9}{25} \sin 3t, 0 \right).$$

Su longitud es $\kappa(t) = 9/25$: la hélice tiene *curvatura constante*. Al dividir $d\vec{T}/ds$ por $\kappa(t)$, se obtiene el vector normal unitario:

$$\vec{N}(t) = (-\cos 3t, -\sin 3t, 0),$$

que efectivamente es unitario y ortogonal a $\vec{T}(t)$. Este vector es horizontal (su componente z es cero) y apunta hacia el eje z . \llbracket Su negativo, $-\vec{N}(t) = (\cos 3t, \sin 3t, 0)$, apunta hacia afuera. \rrbracket

El vector binormal unitario es

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\frac{3}{5} \sin 3t & -\cos 3t \\ \vec{j} & \frac{3}{5} \cos 3t & -\sin 3t \\ \vec{k} & \frac{4}{5} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{4}{5} \sin 3t, -\frac{4}{5} \cos 3t, \frac{3}{5} \right). \quad \diamond$$

Observación. En el cálculo anterior del producto cruz, se empleó una notación de determinante 3×3 . En general, su $\vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{v} = (p, q, r)$, se usa el formalismo:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & a & p \\ \vec{j} & b & q \\ \vec{k} & c & r \end{vmatrix} = \vec{i}(br - cq) - \vec{j}(ar - cp) + \vec{k}(aq - bp) \\ = (br - cq, cp - ar, aq - bp).$$

En la primera columna aparecen los vectores $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Ejemplo 1.9. La curva cúbica $\vec{r}(t) = (t, t^2/\sqrt{2}, t^3/3)$ de nuevo (continuación del Ejemplo 1.6). En este caso, $s'(t) = 1 + t^2$, por la fórmula (1.17b). Se obtuvo:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{s'(t)} = \left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{\sqrt{2}t}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2} \right).$$

Entonces

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{T}'(t)}{s'(t)} = \frac{\vec{T}'(t)}{1+t^2} = \left(-\frac{2t}{(1+t^2)^3}, \frac{\sqrt{2}(1-t^2)}{(1+t^2)^3}, \frac{2t}{(1+t^2)^3} \right).$$

Este vector es $(1+t^2)^{-3}$ veces $(-2t, \sqrt{2}(1-t^2), 2t)$; en vista de que

$$\begin{aligned} \|(-2t, \sqrt{2}(1-t^2), 2t)\|^2 &= 4t^2 + 2(1-2t^2+t^4) + 4t^2 \\ &= 2(1+2t^2+t^4) = 2(1+t^2)^2, \end{aligned}$$

la longitud del vector $d\vec{T}/ds$ es:

$$\kappa(t) = \frac{1}{(1+t^2)^3} \sqrt{2}(1+t^2) = \frac{\sqrt{2}}{(1+t^2)^2}.$$

Al dividir $d\vec{T}/ds$ por $\kappa(t)$, se obtiene el vector normal unitario:

$$\vec{N}(t) = \left(-\frac{\sqrt{2}t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{\sqrt{2}t}{1+t^2} \right).$$

En este caso, el vector binormal unitario es

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) = \left(\frac{t^2}{1+t^2}, -\frac{\sqrt{2}t}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2} \right). \quad \diamond$$

► Volviendo al tema de las componentes tangencial y normal de la aceleración de la fórmula (1.22), ahora se puede expresarlos en términos de las funciones $s(t)$ y $\kappa(t)$:

$$\boxed{a_T(t) := \vec{a}(t) \cdot \vec{T}(t) = s''(t),} \quad \boxed{a_N(t) := \vec{a}(t) \cdot \vec{N}(t) = \kappa(t) s'(t)^2.} \quad (1.25)$$

En particular, si la rapidez $s'(t)$ es constante, como en el Ejemplo 1.5 de la hélice, entonces $s''(t) = 0$. Esto significa que la aceleración de la hélice es normal a la curva, $\vec{a}(t) = a_N(t) \vec{N}(t)$; por eso, la aceleración es ortogonal a la velocidad. Lo mismo sucede el caso de movimiento circular uniforme en un plano (de \mathbb{R}^3), en donde la aceleración es *centrípeta*, o sea, es un vector dirigido hacia el centro del círculo del recorrido. En cualquier otro caso, la aceleración tiene una componente tangencial no nula.

¶ Para que la aceleración fuera puramente *tangencial*, sería necesario que $a_N(t) = \kappa(t) s'(t)^2 = 0$; y como $s'(t) > 0$ siempre (por la regularidad de la parametrización), la curvatura debería ser cero: $\kappa(t) = 0$ para todo t . De la fórmula (1.23), esto dice que $\|\vec{T}'(t)\| = 0$ y por ende $\vec{T}'(t) = \vec{0}$: el vector tangente unitario $\vec{T}(t)$ sería constante. En otras términos, la curvatura es nula si y sólo si el vector tangente $\vec{r}'(t)$ siempre apunta en la misma dirección; se trata de un movimiento en línea recta (aunque puede variar la rapidez del recorrido). ¶

Ejemplo 1.10. La curva alabeada $\vec{r}(t) = (2 \cosh 3t, -2 \sinh 3t, 6t)$, de nuevo (continuación del Ejemplo 1.7). Ya se calculó que $s(t) = 2\sqrt{2} \sinh 3t$; $s'(t) = 6\sqrt{2} \cosh 3t$; y

$$\vec{T}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tanh 3t, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sech} 3t \right).$$

Entonces

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{T}'(t)}{s'(t)} = \frac{\vec{T}'(t)}{6\sqrt{2} \cosh 3t} = \left(\frac{1}{4} \operatorname{sech}^3 3t, 0, -\frac{1}{4} \operatorname{sech}^2 3t \tanh 3t \right).$$

Al calcular la longitud de este vector, se obtiene:

$$\kappa(t) = \|d\vec{T}/ds\| = \frac{1}{4} \operatorname{sech}^2 3t \|(\operatorname{sech} 3t, 0, -\tanh 3t)\| = \frac{1}{4} \operatorname{sech}^2 3t.$$

(Se obtuvo $\|(\operatorname{sech} 3t, 0, -\tanh 3t)\| = 1$ usando la fórmula $\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$.)

Como $d\vec{T}/ds = \kappa(t) \vec{N}(t)$, se deduce que el vector normal unitario es

$$\vec{N}(t) = (\operatorname{sech} 3t, 0, -\tanh 3t).$$

(Fíjese que este vector tiene longitud 1 por la misma fórmula.)

Finalmente, el vector binormal unitario es:

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \frac{1}{\sqrt{2}} \tanh 3t & \operatorname{sech} 3t \\ \vec{j} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \vec{k} & \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sech} 3t & -\tanh 3t \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tanh 3t, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sech} 3t \right). \quad \diamond$$

Curvatura y torsión

Es posible emplear el vector binormal $\vec{B}(t)$ para obtener una fórmula “directa” para la curvatura en términos de la parametrización $t \mapsto \vec{r}(t)$ de la curva.

Usando las fórmulas (1.19) y (1.25), se puede calcular el producto cruz de la velocidad y la aceleración.

Se obtiene:

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) &= s'(t) \vec{T}(t) \times (s''(t) \vec{T}(t) + \kappa(t) s'(t)^2 \vec{N}(t)) \\ &= s'(t) s''(t) \vec{T}(t) \times \vec{T}(t) + \kappa(t) s'(t)^3 \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) \\ &= \kappa(t) s'(t)^3 \vec{B}(t),\end{aligned}\tag{1.26}$$

porque $\vec{T}(t) \times \vec{T}(t) = \vec{0}$. Como $\|\vec{B}(t)\| = 1$, la longitud de este vector es

$$\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\| = \kappa(t) s'(t)^3 = \kappa(t) \|\vec{r}'(t)\|^3,\tag{1.27}$$

y de ahí resulta la *fórmula para la curvatura* antedicha:

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}.\tag{1.28}$$

La fórmula (1.26) también ofrece un acceso directo al vector binormal. El producto cruz $\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)$ resulta ser paralelo a $\vec{B}(t)$: esto expresa que el vector binormal es perpendicular al plano que contiene la velocidad y la aceleración. Al dividir el producto cruz por su longitud – visible en la fórmula (1.27), se deduce que:

$$\vec{B}(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}.\tag{1.29}$$

► Como el vector binormal $\vec{B}(t)$ es de longitud constante 1, el cálculo (1.20) que se hizo para el vector $\vec{T}(t)$ también muestra que la derivada $\vec{B}'(t)$ es ortogonal a $\vec{B}(t)$:

$$2 \vec{B}(t) \cdot \vec{B}'(t) = \vec{B}'(t) \cdot \vec{B}(t) + \vec{B}(t) \cdot \vec{B}'(t) = \frac{d}{dt} (\vec{B}(t) \cdot \vec{B}(t)) = 0.$$

Resulta ser más apropiado derivar con respecto a lo longitud de arco s en vez del parámetro original t . Como $d\vec{B}/ds = \vec{B}'(t)/s'(t)$ – por la regla de la cadena – ese vector también es ortogonal a $\vec{B}(t)$. También se puede verificar eso con un cálculo directo:⁷

$$\vec{B} \cdot \frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (\vec{B} \cdot \vec{B}) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (1) = 0.\tag{1.30}$$

Por otro lado, esta derivada $d\vec{B}/ds$ es también ortogonal al vector $\vec{T}(t)$:

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{d}{ds} (\vec{T} \times \vec{N}) = \frac{d\vec{T}}{ds} \times \vec{N} + \vec{T} \times \frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{T} \times \frac{d\vec{N}}{ds},$$

ya que $(d\vec{T}/ds) \times \vec{N} = \kappa \vec{N} \times \vec{N} = \vec{0}$.

⁷En algunas fórmulas que siguen, se omite mención del parámetro t , para aliviar la notación.

Entonces

$$\vec{T} \cdot \frac{d\vec{B}}{ds} = \vec{T} \cdot \left(\vec{T} \times \frac{d\vec{N}}{ds} \right) = (\vec{T} \times \vec{T}) \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{0} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} = 0.$$

Como $d\vec{B}/ds$ es ortogonal a \vec{T} y a \vec{B} , debe ser un múltiplo del tercer vector \vec{N} del triedro móvil. Se introduce una función $\tau(t)$, llamada la **torsión** de la curva en el punto $\vec{r}(t)$, por esta definición:

$$\frac{d\vec{B}}{ds} =: -\tau(t) \vec{N}(t).$$

Ahora bien, el vector $\vec{N}(t)$ también tiene longitud constante 1, y de nuevo $d\vec{N}/ds$ es ortogonal a \vec{N} (usando (1.30) con \vec{N} en lugar de \vec{B}). En consecuencia, $d\vec{N}/ds$ queda en el plano generado por los vectores \vec{T} y \vec{B} . No es difícil comprobar la relación

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\kappa(t) \vec{T}(t) + \tau(t) \vec{B}(t),$$

al aplicar d/ds a las identidades $\vec{N} \cdot \vec{T} = 0$ y $\vec{N} \cdot \vec{B} = 0$.

Es posible – y a veces es útil – resumir las relaciones ya calculadas para las derivadas de los vectores del triedro móvil en las siguientes **fórmulas de Frenet y Serret**:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa(t) \vec{N}, \\ \frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa(t) \vec{T} + \tau(t) \vec{B}, \\ \frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau(t) \vec{N}. \end{aligned}$$

Alternativamente, se puede expresar estas *ecuaciones diferenciales* en forma matricial:

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}. \quad (1.31)$$

Nótese que esta matriz de coeficientes es *antisimétrica*. De hecho, esto es de esperar, puesto que el triedro móvil cambia de un punto a otro por rotaciones, y cada “rotación infinitesimal” posee una matriz antisimétrica.⁸

⁸La fórmula (1.31) representa un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Se puede eliminar el parámetro t en favor del parámetro intrínseco s al tomar $t = t(s)$, función inversa de la función creciente $s = s(t)$. Si las funciones $\kappa(t(s))$ y $\tau(t(s))$ son suaves, como en los ejemplos anteriores, hay un teorema que garantiza solución única a este sistema si se declara una *condición inicial*: el valor del triedro móvil $\{\vec{T}_0, \vec{N}_0, \vec{B}_0\}$ en $t = t_0$. En consecuencia, si la curvatura κ y la torsión τ están dadas de antemano, la curva queda determinada cerca del punto inicial, salvo por una rotación rígida de \mathbb{R}^3 que modifica la posición inicial del triedro móvil.

Ejemplo 1.11. La curva alabeada $\vec{r}(t) = (2 \cosh 3t, -2 \sinh 3t, 6t)$, una vez más (continuación del Ejemplo 1.10). Ya se sabe que

$$\vec{B}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tanh 3t, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sech} 3t \right).$$

Entonces

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{\vec{B}'(t)}{s'(t)} = \frac{\vec{B}'(t)}{6\sqrt{2} \cosh 3t} = \left(\frac{1}{4} \operatorname{sech}^3 3t, 0, -\frac{1}{4} \operatorname{sech}^2 3t \tanh 3t \right).$$

También se ha visto que esta curva cumple:

$$\vec{N}(t) = (\operatorname{sech} 3t, 0, -\tanh 3t), \quad \text{de modo que} \quad \frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{1}{4} \operatorname{sech}^2 3t \vec{N}(t),$$

y de ahí se obtiene la torsión:

$$\tau(t) = -\frac{1}{4} \operatorname{sech}^2 3t.$$

Esta curva se caracteriza por la curiosa relación $\tau(t) = -\kappa(t)$; pero en casos más generales, los parámetros τ y κ son independientes. \diamond

► Análogamente al caso de la curvatura $\kappa(t)$, es posible obtener una fórmula “directa” para la torsión en términos de la parametrización $t \mapsto \vec{r}(t)$ de la curva.

El punto de partida es la relación (1.26):

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \kappa(t) s'(t)^3 \vec{B}(t). \quad (1.26')$$

Como $\vec{r}''(t) \times \vec{r}'''(t) = \vec{0}$ por propiedades del producto cruz, se ve que

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) = \vec{r}''(t) \times \vec{r}'''(t) + \vec{r}'(t) \times \vec{r}''''(t) = \vec{r}'(t) \times \vec{r}''''(t),$$

Al derivar el lado derecho de (1.26), se obtiene

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''''(t) = [\kappa'(t) s'(t)^3 + 3\kappa(t) s'(t)^2 s''(t)] \vec{B}(t) + \kappa(t) s'(t)^3 \vec{B}'(t).$$

El primer término a la derecha es ortogonal tanto a $\vec{T}(t)$ como a $\vec{N}(t)$ y por ende es ortogonal a la aceleración $\vec{r}''(t)$. Entonces:

$$[\vec{r}'(t) \times \vec{r}''''(t)] \cdot \vec{r}''(t) = \kappa(t) s'(t)^3 \vec{B}'(t) \cdot \vec{r}''(t).$$

El lado izquierdo es un *producto triple* de vectores:

$$\begin{aligned} [\vec{r}'(t) \times \vec{r}''''(t)] \cdot \vec{r}''(t) &= \vec{r}''(t) \cdot [\vec{r}'(t) \times \vec{r}''''(t)] \\ &= [\vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t)] \cdot \vec{r}''''(t) = -[\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)] \cdot \vec{r}''''(t). \end{aligned}$$

Cabe recordar también la expresión para la aceleración:

$$\vec{r}''(t) = \vec{a}(t) = s''(t) \vec{T}(t) + \kappa(t) s'(t)^2 \vec{N}(t).$$

Como $\vec{B}'(t) = s'(t) d\vec{B}/ds$ es paralela a $\vec{N}(t)$ y ortogonal a $\vec{T}(t)$, sólo la parte normal de $\vec{r}''(t)$ es relevante: se obtiene

$$\begin{aligned} [\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)] \cdot \vec{r}'''(t) &= - [\vec{r}'(t) \times \vec{r}'''(t)] \cdot \vec{r}''(t) \\ &= -\kappa(t) s'(t)^4 \frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \kappa(t) s'(t)^2 \vec{N}(t) \\ &= +\kappa(t)^2 s'(t)^6 \underline{\tau(t)}. \end{aligned}$$

En vista de la fórmula $\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\| = \kappa(t) s'(t)^3$, véase (1.27), esta relación proporciona la fórmula para la torsión requerida:

$$\boxed{\tau(t) = \frac{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \cdot \vec{r}'''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|^2}}. \quad (1.32)$$

Ejemplo 1.12. Considérese, por última vez, la curva cúbica $\vec{r}(t) = \left(t, \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \frac{t^3}{3}\right)$ del

Ejemplo 1.6. Las primeras tres derivadas de $\vec{r}(t)$ son:

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= (1, \sqrt{2}t, t^2), \\ \vec{r}''(t) &= (0, \sqrt{2}, 2t), \\ \vec{r}'''(t) &= (0, 0, 2). \end{aligned}$$

Ya se sabe que $\|\vec{r}'(t)\| = 1 + t^2$. Ahora se calcula

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & 1 & 0 \\ \vec{j} & \sqrt{2}t & \sqrt{2} \\ \vec{k} & t^2 & 2t \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} \sqrt{2}t & \sqrt{2} \\ t^2 & 2t \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t^2 & 2t \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2}t & \sqrt{2} \end{vmatrix} \\ &= (\sqrt{2}t^2, -2t, \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Eso conduce a los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|^2 &= 2t^4 + 4t^2 + 2 = 2(1 + 2t^2 + t^4) = 2(1 + t^2)^2, \\ [\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)] \cdot \vec{r}'''(t) &= (\sqrt{2}t^2, -2t, \sqrt{2}) \cdot (0, 0, 2) = 0 + 0 + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

La fórmulas (1.28) y (1.32) ahora dan la curvatura y la torsión:

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{2}(1+t^2)}{(1+t^2)^3} = \frac{\sqrt{2}}{(1+t^2)^2},$$
$$\tau(t) = \frac{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \cdot \vec{r}'''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|^2} = \frac{2\sqrt{2}}{2(1+t^2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{(1+t^2)^2}.$$

Esta curva obedece otra curiosa relación $\tau(t) = +\kappa(t)$, en contraste con la curva alabeada del Ejemplo 1.11. \diamond

2 Derivadas parciales

Ubi materia, ibi geometria.

— Johannes Kepler¹

2.1. Funciones de varias variables reales

En este capítulo se abordará el cálculo diferencial de funciones de dos o más variables reales. Las funciones en cuestión serán diferenciables en cada variable por separado, lo que permite evaluar si más demora sus derivadas parciales.

Derivadas parciales de primer orden

Una función de dos variables reales se escribe $z = f(x, y)$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Una función de tres variables reales es genéricamente de la forma $w = h(x, y, z)$ con $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$; etcétera. Aquí ‘ f ’ o ‘ h ’ significa simplemente la fórmula que combina las variables. Se dice que $f(x, y)$ es *diferenciable en x, y por separado* si:

- ◇ para cada y_0 , la función de una variable $x \mapsto f(x, y_0)$ es diferenciable; y
- ◇ para cada x_0 , la función de una variable $y \mapsto f(x_0, y)$ es diferenciable.

Se trata, pues, de dos funciones de una sola variable, cuyas derivadas se calculan con los procedimientos conocidos para funciones de una variable.

Ejemplo 2.1. La función de dos variables

$$f(x, y) := \frac{x^2 y}{x^4 + y^4}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

es obviamente diferenciable en x para $y = y_0$ fijo, y diferenciable en y para $x = x_0$ fijo; siempre que el denominador no sea cero – por eso se excluye $(x, y) = (0, 0)$. Por la regla del cociente, se calculan:

$$\boxed{f_x(x, y) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)} = \frac{2xy(x^4 + y^4) - x^2y(4x^3)}{(x^4 + y^4)^2} = \frac{-2x^5y + 2xy^5}{(x^4 + y^4)^2},$$

$$\boxed{f_y(x, y) \equiv \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)} = \frac{x^2(x^4 + y^4) - x^2y(4y^3)}{(x^4 + y^4)^2} = \frac{x^6 - 3x^2y^4}{(x^4 + y^4)^2}.$$

En cada caso, se deriva $f(x, y)$ con respecto a una de las variables *como si la otra variable fuera una constante*. ◇

¹En su ensayo *De fundamentis astrologiae certioribus*, Praga, 1601.

En el Ejemplo anterior, aparecen dos notaciones – que son sinónimos – para las derivadas parciales. En vez de df/dt para la derivada (ordinaria) de una función $f(t)$ de una variable, se usa las notaciones alemanas $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ para las derivadas parciales. Por otra parte, en vez de la tradicional $f'(t)$ para la derivada ordinaria de $f(t)$, se escribe las derivadas parciales con f_x y f_y , en la notación inglesa.²

Esta es la definición precisa de las **derivadas parciales** de una función $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 :

$$f_x(x_0, y_0) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \quad (2.1a)$$

$$f_y(x_0, y_0) \equiv \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}. \quad (2.1b)$$

Ejemplo 2.2. Tómesese la función de tres variables

$$h(x, y, z) := 3xy^2 + e^x \cos(yz) + x^z.$$

El término x^z es problemático si $x < 0$. *Supongamos, entonces, que $x > 0$* , en cuyo caso se puede aprovechar la fórmula³

$$x^z = (e^{\log x})^z = e^{z \log x}.$$

Esta función tiene tres derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z) &\equiv h_x(x, y, z) = 3y^2 + e^x \cos(yz) + zx^{z-1}, \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) &\equiv h_y(x, y, z) = 6xy - e^x z \sin(yz), \\ \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) &\equiv h_z(x, y, z) = -e^x y \sin(yz) + x^z \log x. \end{aligned}$$

En cada caso, se deriva $h(x, y, z)$ con respecto a una de las variables *como si las otras dos variables fueran constantes*. ◇

En las fórmulas (2.1), se toman límites “ordinarios” de funciones de una variable. También se puede definir límites en dos variables. Por ejemplo, dada una fórmula como $f(x, y) := (x^4 + y^4)/(x^2 + y^2)$, claramente bien definida fuera del origen de \mathbb{R}^2 , ¿como se debe definir $f(0, 0)$?

²La “notación alemana” df/dt , etc., se debe a Gottfried Leibniz (a partir de 1684), mientras la “notación inglesa” f' fue empleada por Isaac Newton, en sus manuscritos personales desde 1666, aunque tardó en usarlo en público por varios años. Las dos notaciones son útiles, aunque la “inglesa” es más compacta.

³En estos apuntes, ‘log’ denotará el *logaritmo natural*, $\log = \log_e$; antiguamente (antes de 1980, aprox.) se empleaba tablas de logaritmos con base 10 para ciertos cálculos aritméticos, pero ahora \log_{10} es obsoleto. En los libros de texto de cálculo todavía es común ver la notación ‘ln’ para denotar el *logaritmo natural*, en homenaje a John Napier, autor del primer tratado sobre logaritmos en 1610.

Se plantea, entonces, interpretar la expresión:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = ??$$

A lo largo de una recta $y = mx$, esto se reduce a un límite en una variable:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + m^4)x^4}{(1 + m^2)x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + m^4}{1 + m^2} x^2 = 0;$$

y en la recta vertical $x = 0$, se reduce a

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} y^2 = 0.$$

Esto *sugiere* (pero no asegura) que el límite original debe ser 0.

Una mejor táctica sería pasar la función original a **coordenadas polares**:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (2.2)$$

para que el límite sobre una recta $\theta = \text{constante}$ sea:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) r^2 = 0,$$

donde se observa que el resultado no depende de θ .

¶ Pero el mismo procedimiento aplicado a la función $g(x, y) := \frac{xy}{x^2 + y^2}$ produce

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \cos \theta \sin \theta = \cos \theta \sin \theta \quad (!)$$

Este intento fracasa porque el resultado depende de θ y *no ofrece un valor único*: por eso, *el límite* $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ *de* $xy/(x^2 + y^2)$ *no existe.* ¶

Derivadas direccionales y gradientes

Las derivadas parciales (2.1) están asociados a las rectas $y = y_0$ y $x = x_0$ en el plano xy . Una variante importante es la **derivada direccional** de la función $f(x, y)$, en el punto (x_0, y_0) , a lo largo de la recta que pasa por (x_0, y_0) en la dirección $\vec{u} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$; véase la Figura 2.1. La ecuación paramétrica de esa recta es:

$$x = x_0 + h \cos \alpha, \quad y = y_0 + h \sin \alpha, \quad (h \in \mathbb{R}).$$

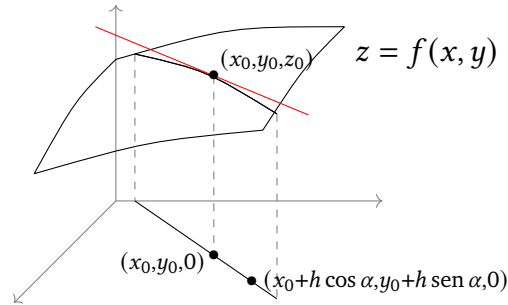


Figura 2.1: Recta tangente a un corte vertical de $z = f(x, y)$

Se define esta derivada direccional así:

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h \cos \alpha, y_0 + h \sen \alpha) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Es posible dar una expresión más simple para esta cantidad, si se adopta la notación:

$$\boxed{m_1 := f_x(x_0, y_0), \quad m_2 := f_y(x_0, y_0).} \tag{2.3}$$

Entonces, si $\vec{r}(t) := (x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sen \alpha)$, la derivada direccional $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0)$ es la derivada en $t = 0$ de la función $t \mapsto f(\vec{r}(t))$. La regla de cadena para funciones de una variable muestra que⁴

$$\boxed{D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = m_1 \cos \alpha + m_2 \sen \alpha = (m_1, m_2) \cdot \vec{u}.} \tag{2.4}$$

En la Figura 2.1 se ve el significado geométrico de la derivada direccional. El **grafo** de la función $f(x, y)$ es una *superficie* $z = f(x, y)$. En el plano del piso $z = 0$ se traza la recta que pasa por $(x_0, y_0, 0)$ en la dirección horizontal de \vec{u} . El *corte vertical* del grafo encima de esta recta es una *curva* que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) , donde $z_0 = f(x_0, y_0)$. La recta tangente (roja) a esta curva tiene *pendiente vertical* $m = m_1 \cos \alpha + m_2 \sen \alpha$.

Para calcular las derivadas parciales, entonces, basta conocer las derivadas parciales m_1, m_2 en el punto (x_0, y_0) y la dirección $\vec{u} = (\cos \alpha, \sen \alpha)$.

Ejemplo 2.3. Hallar la derivada direccional de mayor pendiente a la función $f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$ en el punto $(2, -1)$.

Primero se calculan las derivadas parciales de f :

$$f_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

⁴Esta fórmula se justificará en breve, en la Sección 2.3 que trata de la regla de cadena en general.

Luego hay que evaluarlas en $(x, y) = (2, -1)$:

$$m_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad m_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Entonces la derivada direccional en la dirección $\vec{u} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ es

$$m = \frac{2 \cos \alpha - \sin \alpha}{\sqrt{5}}.$$

Este valor m depende del ángulo α . Para maximizarlo, se pone

$$\frac{dm}{d\alpha} = -\frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sqrt{5}} = 0,$$

y se resuelve $2 \sin \alpha + \cos \alpha = 0$ para obtener $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$. Esta ecuación tiene dos soluciones en el ámbito $-\pi < \alpha \leq \pi$, que son:

◊ $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(-\frac{1}{2}) = -\operatorname{arc} \operatorname{tg}(\frac{1}{2}) \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, con $\sin \alpha = -1/\sqrt{5}$ y $\cos \alpha = +2/\sqrt{5}$;

◊ $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(-\frac{1}{2}) + \pi = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\frac{1}{2}) \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, con $\sin \alpha = +1/\sqrt{5}$ y $\cos \alpha = -2/\sqrt{5}$.

En el primer caso, $m = (4 + 1)/5 = 5/5 = 1$; en el segundo caso, $m = (-4 - 1)/5 = -5/5 = -1$. Entonces el valor máximo de m es $m = +1$ en la dirección $\vec{u} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$. ◊

► Para funciones de tres variables, la dirección de una recta es un vector en \mathbb{R}^3 que se tomará siempre de longitud 1. Es preferible usar una notación vectorial. Entonces se define el **gradiente** de una función $f(x, y, z)$ como el vector de sus tres derivadas parciales:⁵

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) := (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) \tag{2.5}$$

o más brevemente, $\vec{\nabla} f = (f_x, f_y, f_z)$. Si $\vec{u} = (a, b, c)$ es un vector *unitario* que marca la dirección de una recta que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) , la fórmula análoga a (2.4) es:

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{u}. \tag{2.6}$$

Esta es la combinación $af_x + bf_y + cf_z$ evaluada en (x_0, y_0, z_0) .

Ejemplo 2.4. Hallar la derivada direccional de la función

$$f(x, y, z) := y \log(2x - 3z)$$

en el punto $(2, 3, 1)$, en la dirección $\vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

⁵Algunos libros escriben $\operatorname{grad} f$ en vez de $\vec{\nabla} f$. Es importante recordar que este ‘ $\operatorname{grad} f$ ’ es un *vector*.

Primero se calculan las derivadas parciales de f :

$$f_x = \frac{2y}{2x - 3z}, \quad f_y = \log(2x - 3z), \quad f_z = -\frac{3y}{2x - 3z}.$$

Luego hay que evaluarlas en $(x, y, z) = (2, 3, 1)$:

$$\vec{\nabla}f(2, 3, 1) = (6, 0, -9), \quad \text{usando } \log 1 = 0.$$

Entonces la derivada direccional en la dirección indicada $\vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ es

$$D_{\vec{u}}f(2, 3, 1) = (6, 0, -9) \cdot (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 3 - \frac{9}{\sqrt{2}}. \quad \diamond$$

Derivadas parciales de orden superior

Las derivadas parciales f_x, f_y de una función $f(x, y)$ – si existen – son otras funciones de las variables (x, y) y se puede calcular sus propias derivadas. En principio, se debe considerar cuatro **derivadas parciales de segundo orden**:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Ahora hay una maravillosa simplificación, que se podría llamar “el teorema fundamental del cálculo diferencial en varias variables”: *si las derivadas mixtas f_{xy} y f_{yx} existen y son continuas, entonces necesariamente son iguales.*⁶ En adelante, se asumirá esta propiedad sin más discusión.⁷

Ejemplo 2.5. Hallar las derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y) := e^{2x} \cos 3y$.

Las derivadas parciales de primer orden son:

$$f_x = 2e^{2x} \cos 3y, \quad f_y = -3e^{2x} \sin 3y.$$

Derivando f_x primero y después f_y , se llega a estas funciones:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 4e^{2x} \cos 3y, & f_{xy} &= -6e^{2x} \sin 3y; \\ f_{yx} &= -6e^{2x} \sin 3y, & f_{yy} &= -9e^{2x} \cos 3y. \end{aligned}$$

Así se confirma, en este caso, la predicción de que $f_{yx} = f_{xy}$. \(\diamond\)

⁶Una función $f(x, y)$ es *continua* en el punto (x_0, y_0) si $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$; y se dice que “ f es continua” si esto vale en cada punto de su dominio. Explicar este teorema en detalle exigiría estudiar límites con más detenimiento; en los ejemplos de este curso, todas las funciones consideradas serán continuas y tendrán derivadas parciales continuas de primer y segundo órdenes.

⁷La igualdad de derivadas parciales mixtas de segundo (o mayor) orden aparece los textos originales del cálculo infinitesimal, de Leonhard Euler, a partir de 1740; fue demostrada en detalle por Hermann Schwarz en 1873. (A veces se le atribuye – erróneamente – a Laurent Schwartz en el siglo XX.)

Para funciones de tres variables $h(x, y, z)$, hay un total de seis derivadas parciales de segundo orden, tres “puros” y tres “mixtos”:

$$h_{xx}, \quad h_{xy} = h_{yx}, \quad h_{xz} = h_{zx}, \quad h_{yy}, \quad h_{yz} = h_{zy}, \quad h_{zz}.$$

De igual manera, las derivadas parciales de tercer orden de $f(x, y)$ son cuatro:

$$f_{xxx}, \quad f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}, \quad f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}, \quad f_{yyy}.$$

2.2. Planos tangentes y rectas normales

Dada una función $f(x, y)$ cuyas derivadas parciales de primer orden existen, su **grafo** es la superficie $z = f(x, y)$.

Hay un *plano especial* que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) del grafo, véase la Figura 2.1:

$$z - z_0 = m_1(x - x_0) + m_2(y - y_0) \tag{2.7}$$

donde $m_1 := f_x(x_0, y_0)$, $m_2 := f_y(x_0, y_0)$, como antes.

Se dice que la función f es **diferenciable** en el punto (x_0, y_0) si este plano es una *buena aproximación* a la superficie cerca del punto de contacto (x_0, y_0, z_0) .

► Desde luego, es necesario precisar el significado de la nebulosa frase “buena aproximación”. Conviene denotar

$$R := \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

la distancia entre los puntos (x, y) , (x_0, y_0) del dominio de f . Las alturas z de la superficie y del plano sobre el punto (x, y) son:

$$f(x, y), \quad \text{en contraste con} \quad z_0 + m_1(x - x_0) + m_2(y - y_0),$$

donde $z_0 = f(x_0, y_0)$. La aproximación es “buena” si la diferencia de alturas es pequeña en comparación con la separación horizontal R :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + m_1(x - x_0) + m_2(y - y_0) + \varepsilon(x, y) R, \tag{2.8}$$

y se requiere que el error relativo $\varepsilon(x, y) \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow 0$. Si eso sucede, se dice que el plano (2.7) es el **plano tangente** al grafo de f en el punto (x_0, y_0, z_0) .

Dicho de otra manera: una función es diferenciable en un punto si esa función admite una “buena aproximación” por otra función de primer grado. Sin entrar en más detalle, se ve que es al menos necesario que las derivadas parciales en ese punto existen.

► La recta que pasa por (x_0, y_0, z_0) perpendicular al plano tangente se llama la **recta normal** a la superficie en ese punto.

La ecuación del plano tangente (2.7) se puede reacomodar así:

$$m_1(x - x_0) + m_2(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Al comparar este formato con la ecuación general (1.5a) de un plano que pasa por (x_0, y_0, z_0) , se puede notar que un vector normal al plano tangente es:

$$\vec{n} = (m_1, m_2, -1).$$

Entonces las ecuaciones de la recta normal – en su forma simétrica (1.6b) – son:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m_1} = \frac{y - y_0}{m_2} = \frac{z - z_0}{-1}}. \quad (2.9)$$

Ejemplo 2.6. Encontrar el plano tangente y la recta normal al paraboloido elíptico $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1, 2, 5)$.

En primer lugar, cabe notar que $5 = 1^2 + 2^2$, así que el punto $(1, 2, 5)$ es efectivamente un punto de esta superficie.

Aquí $z = f(x, y)$ donde $f(x, y) := x^2 + y^2$. En el punto $(1, 2)$ del dominio de f , resulta:

$$\begin{cases} f_x = 2x \\ f_y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = 4 \end{cases} \text{ en } (x_0, y_0) = (1, 2).$$

Entonces el plano tangente en $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 5)$ es

$$2(x - 1) + 4(y - 2) - (z - 5) = 0,$$

o bien

$$2x + 4y - z = 5.$$

La recta normal al paraboloido en ese mismo punto es:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z - 5}{-1}; \quad \text{o bien:} \quad 2x - 2 = y - 2 = 20 - 4z. \quad \diamond$$

► ¿Qué hacer con las superficies que no son grafos de la forma $z = f(x, y)$? En adelante se ofrecerá una explicación del procedimiento que sigue; por ahora basta con exponer un algoritmo. Una superficie general está dada por una ecuación

$$F(x, y, z) = k,$$

donde k es alguna constante y se supondrá que F tiene derivadas parciales de primer orden. (Las superficies cuadráticas de sección 1.3 son todas de esta forma.)

El plano tangente – si existe – a esta superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) es dado por:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{2.10a}$$

donde

$$A = F_x(x_0, y_0, z_0), \quad B = F_y(x_0, y_0, z_0), \quad C = F_z(x_0, y_0, z_0); \tag{2.10b}$$

o lo que es lo mismo,

$$(A, B, C) = \vec{\nabla}F(x_0, y_0, z_0). \tag{2.10c}$$

La recta normal a la superficie en ese mismo punto es:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

Esto dice que *el gradiente de F da la dirección de la recta normal* en el punto (x_0, y_0, z_0) .

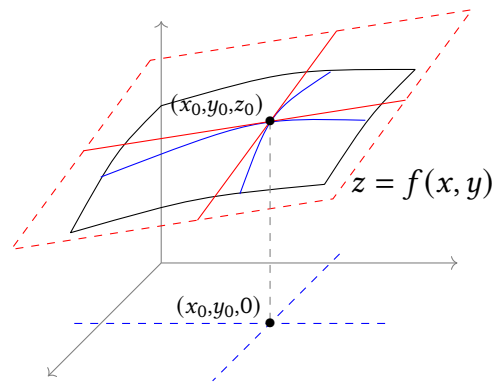


Figura 2.2: Plano tangente a una superficie en un punto dado

Los cortes verticales de la superficie por los planos $y = y_0$ (paralelo al plano xz); y $x = x_0$ (paralelo al plano yz) marcan dos curvas en la superficie, cuyas rectas tangentes en su punto común (x_0, y_0, z_0) determinan el plano tangente: véase la Figura 2.2.

Si la superficie es un grafo $z = f(x, y)$, las pendientes verticales de estas dos rectas tangentes son m_1 y m_2 , respectivamente.

Ejemplo 2.7. Hallar el plano tangente y la recta normal al elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3$$

en el punto (a, b, c) .

Obsérvese que el lado izquierdo de la ecuación, evaluado en el punto (a, b, c) , vale $1 + 1 + 1 = 3$, así que (a, b, c) es de hecho un punto del elipsoide.

En este caso, con

$$F(x, y, z) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad \text{y} \quad k = 3,$$

se obtiene las derivadas parciales:

$$F_x = \frac{2x}{a^2}, \quad F_y = \frac{2y}{b^2}, \quad F_z = \frac{2z}{c^2},$$

y sus valores en $(x_0, y_0, z_0) = (a, b, c)$ son

$$A = \frac{2}{a}, \quad B = \frac{2}{b}, \quad C = \frac{2}{c}.$$

Según el algoritmo expuesto arriba, el plano tangente en (a, b, c) es

$$\frac{2}{a}(x - a) + \frac{2}{b}(y - b) + \frac{2}{c}(z - c) = 0$$

o bien, al llevar las constantes al lado derecho:

$$\frac{2x}{a} + \frac{2y}{b} + \frac{2z}{c} = 2 + 2 + 2$$

o finalmente:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3.$$

[[Este es obviamente un plano que pasa por (a, b, c) .]]

La recta normal en (a, b, c) , cuya dirección es $\vec{\nabla}F(a, b, c) = (2/a, 2/b, 2/c)$, tiene las ecuaciones:

$$\frac{a(x - a)}{2} = \frac{b(y - b)}{2} = \frac{c(z - c)}{2} \quad \text{o bien:} \quad ax - a^2 = by - b^2 = cz - c^2. \quad \diamond$$

2.3. La regla de la cadena

Si $s \mapsto f(s)$ y $t \mapsto g(t)$ son dos funciones diferenciables de una variable y si $g(t)$ queda en el dominio de f , al menos para un intervalo de valores $a < t < b$, entonces la función compuesta $t \mapsto f(g(t))$ es también diferenciable para $a < t < b$. Su derivada es dada por la conocida *regla de la cadena* (en una variable):

$$\underline{h(t)} := f(g(t)) \implies \underline{h'(t)} = f'(g(t)) g'(t), \quad (2.11)$$

válida para $a < t < b$. En esta sección se verá cómo extender esta regla a varios casos de funciones de más variables.

Derivadas a lo largo de una curva

El caso más sencillo es el de sustituir los valores de una curva plana $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ en una función de dos variables $f(x, y)$. De este modo se obtiene una función de una variable

$$z(t) := f(\vec{r}(t)) \equiv f(x(t), y(t)).$$

En adelante, se va a suponer que la función f es diferenciable en el punto (x_0, y_0) – en el sentido de que el grafo $z = f(x, y)$ está bien aproximado por un plano (tangente) en el punto (x_0, y_0, z_0) , donde $z_0 := f(x_0, y_0)$. Según la fórmula (2.8), esto significa que⁸

$$z(t) - z_0 = m_1(x(t) - x_0) + m_2(y(t) - y_0) + E(t)(t - t_0),$$

donde $\lim_{t \rightarrow t_0} E(t) = 0$. Aquí $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ es un punto de la curva $t \mapsto \vec{r}(t)$.

Si se divide la ecuación por $(t - t_0)$, se obtiene

$$\frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} = m_1 \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + m_2 \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} + E(t).$$

En el límite $t \rightarrow t_0$, como $E(t) \rightarrow 0$, se obtiene la fórmula clave:

$$z'(t_0) = m_1 x'(t_0) + m_2 y'(t_0).$$

O bien, más explícitamente:

$$z'(t_0) = f_x(x_0, y_0) x'(t_0) + f_y(x_0, y_0) y'(t_0).$$

Este fórmula se simplifica, eliminando los subíndices 0, al aplicarlo a cada punto $(x(t), y(t))$ de la curva donde $f(x(t), y(t))$ está definido. Se obtiene así **la regla de la cadena para curvas**:

$$z'(t) = f_x(x(t), y(t)) x'(t) + f_y(x(t), y(t)) y'(t). \tag{2.12a}$$

Es costumbre abreviarla aún más, al suprimir la mención de algunas variables, escribiendo $f(t)$ como abreviatura para $f(x(t), y(t))$:

$$f'(t) = f_x x'(t) + f_y y'(t). \tag{2.12b}$$

En la notación alemana tradicional, la regla de cadena para curvas se expresa así:⁹

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \tag{2.12c}$$

⁸El término residual $E(t)(t - t_0)$ se obtiene como sigue. Según (2.8), el residuo tiene el formato de $\varepsilon(x(t), y(t)) R(t)$, donde $R(t)/(t - t_0)$ es acotado y $\varepsilon(x(t), y(t)) \rightarrow 0$ en el límite $t \rightarrow t_0$.

⁹Nótese la distinción entre derivadas parciales como $\partial f / \partial x$ y derivadas de una variable, como dx / dt , bien visibles en la notación alemana.

Si se comparan las fórmulas (2.11) (para funciones f de una variable) y (2.12a) (para funciones f de dos variables), son bastante similares: la mayor diferencia es *la presencia de dos sumandos* en la fórmula variables, ya que en el segunda caso f tiene dos derivadas parciales.

Ejemplo 2.8. Calcular la derivada $z'(t)$ de la función $z = xy^2$ a lo largo del círculo $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$.

Es obvio que $z_x = y^2$, $z_y = 2xy$.

Al aplicar la regla de cadena (2.12b), se calcula:

$$\begin{aligned} z'(t) &= z_x x'(t) + z_y y'(t) = y^2 x'(t) + 2xy y'(t) \\ &= (\sin^2 t)(-\sin t) + (2 \cos t \sin t)(\cos t) \\ &= -\sin^3 t + 2 \cos^2 t \sin t. \end{aligned}$$

También es posible calcular $z'(t)$ por sustitución directa, *sin emplear la regla de la cadena*. Esto sirve como un chequeo sobre el cálculo anterior:

$$\begin{aligned} z(t) &= \cos t \sin^2 t, \\ z'(t) &= -\sin^3 t + (\cos t)(2 \sin t \cos t), \end{aligned}$$

usando la regla del producto en una variable. En la mayoría de los casos, esta sustitución directa conduce a cálculos más largos y tediosos que el uso de la regla de la cadena. \diamond

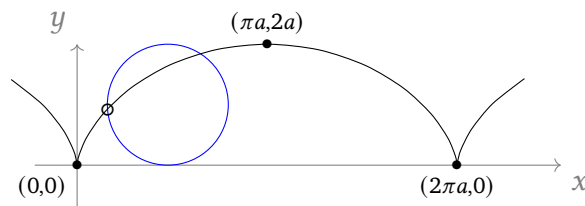


Figura 2.3: Un arco de cicloide

Ejemplo 2.9. El **cicloide** es la curva generada por un punto marcado sobre un círculo de radio a que rueda hacia la derecha sobre el eje x (Figura 2.3). Esta curva está parametrizada por:

$$\left\{ \begin{aligned} x(t) &= a(t - \sin t) \\ y(t) &= a(1 - \cos t) \end{aligned} \right\} \quad \text{donde} \quad -\infty < t < \infty. \quad (2.13)$$

Calcular la derivada $z'(t)$ de la función $z = x^2 + y^2$ a lo largo de esta curva.

Es claro que $z_x = 2x$, $z_y = 2y$. Al aplicar la regla de cadena, se obtiene:

$$\begin{aligned} z'(t) &= z_x x'(t) + z_y y'(t) = 2x x'(t) + 2y y'(t) \\ &= 2a(t - \operatorname{sen} t) a(1 - \cos t) + 2a(1 - \cos t)(a \operatorname{sen} t) \\ &= 2a^2 t(1 - \cos t) = 2a^2(t - t \cos t). \end{aligned}$$

Para mayor certeza, se puede ensayar la sustitución directa:

$$\begin{aligned} z(t) &= x^2 + y^2 = a^2(t - \operatorname{sen} t)^2 + a^2(1 - \cos t)^2 \\ &= a^2(t^2 - 2t \operatorname{sen} t - 2 \cos t + 2); \\ z'(t) &= a^2(2t - 2 \operatorname{sen} t - 2t \cos t + 2 \operatorname{sen} t) \\ &= 2a^2(t - t \cos t). \end{aligned}$$

Una vez más, se ha verificado una instancia de la regla de la cadena, al precio de efectuar un cálculo más extenso. \diamond

► También se puede derivar funciones de tres variables $F(x, y, z)$ a lo largo de una curva $t \mapsto \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ en \mathbb{R}^3 . Las fórmulas son análogas a las de (2.12), con la única diferencia que ahora hay *tres sumandos* al lado derecho. Para la derivada de la función compuesta $t \mapsto F(x(t), y(t), z(t))$ se usa

$$F'(t) = F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t) \equiv \underline{\vec{\nabla} F \cdot \vec{r}'(t)}.$$

En la notación alemana, esta fórmula se presenta así:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} \equiv \vec{\nabla} F \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Ejemplo 2.10. Hallar la derivada de $w = yz^2 - x^3$ a lo largo de la curva

$$x = e^{-t}, \quad y = \cos t, \quad z = t^2 e^{-t}.$$

Fíjese que no hay restricción sobre el dominio de esta curva: $\vec{r}(t)$ está definida para $-\infty < t < \infty$. Para derivar la función $w(t) := y(t)z(t)^2 - x(t)^3$, se calcula:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} w &= (w_x, w_y, w_z) = (-3x^2, z^2, 2yz) \\ &= (-3e^{-2t}, t^4 e^{-2t}, 2t^2 e^{-t} \cos t), \\ \vec{r}'(t) &= (-e^{-t}, -\operatorname{sen} t, (2t - t^2)e^{-t}). \end{aligned}$$

De ahí se obtiene¹⁰

$$w'(t) = \vec{\nabla} w \cdot \vec{r}'(t) = 3e^{-3t} - t^4 e^{-2t} \operatorname{sen} t + (4t^3 - 2t^4)e^{-2t} \cos t. \quad \diamond$$

¹⁰En un producto de términos con un factor trigonométrico, es aconsejable escribir esta a la derecha: así, se prefiere $2t^2 e^{-t} \cos t$ en vez de $2t^2 \cos t e^{-t}$. Sin paréntesis, la segunda expresión es ambigua.

Cambio de variables

El segundo caso de importancia de la regla de la cadena ocurre cuando se cambian las variables del dominio de una función de dos o más variables. El caso mejor conocido es el uso de coordenadas polares (2.2) en funciones de dos variables:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases} \quad (2.2')$$

Más generalmente, una transformación de las variables cartesianas a dos variables nuevas (u, v) se puede expresar así:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad (2.14)$$

donde se supondrá que $x(u, v)$, $y(u, v)$ son funciones diferenciables de las nuevas variables.

Si ahora $f(x, y)$ es una función diferenciable de las variables originales, estas expresiones definen una nueva función:

$$(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v)), \quad (2.15)$$

y se buscan sus derivadas parciales $f_u = \partial f / \partial u$ y $f_v = \partial f / \partial v$.

Al mantener constante una de las variables v, u , se obtiene de las fórmulas (2.12) unas fórmulas análogas para las derivadas parciales de la función (2.15):

$$\begin{cases} f_u = f_x x_u + f_y y_u \\ f_v = f_x x_v + f_y y_v \end{cases} \quad (2.16a)$$

donde se suprimen los variables, para aliviar la notación. \llbracket Pero es importante notar un detalle: las derivadas parciales x_u, y_u, x_v, y_v son funciones de (u, v) , mientras las derivadas parciales f_x, f_y son funciones de (x, y) . En estas (x, y) es necesario sustituir la transformación (2.14) para que los lados derechos de (2.16a) dependan solamente de (u, v) . \rrbracket

La regla de cadena para el cambio de variable (2.14) se ve así en notación alemana:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \end{aligned} \quad (2.16b)$$

Ejemplo 2.11. Hallar las derivadas parciales z_r, z_θ de la función $z = x^2 - y^2$ en coordenadas polares.

Nótese primero que $z_x = 2x$, $z_y = -2y$.

En seguida, se dispone de las derivadas parciales de las fórmulas de cambio (2.2):

$$\begin{cases} x_r = \cos \theta, & x_\theta = -r \operatorname{sen} \theta \\ y_r = \operatorname{sen} \theta, & y_\theta = r \cos \theta \end{cases} \quad (2.17)$$

y todos se combinan según la regla de la cadena (2.16a):

$$\begin{aligned} z_r &= z_x x_r + z_y y_r = 2x(\cos \theta) - 2y(\operatorname{sen} \theta), \\ z_\theta &= z_x x_\theta + z_y y_\theta = 2x(-r \operatorname{sen} \theta) - 2y(r \cos \theta). \end{aligned}$$

Para terminar el cálculo, se debe enchufar las expresiones para x, y al lado derecho:

$$\begin{aligned} z_r &= 2r \cos \theta (\cos \theta) - 2r \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta) = 2r(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta), \\ z_\theta &= 2r \cos \theta (-r \operatorname{sen} \theta) - 2r \operatorname{sen} \theta (r \cos \theta) = -4r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

Opcionalmente, se puede simplificar el resultado con identidades trigonométricas:¹¹

$$z_r = 2r \cos 2\theta, \quad z_\theta = -2r^2 \operatorname{sen} 2\theta. \quad \diamond$$

A veces conviene expresar la regla de la cadena (2.16a) en el formato de un producto de matrices, así:

$$\begin{bmatrix} f_u & f_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Esta matriz 2×2 de derivadas parciales expresa la *derivada* del cambio de variables (2.14).

Ejemplo 2.12. Encontrar las derivadas parciales de la función $z = x^2 y^3$ después del cambio de variable:

$$\begin{cases} x = u - v^2 \\ y = u + 2v \end{cases}.$$

En primer lugar: $z_x = 2xy^3$, $z_y = 3x^2y^2$.

Las derivadas parciales del cambio de variable son:

$$\begin{cases} x_u = 1, & x_v = -2v \\ y_u = 1, & y_v = 2 \end{cases}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z_u & z_v \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2xy^3 & 3x^2y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2v \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} xy^2(2y + 3x) & 2xy^2(-2vy + 3x) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

¹¹En este ejemplo, una sustitución directa da $z = r^2(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) = r^2 \cos 2\theta$, la cual permite verificar esta aplicación de la regla de la cadena.

Es necesario convertir las expresiones al lado derecho a funciones de u, v solamente, eliminando las variables x, y . Se obtiene:

$$\begin{aligned} z_u &= (u - v^2)(u + 2v)^2(5u + 4v - 3v^2), \\ z_v &= 2(u - v^2)(u + 2v)^2(3u - 2uv - 7v^2). \end{aligned} \quad \diamond$$

Derivación con dependencia mixta

A veces es necesario, después de hacer un cambio de variable, obtener derivadas parciales de una función que se expresa en términos de las variables nuevas y las variables originales simultáneamente. Es mejor ilustrar este fenómeno con un ejemplo.

Ejemplo 2.13. Si $w(x, y) := u^2 + v^2 + x^2 + y^2$ donde estas variables están ligadas por las relaciones:

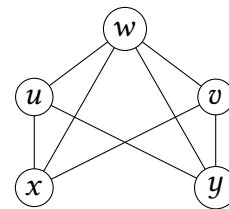
$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases},$$

se debe hallar las derivadas parciales de w con respecto a x, y .

Este enunciado es levemente ambiguo, porque se puede atribuir dos significados a “la derivada parcial de w con respecto a x ”. Se trata de la derivada parcial “directa”, que sería $\underline{2x}$, como si u, v, x, y fueran 4 variables independientes? O bien, se quiere derivar la función $x \mapsto (x - y)^2 + (x + y)^2 + x^2 + y^2$, después de resolver las dependencias?

Se prefiere la segunda opción: esto es $w_x = \partial w / \partial x$. Pero en el transcurso del cálculo se llamará \dot{w}_x a la primera opción; en el ejemplo, $\dot{w}_x = 2x$.

A la derecha se ve el grafo de las dependencias de las variables: cada arista (de arriba hacia abajo) indica una dependencia directa. Así, las variables inferiores x, y son independientes; las variables intermedios u, v dependen de x, y ; y la variable superior w depende directamente de las otras cuatro.



La regla de la cadena se describe así en términos del grafo de dependencias: para calcular w_x , se cuenta un sumando para cada camino ascendente de \underline{x} a \underline{w} . En el grafo, se ven tres caminos ascendentes: uno directo de x a w ; y dos indirectos, pasando por u y v , respectivamente. Igual sucede con las variables y y w . Entonces se usan las fórmulas:

$$\begin{aligned} w_x &= \dot{w}_x + w_u u_x + w_v v_x \\ w_y &= \dot{w}_y + w_u u_y + w_v v_y \end{aligned}$$

para calcular las derivadas parciales requeridos. Concretamente:

$$\begin{aligned} w_x &= 2x + (2u)(1) + (2v)(1) = 2x + (2x - 2y) + (2x + 2y) = 6x, \\ w_y &= 2y + (2u)(-1) + (2v)(1) = 2y + (-2x + 2y) + (2x + 2y) = 6y. \end{aligned} \quad \diamond$$

2.4. Derivación implícita

Si una superficie está definida por una relación del tipo:

$$F(x, y, z) = k, \tag{2.19}$$

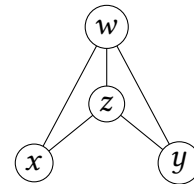
muchas veces – pero no siempre – es posible despejar una de las tres variables en términos de las otras; en cuyo caso se obtendrá una expresión tal como

$$z = g(x, y).$$

Si eso resulta posible, se obtiene las derivadas parciales $z_x = g_x(x, y)$, $z_y = g_y(x, y)$ en forma directa.

Cuando es imposible (o resulta incómodo) despejar z con una fórmula explícita, se dice que la relación (2.19) determina z de manera *implícita*. Entonces es necesario hallar z_x, z_y indirectamente, a partir de las derivadas calculables F_x, F_y, F_z . Este es el problema de la **derivación implícita**.

Al denotar el lado izquierdo de (2.19) por $w := F(x, y, z)$, se plantea un problema de dependencia mixta: se consideran x, y como variables independientes; la variable z depende implícitamente de x, y ; y la variable w depende de las otras tres. En el grafo al lado quedan ilustradas estas dependencias.



La relación $w = k$ dada por (2.19) implica que $w_x = 0, w_y = 0$. Entonces la regla de la cadena en este caso produce:

$$\begin{aligned} w_x = \dot{w}_x + w_z z_x &\equiv \underline{F_x + F_z z_x = 0}, \\ w_y = \dot{w}_y + w_z z_y &\equiv \underline{F_y + F_z z_y = 0}, \end{aligned} \tag{2.20a}$$

porque aquí \dot{w}_x significa la derivada parcial ordinaria F_x , de F con respecto a x ; y de igual modo $\dot{w}_y = F_y$.

Cuando $F_z \neq 0$, estas ecuaciones permiten despejar z_x, z_y :

$$\boxed{z_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z}.} \tag{2.20b}$$

Atención a los signos negativos, que aparecen al resolver las ecuaciones (2.20a).

En la notación alemana, estas fórmulas tienen el formato:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z}. \tag{2.20c}$$

[[Una “cancelación formal” de los ‘ ∂F ’ dejaría los signos negativos sin explicación!]]

Ejemplo 2.14. Calcular $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ para puntos del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3,$$

y evaluarlas en el punto (a, b, c) .

En el Ejemplo 2.7, se calcularon las derivadas parciales del lado izquierdo:

$$F_x = \frac{2x}{a^2}, \quad F_y = \frac{2y}{b^2}, \quad F_z = \frac{2z}{c^2}.$$

De ahí resulta:

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x/a^2}{2z/c^2} = -\frac{c^2 x}{a^2 z};$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y/b^2}{2z/c^2} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}.$$

Es importante notar dos casos. Primero, los resultados son expresiones en las tres variables (x, y, z) en vez de (x, y) solamente. Eso está en la naturaleza de las cosas, puesto que no se ha despejado z en términos de las otras dos.

Segundo: las fórmulas para z_x , z_y no son válidas cuando $F_z = 0$, en este caso, cuando $z = 0$. Pero tampoco se puede despejar z sin ambigüedad cuando $z = 0$. En efecto, de la ecuación del elipsoide se obtiene

$$z^2 = 3c^2 - (c^2/a^2)x^2 - (c^2/b^2)y^2 \implies z = \pm \sqrt{3c^2 - (c^2/a^2)x^2 - (c^2/b^2)y^2},$$

donde los dos signos \pm corresponden a dos hemielipsoides, uno superior y otro inferior. En los puntos de la elipse $z = 0$, $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 3$, el plano tangente es vertical.

En el punto (a, b, c) del primer octante de \mathbb{R}^3 , se obtiene los valores $m_1 = -c^2 a/a^2 c = -c/a$; $m_2 = -c^2 b/b^2 c = -c/b$. Entonces el plano tangente (2.7) es

$$z - c = -(c/a)(x - a) - (c/b)(y - b)$$

o bien

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 + 1 + 1 = 3,$$

consistente con el resultado del Ejemplo 2.7. \diamond

Del Ejemplo anterior también se ve cómo justificar las fórmulas (2.10) para el plano tangente en un punto de la superficie $F(x, y, z) = k$. Si se despeja $z = z(x, y)$ cerca del punto (x_0, y_0) , y se escribe $z_0 = z(x_0, y_0)$, entonces $F(x_0, y_0, z_0) = k$; y además, como

$$m_1 := z_x(x_0, y_0), \quad m_2 := z_y(x_0, y_0),$$

la fórmula de derivación implícita (2.20b) conlleva los valores

$$m_1 = -\frac{A}{C}, \quad m_2 = -\frac{B}{C}$$

[al menos cuando $C = F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$]. El plano tangente en (x_0, y_0, z_0) ahora es:

$$z - z_0 = -\frac{A}{C}(x - x_0) - \frac{B}{C}(y - y_0)$$

y se simplifica en la forma ya vista:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{2.10a'}$$

Derivación implícita con más variables

La derivación implícita puede usarse para calcular derivadas parciales cuando dos o más variables están definidas implícitamente. Esta situación se presenta cuando se enfrentan 2 relaciones entre 4 variables:

$$F(x, y, u, v) = k, \quad G(x, y, u, v) = l. \tag{2.21}$$

Se puede tomar dos de estas variables, tales como x, y , como “independientes” y se pretende despejar las otras en funciones de esas: $u = u(x, y), v = v(x, y)$. Habrá que obtener las derivadas $u_x = \partial u / \partial x$, etcétera, de ser posibles sin resolver para u, v explícitamente.

Ejemplo 2.15. Hallar las derivadas parciales u_x, u_y, v_x, v_y , cuando las variables x, y, u, v cumplen las dos relaciones:

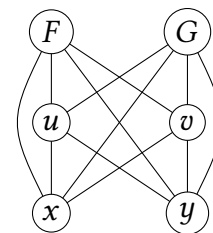
$$u^3 + xv = y, \quad v^3 + yu = x.$$

Como las variables u, v satisfacen ecuaciones cúbicas entrelazadas, es impensable despejarlas directamente. Primero se debe expresar estas ecuaciones en el formato (2.21), al llevar todas las variables al lado izquierdo:

$$F(x, y, u, v) := u^3 + xv - y = 0,$$

$$G(x, y, u, v) := v^3 + yu - x = 0.$$

Esta vez el diagrama de dependencias tiene tres niveles: abajo, las variables independientes x, y ; en el intermedio, las variables dependientes u, v ; y en el nivel superior, las expresiones F, G .



Las relaciones $F = 0, G = 0$ implican $F_x = 0, G_x = 0$, por un lado; y $F_y = 0, G_y = 0$, por otro lado. Se calculan estas derivadas parciales F_x, G_x, F_y, G_y con la regla de la cadena para dependencias mixtas, al partir de este cuadro. Esto da lugar a cuatro ecuaciones que involucran u_x, u_y, v_x, v_y :

$$\begin{aligned} 3u^2u_x + v + xv_x &= 0, & 3u^2u_y + xv_y - 1 &= 0, \\ 3v^2v_x + yu_x - 1 &= 0, & 3v^2v_y + u + yu_y &= 0. \end{aligned}$$

Estas se pueden organizar en un par de sistemas 2×2 de ecuaciones:¹²

$$\begin{bmatrix} 3u^2 & x \\ y & 3v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3u^2 & x \\ y & 3v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_y \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -u \end{bmatrix},$$

con la misma matriz 2×2 de coeficientes. Hay una fórmula conocida para la matriz inversa 2×2 :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

De este modo se obtiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_x \\ v_x \end{bmatrix} &= \frac{1}{9u^2v^2 - xy} \begin{bmatrix} 3v^2 & -x \\ -y & 3u^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -v \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9u^2v^2 - xy} \begin{bmatrix} -3v^3 - x \\ 3u^2 + yv \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} u_y \\ v_y \end{bmatrix} &= \frac{1}{9u^2v^2 - xy} \begin{bmatrix} 3v^2 & -x \\ -y & 3u^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -u \end{bmatrix} = \frac{1}{9u^2v^2 - xy} \begin{bmatrix} 3v^2 + xu \\ -3u^3 - y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

El resultado final es:

$$u_x = -\frac{3v^3 + x}{9u^2v^2 - xy}, \quad v_x = \frac{3u^2 + yv}{9u^2v^2 - xy}, \quad u_y = \frac{3v^2 + xu}{9u^2v^2 - xy}, \quad v_y = -\frac{3u^3 + y}{9u^2v^2 - xy}. \quad \diamond$$

Derivadas de segundo orden con cambios de variables

Se dice que $f(x, y)$ es una función dos veces diferenciable si es diferenciable y si sus derivadas parciales $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ también son funciones diferenciables, y se puede calcular sus derivadas parciales de segundo orden: f_{xx} , f_{xy} , f_{yy} . Ahora bien, en presencia de un cambio de variable:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad (2.14')$$

se requiere encontrar las otras derivadas de segundo orden: f_{uu} , f_{uv} , f_{vv} .

Resulta que las relaciones que conectan los dos tipos de derivadas de segundo orden *no necesitan una nueva variante de la regla de la cadena*. Basta usar la regla ya obtenida para las derivadas de primer orden:

$$\begin{cases} f_u = f_x x_u + f_y y_u \\ f_v = f_x x_v + f_y y_v \end{cases} \quad (2.16a')$$

reemplazando sistemáticamente la letra f por f_x o por f_y , respectivamente.

¹²En este ejemplo, para abreviar la discusión, se emplean técnicas matriciales para resolver sistemas lineales de ecuaciones. Otra alternativa es resolverlas “a pie” con manipulaciones algebraicas ordinarias.

Ejemplo 2.16. Si $z = f(x, y)$ es dos veces diferenciable, y si $x = u^2 + v^2$, $y = u/v$, hallar la segunda derivada parcial mixta f_{uv} en términos de las derivadas parciales de f con respecto a las variables x, y .

Para este cambio de variable, la regla de la cadena asume la forma concreta¹³

$$\left\{ \begin{array}{l} f_u = f_x(2u) + f_y(v^{-1}) \\ f_v = f_x(2v) + f_y(-uv^{-2}) \end{array} \right\}.$$

La derivada de la primera de éstas con respecto a v sigue por la regla del producto:

$$f_{uv} = \frac{\partial}{\partial v}(2uf_x + v^{-1}f_y) = 2u(f_x)_v - v^{-2}f_y + v^{-1}(f_y)_v.$$

Las expresiones $(f_x)_v$ y $(f_y)_v$ mezclan índices de derivadas nuevas y originales; se debe simplificarlas por estas sustituciones $f \mapsto f_x, f \mapsto f_y$:

$$f_v = 2vf_x - uv^{-2}f_y \quad \mapsto \quad \left\{ \begin{array}{l} (f_x)_v = 2vf_{xx} - uv^{-2}f_{xy} \\ (f_y)_v = 2vf_{yx} - uv^{-2}f_{yy} \end{array} \right\}$$

Al enchufar las expresiones al lado derecho en la fórmula provisional para f_{uv} , se obtiene

$$f_{uv} = 2u(2vf_{xx} - uv^{-2}f_{xy}) - v^{-2}f_y + v^{-1}(2vf_{yx} - uv^{-2}f_{yy})$$

Esto se puede simplificar, tomando en cuenta que $f_{yx} = f_{xy}$, para obtener la expresión final:

$$f_{uv} = 4uvf_{xx} + (2 - 2u^2v^{-2})f_{xy} - uv^{-3}f_{yy} - v^{-2}f_y.$$

Es posible chequear este cálculo, aprovechando que $f_{uv} = f_{vu} \equiv \partial f_v / \partial u$:

$$f_{uv} = \frac{\partial}{\partial u}(2vf_x - uv^{-2}f_y) = 2v(f_x)_u - v^{-2}f_y - uv^{-2}(f_y)_u$$

y calculando las expresiones $(f_x)_u$ y $(f_y)_u$ por las sustituciones

$$f_u = 2uf_x + v^{-1}f_y \quad \mapsto \quad \left\{ \begin{array}{l} (f_x)_u = 2uf_{xx} + v^{-1}f_{xy} \\ (f_y)_u = 2uf_{yx} + v^{-1}f_{yy} \end{array} \right\}$$

con lo cual se ve que

$$f_{uv} = 2v(2uf_{xx} + v^{-1}f_{xy}) - v^{-2}f_y - uv^{-2}(2uf_{yx} + v^{-1}f_{yy})$$

que coincide con la fórmula anterior para f_{uv} , como debería. ◇

La presencia del término de primer orden $-v^{-2}f_y$ en el resultado para f_{uv} indica que en general un cambio de variable mezcla derivadas parciales de primer y segundo órdenes. Además, los coeficientes $4uv$, etcétera, en el ejemplo son diversas derivadas parciales de las funciones $x(u, v) = u^2 + v^2$, $y(u, v) = uv^{-1}$.

¹³A la hora de derivar cocientes, tales como u/v , es aconsejable emplear exponentes negativos en vez de fracciones.

No es difícil comprobar, siguiendo el método del Ejemplo 2.16, que las fórmulas generales de cambio para derivadas de segundo orden son:

$$\begin{aligned} f_{uu} &= f_{xx}x_u^2 + 2f_{xy}x_u y_u + f_{yy}y_u^2 + f_x x_{uu} + f_y y_{uu}, \\ f_{uv} &= f_{xx}x_u x_v + f_{xy}(x_u y_v + x_v y_u) + f_{yy}y_u y_v + f_x x_{uv} + f_y y_{uv}, \\ f_{vv} &= f_{xx}x_v^2 + 2f_{xy}x_v y_v + f_{yy}y_v^2 + f_x x_{vv} + f_y y_{vv}. \end{aligned}$$

No es necesario (ni recomendable) memorizar estas fórmulas. El método de sustitución del Ejemplo anterior es suficiente en todos los casos concretos.

Ejemplo 2.17. Si $z = f(x, y)$ es una función dos veces diferenciable de las variables cartesianas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, expresar la suma $f_{xx} + f_{yy}$ en coordenadas polares (r, θ) .

La regla de la cadena (2.16a) para las derivadas parciales de primer orden dice que:

$$\begin{aligned} f_r &= f_x x_r + f_y y_r = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta, \\ f_\theta &= f_x x_\theta + f_y y_\theta = -f_x r \sin \theta + f_y r \cos \theta. \end{aligned}$$

Las derivadas parciales “puros” de segundo orden son, entonces:

$$\begin{aligned} f_{rr} &= (f_x)_r \cos \theta + (f_y)_r \sin \theta \\ &= (f_{xx} \cos \theta + f_{xy} \sin \theta) \cos \theta + (f_{yx} \cos \theta + f_{yy} \sin \theta) \sin \theta \\ &= f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \sin \theta \cos \theta + f_{yy} \sin^2 \theta, \\ f_{\theta\theta} &= -(f_x)_\theta r \sin \theta - f_x r \cos \theta + (f_y)_\theta r \cos \theta - f_y r \sin \theta \\ &= -(-f_{xx} r \sin \theta + f_{xy} r \cos \theta)r \sin \theta + (-f_{yx} r \sin \theta + f_{yy} r \cos \theta)r \cos \theta \\ &\quad - r(f_x \cos \theta + f_y \sin \theta) \\ &= r^2 f_{xx} \sin^2 \theta - 2r^2 f_{xy} \sin \theta \cos \theta + r^2 f_{yy} \cos^2 \theta - r f_r \end{aligned}$$

Al sumar la primera con r^{-2} veces la segunda, se obtiene una combinación elegante:

$$f_{rr} + r^{-2} f_{\theta\theta} = f_{xx} + f_{yy} - r^{-1} f_r$$

y el resultado sigue, al sumar $r^{-1} f_r$ a los dos lados:

$$\boxed{f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta}.} \quad \diamond$$

El resultado del Ejercicio 2.17 se escribe de esta manera, en notación alemana:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}. \quad (2.22)$$

2.5. La fórmula de Taylor en varias variables

Una función de una variable $t \mapsto g(t)$ se llama **suave** si posee derivadas de cualquier orden: $g'(t)$, $g''(t)$, $g'''(t)$, etcétera. Se dice que una función de dos variables $f(x, y)$ también es *suave* si posee derivadas *parciales* (continuas) de cualquier orden.

La fórmula de Taylor (definida más abajo), una vez declarado un punto de referencia (x_0, y_0) , expresa la función suave $f(x, y)$ en términos de los valores de f y de sus derivadas parciales en el punto (x_0, y_0) .

Para los efectos de los cálculos que siguen, conviene escribir

$$x = x_0 + h, \quad y = y_0 + k$$

empleando los *incrementos* h, k como las variables preferidas en vez de x, y . Por ejemplo, el plano tangente (2.7) a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) , antes escrito en la forma

$$z - z_0 = m_1(x - x_0) + m_2(y - y_0),$$

se puede abreviar como

$$z = z_0 + m_1h + m_2k,$$

donde $m_1 = f_x(x_0, y_0)$, $m_2 = f_y(x_0, y_0)$, como antes. O bien, con más detalle:

$$z = f(x_0, y_0) + h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0).$$

En esta ecuación de un plano, *el lado derecho es de primer grado en las variables h, k* .

De acuerdo con la discusión en el apartado 2.2, este es el plano que mejor aproxima la función $z = f(x, y)$ cerca del punto (x_0, y_0) . Explícitamente,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = \underbrace{f(x_0, y_0) + h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0)} + R_1f(h, k), \quad (2.23)$$

donde el *resto* $R_1f(h, k)$ es pequeño en comparación con la distancia $\sqrt{h^2 + k^2}$ entre los puntos (x_0, y_0) y $(x_0 + h, y_0 + k)$. [En detalle: $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} R_1f(h, k) / \sqrt{h^2 + k^2} = 0$.]

► Esta fórmula (2.23) expresa el teorema de Taylor hasta primer orden de derivadas. Para mejorar la aproximación, es necesario *agregar un término de segundo orden*, de la forma $ah^2 + 2bhk + ck^2$, cuyos coeficientes a, b, c dependen de las derivadas parciales de f de segundo orden.

Para obtener estas coeficientes, se introduce un artificio que convierte el problema en un asunto de una variable. La recta que pasa por los puntos (x_0, y_0) y $(x_0 + h, y_0 + k)$ se parametriza por una variable $t \in \mathbb{R}$, de modo que sus puntos se nombran $(x_0 + th, y_0 + tk)$ – véase la Figura 2.4.

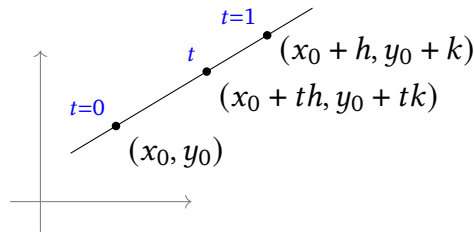


Figura 2.4: Una recta en el plano \mathbb{R}^2

Los valores de $f(x, y)$ en los puntos de la recta definen una función de t , así:

$$g(t) := f(x_0 + th, y_0 + tk), \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

El teorema de Taylor – en una sola variable – es aplicable a esta función, cerca de $t = 0$:

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + R_2g(t), \quad (2.24)$$

donde el resto $R_2g(t)$ obedece $\lim_{t \rightarrow 0} R_2g(t)/t^2 = 0$. (Evidentemente, es posible seguir hasta tercer orden u órdenes superiores.)

Las derivadas de $g(t)$ se calculan mediante la regla de la cadena. Si $x(t) := x_0 + th$, $y(t) := y_0 + tk$, entonces $x'(t) \equiv h$, $y'(t) \equiv k$; y $g(t) = f(x(t), y(t))$, y se sigue que

$$\begin{aligned} g'(t) &= f_x(x(t), y(t)) x'(t) + f_y(x(t), y(t)) y'(t) \\ &= h f_x(x(t), y(t)) + k f_y(x(t), y(t)) \\ &= [h f_x + k f_y](x(t), y(t)). \end{aligned}$$

La derivada de segundo orden usa la regla de la cadena para las funciones f_x , f_y , respectivamente:

$$\begin{aligned} g''(t) &= h [f_{xx}(x(t), y(t)) x'(t) + f_{xy}(x(t), y(t)) y'(t)] \\ &\quad + k [f_{yx}(x(t), y(t)) x'(t) + f_{yy}(x(t), y(t)) y'(t)] \\ &= h^2 f_{xx}(x(t), y(t)) + 2hk f_{xy}(x(t), y(t)) + k^2 f_{yy}(x(t), y(t)) \\ &= [h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}](x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Al evaluar estas expresiones en $t = 0$, se obtiene el teorema de Taylor de segundo orden para f en (x_0, y_0) :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) & \quad (2.25) \\ &= \underline{f(x_0, y_0) + [h f_x + k f_y](x_0, y_0) + \frac{1}{2} [h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}](x_0, y_0)} + R_2f(h, k), \end{aligned}$$

donde el resto $R_2f(h, k)$ es pequeño en comparación con $(h^2 + k^2)$; en otras palabras: $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} R_2f(h, k)/(h^2 + k^2) = 0$.

► Dejando de lado la estimación del resto R_2f , es oportuno enfocar el cálculo de los términos de segundo orden. Estos se pueden escribir en una notación matricial, así:

$$\begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}.$$

Esta matriz merece una notación y un nombre especiales:¹⁴

$$\underline{Hf}(x, y) := \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

es la **matriz hessiana** de la función f . Nótese bien que ésta es una *matriz simétrica*, en virtud de la igualdad $f_{xy} = f_{yx}$.

Ejemplo 2.18. Obtener el desarrollo de Taylor hasta segundo orden de la función $f(x, y) := e^{2x+3y}$, alrededor del origen $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

La fórmula de Taylor de f en el origen, según (2.25), es

$$f(h, k) = f(0, 0) + [h f_x + k f_y](0, 0) + \frac{1}{2} [h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}](0, 0) + R_2f(h, k).$$

Es claro que $f(0, 0) = e^0 = 1$. Las derivadas parciales de f , hasta segundo orden, son:

$$\begin{aligned} f_x &= 2 e^{2x+3y}, & f_y &= 3 e^{2x+3y}, \\ f_{xx} &= 4 e^{2x+3y}, & f_{xy} &= 6 e^{2x+3y}, & f_{yy} &= 9 e^{2x+3y}. \end{aligned}$$

Al evaluarlas en $(0, 0)$, se obtiene:

$$f_x \mapsto m_1 = 2, \quad f_y \mapsto m_2 = 3; \quad f_{xx} \mapsto 4, \quad f_{xy} \mapsto 6, \quad f_{yy} \mapsto 9.$$

Entonces

$$e^{2h+3k} = 1 + (2h + 3k) + \frac{1}{2}(4h^2 + 12hk + 9k^2) + R_2f(h, k).$$

Si se quiere usar las variables usuales (x, y) en vez de (h, k) , esto se escribe así:

$$e^{2x+3y} = 1 + 2x + 3y + 2x^2 + 6xy + \frac{9}{2}y^2 + R_2f(x, y). \quad \diamond$$

Si se quiere seguir el desarrollo de Taylor *hasta tercer orden*, es cuestión de ampliar la expansión (2.24):

$$g(t) = g(0) + g'(0) t + \frac{1}{2} g''(0) t^2 + \frac{1}{6} g'''(0) t^3 + R_3g(t),$$

y convertir la tercera derivada $g'''(t)$ con la regla de la cadena, como antes. Resulta:

$$g'''(t) = [h^3 f_{xxx} + 3h^2k f_{xxy} + 3hk^2 f_{xyy} + k^3 f_{yyy}](x(t), y(t)).$$

¹⁴El matemático alemán Otto Hesse (1811-1874) lo empleó en sus trabajos a partir de 1844.

La expansión (2.25) se modifica de esta manera:

$$R_2 f(h, k) \mapsto +\frac{1}{6} [h^3 f_{xxx} + 3h^2 k f_{xxy} + 3hk^2 f_{xyy} + k^3 f_{yyy}] (x_0, y_0) + R_3 f(h, k).$$

(Los coeficientes para las derivadas parciales superiores de f se toman del triángulo de Pascal.)

► Para funciones de tres variables, el teorema de Taylor funciona de igual manera. Hasta primer orden, se puede escribir:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) &= f(x_0, y_0, z_0) + h f_x(x_0, y_0, z_0) + k f_y(x_0, y_0, z_0) + l f_z(x_0, y_0, z_0) + R_1 f(h, k, l) \\ &= f(x_0, y_0, z_0) + [h f_x + k f_y + l f_z] (x_0, y_0, z_0) + R_1 f(h, k, l). \end{aligned}$$

La fórmula de Taylor, hasta segundo orden, es la que sigue:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) &= f(x_0, y_0, z_0) + [h f_x + k f_y + l f_z] (x_0, y_0, z_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} [h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + 2hl f_{xz} + k^2 f_{yy} + 2kl f_{yz} + l^2 f_{zz}] (x_0, y_0, z_0) + R_2 f(h, k, l). \end{aligned}$$

El hessiano $\underline{H}f(x, y, z)$ es la matriz 3×3 que aparece en la expresión:

$$\begin{bmatrix} h & k & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \\ l \end{bmatrix} = h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + 2hl f_{xz} + k^2 f_{yy} + 2kl f_{yz} + l^2 f_{zz}.$$

Ejemplo 2.19. Obtener el desarrollo de Taylor hasta segundo orden, en el punto $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, de la función

$$f(x, y, z) := \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z).$$

Nótese, en primer lugar, que $f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 1 + 1 + 1 - (-1) = 4$, usando la identidad conocida $\sin(\frac{3\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$.

El gradiente de f y su valor en el punto dado son

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} (x, y, z) = \begin{bmatrix} \cos x - \cos(x + y + z) \\ \cos y - \cos(x + y + z) \\ \cos z - \cos(x + y + z) \end{bmatrix}, \quad \vec{\nabla} f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El término de primer orden en el desarrollo de Taylor es entonces $(0h + 0k + 0l) = 0$.

Sin embargo, el término de segundo orden no es cero:

$$Hf(x, y, z) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x + y + z) & \operatorname{sen}(x + y + z) & \operatorname{sen}(x + y + z) \\ \operatorname{sen}(x + y + z) & -\operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y + z) & \operatorname{sen}(x + y + z) \\ \operatorname{sen}(x + y + z) & \operatorname{sen}(x + y + z) & -\operatorname{sen} z + \operatorname{sen}(x + y + z) \end{bmatrix},$$

Al evaluar esta matriz en el punto $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, se obtiene

$$Hf\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Luego, el término de segundo orden del desarrollo de Taylor es

$$\frac{1}{2}[-2h^2 - 2hk - 2hl - 2k^2 - 2kl - 2l^2].$$

Cambiando las letras $(h, k, l) \mapsto (x, y, z)$, se obtiene el desarrollo deseado:

$$f\left(\frac{\pi}{2} + x, \frac{\pi}{2} + y, \frac{\pi}{2} + z\right) = 4 - x^2 - xy - xz - y^2 - yz - z^2 + R_2f(x, y, z). \quad \diamond$$

Diferenciales y jacobianos

Una última forma de enfocar la regla de la cadena es la siguiente. Cabe recordar las fórmulas, en notación alemana, para dos casos anteriores:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \tag{2.12c'}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \tag{2.16b'}$$

Ahora es posible unificar los dos casos, multiplicando *formalmente* por los “denominadores” dt y ∂u , respectivamente, para obtener la expresión:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

o más simplemente:

$$\boxed{df = f_x dx + f_y dy.} \tag{2.27}$$

Esta expresión se llama la **diferencial** de la función $f(x, y)$. Es una forma abreviada de las ecuaciones citadas, que podría llamarse: *la regla de la cadena para ejecutivos*.

Entre otras cosas, la diferencial proporciona el término de primer grado de la fórmula de Taylor (2.23), al ser evaluado en el punto (x_0, y_0) :

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy = m_1 dx + m_2 dy,$$

si ahora se denotan los *incrementos* en las dos variables por $dx = h$, $dy = k$.

Esta clase de expresiones será particularmente útil más adelante, al considerar dx y dy – y eventualmente df – como “colas de integración” para funciones de dos variables.

Para una función de tres variables $F(x, y, z)$, hay expresiones análogas:

$$dF = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

que también pueden ser evaluados en un punto (x_0, y_0, z_0) :

$$dF(x_0, y_0, z_0) = A dx + B dy + C dz$$

donde $dx = h$, $dy = k$, $dz = l$ son los incrementos en las tres variables.

► Para procesar los términos de segundo orden en la fórmula de Taylor, se puede introducir una “diferencial cuadrática”, como sigue:

$$\underline{d^2 f} = f_{xx} dx^2 + 2f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2. \quad (2.28)$$

Entonces la fórmula de Taylor (2.25) se puede abreviar como sigue:

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0) + R_2 f(dx, dy).$$

► Antes de dejar el tema de cambios de variables, es importante *considerar el cambio inverso* en los casos en donde el cambio es *reversible*:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{array} \right\}. \quad (2.29)$$

Por ejemplo, se puede cambiar coordenadas polares a cartesianas y viceversa:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(y/x) \end{array} \right\}. \quad (2.30)$$

Fíjese bien que el segundo cambio no está definido cuando $x = 0$, es decir, en el eje y de \mathbb{R}^2 . De hecho, la función $\operatorname{arc} \operatorname{tg}$ produce ángulos solamente en el rango $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, lo cual corresponde a puntos (x, y) con $x > 0$ (los cuadrantes primero y cuarto): entonces el cambio de polares a cartesianos sólo es reversible en este semiplano¹⁵ con $x > 0$.

¹⁵En el semiplano con $x < 0$, es necesario usar una fórmula diferente para el cambio $(x, y) \mapsto (r, \theta)$; esa sería $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg}(y/x)$, de modo que ahora $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$. Esta fórmula es correcta porque $\operatorname{tg}(\pi + \theta) = \operatorname{tg} \theta$ para todo θ .

Usando los métodos de derivación implícita, se puede derivar el primer par de fórmulas en (2.29) con respecto a x y luego con respecto a y . La regla de la cadena produce cuatro igualdades:

$$\begin{cases} 1 = x_u u_x + x_v v_x \\ 0 = y_u u_x + y_v v_x \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 0 = x_u u_y + x_v v_y \\ 1 = y_u u_y + y_v v_y \end{cases}.$$

Estas igualdades tiene una mejor presentación como un producto de matrices 2×2 :

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que las entradas de la primera matriz son las cuatro derivadas parciales del primer cambio en (2.29); mientras que las entradas de la segunda matriz son las cuatro derivadas parciales del segundo cambio. Al lado derecho se ve la matriz identidad 2×2 .

De ahí se concluye que *para un cambio de variable reversible*, las matrices de sus derivadas parciales son matrices inversas:

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}.$$

Invocando de nuevo la fórmula para una matriz inversa 2×2 ,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

se ve que el análogo de $(ad - bc)$ para la matriz inversa es:

$$\frac{d}{ad - bc} \frac{a}{ad - bc} - \frac{-b}{ad - bc} \frac{-c}{ad - bc} = \frac{ad - bc}{(ad - bc)^2} = \frac{1}{ad - bc}.$$

Esta cantidad $ad - bc$ se llama el **determinante**¹⁶ de la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Se escribe:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \equiv \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} := ad - bc.$$

Dos matrices inversas tienen determinantes recíprocos. Entonces:

$$u_x v_y - u_y v_x = \frac{1}{x_u y_v - x_v y_u}, \quad x_u y_v - x_v y_u = \frac{1}{u_x v_y - u_y v_x}. \quad (2.31a)$$

Estas combinaciones de derivadas parciales se llaman **jacobianos** de los cambios de variable (2.29).

Explícitamente, $(x_u y_v - x_v y_u)$ es el jacobiano del primer cambio; $(u_x v_y - u_y v_x)$ es el jacobiano del segundo cambio.

¹⁶Porque *determina* si la matriz es invertible o no: si fuera $ad - bc = 0$, la matriz no tendría inversa.

En el formato alemán, un jacobiano tiene una notación especial:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}.$$

La relación recíproca (2.31a) entre los jacobianos de cambios inversos se escribe así:

$$\boxed{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1 \left/ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right.}. \quad (2.31b)$$

Ejemplo 2.20. El jacobiano del cambio (2.30) de coordenadas polares a cartesianas es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \operatorname{sen}^2 \theta = r. \quad (2.32)$$

El jacobiano recíproco se puede calcular directamente de (2.30):

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

y por ende

$$\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{-y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r}.$$

En el cálculo, se nota que $\partial(x, y)/\partial(r, \theta)$ es una función de las variables (r, θ) ; mientras que $\partial(r, \theta)/\partial(x, y)$ es una función de las otras variables (x, y) . Entonces, para verificar la igualdad (2.31b), es necesario identificar los dos lados mediante las fórmulas de cambio originales. \diamond

2.6. Máximos y mínimos

El cálculo diferencial en varias variables se utiliza para resolver muchas *problemas de optimización*: dada una función $f(x, y)$, por ejemplo, se busca aquellos puntos (x_0, y_0) en donde $f(x_0, y_0)$ alcanza un *valor máximo* [o *valor mínimo*, dependiendo de los requerimientos del problema planteado]. Tales **máximos** de la función f son de tres tipos:

- ◊ **locales** o *relativos*, si $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para todo punto (x, y) cerca de (x_0, y_0) ;
- ◊ **absolutos**, si $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para (x, y) en una determinada región R del plano;
- ◊ **ligados**, si este valor máximo de f esta sujeta a algunas *restricciones o ligaduras*.

De modo similar, se separan los posibles valores **mínimos** de f en tipos locales, absolutos o ligados.

Puntos críticos y su clasificación

El caso más simple es el de una función de varias variables sin condiciones sobre su dominio: se buscan los máximos o mínimos locales de $f(x, y)$ o de $h(x, y, z)$. Se supondrá que dichas funciones son suaves (o al menos, que tienen derivadas parciales continuas hasta segundo orden).

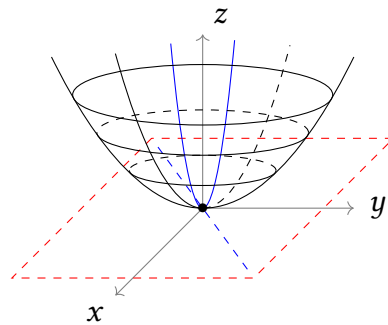


Figura 2.5: Plano tangente horizontal el punto mínimo de $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$

Ejemplo 2.21. Considérese el paraboloide elíptico (Ejemplo 1.1). Esta es la superficie $x^2 + y^2 = 4z$, o bien $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$. Un corte por el plano vertical $x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0$ es una *parábola* con un mínimo en el origen $(0, 0, 0)$. En efecto, esta curva está parametrizada por $t \mapsto (t \cos \alpha, t \sin \alpha, \frac{1}{4}t^2)$; aquí α es un ángulo fijo.

La recta tangente a esa parábola en $(0, 0, 0)$ es $x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0, z = 0$, una *recta horizontal*. (Véase la Figura 2.5.) La pendiente vertical del esa recta tangente, que es igual a 0, no es otra cosa que la derivada direccional de $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ en $(x, y) = (0, 0)$, en la dirección $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Como eso ocurre cualquiera que sea el ángulo α que define esa dirección, se deduce que *el plano tangente en $(0, 0, 0)$ es horizontal*. \diamond

La moraleja del Ejemplo 2.21 debe ser obvio: si $z_0 = f(x_0, y_0)$ es un mínimo local de una función suave $f(x, y)$, entonces *el plano tangente* a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) *es horizontal*. Y sucede lo mismo con máximos locales.¹⁷

Esto significa que $m_1 = f_x(x_0, y_0) = 0$ y $m_2 = f_y(x_0, y_0) = 0$ puesto que el plano tangente horizontal es simplemente $z = z_0$.

► Se dice que (x_0, y_0) es un **punto crítico** de una función diferenciable $f(x, y)$ si:

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0. \tag{2.33a}$$

¹⁷Este fenómeno fue observado en 1628 por Pierre de Fermat: cerca de un valor máximo o mínimo, los incrementos verticales son despreciables en comparación con los incrementos horizontales.

De igual manera, (x_0, y_0, z_0) es un **punto crítico** de una función diferenciable $f(x, y, z)$ si $f_x(x_0, y_0, z_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0, z_0) = 0$, $f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$; o bien, lo que es lo mismo, si

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0). \tag{2.33b}$$

Ejemplo 2.22. Hallar los puntos críticos de $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$.

Se trata de resolver el par de ecuaciones (2.33a) para (x_0, y_0) . [Para aliviar los cálculos, se puede suprimir los subíndices hasta encontrar las soluciones.]

$$\begin{cases} f_x = y - 2x - 2 = 0 \\ f_y = x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y - 2x = 2 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

y entonces,¹⁸ restando las ecuaciones, $3x - 3y = 0$; por eso, $x = y$ y a la vez $x - 2x = 2$; se concluye que $(x, y) = (-2, -2)$ es el *único* punto crítico.

Aquí $z_0 = f(-2, -2) = 4 - 4 - 4 + 4 + 4 + 4 = 8$. El plano tangente a $z = f(x, y)$ en el punto $(-2, -2, 8)$ es $z = 8$, horizontal.

Ahora hay que preguntar: ¿ese 8 es un máximo valor o un mínimo valor de $f(x, y)$? \diamond

Ejemplo 2.23. El plano tangente a la superficie $z = xy$ en el origen $(0, 0, 0)$ es horizontal, pero el valor $z_0 = 0$ no es un máximo local ni tampoco un mínimo local.

Esto es evidente, aun sin dibujar la superficie, porque en dos cuadrantes del plano xy vale $z > 0$ [en el primer cuadrante $x > 0, y > 0$; o en el tercer cuadrante $x < 0, y < 0$] mientras que en los otros dos cuadrantes vale $z < 0$ [en el segundo cuadrante $x < 0, y > 0$; o en el cuarto cuadrante $x > 0, y < 0$]. Por lo tanto: cerca de $(x_0, y_0) = (0, 0)$ hay valores positivos y negativos de z .

Lo que sucede es que en el punto $(0, 0, 0)$ *el plano tangente $z = 0$ cruza la superficie* en vez de quedar localmente encima (el caso de un máximo local) o localmente por debajo (el caso de un mínimo local) de la superficie. Se dice que el punto crítico $(0, 0)$ es un **punto de ensilladura** (a veces, un *punto de silla*) de la función $f(x, y) := xy$. \diamond

► Se puede discriminar entre los tres tipos de punto crítico con la ayuda del término de segundo orden en el desarrollo de Taylor. Cuando $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$, ese desarrollo (2.25) se simplifica en:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} [h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}] (x_0, y_0) + R_2 f(h, k).$$

Si la cantidad $(h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy})$ es *positiva* para cualquier $(h, k) \neq (0, 0)$, esto significa que al valor $f(x_0, y_0)$ se estará sumando algo positivo y la altura del grafo

¹⁸En principio, se puede usar métodos de álgebra lineal para resolver este sistema de ecuaciones lineales; pero es más práctico y más rápido resolverlo “a pie”.

$f(x_0 + h, y_0 + k)$ será mayor. En tal caso, el valor $f(x_0, y_0)$ es un **mínimo local** de la función f .

Análogamente, si $(h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}) < 0$ para $(h, k) \neq (0, 0)$, los puntos alrededor de (x_0, y_0, z_0) tienen menor altura: el valor $f(x_0, y_0)$ es un **máximo local** de f .

En cambio, cuando $(h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy})$ toma algunos valores positivos o otros valores negativos cerca de (x_0, y_0) , el plano tangente horizontal en (x_0, y_0, z_0) cruza la superficie, y el punto (x_0, y_0) es un **punto de ensilladura**.

Ejemplo 2.24. Clasificar los puntos críticos de $f(x, y) := \underline{2x - x^2 + 2y^2 - y^4}$.

Las derivadas parciales de primer orden son

$$f_x = 2 - 2x, \quad f_y = 4y - 4y^3.$$

Para obtener los puntos críticos, se colocan estas iguales a cero:

$$\begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ 4y - 4y^3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 0, \pm 1 \end{cases} \implies (x, y) = \begin{cases} (1, 0) \\ (1, 1) \\ (1, -1) \end{cases}$$

y por ende hay exactamente tres puntos críticos. Es necesario analizarlos casos por caso. En primer lugar, se calcula la matriz hessiana:

$$f_{xx} = -2, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = 4 - 12y^2; \quad Hf(x, y) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 - 12y^2 \end{bmatrix}.$$

◊ En $(1, 1)$, es $Hf(1, 1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$, con lo cual

$$(h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy})(1, 1) = -2h^2 - 8k^2 < 0 \quad \text{para } (h, k) \neq (0, 0).$$

Además, $f(1, 1) = 2$. El punto crítico $(1, 1)$ es un máximo local.

◊ En $(1, -1)$, sucede lo mismo: se obtiene $-2h^2 - 8k^2 < 0$, así que $(1, -1)$ es otro máximo local.

◊ En $(1, 0)$, se obtiene $Hf(1, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Ahora $(-2h^2 + 4k^2)$ toma valores positivos y negativos cerca de $(0, 0)$, porque $(h, 0) \mapsto -2h^2 < 0$ mientras $(0, k) \mapsto 4k^2 > 0$. Aquí $f(1, 0) = 1$; y $(1, 0)$ es un punto de ensilladura. ◊

Si $f_{xy}(x_0, y_0) = 0$, como en el Ejemplo 2.24 anterior, los signos de f_{xx} y f_{yy} en el punto crítico indican su clase. En general, la clasificación se rige por el siguiente *criterio*.

Criterio 2.25. La clase de un punto crítico (x_0, y_0) de una función dos veces diferenciable $f(x, y)$ se rige por los signos de los dos números:

$$\underline{D}_1 := \underline{f}_{xx}(x_0, y_0), \quad \underline{D}_2 := \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}(x_0, y_0) = \underline{(f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2)}(x_0, y_0). \quad (2.34)$$

Se distinguen cuatro casos:

- (a) Si $D_2 > 0$ y $D_1 > 0$, entonces (x_0, y_0) es un mínimo local.
- (b) Si $D_2 > 0$ y $D_1 < 0$, entonces (x_0, y_0) es un máximo local.
- (c) Si $D_2 < 0$, entonces (x_0, y_0) es un punto de ensilladura.
- (d) Si $D_2 = 0$, mala suerte: el criterio no decide la clase del punto crítico.¹⁹

Nótese que D_2 es el determinante de la matriz hessiana, $D_2 = \det Hf(x_0, y_0)$.

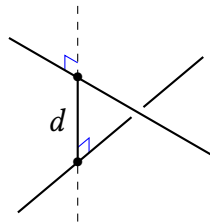


Figura 2.6: La perpendicular común a dos rectas sesgadas

Ejemplo 2.26. Encontrar la distancia entre las dos rectas sesgadas

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 2x \\ z = 5x \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 3x + 7 \\ z = x \end{array} \right\}.$$

Cuando dos rectas en el espacio \mathbb{R}^3 no se cortan ni son paralelas, resulta que hay exactamente un segmento de recta con un extremo en cada recta que es perpendicular a las dos [Figura 2.6]. La longitud d de este segmento es la *distancia* entre las rectas. Para hallarla, se puede tomar dos puntos *cualesquiera*, una en cada recta, calcular la distancia entre ellos, y minimizar esa distancia.

En primer lugar, es necesario expresar las rectas en forma paramétrica. En este ejemplo, la primer recta es $\vec{r}_1(s) = (s, 2s, 5s)$ y la segunda es $\vec{r}_2(t) = (t, 3t + 7, t)$.

¹⁹En el caso (d), a veces se oye la frase ridícula: “no hay criterio”. Criterio sí hay, es sólo que en este caso no aporta información.

Defínase la función de los dos parámetros:

$$\begin{aligned} f(s, t) &:= \|\vec{r}_1(s) - \vec{r}_2(t)\|^2 \\ &= (s - t)^2 + (2s - 3t - 7)^2 + (5s - t)^2 \\ &= 30s^2 - 24st + 11t^2 - 28s - 42t + 49. \end{aligned}$$

[[Es más práctico minimizar el *cuadrado* de la distancia que la distancia misma.]]

Ahora se calcula los puntos críticos de esa función $f(s, t)$:

$$\begin{cases} f_s = 60s - 24t - 28 = 0 \\ f_t = -24s + 22t - 42 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 15s - 6t = 7 \\ -12s + 11t = 21 \end{cases}.$$

Este sistema de ecuaciones lineales se resuelve por una inversión de matrices:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -12 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ t_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 7 \\ 21 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} s_0 \\ t_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{93} \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 12 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 21 \end{bmatrix} = \frac{1}{93} \begin{bmatrix} 203 \\ 399 \end{bmatrix} \\ &\implies s_0 = \frac{203}{93}, \quad t_0 = \frac{133}{31}. \end{aligned}$$

De ese modo hay un único punto crítico, que por la naturaleza del problema debe ser un mínimo local (y absoluto).

Pero conviene verificar que cumple el criterio de la segunda derivada. Se ve que

$$f_{ss} = 60, \quad f_{st} = -24, \quad f_{tt} = 22,$$

(estos son funciones constantes); y esto implica que

$$D_1 = \underline{60} > 0, \quad D_2 = (60)(22) - (-24)^2 = 1320 - 576 = \underline{744} > 0.$$

Luego, el punto crítico $(\frac{203}{93}, \frac{133}{31})$ pertenece al caso (a) del criterio; este es efectivamente un *mínimo local*.

La distancia buscada está dada por²⁰

$$d^2 = f\left(\frac{203}{93}, \frac{133}{31}\right) = \left(-\frac{196}{93}\right)^2 + \left(-\frac{1442}{93}\right)^2 + \left(\frac{616}{93}\right)^2 = \left(\frac{14}{93}\right)^2 (14^2 + 103^2 + 44^2),$$

y como $14^2 + 103^2 + 44^2 = 12741$, se obtiene $d = \frac{14}{93}\sqrt{12741}$. ◇

[[De igual manera, se clasifican los puntos de una función $f(x, y, z)$ de tres variables por los posibles signos del término de segundo orden en el desarrollo de Taylor. Se obtiene un mínimo local si la matriz hessiana $Hf(x_0, y_0, z_0)$ es *definida positiva*: esto dice

²⁰Sería fácil obtener una aproximación decimal al resultado, pero eso es irrelevante: la expresión obtenida es el valor *exacto* de d .

que si $\vec{v} = (h, k, l) \neq \vec{0}$, entonces $\vec{v} \cdot Hf(x_0, y_0, z_0) \vec{v} > 0$. Resulta un máximo local si esa matriz es definida negativa; y un punto de ensilladura si la matriz hessiana es invertible pero indefinida. Y si dicha matriz no es invertible, la clase del punto crítico sigue siendo ambigua. Para un análisis completo de la situación, se requiere usar álgebra lineal. En resumidas cuentas, se debe calcular tres determinantes:

$$D_1 := f_{xx}(x_0, y_0, z_0), \quad D_2 := \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}(x_0, y_0, z_0), \quad D_3 := \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}(x_0, y_0, z_0).$$

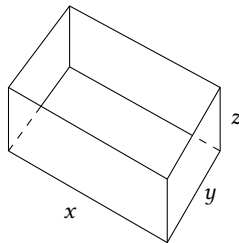
Los cuatro casos se reparten así:

- (a) Mínimo local: $D_3 > 0, D_2 > 0, D_1 > 0$.
- (b) Máximo local: $D_3 < 0, D_2 > 0, D_1 < 0$.
- (c) Punto de ensilladura: los otros casos con $D_3 \neq 0$.
- (d) Sin decisión: si $D_3 = 0$.

Si la matriz hessiana $Hf(x_0, y_0, z_0)$ es diagonal, con entradas diagonales $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, esto es equivalente a las condiciones: (a) cada $\lambda_i > 0$; (b) cada $\lambda_i < 0$; (c) cada $\lambda_i \neq 0$ pero con signos diversos; (d) algún $\lambda_i = 0$.]]

Extremos absolutos en regiones con borde

En aplicaciones prácticas, se requiere obtener un máximo o mínimo *absoluto* de una función de varias variables *en un dominio* del plano o del espacio *limitado por un borde*. El valor extremo buscado puede ocurrir o bien en el interior del dominio – en cuyo caso se trata de un punto crítico – o bien en el borde, que requiere un análisis caso por caso.



Ejemplo 2.27. Determinar la caja rectangular, sin tapa, de mayor volumen que se puede construir con una lámina de 12 m^2 de madera. (Se desprecia el grosor de la lámina.)

Sean x, y, z las dimensiones (en metros) de la caja deseada.

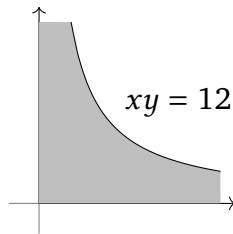
El fondo tiene área xy , los lados verticales tiene áreas xz, yz (dos de cada tipo). Se debe maximizar el volumen $V = xyz$ donde el área total es:

$$xy + 2xz + 2yz = 12.$$

Se puede despejar $z = (12 - xy)/(2x + 2y)$. El problema entonces se replantea así:

◇ Maximizar $f(x, y) := \frac{xy(12 - xy)}{2(x + y)}$ donde $x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 12$.

(La condición $xy \leq 12$ expresa la limitación física $z \geq 0$.)



Primero se buscan los puntos críticos de f en el interior: $x > 0, y > 0, xy < 12$:

$$f_x = \frac{y^2(12 - x^2 - 2xy)}{2(x + y)^2}, \quad f_y = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2}.$$

Para que $f_x = 0$ y $f_y = 0$, los numeradores deben ser ceros:

$$\begin{cases} 12 - x^2 - 2xy = 0 \\ 12 - 2xy - y^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 12 - x^2 - 2xy = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 12 - 3x^2 = 0 \\ x = y > 0 \end{cases}.$$

[[De la ecuación $x^2 = y^2$ se deduce $x = \pm y$, pero por ser $x > 0, y > 0$, se descarta la posibilidad $x = -y$.]] De ahí, $(x_0, y_0) = (2, 2)$ es el único punto crítico en el interior de la región factible. Fíjese que $f(2, 2) = 32/8 = 4$.

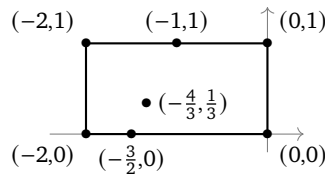
Ahora bien: el borde de la región consiste de las semirrectas (los ejes x, y positivos) y una rama de la hipérbola $xy = 12$. En ese borde se cumple una de las condiciones $x = 0$ ó $y = 0$ ó $xy = 12$; y en esos tres casos, vale $f(x, y) = 0$. [[Eso debe ser obvio: si $x = 0$ ó $y = 0$ ó $z = 0$, la caja tendría volumen 0.]]

Entonces el valor $f(2, 2) = 4$ es un *máximo absoluto*: una caja de $2 \text{ m} \times 2 \text{ m} \times 1 \text{ m}$, con volumen 4 m^3 . ◇

Ejemplo 2.28. Determinar y clasificar los extremos de la función

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1,$$

definida en el rectángulo $-2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1$.



El rectángulo en cuestión tiene un borde que consiste de cuatro segmentos de recta. Primero se debe obtener los puntos críticos *en el interior*: $-2 < x < 0$, $0 < y < 1$.

Las derivadas parciales de primer orden son:

$$f_x = 2x - y + 3, \quad f_y = -x + 2y - 2.$$

Al resolver las ecuaciones $f_x = 0$, $f_y = 0$:

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -x + 2y = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 2x + 3 \\ 3x + 6 = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -4/3 \\ y = 1/3 \end{cases},$$

se obtiene un único punto crítico $(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$, que efectivamente pertenece al interior del rectángulo. Al evaluar f en ese punto, se obtiene $f(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} - 4 - \frac{2}{3} + 1 = -\frac{4}{3}$.

En los segmentos del borde, se plantean problemas de optimización en una variable:

- ◇ Sea $g(x) := f(x, 0) = x^2 + 3x + 1$ para $-2 < x < 0$. Como $g'(x) = 2x + 3 = 0$ solo si $x = -\frac{3}{2}$, el punto $(-\frac{3}{2}, 0)$ es un posible extremo de $f(x, y)$. Nótese que $f(-\frac{3}{2}, 0) = g(-\frac{3}{2}) = -\frac{5}{4}$.
- ◇ Sea $h(x) := f(x, 1) = x^2 + 2x$ para $-2 < x < 0$. Como $h'(x) = 2x + 2 = 0$ solo si $x = -1$, el punto $(-1, 1)$ es un posible extremo de $f(x, y)$. Nótese que $f(-1, 1) = h(-1) = -1$.
- ◇ Sea $k(y) := f(0, y) = y^2 - 2y + 1$ para $0 < y < 1$. Como $k'(y) = 2y - 2 = 0$ solo si $y = 1$, fuera de este intervalo abierto, este caso no aporta un posible extremo de f .
- ◇ Sea $l(y) := f(-2, y) = y^2 - 1$ para $0 < y < 1$. Como $l'(y) = 2y = 0$ solo si $y = 0$, fuera del intervalo abierto designado, este caso tampoco aporta extremos de f .

Finalmente, se debe considerar los valores de f en las cuatro esquinas del rectángulo:

$$f(-2, 0) = -1, \quad f(0, 0) = 1, \quad f(-2, 1) = 0, \quad f(0, 1) = 0.$$

Los posibles valores extremos de f son, entonces: $-\frac{4}{3}$, $-\frac{5}{4}$, -1 , 0 , 1 (ordenados de menor a mayor). Entonces el *mínimo absoluto* de f es $-\frac{4}{3}$, en el punto crítico $(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$; mientras que el *máximo absoluto* de f es 1 , en la esquina $(0, 0)$. ◇

Extremos ligados, multiplicadores de Lagrange

A veces se plantea la necesidad de encontrar un extremo de una función de varias variables, sujeta a una o más *restricciones* o **ligaduras**, dadas por ecuaciones en términos de esos mismos variables.

Hay un procedimiento general,²¹ debido a Lagrange, para analizar esa clase de problemas. Si se quiere optimizar (esto es, maximizar o minimizar, dependiendo del caso) una función $f(x, y, z)$ sujeta a la ligadura $g(x, y, z) = 0$, en el punto óptimo los gradientes $\vec{\nabla}f(x_0, y_0, z_0)$ y $\vec{\nabla}g(x_0, y_0, z_0)$ deben ser paralelos. Si se debe cumplir otra ligadura $h(x, y, z) = 0$ también, es necesario que $\vec{\nabla}f(x_0, y_0, z_0)$ sea una combinación lineal de los dos gradientes $\vec{\nabla}g(x_0, y_0, z_0)$ y $\vec{\nabla}h(x_0, y_0, z_0)$.

Para simplificar el procedimiento, se introduce la llamada **función de Lagrange**:

$$L(x, y, z, \lambda) := f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z), \quad (2.35a)$$

o bien

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) := f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z). \quad (2.35b)$$

Los coeficientes λ , o bien λ y μ , de las ligaduras deben elegirse para que se cumpla la condición estipulada sobre los gradientes. Entonces λ (y μ , si lo hubiera) se consideran nuevas variables – que solo aparecen en primer grado.

El valor óptimo ocurre en un punto crítico de la función de Lagrange: se busca un vector $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$, o bien $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)$, en donde $\vec{\nabla}L = \vec{0}$.

Ejemplo 2.29. Obtener los valores máximo y mínimo de la cantidad $4x + 3y$ en el círculo $x^2 + y^2 = 25$ del plano \mathbb{R}^2 .

Aquí sólo hay dos variables originales y una ligadura. La ligadura debe expresarse en el formato $g(x, y) = 0$, en este caso sería $x^2 + y^2 - 25 = 0$. La función de Lagrange es

$$L(x, y, \lambda) := 4x + 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 25).$$

Sus derivadas parciales (con respecto a las variables x, y, λ) son

$$L_x = 4 + 2\lambda x, \quad L_y = 3 + 2\lambda y, \quad L_\lambda = x^2 + y^2 - 25.$$

Las condiciones $L_x = L_y = 0$ permiten eliminar λ :

$$\frac{4}{x} = \frac{3}{y} = -2\lambda,$$

así que vale $4y = 3x$ en los puntos críticos. *La tercera condición $L_\lambda = 0$ es simplemente la ligadura $x^2 + y^2 = 25$.*

²¹Para la justificación de este método de Lagrange, véase el apartado § 14.8 del libro de Stewart.

Al eliminar y con $y = 3x/4$, se obtiene²²

$$x^2 + \frac{9x^2}{16} = 25, \quad \text{o bien} \quad x^2 = 16, \quad \text{de donde} \quad \underline{x = \pm 4}.$$

Usando $y = 3x/4$ se obtiene $y = \pm 3$, así que hay dos **puntos críticos ligados**:

$$(x_0, y_0) = (4, 3) \quad \text{y también} \quad (x_0, y_0) = (-4, -3).$$

[[Fíjese que $\lambda = -\frac{1}{2}$ en $(4, 3)$ mientras $\lambda = +\frac{1}{2}$ en $(-4, -3)$.]]

Los valores extremos de $f(x, y) := 4x + 3y$ entonces son $f(4, 3) = 25$ (máximo) y $f(-4, -3) = -25$ (mínimo). \diamond

Ejemplo 2.30. Optimizar $x + y + z$ bajo la restricción $xyz = 1$.

Nótese que este enunciado es ambiguo, pues no especifica si se busca un valor máximo o un valor mínimo. Por ahora, será mejor admitir ambas posibilidades: se requiere “optimizar” $f(x, y, z) := x + y + z$ bajo la ligadura $xyz - 1 = 0$.

Como hay tres variables originales y una ligadura, la función de Lagrange es

$$L(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(xyz - 1).$$

Sus derivadas parciales son:

$$L_x = 1 + \lambda yz,$$

$$L_y = 1 + \lambda xz,$$

$$L_z = 1 + \lambda xy,$$

$$L_\lambda = xyz - 1.$$

Las condiciones $L_x = L_y = L_z = 0$ implican que

$$yz = xz = xy \quad [= -1/\lambda];$$

por lo tanto, $x = y = z$. La condición $L_\lambda = 0$, la cual es la ligadura original $xyz = 1$, implica que $x^3 = 1$ y por ende $x = 1$; y por consiguiente, $x = y = z = 1$. Por lo tanto, el *único* punto crítico ligado es $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$.

Al usar $L_x = 0$ de nuevo, se deduce que $1 + \lambda = 0$, de donde $\lambda = -1$ para este punto crítico.

El *valor* crítico de $x + y + z$ es $f(1, 1, 1) = 1 + 1 + 1 = 3$. [[Este resulta ser un *mínimo ligado* de f en el primer octante de \mathbb{R}^3 , donde la superficie $xyz = 1$ no contiene puntos con $0 < x + y + z < 3$.]]

²²Se debe recordar que la ecuación cuadrática $x^2 = a^2$ siempre tiene *dos* soluciones, $x = +a$ y $x = -a$.

[[Algunos autores usan el signo opuesto para los multiplicadores de Lagrange. Si se hubiera escrito $L(x, y, z, \lambda) = x + y + z - \lambda(xyz - 1)$ en el ejemplo anterior, de igual manera se llegaría al punto crítico ligado $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$, pero esta vez con $\lambda = +1$. Este cambio de signo en λ no afecta la determinación del punto crítico.]]

Ejemplo 2.31. Encontrar los valores extremos de la función $f(x, y, z) := xyz$ en el círculo $x^2 + y^2 + z^2 = 81$, $x + y + z = 15$.

En este problema, hay dos ligaduras,

$$\begin{cases} g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 81 = 0; \\ h(x, y, z) := x + y + z - 15 = 0. \end{cases}$$

Ellas determinan un *círculo*, por ser la curva de intersección de una esfera con un plano. (Como se verá en breve, este plano sí corta esta esfera en más de un punto.) La función de Lagrange es

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 81) + \mu(x + y + z - 15).$$

Las derivadas parciales son:

$$\begin{aligned} L_x &= yz + 2\lambda x + \mu, \\ L_y &= xz + 2\lambda y + \mu, \\ L_z &= xy + 2\lambda z + \mu, \\ L_\lambda &= x^2 + y^2 + z^2 - 81, \\ L_\mu &= x + y + z - 15. \end{aligned}$$

Al eliminar la variable μ de $L_x = L_y = L_z = 0$, quedan

$$yz + 2\lambda x = xz + 2\lambda y = xy + 2\lambda z \quad [= -\mu].$$

En seguida, se elimina λ de las relaciones

$$\begin{aligned} 2\lambda(x - y) &= xz - yz, \\ 2\lambda(y - z) &= xy - xz, \\ 2\lambda(x - z) &= xy - yz. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Si fuera $x = y = z$, estas relaciones se reducirían a $0 = 0$ y λ quedaría indeterminado. Sin embargo, la relación $x = y = z$ es *incompatible con las ligaduras*: se tendría que aceptar $3x^2 = 81$, $3x = 15$; pero $\sqrt{27} \neq 5$. Resulta, entonces, que *no hay puntos críticos con $x = y = z$* .

Si x, y, z fueran *distintas*, se podría cancelar los factores no nulos $(x - y)$, $(y - z)$, $(x - z)$ en las ecuaciones (2.36), para así obtener $2\lambda = x = y = z$, contraria a la hipótesis de variables distintas.

En cambio, sí hay algunas soluciones con $x = y \neq z$: al dividir la tercera relación de (2.36) por $(x - z)$, se obtiene $2\lambda = y$. Las ligaduras se convierten en

$$2x^2 + z^2 = 81, \quad 2x + z = 15,$$

de donde $2x^2 + (15 - 2x)^2 = 81$ o bien $6x^2 - 60x + 144 = 0$; que admite dos soluciones, $x = 6$ y $x = 4$. De ahí salen dos puntos críticos ligados: $(x_0, y_0, z_0) = (6, 6, 3)$ con $\lambda = 3$, $\mu = -54$ y también $(x_0, y_0, z_0) = (4, 4, 7)$ con $\lambda = 2$, $\mu = -44$.

Al permutar las letras x, y, z (el enunciado del problema es invariante bajo este cambio), se obtienen cuatro puntos críticos más. En total, hay *seis* puntos críticos:

$$(6, 6, 3), \quad (6, 3, 6), \quad (3, 6, 6), \quad (4, 4, 7), \quad (4, 7, 4), \quad (7, 4, 4).$$

Ahora bien, se ve que $f(6, 6, 3) = f(6, 3, 6) = f(3, 6, 6) = 108$, mientras que $f(4, 4, 7) = f(4, 7, 4) = f(7, 4, 4) = 112$. Entonces los primeros tres puntos críticos de L son *mínimos ligados* y los últimos tres son *máximos ligados*. Entre otras cosas, esto comprueba que $108 \leq xyz \leq 112$ en el círculo dado. \diamond

Ejemplo 2.32. Determinar los puntos críticos ligados de $x^3 + y^3 + z^3$ bajo la condición $1/x + 1/y + 1/z = 1$.

La función $f(x, y, z) := x^3 + y^3 + z^3$ está definido en todo el espacio \mathbb{R}^3 , pero la ligadura $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} - 1 = 0$ no tiene sentido en los planos coordenados.²³ Es necesario suponer que $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$.

En este caso, la función de Lagrange es

$$L(x, y, z, \lambda) = x^3 + y^3 + z^3 + \lambda(x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} - 1).$$

Sus derivadas parciales son

$$L_x = 3x^2 - \lambda x^{-2},$$

$$L_y = 3y^2 - \lambda y^{-2},$$

$$L_z = 3z^2 - \lambda z^{-2},$$

$$L_\lambda = x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} - 1.$$

Las igualdades $L_x = L_y = L_z = 0$ permiten eliminar λ ; se obtiene

$$3x^4 = 3y^4 = 3z^4 \quad [= \lambda].$$

Estas ecuaciones conducen a $\pm x = \pm y = \pm z$, con signos no determinados. (El patrón de signos es diferente en cada uno de los ocho octantes, por separado.)

²³Es preferible escribir x^{-1} en vez de $1/x$, etc., para facilitar el cálculo de las derivadas parciales.

Si, por ejemplo, $x = y = z$ con los tres signos iguales, la ligadura se convierte en $3/x = 1$, de donde $x = y = z = 3$ y por tanto $\lambda = 3^5 = 243$. En cambio, si por ejemplo $x = y = -z$, la ligadura es $1/x = 1$, de modo que $(x, y, z) = (1, 1, -1)$ y $\lambda = 3$. Las otras posibilidades para los signos son $x = -y = z$ y también $-x = y = z$. En total, se obtiene cuatro puntos críticos ligados:

$$\begin{aligned} (x_0, y_0, z_0) &= (3, 3, 3), & \text{con } \lambda &= 3^5, \\ (x_0, y_0, z_0) &= (1, 1, -1), & \text{con } \lambda &= 3, \\ (x_0, y_0, z_0) &= (1, -1, 1), & \text{con } \lambda &= 3, \\ (x_0, y_0, z_0) &= (-1, 1, 1), & \text{con } \lambda &= 3. \end{aligned}$$

Nótese que $f(3, 3, 3) = 81$ pero $f(1, 1, -1) = f(1, -1, 1) = f(-1, 1, 1) = 1$. ◇

Ejemplo 2.33. Optimizar $x \log x + y \log y + z \log z$ sujeta a $x + y + z = 6$.

El dominio de la función $f(x, y, z) := x \log x + y \log y + z \log z$ es el primer octante: $x > 0, y > 0, z > 0$, en donde los tres logaritmos (naturales) están definidos. El plano $x + y + z = 6$ corta este octante en un triángulo equilátero (sin borde).

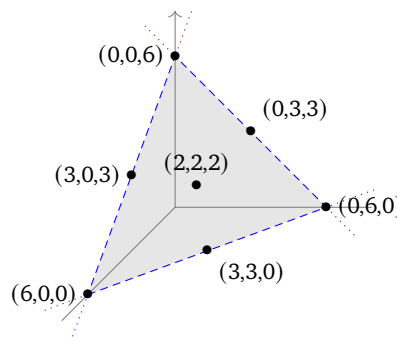


Figura 2.7: El triángulo $x + y + z = 6$ en el primer octante

La función de Lagrange es

$$L(x, y, z, \lambda) = x \log x + y \log y + z \log z + \lambda(x + y + z - 6).$$

Sus derivadas parciales son

$$\begin{aligned} L_x &= 1 + \log x + \lambda, \\ L_y &= 1 + \log y + \lambda, \\ L_z &= 1 + \log z + \lambda, \\ L_\lambda &= x + y + z - 6. \end{aligned}$$

Para que $L_x = L_y = L_z = 0$, se requiere

$$\log x = \log y = \log z \quad [= -1 - \lambda].$$

Esto conlleva $x = y = z$ (la recta diagonal en \mathbb{R}^3). La ligadura $x + y + z = 6$ entonces implica $x = y = z = 2$. En fin, hay un único punto crítico ligado $(x_0, y_0, z_0) = (2, 2, 2)$, en donde $\lambda = -1 - \log 2$. El valor crítico de f es $f(2, 2, 2) = 6 \log 2$.

Ahora bien: el dominio de f se puede extender al octante cerrado $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, usando el límite conocido $\lim_{x \downarrow 0} (x \log x) = 0$ (por la regla de l'Hôpital). Por ejemplo,

$$f(x, y, 0) = x \log x + y \log y, \quad \text{sujeta a } x + y = 6;$$

el mismo análisis conduce a un punto crítico $(x_0, y_0, z_0) = (3, 3, 0)$ con $f(3, 3, 0) = 6 \log 3$. Lo mismo rige para los puntos $(3, 0, 3)$ y $(0, 3, 3)$ en los otros lados del triángulo.

En los vértices, se obtiene $f(6, 0, 0) = f(0, 6, 0) = f(0, 0, 6) = 6 \log 6$. Se deduce que el punto crítico $(2, 2, 2)$ representa un *mínimo absoluto* de f . El *máximo absoluto* de f ocurre en los tres vértices del triángulo. \diamond

3 Integrales múltiples

Solving a mathematical problem is like doing a jigsaw puzzle, except you don't know in advance what the final picture will look like.

— Edward Frenkel¹

La integración de funciones de varias variables reales usa las reglas conocidas para integrar funciones de una sola variable. La novedad consiste en el manejo del dominio de integración: en vez de un intervalo $a \leq x \leq b$ de la recta real, se debe abordar regiones diversas del plano \mathbb{R}^2 y del espacio \mathbb{R}^3 . Una vez analizadas las características geométricas del dominio, el cálculo de la integral puede ser tedioso pero rara vez es difícil.

► Antes de abordar las integrales múltiples, conviene recordar **cuatro fórmulas básicas** en la integración de funciones de una variable.

(1) Si $n \neq -1$, entonces

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}. \quad (3.1)$$

Esto viene de evaluar la antiderivada $x^{n+1}/(n+1)$ en $x = 0$ y en $x = 1$.

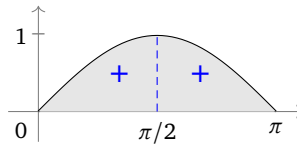


Figura 3.1: Área debajo del grafo de la función seno

(2) El arco de la función sen θ es positivo para $0 < \theta < \pi$; su integral es:

$$\int_0^\pi \text{sen } \theta d\theta = 2. \quad (3.2)$$

Se sabe que $\int_0^{\pi/2} \text{sen } \theta d\theta = \cos 0 - \cos \frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1$; la fórmula $\text{sen}(\pi - \theta) = \text{sen } \theta$ dice que el grafo de la función seno es invariante bajo la reflexión $(x, y) \mapsto (\pi - x, y)$ en la recta vertical $x = \frac{\pi}{2}$. Por eso, el área $\int_{\pi/2}^\pi \text{sen } \theta d\theta = 1$ también.

¹En su libro *Love and Math: The Heart of Hidden Reality*, New York, 2013.

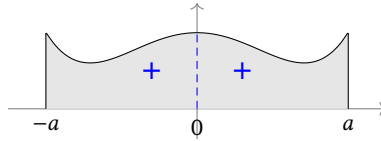


Figura 3.2: Área limitada por el grafo de una función par

(3) Una función f de una variable se llama **par** si $f(-x) \equiv f(x)$.

Unos ejemplos son: $x^2, x^4, x^6, \dots, x^{2m}$ en general – incluyendo $x^0 \equiv 1$, la función constante de valor 1 (cualquier función constante es par). Otras funciones pares conocidas son: $\cos x, \sec x, \cosh x, \operatorname{sech} x$.

El grafo de una función par es invariante bajo la reflexión $(x, y) \mapsto (-x, y)$ en el eje y . Por eso:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad \text{si } f \text{ es par.} \quad (3.3)$$

Es importante notar que las cotas de integración en la primera integral deben ser $-a \leq x \leq a$. La fórmula (3.3) es válida porque

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(u) du \quad \text{al sustituir } u := -x.$$

(El área para $-a \leq x \leq 0$ es igual al área para $0 \leq x \leq a$, con el mismo signo.)

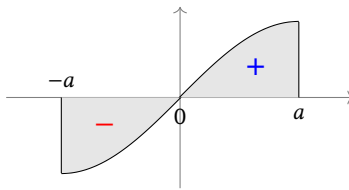


Figura 3.3: Área limitada por el grafo de una función impar

(4) Una función g de una variable se llama **impar** si $g(-x) \equiv -g(x)$.

Unos ejemplos son: $x, x^3, x^5, \dots, x^{2m+1}$ en general – incluyendo $x^{-1} = 1/x$. Otras funciones impares conocidas son: $\sin x, \operatorname{tg} x, \sinh x, \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$.

El grafo de una función impar es invariante bajo la *mediavuelta* (rotación de 180°) alrededor del origen $(x, y) \mapsto (-x, -y)$. Por eso:

$$\int_{-a}^a g(x) dx = 0 \quad \text{si } g \text{ es impar.} \quad (3.4)$$

La fórmula (3.4) es válida porque

$$\int_{-a}^0 g(x) dx = - \int_0^a g(u) du \quad \text{al sustituir } u := -x.$$

(El área para $-a \leq x \leq 0$ es igual al área para $0 \leq x \leq a$, pero con signo opuesto.)

3.1. Integrales dobles en regiones planas

En el cálculo integral de una variable, la integral

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

se interpreta como *el área debajo de la curva $y = f(x)$ para el intervalo $a \leq x \leq b$* . Esta área se concibe como la suma de franjas delgadas de alturas $f(x)$ y de anchuras dx , aproximada por una unión de rectángulos cuyas bases son intervalos sucesivos $[x_0, x_0+dx]$ que conforman el intervalo de base total $[a, b]$.

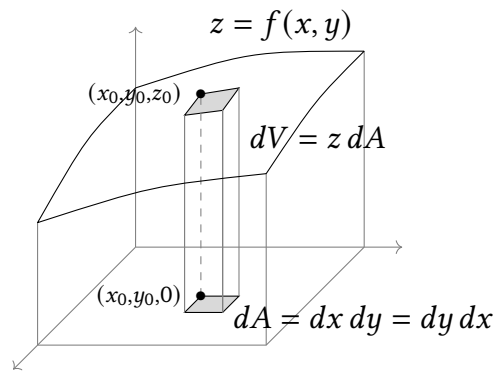


Figura 3.4: Elemento de área $dA = dy dx$ debajo de la superficie $z = f(x, y)$

De manera similar, se quiere calcular *el volumen debajo de una superficie $z = f(x, y)$ cuya base es una región R del plano xy* como una suma de columnas delgadas de alturas $f(x, y)$ cuyas bases son **elementos de área** dA que conforman la base total R . Estos elementos de área pueden ser rectángulos pequeños de lados dx, dy . Entonces el volumen total se expresa así:

$$V = \iint_R z dA = \iint_R f(x, y) dy dx. \tag{3.5}$$

Para calcular esta **integral doble**, hace falta tener una formulación manejable de la región R en términos de las coordenadas cartesianas (x, y) .

En lo sucesivo, se examinará diversas regiones de base para integrales dobles.

Integrales iteradas sobre regiones rectangulares

El caso más simple ocurre cuando la **región de integración** R es un *rectángulo*:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{array} \right\}.$$

En este caso, la integral doble asume una de dos formas:

$$\iint_R f(x, y) \, dy \, dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy. \quad (3.6)$$

En el primer caso, la integral interior (azul) se calcula con x fijo; el resultado es una función que solo depende de x ; en seguida, se calcula la integral de esta función de x . En el segundo caso, la integral interior (roja) se calcula con y fijo; el resultado es una función que solo depende de y ; en seguida, se calcula la integral de esta función de y .

En resumen, estas dos **integrales iteradas** conducen a antiderivadas de una variable: no se requieren técnicas de integración nuevas.²

Ejemplo 3.1. Evaluar la integral doble $\int_{-1}^1 \int_0^1 (x^4 y + y^2) \, dy \, dx$.

Por cálculo directo:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_0^1 (x^4 y + y^2) \, dy \, dx &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{3} \right) dx = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = 2 \left(\frac{13}{30} \right) = \frac{13}{15}. \end{aligned}$$

Se ha usado la fórmulas (3.1) para $\int_0^1 x^n \, dx$ varias veces. La segunda igualdad emplea la fórmula (3.3) porque el integrando es *par* y las cotas \int_{-1}^1 son simétricas.

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{-1}^1 (x^4 y + y^2) \, dx \, dy &= 2 \int_0^1 \int_0^1 (x^4 y + y^2) \, dx \, dy = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{5} y + y^2 \right) dy \\ &= 2 \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = 2 \left(\frac{13}{30} \right) = \frac{13}{15}. \end{aligned}$$

Se ha comprobado la igualdad de las dos integrales iteradas (3.6) en esta instancia. \diamond

²Tal vez no es obvio que las dos recetas conducen al mismo resultado. Es posible comprobar que las dos integrales son iguales toda vez que el integrando $f(x, y)$ es una *función continua* en la región de integración.

► Si el integrando es un *producto* de tipo $f(x, y) = g(x)h(y)$, una integral sobre una región rectangular se descompone en un producto de dos integrales simples:

$$\int_a^b \int_c^d g(x)h(y) dy dx = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right).$$

Ejemplo 3.2. Evaluar la integral doble $\int_0^1 \int_0^1 xy e^{x+y} dy dx$.

El integrando es un producto:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 xy e^{x+y} dy dx &= \int_0^1 x e^x dx \int_0^1 y e^y dy = \left(\int_0^1 x e^x dx \right)^2 \\ &= \left([xe^x]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 e^x dx \right)^2 \\ &= ((e - 0) - (e - 1))^2 = 1^2 = 1. \end{aligned}$$

En el segundo renglón, se hizo una integración por partes. ◇

Ejemplo 3.3. Evaluar la integral doble $\int_0^1 \int_0^1 \frac{xy dy dx}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

Esta integral sale por cálculo directo:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy dy dx}{\sqrt{1+x^2+y^2}} &= \int_0^1 \frac{x}{2} \int_0^1 \frac{2y dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{2} \left[2\sqrt{1+x^2+y^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 (\sqrt{2+x^2} - \sqrt{1+x^2}) x dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3}(2+x^2)^{3/2} - \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) - \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{3}(3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

Se ha usado – implícitamente – un par de sustituciones $u := a + y^2$, $du = 2y dy$ con $a = 1 + x^2$ (fijo); y también $v := b + x^2$, $dv = 2x dx$ en los casos $b = 2$ y $b = 1$. ◇

Regiones planas de dos tipos

Las regiones planas no rectangulares tienen geometrías muy variadas. Sin embargo, los dominios de integración en problemas típicos suelen aparecer en una de dos clases particulares; otras regiones se reparten en subregiones de una de esas clases.

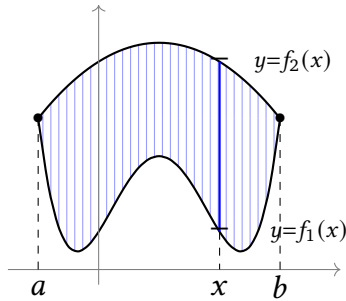


Figura 3.5: Una región de integración del tipo I

La primera clase es la de regiones **verticalmente simples**, comúnmente conocidas como **regiones de tipo I**. Estas son limitadas inferiormente por una curva plana $y = f_1(x)$ y superiormente por otra curva $y = f_2(x)$, de esta manera:

La región $R = \left\{ \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \end{array} \right\}$ es de tipo I. (3.7)

Dicho de otra manera: la región R se describe por el *alcance absoluto* de la variable x en un intervalo $a \leq x \leq b$; y para cada x en ese intervalo, por el *alcance relativo* de la variable y en el intervalo $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$. Véase la Figura 3.5.

De esta manera, la integral de una función $z = h(x, y)$ sobre esta región se expresa como una integral iterada:³

$$I = \iint_R h(x, y) dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} h(x, y) dy dx.$$

Las cotas de integración de la integral interna (con respecto a y) pueden depender de x – pues se mantiene x constante mientras se hace la integración respecto de y – pero las cotas para la integral externa (con respecto a x) deben ser constantes.

Ejemplo 3.4. Hallar el área plana limitada por las dos parábolas $y = x^2$; $y = 2x^2 - 1$.

En este ejemplo, como en muchos problemas que siguen, el alcance $a \leq x \leq b$ no está indicado de manera explícita. Además, el enunciado no indica cuál de las dos curvas es la superior y cuál es la inferior. Toda esa información debe ser extraído de un dibujo de la región R .

En primer lugar, es necesario determinar *los puntos de intersección de las dos curvas*. Las coordenadas (x, y) de tales puntos cumplen las dos ecuaciones a la vez.

³De ahora en adelante, se usará la letra I para denotar una integral que se quiere evaluar.

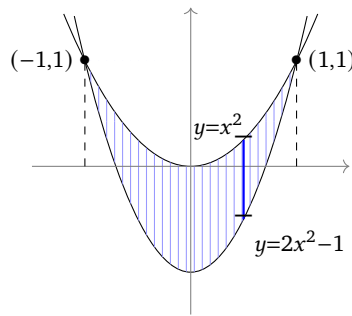
En el ejemplo dado, se debe resolver la ecuación:

$$x^2 = 2x^2 - 1 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1.$$

Usando una de las ecuaciones, $y = x^2$ por ejemplo, se obtiene las coordenadas y de los puntos de intersección:

$$(x_1, y_1) = (-1, 1), \quad (x_2, y_2) = (1, 1).$$

Esto hace probable que el alcance de x es el intervalo $-1 \leq x \leq 1$.



Para confirmarlo, se nota del dibujo que las dos parábolas, al cortarse en $(-1, 1)$ y en $(1, 1)$, determinan una región de área finita. Fíjese que cuando $x = 0$, la primera parábola pasa por $(0, 0)$ y el segundo por $(0, -1)$. Esto confirma que la parábola superior es $y = x^2$ y la inferior es $y = 2x^2 - 1$. En consecuencia, vale $2x^2 - 1 \leq x^2$ cuando $-1 \leq x \leq 1$. Entonces la región de integración es:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \\ 2x^2 - 1 \leq y \leq x^2 \end{array} \right\},$$

y su área es

$$A = \iint_R 1 \, dA = \int_{-1}^1 \int_{2x^2-1}^{x^2} 1 \, dy \, dx.$$

Como $\int_c^d 1 \, dy = d - c$, esta área es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 x^2 - (2x^2 - 1) \, dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) \, dx \quad [\text{integrando par}] \\ &= 2 \int_0^1 (1 - x^2) \, dx = 2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}. \end{aligned} \quad \diamond$$

► La segunda clase de regiones son las regiones **horizontalmente simples**, comúnmente conocidas como **regiones de tipo II**. Estas son limitadas a la izquierda por una curva plano $x = g_1(y)$ y a la derecha por otra curva $x = g_2(y)$.

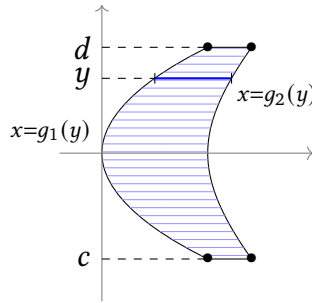


Figura 3.6: Una región de integración del tipo II

En resumidas cuentas:

La región $R = \left\{ \begin{array}{l} c \leq y \leq d \\ g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \end{array} \right\}$ es de tipo II. (3.8)

Dicho de otra manera: la región R se describe por el *alcance absoluto* de la variable y en un intervalo $c \leq y \leq d$; y para cada y en ese intervalo, por el *alcance relativo* de la variable x en el intervalo $g_1(y) \leq x \leq g_2(y)$. Véase la Figura 3.6.

De esta manera, la integral de $z = h(x, y)$ sobre esta región se expresa como una integral iterada de esta forma:

$$I = \iint_R h(x, y) dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} h(x, y) dx dy.$$

Las cotas de integración de la integral interna (con respecto a x) pueden depender de y – pues se mantiene y constante mientras se hace la integración respecto de x – pero las cotas para la integral externa (con respecto a y) deben ser constantes.

Ejemplo 3.5. Calcular $\iint_R (x^2 + y^2) dA$, donde R es la región del primer cuadrante del plano xy acotada por la recta $3x + 4y = 10$.

Esta región R es un triángulo rectangular que es verticalmente simple y horizontalmente simple a la vez (véase la Figura 3.7). Tiene vértices $(0, 0)$, $(\frac{10}{3}, 0)$ y $(0, \frac{5}{2})$, habida cuenta de los puntos en donde la recta $3x + 4y = 10$ corta los ejes coordenados. Entonces:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 10/3 \\ 0 \leq y \leq \frac{10 - 3x}{4} \end{array} \right\} \quad (\text{tipo I}), \text{ o bien } R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 5/2 \\ 0 \leq x \leq \frac{10 - 4y}{3} \end{array} \right\} \quad (\text{tipo II}).$$

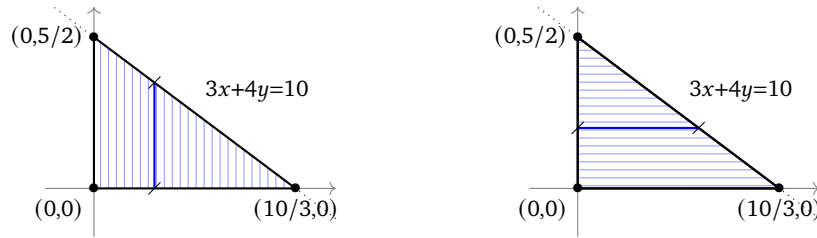


Figura 3.7: Una región triangular de ambos tipos

Considerando R como región del tipo I, la integral es:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{10/3} \int_0^{(10-3x)/4} (x^2 + y^2) dy dx = \int_0^{10/3} \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=(10-3x)/4} dx \\
 &= \int_0^{10/3} \left(\frac{1}{4}(10x^2 - 3x^3) + \frac{1}{192}(10 - 3x)^3 \right) dx \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{10}{3} x^3 - \frac{3}{4} x^4 \right]_{x=0}^{x=10/3} - \frac{1}{576} \int_{10}^0 u^3 du \quad [\text{al sustituir } u = 10 - 3x, du = -3 dx] \\
 &= \frac{5}{6} \times \frac{1000}{27} - \frac{3}{16} \times \frac{10000}{81} + \frac{1}{576} \int_0^{10} u^3 du = \frac{2500}{81} - \frac{1875}{81} + \frac{1}{576} \times \frac{10000}{4} \\
 &= \frac{625}{81} + \frac{625}{144} = \frac{625}{9} \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{16} \right) = \frac{625}{9} \times \frac{25}{144} = \frac{15625}{1296}.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, al considerar R como región del tipo II, la integral sería:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{5/2} \int_0^{(10-4y)/3} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{5/2} \left[\frac{1}{3} x^3 + x y^2 \right]_{x=0}^{x=(10-4y)/3} dy \\
 &= \int_0^{5/2} \left(\frac{1}{81}(10 - 4y)^3 + \frac{1}{3}(10y^2 - 4y^3) \right) dy \\
 &= -\frac{1}{324} \int_{10}^0 v^3 dv + \frac{1}{3} \left[\frac{10}{3} y^3 - y^4 \right]_{y=0}^{y=5/2} \quad [\text{al sustituir } v = 10 - 4y, dv = -4 dy] \\
 &= \frac{1}{324} \int_0^{10} v^3 dv + \frac{10}{9} \times \frac{125}{8} - \frac{1}{3} \times \frac{625}{16} = \frac{1}{324} \times \frac{10000}{4} + \frac{625}{36} - \frac{625}{48} \\
 &= 625 \left(\frac{1}{81} + \frac{1}{36} - \frac{1}{48} \right) = \frac{625}{1296} (16 + 36 - 27) = \frac{15625}{1296}.
 \end{aligned}$$

Desde luego, no es de sorprender que las dos resultados coinciden. [[En las evaluaciones de antiderivadas, se ha marcado en rojo los términos con valor 0.]] \diamond

Cambio del orden de integración

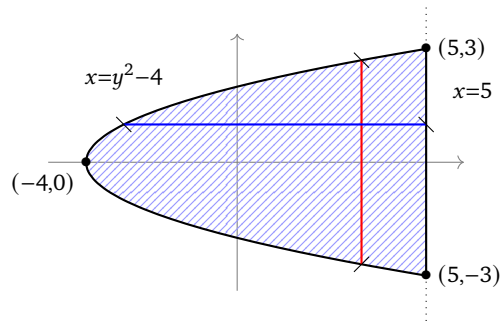
Muchas regiones R del plano comparten la propiedad del Ejemplo 3.5, al ser vertical y horizontalmente simple simultáneamente. Entonces cabe la posibilidad de cambiar el orden de integración, de $dy dx$ a $dx dy$ o viceversa. Lo que se requiere es replantear la descripción de R del formato (3.7) al formato (3.8), o al revés. Esta reformulación exige examinar con detalle el *dibujo* de la región plana R .

Ejemplo 3.6. Cambiar el orden y evaluar $I = \int_{-3}^3 \int_{y^2-4}^5 (x+2y) dx dy$.

Esta región es de tipo II:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} -3 \leq y \leq 3 \\ y^2 - 4 \leq x \leq 5 \end{array} \right\}.$$

A la derecha, R es limitada por la recta vertical $x = 5$; a la izquierda, por la parábola $x = y^2 - 4$. Estas dos curvas se cortan en puntos (x, y) que cumplen $y^2 - 4 = 5$, es decir $y^2 = 9$ o bien $y = \pm 3$. Entonces los puntos de intersección son $(5, 3)$ y $(5, -3)$. Con esa información, se puede trazar el dibujo siguiente.



Del dibujo, se puede notar que la parábola $y^2 = x + 4$ es simétrica bajo reflexión en el eje x [el cambio $(x, y) \mapsto (x, -y)$] y que su extremo izquierdo ocurre en el eje x , cuando $y = 0$ y por ende $x = -4$. Entonces el alcance horizontal de la región es $-4 \leq x \leq 5$.

En valores intermedios de x , el alcance relativo de y (el segmento rojo del dibujo) tiene sus dos extremos en la parábola, donde $y^2 = x + 4$ y por ende $y = \pm\sqrt{x+4}$. Eso proporciona la descripción de R como región de tipo I:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} -4 \leq x \leq 5 \\ -\sqrt{x+4} \leq y \leq \sqrt{x+4} \end{array} \right\}.$$

Ya se puede evaluar la integral:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-4}^5 \int_{-\sqrt{x+4}}^{\sqrt{x+4}} (x + 2y) \, dy \, dx = 2 \int_{-4}^5 \int_0^{\sqrt{x+4}} x \, dy \, dx \quad [x \text{ es par, } 2y \text{ es impar}] \\
 &= 2 \int_{-4}^5 x\sqrt{x+4} \, dx = 2 \int_0^9 (u - 4)\sqrt{u} \, du \quad [\text{al sustituir } u = x + 4, \, du = dx] \\
 &= 2 \int_0^9 (u^{3/2} - 4u^{1/2}) \, du = 2 \left[\frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{8}{3} u^{3/2} \right]_{u=0}^{u=9} \\
 &= \frac{4}{5}(243) - \frac{16}{3}(27) = \frac{972 - 720}{5} = \frac{252}{5}.
 \end{aligned}$$

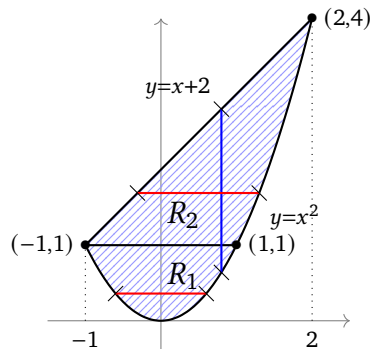
Por supuesto, se puede también efectuar un cálculo directo de I como integral de tipo II, llegando al mismo resultado $252/5$. \diamond

Ejemplo 3.7. Cambiar el orden y evaluar $I = \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} dy \, dx$.

Se trata de calcular el área de una región de tipo I:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 \leq y \leq x + 2 \end{array} \right\}.$$

Al trazar el dibujo, queda patente que R no es de tipo II.



Sin embargo, la recta horizontal $y = 1$ separa R en una unión de dos subregiones de tipo II, $R = R_1 \cup R_2$, donde

$$R_1 = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y} \end{array} \right\}, \quad R_2 = \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq y \leq 4 \\ y - 2 \leq x \leq \sqrt{y} \end{array} \right\}.$$

La subregión inferior R_1 está limitada a la izquierda y a la derecha por la parábola $y = x^2$, es decir $x = \pm\sqrt{y}$. La subregión superior R_2 está limitada a la izquierda por la recta $y = x + 2$, es decir $x = y - 2$; y a la derecha por la parábola $x = \sqrt{y}$.

Para obtener la integral sobre R , se suman las dos integrales sobre estas subregiones:

$$\begin{aligned} I &= \iint_R dy dx = \iint_{R_1} dx dy + \iint_{R_2} dx dy \\ &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx dy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx dy = \int_0^1 2\sqrt{y} dy + \int_1^4 (\sqrt{y} - y + 2) dy \\ &= 2 \int_0^1 y^{1/2} dy + \int_1^4 (y^{1/2} - y + 2) dy = 2\left(\frac{2}{3}\right) + \left[\frac{2}{3}y^{3/2} - \frac{1}{2}y^2 + 2y\right]_{y=1}^{y=4} \\ &= \frac{4}{3} + \left(\frac{16}{3} - 8 + 8\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Al evaluar I directamente como región de tipo I, se obtiene:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} dy dx = \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=-1}^{x=2} \\ &= \left(2 + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2}. \end{aligned} \quad \diamond$$

Ejemplo 3.8. Calcular el valor de $I := \int_0^\pi \int_0^\pi |\cos(x+y)| dy dx$.

A primera vista, esta es una integral sencilla, cuya región de integración es un cuadrado R de lado π . Sin embargo, las barras de valor absoluto en el integrando $|\cos(x+y)|$ hacen recordar que el coseno de un ángulo puede ser negativo: en efecto, $-1 \leq \cos \theta \leq +1$ para un ángulo θ cualquiera. Si $0 \leq \cos \theta \leq 1$, entonces $|\cos \theta| = \cos \theta$ y las barras son redundantes. En cambio, si $-1 \leq \cos \theta < 0$, entonces $|\cos \theta| = -\cos \theta$ y *el integrando cambia de signo*.

Entonces, antes de abordar el cálculo hace falta averiguar cuáles puntos (x, y) de R corresponden al caso $\cos(x+y) \geq 0$. Más fácil, tal vez, es obtener las soluciones de la ecuación $\cos(x+y) = 0$ que deberían separar las subregiones en donde $\cos(x+y)$ es positivo o negativo.

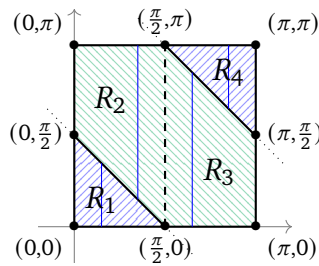
Como $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$, está claro que se cumple $0 \leq x+y \leq 2\pi$ dentro del cuadrado R . Basta recordar que

$$\cos 0 = +1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos \pi = -1, \quad \cos \frac{3\pi}{2} = 0, \quad \cos 2\pi = +1$$

para notar que $\cos(x+y) = 0$ cuando $x+y = \frac{\pi}{2}$ y también cuando $x+y = \frac{3\pi}{2}$. Esas dos rectas cortan el cuadrado R en dos segmentos oblicuos.

Entonces es necesario descomponer el cuadrado en cuatro subregiones de tipo I :

$$R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4.$$



Aquí, R_1 y R_4 son triángulos en donde $\cos(x + y) \geq 0$. El resto de R es un hexágono en donde $\cos(x + y) \leq 0$; este hexágono se parta en dos pedazos de tipo I por la recta vertical $x = \pi$. En resumen:

$$R = \left\{ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} - x \leq y \leq \pi \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \right\} \cup \left\{ 0 \leq y \leq \frac{3\pi}{2} - x \right\} \cup \left\{ \frac{3\pi}{2} - x \leq y \leq \pi \right\}.$$

Con estas preparaciones, la integral I se calcula como sigue:

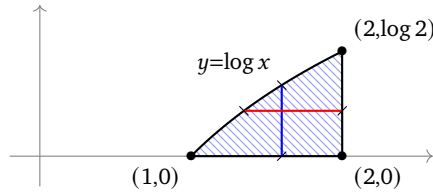
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2-x} \cos(x+y) \, dy \, dx - \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/2-x}^{\pi} \cos(x+y) \, dy \, dx \\ &\quad - \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{3\pi/2-x} \cos(x+y) \, dy \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \int_{3\pi/2-x}^{\pi} \cos(x+y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - \text{sen } x) \, dx - \int_0^{\pi/2} (-\text{sen } x - 1) \, dx \\ &\quad - \int_{\pi/2}^{\pi} (-1 - \text{sen } x) \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\text{sen } x + 1) \, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} 2 \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 2 \, dx = \int_0^{\pi} 2 \, dx = 2\pi. \quad \diamond \end{aligned}$$

Ejemplo 3.9. Con $x > 0$, evaluar la integral doble $I = \int_1^2 \int_0^{\log x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} \, dy \, dx$.

No es posible efectuar un cálculo directo de I como una integral de tipo I, porque se desconoce⁴ una antiderivada para $\sqrt{1+e^{2y}}$. En este caso es imprescindible cambiar el orden de integración y ensayar una integral de tipo II.

Es necesario dibujar la región R : $1 \leq x \leq 2$; $0 \leq y \leq \log x$.

⁴La antiderivada existe, pues la función $F(y) := \int_0^y \sqrt{1+e^{2u}} \, du$ tiene la derivada requerida; pero esto no expresa $F(t)$ como una combinación algebraica de funciones conocidas (polinomios y funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas). La clase de funciones que poseen tales antiderivadas “elementales” fue determinada en 1845 por Joseph Liouville; y sucede que $f(y) := \sqrt{1+e^{2y}}$ no pertenece a esa clase.



Del dibujo, se percibe que esta región es de los tipos I y II a la vez, resultando que:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \log x \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq \log 2 \\ e^y \leq x \leq 2 \end{array} \right\}.$$

Fíjese que $y = \log x$ es equivalente a $x = e^y$ (el logaritmo natural es la función inversa de la función exponencial). La curva $y = \log x$ es el *borde superior* de R , vista como región de tipo I; pero la misma curva $x = e^y$ es el *borde izquierdo* de R , como región de tipo II.

El cálculo de la integral I ahora procede sin dificultad (aunque es un poco extenso):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\log 2} \int_{e^y}^2 (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} \, dx \, dy = \int_0^{\log 2} \sqrt{1+e^{2y}} \int_{e^y}^2 (x-1) \, dx \, dy \\ &= \int_0^{\log 2} \sqrt{1+e^{2y}} \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_{x=e^y}^{x=2} dy = \int_0^{\log 2} \sqrt{1+e^{2y}} \left(-\frac{1}{2}e^{2y} + e^y \right) dy \\ &= \int_1^2 \sqrt{1+u^2} \left(1 - \frac{1}{2}u \right) du = \int_1^2 \sqrt{1+u^2} \, du - \int_2^5 \frac{1}{4} \sqrt{v} \, dv \\ &= \int_{\pi/4}^{\arctan 2} \sec^3 \theta \, d\theta - \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} v^{3/2} \right]_{v=2}^{v=5} \\ &= \left[\frac{1}{2} \sec \theta \, \text{tg} \theta + \frac{1}{2} \log |\sec \theta + \text{tg} \theta| \right]_{\theta=\pi/4}^{\theta=\arctan 2} - \frac{1}{6} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) \\ &= \left(\sqrt{5} + \frac{1}{2} \log(\sqrt{5} + 2) - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \log(\sqrt{2} + 1) \right) - \frac{5}{6} \sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{6} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{2} + 1} \right). \end{aligned}$$

En el cálculo, se hicieron las sustituciones: $u = e^y$, $du = e^y \, dy$; $v = 1 + u^2$, $dv = 2u \, du$; $u = \text{tg} \theta$, $du = \sec^2 \theta \, d\theta$. ◇

3.2. Cambio de variables en integrales dobles

Algunas regiones de integración para integrales dobles se expresan con coordenadas polares (r, θ) u otros sistemas de coordenadas no cartesianas. Para evaluar la integral, se requiere una expresión del *elemento de área* dA en términos de las nuevas coordenadas.

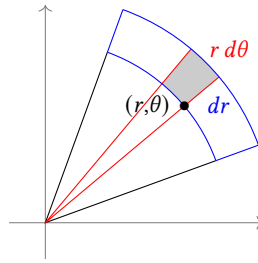


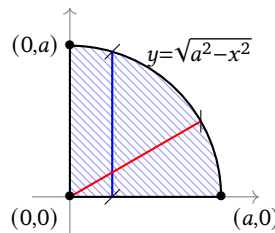
Figura 3.8: Elemento de área en coordenadas polares: $dA = r dr d\theta$

En el caso de coordenadas polares, no es difícil obtener el elemento de área. Esta es la porción del plano \mathbb{R}^2 limitada por dos arcos de círculos concéntricos, de radios respectivos r y $r + dr$; y por dos segmentos de semirrectas que salen del origen, formando ángulos respectivos θ y $\theta + d\theta$ con el eje x positivo. Los arcos circulares son ortogonales a las semirrectas radiales, así que el elemento de área es aproximadamente un rectángulo de lados respectivos dr y $r d\theta$. (La longitud del arco $r d\theta$ es proporcional al radio r y a la separación angular $d\theta$.)⁵ El área de este pequeño rectángulo es:

$$dA = (dr)(r d\theta) = r dr d\theta. \tag{3.9}$$

El coeficiente r en esta fórmula es un *factor de magnificación local* asociado al cambio de variables $(x, y) \mapsto (r, \theta)$.

Ejemplo 3.10. Evaluar la integral doble $I = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$, si $a > 0$.



La región de integración es la porción del disco circular de radio en el primer cuadrante:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq a \end{array} \right\}. \tag{3.10}$$

⁵En esta descripción, los ángulos se miden en *radianes* (no en grados). Un radián es el ángulo de un sector circular cuyo longitud de arco es igual a su radio: en el presente contexto, ‘ $d\theta$ radianes’ es el cociente de la longitud de arco $r d\theta$ por el radio r – ese cociente resulta ser independiente de r .

En efecto, su borde superior $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ es parte del círculo $x^2 + y^2 = a^2$, es decir $r = a$. El alcance angular de θ en el primer cuadrante es $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Nótese que al pasar a coordenadas polares se obtienen cotas de integración constantes, lo cual simplifica el cálculo. Además, el integrando es $f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2} = r$, otra simplificación. Entonces la integral es

$$\begin{aligned} I &= \iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dA = \iint_R r \, dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^a r(r \, dr \, d\theta) \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^a r^2 \, dr \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3} a^3 \, d\theta = \frac{a^3}{3} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^3}{6}. \quad \diamond \end{aligned}$$

Cuando se emplean coordenadas polares en una integral doble, se describe primero el alcance *absoluto* de la variable angular θ , como en la descripción (3.10), seguido por el alcance *relativo* de la variable radial r :

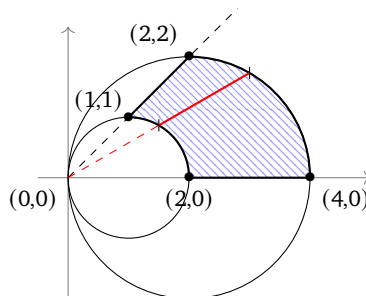
$$R = \left\{ \begin{array}{l} \alpha \leq \theta \leq \beta \\ r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta) \end{array} \right\}. \quad (3.11)$$

Ejemplo 3.11. Calcular el área dentro del círculo $x^2 + y^2 = 4x$ y afuera del círculo $x^2 + y^2 = 2x$, comprendida entre las rectas $y = 0$, $y = x$.

La ecuaciones de estos círculos se escriben como $x^2 + y^2 - 4x = 0$, $x^2 + y^2 - 2x = 0$ respectivamente. Se puede completar cuadrados al sumar una constante a ambos lados, resultando:

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4, \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

El primer círculo tiene centro $(2, 0)$ y radio 2; el segundo tiene centro $(1, 0)$ y radio 1. (Nótese que ambos círculos pasan por el origen $(0, 0)$ pues sus ecuaciones originales no tienen términos constantes.) Con esta información, se puede dibujar la región R :



Es posible, pero bastante penoso, describir R en coordenadas cartesianas como la unión de dos regiones de tipo I, o bien como la unión de dos regiones de tipo II. Pero en coordenadas polares, admite una descripción más sencilla. Fíjese que la recta $y = 0$

(el eje x) y la recta diagonal $y = x$, corresponden a las semirrectas $\theta = 0$ y $\theta = \pi/4$, respectivamente (en el primer cuadrante).

Para expresar los círculos en coordenadas polares, se nota que

$$\underline{x^2 + y^2 = 2ax} \implies r^2 = 2ar \cos \theta \implies \underline{r = 2a \cos \theta}.$$

[[Es legítimo dividir por r , porque $r = 0$ sólo en el origen. (De igual manera, $x^2 + y^2 = 2ay$ se transforma en $r = 2a \sin \theta$.)]] Tomando en cuenta los casos $a = 2$ (el círculo grande) y $a = 1$ (el círculo pequeño) se llega a la descripción deseada:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi/4 \\ 2 \cos \theta \leq r \leq 4 \cos \theta \end{array} \right\}.$$

Ahora se calcula en área en seguida:

$$\begin{aligned} A &= \iint_R dA = \int_0^{\pi/4} \int_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} r \, dr \, d\theta = \int_0^{\pi/4} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=2 \cos \theta}^{r=4 \cos \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} 6 \cos^2 \theta \, d\theta = \int_0^{\pi/4} 3(1 + \cos 2\theta) \, d\theta = 3 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \\ &= 3 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \underline{\frac{3}{4}(\pi + 2)}. \end{aligned} \quad \diamond$$

Parametrización de regiones planas

En el plano, se puede emplear cambios de variable más generales:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad (2.14')$$

siempre suponiendo que $x(u, v)$, $y(u, v)$ son funciones diferenciables.

Conviene usar una notación vectorial para describir este cambio de variable:

$$\vec{r}(u, v) := (x(u, v), y(u, v)), \quad \vec{r}_u = (x_u, y_u), \quad \vec{r}_v = (x_v, y_v).$$

Para cada valor constante v_0 de la segunda variable, hay una curva plana $u \mapsto \vec{r}(u, v_0)$ parametrizada por u ; y para cada valor constante u_0 de la primera variable, hay una curva plana $v \mapsto \vec{r}(u_0, v)$ parametrizada por v . Estas dos familias de curvas forman una *mall*a en el plano: véase la Figura 3.9. Las dos curvas mencionadas se cortan en el punto $\vec{r}(u_0, v_0)$.

Un pequeño desplazamiento $u_0 \mapsto u_0 + du$ y otro $v_0 \mapsto v_0 + dv$ da lugar a un **elemento de área** dA encerrado para dos pares de curvas, *cuya forma es aproximadamente un paralelogramo*. Para incrementos pequeños du , dv , este paralelogramo tiene lados paralelos

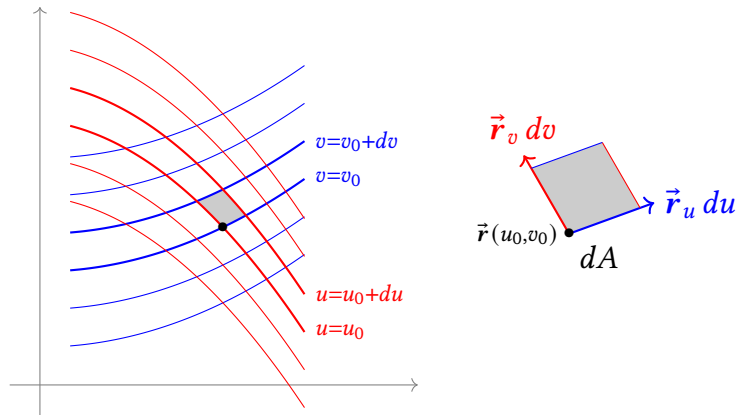


Figura 3.9: Elemento de área en coordenadas (u, v) cualesquiera

a las rectas tangentes a las dos curvas en el punto $\vec{r}(u_0, v_0)$. Los lados adyacentes del paralelogramo son los vectores tangentes $\vec{r}_u du$ y $\vec{r}_v dv$, proporcionales a los incrementos en u, v . (Véase el lado derecho de la Figura 3.9.)

Se debe recordar que el área de un paralelogramo (tanto en \mathbb{R}^2 como en \mathbb{R}^3) está dada por la *magnitud del producto cruz* de sus dos lados adyacentes:

$$dA = \|\vec{r}_u du \times \vec{r}_v dv\| = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv. \tag{3.12}$$

Aquí \vec{r}_u y \vec{r}_v son vectores en el plano \mathbb{R}^2 , medido en \mathbb{R}^3 :

$$\vec{r}_u = (x_u, y_u, 0), \quad \vec{r}_v = (x_v, y_v, 0),$$

de modo que el vector $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ es paralelo al eje z :

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (0, 0, x_u y_v - x_v y_u).$$

La tercera componente no es otra que el **jacobiano** del cambio de variable (ya visto en la sección 2.5):

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = x_u y_v - x_v y_u = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}. \tag{3.13}$$

La magnitud de este vector es *el valor absoluto del jacobiano* – porque no puede ser negativo:

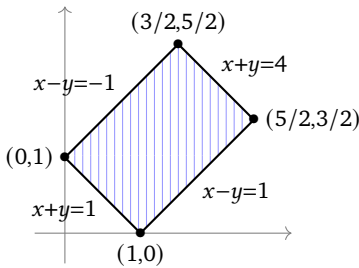
$$\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = |x_u y_v - x_v y_u| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|.$$

Este es el *factor de magnificación local* en el elemento de área (3.12):

$$dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \tag{3.14}$$

Ejemplo 3.12. Calcular la integral $I = \iint_R (x + y)^2 e^{x-y} dx dy$ donde R es el rectángulo $1 \leq x + y \leq 4$, $-1 \leq x - y \leq 1$.

Para confirmar que la región descrita es un rectángulo, basta notar que $x + y = 1$, $x + y = 4$ son dos rectas paralelas con pendiente -1 , mientras que $x - y = -1$, $x - y = 1$ son dos rectas paralelas con pendiente $+1$. Estas rectas forman los cuatro lados del rectángulo. Los vértices del rectángulo son los puntos de intersección $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$.



No sería difícil expresar $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ como una unión de tres subregiones de tipo II (u otras tres de tipo I); pero al considerar el integrando, sería más práctico hacer el cambio de variable:

$$\begin{cases} u := x + y \\ v := x - y \end{cases}, \text{ para obtener } R = \begin{cases} 1 \leq u \leq 4 \\ -1 \leq v \leq 1 \end{cases}.$$

Para calcular el jacobiano requerido, se puede despejar x, y en términos de u, v :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u + v) \\ y = \frac{1}{2}(u - v) \end{cases},$$

de donde

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

cuyo valor absoluto es $+\frac{1}{2}$. Entonces $dx dy = \frac{1}{2} du dv$; y la integral deseada es:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_1^4 u^2 e^v \left(\frac{1}{2} du dv\right) \\ &= \frac{1}{2} \int_1^4 u^2 du \int_{-1}^1 e^v dv = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} u^3 \right]_{u=1}^{u=4} \left[e^v \right]_{v=-1}^{v=1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{64}{3} - \frac{1}{3} \right) \left(e - \frac{1}{e} \right) = \frac{21}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right). \end{aligned}$$

◇

No fue difícil, en el caso anterior, invertir las fórmulas para u, v en términos de x, y para despejar $x = x(u, v), y = y(u, v)$. Sin embargo, ese paso no era necesario, porque se puede usar la reciprocidad de los jacobianos: la fórmula (2.31b). En efecto,

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2,$$

de donde

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1 \bigg/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = -\frac{1}{2},$$

por lo tanto, $dx dy = +\frac{1}{2} du dv$ sin necesidad de invertir el cambio de variable.

► La última integral doble del ejemplo anterior tiene un integrando $u^2 e^v$ en forma de un producto $g(u) h(v)$, era posible factorizarla en dos integrales simples, al aplicar el **principio de separación de variables**. Esto ya fue notado en la discusión del Ejemplo 3.2. Vale la pena ahora enunciarla explícitamente.

Proposición 3.13. Si una integral doble $\iint_R f(u, v) du dv$ cumple dos condiciones:

- (a) el integrando es un producto, $f(u, v) = g(u) h(v)$; y
- (b) las cotas de integración son constantes;

entonces la integral doble se separa en el producto de dos integrales simples:

$$\int_a^b \int_c^d g(u) h(v) dv du = \left(\int_a^b g(u) du \right) \left(\int_c^d h(v) dv \right). \quad (3.15)$$

Ejemplo 3.14. Calcular la integral $I = \int_0^1 \int_0^{1-x} e^{y/(x+y)} dy dx$ usando el cambio de variable $x + y = u, y = uv$.

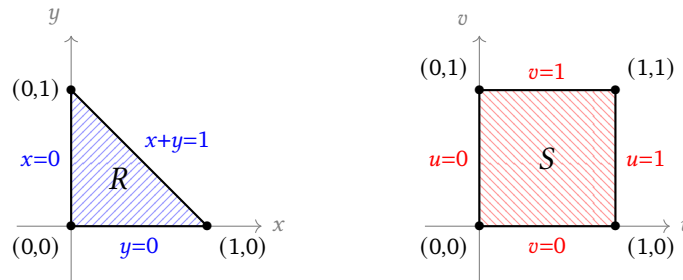
El primer paso es reorganizar el cambio de variable como: $\begin{cases} x = u - uv \\ y = uv \end{cases}$. Entonces

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = (1 - v)u + uv = u.$$

Por lo tanto, vale $dy dx = |u| du dv$.

Ahora es necesario averiguar las cotas de integración para las nuevas variables u, v . Esto se hace, desde luego, mediante el dibujo de la región de integración.

De hecho, hace falta hacer *dos dibujos*: uno en el “plano xy ” y otro en un segundo “plano uv ”.



A la izquierda se traza el dibujo de tipo que corresponde a la región (de tipo I) que se lee directamente del enunciado:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \end{array} \right\}.$$

Se puede observar que este es un triángulo rectangular isósceles, con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Su frontera o borde consiste de tres segmentos de recta. Bajo el cambio de variable, esta región se transforma en una nueva región S del plano uv ; y *el borde de R también se transforma en el borde de S .*

Las ecuaciones que definen en borde de R determinan otras ecuaciones que determinan el borde de S :

$$\begin{array}{ll} y = 0 & : \quad uv = 0, \\ x + y = 1 & : \quad u = 1, \\ x = 0 & : \quad u(1 - v) = 0. \end{array}$$

La ecuación $uv = 0$ se factoriza en $u = 0$ o $v = 0$: dos rectas. De modo similar $u(1 - v) = 0$ se factoriza en las dos rectas $u = 0$ o $v = 1$. En total, la frontera de S consiste de cuatro segmentos de recta, y se obtiene la región S del lado izquierdo del dibujo:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 \end{array} \right\}.$$

Ahora la integral doble original se transforma así:

$$I = \iint_R e^{y/(x+y)} dy dx = \iint_S e^v u du dv$$

al notar que el jacobiano u cumple $u \geq 0$ en la región S . Finalmente,

$$I = \int_0^1 \int_0^1 u e^v du dv = \int_0^1 u du \int_0^1 e^v dv = \frac{1}{2}(e - 1). \quad \diamond$$

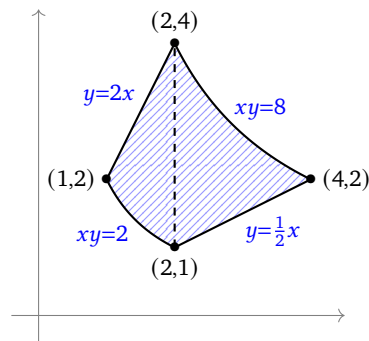


Figura 3.10: Una región plana limitada por rectas e hipérbolas

Ejemplo 3.15. Calcular la integral doble $\iint_R 2y \, dx \, dy$, si R es la región del primer cuadrante limitada por las rectas $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2x$ y por las hipérbolas $xy = 2$, $xy = 8$.

En esta región se nota que $2 \leq xy \leq 8$ y también $\frac{1}{2} \leq y/x \leq 2$.

Por lo tanto, si se pone

$$\begin{cases} u := xy \\ v := y/x \end{cases},$$

la región R del plano xy se transforma en un rectángulo S del plano uv :

$$S = \left\{ \begin{array}{l} 2 \leq u \leq 8 \\ \frac{1}{2} \leq v \leq 2 \end{array} \right\}.$$

En este ejemplo, no hace falta dibujar el rectángulo S en el plano uv , porque ya está determinado. La región R del plano xy está ilustrado en la Figura 3.10.

Tampoco es necesario hallar el cambio inverso $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ para encontrar el jacobiano. Primero se calcula:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & -y/x^2 \\ x & 1/x \end{vmatrix} = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = \frac{2y}{x} = 2v.$$

Es importante convertir el resultado $2y/x$ en $2v$ porque el jacobiano que acompaña $du \, dv$ debe ser una función de (u, v) , no una función de (x, y) .

De ahí se obtiene:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1 \left/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right. = \frac{1}{2v}$$

y se observa que esta cantidad es positiva en el rectángulo S .

Para convertir el integrando $2y$, se puede notar que $uv = y^2$, así que $2y = 2\sqrt{uv}$. (Se toma la raíz cuadrada positiva de y^2 porque – del enunciado – (x, y) queda en el primer cuadrante del plano xy .) Finalmente,

$$\begin{aligned} I &= \iint_S 2\sqrt{uv} \left(\frac{1}{2v} du dv \right) = \int_2^8 \int_{1/2}^2 u^{1/2} v^{-1/2} dv du \\ &= \int_2^8 u^{1/2} du \int_{1/2}^2 v^{-1/2} dv = \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{u=2}^{u=8} \left[2v^{1/2} \right]_{v=1/2}^{v=2} \\ &= \frac{4}{3} (16\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) (\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{4}{3} (14\sqrt{2}) (\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{56}{3}. \quad \diamond \end{aligned}$$

La región R del Ejemplo 3.15 también puede expresarse en coordenadas cartesianas (x, y) como una unión de dos regiones de tipo I, a partir de la Figura 3.10:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 2 \\ 2/x \leq y \leq 2x \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} 2 \leq x \leq 4 \\ \frac{1}{2}x \leq y \leq 8/x \end{array} \right\}.$$

Esto permite evaluar la integral I directamente, sin cambio de variables:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \int_{2/x}^{2x} 2y dy dx + \int_2^4 \int_{x/2}^{8/x} 2y dy dx \\ &= \int_1^2 \left[y^2 \right]_{y=2/x}^{y=2x} dx + \int_2^4 \left[y^2 \right]_{y=x/2}^{y=8/x} dx \\ &= \int_1^2 (4x^2 - 4x^{-2}) dx + \int_2^4 (64x^{-2} - \frac{1}{4}x^2) dx \\ &= \left[\frac{4}{3}x^3 + 4x^{-1} \right]_{x=1}^{x=2} + \left[-64x^{-1} - \frac{1}{12}x^3 \right]_{x=2}^{x=4} \\ &= \left(\frac{32}{3} + 2 - \frac{4}{3} - 4 \right) + \left(-16 - \frac{16}{3} + 32 + \frac{2}{3} \right) = 14 + \frac{14}{3} = \frac{56}{3}, \end{aligned}$$

lo cual confirma el cálculo por cambio de variable.

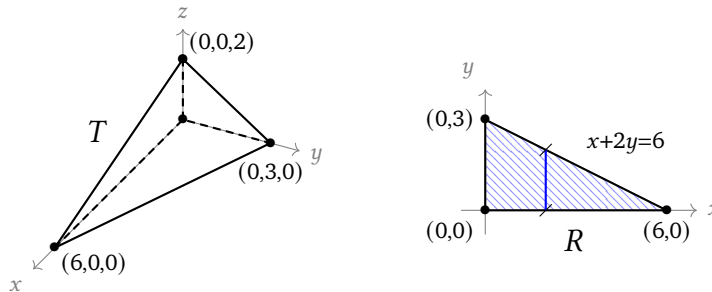
Cálculo de áreas y volúmenes

Algunos de los ejemplos anteriores (Ejemplos 3.4, 3.7, 3.11 específicamente) pidieron evaluar el área de una región R del plano, dada por la integral doble $A = \iint_R dA$. En tales casos se trata de buscar una descripción algebraica de la región R , en coordenadas cartesianas, polares o de otro tipo, para llegar a una integral iterada en dos variables.

De manera similar, se obtiene el volumen debajo de la superficie $z = f(x, y)$ sobre una región plana R al evaluar una integral $I = \iint_R f(x, y) dy dx$ por los procedimientos ya vistos.

Ejemplo 3.16. Calcular el volumen del sólido T en el primer octante, limitado por los tres planos coordenados y el plano $x + 2y + 3z = 6$.

El plano $x + 2y + 3z = 6$ corta los ejes coordenados en los tres puntos $(6, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ y $(0, 0, 2)$; y estos tres puntos determinan el plano. Junto con el origen $(0, 0, 0)$, ellos forman los cuatro vértices del *tetraedro* T , cuyas facetas están en los tres planos coordenados y el plano dado.



La **sombra** (o la *proyección*) del sólido T en el plano xy es la base triangular R , con vértices $(0, 0, 0)$, $(6, 0, 0)$ y $(0, 3, 0)$. El plano $x + 2y + 3z = 6$ corta el plano xy – cuya ecuación es $z = 0$ – en la recta $x + 2y = 6$; $z = 0$, que forma parte del borde del triángulo R . Entonces, con al ayuda del dibujo, se ve que

$$R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 6 \\ 0 \leq y \leq (6 - x)/2 \end{array} \right\}.$$

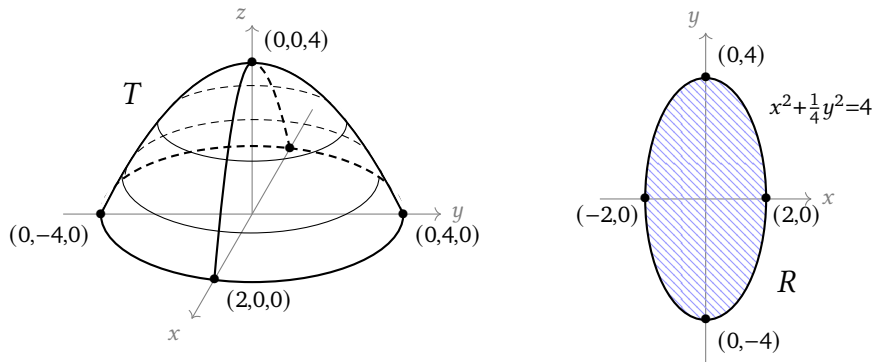
La faceta oblicua de T es $x + 2y + 3z = 6$, o mejor dicho, $z = (6 - x - 2y)/3$. Entonces el volumen buscado es

$$\begin{aligned} \text{Vol}(T) &:= \iint_R \frac{1}{3}(6 - x - 2y) \, dA = \frac{1}{3} \int_0^6 \int_0^{(6-x)/2} (6 - x - 2y) \, dy \, dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^6 \left[6y - xy - y^2 \right]_{y=0}^{y=(6-x)/2} dx = \frac{1}{3} \int_0^6 \left(\frac{1}{2}(6 - x)^2 - \frac{1}{4}(6 - x)^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{12} \int_0^6 (6 - x)^2 dx = \frac{1}{12} \int_0^6 (36 - 12x + x^2) dx = \frac{1}{12} \left[36x - 6x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right]_{x=0}^{x=6} \\ &= \frac{1}{12} (216 - 216 + 72) = \frac{72}{12} = 6. \end{aligned}$$

Hay una fórmula geométrica para el volumen de un tetraedro: $(\frac{1}{3} \text{ base} \times \text{altura})$, similar al área de un triángulo: $(\frac{1}{2} \text{ base} \times \text{altura})$. Estas fórmulas dan:

$$\text{Vol}(T) = \frac{1}{3} \times \text{Area}(R) \times 2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 3 \times 2 = \frac{36}{6} = 6.$$

El cálculo integral comprueba la validez de estas fórmulas en un caso particular. \diamond



Ejemplo 3.17. Hallar el volumen limitado por el paraboloido elíptico $z = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$ y el plano $z = 0$.

La silueta del paraboloido: $x = 0$; $z = 4 - \frac{1}{4}y^2$ y el corte vertical: $y = 0$; $z = 4 - x^2$ son parábolas con el mismo vértice $(0, 0, 4)$ – el cual es el punto más alto del paraboloido. El corte horizontal $z = 0$; $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 4$ es una elipse que encierra un disco elíptico R en el plano xy .

Conviene dibujar tanto el sólido T – usando los métodos esbozados en la sección 1.2 – como su sombra en el plano xy , la cual es la base R del sólido. El volumen deseado es

$$\text{Vol}(T) = \iint_R z \, dA = \iint_R (4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2) \, dy \, dx.$$

En coordenadas cartesianas, la región de integración es

$$R = \left\{ \begin{array}{l} -2 \leq x \leq 2 \\ -2\sqrt{4-x^2} \leq y \leq 2\sqrt{4-x^2} \end{array} \right\}.$$

Tanto la superficie como la base R son simétricos bajo la reflexión $x \leftrightarrow -x$ en el plano yz y la reflexión $y \leftrightarrow -y$ en el plano xz . Entonces el volumen total es igual a 4 veces el de la porción en el primer octante:

$$\text{Vol}(T) = \int_{-2}^2 \int_{-2\sqrt{4-x^2}}^{2\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2) \, dy \, dx = 4 \int_0^2 \int_0^{2\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2) \, dy \, dx.$$

Aunque ya se puede evaluar esta integral de tipo I en forma directa, conviene hacer un cambio de variable a una variante elíptica de las coordenadas polares. La fórmula:

$$\begin{cases} x = a s \cos t \\ y = b s \sen t \end{cases} \tag{3.16}$$

transforma el plano de tal manera que $s = 1$ corresponde a la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, con semiejes a, b . El disco elíptico que tiene esta elipse como borde es dado por $0 \leq s \leq 1$.

Para obtener el elemento de área para este sistema de coordenadas, se calcula el jacobiano:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos t & -a s \operatorname{sen} t \\ b \operatorname{sen} t & b s \cos t \end{vmatrix} = ab s \cos^2 t + ab s \operatorname{sen}^2 t = ab s.$$

Por lo tanto, vale $dA = ab s ds dt$. \llbracket Se toma $a > 0$, $b > 0$ y se nota que $s > 0$ excepto en el punto $(x, y) = (0, 0)$. Entonces $ab s > 0$ fuera del origen. \rrbracket

Ahora se puede describir la región elíptica R , con semiejes $a = 2$ y $b = 4$, así:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 \leq s \leq 1 \end{array} \right\} \text{ para } \left\{ \begin{array}{l} x = 2s \cos t \\ y = 4s \operatorname{sen} t \end{array} \right\}.$$

Al notar que $z = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2 = 4 - 4s^2 \cos^2 t - 4s^2 \operatorname{sen}^2 t = 4 - 4s^2$, se obtiene

$$\begin{aligned} \operatorname{Vol}(T) &= \iint_R z dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4 - 4s^2)(8s ds dt) \\ &= \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 (32s - 32s^3) ds = 2\pi(16 - 8) = 16\pi. \end{aligned} \quad \diamond$$

En el ejemplo anterior, se tomó el parámetro t entre 0 y 2π . Aunque t no coincide con el ángulo θ de coordenadas polares (es una versión distorsionada de θ) tiene una variación total de 2π mientras se recorre la elipse fronteriza. Cuando se emplean coordenadas polares ordinarias (r, θ) , el ángulo θ tiene la misma variación total de 2π . Entonces se puede tomar $0 \leq \theta \leq 2\pi$ o bien $-\pi \leq \theta \leq \pi$, según el gusto de cada quien. En adelante se usará la segunda opción, pues ofrece más oportunidades de integrar funciones pares o impares de θ .

Ejemplo 3.18. Calcular el área encerrada por una *cardioide*: la curva cuya ecuación en coordenadas polares es $r = a(1 + \cos \theta)$.

Como $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ para cada θ , se ve que los puntos (r, θ) de esta curva cumplen $0 \leq r \leq 2a$. Entonces la curva está comprendido dentro de un círculo grande de radio $2a$. \llbracket Por eso, el área encerrada no puede ser mayor que $4\pi a^2$; como se verá, es bastante menor que ese estimado. \rrbracket

El interior de la curva comprende radios desde el origen (véase la Figura 3.11). Entonces la región de integración, en coordenadas polares, es:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq a(1 + \cos \theta) \end{array} \right\}.$$

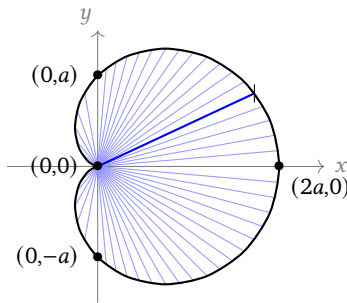


Figura 3.11: La cardioide $r = a(1 + \cos \theta)$

Se calcula el área en seguida:

$$\begin{aligned}
 A &= \iint_R dA = \iint_R r \, dr \, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{a(1+\cos \theta)} r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1 + \cos \theta)^2 \, d\theta = a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 \, d\theta = a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) \, d\theta \\
 &= a^2 \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) \, d\theta = a^2 \int_0^{\pi} \frac{3}{2} \, d\theta = \frac{3\pi}{2} a^2. \quad \diamond
 \end{aligned}$$

3.3. Integrales triples

La integración de funciones de tres variables $h(x, y, z)$ es completamente análoga al caso de dos variables. Ahora se habla de una **integral triple**:

$$I = \iiint_T h(x, y, z) \, dV = \iiint_T h(x, y, z) \, dz \, dy \, dx. \quad (3.17)$$

En coordenadas cartesianas (x, y, z) , el **elemento de volumen** es el contenido de un cubo pequeño $dV = dz \, dy \, dx$ (se puede multiplicar las longitudes dx, dy, dz de los lados del cubo en cualquier orden). Esto debe venir acompañado por una descripción algebraica del tipo:

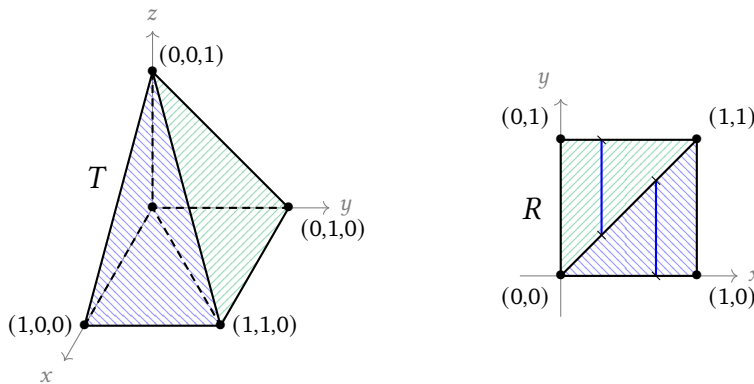
$$T = \left\{ \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \\ g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y) \end{array} \right\}. \quad (3.18)$$

Esta descripción de T viene de determinar el *alcance absoluto* de la variable x en un intervalo $a \leq x \leq b$; y para cada x en ese intervalo, el *alcance relativo* de la variable y es un intervalo $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$. Esto fija las primeras dos coordenadas (x, y) en una región R del plano xy , como en (3.7). En seguida, para cada (x, y) en R , se debe obtener

el *alcance relativo* de la variable z en un intervalo $g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)$. Con esta preparación, la integral triple (3.17) se calcula mediante una *integral iterada*:

$$\iiint_T h(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} h(x, y, z) dz dy dx.$$

Ejemplo 3.19. Calcular la integral triple $\iiint_T (1 - z^2) dz dy dx$, donde T es la pirámide con ápice $(0, 0, 1)$ y base cuadrada en el plano xy con vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$.



Al dibujar la pirámide T , se nota que T está incluido en el primer octante de \mathbb{R}^3 , de modo que $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. La *sombra* R de T (en el plano xy) es la base cuadrada antedicha. Sin embargo, el “techo” de T (es decir, los puntos con z maximal) es un par de facetas triangulares, cuyas sombras individuales dividen la base en dos triángulos:

$$R = R_1 \cup R_2 = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 1 \end{array} \right\}.$$

Sobre el triángulo R_1 , la faceta superior es el triángulo con vértices $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, que queda en el plano $x + z = 1$. En cambio, sobre el triángulo R_2 , la faceta superior es el triángulo con vértices $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$, que queda en el plano $y + z = 1$.

Estos planos se pueden escribir como $z = 1 - x$ y $z = 1 - y$, respectivamente. Ya se puede exhibir la descripción de T :

$$T = T_1 \cup T_2 = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \\ 0 \leq z \leq 1 - x \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 - y \end{array} \right\}.$$

Fíjese que las primeras dos filas de esta presentación de T son precisamente las filas de la sombra R .

El último paso es plantear las integrales iteradas y evaluarlas:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \int_0^x \int_0^{1-x} (1-z^2) dz dy dx + \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{1-y} (1-z^2) dz dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^x \left[z - \frac{1}{3}z^3 \right]_{z=0}^{z=1-x} dy dx + \int_0^1 \int_x^1 \left[z - \frac{1}{3}z^3 \right]_{z=0}^{z=1-y} dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^x (1-x) - \frac{1}{3}(1-x)^3 dy dx + \int_0^1 \int_x^1 (1-y) - \frac{1}{3}(1-y)^3 dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^x (1-x) - \frac{1}{3}(1-x)^3 dy dx + \int_0^1 \int_0^y (1-y) - \frac{1}{3}(1-y)^3 dx dy \\
 &= \int_0^1 \left\{ x(1-x) - \frac{1}{3}x(1-x)^3 \right\} dx + \int_0^1 \left\{ y(1-y) - \frac{1}{3}y(1-y)^3 \right\} dy \\
 &= 2 \int_0^1 \left\{ x(1-x) - \frac{1}{3}x(1-x)^3 \right\} dx = 2 \int_0^1 \left\{ (1-u)u - \frac{1}{3}(1-u)^3 \right\} du \\
 &= 2 \int_0^1 \left(u - u^2 - \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{3}u^4 \right) du = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12} + \frac{1}{15} \right) = 2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{15} \right) = \frac{3}{10}.
 \end{aligned}$$

En la cuarta línea, se hizo un cambio del orden de integración en la segunda integral doble; en la sexta línea, se combinó dos integrales de igual valor y se hizo la sustitución $u = 1 - x$; $du = -dx$; en la última línea se aplicó la fórmula $\int_0^1 u^n du = 1/(n + 1)$ para llegar al resultado. \diamond

En el ejemplo anterior, si se hubiera cambiado el integrando $(1 - z^2)$ en 1, se habría obtenido el volumen de la pirámide:

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(T) &= \iiint_T dV = 2 \int_0^1 \int_0^x \int_0^{1-x} dz dy dx = 2 \int_0^1 \int_0^x (1-x) dy dx \\
 &= 2 \int_0^1 x(1-x) dx = 2 \int_0^1 (x - x^2) dx = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Esto es consistente con la fórmula conocida para el volumen de una pirámide con base plana cualquiera: $\text{Vol} = \frac{1}{3}(\text{área de base}) \times \text{altura}$.

► El paso esencial en el cálculo de integrales triples es el de trazar *dos dibujos*: uno de la región sólida T de integración, y el otro de su sombra (o proyección) R en uno de los planos coordenados – usualmente en el plano xy .

Ejemplo 3.20. Hallar el **centro de masa** del sólido T en el primer octante, de densidad uniforme 1, limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $y = 6$, $z = 0$, y el cilindro $z = 4 - x^2$.

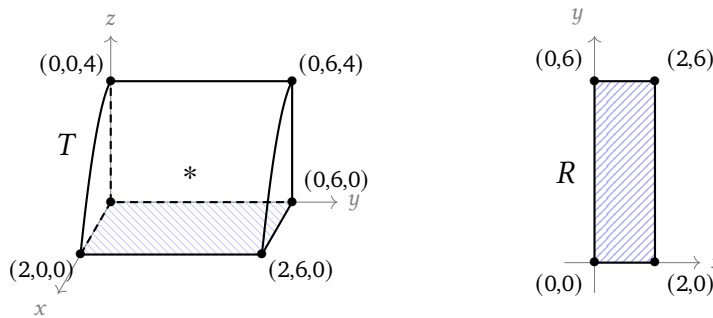
Un sólido material se caracteriza por su ubicación en el espacio (una región tridimensional T) y por su *densidad*, que puede ser uniforme (una constante ρ en unidades de masa por unidad de volumen) o bien no uniforme (una función $\rho(x, y, z)$ localizado en la región T). En este ejemplo $\rho \equiv 1$.

La **masa total** del sólido se calcula como $M := \iiint_T \rho \, dV$. Se puede considerar esa masa como la totalidad de unos *elementos de masa* dm :

$$M = \iiint_T dm, \quad \text{donde} \quad \underline{dm := \rho(x, y, z) \, dV = \rho(x, y, z) \, dz \, dy \, dx.} \quad (3.19)$$

El **centro de masa** de T es aquél punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ cuyas coordenadas son los *promedios ponderados* de x, y, z , respectivamente, con respecto a la distribución de masas:⁶

$$\boxed{\bar{x} := \frac{1}{M} \iiint_T x \, dm, \quad \bar{y} := \frac{1}{M} \iiint_T y \, dm, \quad \bar{z} := \frac{1}{M} \iiint_T z \, dm.} \quad (3.20)$$



La superficie $z = 4 - x^2$ es un cilindro parabólico (por la omisión de la variable y en su ecuación) que forma el “techo” de T . Los planos $y = 0$, $y = 6$ forman respectivamente su pared izquierda (oculta) y su pared derecha (visible). El rectángulo en el plano $x = 0$ forma su pared trasera (oculta) y otro rectángulo en el plano $z = 0$ forma su base (también oculta). La sombra R en el plano xy es ese rectángulo de base. Entonces:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 6 \\ 0 \leq z \leq 4 - x^2 \end{array} \right\}$$

donde las primeras dos filas describen la sombra R .

⁶Isaac Newton observó que un cuerpo celestial esférico de densidad uniforme ejerce una atracción gravitacional sobre otro objeto como si toda la masa del cuerpo estuviera concentrada en el centro de la esfera. Este fenómeno, que da sentido físico al concepto de una “partícula” puntual, fue demostrado geoméricamente por Newton en su libro *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, publicado en Londres en 1687.

Ahora se debe evaluar las cuatro integrales triples de las fórmulas (3.19) y (3.20):

$$\begin{aligned}
 M &:= \iiint_T 1 \, dV = \int_0^2 \int_0^6 \int_0^{4-x^2} dz \, dy \, dx = \int_0^2 \int_0^6 (4-x^2) \, dy \, dx \\
 &= \int_0^6 dy \int_0^2 (4-x^2) \, dx = 6 \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{x=0}^{x=2} = 6 \left(8 - \frac{8}{3} \right) = 32. \\
 M\bar{x} &= \iiint_T x \, dV = \int_0^2 \int_0^6 \int_0^{4-x^2} x \, dz \, dy \, dx = \int_0^2 \int_0^6 x(4-x^2) \, dy \, dx \\
 &= \int_0^6 dy \int_0^2 (4x-x^3) \, dx = 6 \left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_{x=0}^{x=2} = 6(8-4) = 24. \\
 M\bar{y} &= \iiint_T y \, dV = \int_0^2 \int_0^6 \int_0^{4-x^2} y \, dz \, dy \, dx = \int_0^2 \int_0^6 (4-x^2)y \, dy \, dx \\
 &= \int_0^6 y \, dy \int_0^2 (4-x^2) \, dx = 18 \left(8 - \frac{8}{3} \right) = 96. \\
 M\bar{z} &= \iiint_T z \, dV = \int_0^2 \int_0^6 \int_0^{4-x^2} z \, dz \, dy \, dx = \int_0^2 \int_0^6 \frac{1}{2}(4-x^2)^2 \, dy \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^6 dy \int_0^2 (16-8x^2+x^4) \, dx = \frac{6}{2} \left[16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_{x=0}^{x=2} \\
 &= 3 \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) = 3 \left(\frac{32}{3} + \frac{32}{5} \right) = 96 \times \frac{8}{15} = 32 \times \frac{8}{5} = \frac{256}{5}.
 \end{aligned}$$

Al dividir las últimas tres valores por $M = 32$, se obtiene

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{24}{32}, \frac{96}{32}, \frac{256}{160} \right) = \left(\frac{3}{4}, 3, \frac{8}{5} \right).$$

En el dibujo de T , el asterisco * denota la posición del centro de masa. ◇

Ejemplo 3.21. Calcular $I = \iiint_T x \, dV$, donde T es la región del primer octante limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y el paraboloides $z = x^2 + y^2$.

La superficie $z = x^2 + y^2$ es un paraboloides elíptico (véase la Figura 1.5). Los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$ y el plano horizontal $z = 2$ recortan el paraboloides a una región T en el primer octante cuyo borde inferior es el paraboloides y cuyo borde superior es el plano $z = 2$. La sombra R de T en el plano xy es un sector circular en el primer cuadrante, como se puede apreciar en el dibujo siguiente (Figura 3.12).

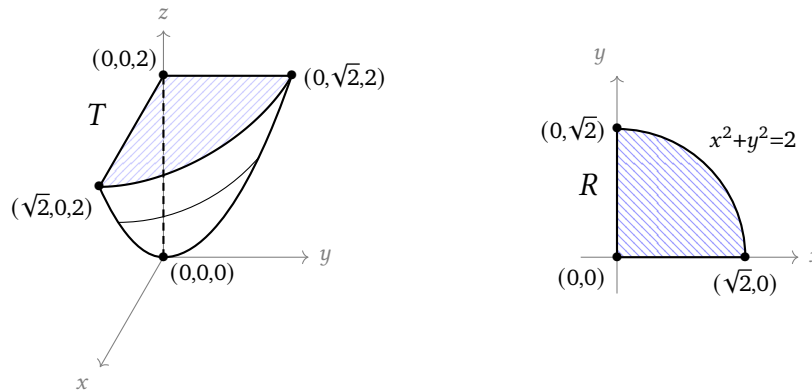


Figura 3.12: Un segmento de un paraboloido elíptico y su sombra

¿Cómo se puede determinar la sombra R algebraicamente? Se obtiene la proyección sobre el plano xy , cuya ecuación es $z = 0$, por eliminación de la variable z de las ecuaciones que definen el borde de T . En este ejemplo:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2 \end{cases} \implies \underline{x^2 + y^2 = 2}.$$

Entonces el borde de R está formado por un arco del círculo $x^2 + y^2 = 2$ y por segmentos de las rectas $x = 0$, $y = 0$ en el plano xy .

(Nótese que las ecuaciones $x = 0$, $y = 0$ no están afectadas por la eliminación de z : ellas dan los ejes coordenadas en el plano xy .) De ahí se deduce que R es un sector circular en el primer cuadrante, de ángulo $\frac{\pi}{2}$ y de radio $\sqrt{2}$.

Una descripción de T en coordenadas cartesianas es entonces:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq y \leq \sqrt{2-x^2} \\ x^2 + y^2 \leq z \leq 2 \end{array} \right\}$$

cuyas primeras dos filas describen la sombra R .

La integral deseada es

$$\begin{aligned} I &= \iiint_T x \, dV = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^2 x \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} x(2-x^2-y^2) \, dy \, dx = \iint_R x(2-x^2-y^2) \, dy \, dx. \end{aligned}$$

Para calcular esta integral doble, sería más eficiente cambiar a coordenadas polares:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq \sqrt{2} \end{array} \right\},$$

y se obtiene, con separación de variables:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} (r \cos \theta)(2 - r^2)(r \, dr \, d\theta) = \int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2r^2 - r^4) \, dr \\ &= 1 \times \left[\frac{2}{3}r^3 - \frac{1}{5}r^5 \right]_{r=0}^{r=\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{5} = 4\sqrt{2} \times \frac{2}{15} = \frac{8\sqrt{2}}{15}. \quad \diamond \end{aligned}$$

Cambio del orden en integrales triples

Las integrales triples con coordenadas cartesianas pueden ser calculadas por integrales iteradas de 6 maneras diferentes, dependiendo del orden de las variables que se usan para expresar el elemento de volumen:

$$dV = dz \, dy \, dx = dz \, dx \, dy = dy \, dz \, dx = dy \, dx \, dz = dx \, dz \, dy = dx \, dy \, dz.$$

El problema práctico con tales cambios es el siguiente: *¿cómo expresar la región de integración T en el nuevo orden de integración?*

En el orden $dz \, dy \, dx$, por ejemplo, el esquema (3.18) plantea la región T en términos de variaciones de x, y, z en ese orden, i.e., el orden de los símbolos integrales \int en la integral iterada. Para obtener una descripción alternativa de T , es cuestión de montar el dibujo del sólido T y luego *proyectarlo sobre otro plano coordenado*.

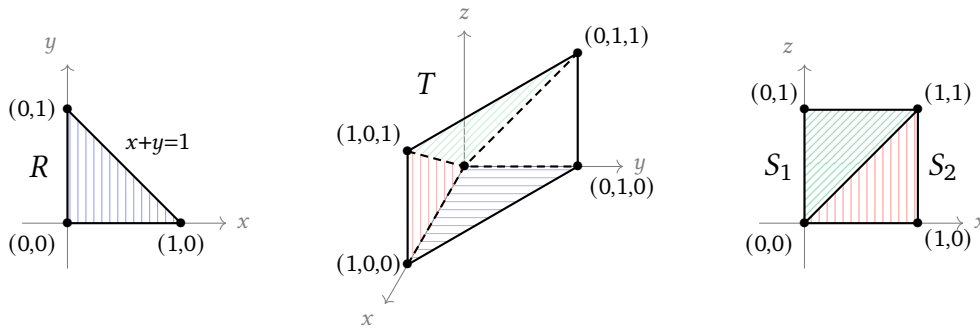
Ejemplo 3.22. Expresar la integral $I = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} h(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$ en el formato $\iiint_T h(x, y, z) \, dy \, dx \, dz$.

Obsérvese que no se ha declarado el integrando $h(x, y, z)$ con una fórmula explícita – y por lo tanto no será posible *evaluar* la integral. Lo que se pide es hallar las nuevas cotas de integración para el orden $dy \, dx \, dz$; ellos no dependen de cuál sea el integrando.

El procedimiento recomendado es hacer *tres dibujos*: la sombra R de T en el plano xy ; la figura tridimensional T , montada con la ayuda de R ; y la proyección S de T en el plano xz .

Del enunciado, se obtiene la siguiente descripción de T :

$$T = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \\ 0 \leq z \leq x + y \end{array} \right\} \quad \text{que incluye} \quad R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \end{array} \right\}.$$



Entonces R es un triángulo en el primer cuadrante del plano xy cuyo borde superior es la recta $y = 1 - x$, es decir $x + y = 1$. Esta R es la base del sólido T , donde la variación relativa de z es $0 \leq z \leq x + y$: en otras palabras, la altura z de un punto (x, y, z) de T va desde el plano xy del piso (cuya ecuación es $z = 0$) hasta el plano $z = x + y$, es decir $x + y - z = 0$.

Ahora se puede dibujar T : su base es el triángulo R en el plano xy y su techo es otro triángulo, la porción del plano $x + y - z = 0$ que queda encima de la base R . Los vértices del segundo triángulo son $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$.

Para describir T con miras al elemento de volumen $dV = dy dx dz$, se requiere proyectar T al plano xz . Del dibujo de T se aprecia que su sombra S a la izquierda es la sombra del rectángulo vertical con vértices $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$; esta S es el cuadrado con vértices $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 0)$ y $(0, 1)$ – al suprimir la coordenada y .

El borde derecho de T es el plano vertical $x + y = 1$, es decir $y = 1 - x$. El borde izquierdo, en cambio, comprende dos facetas de T : la pared izquierda $y = 0$ si (x, z) queda en el triángulo S_2 ; o bien el techo $y = z - x$ si (x, z) queda en el triángulo S_1 . (Esos dos triángulos en S colindan en la diagonal $z = x$, donde el techo y la pared izquierda se encuentran.)

De esas consideraciones se deduce la forma de la sombra S :

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq x \leq z \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 1 \\ z \leq x \leq 1 \end{array} \right\}.$$

Fíjese que S_1 y S_2 tienen descripciones “de tipo II”: primero se declara la variación absoluto de z y en seguida la variación relativa de x .

Al tomar en cuenta los extremos de la variable y , ya mencionados, se llega a la segunda descripción de T :

$$T = T_1 \cup T_2 = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq x \leq z \\ z - x \leq y \leq 1 - x \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 1 \\ z \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \end{array} \right\}.$$

La presentación de $I = \iiint_T h(x, y, z) dy dx dz$ sigue de inmediato:

$$I = \int_0^1 \int_0^z \int_{z-x}^{1-x} h(x, y, z) dy dx dz + \int_0^1 \int_z^1 \int_0^{1-x} h(x, y, z) dy dx dz. \quad \diamond$$

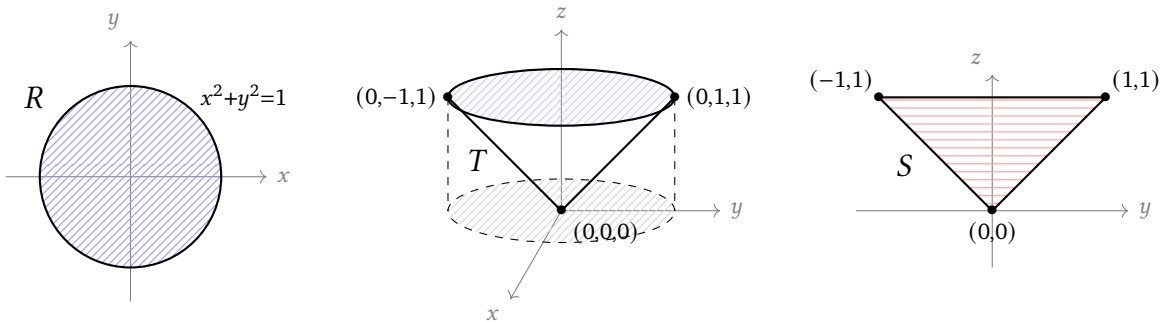
Ejemplo 3.23. Expresar la integral $I = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 h(x, y, z) dz dy dx$ en el formato $\iiint_T h(x, y, z) dx dy dz$.

El sólido T tiene la descripción:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1 \end{array} \right\} \quad \text{que incluye} \quad R = \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{array} \right\}.$$

En el plano xy , las curvas $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ son los semicírculos superior e inferior del círculo $y^2 = 1-x^2$, es decir $x^2 + y^2 = 1$. Entonces R es el disco circular de radio 1 centrado en $(0, 0)$.

El techo de T , con z maximal, es parte del plano $z = 1$. El borde inferior, dado por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, es una porción del cono $z^2 = x^2 + y^2$ (con $z \geq 0$). Teniendo en cuenta que la sombra es el disco R , se deduce que T es un “tromo”: una tajada del cono sólido.



Se requiere proyectar T sobre el plano yz (la pantalla). Es evidente que la nueva sombra S – la silueta de T – es un triángulo, con vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(-1, 1)$. Los límites trasero y delantero de T , que determinan el alcance relativo de la variable x , ambos son partes del cono $x^2 = z^2 - y^2$, es decir $x = \pm\sqrt{z^2 - y^2}$. Entonces

$$S = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 1 \\ -z \leq y \leq z \end{array} \right\} \quad \text{y luego} \quad T = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 1 \\ -z \leq y \leq z \\ -\sqrt{z^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{z^2 - y^2} \end{array} \right\}.$$

$$\text{En fin,} \quad I = \int_0^1 \int_{-z}^z \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} h(x, y, z) dx dy dz. \quad \diamond$$

3.4. Coordenadas cilíndricas y esféricas

A veces es preferible evaluar una integral triple en un sistema de coordenadas no cartesianas. En el espacio \mathbb{R}^3 , se conocen dos sistemas análogos a los coordenadas polares del plano \mathbb{R}^2 . En cada caso, es necesario determinar la expresión del elemento de volumen dV en las nuevas coordenadas.

Coordenadas cilíndricas en \mathbb{R}^3

En primer lugar, es posible combinar las coordenadas polares (r, θ) de \mathbb{R}^2 directamente con la coordenada cartesiana vertical z . Esta combinación ya fue usada – sin declararla abiertamente – en el Ejemplo 3.21: la primera integración con respecto a z fue seguida por un cambio $(x, y) \mapsto (r, \theta)$. El elemento de volumen en tal caso es

$$dV = dz (dy dx) = dz (r dr d\theta) \implies \boxed{dV = r dz dr d\theta.} \quad (3.21)$$

En el Ejemplo 3.21, se declara el sólido T en estas coordenadas como sigue:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq \sqrt{z} \\ r^2 \leq z \leq 2 \end{array} \right\}.$$

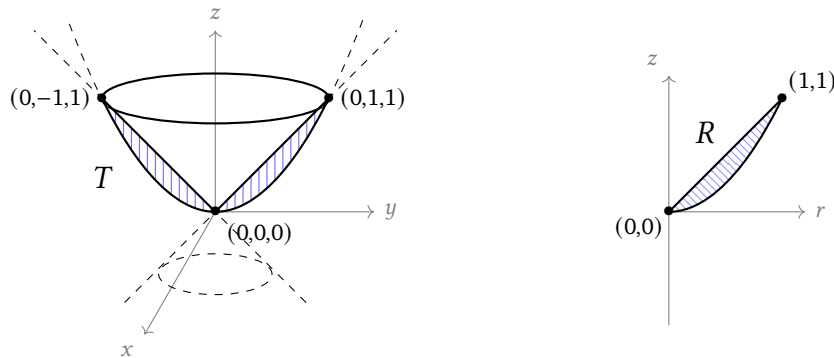
La manera de escribir el elemento de volumen (3.21) – leyéndolo de derecha a izquierda – indica el protocolo que se debe seguir: primero el alcance absoluto de θ ; luego el alcance de r , relativo a θ ; finalmente el alcance de z , relativo a (r, θ) .

► Las coordenadas (r, θ, z) se llaman **coordenadas cilíndricas**. En parte, este nombre se debe a las superficies de valor constante:

- ◊ la superficie $z = z_0$ es un plano horizontal;
- ◊ la superficie $\theta = \alpha$ es un semiplano vertical, bordeado por el eje z , que forma un ángulo α con el semiplano vertical $x \geq 0$ (que a su vez es $\theta = 0$);
- ◊ la superficie $r = r_0$ es un *cilindro* recto circular $x^2 + y^2 = r_0^2$, centrado en el eje z .

Ejemplo 3.24. Hallar el volumen limitado por el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y el paraboloides $z = x^2 + y^2$.

Estas dos ecuaciones representan superficies de revolución alrededor del eje z , porque sus ecuaciones tienen la forma $f(x^2 + y^2, z) = 0$ de (1.9); es decir, las variables x, y sólo entran en la combinación $x^2 + y^2$.



Ellas se cortan cuando $\underline{z^2 = z}$ (que implica $z = 0$ ó 1). Esa intersección comprende:

$$\text{el círculo } \left\{ \begin{array}{l} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right\} \text{ y el punto } (0, 0, 0).$$

El volumen limitado por las dos superficies entonces queda entre los planos horizontales $z = 0$ y $z = 1$. (No hay puntos del paraboloido debajo del plano $z = 0$; y encima del plano $z = 1$, tanto el cono como el paraboloido son superficies abiertas que no encierran un volumen.) Una mirada al dibujo indica que en el volumen encerrado, el cono es el borde *superior* y el paraboloido es el borde *inferior*.

Como las dos superficies son de revolución (en el eje z), sus ecuaciones en coordenadas cilíndricas son $\underline{z = r}$ (el cono) y $\underline{z = r^2}$ (el paraboloido) – independientes de la variable angular θ . Esto dice que cualquier corte con un semiplano vertical $\theta = \alpha$ (constante) tendrá la misma forma. En la parte derecha del dibujo, se aprecia el *semiplano* zr (pues $r \geq 0$ siempre) donde el volumen encerrado T corresponde a un área encerrada R . Entonces T se escribe así:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ r^2 \leq z \leq r \end{array} \right\} \text{ que incluye } R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ r^2 \leq z \leq r \end{array} \right\}.$$

Al haber dos superficies de revolución, el alcance de θ es un intervalo de longitud 2π , que podría ser $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (aceptable) o bien $-\pi \leq \theta \leq \pi$ (recomendable).

El volumen deseado se calcula en seguida:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(T) &= \iiint_T dV = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^r r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 (r^2 - r^3) \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^1 (r^2 - r^3) \, dr = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6}. \quad \diamond \end{aligned}$$

Coordenadas esféricas en \mathbb{R}^3

Otra variante de coordenadas polares, aplicable al espacio \mathbb{R}^3 , usa la distancia desde el origen $\rho := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ [se usa la letra ρ para no confundirla con $r := \sqrt{x^2 + y^2}$] y dos parámetros angulares, θ y ϕ , que son similares aunque no iguales a los meridianos y paralelos de los cartógrafos usan para representar el globo terrestre.

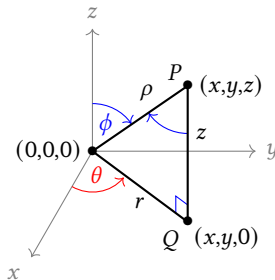


Figura 3.13: Coordenadas esféricas

El ángulo θ es el mismo ángulo que aparece en las coordenadas cilíndricas (o en las coordenadas polares del plano xy). Esta θ se llama el **ángulo acimutal**. El otro ángulo ϕ , llamado el **ángulo polar**,⁷ es el ángulo formado por el eje z positivo y el segmento que va desde el origen al punto (x, y, z) : véase la Figura 3.13.

Si $O = (0, 0, 0)$ es el origen, $P = (x, y, z)$ es el punto de interés, y $Q = (x, y, 0)$ es la proyección de P en el plano xy , entonces $\triangle OQP$ es un triángulo rectangular (pues OQ es horizontal y QP es vertical), con catetos $r = |OQ|$, $z = |QP|$, y hipotenusa $\rho = |OP|$. Por ser QP paralelo al eje z , el ángulo $\angle QPO$ es igual a ϕ . Entonces:

$$z = \rho \cos \phi, \quad r = \rho \sen \phi. \tag{3.22}$$

Cuando se combinan estas relaciones con las fórmulas $x = r \cos \theta$, $y = r \sen \theta$ de coordenadas polares, se obtiene las fórmulas de cambio de variable entre coordenadas esféricas y cartesianas:

$\begin{aligned} x &= \rho \sen \phi \cos \theta \\ y &= \rho \sen \phi \sen \theta \\ z &= \rho \cos \phi \end{aligned}$	donde	$\begin{aligned} -\pi &\leq \theta \leq \pi \\ 0 &\leq \phi \leq \pi \\ \rho &\geq 0 \end{aligned}$
---	-------	---

(3.23)

Nótese que el ángulo acimutal θ tiene una variación de 2π , pero el ángulo polar ϕ solo tiene una variación de π . En efecto, $\phi = 0$ en el eje z positivo; $\phi = \pi$ en el eje z negativo; mientras $\phi = \pi/2$ para puntos en el plano xy horizontal.

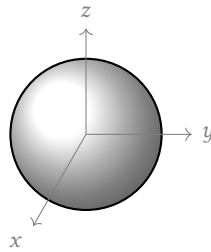
⁷En libros y textos de física, se suele cambiar los nombres de los ángulos: en ellos θ designa el ángulo polar, y ϕ denota el ángulo acimutal.

► El **elemento de volumen** para el sistema de coordenadas esféricas es el siguiente:

$$dV = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta. \quad (3.24)$$

En breve se explicará cómo se obtuvo este factor de magnificación local $\rho^2 \operatorname{sen} \phi$. Por ahora, cabe observar que solo el primero de las tres parámetros (ρ, ϕ, θ) tiene dimensión de longitud, porque ϕ y θ son ángulos sin dimensión. Por lo tanto, el factor de magnificación local debe tener las dimensiones de una área: de ahí se nota que la componente ρ^2 es obligatoria. (Falta explicar el término $\operatorname{sen} \phi$ en la fórmula (3.24).)

Ejemplo 3.25. Determinar el volumen de una bola esférica de radio a , con $a > 0$.



Dada una esfera de radio a , conviene situar el origen de coordenadas en el centro de la esfera. Entonces la ecuación cartesiana de la esfera es $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. En coordenadas esféricas, su ecuación es $\rho = a$.

La descripción de la bola sólida T en coordenadas esféricas es:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq a \end{array} \right\}.$$

En efecto, los ángulos ϕ y θ sólo están limitados por sus alcances máximos, tomados de la fórmula (3.23). La variable ρ va desde $\rho = 0$ (en el origen) hasta $\rho = a$ en la superficie de la bola. Entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{Vol}(T) &= \iiint_T dV = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \phi \, d\phi \int_0^a \rho^2 \, d\rho = 2\pi \times 2 \times \frac{a^3}{3} = \frac{4\pi}{3} a^3. \end{aligned}$$

En la integral triple es posible separar las variables, porque el integrando es un producto de tipo $f(\theta)g(\phi)h(\rho)$ [con $f(\theta) \equiv 1$, $g(\phi) = \operatorname{sen} \phi$, $h(\rho) = \rho^2$] y además todas las cotas de integración son constantes.

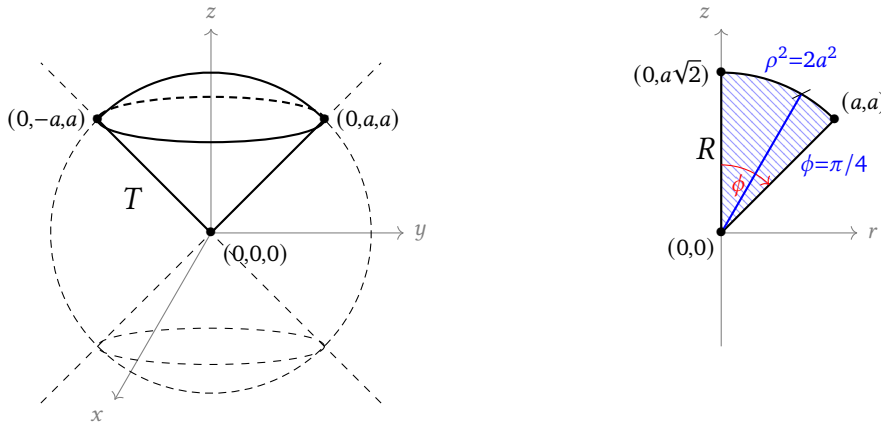
De este modo se ha logrado *deducir* la fórmula conocida $(4\pi/3)a^3$ para el volumen de una esfera de radio a . \diamond

Ejemplo 3.26. Hallar el volumen del sólido (“cono de helado”) acotado superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$, e inferiormente por el cono $z^2 = x^2 + y^2$.

La intersección de la esfera y el cono consiste de las soluciones simultáneas a las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \implies \begin{cases} 2z^2 = 2a^2 \\ 2(x^2 + y^2) = 2a^2 \end{cases}$$

o bien: $z = \pm a$; $x^2 + y^2 = a^2$. (Se puede suponer que $a > 0$.) Estas ecuaciones corresponden a *dos círculos*, ambos de radio a , uno en el plano horizontal $z = a$ y el otro en el plano horizontal $z = -a$. Una mirada al dibujo permite descartar la segunda opción: el círculo en el plano $z = a$ separa una capa esférica superior (el “helado”) de una pared cónica inferior (la “galleta”).



Como las dos superficies son de revolución alrededor del eje z (las coordenadas x, y solo entran en la combinación $x^2 + y^2$), el ángulo acimutal θ tiene su alcance maximal: $-\pi \leq \theta \leq \pi$, y conviene considerar *un corte con θ constante*. En coordenadas cilíndricas las superficies son $r^2 + z^2 = 2a^2$ (la esfera) y $z = r$ (el cono).

En el semiplano rz (al lado derecho de la figura) los parámetros (r, z) sirven como coordenadas *cartesianas*, y los parámetros (ρ, ϕ) sirven como coordenadas *polares*, en virtud de las fórmulas (3.22):

$$z = \rho \cos \phi, \quad r = \rho \operatorname{sen} \phi. \tag{3.22'}$$

Entonces, el corte vertical R de T para θ constante admite dos descripciones:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq a \\ r \leq z \leq \sqrt{2a^2 - r^2} \end{array} \right\} \quad \text{o bien} \quad R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \phi \leq \pi/4 \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{2} a \end{array} \right\}.$$

Ahora se puede combinar estas descripciones con el alcance de θ para poder expresar el sólido T en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq a \\ r \leq z \leq \sqrt{2a^2 - r^2} \end{array} \right\} \quad \text{o bien} \quad T = \left\{ \begin{array}{l} -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi/4 \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{2} a \end{array} \right\}.$$

Para calcular el volumen con coordenadas cilíndricas, se debe evaluar

$$\begin{aligned} \text{Vol}(T) &= \iiint_T dV = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a \int_r^{\sqrt{2a^2-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a \left[rz \right]_{z=r}^{z=\sqrt{2a^2-r^2}} dr \, d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^a (r\sqrt{2a^2-r^2} - r^2) \, dr = 2\pi \left(\int_{a^2}^{2a^2} u^{1/2} \left(\frac{1}{2} du\right) - \int_0^a r^2 \, dr \right) \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{3} u^{3/2} \right]_{u=a^2}^{u=2a^2} - 2\pi \frac{a^3}{3} = \frac{2\pi}{3} ((2\sqrt{2}a^3 - a^3) - a^3) = \frac{4\pi}{3} (\sqrt{2} - 1) a^3. \end{aligned}$$

En este cálculo, se hizo la sustitución $u := 2a^2 - r^2$; $du = -2r \, dr$.

Para calcular el volumen con coordenadas esféricas, es cuestión de evaluar

$$\begin{aligned} \text{Vol}(T) &= \iiint_T dV = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{2} a} \rho^2 \, \text{sen } \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2} a} \rho^2 \, d\rho \int_0^{\pi/4} \text{sen } \phi \, d\phi \\ &= 2\pi \times \frac{1}{3} (\sqrt{2} a)^3 \times \left[-\cos \phi \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/4} = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3} a^3 \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1\right) = \frac{4\pi}{3} (\sqrt{2} - 1) a^3. \end{aligned}$$

En coordenadas esféricas, la integral iterada es separable, al tener cotas de integración constantes con integrando en forma de producto, $\rho^2 \text{sen } \phi$. ◇

Evidentemente, los dos cálculos en el ejemplo anterior dan el mismo resultado, como es debido; pero la opción de usar coordenadas esféricas resultó más sencilla *en este caso particular*.

También es oportuno notar que el volumen calculado es *plausible*. En efecto, las esfera, de radio $\sqrt{2} a$, tiene volumen total $(4\pi/3)(2\sqrt{2} a^3)$, en vista del Ejemplo 3.25. El volumen del “cono de helado” entonces es $(\sqrt{2} - 1)/2\sqrt{2} = (2 - \sqrt{2})/4$ veces el volumen de la esfera. Como $(2 - \sqrt{2})/4 \doteq 0.147 \doteq \frac{1}{7}$ aproximadamente, el volumen calculado es levemente mayor que una séptima parte de la esfera grande: una mirada al dibujo confirma esa proporción.

Ejemplo 3.27. Calcular la integral $I = \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2} dz dy dx$.

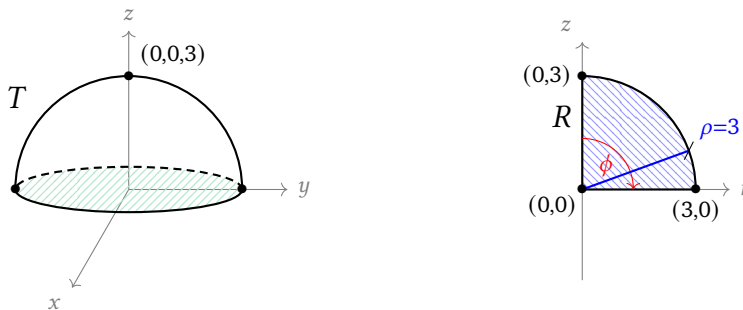
La región de integración, en coordenadas cartesianas, es:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} -3 \leq x \leq 3 \\ -\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2} \end{array} \right\}.$$

Por experiencia previa, se puede intuir que la variación de las variables x, y define un disco circular. En efecto, las cotas para y son: $y = \pm\sqrt{9-x^2}$, o bien $y^2 = 9-x^2$. Este es el círculo $x^2 + y^2 = 9$ en el plano xy . (Las raíces cuadradas $y = \pm\sqrt{9-x^2}$ corresponden a los semicírculos inferior y superior.)

Por otro lado, la ecuación $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$ implica $z^2 = 9-x^2-y^2$ o bien $x^2 + y^2 + z^2 = 9$: una esfera de radio 3 centrada en el origen $(0,0,0)$. La raíz cuadrada positiva $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$ corresponde al hemisferio superior – cuya sombra en el plano del piso es el disco circular de radio 3, ya mencionado.

Con esta información se puede montar el dibujo de la región T : es la mitad superior de una bola sólida de radio 3. (La cota inferior $z = 0$ es el plano xy .) En vista de esta forma de T y el aspecto del integrando, se recomienda pasar a coordenadas esféricas.



El hemisferio es una superficie de revolución (*par excellence*, como dicen los franceses). Luego se sabe que $-\pi \leq \theta \leq \pi$, y un corte vertical con θ constante es un sector circular R en el semiplano rz . Del dibujo de R se aprecia que $0 \leq \phi \leq \pi/2$, al recordar que el ángulo ϕ se mide del eje z positivo hacia abajo. La cota máxima para ρ es la esfera $\rho^2 = 9$, es decir $\rho = 3$. En síntesis:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi/2 \\ 0 \leq \rho \leq 3 \end{array} \right\}.$$

El integrando es $z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (\rho \cos \phi)\rho = \rho^2 \cos \phi$. Ahora se puede calcular I por separación de variables:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^3 (\rho^2 \cos \phi) \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \cos \phi \operatorname{sen} \phi \, d\phi \int_0^3 \rho^4 \, d\rho \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \phi \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} \left[\frac{1}{5} \rho^5 \right]_{\rho=0}^{\rho=3} = 2\pi \times \frac{1}{2} \times \frac{243}{5} = \frac{243\pi}{5}. \quad \diamond \end{aligned}$$

Otros sistemas de coordenadas curvilíneas

Hay otros cambios de variables posibles en el espacio \mathbb{R}^3 que pueden ayudar a simplificar el cálculo de integrales triples. Se trata de expresar las coordenadas cartesianas (x, y, z) en términos de nuevas coordenadas (u, v, w) :

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \quad (3.25)$$

donde $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ son funciones diferenciables. Tal como se hizo con cambios de dos variables, es útil emplear una notación vectorial:

$$\begin{aligned} \vec{r}(u, v, w) &:= (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)), \\ \vec{r}_u &= (x_u, y_u, z_u), \quad \vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v), \quad \vec{r}_w = (x_w, y_w, z_w). \end{aligned}$$

Razonando por analogía con el caso de dos variables, véase la Figura 3.9, las ecuaciones $u = u_0$, $v = v_0$, $w = w_0$ determinan tres superficies que pasan por el punto $\vec{r}(u_0, v_0, w_0)$. El factor de magnificación local en este punto es el volumen de un paralelepípedo con lados $\vec{r}_u \, du$, $\vec{r}_v \, dv$ y $\vec{r}_w \, dw$, proporcionales a incrementos du , dv , dw .

Ahora bien, la fórmula para el volumen de un paralelepípedo es (el valor absoluto de) el producto triple de tres lados adyacentes:

$$dV = |\vec{r}_u \, du \cdot (\vec{r}_v \, dv \times \vec{r}_w \, dw)| = |\vec{r}_u \cdot (\vec{r}_v \times \vec{r}_w)| \, du \, dv \, dw. \quad (3.26)$$

El producto triple de los vectores tangentes se calcula así:

$$\begin{aligned} \vec{r}_u &= (x_u, y_u, z_u), \quad \vec{r}_v \times \vec{r}_w = (y_v z_w - y_w z_v, z_v x_w - z_w x_v, x_v y_w - x_w y_v) \\ \implies \vec{r}_u \cdot (\vec{r}_v \times \vec{r}_w) &= x_u(y_v z_w - y_w z_v) + y_u(z_v x_w - z_w x_v) + z_u(x_v y_w - x_w y_v). \end{aligned}$$

Esta cantidad se organiza mejor como *un determinante* 3×3 de las nueve derivadas parciales – es decir, el **jacobiano** del cambio de variable:

$$\vec{r}_u \cdot (\vec{r}_v \times \vec{r}_w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}. \quad (3.27)$$

Entonces, el *factor de magnificación local* para el cambio de variable (3.25) es el *valor absoluto del jacobiano*, muy análoga al caso (3.14) de dos variables:

$$dx \, dy \, dz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du \, dv \, dw. \quad (3.28)$$

► Este es el momento oportuno para justificar el elemento de volumen (3.24) para las coordenadas esféricas. En efecto, de las fórmulas de cambio ya anotadas:

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \quad (3.23')$$

se obtiene:⁸

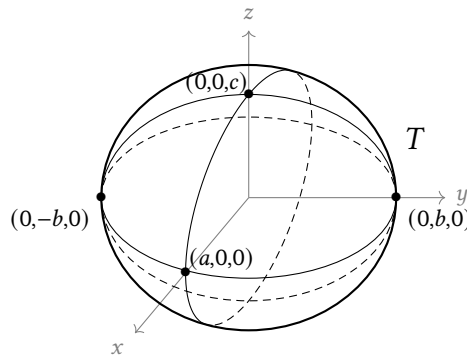
$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} &= \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -\rho \operatorname{sen} \phi & 0 \end{vmatrix} \\ &= \cos \phi \begin{vmatrix} \rho \cos \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \end{vmatrix} + \rho \operatorname{sen} \phi \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= \cos \phi (\rho^2 \cos \phi \operatorname{sen} \phi) (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) + \rho \operatorname{sen} \phi (\rho \operatorname{sen}^2 \phi) (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) \\ &= \cos \phi (\rho^2 \cos \phi \operatorname{sen} \phi) + \rho \operatorname{sen} \phi (\rho \operatorname{sen}^2 \phi) \\ &= \rho^2 \operatorname{sen} \phi (\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi) = \rho^2 \operatorname{sen} \phi, \end{aligned} \quad (3.29)$$

al aplicar la fórmula de Pitágoras, $\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$, dos veces.

Conviene notar que $\rho = 0$ sólo en el origen; y que $\operatorname{sen} \phi = 0$ solo si $\phi = 0$ ó π , solo si el punto (ρ, ϕ, θ) queda en el eje z . Entonces $\rho^2 \operatorname{sen} \phi > 0$ fuera del eje z , cuyo volumen es nulo; y el jacobiano de este cambio de variables coincide con su valor absoluto. Con todo, se ha comprobado la fórmula $dV = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$.

⁸Hay varias maneras equivalentes de evaluar un determinante 3×3 . Aquí se ha usado una “expansión en la tercera fila”.

Ejemplo 3.28. Calcular la integral $I = \iiint_T \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dz dy dx$ donde T es el interior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.



Se puede considerar el elipsoide como una esfera (de radio 1) distorsionada, donde sus coordenadas cartesianas quedan estiradas por los factores a, b, c respectivamente. (Se puede suponer que estos tres factores tienen signo positivo.)

Esto sugiere la posibilidad de modificar las coordenadas esféricas por esos factores de proporcionalidad:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a r \cos s \cos t \\ y = b r \cos s \sin t \\ z = c r \sin s \end{array} \right\} \text{ y por lo tanto, } T = \left\{ \begin{array}{l} -\pi \leq t \leq \pi \\ 0 \leq s \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{array} \right\}.$$

En este caso, las cantidades $x/a, y/b, z/c$ tienen cuadradas que suman r^2 , por la fórmula de Pitágoras:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2(\cos^2 s (\cos^2 t + \sin^2 t) + \sin^2 s) = r^2(\cos^2 s + \sin^2 s) = r^2.$$

Es necesario calcular un jacobiano para obtener el elemento de volumen en las nuevas coordenadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, s, t)} &= \begin{vmatrix} a \cos s \cos t & b r \cos s \cos t & -c r \cos s \sin t \\ a \cos s \sin t & b r \cos s \sin t & c r \cos s \cos t \\ a \sin s & -b r \sin s & 0 \end{vmatrix} \\ &= abc \begin{vmatrix} \cos s \cos t & r \cos s \cos t & -r \cos s \sin t \\ \cos s \sin t & r \cos s \sin t & r \cos s \cos t \\ \sin s & -r \sin s & 0 \end{vmatrix} = abc r^2 \cos s. \end{aligned}$$

En el último cálculo, se aprovechó la posibilidad de sacar un factor común de cada columna del determinante; y la feliz circunstancia de que el segundo determinante es idéntico a aquél que figuró en el cálculo (3.29), excepto por los nombres de las variables.

Con esta preparación, el integral del enunciado ya se puede evaluar:

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_T r^2 dV = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 (abc r^2 \sen s dr ds dt) \\
 &= abc \int_{-\pi}^{\pi} dt \int_0^{\pi} \sen s ds \int_0^1 r^4 dr = abc \times 2\pi \times 2 \times \frac{1}{5} = \frac{4\pi}{5} abc. \quad \diamond
 \end{aligned}$$

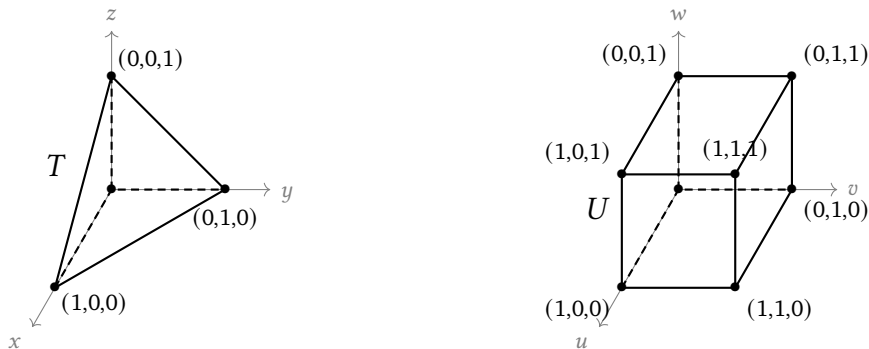
Ejemplo 3.29. Usar el cambio de variable:

$$(x, y, z) = (u(1 - v), uv(1 - w), uvw)$$

para calcular la integral $I = \iiint_T \frac{dx dy dz}{y + z}$ donde T es el tetraedro en el primer octante limitado por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.

En primer lugar, nótese que $y + z = uv$; además, $x + y + z = u(1 - v) + uv = u$. Entonces el plano $x + y + z = 1$ corresponde a $u = 1$.

Este cambio de variable es muy análogo al cambio del Ejercicio 3.14 en el plano, que transformó un triángulo en el plano xy a un cuadrado en el plano uv . Aquí se puede hacer un análisis similar, transformando los planos fronterizos de T en superficies de un sólido U en el espacio uvw .



El borde de T está formado por cuatro planos:

$$\begin{aligned}
 z = 0 & : uvw = 0, \\
 y = 0 & : uv(1 - w) = 0, \\
 x = 0 & : u(1 - v) = 0, \\
 x + y + z = 1 & : u = 1.
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones a la derecha se factorizan en ecuaciones de planos: $u = 0$ (contado tres veces); $v = 0$ (que aparece dos veces); $w = 0$; $w = 1$; $v = 1$; y $u = 1$. Estos son los planos que limitan el *cubo unitario*, con vértices opuestos $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$.

Hace falta calcular el jacobiano, que dará el elemento de volumen. Como

$$x = u - uv, \quad y = uv - uvw, \quad z = uvw,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} &= \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v-vw & u-uw & -uv \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} \\ &= (1-v) \begin{vmatrix} u-uw & -uv \\ uw & uv \end{vmatrix} + u \begin{vmatrix} v-vw & -uv \\ vw & uv \end{vmatrix} \\ &= (1-v)(u^2v) + u(uv^2) = u^2v. \end{aligned}$$

Como $u \geq 0$, $v \geq 0$ en el sólido U , se obtiene $dV = u^2v \, du \, dv \, dw$. Entonces

$$I = \int_U \frac{u^2v \, du \, dv \, dw}{uv} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 u \, du \, dv \, dw = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

por separación de variables. ◇

4 Análisis vectorial

Clearly Thomson knew of Green's theorem in 1845, but in a postscript to a letter (dated July 2, 1850) that he wrote to an academic friend at Cambridge, George Stokes (1819–1903), Thomson mentioned the theorem but neither gave a proof of it nor mentioned Green's authorship. In February 1854 Stokes made the proof of the theorem an examination question at Cambridge – on a test, it is amusing to note, taken by a youthful James Clerk Maxwell. Maxwell (1831–79) later developed the mathematical theory of electromagnetics in his 1873 masterpiece Electricity and Magnetism where, in a footnote to article 24, he attributes the theorem to Stokes. So, today, the theorem is often called – you guessed it – Stokes' theorem.

— Paul J. Nahin¹

Las integrales múltiples del capítulo anterior tienen dominios de integración que son regiones del plano o del espacio (o más generalmente, de \mathbb{R}^n con $n \geq 2$). Hay otra clase de integrales cuyos dominios son de otra naturaleza: podrían ser curvas en el plano o el espacio (que determinan integrales de línea) o bien superficies en el espacio (subyacentes a integrales de superficie). Estas dos clases de integrales, a su vez, se clasifican según el tipo de integrando, que puede ser una función escalar $f(x, y)$ o $f(x, y, z)$; o bien una función vectorial $\vec{F}(x, y)$ o $\vec{F}(x, y, z)$ con dos o tres componentes.

La tarea común que exige la evaluación de estas integrales es la *parametrización* del dominio de integración, sea esta una curva o una superficie, para reducir integrales de línea a integrales simples (de una variable) o transformar integrales de superficie en integrales dobles.

4.1. Integrales de línea

En la sección 1.4 se consideró un juego de curvas en \mathbb{R}^3 definidas por funciones vectoriales de un parámetro t . Es posible especificar un *trozo de curva* C , limitando los valores de t a un intervalo finito:

$$C : \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \text{con } \underline{a \leq t \leq b}. \quad (4.1)$$

Se supondrá que la función $t \mapsto \vec{r}(t)$ es diferenciable, para usar los métodos de la § 1.4.

De ahora en adelante, se considerará curvas en el espacio de tipo (4.1), pero se admiten también curvas planas en \mathbb{R}^2 al suprimir la tercera componente de cada vector.

¹En su libro *An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$* , Princeton, NJ, 1998.

► La primera clase de integrales de línea tiene el formato:

$$I = \int_C f(x, y, z) ds, \tag{4.2}$$

donde el integrando $f(x, y, z)$ está definido en cada punto (x, y, z) de la curva C ; y ds representa un **elemento de longitud de arco** a lo largo de C .

Al parametrizar la curva C , la sustitución obvia $ds = s'(t) dt$ se combina con la definición (1.16) de s como la integral indefinida de la rapidez del recorrido para obtener:

$$ds = \|\vec{r}'(t)\| dt. \tag{4.3}$$

Entonces la integral de línea (4.2) de la primera clase se evalúa como integral simple:

$$\int_C f(x, y, z) ds := \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt. \tag{4.4}$$

Algo notable de la integral (4.4) es que *no depende de la dirección del recorrido* de la curva C . El mismo trozo de curva se puede *reparametrizar* con $u := a + b - t$; $du = -dt$, con $b \geq u \geq a$. Fíjese que $u = b$ cuando $t = a$; $u = a$ cuando $t = b$, y que la función vectorial $u \mapsto \vec{r}(u)$ recorre la misma trayectoria C en el sentido contrario. Además,

$$\int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_b^a f(\vec{r}(u)) \|\vec{r}'(u)\| (-du) = \int_a^b f(\vec{r}(u)) \|\vec{r}'(u)\| du.$$

Por lo tanto, esta primera clase de integrales de línea a veces se llama *integrales de trayectoria*.²

Ejemplo 4.1. Calcular $I = \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$, donde C es el trozo finito de la hélice $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ entre los puntos $(1, 0, 0)$ y $(1, 0, 2\pi)$.

Esta curva C es una variante de la hélice del Ejemplo 1.5, cuya sombra en el plano xy es el círculo de radio 1 centrado en el origen, recorrido una sola vez en el sentido usual (antihorario) cuando $0 \leq t \leq 2\pi$. Véase la Figura 4.1.

El integrando, en puntos de la curva C , es:

$$f(\vec{r}(t)) = x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = 1 + t^2.$$

Para el elemento de longitud de arco, se obtiene

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t) \implies \vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \implies \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2},$$

²Este es el término empleado por los traductores del libro de Marsden y Tromba, *Cálculo Vectorial*.

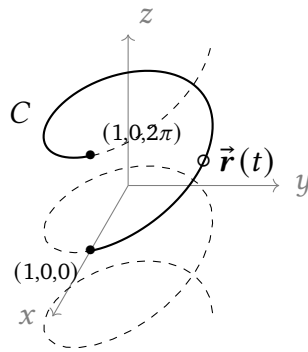


Figura 4.1: Un trozo de una hélice

así que $ds = \sqrt{2} dt$. Entonces

$$\begin{aligned}
 I &= \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} (1 + t^2) (\sqrt{2} dt) = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2) dt \\
 &= \sqrt{2} \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = \sqrt{2} \left(2\pi + \frac{8\pi^3}{3} \right) = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} (3 + 4\pi^2). \quad \diamond
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2. Calcular $I = \int_C xy ds$, donde C es el contorno del rombo $|3x| + |2y| = 12$.

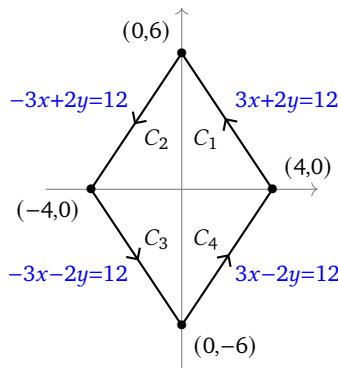


Figura 4.2: Un rombo es una cadena de segmentos consecutivos

Un rombo (esto es, un paralelogramo con lados de igual longitud) es una cadena de 4 segmentos. Si se parametriza esta curva por $t \mapsto \vec{r}(t)$, esta función no será diferenciable en los vértices del rombo.³ Pero eso no representa un obstáculo: sólo es necesario usar una parametrización diferente en cada segmento.

³ Sería suficiente tomar $\vec{r}(t)$ “diferenciable por trozos”: el intervalo $a \leq t \leq b$ queda subdividido en una cadena de subintervalos, con $\vec{r}(t)$ diferenciable en cada subintervalo por separado.

El rombo C es una *cadena* de segmentos *consecutivos*, véase la Figura 4.2:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

donde el símbolo $+$ indica que la curva que sigue empieza en el punto en donde el anterior termina. En este ejemplo, C_1 empieza en $(4, 0)$ y C_4 termina en el mismo punto $(4, 0)$: entonces C es una **curva cerrada**. (Esto es, el punto final de C coincide con su punto inicial.) Se suele usar el símbolo \oint para denotar una integral sobre una curva cerrada.

La integral de línea deseada es:

$$I = \oint_C xy \, ds = \int_{C_1} xy \, ds + \int_{C_2} xy \, ds + \int_{C_3} xy \, ds + \int_{C_4} xy \, ds.$$

La *suma de curvas* (en cadena) conlleva la *suma* (aritmética) *de sus integrales de línea*.

Ahora es necesario *parametrizar* cada una de estos segmentos, para obtener integrales simples ordinarias. En este caso, se puede tomar una coordenada cartesiana (x ó y , según gusto) como parámetro, declarando su alcance en cada caso.

$$C_1 : x = \frac{12 - 2y}{3}, \quad y = y \quad \text{con } 0 \leq y \leq 6,$$

$$C_2 : x = x, \quad y = \frac{12 - 3x}{2} \quad \text{con } 0 \geq x \geq -4,$$

$$C_3 : x = x, \quad y = -\frac{12 + 3x}{2} \quad \text{con } -4 \leq x \leq 0,$$

$$C_4 : x = \frac{12 + 2y}{3}, \quad y = y \quad \text{con } -6 \leq y \leq 0.$$

Para hallar $ds = \|\vec{r}'(t)\| \, dt$ con estos parámetros, fíjese que:

$$\text{Para } C_1 : \vec{r}'(y) = \left(-\frac{2}{3}, 1\right), \quad \text{para } C_2 : \vec{r}'(x) = \left(1, -\frac{3}{2}\right),$$

$$\text{para } C_4 : \vec{r}'(y) = \left(\frac{2}{3}, 1\right), \quad \text{para } C_3 : \vec{r}'(x) = \left(1, -\frac{3}{2}\right),$$

y entonces $ds = \frac{1}{3}\sqrt{13} \, dy$ en C_1 y C_4 mientras $ds = \frac{1}{2}\sqrt{13} \, dx$ en C_2 y C_3 . Luego:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^6 \frac{1}{3}(12 - 2y)y \left(\frac{1}{3}\sqrt{13} \, dy\right) + \int_{-6}^0 \frac{1}{3}(12 + 2y)y \left(\frac{1}{3}\sqrt{13} \, dy\right) \\ &\quad + \int_0^{-4} \frac{1}{2}x(12 - 3x) \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} \, dx\right) - \int_{-4}^0 \frac{1}{2}x(12 + 3x) \left(\frac{1}{2}\sqrt{13} \, dx\right) \\ &= \frac{\sqrt{13}}{9} \left(\int_0^6 (12y - 2y^2) \, dy + \int_0^6 (-12u + 2u^2) \, du \right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{13}}{4} \left(\int_{-4}^0 (12v + 3v^2) \, dv - \int_{-4}^0 (12x + 3x^2) \, dx \right) = 0, \end{aligned}$$

por cancelación. (Se usó las sustituciones $u = -y$; $du = -dy$ y $v = -x$; $dv = -dx$.) \diamond

Campos vectoriales

En la segunda clase de integrales de línea, los integrandos son *campos vectoriales*, es decir, funciones de (dos o) tres variables con (dos o) tres componentes. Se denotará un campo vectorial con la siguiente notación:

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)). \quad (4.5)$$

Para poder formar un integrando escalar, es necesario tomar el producto punto de este vector \vec{F} con un **elemento de desplazamiento** vectorial $d\vec{r} \equiv (dx, dy, dz)$. Dado un trozo finito de curva C , se puede plantear la *integral de línea*:

$$I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (P dx + Q dy + R dz). \quad (4.6)$$

La evaluación de este tipo de integral en cualquier caso particular procede por parametrizar la curva C en un intervalo finito, como en la fórmula (4.1). El elemento de desplazamiento es la cantidad vectorial:

$$d\vec{r} = \vec{r}'(t) dt. \quad (4.7)$$

(En contraste con la fórmula (4.3) para el elemento de longitud de arco, ahora no se toma la longitud del vector $\vec{r}'(t)$ de velocidad.)

Por lo tanto, la integral de línea (4.6) de la segunda clase se evalúa como integral simple:

$$\int_C \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r} := \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt. \quad (4.8)$$

En contraste con las integrales de línea de la primera clase, las integrales de tipo (4.8) sí dependen de la dirección del recorrido. De hecho, como se verá más adelante, *una reversión del recorrido conlleva un cambio de signo en la integral* (4.8).

Ejemplo 4.3. Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerza

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, 2xyz)$$

a lo largo del camino $\vec{r}(t) := (\cos t, 4 \sin t, t)$ desde el punto $A = (1, 0, 0)$ al punto $B = (0, 4, \pi/2)$.

Si un cuerpo pequeño se mueve a lo largo de segmento rectilíneo bajo la influencia de una fuerza que actúa en la misma dirección, el **trabajo** realizado es (por definición) el producto de esa fuerza por la longitud del segmento. Sin embargo, si la fuerza y el

camino por recorrer no son paralelas, parte de la fuerza no produce trabajo; esa parte es la componente de la fuerza ortogonal al camino, que debe descartarse (al formar el producto punto de las dos cantidades vectoriales). Y si las direcciones del camino y de la fuerza son variables, el trabajo total es una suma de elementos pequeños,

$$dW = \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r}.$$

El *trabajo total* realizado por un campo de fuerza variable a lo largo de un camino C es entonces una integral de línea:

$$W := \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

En el ejemplo dado, se conoce tanto el campo $\vec{F}(x, y, z)$ como una parametrización de C . Sólo falta determinar el alcance del parámetro t . Se nota que $(\cos t, 4 \operatorname{sen} t, t) = (1, 0, 0)$ si y solo si $t = 0$; y que $(\cos t, 4 \operatorname{sen} t, t) = (0, 4, \pi/2)$ si y solo si $t = \pi/2$. De ahí se deduce que el alcance de t es $0 \leq t \leq \pi/2$.

La velocidad del recorrido es

$$\vec{r}'(t) = (-\operatorname{sen} t, 4 \operatorname{cos} t, 1)$$

y entonces el trabajo total, con la fuerza $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, 2xyz)$, es

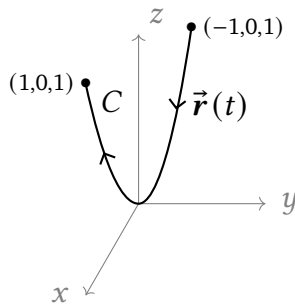
$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t, 16 \operatorname{sen}^2 t, 8t \operatorname{cos} t \operatorname{sen} t) \cdot (-\operatorname{sen} t, 4 \operatorname{cos} t, 1) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (-\operatorname{sen} t \cos^2 t + 64 \operatorname{sen}^2 t \operatorname{cos} t + 8t \operatorname{cos} t \operatorname{sen} t) dt \\ &= \left[\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{64 \operatorname{sen}^3 t}{3} \right]_{t=0}^{t=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 8t \operatorname{cos} t \operatorname{sen} t dt = \frac{64-1}{3} + \int_0^{\pi/2} 4t \operatorname{sen} 2t dt \\ &= 21 + \left[4t \left(-\frac{1}{2} \operatorname{cos} 2t\right) \right]_{t=0}^{t=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2 \operatorname{cos} 2t dt = 21 + \pi + 0. \end{aligned}$$

Aquí se hizo una integración por partes con $u = 4t$, $dv = \operatorname{sen} 2t dt$. El trabajo total es $W = 21 + \pi$. ◇

Ejemplo 4.4. Evaluar la integral de línea $I = \int_C x^2 dx - xy dy + dz$ donde C es el arco de la parábola $z = x^2$, $y = 0$ desde $A = (-1, 0, 1)$ hasta $B = (1, 0, 1)$.

Se puede elegir la coordenada x como parámetro para la curva C :

$$C : \left\{ \begin{array}{l} x = x, \quad dx = dx \\ y = 0, \quad dy = 0 \\ z = x^2, \quad dz = 2x dx \end{array} \right\} \quad \text{con} \quad -1 \leq x \leq 1.$$



Esta integral de línea, parametrizada por la variable x , se puede evaluar en seguida:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_C x^2 dx - xy dy + dz = \int_{-1}^1 x^2 dx - 0 + 2x dx \\
 &= \int_{-1}^1 (x^2 + 2x) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx + 0 = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

(Se ha notado que x^2 es *par* y $2x$ es *impar* en el intervalo simétrico $-1 \leq x \leq 1$.) \diamond

Funciones potenciales para un campo vectorial

Un caso particularmente importante (y fácil) de integrales de línea del segundo tipo ocurre cuando el integrando $\vec{F}(x, y, z)$ es un campo vectorial *conservativo*. Se dice que un campo es **conservativo** si resulta ser el gradiente de alguna función escalar:

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{\nabla}U(x, y, z). \tag{4.9}$$

Una tal función $U(x, y, z)$ se llama una **función potencial**⁴ para el campo \vec{F} . (Fíjese que se habla de *una* función potencial en vez de *la* función potencial, porque siempre es posible sumar una constante a $U(x, y, z)$ sin cambiar su gradiente.)

Si se toma la integral de \vec{F} sobre una curva parametrizada C que va del punto inicial $A = \vec{r}(a)$ al punto final $B = \vec{r}(b)$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \vec{\nabla}U(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\
 &= \int_a^b \frac{d}{dt}U(\vec{r}(t)) dt = U(\vec{r}(b)) - U(\vec{r}(a)) = \underline{U(B) - U(A)}. \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

⁴En textos de mecánica clásica, se suele emplear el signo opuesto: $\vec{F}(x, y, z) = -\vec{\nabla}U(x, y, z)$. Si, por ejemplo, \vec{F} representa un campo gravitatorio, la función $U(x, y, z)$ sería la *energía potencial* de ese campo (a la cual se debe sumar la energía cinética para analizar el movimiento de un cuerpo en caída libre). Véase, por ejemplo, la sección 1.15 del libro: Florian Scheck, *Mechanics*, sexta edición, Springer, 2018.

Aquí se ha aplicado la regla de la cadena a la función compuesta $U(\vec{r}(t))$:

$$\frac{d}{dt}U(\vec{r}(t)) = U_x x'(t) + U_y y'(t) + U_z z'(t) = \vec{\nabla}U \cdot \vec{r}'(t) = \vec{F} \cdot \vec{r}'(t).$$

Lo notable del cálculo (4.10) es que el resultado de la integral no depende de la forma precisa de la curva C , sino solamente de sus extremos A y B . [Por ejemplo, si una corriente eléctrica \vec{E} es conservativa, $\vec{E} = \vec{\nabla}V$, entonces su integral a lo largo de un circuito sólo depende de la *diferencia potencial* de su voltaje V en los extremos del circuito.] Se dice que la integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es **independiente del camino** C entre dos extremos fijos.

En particular, si C es una *curva cerrada*, esto es, si $A = B$, entonces $U(B) - U(A) = 0$ y por ende $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$: la integral de un campo conservativo alrededor de una curva cerrada es nula.

► Entre otras cosas, la fórmula (4.10) indica que no es necesario evaluar una integral de línea si se conoce de antemano una función potencial para \vec{F} . Pero eso plantea un nuevo problema: ¿cómo hallar una función potencial para \vec{F} , si una potencial existe?

Conviene expresar la ecuación vectorial (4.9), $\vec{\nabla}U = \vec{F}$ (con \vec{F} conocido pero U por determinar) como tres ecuaciones escalares

$$U_x = P, \quad U_y = Q, \quad U_z = R. \quad (4.11)$$

Luego $U(B) - U(A)$ será la diferencia de dos valores de una *integral indefinida* que revierta esas derivadas parciales:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \int_C P(x, y, z) dx + A(y, z), \\ U(x, y, z) &= \int_C Q(x, y, z) dy + B(x, z), \\ U(x, y, z) &= \int_C R(x, y, z) dz + C(x, y). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Los términos $A(y, z)$, $B(x, z)$, $C(x, y)$ son “constantes de integración” que no dependen de la variable activa en la integral correspondiente. Ahora bien: la función potencial U existe y por ende \vec{F} es conservativo *si y solo si estas tres expresiones son compatibles*.

Ejemplo 4.5. Hallar una función potencial para el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x^2 - 3yz, 3y^2 - 3xz, -3xy).$$

Aquí $P = 3x^2 - 3yz$, $Q = 3y^2 - 3xz$, $R = -3xy$.

Entonces las integrales parciales (4.12) dan lugar a tres antiderivadas:

$$U(x, y, z) = \int_C (3x^2 - 3yz) dx = x^3 - 3xyz + A(y, z),$$

$$U(x, y, z) = \int_C (3y^2 - 3xz) dy = y^3 - 3xyz + B(x, z),$$

$$U(x, y, z) = - \int_C 3xy dz = -3xyz + C(x, y).$$

Es necesario reconciliar los tres lados derechos. En la expresión final, deben estar presentes los términos x^3 , y^3 , $-3xyz$, al menos. Esto sugiere ensayar la fórmula:

$$U(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3xyz + K.$$

Los términos extras en las antiderivadas son:

$$A(y, z) = y^3 + K, \quad B(x, z) = x^3 + K, \quad C(x, y) = x^3 + y^3 + K.$$

Esto es claramente posible si (y solo si) el término K no depende de x , para que $U_x = 3x^2 - 3yz$; ni de y , para que $U_y = 3y^2 - 3xz$; ni de z , para que $U_z = -3xy$. Por lo tanto, K solo puede ser una constante.

Esta K es, en efecto, una *constante de integración*, que debe acompañar una integral indefinida. Entonces $U(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3xyz + K$ es una función potencial para \vec{F} , cualquiera que sea la constante K . \diamond

Ejemplo 4.6. Hallar una función potencial, si existe, para el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (2x + y, 2y + z, 2z + x).$$

Con el método del Ejemplo 4.5, un candidato para una función potencial sería:

$$U(x, y, z) = \int_C (2x + y) dx = x^2 + xy + A(y, z),$$

$$U(x, y, z) = \int_C (2y + z) dy = y^2 + yz + B(x, z),$$

$$U(x, y, z) = \int_C (2z + x) dz = z^2 + xz + C(x, y).$$

Esta vez, al reunir los términos que aparecen en los lados derechos, es natural postular:

$$U(x, y, z) = x^2 + xy + xz + y^2 + yz + z^2 + K$$

con K una constante arbitraria. Pero el término xz no cabe en la expresión $x^2 + xy + A(y, z)$; ni xy en $y^2 + yz + B(x, z)$; ni yz en $z^2 + xz + C(x, y)$. Se concluye que *las tres expresiones posibles para $U(x, y, z)$ son incompatibles*: no existe una tal potencial U , y el campo vectorial \vec{F} no es conservativo. \diamond

Desde luego, el procedimiento del ejemplo anterior no es la manera más eficiente de descubrir que un campo vectorial dado no es conservativo. A continuación, se ofrece otro método para detectar un campo no conservativo antes de hacer una búsqueda sin esperanza de una función potencial.

► La **rotacional** de un campo vectorial $\vec{F} = (P, Q, R)$ es otro campo vectorial definido por⁵

$$\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F} := (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y). \quad (4.13)$$

El simbolismo $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ es mnemónico: indica un producto cruz formal entre el operador diferencial $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ y el campo vectorial \vec{F} . El campo vectorial del Ejemplo 4.6, $\vec{F} = (2x + y, 2y + z, 2z + x)$, tiene rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \partial/\partial x & 2x + y \\ \vec{j} & \partial/\partial y & 2y + z \\ \vec{k} & \partial/\partial z & 2z + x \end{vmatrix} = (0 - 1, 0 - 1, 0 - 1) = (-1, -1, -1). \quad (4.14)$$

Un campo vectorial \vec{F} se llama **irrotacional** si $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$. Es importante notar que *un campo conservativo es irrotacional*:

$$\text{rot}(\vec{\nabla}U) = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}U = \begin{vmatrix} \vec{i} & \partial/\partial x & U_x \\ \vec{j} & \partial/\partial y & U_y \\ \vec{k} & \partial/\partial z & U_z \end{vmatrix} = (U_{zy} - U_{yz}, U_{xz} - U_{zx}, U_{yx} - U_{xy}) = (0, 0, 0),$$

por las igualdades entre derivadas parciales mixtas de segundo orden.

El cálculo (4.14) muestra que el campo \vec{F} del Ejemplo 4.6 no es irrotacional: $\text{rot } \vec{F} = (-1, -1, -1) \neq (0, 0, 0)$, y por lo tanto no puede ser conservativo. En tal caso, la búsqueda de una función potencial conduce ineludiblemente al fracaso.

Antes de buscar una función potencial para un campo \vec{F} , entonces, se debe calcular $\text{rot } \vec{F}$ para asegurar que \vec{F} es, al menos, irrotacional.

Ejemplo 4.7. Evaluar la integral de línea $I = \int_C (2xyz \, dx + x^2z \, dy + x^2y \, dz)$, donde C es el segmento de recta que va desde $A = (1, 1, 1)$ a $B = (1, 2, 4)$.

Si el campo $\vec{F}(x, y, z) := (2xyz, x^2z, x^2y)$ resulta ser conservativo, no será necesario parametrizar esta curva C . En primer lugar, se debe averiguar si $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$; si eso sucede, habrá que buscar una parametrización.

⁵Los angloparlantes escriben curl \vec{F} en vez de rot \vec{F} ; la palabra *curl* (colocho) sugiere un movimiento giratorio.

La rotacional del campo \vec{F} es:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \partial/\partial x & 2xyz \\ \vec{j} & \partial/\partial y & x^2z \\ \vec{k} & \partial/\partial z & x^2y \end{vmatrix} = (x^2 - x^2, 2xy - 2xy, 2xz - 2xz) = (0, 0, 0).$$

Entonces \vec{F} sí es irrotacional. Se procede a buscar $U(x, y, z)$ tal que $\vec{\nabla}U = \vec{F}$, por el método de la receta (4.12):

$$U(x, y, z) = \int_C 2xyz \, dx = x^2yz + A(y, z),$$

$$U(x, y, z) = \int_C x^2z \, dy = x^2yz + B(x, z),$$

$$U(x, y, z) = \int_C x^2y \, dz = x^2yz + C(x, y).$$

Los tres lados derechos son compatibles, y se obtiene:

$$U(x, y, z) = x^2yz + K,$$

donde K es una constante (de integración). Se puede notar que en este caso $A(y, z) = B(x, z) = C(x, y)$; su valor común, bautizada K , no depende de x ni de y ni de z , y por lo tanto K es una constante.

La integral deseada es

$$\begin{aligned} I &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A) = U(1, 2, 4) - U(1, 1, 1) \\ &= (8 + K) - (1 + K) = 8 - 1 = 7. \end{aligned}$$

Nótese que la constante de integración se cancela en la diferencia $U(B) - U(A)$; entonces omitirla sólo sería un pecado venial. No obstante, siempre debe estar presente en la función potencial.

Como en este ejemplo el campo \vec{F} es conservativo y por ende la integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es independiente del camino C , no es necesario hacer una parametrización explícita. Sin embargo, ese método también es factible, porque C es un segmento de recta que pasa por dos puntos dados. Se dispone de la fórmula (1.7a):

$$\vec{r}(t) = (1 - t)\vec{r}_1 + t\vec{r}_2 \quad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Aquí $\vec{r}_1 = A = (1, 1, 1)$ y $\vec{r}_2 = B = (1, 2, 4)$; el alcance de la variable t se limita al intervalo $0 \leq t \leq 1$ que representa el segmento con extremos A y B (omitiendo el resto de la recta). Entonces:

$$\vec{r}(t) = (1 - t)(1, 1, 1) + t(1, 2, 4) = (1, 1 + t, 1 + 3t).$$

Finalmente,

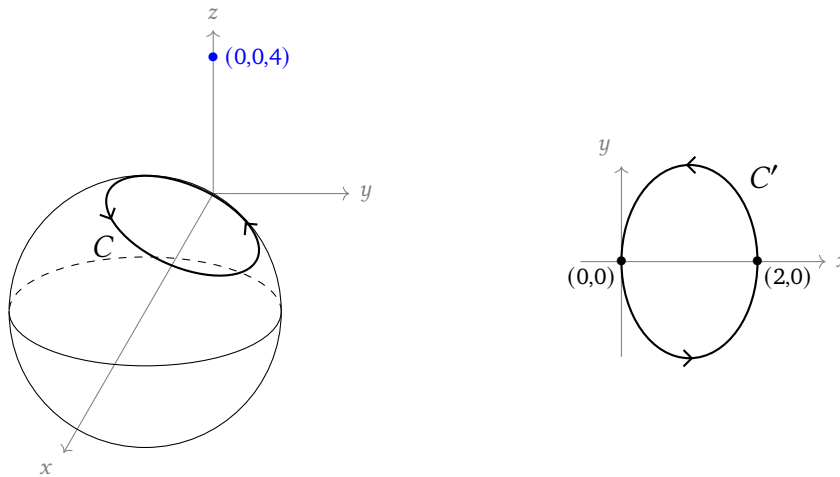
$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^1 (2 + 8t + 6t^2, 1 + 3t, 1 + t) \cdot (0, 1, 3) dt \\
 &= \int_0^1 (4 + 6t) dt = 4 + 6\left(\frac{1}{2}\right) = 7.
 \end{aligned}$$

Naturalmente, los dos métodos conducen al mismo resultado: $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 7$. ◇

Ejemplo 4.8. Calcular $I = \oint_C (xy dx + yz dy + zx dz)$, donde C es la curva cerrada determinada por las ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$; $z = x$, recorrido en el sentido contrario al reloj visto por un observador en el punto $(0, 0, 4)$.

Las ecuaciones que determinan C son las de una esfera y de un plano. Por lo tanto, C es un corte plano de una esfera, esto es, un *círculo* en el espacio \mathbb{R}^3 .

Ahora bien, si C fuera un círculo en el plano xy , para indicar su sentido de recorrido sería suficiente decir “a favor de reloj” o bien “contrario al reloj” – o algunas frases equivalentes. Sin embargo, en el espacio estos recorridos dependen de la posición del observador. Por eso, la información “visto desde $(0, 0, 4)$ ” es indispensable.



Antes de abordar el cálculo, cabe recordar que la integral sobre una curva *cerrada* sería 0 (sin necesidad de calcularla) si el campo $\vec{F}(x, y, z) := (xy, yz, zx)$ fuera conservativo. Pero eso no ocurre, porque

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \partial/\partial x & xy \\ \vec{j} & \partial/\partial y & yz \\ \vec{k} & \partial/\partial z & zx \end{vmatrix} = (0 - y, 0 - z, 0 - x) \neq (0, 0, 0).$$

Entonces no queda otra opción que *parametrizar* la curva C .

¿Cómo se parametriza una curva C en el espacio? Por la misma técnica usada con integrales triples: se proyecta C sobre uno de los planos coordenados y primero se parametriza la sombra C' (véase el dibujo anterior).

Si, por ejemplo, C' es la sombra de C en el plano xy , esta es una curva que obedece una ecuación del tipo $g(x, y) = 0$, la cual se obtiene al eliminar la variable z de entre las dos ecuaciones de C :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 4x \\ z = x \end{array} \right\} \implies \underline{2x^2 + y^2 = 4x}.$$

Esta curva cuadrática en \mathbb{R}^2 es una *elipse*, como se ve al completar cuadrados:

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 &= 4x, \\ (2x^2 - 4x + 2) + y^2 &= 2, \\ 2(x - 1)^2 + y^2 &= 2, \\ (x - 1)^2 + \frac{y^2}{2} &= 1. \end{aligned}$$

Luego, C' es una elipse con centro $(1, 0)$ y con semiejes $a = 1$, $b = \sqrt{2}$.

Para parametrizar una elipse se usa la fórmula (3.16) del Ejemplo 3.17, esta vez con $s = 1$ (la elipse es el borde del disco elíptico) y con $(x - 1)$ en lugar de x :

$$C' : \left\{ \begin{array}{l} x - 1 = \cos t \\ y = \sqrt{2} \operatorname{sen} t \end{array} \right\}.$$

La variable t recorre un intervalo de 2π mientras ese punto (x, y) recorre la elipse C' : se toma $-\pi \leq t \leq \pi$.

Una mirada al dibujo indica que el círculo C , visto desde lo alto del eje z positivo, se recorre como indican las flechas; y que su sombra C' se recorre en el sentido antihorario en el plano xy . La parametrización obtenida (de C') sigue esa regla: mientras t avanza de $t = 0$ a $t = \frac{\pi}{2}$, por ejemplo, el punto de C' avanza de $(2, 0)$ a $(1, \sqrt{2})$ sobre la elipse.

Para obtener la parametrización de C , es cuestión de restaurar z con la ecuación dada $z = x$:

$$C : \left\{ \begin{array}{ll} x = 1 + \cos t, & dx = -\operatorname{sen} t \, dt \\ y = \sqrt{2} \operatorname{sen} t, & dy = \sqrt{2} \cos t \, dt \\ z = 1 + \cos t, & dz = -\operatorname{sen} t \, dt \end{array} \right\} \quad \text{con} \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

Aquí, al tener ecuaciones paramétricas para x, y, z , se obtiene de una vez las expresiones correspondientes para dx, dy, dz en función de dt .

Ya se puede proceder con la evaluación de I :

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_C (xy \, dx + yz \, dy + zx \, dz) \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos t) \sqrt{2} \sin t (-\sin t \, dt) + \sqrt{2} \sin t (1 + \cos t) (\sqrt{2} \cos t \, dt) \\
 &\quad + (1 + \cos t)^2 (-\sin t \, dt) \\
 &= 2 \int_0^{\pi} (-\sqrt{2} \sin^2 t)(1 + \cos t) \, dt + 0 + 0 \\
 &= -\sqrt{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t) \, dt - 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin^2 t \cos t \, dt \\
 &= -\sqrt{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{2}{3} \sin^3 t \right]_{t=0}^{t=\pi} = -\sqrt{2}(\pi - 0 + 0) = \underline{-\pi\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

En la segunda línea, el integrando tiene tres términos: el primero es par, los otros son impares (con integral 0 para los impares). ◇

El teorema de Green en el plano \mathbb{R}^2

El llamado teorema de Green⁶ establece un enlace entre integrales de línea (de la segunda clase) en el plano con integrales dobles.

Teorema 4.9 (Green). *Si R es una región del plano \mathbb{R}^2 cuyo borde es una curva C simple y cerrada,⁷ y si $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ es una función diferenciable definida en todo R , entonces*

$$\boxed{\oint_C (P \, dx + Q \, dy) = \iint_R (Q_x - P_y) \, dA} \tag{4.15}$$

donde al lado izquierdo se recorre la curva C en el sentido contrario a reloj.

Se verificará esta igualdad para una región R que es vertical y horizontalmente simple (esto es, de los tipos I y II a la vez). Una tal R admite dos descripciones equivalentes:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} c \leq y \leq d \\ g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \end{array} \right\}.$$

⁶Este resultado es atribuido al matemático autodidacta inglés George Green, quien en 1828 publicó un libro sobre la teoría de electricidad y magnetismo; este libro contiene, por primera vez, el teorema de la divergencia que relaciona integrales de superficie con integrales triples.

⁷Una curva cerrada C es **simple** si no se corta a sí misma (por ejemplo, una lemniscata o “curva de ocho” no es simple). Una curva cerrada y simple encierra una región acotada R cuyo borde es esa curva.

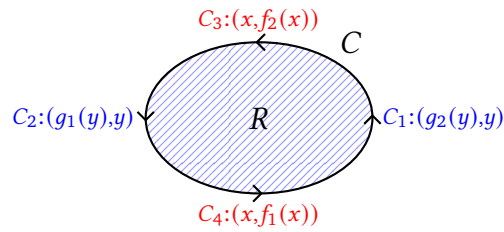


Figura 4.3: Una región plana R con curva de borde C

Cada sumando de la integral doble en (4.15) corresponde a un término de la integral de línea. En primer lugar, por ser R de tipo II:

$$\begin{aligned} \iint_R Q_x \, dA &= \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} Q_x(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left[Q(x, y) \right]_{x=g_1(y)}^{x=g_2(y)} dy \\ &= \int_c^d (Q(g_2(y), y) - Q(g_1(y), y)) \, dy \\ &= \int_c^d Q(g_2(y), y) \, dy + \int_d^c Q(g_1(y), y) \, dy \\ &= \int_{C_1} Q(x, y) \, dy + \int_{C_2} Q(x, y) \, dy = \oint_C Q(x, y) \, dy. \end{aligned}$$

Aquí se ha expresado C como una suma en cadena de dos curvas, $C = C_1 + C_2$, donde $C_1 : y \mapsto (g_2(y), y)$ con $c \leq y \leq d$ parametriza la parte derecha de C , *en subida*; mientras $C_2 : y \mapsto (g_1(y), y)$ con $d \geq y \geq c$ parametriza su parte izquierda, *en bajada*.

De modo similar, por ser R de tipo I:

$$\begin{aligned} - \iint_R P_y \, dA &= - \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} P_y(x, y) \, dy \, dx = - \int_a^b \left[P(x, y) \right]_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} dx \\ &= - \int_a^b (P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))) \, dx \\ &= \int_b^a P(x, f_2(x)) \, dx + \int_a^b P(x, f_1(x)) \, dx \\ &= \int_{C_3} P(x, y) \, dx + \int_{C_4} P(x, y) \, dx = \oint_C P(x, y) \, dx. \end{aligned}$$

Ahora se ha expresado C como una suma en cadena de dos curvas, $C = C_3 + C_4$, donde $C_3 : x \mapsto (x, f_2(x))$ con $b \geq x \geq a$ parametriza la parte superior de C , *hacia atrás*; mientras $C_4 : x \mapsto (x, f_1(x))$ con $a \leq x \leq b$ parametriza la parte inferior de C , *hacia adelante*. □

Ejemplo 4.10. Calcular la integral de línea $I = \oint_C (2x^3 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy$, donde C es el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, recorrido una vez contrario a reloj.

El círculo C es la frontera del disco circular $R : x^2 + y^2 \leq 1$. Con $P = 2x^3 - y^3$, $Q = x^3 + y^3$, se ve que

$$Q_x - P_y = (3x^2 + 0) - (0 - 3y^2) = 3x^2 + 3y^2.$$

Pasando a coordenadas polares, se obtiene del teorema de Green:

$$\begin{aligned} I &= \iint_R (3x^2 + 3y^2) dA = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 3r^2 (r dr d\theta) \\ &= 3 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = 3 \times 2\pi \times \frac{1}{4} = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

También es posible evaluar la integral de línea en forma directa, mediante la parametrización del círculo $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$; con $-\pi \leq \theta \leq \pi$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} (2 \cos^3 \theta - \sin^3 \theta)(-\sin \theta d\theta) + (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)(\cos \theta d\theta) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^4 \theta + \sin^3 \theta \cos \theta - 2 \cos^3 \theta \sin \theta + \sin^4 \theta) d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi} (1 - 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) d\theta \\ &= 2\pi - \int_0^{\pi} 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = 2\pi - \int_0^{\pi} \sin^2 2\theta d\theta \\ &= 2\pi - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 4\theta) d\theta = 2\pi - \frac{1}{2}(\pi - 0) = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Se ha obtenido el mismo valor de I (por supuesto), pero con un esfuerzo mayor. \diamond

► Si R es una región del plano cuyo borde es una curva cerrada y simple, pero R no es de los tipos I y II a la vez, en muchos casos es posible partirla en algunas subregiones con esta propiedad, $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup \dots$ y calcular la integral doble en (4.15) como una suma de las integrales sobre cada R_i . Pero ¿qué sucede con las integrales de línea para estas subregiones?

Tómese la región de la Figura 3.5, que es de tipo I pero no de tipo II. Al dividir R por un segmento vertical, como en la Figura 4.4, se obtiene $R = R_1 \cup R_2$, una unión de dos regiones que no traslapan (es decir, su intersección es vacía o tiene área nula), mientras

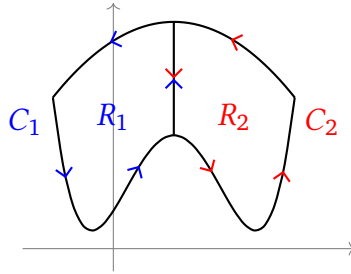


Figura 4.4: Una región subdividida, con cancelación de borde interno

las curvas de borde, C_1 de R_1 y C_2 de R_2 , ambas recorridas *contrario a reloj*, juntas forman el borde C de R más dos segmentos verticales *recorridos en sentidos opuestos*.

Las integrales de línea se suman:

$$\oint_{C_1} (P dx + Q dy) + \oint_{C_2} (P dx + Q dy) = \oint_C (P dx + Q dy)$$

porque el lado izquierdo incluye dos integrales sobre el borde interno, de igual magnitud pero con signos opuestos, *cuyas integrales cancelan*. En la Figura 4.4, esto se indica por las flechas azules y rojas, que se cancelan en el borde interno. Las flechas de ambos colores que no cancelan recorren el borde externo C , tal como debería.

Entonces el teorema de Green sigue válida para toda región R cuyo borde es una curva simple y cerrada, recorrido en el sentido contrario a reloj.

Cálculo de áreas mediante el teorema de Green

En el Ejemplo 4.10 anterior, se aprovecha la fórmula de Green (4.15) para convertir una integral de línea en una integral doble más fácil de evaluar. También es posible usar la fórmula en la otra dirección, para convertir una integral doble en una integral de línea.

El caso más común de ese segundo proceso es el de *calcular el área* de una región R , dada por la integral doble $\text{Area}(R) = \iint_R dA$, cuyo integrando es la función constante $f(x, y) \equiv 1$. Sólo es necesario hallar dos funciones $P(x, y)$, $Q(x, y)$ tales que

$$Q_x - P_y \equiv 1.$$

Las tres opciones más sencillas son:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= 0, & Q(x, y) &= x, & Q_x - P_y &= 1 - 0 = 1; \\ P(x, y) &= -y, & Q(x, y) &= 0, & Q_x - P_y &= 0 - (-1) = 1; \\ P(x, y) &= -\frac{1}{2}y, & Q(x, y) &= \frac{1}{2}x, & Q_x - P_y &= \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1. \end{aligned}$$

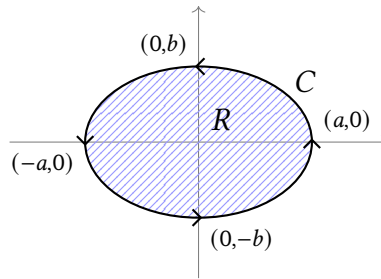
Si R es una región del plano cuyo borde es la curva simple y cerrada C , estas opciones dan tres fórmulas para el área de R :

$$\text{Area}(R) = \oint_C x \, dy = \oint_C (-y) \, dx = \oint_C \frac{1}{2}(x \, dy - y \, dx). \quad (4.16)$$

Ejemplo 4.11. Hallar el área encerrada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Se puede suponer que $a > 0$, $b > 0$. Como ya fue discutido en el Ejemplo 4.8, esta elipse puede ser parametrizada por

$$C : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad \text{con} \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$



Fíjese bien que mientras crece el parámetro t , esta elipse se recorre en el sentido contrario a reloj. Para verificar esa afirmación, nótese los puntos cardinales se visitan en este orden:

$$\vec{r}(-\pi) = (-a, 0), \quad \vec{r}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (0, -b), \quad \vec{r}(0) = (a, 0), \quad \vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, b), \quad \vec{r}(\pi) = (-a, 0).$$

[[Este parametrización empieza y termina en el extremo occidental, $(-a, 0)$. Para empezar y terminar en el extremo oriental $(a, 0)$, es cuestión de tomar $0 \leq t \leq 2\pi$ en vez de $-\pi \leq t \leq \pi$.]]

Conviene usar la tercera de las fórmulas de área (4.16). Entonces

$$\begin{aligned} \text{Area}(R) &= \oint_C \frac{1}{2}(x \, dy - y \, dx) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} a \cos t (b \cos t \, dt) - \frac{1}{2} b \sin t (-a \sin t \, dt) \\ &= \frac{ab}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) \, dt = \frac{ab}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dt = \frac{ab}{2} \times 2\pi = \boxed{\pi ab}. \end{aligned}$$

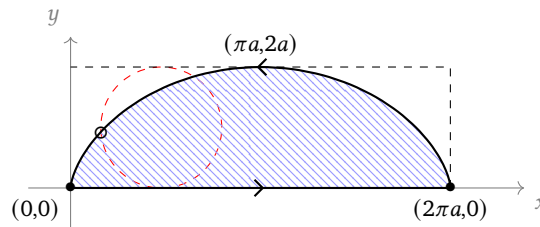
(Cuando $a = b$, se recupera la fórmula conocida πa^2 para el área de un disco circular de radio a .) ◇

Ejemplo 4.12. Hallar el área debajo de un arco del cicloide de longitud $2\pi a$ y de altura $2a$.

Este cicloide es la curva ya discutida en el Ejemplo 2.9. Está dada por la parametrización:

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \text{sen } t) \\ y(t) = a(1 - \text{cos } t) \end{cases} \quad (2.13')$$

Entonces la *única* manera de calcular el área buscada es por medio de esta parametrización y el teorema de Green.



Se nota del dibujo adjunto (una variante de la Figura 2.3 ya vista) que el borde C de la región R debajo del arco es la suma del segmento de recta C_1 desde $(0, 0)$ a $(2\pi a, 0)$; y la curva C_2 del cicloide *hacia atrás* (es decir, con x decreciente) desde $(2\pi a, 0)$ a $(0, 0)$. Esto obliga a tomar t decreciente: $2\pi \geq t \geq 0$.

En el segmento C_1 , se toma x como parámetro: $x = x$; $y = 0$, con $dx = dx$; $dy = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \text{Area}(R) &= \oint_C \frac{1}{2}(x dy - y dx) = \int_{C_1} \frac{1}{2}(x dy - y dx) + \int_{C_2} \frac{1}{2}(x dy - y dx) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi a} (x \cdot 0 - 0 dx) + \frac{1}{2} \int_{2\pi}^0 a(t - \text{sen } t) a \text{sen } t dt - a(1 - \text{cos } t) a(1 - \text{cos } t) dt \\ &= 0 - \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (t \text{sen } t - \text{sen}^2 t - (1 - 2 \text{cos } t + \text{cos}^2 t)) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (-t \text{sen } t + \text{sen}^2 t + 1 - 2 \text{cos } t + \text{cos}^2 t) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (2 - 2 \text{cos } t - t \text{sen } t) dt = 2\pi a^2 - 0 - \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} t \text{sen } t dt \\ &= 2\pi a^2 + \frac{a^2}{2} \left[t \text{cos } t \right]_{t=0}^{t=2\pi} - \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \text{cos } t dt = 2\pi a^2 + \pi a^2 - 0 = \boxed{3\pi a^2} \end{aligned}$$

al integrar $(t \text{sen } t)$ por partes. (La integral de $\text{cos } t$ en un período $0 \leq t \leq 2\pi$ es 0.)

El área buscada queda dentro de un rectángulo de anchura $2\pi a$ y de altura $2a$, cuya área es $4\pi a^2$. El área debajo del arco de cicloide es entonces $3/4$ del área del rectángulo. \diamond

4.2. Integrales de superficie

En el espacio \mathbb{R}^3 se puede tomar una porción S de una superficie $G(x, y, z) = 0$ como un dominio de integración. Si $f(x, y, z)$ es una función definido en S , o si $\vec{F}(x, y, z)$ es un campo vectorial definido en S , se puede considerar la integral de f o de \vec{F} sobre S . Esto da lugar a dos clases de *integrales de superficie* sobre S que se denotan respectivamente por:

$$I = \iint_S f(x, y, z) dS, \quad \text{o bien} \quad I = \iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n} dS.$$

En estas expresiones, dS es un **elemento de área superficial** y $\vec{n} = \vec{n}(x, y, z)$ es un **vector normal unitario** a la superficie en el punto (x, y, z) . En ambos casos, la tarea práctica consiste en *parametrizar* la superficie para reducir estas integrales a integrales dobles ordinarias.

Parametrización de superficies en \mathbb{R}^3

Una superficie en el espacio requiere *dos parámetros* para identificar sus puntos. Un punto $\vec{r} = (x, y, z)$ de la superficie depende de dos variables (u, v) , dando lugar a una función vectorial:

$$\vec{r}(u, v) := (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

que se supondrá diferenciable, con dos derivadas parciales:

$$\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u), \quad \vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v).$$

Aparte de la introducción de la tercera coordenada cartesiana z , el desarrollo es paralelo al tratamiento de la parametrización de regiones planas en la sección 3.2.

Al tomar $v = v_0$ constante o $u = u_0$ constante, se obtiene un par de curvas $u \mapsto \vec{r}(u, v_0)$ y $v \mapsto \vec{r}(u_0, v)$ que se cortan en el punto $\vec{r}(u_0, v_0)$. Así se obtiene una *mall*a de curvas en la superficie de marras, véase la Figura 3.9 de nuevo. El elemento de área superficial dS es el área de un paralelogramo pequeño cuyos lados son los vectores tangentes $\vec{r}_u du$ y $\vec{r}_v dv$, proporcionales a los incrementos en u, v . Salvo por el detalle de que este paralelogramo no está en el plano \mathbb{R}^2 , el elemento de área se obtiene de la fórmula (3.12):

$$dS = \|\vec{r}_u du \times \vec{r}_v dv\| = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv. \tag{4.17}$$

Ahora se debe tomar un producto cruz de tipo general:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (y_u z_v - y_v z_u, z_u x_v - z_v x_u, x_u y_v - x_v y_u) = \begin{vmatrix} \vec{i} & x_u & x_v \\ \vec{j} & y_u & y_v \\ \vec{k} & z_u & z_v \end{vmatrix}.$$

El factor de magnificación local en (4.17) *no* es (el valor absoluto de) un jacobiano.

La integral de una función (o “campo escalar”) $f(x, y, z)$ sobre una superficie S , parametrizada por una región R del plano (u, v) , es la siguiente integral doble:

$$\boxed{\iint_S f(x, y, z) \, dS := \iint_R f(\vec{r}(u, v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du \, dv.} \quad (4.18)$$

Tales expresiones forman la primera clase de integrales de superficie.

► Si la superficie S es una porción del grafo de una función $z = f(x, y)$ encima de una región R del plano xy , se puede adoptar la parametrización directa por las variables cartesianas (x, y) :

$$\vec{r}(x, y, z) := (x, y, f(x, y)), \quad \text{con } (x, y) \in R.$$

El tal caso, se calcula el elemento de área superficial como sigue:

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & 1 & 0 \\ \vec{j} & 0 & 1 \\ \vec{k} & f_x & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1),$$

y por lo tanto:

$$\boxed{dS = \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} \, dy \, dx.} \quad (4.19)$$

Ejemplo 4.13. Calcular las integrales de superficie $\iint_S x \, dS$, $\iint_S y \, dS$, $\iint_S z \, dS$, donde S es el hemisferio $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

El hemisferio S también se puede presentar como $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con $z \geq 0$. El centro esférico es el origen $(0, 0, 0)$ y el radio es a (se toma $a > 0$). La sombra R de S en el plano xy es el disco circular cuyo borde es el ecuador de la esfera: $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.

La superficie S es el grafo de la función $f(x, y) := \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ con (x, y) en R . Para aplicar la fórmula (4.19), se debe calcular

$$f_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad f_y = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

así que

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1 = \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2} + 1 = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2},$$

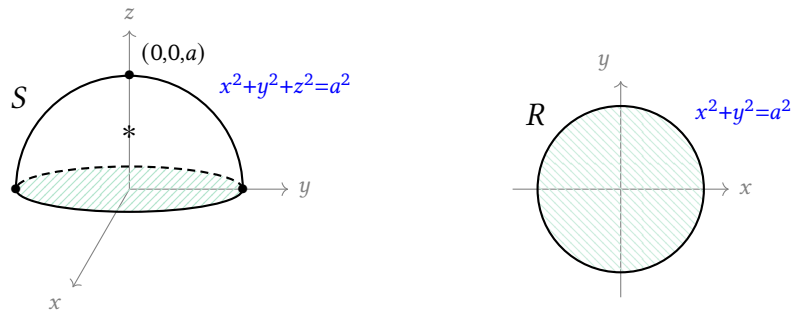


Figura 4.5: Una integral de superficie, parametrizada por una región R

y entonces

$$dS = \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} \, dy \, dx = \frac{a \, dy \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Es preferible, puesto que la región R es un disco circular, pasar esta expresión a coordenadas polares:

$$dS = \frac{ar \, dr \, d\theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} \quad \text{para} \quad R = \left\{ \begin{array}{l} -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq a \end{array} \right\}.$$

Las integrales de superficie se calculan en seguida, por separación de variables:

$$\begin{aligned} \iint_S x \, dS &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a \frac{ar^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} \, dr \, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta \, d\theta \int_0^a \frac{ar^2}{\sqrt{a^2 - r^2}} \, dr = 0, \\ \iint_S y \, dS &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a \frac{ar^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} \, dr \, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^a \frac{ar^2}{\sqrt{a^2 - r^2}} \, dr = 0, \\ \iint_S z \, dS &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a ar \, dr \, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} a \, d\theta \int_0^a r \, dr = 2\pi a \times \frac{a^2}{2} = \pi a^3. \end{aligned}$$

Se ha usado las evaluaciones $\int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta \, d\theta = 0$ y $\int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta \, d\theta = 0$; y en la tercera integral se ha sustituido $z = \sqrt{a^2 - r^2}$, es decir, la ecuación de la superficie S . \diamond

► El **área superficial** de una superficie S es la integral de la función constante de valor 1:

$$\boxed{\text{Area}(S) = \iint_S dS = \iint_R \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du \, dv.} \tag{4.20}$$

En el Ejemplo 4.13 anterior, se obtendrá

$$\begin{aligned} \iint_S dS &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a \frac{ar \, dr \, d\theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 2\pi a \int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \, dr = 2\pi a \int_{a^2}^0 u^{-1/2} \left(-\frac{1}{2} du\right) \\ &= 2\pi a \int_0^{a^2} u^{-1/2} \left(\frac{1}{2} du\right) = \pi a \left[2u^{1/2}\right]_{u=0}^{u=a^2} = \pi a \times 2a = 2\pi a^2. \end{aligned}$$

[[Este es la mitad del área de la esfera completa de radio a , que entonces sería $4\pi a^2$. Se acaba de comprobar esta fórmula “bien conocida”.]]

El centro geométrico de la superficie S del ejemplo, conocido como el **centroide** o *baricentro*, se obtiene con un procedimiento similar al cálculo del centro de masa de un sólido T , véase el Ejemplo 3.20. Si se concibe el hemisferio como un cascarón de grosor delgado con densidad uniforme, y si $A = \iint_S dS$ es el área total, las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del centroide están dadas por:

$$A\bar{x} = \iint_S x \, dS, \quad A\bar{y} = \iint_S y \, dS, \quad A\bar{z} = \iint_S z \, dS.$$

En el ejemplo anterior, se ve $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$, mientras $\bar{z} = \pi a^3 / 2\pi a^2 = a/2$. Entonces el centroide del hemisferio⁸ es el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, \frac{1}{2}a)$, marcado con un asterisco * en la Figura 4.5.

Ejemplo 4.14. Hallar el área total de una esfera de radio a .

Se acaba de observar que esa área debe ser $4\pi a^2$, por ser el doble del área de un hemisferio. Sin embargo, vale la pena calcularla de nuevo, esta vez con *una parametrización de la esfera por coordenadas esféricas* – como es natural!

Es cuestión de adaptar las coordenadas esféricas tridimensionales de la fórmula (3.23) al poner $\rho = a$, constante:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a \, \text{sen } \phi \, \text{cos } \theta \\ y = a \, \text{sen } \phi \, \text{sen } \theta \\ z = a \, \text{cos } \phi \end{array} \right\} \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi \end{array} \right\}.$$

En notación vectorial:

$$\begin{aligned} \vec{r}(\phi, \theta) &:= (a \, \text{sen } \phi \, \text{cos } \theta, a \, \text{sen } \phi \, \text{sen } \theta, a \, \text{cos } \phi), \\ \vec{r}_\phi(\phi, \theta) &= (a \, \text{cos } \phi \, \text{cos } \theta, a \, \text{cos } \phi \, \text{sen } \theta, -a \, \text{sen } \phi), \\ \vec{r}_\theta(\phi, \theta) &= (-a \, \text{sen } \phi \, \text{sen } \theta, a \, \text{sen } \phi \, \text{cos } \theta, 0). \end{aligned} \tag{4.21}$$

⁸Se puede observar que el centroide es un punto externo a S , debido a la concavidad de esa superficie. Pero el centroide sí es un centro de simetría de S : la mitad del área de S está en la capa esférica más alta que el centroide, esto es, $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ con $z \geq a/2$.

Entonces

$$\begin{aligned} \vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \vec{i} & a \cos \phi \cos \theta & -a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ \vec{j} & a \cos \phi \operatorname{sen} \theta & a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ \vec{k} & -a \operatorname{sen} \phi & 0 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(a^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos \theta) - \vec{j}(-a^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen} \theta) + \vec{k}(a^2 \cos \phi \operatorname{sen} \phi) \\ &= a^2 \operatorname{sen} \phi (\operatorname{sen} \phi \cos \theta, \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \cos \phi). \end{aligned}$$

El vector en la tercera línea *tiene longitud 1*, porque consiste de las coordenadas esféricas de una esfera de radio 1. De inmediato se deduce, sin más cálculo, que:

$$\|\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta\| = a^2 \operatorname{sen} \phi, \quad \text{y por lo tanto,} \quad \underline{dS = a^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta}.$$

Desde luego, este factor de magnificación local $a^2 \operatorname{sen} \phi$ coincide con el jacobiano de coordenadas esféricas, evaluado en $\rho = a$.

El área de la esfera sigue directamente de ahí:

$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \iint_S dS = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} a^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= a^2 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \phi \, d\phi = a^2 \times 2\pi \times 2 = 4\pi a^2. \quad \diamond \end{aligned}$$

Ejemplo 4.15. Obtener el área del paraboloides hiperbólico $z = xy$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

La sombra R de la superficie sobre el plano xy es el disco redondo $x^2 + y^2 \leq 1$. La superficie es una porción del grafo de $f(x, y) := xy$, con $f_x = y$, $f_y = x$. Entonces

$$dS = \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} \, dy \, dx = \sqrt{y^2 + x^2 + 1} \, dy \, dx = \sqrt{r^2 + 1} (r \, dr \, d\theta).$$

El área buscada es⁹

$$\begin{aligned} \iint_S dS &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 r \sqrt{r^2 + 1} \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^1 r \sqrt{r^2 + 1} \, dr \\ &= 2\pi \int_1^2 u^{1/2} \left(\frac{1}{2} du\right) = \pi \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{u=1}^{u=2} = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1), \end{aligned}$$

usando la sustitución $u = r^2 + 1$; $du = 2r \, dr$. ◇

⁹Como $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) \doteq \frac{2}{3}(1.828) \doteq 1.22$, esta área excede el área π de su sombra por un factor de 22% aproximadamente; esto es ciertamente plausible.

Flujo de un campo vectorial a través de una superficie

La segunda clase de integrales de superficie tiene como integrando un campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$. Al elemento de área superficial dS se le debe agregar la dirección normal a la superficie. En el punto (x, y, z) de la superficie S , esa dirección es un **vector normal unitario** (es decir, de longitud 1), denotado por \vec{n} . Sin embargo, el vector opuesto $-\vec{n}$ también es normal a la superficie en ese punto y también es unitario.

Al escoger – de manera continua – un signo apropiado entre estas dos alternativas, se obtiene una **superficie orientada**. Por ejemplo, si S es una esfera (o cualquier superficie cerrada) es usual tomar el vector normal \vec{n} apuntando hacia afuera. En tal caso, el vector $-\vec{n}$ apunta hacia adentro y así se define la *orientación opuesta* de S . Para una superficie no cerrada (un plano, por ejemplo) es necesario decidir la orientación por algún convenio explícito en cada caso.

Cuando se parametriza una superficie S con dos parámetros (u, v) , tomados en una región R del plano uv , se obtiene en el punto $\vec{r}(u, v)$ de la superficie dos vectores tangentes $\vec{r}_u(u, v)$ y $\vec{r}_v(u, v)$. Su producto cruz¹⁰ es normal a la superficie; y se define el vector normal unitario por

$$\vec{n}(u, v) := \pm \frac{\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)}{\|\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)\|},$$

donde el signo se elige de acuerdo con las condiciones de cada problema particular.

Si se combina este vector normal con la fórmula (4.17), $dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$, se obtiene la expresión

$$\vec{n} dS = \pm (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv. \tag{4.22}$$

El **flujo** de un campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$ a través de la superficie S es la siguiente integral de superficie (de la segunda clase):

$$\iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n} dS := \iint_R \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv. \tag{4.23}$$

Al lado derecho, se ha hecho una determinación del signo de $\vec{n} dS$ en (4.22).

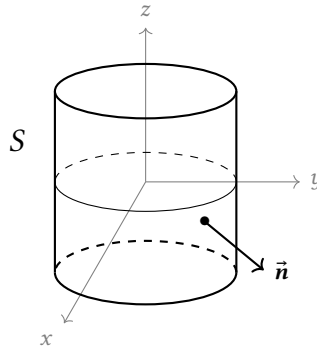
Es útil notar que un cambio de orden de los parámetros, $u \leftrightarrow v$, cambia el signo de \vec{n} , pues $\vec{r}_v \times \vec{r}_u = -\vec{r}_u \times \vec{r}_v$. Esto dice que el signo que ocurre en la expresión (4.22) para $\vec{n} dS$ no está predeterminada. Además, si se revierte la orientación de S , se cambia el signo de la integral (4.23).

¹⁰La parametrización es *regular* si estos dos vectores tangentes son linealmente independientes, en cuyo caso $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ en cada punto $\vec{r}(u, v)$. En los ejemplos dados, se usan parametrizaciones regulares. Si hubiera puntos excepcionales en donde el producto cruz se anule, se espera que ellos sean puntos aislados o curvas, de manera que no afecta el valor de una integral de superficie.

Ejemplo 4.16. Calcular el flujo del campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) := (x^3 + xy^2 + xz^2, x^2y + y^3 + yz^2, x^2z + y^2z + z^3)$$

a través de la superficie cilíndrica S dada por $x^2 + y^2 = 1$ con $-1 \leq z \leq 1$, orientada hacia afuera.



En coordenadas cilíndricas, el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ es $r = 1$. Las otras coordenadas cilíndricas (θ, z) sirven como parámetros para esta superficie de revolución:

$$\vec{r}(\theta, z) := (\cos \theta, \text{sen } \theta, z) \quad \text{con} \quad R = \left\{ \begin{array}{l} -\pi \leq \theta \leq \pi \\ -1 \leq z \leq 1 \end{array} \right\}.$$

Entonces

$$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\text{sen } \theta & 0 \\ \vec{j} & \cos \theta & 0 \\ \vec{k} & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos \theta, \text{sen } \theta, 0).$$

Este es un vector *horizontal* (su tercera coordenada es 0) apuntando lejos del eje z , esto es, “hacia afuera”. [Si se cerrara esta lata cilíndrica con tapas redondas en los planos $z = \pm 1$, este vector apuntaría hacia afuera, sin ambigüedad.] Por suerte, el vector $(\cos \theta, \text{sen } \theta, 0)$ tiene longitud 1, así que $\vec{n} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_z$ para este ejemplo particular.

Fíjese que $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(x, y, z)$, así que

$$\begin{aligned} \vec{F}(\cos \theta, \text{sen } \theta, z) &= (1 + z^2)(\cos \theta, \text{sen } \theta, z) \\ &= ((1 + z^2) \cos \theta, (1 + z^2) \text{sen } \theta, z + z^3). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_R ((1 + z^2) \cos \theta, (1 + z^2) \text{sen } \theta, z + z^3) \cdot (\cos \theta, \text{sen } \theta, 0) \, dz \, d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-1}^1 (1 + z^2)(\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta) \, dz \, d\theta \\ &= 2\pi \times 2 \int_0^1 (1 + z^2) \, dz = 4\pi \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{16\pi}{3}. \end{aligned} \quad \diamond$$

El teorema de la divergencia para superficies cerradas

El teorema que aparece en el libro autopublicado de George Green, en 1828, no es la relación (4.15) entre integrales de línea e integrales dobles que hoy en día lleva su nombre, sino otra relación entre integrales de superficie e integrales triples. Esa otra relación ahora se denomina el **teorema de la divergencia**.¹¹

La **divergencia** de un campo vectorial $\vec{F} = (P, Q, R)$ es la siguiente función (o campo escalar):

$$\operatorname{div} \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{F} := P_x + Q_y + R_z. \quad (4.24)$$

► Sea T una región sólida en el espacio \mathbb{R}^3 , cuyo borde es una superficie *cerrada* S . La frontera de un sólido es necesariamente una superficie cerrada; y como tal, está orientada de modo natural al demandar que el vector normal \vec{n} *apunte hacia afuera* en cada punto de S . Esto permite anunciar el análogo tridimensional del Teorema 4.9 de Green.

Teorema 4.17 (de la divergencia). *Si T es una región sólida del espacio \mathbb{R}^3 cuyo borde es una superficie cerrada S , y si $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ es un campo vectorial diferenciable definido en todo T , entonces*

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_T (\operatorname{div} \vec{F}) \, dV \quad (4.25)$$

donde al lado izquierdo la superficie S está orientada con \vec{n} apuntando hacia afuera.

¶ Es posible demostrar este teorema con métodos similares al argumento que justificó el teorema de Green. Aquí no se ofrece una prueba de esa naturaleza; pero es apropiado notar que los dos lados de la fórmula (4.25) son aditivos, en el siguiente sentido. Si $T = T_1 \cup T_2$ es una unión de dos subregiones que colindan pero no traslapan, con bordes S_1 y S_2 que juntos forman el borde S de la región total T más una membrana $S_1 \cap S_2$ que constituye una “frontera interna” común; entonces los vectores normales en puntos de la membrana común son opuestos: $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$, de modo que estas partes de la integral de superficie se cancelan. ¶

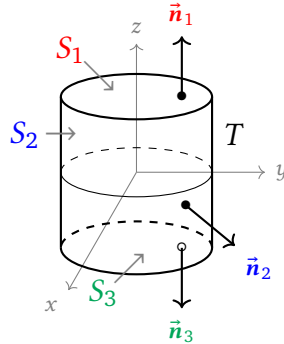
Ejemplo 4.18. Evaluar la integral de superficie $I = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ donde

$$\vec{F}(x, y, z) := (x^3 + xy^2 + xz^2, x^2y + y^3 + yz^2, x^2z + y^2z + z^3)$$

y S es la frontera del sólido T definido por $x^2 + y^2 \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$.

¹¹Algunos autores lo apodan *el teorema de Gauss* y ciertamente Gauss conoció y usó este resultado; sin embargo, hay tantos resultados descubiertos – o inventados – por Gauss, que se corre el peligro de la ambigüedad al identificar este teorema con su nombre.

Este campo vectorial es el mismo del Ejemplo 4.16, pero la superficie usada en ese ejemplo solo es parte de la frontera de T . La superficie total es $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, donde S_2 es la pared vertical del cilindro: $x^2 + y^2 = 1$; $-1 \leq z \leq 1$, como en el Ejemplo 4.16. La tapa superior del cilindro es S_1 : $z = 1$; $x^2 + y^2 \leq 1$, mientras la tapa inferior es S_3 : $z = -1$; $x^2 + y^2 \leq 1$.



Los vectores normales respectivos, que apuntan hacia afuera, son:

$$\vec{n}_1 = (0, 0, 1) = \vec{k}, \quad \vec{n}_2 = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \vec{n}_3 = (0, 0, -1) = -\vec{k}.$$

Este ejercicio se reduce a una sola integral triple con el uso del teorema de la divergencia. Las derivadas parciales relevantes de las componentes de \vec{F} son:

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + xy^2 + xz^2) = 3x^2 + y^2 + z^2, \\ Q_y &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + y^3 + yz^2) = x^2 + 3y^2 + z^2, \\ R_z &= \frac{\partial}{\partial z}(x^2z + y^2z + z^3) = x^2 + y^2 + 3z^2, \end{aligned}$$

cuya suma es

$$\operatorname{div} \vec{F} = P_x + Q_y + R_z = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2.$$

En coordenadas cilíndricas, el sólido T tiene la descripción

$$T = \left\{ \begin{array}{l} -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ -1 \leq z \leq 1 \end{array} \right\},$$

y la integral de la divergencia es:

$$\begin{aligned} \iiint_T (\operatorname{div} \vec{F}) \, dV &= \iiint_T (5x^2 + 5y^2 + 5z^2) \, dz \, dy \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \int_{-1}^1 (5r^2 + 5z^2)(r \, dz \, dr \, d\theta) \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_{-1}^1 (5r^3 + 5rz^2) \, dz \, dr = 10\pi \times 2 \int_0^1 \int_0^1 (r^3 + rz^2) \, dz \, dr \\ &= 20\pi \int_0^1 \left(r^3 + \frac{1}{3}r \right) \, dr = 20\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) = 20\pi \times \frac{5}{12} = \frac{25\pi}{3}. \end{aligned}$$

Vale la pena calcular la integral de superficie directamente. Como $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, se sigue que

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, dS + \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n}_3 \, dS$$

y del Ejemplo 4.16, se sabe que la integral sobre S_2 vale $16\pi/3$.

Siempre con coordenadas cilíndricas, la superficie S_1 se parametriza por

$$\vec{r}(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta, 1) \quad \text{con} \quad R_1 = \left\{ \begin{array}{l} -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{array} \right\}.$$

Entonces

$$\vec{r}_r \times \vec{r}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \times (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0) = (0, 0, r),$$

y $\vec{n}_1 \, dS = (0, 0, r) \, dr \, d\theta = (0, 0, 1) r \, dr \, d\theta$. \llbracket Esto es $\vec{k} \, dA$, pues R_1 es una región plana. \rrbracket

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 (r^2 + 1)(r \cos \theta, r \sin \theta, 1) \cdot (0, 0, r) \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 (r^3 + r) \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^1 (r^3 + r) \, dr = 2\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

De igual manera, se parametriza S_3 por $\vec{r}(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta, -1)$ con el mismo $\vec{r}_r \times \vec{r}_\theta = (0, 0, r)$, pero ahora $\vec{n}_3 \, dS = -(0, 0, r) \, dr \, d\theta$, porque \vec{n}_3 apunta hacia abajo, como indica el dibujo. Entonces

$$\iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n}_3 \, dS = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 (r^2 + 1)(r \cos \theta, r \sin \theta, -1) \cdot (0, 0, -r) \, dr \, d\theta = \dots = \frac{3\pi}{2}.$$

En total:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{3\pi}{2} + \frac{16\pi}{3} + \frac{3\pi}{2} = \frac{16\pi}{3} + 3\pi = \frac{25\pi}{3},$$

y se ha verificado el teorema de la divergencia en este caso. \diamond

Ejemplo 4.19. Usar el teorema de la divergencia para calcular $I = \iint_S (x^2 + y + z) \, dS$, donde S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Para aplicar el teorema de la divergencia, es necesario tener a mano un campo vectorial $\vec{F} = (P, Q, R)$ tal que $\vec{F} \cdot \vec{n} = x^2 + y + z$. El vector normal unitario a la esfera S en su punto (x, y, z) , el cual es el propio vector $\vec{n} = (x, y, z)$, puesto que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Debe ser obvio que este vector apunta hacia afuera: de hecho, su negativo $-\vec{n} = (-x, -y, -z)$ apunta hacia el origen, es decir, hacia adentro. \llbracket Esto se puede confirmar al considerar

el Ejemplo 4.14, con $a = 1$: allí se obtuvo $\vec{n} dS = (\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta) d\phi d\theta = \sin \phi (x, y, z) d\phi d\theta$ al usar coordenadas esféricas, mientras $dS = \sin \phi d\phi d\theta$. \square

Para que $(P, Q, R) \cdot (x, y, z) = x^2 + y + z$, basta tomar $P = x, Q = 1, R = 1$ como la opción más sencilla. (Desde luego, hay muchas otras posibilidades para \vec{F} ; pero es un buen momento para aplicar la navaja de Ockham.)¹²

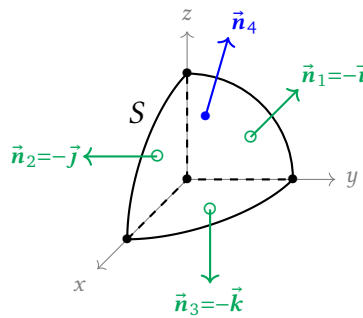
Tómese, entonces, $\vec{F}(x, y, z) := (x, 1, 1)$, con divergencia $P_x + Q_y + R_z = 1 + 0 + 0 = 1$. La esfera S es el borde de la bola sólida $T: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Por lo tanto.

$$I = \oiint_S (x^2 + y + z) dS = \iiint_T 1 dV = \text{Vol}(T) = \frac{4\pi}{3},$$

al recordar el volumen de la bola unitaria (Ejemplo 3.25). ◇

Ejemplo 4.20. Usar el teorema de la divergencia para calcular $I = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, -2xy, 3xz)$ y S es el borde de la región en el primer octante limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, orientada hacia afuera.

Es ciertamente posible calcular el flujo de este campo vectorial directamente. Para hacerlo, se debe tomar en cuenta que S es una unión $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ de tres cuartos de disco circular en los planos coordenadas, con vectores normales unitarios respectivos $\vec{n}_1 = -\vec{i}, \vec{n}_2 = -\vec{j}, \vec{n}_3 = -\vec{k}$; y un octante de la esfera de radio 2, con vector normal unitario $\vec{n}_4 = \frac{1}{2}(x, y, z)$.



En lugar de emprender esa tarea, es preferible calcular

$$\text{div } \vec{F} = P_x + Q_y + R_z = 2x - 2x + 3x = 3x,$$

¹²El monje franciscano inglés William de Ockham, en el siglo xiv, propuso una separación (su “navaja”) entre hipótesis para reducir los supuestos al mínimo. La frase que sus sucesores le atribuyeron es *Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*: “Las cosas no deben multiplicarse más de lo necesario”.

y luego evaluar $I = \iiint_T 3x \, dV$, donde T está dada en coordenadas esféricas por:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \phi \leq \pi/2 \\ 0 \leq \rho \leq 2 \end{array} \right\}.$$

(Fíjese que el alcance de las coordenadas θ y ϕ delimitan *el primer octante* de \mathbb{R}^3 .) La integral deseada es:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_T 3x \, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (3\rho \cos \theta \sin \phi)(\rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta) \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta \int_0^2 \rho^3 \, d\rho \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi \, d\phi = 3 \times 1 \times 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\phi) \, d\phi \\ &= 6 \left[\phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} = 6\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 3\pi. \end{aligned}$$

En la segunda línea, se usó la separación de variables, porque las cotas de integración son constantes y el integrando $\rho^3 \sin^2 \phi \cos \theta$ es un producto del tipo $f(\rho)g(\phi)h(\theta)$. \diamond

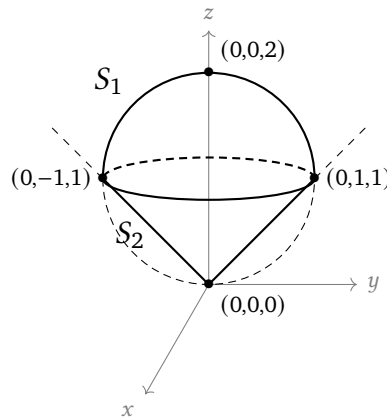


Figura 4.6: Un cono con bastante helado

Ejemplo 4.21. Usar el teorema de la divergencia para evaluar la integral

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS, \quad \text{donde } \vec{F} = (x^3, x^2y, x^2z),$$

si S es la superficie cerrada que se obtiene al unir la porción del cono $x^2 + y^2 = z^2$ que queda dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ con la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ que queda dentro del embudo superior del cono $x^2 + y^2 = z^2$ (Figura 4.6).

Esta superficie S no es otra cosa que el borde del “cono de helado” del Ejemplo 3.26, desplazado hacia arriba sobre el eje z (y con una mayor cantidad de helado). La porción S_1 de la esfera forma la capa superior (del helado) y la otra porción S_2 forma el borde inferior (la galleta); juntos, definen una superficie cerrada $S = S_1 \cup S_2$ que encierra una región sólida T .

La divergencia del campo $\vec{F} = (x^3, x^2y, x^2z)$ es

$$\operatorname{div} \vec{F} = P_x + Q_y + R_z = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2.$$

En coordenadas esféricas, la esfera es $\rho^2 = 2\rho \cos \phi$, o bien $\rho = 2 \cos \phi$; y el cono es $r = z$, es decir $\rho \sin \phi = \rho \cos \phi$, o bien $\phi = \pi/4$. Entonces

$$T = \left\{ \begin{array}{l} -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi/4 \\ 0 \leq \rho \leq 2 \cos \phi \end{array} \right\}.$$

La integral deseada es

$$\begin{aligned} I &= \iiint_T 5x^2 dV = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2 \cos \phi} (5\rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta)(\rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2 \cos \phi} 5\rho^4 \sin^3 \phi \cos^2 \theta d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/4} (2 \cos \phi)^5 \sin^3 \phi \cos^2 \theta d\phi d\theta = 32 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^{\pi/4} \cos^5 \phi \sin^3 \phi d\phi \\ &= 32 \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta \int_0^{\sqrt{2}/2} (1 - u^2)^2 u^3 du = 32\pi \int_0^{\sqrt{2}/2} (u^3 - 2u^5 + u^7) du \\ &= 32\pi \left[\frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{3}u^6 + \frac{1}{8}u^8 \right]_{u=0}^{u=\sqrt{2}/2} = 32\pi \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{24} + \frac{1}{128} \right) = 2\pi - \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{12}. \end{aligned}$$

Se ha empleado la sustitución $u := \sin \phi$, $du = \cos \phi d\phi$. ◇

4.3. El teorema de Stokes

El tercero de los teoremas que relacionan integrales de tipos diferentes es el teorema de Stokes, que transforma una integral de línea en una integral de superficie (o viceversa). La historia de esta fórmula es un poco confusa (como señala el epígrafe al inicio de este capítulo), pero parece que apareció por primera vez en un examen para un premio de beca en la Universidad de Cambridge en 1855, escrito por George Gabriel Stokes. Hoy en día, el nombre también se aplica a una generalización en dimensión n cualquiera,

que tiene como casos particulares el teorema de Green, el teorema de la divergencia y el teorema que se anunciará a continuación.

El integrando al lado izquierdo será un campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$; al lado derecho, el integrando es su *rotacional* $\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$, el cual es otro campo vectorial formado por las derivadas parciales de las componentes de \vec{F} . En cuanto a las regiones de integración, al lado derecho se encuentra una superficie *no cerrada* S , cuyo borde es una curva cerrada (o a veces dos o más curvas cerradas). Como sucedió en los casos anteriores, si S está formada por varias porciones de superficie colindantes, las integrales de línea en las curvas fronterizas internas se cancelan en pares.

► Sea S una superficie no cerrada en el espacio \mathbb{R}^3 , cuyo borde es una **ciclo cerrado** C , es decir, la unión de una o más curvas cerradas. Tanto S como C pueden *orientarse* de dos maneras: la superficie S se orienta por la determinación del signo del vector normal unitario \vec{n} , y el ciclo cerrado C puede recorrerse de dos formas opuestas.

Se dice que el *recorrido* de C es **compatible** con la orientación de S si al avanzar sobre C el vector normal \vec{n} de S sale a la izquierda del vector tangente a C . (En la práctica, esta condición se determina fácilmente del dibujo de S y C .)

Teorema 4.22 (Stokes). *Sea S una superficie no cerrada en el espacio \mathbb{R}^3 cuyo borde es un ciclo cerrado C . Se orienta S por una elección continua del signo de su vector normal unitario \vec{n} ; y se recorre C en la dirección compatible con esa orientación. Si $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ es un campo vectorial diferenciable definido en todo S , entonces:*

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS. \tag{4.26}$$

Si se revierte el sentido del recorrido de C , la integral de línea al lado izquierdo cambia de signo. Y si se orienta S por el vector normal unitario $-\vec{n}$ en vez de \vec{n} , la integral de superficie al lado derecho cambia de signo. (Si se hace los dos cambios a la vez, se vuelve a establecer la igualdad de los dos lados.)

Ejemplo 4.23. Verificar el teorema de Stokes para $\vec{F}(x, y, z) = (2y, x^2, 3x)$ donde S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ con $z \geq 0$.

En primer lugar es necesario calcular la rotacional del campo \vec{F} , según (4.13):

$$\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F} := (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) = (0, -3, 2x - 2).$$

Para hallar el flujo de ese campo a través del hemisferio S , es necesario parametrizar S (por coordenadas esféricas, obviamente):

$$\vec{r}(\phi, \theta) := (4 \text{ sen } \phi \cos \theta, 4 \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta, 4 \cos \phi).$$

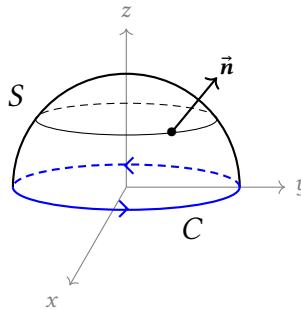


Figura 4.7: Una superficie S y su curva de borde C con orientaciones compatibles

Esta es la misma parametrización usada en los Ejemplos 4.14 y 4.19 (con radio $a = 4$). Se puede aprovechar el resultado de esos ejemplos:

$$\vec{n} \, dS = 16 \sin \phi (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \, d\phi \, d\theta.$$

Tomando en cuenta la condición $z \geq 0$, la región de integración es

$$R = \left\{ \begin{array}{l} -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi/2 \end{array} \right\}.$$

Como $\text{rot } \vec{F}(\vec{r}(\phi, \theta)) = (0, -3, 8 \sin \phi \cos \theta - 2)$, la integral de superficie es:

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/2} 16 \sin \phi (-3 \sin \phi \sin \theta + 8 \sin \phi \cos \phi \cos \theta - 2 \cos \phi) \, d\phi \, d\theta \\ &= -48 \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi \, d\phi + 128 \int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta \, d\theta \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi \cos \phi \, d\phi \\ &\quad - 32 \times 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \phi \cos \phi \, d\phi \\ &= 0 + 0 - 64\pi \int_0^1 u \, du = -64\pi \times \frac{1}{2} = \underline{\underline{-32\pi}}. \end{aligned}$$

Después de separar variables, se ha usado $\int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta \, d\theta = 0$ y $\int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta \, d\theta = 0$.

El borde del hemisferio S es el *ecuador* C : $x^2 + y^2 = 16$, $z = 0$. Se debe recorrer C de tal manera que flecha que representa \vec{n} aparezca siempre al lado izquierdo del recorrido. Como $\vec{n} = \frac{1}{4}(x, y, z)$ en el punto interior (x, y, z) de S , esta flecha apunta hacia arriba, porque su tercera coordenada es $\frac{1}{4}z > 0$. Por lo tanto, el arco visible de C se recorre de izquierda a derecha y el arco escondido de derecha a izquierda: véase la Figura 4.7.

Entonces el círculo se parametriza de la manera usual: $\vec{r}(t) := (4 \cos t, 4 \sin t, 0)$ con $-\pi \leq t \leq \pi$. Como $\vec{F}(x, y, z) = (2y, x^2, 3x)$, la integral de línea es:

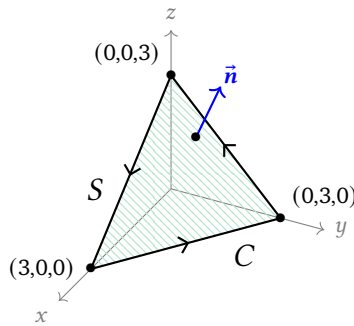
$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{-\pi}^{\pi} (8 \sin t, 16 \cos^2 t, 12 \cos t) \cdot (-4 \sin t, 4 \cos t, 0) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (-32 \sin^2 t + 64 \cos^3 t) dt \\ &= -32 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) dt + 64 \int_0^0 (1 - u^2) du \quad [\text{al poner } u := \sin t] \\ &= -32(\pi - 0) + 0 = \underline{-32\pi}. \end{aligned}$$

Los dos lados de la fórmula (4.26) tienen el mismo valor, -32π , en este caso particular. \diamond

Ejemplo 4.24. Evaluar la integral de línea

$$I = \oint_C e^x dx + x \sin y dy + (x^2 + y^2) dz$$

donde C es el borde del triángulo equilátero con vértices $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 3)$, recorridos en ese orden.



Obsérvese que basta dar el orden consecutivo de los vértices para determinar el recorrido del borde de un triángulo.¹³ Una superficie S cuyo borde es C es el interior del triángulo dado. Para orientar S de manera compatible con el recorrido de C , el vector normal \vec{n} debe apuntar hacia arriba (o hacia la derecha, o hacia adelante).

[[Es factible calcular la integral de línea directamente, como una suma de tres integrales: el borde es $C = C_1 + C_2 + C_3$, una suma en cadena de tres segmentos de recta (los lados del triángulo) que se deben parametrizar individualmente con la fórmula (1.7a): $\vec{r}(t) = (1 - t)\vec{r}_1 + t\vec{r}_2$ en cada caso.]]

¹³Se sobreentiende que se regresa del tercer vértice al primero.

Pero es preferible aplicar el teorema de Stokes. Primero, se calcula la rotacional del integrando dado $\vec{F} := (e^x, x \operatorname{sen} y, x^2 + y^2)$.

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \partial/\partial x & e^x \\ \vec{j} & \partial/\partial y & x \operatorname{sen} y \\ \vec{k} & \partial/\partial z & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = (2y - 0, 0 - 2x, \operatorname{sen} y - 0) = (2y, -2x, \operatorname{sen} y).$$

Para parametrizar S , se puede usar las coordenadas cartesianas (x, y) , notando que la sombra de S en el plano xy es el triángulo plano con vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$; así,

$$R = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 3 - x \end{array} \right\}.$$

(La recta que pasa por $(3, 0)$ y $(0, 3)$ en el plano xy tiene ecuación $x + y = 3$.) También se ve que el plano que pasa por los puntos $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 3)$ tiene ecuación $x + y + z = 3$, es decir, $z = 3 - x - y$. Entonces

$$\begin{aligned} \vec{r}(x, y) &:= (x, y, 3 - x - y), \\ \vec{r}_x &= (1, 0, -1), \\ \vec{r}_y &= (0, 1, -1), \\ \vec{r}_x \times \vec{r}_y &= (1, 0, -1) \times (0, 1, -1) = (1, 1, 1). \end{aligned}$$

El vector normal unitario es $\vec{n} = +\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ tomando el signo $+$ para que este \vec{n} apunte hacia arriba (o hacia la derecha, o hacia adelante). \llbracket Fíjese que \vec{n} es constante porque S es un plano: de hecho, ya se sabe que el vector $(1, 1, 1)$ es normal al plano $x + y + z = 3$ en cada uno de sus puntos. \rrbracket Por lo tanto,

$$\vec{n} \, dS = (\vec{r}_x \times \vec{r}_y) \, dx \, dy = (1, 1, 1) \, dx \, dy = (1, 1, 1) \, dy \, dx.$$

Ya se puede evaluar la integral dada mediante el teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_R (2y, -2x, \operatorname{sen} y) \cdot (1, 1, 1) \, dy \, dx \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-x} (2y - 2x + \operatorname{sen} y) \, dy \, dx = \int_0^3 \left[y^2 - 2xy - \cos y \right]_{y=0}^{y=3-x} \\ &= \int_0^3 ((x-3)^2 - 2x(x-3) - \cos(x-3) - 1) \, dx = \int_0^3 (-x^2 + 8 - \cos(x-3)) \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 8x - \operatorname{sen}(x-3) \right]_{x=0}^{x=3} = -9 + 24 + \operatorname{sen}(-3) = \underline{15 - \operatorname{sen} 3}. \quad \diamond \end{aligned}$$

Ejemplo 4.25. Verificar el teorema de Stokes para el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$, donde S es la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, entre los planos $z = 1$ y $z = 3$.

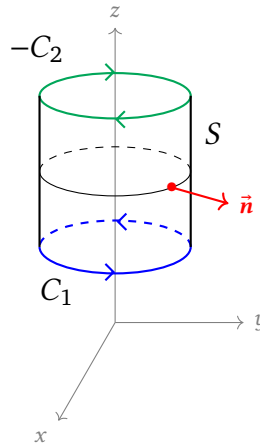
La rotacional de \vec{F} es el campo vectorial

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \partial/\partial x & yz \\ \vec{j} & \partial/\partial y & xz \\ \vec{k} & \partial/\partial z & xy \end{vmatrix} = (x - x, y - y, z - z) = (0, 0, 0).$$

Por lo tanto, es obvio que

$$I := \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S 0 \, dS = 0,$$

cualquiera que fuera S y su vector normal unitario \vec{n} .



Para verificar el teorema de Stokes, es necesario comprobar que

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0,$$

donde C es el borde de S , recorrido en la dirección apropiada.

El cilindro S es esencialmente la superficie del Ejemplo 4.16, desplazada hacia arriba. Como tal, su vector normal unitario \vec{n} es horizontal, apuntando “hacia afuera” (lejos del eje z). Pero ahora se puede notar – al ver el dibujo – que el borde de S *no es una sola curva cerrada*, sino la unión disjunta de dos círculos horizontales, uno en el plano $z = 1$ y el otro en el plano $z = 3$. Este es un *ciclo cerrado*, ya mencionado en el enunciado del teorema de Stokes.

Sean C_1 y C_2 los dos círculos que forman la frontera de S , recorridos en sentido antihorario (vistos desde lo alto del eje z). Para mantener la superficie S a la izquierda

durante el recorrido, es necesario recorrer C_1 en el sentido usual, contrario a reloj, pero a la vez *se debe recorrer C_2 a favor de reloj*. Se escribe $-C_2$ para designar al segundo círculo, recorrido en el sentido opuesto a lo usual. Entonces el ciclo C y la integral de línea sobre C se escriben así:

$$\boxed{C = C_1 - C_2} \quad \text{y} \quad \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} := \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Sólo falta parametrizar las dos curvas cerradas y evaluar las integrales de línea. Para C_1 se usa, como es usual:

$$\vec{r}_1(t) := (\cos t, \text{sen } t, 1) \quad \text{con} \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

La curva $-C_2$ se puede recorrer a favor de reloj al cambiar el coseno y el seno en las primeras dos coordenadas:

$$\vec{r}_2(t) := (\text{sen } t, \cos t, 3) \quad \text{con} \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

La primera integral, de $\vec{F}(x, y, z) := (yz, xz, xy)$, es:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{-\pi}^{\pi} (\text{sen } t, \cos t, \cos t \text{sen } t) \cdot (-\text{sen } t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (-\text{sen}^2 t + \cos^2 t) dt = 2 \int_0^{\pi} \cos 2t dt = \left[\text{sen } 2t \right]_{t=0}^{t=\pi} = 0. \end{aligned}$$

La segunda integral es:

$$\begin{aligned} \int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{-\pi}^{\pi} (3 \cos t, 3 \text{sen } t, \text{sen } t \cos t) \cdot (\cos t, -\text{sen } t, 0) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (3 \cos^2 t - 3 \text{sen}^2 t) dt = 3 \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 t - \text{sen}^2 t) dt = 0. \end{aligned}$$

Entonces $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 + 0 = 0$, que coincide con $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$. Se ha comprobado el teorema de Stokes en este caso. \diamond

Ejemplo 4.26. Hallar la integral de línea $I = \oint_{C_a} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ donde C_a es el círculo $x^2 + y^2 = a^2$ en el plano $z = 0$, recorrido una vez contrario a reloj.

Aunque este problema se puede enfocar en el plano \mathbb{R}^2 , quizás en el contexto del teorema de Green, resulta más interesante considerarlo en el espacio tridimensional.

El círculo C_a , con la dirección de recorrido prescrita, se parametriza de manera ya familiar:

$$\vec{r}(t) := (a \cos t, a \text{sen } t, 0) \quad \text{para} \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

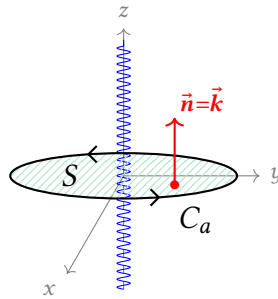


Figura 4.8: La circulación de un campo magnético alrededor de una corriente eléctrica

La integral de línea I se calcula en seguida:

$$\begin{aligned} \oint_{C_a} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(a \cos t)(a \cos t dt) - (a \sin t)(-a \sin t dt)}{a^2} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}{a^2} dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = \underline{2\pi}. \end{aligned}$$

Nótese que este valor 2π es independiente del radio del círculo C_a .

Al replantear la integral explícitamente en tres dimensiones:

$$I = \oint_{C_a} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_a} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy + 0 dz \right),$$

el integrando es el campo vectorial

$$\vec{F} = (P, Q, R) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right). \quad (4.27)$$

Para poder aplicar el teorema de Stokes, es necesario obtener $\text{rot } \vec{F} = (0, 0, Q_x - P_y)$, pues $R = 0$ y P, Q no dependen de z . Se calcula:

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(x^2 + y^2) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \\ P_y &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{(x^2 + y^2) - y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Q_x - P_y = 0$ y $\text{rot } \vec{F} = (0, 0, 0)$; el campo vectorial \vec{F} es irrotacional.

Ahora bien: si S es una superficie (plana) cuyo borde es la curva C_a , el lado derecho de la fórmula (4.26) de Stokes sería $\iint_S \vec{0} \cdot \vec{n} dS = \iint_S 0 dS = 0$, lo cual es incompatible con la relación $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$.

Más aún, si el campo vectorial irrotacional \vec{F} fuera conservativo, entonces al ser C_a una curva cerrada, se obtendría $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(-a, 0, 0) - U(-a, 0, 0) = 0$, que no es cierto.

¿Cuál es la causa de la discrepancia entre estos resultados? Para averiguarla, se puede intentar obtener una función potencial para \vec{F} :

$$U(x, y, z) = \int Q dy = \int \frac{x dy}{x^2 + y^2} = \int \frac{x^2 \sec^2 \theta d\theta}{x^2 \sec^2 \theta} = \int d\theta = \theta + K,$$

usando la sustitución trigonométrica $y = x \operatorname{tg} \theta$; $dy = x \sec^2 \theta d\theta$; junto con la fórmula pitagórica $x^2 + y^2 = x^2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) = x^2 \sec^2 \theta$. Entonces la posible función potencial sería

$$U(x, y, z) = \theta + K = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(y/x) + K.$$

Pero la función $\operatorname{arc} \operatorname{tg}(y/x)$ no está bien definida en el plano $x = 0$, que contiene los puntos $(0, \pm a, 0)$ de la curva C_a . Después de todo, el campo vectorial \vec{F} no es conservativo.¹⁴

Moraleja: la condición en el teorema de Stokes que dice: si \vec{F} está definido en todo S no es una frase inocente. En el ejemplo actual, si se toma S como el disco unitario $x^2 + y^2 \leq a^2$ con $z = 0$, cuyo borde ciertamente es el círculo C_a , resulta que el campo \vec{F} en (4.27) no está definido en toda la recta $x = y = 0$, esto es, a lo largo del eje z . De hecho este \vec{F} representa un **campo magnético** generado por una corriente eléctrica que fluye a lo largo de eje z . (Véase la Figura 4.8.) El campo \vec{F} tiene una intensidad $\|\vec{F}(x, y, z)\| = \|(-y/r^2, x/r^2, 0)\| = 1/r$ en el resto del espacio \mathbb{R}^3 . En círculo horizontal de radio a centrado en el eje z , su circulación es $(1/a)(2\pi a) = 2\pi$, como ya fue calculado.

Para tener un ejemplo del teorema de Stokes bien planteado con este campo vectorial, es necesario aislar o “proteger” el eje z , rodeándolo con un tubo delgado de radio ε . Entonces \vec{F} sí está bien definido en la región $\varepsilon \leq r \leq a$. Lo correcto, entonces, es tomar S como el *anillo circular* en el plano xy :

$$S = \left\{ \begin{array}{l} -\pi \leq \theta \leq \pi \\ \varepsilon \leq r \leq a \end{array} \right\}.$$

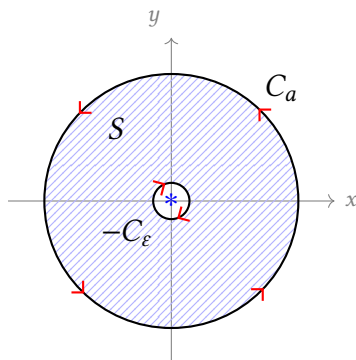
Esta región plana S aparece en el dibujo que sigue.

No hace falta parametrizar S porque el integrando es nulo,

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \vec{0} \cdot \vec{k} dS = \iint_S 0 dS = 0,$$

al lado derecho de la fórmula de Stokes.

¹⁴Este es un ejemplo de un campo vectorial irrotacional pero no conservativo: un campo conservativo es necesariamente irrotacional, pero no al revés.

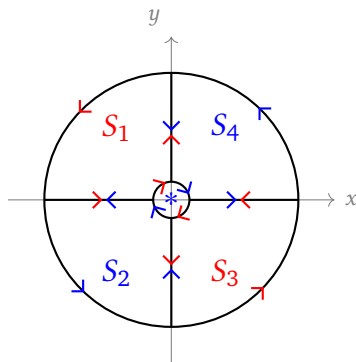


Pero ahora el borde C de S no consiste solamente en el *círculo exterior* C_a donde $r = a$, sino también comprende un *círculo interior* $-C_\epsilon$, recorrido a favor de reloj. Entonces

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_a - C_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_a} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \oint_{C_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi - 2\pi = 0.$$

Conclusión: el teorema de Stokes sigue válido para el anillo S , cuyo borde es el ciclo cerrado $C_a - C_\epsilon$. ◇

En los últimos dos Ejemplos 4.25 y 4.26, las regiones de integración tienen la misma topología: una superficie S cuyo borde es un ciclo cerrado que consiste de dos círculos disjuntos con direcciones de recorrido opuestas. En cada caso, es posible descomponer S en varias porciones cuyas bordes con curvas cerradas simples. De hecho, en el dibujo anterior se puede partir S en 4 tajadas, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, una en cada cuadrante del plano xy .



Si se recorre el borde de cada cuadrante contrario a reloj, en la suma de integrales de línea habrá cancelaciones en bordes internos: al unir sus bordes, eliminando los segmentos que cancelan, se recupera el ciclo cerrado $C_a - C_\epsilon$.

FIN