UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
SISTEMA DE ESTUDIOS DE POSGRADO

DISEÑO Y VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD COGNITIVA DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA REMOTA PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE DERIVADA

Tesis sometida a la consideración de la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Matemática para optar al grado y título de Maestría Académica en Matemática Educativa.

JUAN PABLO PRENDAS ROJAS

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio, Costa Rica

2024

Dedicatoria

A mi hija Paulita.

Nunca antes conocí a una persona tan llena de vida y por la cual cada minuto cuenta. Gracias Pau por hacer de cada instante una alabanza, de cada gesto un milagro, de cada día una vida.

Aprendí que la fortaleza no es lo mismo que la fuerza, que no hay sacrificios si se ama y que el dolor es efímero como soplo de brisa mas el amor es eterno como Dios.

A mi hijo Yariel.

Me hiciste papá y ese es un regalo maravilloso. Gracias por tu compañía y apoyo.

Aprendí que la paternidad es una decisión más que una responsabilidad, que en los errores hay valiosas enseñanzas. Te has erigido como la vara que sostiene la cansada curvatura de mi vida.

Agradecimientos

A mis asesores William y Rodolfo por la disposición y seriedad con la que asumieron el proyecto. Gracias, son excelentes profesionales y mucho mejores personas.

A mi tutor Oscar por la paciencia y por la motivación para avanzar hacia la meta de culminar el proyecto. Gracias hermano.

"Esta Tesis fue aceptada por la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Matemática de la Universidad de Costa Rica, como requisito parcial para optar al grado y título de Maestría Académica en Matemática Educativa."

MARIA JOSE CASTILLO CESPEDES (FIRMA)
Firmado digitalmente por MARIA JOSE CASTILLO CESPEDES (FIRMA)
Fecha: 2024.09.26 15:31:15 -06'00'

Dra. María José Castillo Céspedes
Representante del Decano
Sistema de Estudios de Postgrado

OSCAR SALAS HUERTAS (FIRMA)
Firmado digitalmente por OSCAR SALAS HUERTAS (FIRMA)
Fecha: 2024.09.27 12:38:10 -06'00'

Dr. Oscar Salas Huertas
Profesor Guía

WILLIAM ENRIQUE POVEDA FERNANDEZ (FIRMA)
PERSONA FISICA, CPF-03-0350-0256.
Fecha declarada: 27/09/2024 02:47:01 PM
Esta es una representación gráfica únicamente.

Dr. William Poveda Fernández
Lector

RODOLFO DAVID FALLAS SOTO (FIRMA)
Firmado digitalmente por RODOLFO DAVID FALLAS SOTO (FIRMA)
Fecha: 2024.09.27 15:21:55 -06'00'

Dr. Rodolfo Fallas Soto
Lector

DARIO ALBERTO MENA ARIAS (FIRMA)
PERSONA FISICA, CPF-01-1302-0444.
Fecha declarada: 27/09/2024 04:08:01 PM
Esta es una representación gráfica únicamente,
verifique la validez de la firma.

Dr. Darío Alberto Mena Arias
Director
Programa de Posgrado en Matemática

JUAN PABLO PRENDAS ROJAS (FIRMA)
Firmado digitalmente por JUAN PABLO PRENDAS ROJAS (FIRMA)
Fecha: 2024.09.27 10:35:57 -06'00'

Juan Pablo Prendas Rojas
Sustentante

Tabla de contenidos

RESUMEN

Las problemáticas referidas al concepto de derivada de una función se han reportado en muchas investigaciones y han sido punto de partida para numerosas propuestas sobre abordaje de este tema con la intención de solventarlas. Sin embargo, no siempre está claro de donde surgen las propuestas y si, al final de la puesta en escena, estas resultan idóneas para los objetivos que se persiguen.

En este proyecto de investigación se propone el uso de la teoría de Ingeniería Didáctica como guía para el proceso de diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza del concepto de derivada de una función. Además, se muestra como los indicadores de Idoneidad Didáctica de la teoría del Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y el Conocimiento Matemáticos (EOS), en la faceta cognitiva, se complementan con la etapa de evaluación y reflexión docente.

Se trabajó durante tres sesiones remotas con un grupo de Cálculo Diferencial e Integral del Instituto Tecnológico de Costa Rica. El proceso inició con análisis preliminares, luego análisis a priori, experimentación y finalmente reflexión sobre la labor docente desde la faceta cognitiva.

Como resultado se tiene un documento con al menos tres aristas: se constituye como una guía para el diseño de secuencias didácticas con sustento en indagaciones preliminares generales en principio y locales posteriormente sobre aspectos afectivos, epistémicos y cognitivos, es una muestra sobre actividades y evaluaciones en una clase remota real y contiene una serie de indicadores para estructurar la reflexión de la labor docente.

Se destaca que, desde el punto de vista teórico, se fomenta la ubicación de la Evaluación como un componente por si mismo y para éste se proponen tres indicadores de los cuales la Evaluación temporal es novedoso.

ABSTRACT

Issues related to the concept of the derivative of a function have been extensively documented in research and have served as the basis for numerous proposals aimed at addressing these challenges with the intention of resolving them. Nonetheless, it is not always clear from where these proposals originate and whether, ultimately, they prove suitable for the objectives being pursued.

This research project proposes utilizing Didactic Engineering theory as a guide for designing a didactic sequence for teaching the concept of the derivate of a function. Additionally, it demonstrates how the Didactic Suitability indicators of the Onto-Semiotic Approach to Instruction and Mathematical Knowledge (OSA), in the cognitive dimension, are complemented by the stage of teacher evaluation and reflection.

The study was conducted over three sessions with a Differential and Integral Calculus group at the Instituto Tecnológico de Costa Rica (Costa Rica Institute of Technology). The process commenced with preliminary analyses, followed by a priori analyses, experimentation, and finally, reflection on teaching practice from the cognitive perspective.

The outcome is a document with at least three facets: it serves as a guide for designing didactic sequences based on initial general preliminary inquiries and later local inquiries on affective, epistemic, and cognitive aspects; it provides an example of activities and assessments in a real remote class; and it contains a series of indicators to structure the reflection on teaching practice.

It is noteworthy that, from a theoretical perspective, the Evaluation is promoted as a standalone component, and three indicators are proposed for it, among which temporary Evaluation is novel.

Lista de tablas

Lista de figuras

Autorización para digitalización y comunicación pública de Trabajos Finales de Graduación del Sistema de Estudios de Posgrado en el Repositorio Institucional de la Universidad de Costa Rica.

Yo, Juan Pablo Prendas Rojas, con cédula de identidad 602990396, en mi condición de autor del TFG titulado Diseño y Valoracion de la Idoneidad Cognitiva de una secuencia didáctica remota para la enseñanza del concepto de derivada.

Autorizo a la Universidad de Costa Rica para digitalizar y hacer divulgación pública de forma gratuita de dicho TFG a través del Repositorio Institucional u otro medio electrónico, para ser puesto a disposición del público según lo que establezca el Sistema de Estudios de Posgrado. **SI** [X] **NO** * [ ]

***En caso de la negativa favor indicar el tiempo de restricción: ________________ año (s).**

Este Trabajo Final de Graduación será publicado en formato PDF, o en el formato que en el momento se establezca, de tal forma que el acceso al mismo sea libre, con el fin de permitir la consulta e impresión, pero no su modificación.

Manifiesto que mi Trabajo Final de Graduación fue debidamente subido al sistema digital Kerwá y su contenido corresponde al documento original que sirvió para la obtención de mi título, y que su información no infringe ni violenta ningún derecho a terceros. El TFG además cuenta con el visto bueno de mi Director (a) de Tesis o Tutor (a) y cumplió con lo establecido en la revisión del Formato por parte del Sistema de Estudios de Posgrado.

JUAN PABLO PRENDAS ROJAS (FIRMA)

Firmado digitalmente por JUAN PABLO PRENDAS ROJAS (FIRMA)
Fecha: 2024.09.27 10:36:36 -06'00'

FIRMA ESTUDIANTE

Nota: El presente documento constituye una declaración jurada, cuyos alcances aseguran a la Universidad, que su contenido sea tomado como cierto. Su importancia radica en que permite abreviar procedimientos administrativos, y al mismo tiempo genera una responsabilidad legal para que quien declare contrario a la verdad de lo que manifiesta, puede como consecuencia, enfrentar un proceso penal por delito de perjurio, tipificado en el artículo 318 de nuestro Código Penal. Lo anterior implica que el estudiante se vea forzado a realizar su mayor esfuerzo para que no sólo incluya información veraz en la Licencia de Publicación, sino que también realice diligentemente la gestión de subir el documento correcto en la plataforma digital Kerwá.

Capítulo 1
Introducción

1.1. Justificación

Algunas investigaciones pioneras, como Artigue (1995) y Cantoral (1993), y otras más recientes, Monge (2013) por ejemplo, indican que en los cursos de cálculo muchos de los profesores y cátedras universitarias se esfuerzan por ofrecer cursos de muy buen nivel. Los estudiantes, por su parte, reconocen una relación y aplicación directa con los demás cursos en sus carreras y con su futuro ejercicio profesional. Sin embargo, los conocimientos generados por los procesos de enseñanza llevados a las aulas siguen siendo limitados en comparación con los conocimientos institucionales pretendidos.

Desde hace mucho tiempo, Artigue (1995) señala que en el área de cálculo existen problemáticas evidentes y reconoce que

> si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y primitivas y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo del cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticas. (p. 97)

Artigue (1995), asocia las principales dificultades en la enseñanza del cálculo a la complejidad de los objetos básicos del cálculo, a la conceptualización y a la formalización del concepto de límite y, también, con rupturas necesarias con relación a las formas de pensamiento esencialmente algebraico (también son abordadas por Neira, 2017). Además, indica que el concepto de derivada de una función es uno de los que ameritan atención prioritaria por su dificultad propia.

El concepto de derivada ha sido parte de numerosos estudios (Aguilar y Riestra, 2009; Cantoral y Mirón, 2000; Monge, 2013; Sanchez, 2006 y Vrancken et al., 2008, por ejemplo.) en los que se señalan complejidades propias como su lenguaje, simbología, representaciones, contextos de aplicación, interpretación y desde luego los procesos de enseñanza. Además, se han sugerido posibilidades de mejora en los procesos de enseñanza, entre los que se destacan estrategias basadas esencialmente en la evolución histórica del concepto, apoyo con recursos tecnológicos, enfatizar la cualidad de variación y propuestas basadas esencialmente en resolución de problemas.

Desde la perspectiva en la que se enmarca este proyecto de investigación son especialmente valiosas las investigaciones cuyos productos se pueden llevar al aula. Es decir, el teorizar sobre la problemática de la enseñanza de la derivada es muy importante, no cabe duda, sin embargo es aún más urgente el diseño de estrategias puntuales que puedan impactar de manera directa el trabajo docente y de procesos de reflexión sobre la evaluación de la eficiencia de estos diseños.

En ese sentido, Burkhardt y Schoenfeld (2003), citados por Artigue (2009), sostienen que

> La investigación basada en el desarrollo de herramientas y procesos para ser utilizados de forma práctica, frecuente en diversos campos, está prácticamente desaparecida en educación. Tal "investigación de ingeniería" es esencial para construir conexiones fuertes entre conocimientos basados en investigación y prácticas de mejora. Esto también resultará en una alta incidencia de recomendaciones basadas en evidencia robusta, ayudando a políticos a tomar decisiones informadas. [traducción propia] (p. 9)

Los autores resaltan la necesidad de fomentar investigaciones con el objetivo de crear propuestas de secuencias didácticas, clases o grupos de actividades orientadas al aprendizaje significativo del conocimiento pretendido. De forma semejante al trabajo de un ingeniero, el cual articula la teoría existente en su área con la información del contexto y los recursos que dispone para dar solución a problemas concretos, las investigaciones en didáctica de la matemática deben responder y aportar alternativas de solución a problemáticas propias del quehacer docente.

Sobre este asunto, Godino et al. (2006) pone de manifiesto la incertidumbre sobre qué matemática enseñar, cómo enseñarla y cómo tener alguna confianza en que las escogencias hechas resultaron idóneas para los objetivos que busca el proceso o bien reconocer cuáles puntos necesitan mejorarse. Autores como Aroza et al. (2016), Posadas y Godino (2017), Beltrán y Godino (2018) y Breda et al. (2018) señalan la necesidad de un proceso de reflexión sobre la labor docente a nivel personal y en conjunto.

Si no se dispone de una guía para este proceso de reflexión podría suceder que cuando un docente, con la más firme intención de propiciar un aprendizaje significativo, planea su clase, esta tenga escogencias inadecuadas. Las estrategias que proponga puede que sean reflejo de su experiencia como estudiante, estén un tanto viciadas a lo que personalmente considera que es lo más conveniente [conocimientos y creencias] (Beltrán y Godino, 2017), sean una escogencia de las técnicas de moda, sean tomadas del libro de texto directamente [consensos] (Breda et al., 2018), o influenciadas por anécdotas o sugerencias de algún colega [reflexión colectiva]. (Breda et al., 2018)

Breda et al. (2018) advierten que estas consideraciones, aunque honorables y bien intencionadas, no responden a criterios basados en un constructo teórico organizado, normado ni validado. Es claro que la tarea de valorar una escogencia didáctica como idónea es por demás compleja. Los principales impulsadores de la teoría de Idoneidad Didáctica señalan que “Ciertamente no disponemos de recetas sobre cómo enseñar, pero esto no significa que no tengamos ciertos conocimientos que nos permiten tomar algunas decisiones locales preferentes”(Godino et al., 2006, p. 3).

Ahora bien, un proceso de instrucción en general está lleno de factores variantes que harían imposible asignarle una categoría de idóneo sin que se cuestione desde qué punto de vista se está valorando. Es decir, las escogencias didácticas de un docente podrían ser muy buenas desde una perspectiva epistemológica pero no lograr una apropiación adecuada de los conceptos que pretendía enseñar o podrían organizarse actividades tan atractivas que logre captar la atención de los estudiantes en detrimento o desatención de los objetivos que la clase planteaba alcanzar. Esta variedad de subcategorías para la valoración de la idoneidad son denominadas, en Godino (2021), como facetas de la idoneidad didáctica.

La idoneidad cognitiva se destaca como una de las facetas más deseables en ambientes universitarios. Beltrán (2015), argumenta que "la idoneidad epistémica y la idoneidad cognitiva, constituyen realmente los pilares básicos de todo proceso instruccional"(p. 95). Como se ha mencionado anteriormente, existe un convencimiento por parte de los actores del proceso de enseñanza-aprendizaje de cálculo sobre propiciar una comprensión adecuada de los conceptos más que la eficiencia en los cálculos algebraicos rutinarios. Cuando existe un desfase entre el significado pretendido y el significado logrado los estudios cognitivos se centran en "localizar las dificultades para entender las causas y explorar posibles tratamientos"(Cantoral, 1993, p. 8).

Otro aspecto que es necesario agregar es la proliferación de clases remotas luego del período de pandemia a causa de la enfermedad Covid-19. Antes del año 2020, al menos en Costa Rica la oferta de cursos virtuales era escasa y la modalidad de enseñanza remota ni siquiera se mencionaba. Durante la pandemia todas las clases fueron remotas y luego de la pandemia, supongo que por los recursos generados y el aprendizaje logrado por todos los actores de los procesos de enseñanza, esta modalidad forma parte de la oferta de matrícula de las universidades costarricenses. Por tanto, la modalidad remota, sincrónica o no, plantea un reto adicional pues el contacto entre estudiantes y de estos con el docente es muy limitado o prácticamente nulo. Sin embargo, esta misma situación ha facilitado la obtención de videos a partir de plataformas digitales de manera muy sencilla.

En Malet et al. (2021) se presenta la descripción y clasificación de 85 trabajos en los que se hace alguna valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción, de estos solo 3 (Beltrán, et al., 2018; Beltrán, et al., 2020 y Burgos et al., 2020 citados por Malet et al., 2021) se refieren a videos educativos. Claramente, en un video educativo no hay interacción con los estudiantes (no interrumpen, no preguntan, no aportan) y no corresponden a videos en vivo, como si lo son los videos de clases remotas. Sin duda este es un contexto en el que se debe seguir indagando.

Por los argumentos anteriores, se ha considerado importante la concepción y aplicación de una secuencia didáctica para la enseñanza de la derivada a nivel universitario. Además, que dicha estrategia sea evaluada desde la óptica de la idoneidad cognitiva que permita juzgar la pertinencia de su implementación e identificar posibilidades de mejora. Adicionalmente, el diseño y valoración de la idoneidad cognitiva de la secuencia didáctica se constituye en una guía para la reflexión de la práctica docente y resulta ser un aporte novedoso a las investigaciones sobre educación en modalidad remota.

1.2. Planteamiento del Problema

Con los insumos expuestos anteriormente, se estableció la siguiente pregunta de investigación como guía general del proyecto.

¿Cómo valorar la idoneidad cognitiva de un proceso de instrucción para la enseñanza del concepto de derivada en un grupo de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) en mo-

dalidad remota en el Instituto Tecnológico de Costa Rica?

Se decidió establecer una serie de objetivos que, en conjunto, proveen la información suficiente para poder responder adecuadamente a este interrogante.

1.3. Objetivos General y Específicos

1.3.1. Objetivo General

- Analizar el grado de idoneidad cognitiva, según los indicadores del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), de una secuencia didáctica para la enseñanza del concepto de derivada diseñada a partir de la metodología de Ingeniería Didáctica, en un grupo de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) en modalidad remota del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Diseñar una secuencia didáctica para la enseñanza del concepto de derivada de una función.

- Aplicar la secuencia didáctica en un grupo de Cálculo Diferencial e Integral del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

- Valorar el grado de idoneidad cognitiva de la secuencia didáctica desde la teoría de Idoneidad Didáctica.

- Proponer lineamientos prácticos que guíen los procesos de reflexión sobre la labor docente en aspectos de idoneidad cognitiva.

1.4. Estudios Relacionados

Como insumos para el proceso de investigación se han considerado antecedentes desde tres aristas: estudios con diseños propios de ingenierías didácticas, investigaciones en las que se abordan alternativas para la enseñanzay aprendizaje del concepto de derivada de una función y finalmente valoraciones de la idoneidad de procesos de instrucción matemática.

1.4.1. Ingenierías Didácticas

La propuesta de Ingeniería Didáctica (ID) como posibilidad de diseño de secuencias didácticas y como metodología de investigación cobró notable vigencia en la década de los 90's con el florecimiento de la conocida Didáctica Fundamental Francesa. Actualmente, aún tiene un lugar importante como referencia de investigaciones, principalmente en didáctica de la matemática.

El modelo de investigación clásico de ID de Artigue (1995) ha sido cuestionado en algunos aspectos, pero esto no ha mellado sustancialmente en lo esencial del método. Muestras de esto son las escuelas de verano sobre Ingeniería Didáctica iniciadas en 2011, las analogías logradas entre ID y las investigaciones basadas en diseño (Godino et al., 2013) y la articulación de ID en el constructo teórico del EOS (Beltrán, 2015; Godino et al., 2014; Godino, 2021). En la actualidad y en concordancia con los recientes aportes provenientes de otros autores, además de Artigue, se puede sostener con categoría que la Ingeniería Didáctica es una metodología de investigación vigente.

Se incluyen, en este apartado, resúmenes de investigaciones agrupados en tres bloques: referencias propias sobre diseño de ID, ingenierías en las que se utilizan indicadores de idoneidad didáctica e investigaciones en las que se muestra la versatilidad de ID y recursos novedosos.

Un referente clásico sobre diseño de ID es el trabajo de Aguilar et al. (1991) sobre la función 2^x. Como señala De Faria (2006), el trabajo consistió en el diseño, implementación y análisis de una secuencia de actividades que pretendían hacer surgir la noción de función exponencial. Se trabajó en tres etapas en una sola sesión con cinco grupos de tres estudiantes cada uno, estos trabajaron durante una hora en cada etapa y luego una hora de discusión general. Se trataron temáticas como generalización de la forma a^x y arbitrariedad de la base, además se concluyó que el principal obstáculo que presentaron los estudiantes fueron los procesos de demostración.

Algunas muestras de diseños de ingenierías didácticas un poco más recientes son las realizadas por Ríos (2007), Vides y Rivera (2015), Chaves (2015) y Güerci (2016) referidas, en el mismo orden, al concepto de función, nociones básicas de estadística, desarrollo de pensamiento estocástico y problemas de optimización. Estas propuestas se consideran como referentes de un esquema clásico de ingeniería y son ejemplos de aplicaciones de las etapas que constituyen el diseño de ID.

La investigación de Ríos (2007) se realizó en Venezuela y contó con la participación de 26 estudiantes. Para el diseño de la ingeniería se consideraron aspectos como: representaciones parte todo, representación reparto, representación como razón, fracciones equivalentes, operaciones con fracciones, propiedades de los números racionales, entre otras surgidas de la revisión de literatura y la aplicación de una prueba piloto.

Entre las conclusiones más relevantes, Ríos (2007) señala una efectividad cuantitativa (respuestas correctas superiores a 70 %) de la ingeniería en prácticamente todos los aspectos considerados en la etapa de diseño. Además, la efectividad cualitativa se traduce en mejoras en la forma de expresar algunas ideas en el lenguaje formal y la eliminación de errores tales como repartición desigual de la totalidad, operaciones inadecuadas entre números enteros y mal uso del signo de igualdad. (p. 152)

Vides y Rivera (2015) hacen una revisión de la necesidad de promover aprendizaje significativo, argumentan las deficiencias en conceptos básicos sobre estadística y proponen el uso de la metodología ID para el diseño y validación de secuencias didácticas. No presentan conclusiones ni reflexiones pues el alcance del trabajo publicado llega hasta análisis a priori.

Güerci (2016) presenta un estudio de caso con diseño de ID en el que pretende el desarrollo del pensamiento estocástico de estudiantes de secundaria a partir de actividades con tomas de datos en el aula y otras con segmentos de una película. El documento no avanza más allá de análisis preliminares (al menos no están publicados al momento de esta revisión) pero si hay evidencias de experimentación y se menciona que se harán análisis a posteriori.

En Chaves (2015), cada una de las etapas del diseño de ID está desarrollada con detalle. El diseño incluye tres problemas de optimización con dificultad progresiva, de tal manera que fuesen surgiendo los conceptos de derivada y de recta tangente. Además, esta tesis de licenciatura incluye análisis de situaciones y evidencias de producciones.

La articulación del diseño de ID con los indicadores de idoneidad didáctica se evidencia en los trabajos de Anido y Scola (2009) y en la tesis doctoral de Beltrán (2015).

En Argentina, Anido y Scola (2009), propusieron una ID para abordar la noción de distancia en un curso de primer grado de Álgebra y Geometría Analítica en la Universidad del Rosario. En la etapa de análisis preliminares se estableció que los estudiantes ya dominaban fórmulas y procedimientos para calcular distancias en el plano (entre puntos, de un punto a una recta, entre rectas), esto sugirió a los autores plantear una situación donde los estudiantes participantes debían calcular la distancia en el espacio desde un punto dado a un plano con la ecuación dada explícitamente.

Al final del proceso se evaluó la idoneidad de la estrategia utilizada tomando como referencia los indicadores propuestos en Godino (2006 b). Los autores concluyeron que las escogencias planteadas resultaron idóneas desde la perspectiva cognitiva y emocional (las demás idoneidades ni siguiera se mencionan). Además, se enfatiza en la interacción y trabajo colaborativo y se sostiene que los estudiantes llegaron a comparar estrategias de solución, discutir y hasta analizar las conveniencias de una estrategia sobre otra.

La tesis doctoral de Beltrán (2015), además de utilizar indicadores de idoneidad didáctica, ilustra una forma ingeniosa para la creación de recursos didácticos: la utilización de secciones videos de películas y series populares. El autor menciona que persigue el objetivo utilizar una metodología de investigación lo suficientemente atractiva y visual que, sin perder rigor académico, anime al profesorado de secundaria a ponerla en práctica como medio para la reflexión de lo que ocurre en el aula. (p. 12)

Las propuestas de Beltrán (2015) están agrupadas en bloques por temas (números, álgebra, funciones y gráficas, geometría y probabildad y estadística) y corresponde a secciones de videos de series (como Los Simpson, Futurama, Numb3rs, The Big Bang Theory, entre otras) y películas (Apollo XIII, Blackjack, Mago de Oz). Esta tesis se considera un referente de mucho valor porque sigue el mismo diseño ID, muestra una utilización novedosa e incorpora el uso de los indicadores propuestos en la teoría EOS para valorar la idoneidad didáctica (enfatizando interaccional y emocional por el tema y características de la propuesta).

Otra muestra de innovación en diseños de ingeniería didáctica es la investigación de Rivas et al. (2011). Esta propuesta consiste en la utilización de un juego de dominó aritmético para reforzar conocimientos previos en el curso de cálculo. El dominó incluye temas básicos como conjunto de números, operaciones y propiedades de la recta real. Los autores insisten en los errores asociados a estrategias de enseñanza con énfasis algebraico algorítmico y sugieren la utilización de juegos (cartas, bingo, lotería) para innovar la forma en como se trabaja en las aulas.

Los autores concluyen que fueron motivados por aspectos como

> el rescate de los pre saberes, el desarrollo del pensamiento, la motivación al estudio, la participación del estudiante en la construcción de las ideas inherentes al cálculo, el aprendizaje basado en problemas y el aprendizaje cooperativo. (p. 103)

Para cerrar esta sección es importante subrayar el resurgimiento que ha tenido la propuesta de Ingeniería Didáctica en los procesos de investigación sobre Educación Matemática, razón que nos motiva a adoptarla como metodología de investigación. Numerosos autores, como Kelly et al., (2008), Cobb y Gravemejier (2008) han tomado como base las ideas de Artigue (1995) y las han complementado en propuestas de investigación fundamentadas en el diseño.

Al respecto, Godino et al. (2014) mencionan que los experimentos de diseño guardan, con la ingeniería didáctica, un "aire de familia" y que se distinguen por los instrumentos conceptuales que aplican y los resultados que permiten develar (p. 194).

1.4.2. Investigaciones relacionadas con procesos de enseñanza del concepto de derivada

En primera instancia se presenta una investigación que describe la forma en cómo se enseña cálculo a nivel universitario y un estudio reciente sobre las problemáticas que enfrentan los estudiantes cuando ingresan a la universidad. Posteriormente se describen algunas propuestas para la enseñanza del concepto de derivada orientadas en la resolución de problemas, algunas desde una perspectiva variacional y otras con el uso de recursos tecnológicos.

En Chile, Ortega et al. (2006) realizaron una encuesta en línea a una muestra de doce docentes con altos grados académicos y reconocida experiencia en la docencia universitaria, con el objetivo de determinar la forma en cómo se estaba enseñando cálculo a ese nivel. La encuesta aplicada trataba fundamentalmente siete aspectos: el concepto de derivada, cálculo de derivada, interpretación de la derivada, teoremas claves, máximos y mínimos, gráfico de curvas y otros problemas.

Luego del proceso de experimentación y análisis se concluyó que

> Los profesores encuestados se caracterizan, en general, por enseñar el tema de derivadas en forma adecuada, es decir con un perfil cercano al ideal. La mayoría señala como bastante difícil el trabajo con el gráfico de curvas a partir de la derivada y consideran de mucha importancia el tema de derivadas (en especial la interpretación de la derivada). (p. 15)

Señalan, también, que la mayoría de los profesores distribuye bien el tiempo estipulado en el programa de estudio, seleccionan ejercicios rutinarios y problemas clásicos (especialmente en los temas Gráfico de Curvas mediante Derivadas y Concepto de Derivadas). Con respecto al tipo de presentación de la materia, combinan adecuadamente lo algebraico y lo gráfico (Ortega et al., 2006).

Un análisis de las dificultades, conflictos y obstáculos en prácticas educativas universitarias que enfrentan los estudiantes fue realizado en Colombia por Neira (2017). En este proyecto se plantea que existe un “problema” en la enseñanza del cálculo pues

> la situación es tan sentida y tan generalizada que se han incorporado innovaciones con el uso de las llamadas TICS, software de visualización, programas especiales, desarrollos de situaciones puntuales con el uso del computador o de la calculadora, que permiten sí un apoyo visual y un poco más de sentido y significado, pero siguen presentándose las incomprensiones y repitencia señaladas. (p. 5)

Se planteó el objetivo de describir y caracterizar las dificultades que encuentran los estudiantes al iniciar el estudio del cálculo diferencial en una universidad colombiana, explicar algunas de las causas de su emergencia y del modo en que se mantienen. Para esto se consideró indispensable identificar y describir las prácticas desde las aulas de clase.

La estrategia metodologica tuvo como base la aplicación de entrevistas y observaciones, con el propośito de documentar las vivencias, las experiencias y las dificultades experimentadas. A partir de la información recolectada, se hicieron inferencias acerca de la causalidad de las dificultades y errores sistemáticos y las razones que los generan y los mantienen.

Como conclusiones se destacan el uso de términos disociados a conceptos por decisiones personales del docente (como dx en la notación de derivada), la influencia negativa en el aspecto emocional del vocabulario sarcástico utilizado por la docente. Además se destaca la potencia del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) como propuesta de análisis de secuencias didácticas.

Algunos investigadores, en otros contextos, han dirigido sus esfuerzos al diseño de secuencias didácticas desde diversas perspectivas. Por ejemplo, Aguilar y Riestre (2009) proponen una introducción algebraica y dinámica al concepto de derivada. Estos investigadores sostienen que la enseñanza de la derivada puede orientarse en un sentido similar al desarrollo histórico del concepto de derivada.

> La derivada fue primero utilizada (implícitamente), después descubierta, luego desarrollada y finalmente definida, abarcando en este proceso más de dos siglos, mientras que en la enseñanza se procede justamente a la inversa del orden histórico, esto es, empezando por una definición general. (p. 14)

La propuesta de Aguilar y Riestre (2009) sugiere iniciar con la problemática de máximos y mínimos, con esta situación se desarrollan diferencias de una función en términos de incrementos finitos de la variable independiente y se comparan potencias de diferentes órdenes de dichos incrementos, despreciando las de orden superior con respecto a las de orden inferior, cuando se toman incrementos "realmente" muy pequeños. La problemática se ilustra con situaciones reales de física o cálculo de áreas (esto permite introducir nociones como velocidad y rapidez). Según los autores, de esta forma la derivada aparece de manera natural en estos desarrollos como el coeficiente diferencial y se abandona la costumbre de definirlo a partir de un límite.

Aguilar y Riestre (2009) concluyen con una reflexión sobre su propuesta y la comparan con lo que llaman la forma tradicional de enseñanza.

> En concordancia con el desarrollo histórico, se desarrolla una derivada algebraica, de hecho la función derivada, en contraposición con la tradicional que introduce, en su lugar, la derivada en forma puntual. Y también, a través de problemas se van desarrollando, o se ve la necesidad de desarrollar, los conceptos y la teoría asociada, mientras que en la tradicional se presenta tal desarrollo en forma más o menos abstracta (para funciones en general) postergando siempre las aplicaciones (hasta que a veces es demasiado tarde) y por lo tanto a los problemas que muestran el poder del Cálculo y que justifican y le dan sentido a las nociones y al desarrollo de la teoría. (p. 15)

Por otra parte, algunos investigadores sugieren el uso de la noción de variación como principal componente de las secuencias de clase para la enseñanza de la derivada.

Como muestra, Dolores (2000) propone contribuir a la comprensión del concepto de derivada a través de la formación de ideas variacionales, particularmente a través de la noción de rapidez de la variación.

Como estrategia metodológica, la autora sugiere realizar un preexperimento, es decir se elige un solo grupo de estudiantes, al principio se explora el estado de sus ideas variacionales, después se pone en práctica la propuesta y al final, se explora la influencia que las ideas variacionales desarrolladas tuvieron en la comprensión del concepto de derivada (Dolores, 2000, p. 1).

Es importante reconocer que esta propuesta está relacionada con la ideología de abordar la enseñanza de la derivada según la evolución histórica del concepto, pues al respecto señalan que

> La introducción de la derivada a través de la variación se fundamenta en su origen histórico. Sus antecedentes históricos están ligados al problema de las tangentes, problema estudiado por los griegos de la antigüedad clásica [...] con la necesidad de resolver problemas del movimiento, surge la noción de la rapidez de la variación instantánea como forma germinal del concepto de derivada. En la rapidez de la variación encuentra su esencia el concepto de derivada. (p. 14)

Del análisis realizado a la información obtenida se desprende que

> Los estudiantes muestran inconsistencias sobre la interpretación geométrica de la derivada, confunden el valor de la función en un punto con la pendiente de la tangente en ése punto, además, al presentar el dibujo comúnmente utilizado por los profesores para representar a la derivada en un punto, los estudiantes contestan que la derivada se mide en dos puntos y no en uno solo. [...] escasamente el 8 % de los encuestados la lograron asociar correctamente con la velocidad instantánea y un porcentaje muy elevado (el 76 %) nuevamente confunde el valor de la función en el punto con el valor de la velocidad instantánea. (p. 17)

Con consideraciones y alcances similares, Vrancken et al. (2008) presentan una serie de actividades de una secuencia didáctica con el propósito de facilitar la construcción del concepto de derivada. La principal premisa de esta secuencia se encuentra en asumir que el tratamiento y conversión entre los diferentes registros en que este concepto puede ser presentado (numérico, coloquial, geométrico, algebraico) y el desarrollo de ideas variacionales, como la noción de razón de cambio, pueden contribuir a este propósito.

Los estudiantes se agruparon en parejas y se les plantearon dos bloques de actividades en clases sucesivas. El abordaje de los problemas, prácticamente sin la intervención del profesor, fue la actividad principal realizada en el aula. La labor del docente se limitó a servir de presentador de las actividades y cobró relevancia en las situaciones de institucionalización.

En una tercera clase, se pusieron en común los resultados de las actividades de la clase anterior y a partir de los mismos el profesor definió razón de cambio media, razón de cambio instantánea, relacionó dichos conceptos con su interpretación geométrica y definió derivada. (Vrancken et al, 2008, p. 39)

Como principales consecuencias de la puesta en práctica de las actividades se mencionan:

- la importancia de analizar el tratamiento del tema funciones, ya que muchos de los problemas están relacionados con este concepto.
- la necesidad de promover las tareas que conectan los distintos sistemas de representación, ya que permiten acercar al alumno al concepto desde diferentes perspectivas, favoreciendo la visualización de las ideas, lo que los llevará a la aprehensión de los distintos conceptos.
- la promoción de un aprendizaje más activo, junto con la posibilidad de ayudar a que aprendan mediante la construcción y la reflexión, alentando la discusión de distintas estrategias y soluciones, así como motivar explicaciones que llevan a comenzar procesos de argumentación y demostración. (p. 45)

Una perspectiva complementaria la constituye los trabajos de Cantoral y Mirón (2000), Sánchez (2006) y Robles et al. (2010) quienes proponen la incorporación de tecnologías en los procesos de enseñanza de derivadas.

Tabla 1.1: Definiciones de derivada desde un registro algebraico.

Cauchy	**Lagrange**
$\frac{d}{dx}f(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$	$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f'(a)(x - a)^2}{2!} + ...$

Fuente: Cantoral & Mirón (2000)

Después de realizar una revisión exhaustiva de literatura Cantoral y Mirón (2000) dejan en evidencia una serie de *dislexias escolares*. Al respecto señalan que

> La enseñanza habitual del análisis matemático logra que los estudiantes deriven, calculen límites elementales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión. (p. 269)

En términos generales la propuesta se basa en la presentación de la derivada como el coeficiente lineal del desarrollo en series de potencias de una función en torno de un punto dado (Lagrange) y no como el límite de un cociente incremental (Cauchy), que es lo usual. Estas definiciones se muestran en la Tabla 1.1. Cantoral y Mirón (2000) argumentan que

> Esta doble apariencia de un objeto matemático no debe entenderse como dos maneras de escribir la misma idea... por el contrario, como la expresión de epistemologías radicalmente distintas que pueden dotar a los objetos matemáticos, incluso, de significaciones diversas. (p. 271)

Además, se incorpora el uso de calculadoras graficadoras en las secuencias didácticas y se ubica como punto de partida las concepciones de rectas tangentes desde la perspectiva de la antigua Grecia, es decir como una particular forma de contacto entre la recta y la curva. Esto redunda en que la tangente sea obtenida en el proceso y no la presentación de un sucinto proceso de límite.

La experiencia involucró tres grupos de estudiantes diferentes, en tres años diferentes también, del nivel de bachillerato universitario. El desarrollo de la investigación se articuló en tres fases: una primera de preparación de competencias en los estudiantes, luego el desarrollo de las actividades en secuencias de clase y una última fase de institucionalización.

El estudio concluye que a partir del análisis de las actividades se reconocieron algunos hechos didácticos como la apropiación de los problemas presentados y la responsabilidad de justificar las respuestas; las discusiones y observaciones les permite cambiar de estrategias de solución y un hecho de vital relevancia, la utilización del método del ensayo-error se constituyó en un importante obstáculo epistemológico. La investigación cierra con una reflexión sobre las consecuencias de la incorporación de tecnologías en los salones de clase.

> La visualización de conceptos y procesos matemáticos de nuestro interés, no es una consecuencia de la incorporación del recurso tecnológico, como simplemente podría creerse, sino por el contrario obedece a la articulación entre un diseño teórico de la situación didáctica que atiende a una epistemología alternativa, pues ese diseño permite a los estudiantes apoyarse en las capacidades técnicas de las calculadoras. Es el diseño de la situación que permite el uso de la tecnología. (Cantoral & Mirón, 2000, p 291)

Dos propuestas que combinan la idea de introducir la función derivada a partir de la noción de variación con el uso de recursos tecnológicos, se encuentran en Sanchez (2006) y Monge (2013). El desarrollo de la investigación de Sanchez se ubica en México, con la participación de un grupo de estudiantes universitarios. La estrategia consiste en aprovechar la idea de variación en contextos numéricos, físicos y gráficos en la representación y la manipulación de ideas matemáticas con el apoyo de un sensor de movimiento y calculadoras graficadoras.

La primera parte de la propuesta es una actividad diseñada con el objetivo de introducir al estudiante al método de diferencias finitas, luego se experimenta con el registro del movimiento de un péndulo y la descripción y graficación del comportamiento variacional en las calculadoras; finalmente con el apoyo de la calculadora se institucionaliza el concepto de derivada. Sanchez (2006) comenta que su propuesta no es novedosa y que necesariamente se debe trabajar más al respecto para poder adaptar esta idea a otros contenidos.

> El diseño didáctico presentado incluye la utilización de dispositivos tecnológicos que permiten representar y analizar las ideas matemáticas de una manera más ágil y sencilla que en un ambiente de lápiz y papel. Por otro lado, creemos que estas herramientas tecnológicas generan un escenario de significados que pueden ser asociados con el concepto matemático y de esta manera mostrar a los estudiantes algunas aplicaciones de la derivada. (p. 8)

La tesis doctoral de Monge (2013) es un referente de mucho interés pues fue realizada en Costa Rica y tuvo como participantes un grupo de Cálculo Diferencial e Integral del Instituto Tecnológico. Además, para el diseño de las actividades se consultó a docentes nacionales y extranjeros sobre la forma que consideraban más adecuada para abordar el tema de derivada y en la etapa de evaluación se utilizaron instrumentos como entrevistas y boletas de valoración de las sesiones por parte de los estudiantes.

Una característica novedosa de este trabajo es que utiliza como referente la teoría de la visualización del conocimiento, la cual enfatiza sobre el potencial del cerebro humano para procesar efectivamente representaciones en formato visual y las potencialidades de la inteligencia visual.(Monge, 2013, p. 66).

La propuesta de Monge (2013) consiste en el diseño de tres actividades de clase y tres actividades extraclases para construir el concepto de derivada a partir de la visualización. Cada actividad disponía de un protocolo (instrucciones para el docente y estudiantes), situaciones problema y apoyo en recursos visuales, como animaciones, imágenes con secciones destacadas en color o simulaciones elaboradas en Geogebra.

El autor sostiene que

> el papel de la visualización en la matemática puede ser visto desde dos puntos de vista: el primero que considera que la visualización es un apoyo en la representación y construcción de conceptos, y la segunda considera la visualización como herramienta de carácter axiomático que permitiría su uso en la validación de teoremas. (p. 61)

La evaluación de la propuesta fue enfocada en tres aspectos: el ambiente de clase, la compresión del concepto de derivada y el rendimiento académico. Se trabajó con un grupo de profesores, los cuales tuvieron un grupo experimental y otro de control. El autor concluye enfatizando el papel del docente en la valoración de secuencias de clase por parte del estudiante y señalando que no hubieron mayores diferencias desde las tres aristas planteadas.

1.4.3. Estudios sobre valoración de idoneidad de secuencias didácticas

Los primeros pasos en el establecimiento de una serie de criterios para valorar la idoneidad de una secuencia didáctica se encuentran en Godino et al. (2006 c). En ese momento, los autores dirigen su estudio hacia la valoración de las idoneidades principales de un proceso de instrucción matemática: la epistémica, la cognitiva y la instruccional. La actividad consistió en la presentación de un problema estándar de física sobre el lanzamiento de un pelota, en el que, con una serie de preguntas, se pretendió que se trabajaran, al menos, conceptos como ámbito, domino, correspondencia y función.

En el análisis de la idoneidad epistémica se identificaron una larga lista de conflictos que terminaron por quedar sin resolver, por ejemplo "el profesor utiliza la expresión continuidad de la función como sinónimo de condición básica que discrimina al tipo particular de correspondencia llamado función" (p. 14). Esto ubica el proceso de instrucción en una idoneidad epistémica deficiente.

En lo referente a la idoneidad cognitiva se menciona que hubieron incidentes aislados importantes pero que esto no es suficiente para determinar que esta no fue idónea. Para una mejor valoración debe hacerse un seguimiento a los estudiantes. Además, el análisis reveló que la propuesta si fue idónea desde la faceta instruccional, sin embargo el docente no fue capaz de lograr los procesos de formalización e institucionalización, por lo que el proceso terminó en abandono al fracaso.

Siguiendo la línea de incorporar tecnología en los procesos de enseñanza pero agregando una etapa de validación utilizando los criterios e indicadores de la Teoría de Idoneidad Didáctica, Robles et al. (2010), plantean el uso de la noción de la linealidad local como una alternativa para introducir el concepto de derivada. El proyecto fue realizado en la Universidad de Sonora, México y contó con la participación de estudiantes del primer curso de cálculo de la División de Ingeniería.

La propuesta tiene como referente teórico y analítico el EOS y consiste en la realización de actividades en Applet Descartes según una hoja de trabajo previamente elaborada. En primera instancia la herramienta tecnológica permite hacer notar que las rectas tangentes aproximan la gráfica de una función si se hace un *zoom* en el punto de tangencia, seguidamente los estudiantes exploran con una serie de funciones derivables distintas y el software le genera un tabla en la que pueden inferir el criterio que relaciona los puntos que han identificado (los de tangencia); en este momento ya surgió la noción de derivada. Por último, la hoja de trabajo incluye algunas funciones no derivables para que en la exploración se identifiquen las pistas gráficas que muestran esa condición.

En el análisis de la idoneidad didáctica se obtuvieron los siguientes resultados: alta idoneidad epistémica, mediana-alta idoneidad cognitiva, baja idoneidad interaccional, media idoneidad mediacional, baja idoneidad emocional y alta idoneidad ecológica. Se concluye que el proyecto dió pautas para una mejora en la propuesta didáctica con miras en aumentar las idoneidades que no se logran en alta medida. Este proyecto fue complementado y publicado en Robles et al. (2012).

Otra importante referencia sobre valoración de idoneidad de procesos de instrucción la constituye el trabajo de Alsina y Domingo (2010). La propuesta consiste en determinar la idoneidad de un protocolo sociocultural para la enseñanza del concepto de poliedro regular. La estructura de la propuesta consiste en siete fases de trabajo que incluyen actividades exploratorias con elementos cercanos al aula, consolidación de cinco poliedros regulares, puesta en común con toda la clase y una fase de reflexión escrita. Además, se utilizaron instrumentos para obtener información como grabaciones en video y cuestionarios semiestructurados.

El protocolo se aplicó a 15 estudiantes con edades entre 14 y 15 años, el análisis de la información se realizó considerando los datos obtenidos en cada uno de los instrumentos. Se concluye que el protocolo tiene un alto grado de idoneidad didáctica en todas sus facetas y los autores hacen una serie de sugerencias que, según ellos, fueron determinantes en la obtención de esta distinción. Entre ellos destacan la buena formación disciplinar y didáctica del docente, la perspectiva sociocultural dada al protocolo y la utilización de material manipulativo.

Al llegar a este punto es necesario hacer referencia a una serie de publicaciones (entre ellas algunas tesis doctorales) las cuales han marcado el inicio una etapa de creciente proliferación de estudios que involucran valoraciones de idoneidad en educación. Las siguientes referencias tienen como objetivo primordial sustentar el arraigo de la teoría de Idoneidad Didáctica en los procesos de instrucción y la forma en cómo se ha mostrado la viabilidad y pertinencia de investigaciones en esa línea. Además, se constituyen en muestras de primera mano sobre principios y estrategias metodológicas para la aplicación y análisis de los indicadores de idoneidad en este documento. Dos de las tesis doctorales se han ubicado en el tema de integrales (Dos Santos, 2012 y Mateus, 2017), Pino-Fan (2013) trabajó la faceta epistémica en el tema de derivadas y Rivas (2014) ubicó su estudio en el tema de Estadística a nivel de primaria.

Dos Santos (2012) realizó una investigación cualitativa, basada en el estudio de casos de un contenido matemático (la integral) y un contexto educativo particulares (licenciatura en matemáticas en Brasil). En su proceso de análisis aplicó y desarrolló las categorías del EOS, específicamente la noción de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Sobre estas herramientas, el autor enfatiza que

> La noción de idoneidad didáctica de los procesos de estudio matemático nos ha atraído la atención por su potencialidad para articular las diversas facetas y componentes que caracterizan la complejidad de los procesos formativos en Educación Matemática. Las herramientas teóricas desarrolladas en el EOS se han revelado potentes para caracterizar y sistematizar la idoneidad del proceso de estudio de la integral en el contexto socio-profesional de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil. (p. 425)

Con el objetivo de aportar conocimientos sistemáticos y fundamentos sobre como elaborar diseños instruccionales para la formación de calidad de profesores de matemáticas, los autores realizaron un exhaustivo análisis de currículo y libros de texto, además se entrevistó a diez formadores de profesores. Para el contexto de este proyecto, la tesis de Dos Santos (2012) aporta, principalmente,

- una pauta de análisis de idoneidad del proceso de estudio de la integral (que puede transferirse, en parte al menos, al tema de derivada),
- la distinción de ocho configuraciones didácticas para el análisis epistémico del concepto de integral (intuitiva, primitiva, geométrica, sumatoria, aproximada, extra matemática, acumulada y tecnológica),
- descriptores para la valoración de la dimensión cognitiva de la idoneidad didáctica (conocimientos previos de los estudiantes, aprendizaje de los estudiantes, y las adaptaciones curriculares a las diferencias individuales de los estudiantes) y
- refuerza a la iniciativa de utilizar recursos tecnológicos en los procesos de enseñanza.

En una línea similar, Mateus (2017), aborda el tema de integración por partes. Sobre la justificación este tema, menciona

> Nos surge la necesidad de verificar los efectos de esta enseñanza tan sesgada hacia la integral como método netamente algebraico en el aprendizaje de los alumnos. Esto es, habría que plantear una investigación sobre el estudio de los significados personales de los estudiantes que han recibido esta enseñanza y determinar los conflictos semióticos y las ausencias de significado que se pueden producir. (p. 279)

Mateus hace una descripción detallada de los conflictos evidenciados y las consecuentes dificultades de estos (p. 212). Con las herramientas analíticas del EOS concluye que la idoneidad didáctica del proceso de instrucción implementado y observado se valora como bajo si se considera desde la interacción de las seis dimensiones sugeridas por Godino et al. (2011).

Por otro lado, la tesis doctoral de Pino-Fan (2013) se constituye en un referente indispensable de este proyecto por dos razones; se contextualiza en procesos de instrucción en el tema de derivada y valora en forma detallada una faceta de la idoneidad didáctica (la epistémica).

Además, el abordaje realizado por Pino-Fan (2013) tiene alguna similitud con el realizado en este proyecto. Se identificaron cuatro fases en el trabajo de Pino-Fan (2013).

1. Conceptualización de los significados de la derivada mediante un estudio sistemático de tipo histórico-epistemológico-didáctico;

2. Diseño del cuestionario Conocimiento Didáctico Matemático de la Derivada (CDM- Derivada). Esto a partir de los significados de la derivada y criterios aportados por las investigaciones sobre Didáctica del Cálculo, así la formación de profesores de matemáticas;

3. Aplicación piloto del cuestionario a una muestra de 53 futuros profesores de bachillerato en México y el diseño del cuestionario definitivo a partir de los resultados obtenidos en la primera fase y la triangulación mediante juicio de expertos y

4. Aplicación del cuestionario definitivo a una muestra de 49 futuros profesores de bachillerato en México. También se realizaron entrevistas clínicas a una muestra de 15 estudiantes para profundizar en la caracterización de las configuraciones cognitivas sobre la derivada.

Entre los principales productos obtenidos, Pino-Fan (2013), resume que se logró

- Determinar criterios para el análisis de la idoneidad epistémica de los significados de la derivada pretendidos en los libros de texto y en los planes de estudio.

- Diseñar una metodología para la exploración del conocimiento, referente a la faceta epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), de profesores en formación inicial.

- Establecer criterios para analizar y describir la faceta epistémica del CDM de los futuros profesores.

- Contribuir con aportes teóricos y metodológicos al modelo CDM.

En ese momento, Pino-Fan (2013) reflexiona sobre la necesidad de realizar más estudios que valoren la idoneidad de procesos de instrucción sobre el concepto de derivada

> [...] somos conscientes que en lo que respecta a la exploración y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza idónea de la derivada, de los futuros profesores, tan sólo hemos dado el primer paso. Aún quedan bastantes cuestiones abiertas que pueden dar pie a investigaciones que podrían ser la continuidad de nuestro estudio. (p. 350)

Otro referente de indudable aporte es la tesis doctoral de Rivas (2014). En este proyecto se utilizó la ID de Artigue como estrategia de diseño y las herramientas del EOS, incluida por supuesto la idoneidad didáctica, para el proceso de análisis.

Rivas (2014), dirigió su trabajo en dos direcciones: (1) la elaboración de sistemas de indicadores empíricos de idoneidad a partir del análisis del contenido de documentos curriculares y resultados de las investigaciones didácticas; (2) la aplicación de las distintas facetas de la idoneidad y las herramientas de análisis didáctico del EOS a la investigación de diseño o ingeniería didáctica. Ambos estudios se realizan en el contexto de la formación estadística de futuros profesores de educación primaria.

Sobre esta complementariedad, ID-EOS, la autora enfatiza que

> Las herramientas teóricas utilizadas permiten revelar hechos didácticos significativos, que determinan, por un lado, pautas para la determinación de trayectorias didácticas idóneas para la enseñanza del tópico estadístico y, por otro lado, fundamentos para valorar la ingeniería didáctica como una metodología de la investigación extrapolable a distintos enfoques teóricos. (p. 9)

También, señala que

> El diseño de "instrumentos de valoración de la idoneidad didáctica" es un tema que ha venido siendo abordado de manera muy reciente y por tanto, es una línea de investigación abierta que abre posibilidades a la realización de nuevos estudios en un doble sentido: por una parte, se requiere la mejora progresiva de los instrumentos ya existentes y por otra, elaborar guías para la valoración de la idoneidad didáctica para diferentes áreas de la matemática, niveles educativos. (p. 272)

Con el estudio de estas cuatro tesis doctorales es claro que la propuesta de abordaje desde la ID de Artigue y complemento de EOS de Godino es una combinación que arroja resultados de alto valor en contextos educativos. Además, se ha evidenciado que la valoración de idoneidad didáctica en procesos de instrucción referidos a temas de cálculo son pertinentes y, según los mismos autores, necesarios.

Para cerrar este apartado se presenta una serie de artículos, elaborados por Godino y colaboradores, en los que se establecen estrategias de análisis de secuencias didácticas y valoraciones sobre su idoneidad.

En un primer grupo se ubican Parra y Ávila (2015), Aroza et al. (2016), Breda y Lima (2016) y Bastías et al. (2019), pues estos siguen una línea de trabajo similares. Aunque los artículos están ubicados en temáticas diferentes (caída libre de objetos, proporcionalidad, probabilidad y resolución de problemas respectivamente) y en contextos también diferentes (México, España, Brasil y Chile) todos ellos inician con una revisión bibliográfica exhaustiva, luego se diseña una secuencia de actividades, las cuales son llevadas a las aulas en las que finalmente se valora su idoneidad didáctica desde las seis facetas propuestas por Godino et al. (2011).

Estos artículos dan sugerencias sobre como implementar el análisis de indicadores en cada uno de las facetas de idoneidad didáctica, además muestran estrategias de análisis e interpretación de la información para concluir el nivel de idoneidad observado en la aplicación de las actividades.

Sobre el uso de indicadores de ID y su utilidad en procesos de enseñanza-aprendizaje, Parra y Ávila (2015) mencionan

> [...] mejorar los procesos de enseñanza de la disciplina, [...] plantea como un requerimiento fundamental para la investigación, el uso de una metodología que permita describir, analizar, explicar y valorar los procesos que se dan en el aula escolar, por lo que en este trabajo vamos a presentar una propuesta metodológica denominada: Idoneidad Didáctica (ID) (p. 2)

En un segundo grupo ubicamos a Beltrán y Godino (2017) y Artega et al. (2017), pues estos artículos trabajan únicamente una de las facetas del procesos de Idoneidad Didáctica (la afectiva en el tema de Probabilidad y la mediacional en Estadística, respectivamente). Ambos son artículos en los que se analizan de manera detallada cada uno de los criterios involucrados en la faceta correspondiente.

El principal aporte de estos artículos, además de las pautas analíticas y metodológicas, es el involucramiento activo de facetas que tradicionalmente no son las más estudiadas; la mayoría de estudios previos se centran en aspectos epistemológicos y cognitivos.

Finalmente, Beltrán et al. (2018) dan un importante paso cualitativo en la evolución de los procesos de valoración de idoneidad didáctica; el diseño de indicadores específicos para un tema particular. Los autores, a partir de sus experiencias en el tema y de revisión de investigaciones relacionadas, proponen una serie de indicadores particulares para el tema de Probabilidad a nivel de secundaria.

Beltrán et al. (2018), aclaran sobre su propuesta que

> No se trata de reglas generales de actuación, sino de ciertos principios cuya aplicación requiere tener en cuenta las restricciones del contexto y los recursos disponibles. (p. 528)

Capítulo 2

Referente conceptual

Los principales referentes teóricos considerados en este proyecto son el Enfoque Onto-semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) impulsado por Juan Díaz Godino y la Ingeniería Didáctica (ID) cuyo principal exponente es Michèlle Artigue.

2.1. Ingeniería Didáctica Clásica

La Ingeniería Didáctica fue concebida como una vía metodológica para las realizaciones de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986) y la Transposición Didáctica (Chevallard, 1991). Michèle Artigue, principal exponente de esta teoría, acuña el término de "ingeniería didáctica" al realizar una comparación de la labor docente con el trabajo científico de un ingeniero.

Según Douady (1995), la ingeniería didáctica se visualiza desde dos aristas: como metodología de investigación y como producciones de secuencias de enseñanza. En lo referente a este proyecto, el enfoque es sobre la primera.

El mismo autor, hace un resumen sobre ID que muestra la relación con la propuesta de este documento,

> [...] el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos.

> A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase. (Duady, 1995, p. 33)

2.1.1. ID como metodología de investigación.

Desde la arista de metodología de investigación, la ingeniería didáctica se caracteriza por basarse en un esquema experimental de "realizaciones didácticas" en el aula y por incluir un proceso de validación interna basado en el registro de los estudios de casos y en el contraste de los análisis a priori y a posteriori. Para comprender mejor la organización de metodología de ingenierías didácticas se describen cuatro fases:

2.2.1.1 Análisis preliminares

Es la etapa inicial, en la concepción de una ingeniería didáctica son necesarios análisis preliminares referidos al cuadro teórico didáctico general y sobre los conocimientos didácticos adquiridos y relacionados con el tema. (Artigue, 1998, p. 38).

Ríos (2007) detalla la fase de análisis preliminares aduciendo que esta incluye el análisis de aspectos como

> la epistemología de los contenidos a enseñar, la enseñanza tradicional y sus efectos, las concepciones de los estudiantes, las dificultades y obstáculos que se presentan en el aprendizaje, las condiciones bajo las cuales se presentará la situación didáctica efectiva y los objetivos de la investigación, entre otros. (p. 134)

Es importante señalar que, en total armonía con el carácter sistémico de la didáctica fundamental, la ingeniería didáctica sugiere realizar estos análisis desde tres dimensiones: *didáctica* (sistema de enseñanza), *cognitiva* (a quien se dirige la enseñanza) y *epistemológica* (saber en juego).

2.2.1.2 Concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas

Es la etapa de diseño de la ingeniería. Artigue (1995) señala que "en esta segunda fase el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema que no estén fijadas por las restricciones" (p. 44). Estas son las *variables de comando* que él percibe como pertinentes con relación al problema estudiado y que pueden ser *macro-didácticas* o globales (organización global de la ingeniería) o *micro-didácticas* o locales (organización de una secuencia didáctica).

Como se mencionó con anterioridad, una de las originalidades de la ingeniería didáctica es que su proceso de validación es esencialmente interno. Desde la fase de concepción se inicia este proceso y su primer paso es el análisis a priori (que se contrastará con el análisis a posteriori) que puede interpretarse como análisis de control de significado.

El análisis a priori es la etapa en la que el diseñador de la situación didáctica explicita los supuestos referidos a los procesos de enseñanza y aprendizaje que se generarán y los resultados (probables y seguros) que se obtendrán. El objetivo de este análisis es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar comportamientos de los estudiantes y su significado. (Artigue, 1995; Ríos, 2007)

Debe entenderse que "el objetivo del análisis a priori no es anticipar todos los comportamientos personales (estudiantes y profesor), es más bien construir una referencia con la cual poder contrastar las realizaciones del aula en el análisis a posteriori"[traducción propia] (Artigue, 2020, p. 204). Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis que serán sometidas a validación en la confrontación que se lleva a cabo en la fase cuatro, entre el análisis a priori y el análisis a posteriori.

2.2.1.3 Experimentación

La experimentación se considera la fase de ejecución de la ingeniería con una cierta población de estudiantes. De Faria (2006), señala que en esta fase deben considerarse:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación;
- El establecimiento del contrato didáctico;
- La aplicación de los instrumentos de investigación y
- El registro de observaciones realizadas durante la experimentación. (p. 5)

Además, sugiere que si la experimentación es extensa (más de una sesión) debe hacerse un análisis a posteriori local, confrontando con los análisis a priori, con el fin de hacer las correcciones necesarias y que en el proceso se respeten las selecciones y deliberaciones hechas en los análisis a priori.

2.2.1.4 Análisis *a posteriori* y evaluación

Es la etapa de cierre de una ID, basada en los datos obtenidos durante todo el proceso de experimentación. Artigue (1995) especifica que se trata de "observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella" (p. 48).

Estos datos se completan con otros obtenidos mediante la utilización de metodologías externas (cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, realizadas durante cada sesión de la enseñanza) y se utilizan para la validación de la ingeniería. La fase de validación, como ya se ha mencionado, consiste en el contraste del análisis a priori con el a posteriori.

En este momento es importante detenerse y comentar algunas particularidades de la fase de validación. En primera instancia debe subrayarse que es un proceso interno y por tanto escapa a las *trampas* de los esquemas usuales, es decir a las comparaciones mesurables basadas en el cotejo de un grupo experimental y un grupo control. Esta característica innovadora de la ID se ve opacada por el hecho que los análisis a priori, necesariamente, se encuentran limitados a las escogencias hechas por el docente en las etapas de concepción y análisis preliminares.

De hecho, Artigue (1995) advierte que "en la mayoría de los textos publicados concernientes a ingenierías, la confrontación de los dos análisis, a priori y a posteriori, permite la aparición de distorsiones" (p. 49). Esta situación ha ocasionado, en muchos estudios, que los autores se limiten a proponer o sugerir modificaciones de ingenierías que pretendan reducir estas distorsiones y no se comprometen realmente con un proceso de validación.

Como reacción a estas limitaciones de la ID, se aborda lo que se denomina Ingeniería Didáctica Moderna que corresponde a una evolución sistémica y de diseño de su predecesora, sin menoscabar las bondades por los que se convirtió en una metodología de investigación muy utilizada.

2.1.2. Ingeniería didáctica moderna

Con la proliferación de investigaciones en las que se utilizaba el diseño de ID se empezaron a evidenciar algunas limitaciones de este enfoque metodológico, al punto que Artigue (2002) señala que

> en didáctica de las matemáticas, la ID ya no es hoy, ciertamente, el método privilegiado de confrontación de las construcciones didácticas teóricas con la contingencia de la clase, como lo ha sido en un pasado reciente. (p. 7)

Los cuestionamientos se centran principalmente en la rigidez de las restricciones de la ID y la posición pasiva en la que se relega la labor del docente. Con un poco más de detalle, Artigue (2002; 2020) presenta los señalamientos que se han hecho a su propuesta metodológica.

1. *La cuestión de la existencia de situaciones fundamentales*; se debate si existe, para todo concepto, una situación característica donde este sea óptimo. Brousseau (1986) establece la existencia de una situación fundamental relativa a un saber determinado como aquel esquema de situación capaz de generar, por la interacción de todas las variables didácticas que lo determinan, el conjunto de situaciones correspondiente a ese saber.

2. *Las restricciones ligadas a la insuficiencia de las interacciones con el milieu.* El concepto de mileu es introducido por Brousseau y se refiera a la "porción" de una situación a-didáctica en la que los estudiantes se encuentren en interacción y en el que se reconocen dos dimensiones: la material (instrumentos, materiales, organización espacial y temporal) y la simbólica (lo que se debe hacer, como y cuando).

   Aunque se suponga las existencia de una situación fundamental se cuestiona si las interacciones son suficientes para lograr, de forma autónoma, el trabajo matemático necesario. Diversas investigaciones (descritas en Artigue (2002)) muestran la necesidad de importantes mediaciones docentes, y señalan, además, la presencia de dificultades para el control y la difusión de los productos de ingeniería surgidos de las investigaciones, una vez que estos han sido experimentalmente validados.

3. *Las cuestiones de viabilidad de las Ingenierías Didácticas*; se plantea la necesidad de considerar al docente como un actor de pleno derecho de la situación didáctica, tan imprevisible como los alumnos en sus comportamientos. Las ingenierías didácticas propuestas en los 90's son cuestionadas principalmente por centrar la atención en los trabajos de ingeniería sobre algunos momentos del estudio y la preferencia en las situaciones con fuerte potencial a-didáctico y la subestimación del rol del docente.

   La autora señala que, "en los procesos de devolución e institucionalización el profesor, por un lado, hace que los estudiantes acepten la responsabilidad matemática de resolver las tareas y por otro lado, conecta el conocimiento que ellos producen con el conocimiento escolar pretendido"[traducción propia] (Artigue, 2020, p. 204).

Es importante recalcar que muchos de los aspectos esenciales de la ID siguen invariantes y tienen un potencial muy valioso en los procesos de enseñanza de la matemática. El reconocimiento de las limitantes de la ID no debe considerarse un obstáculo en los procesos de investigación y traducirse en el abandono de esta metodología, sino más bien un punto de referencia para su evolución.

Artigue (2009), argumenta la viabilidad de investigaciones en Ingeniería Didáctica apuntando que

> Cuando vemos investigaciones recientes haciendo uso de esta metodología, es posible identificar fácilmente algunas variables: la misma sensibilidad epistemológica y matemática, la misma importancia dada al diseño de tareas, a la organización de un milieu que ofrezca un fuerte potencial para la adaptación adidáctica, la misma estructura global con la misma importancia dada a los análisis a priori y el mismo proceso interno de validación.

> Pero, lo que es también evidente, es que las construcciones propuestas ofrecen una visión más realista y flexible sobre compartir las responsabilidades matemáticas en el salón de clase entre el profesor y estudiantes, y una visión más sofisticada del rol del profesor. [traducción propia] (p. 14)

De la misma forma en que lo argumenta Artigue, se propone utilizar las componentes que se han mantenido invariantes en los procesos de concepción y puesta en escena de secuencias didácticas propias de la ID original. De manera complementaria a la teoría propuesta a finales de los 90's se plantean una serie de actividades con la flexibilidad necesaria para ser modificadas y/o reorientadas según el docente considere necesario.

2.2. Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y Conocimiento Matemáticos (EOS)

Se presentarán las principales nociones que fundamentan la posición ontosemiótica expuesta inicipalmente por D'Amore y Godino (2007), ampliada y actualizada en Godino (2018) y Godino (2021), sin tratar de ser exhaustivos en la primera y con mayores detalles las propuestas actuales.

Uno de los aspectos que debe precisarse es la noción de objeto matemático. Para D'Amore y Godino (2007) objeto matemático designa todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas (p. 208). Son objetos matemáticos el lenguaje, las situaciones, los procedimientos, los conceptos, las propiedades o atributos (que se asignan a conceptos) y los argumentos (generalmente para validación o comunicación).

Los autores sugieren que

> los objetos matemáticos necesitan ser vistos como símbolos de unidades culturales que emergen de un sistema de usos, ligado a las actividades de la resolución de problemas que efectúan ciertos grupos de personas que van evolucionando con el tiempo. (p.207)

Además, agregan que

> el significado (de un objeto) empieza siendo pragmático, relativo al contexto, pero existen usos que permiten orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático; dichos usos son objetivizados mediante el lenguaje y constituyen los referentes del léxico institucional. (p. 207)

En la perspecticva ontosemiótica el significado de un objeto es personal y se encuentra dimensionado en un sistema de prácticas operativas y discursivas (prácticas matemáticas) realizadas por una persona o en el interior de una institución para resolver un campo de problemas. (D'Amore & Godino, 2007)

Más concretamente, consideran práctica matemática como "toda actuación o expresión - verbal, gráfica, o de otro tipo - que efectúa alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (p. 208). Es notable la puesta en escena del aprendizaje individual y por tanto el énfasis en el aspecto psicológico del desarrollo de los conocimientos matemáticos.

Las relaciones entre objetos son consideradas *funciones semióticas* en la perspectiva que nos ocupa. "Se trata de las correspondencias entre un antecedente y un consecuente que establece un sujeto de acuerdo a cierto tipo de criterio o código" (p. 209). Estas relaciones tienen como principales aportes formular de manera general y flexible el conocimiento matemático y explicar las dificultades y errores de los estudiantes en los procesos de instrucción.

Los objetos matemáticos se relacionan formando *configuraciones* o redes de objetos que intervienen o emergen al resolver un problema. Estas configuraciones pueden ser epistémicas (objetos institucionales) o cognitivas (objetos personales).

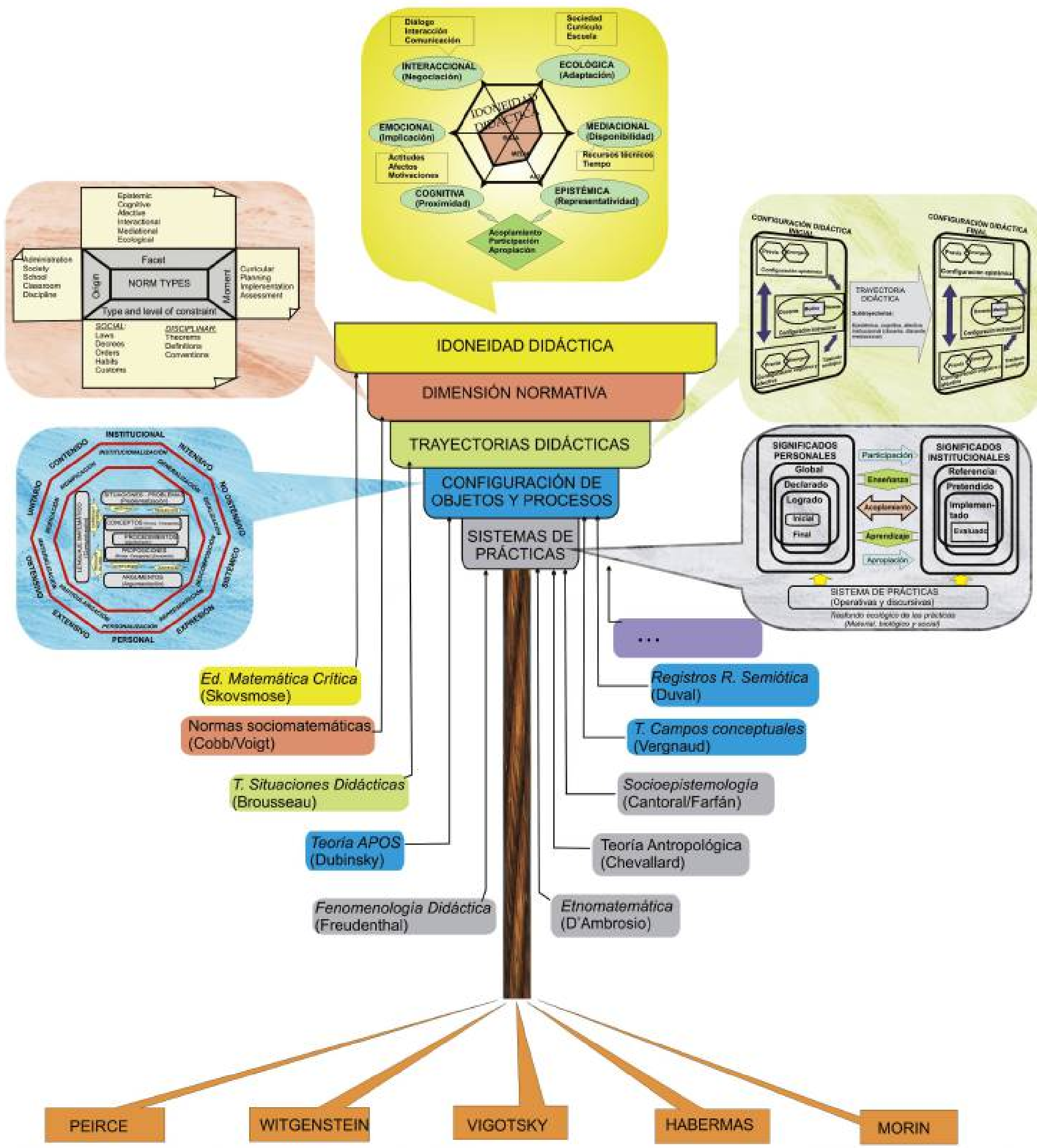


Figura 2.1: Esquema general de interacciones en EOS.

La Figura 2.1 representa de forma geométrica el complejo de interacciones que fundamentan la teoría del EOS. La figura muestra en la base una serie de teorías, principalmente psicológicas, que se constituyen como el fundamento del EOS, además ilustra como otras teorías (didácticas, sobre diseño, normas, herramientas metodológicas, entre otras) se articulan a esta base para construir y dar soporte a las nociones y etapas que constituyen el constructo del EOS. Godino (2021) lo expresa aduciendo que "el EOS ha surgido con el propósito de articular puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje"(p. 10).

Cabe recalcar el aporte del paradigma sociocultural como teoría psicológica de aprendizaje, del cual Vigotsky es el principal impulsador, al enfoque ontosemiótico en lo referente a procesos cognitivos. La importancia que se da al lenguaje, la influencia del contexto y la relación directa entre lo que ambas consideran aprendizaje, son muestras de ello. Para Vigotsky apropiarse de un concepto significa que el individuo ha aprendido a utilizarlo correctamente, y que las acciones y operaciones motrices y mentales necesarias para ello se han formado (Wertsch, 1995).

Como parte del resurgimiento de las investigaciones relacionadas al diseño didáctico, Godino et al. (2014), hace una recapitulación de las características principales de ID y las interpreta desde los fundamentos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Este hecho constituye un refrescamiento de las principales ideas de ID, evidencia una moderna complementariedad entre estos enfoques de investigación y plantea un alentador panorama para el diseño y evaluación de actividades didácticas orientadas a permear positivamente el trabajo en las aulas.

Como complemento a este trabajo, Godino (2021), reconoce la existencia de una brecha entre investigaciones teóricas y las problemáticas de la práctica docente y propone el uso de investigaciones basadas en diseño para intentar salvarla (entre las que menciona la ID de Artigue) y complementarlas con procesos normativos y de evaluación (propone utilizar su teoría de idoneidad didáctica). Este referente es sumamente valioso pues rescata de manera definitiva las intervenciones basadas en ID y muestra que el uso de los indicadores de idoneidad didáctica son un adecuado complemento a la etapa de validación.

2.3. La Teoría de Idoneidad Didáctica (IdD)

Sobre la Teoría de Situaciones Didácticas, Godino, Contreras y Font (2006), señalan que

> La asunción, por dicha teoría, de la hipótesis del aprendizaje matemático en términos de adaptación a un medio adidáctico puede orientar de manera consistente la construcción de situaciones didácticas mediante las cuales los alumnos construyan los conocimientos matemáticos de manera significativa. Ahora bien, en la práctica no todos los objetivos de aprendizaje matemático se pueden lograr mediante procesos de adaptación en situaciones a-didácticas. (p. 2)

Desde esta perspectiva, los aportes de la Teoría de Brousseau, en lo referente a evaluar la pertinencia o idoneidad de un proceso de enseñanza se tornan insostenibles e interminables pues podría suceder que el proceso de reinvención de conceptos matemáticos por parte del estudiante demande un tiempo didáctico ilimitado o excepcionales habilidades intelectuales.

Por otra parte, la confrontación de análisis a priori con el a posteriori que sugiere la Ingeniería Didáctica como mecanismo de validación interna, se evidencia limitada por las escogencias realizadas por el docente en las etapas de concepción de la ingeniería.

Sobre este aspecto, Wilhelmi, Bencomo y Godino (2004) argumentan que

> La ingeniería didáctica articula el papel de las producciones de los investigadores con las necesidades de acción en los procesos de enseñanza, permitiendo la evolución de una didáctica explicativa hacia una didáctica normativa o técnica (apoyada en una teoría y contrastada experimentalmente). Esta evolución es compleja y costosa, por supuesto. Pero además, la aplicación de los productos técnicos está mediatizada por la formación matemática y didáctica de los profesores, que en última instancia deben poner en marcha dichos recursos. (p. 2)

Con estas valoraciones y el objetivo de integrar una didáctica de la matemática general, Godino y sus colaboradores diseñaron la denominada Teoría de Funciones Semióticas e iniciaron el desarrollo de criterios para la valoración de la Idoneidad Didáctica de un proceso de instrucción.

En primera instancia debe acotarse que la Teoría de Funciones Semióticas articula seis dimensiones en un proceso de instrucción matemática: epistémica (significados institucionales), docente (funciones del profesor), discente (funciones de los alumnos), mediacional (recursos materiales), cognitiva (significados personales), emocional (sentimientos y afectos) y supone que cada una de ellas se puede modelizar con un proceso estocástico. Esto es que cada experiencia de instrucción matemática (determinada en el tiempo) involucra una serie de variables aleatorias que producen una secuencia de estados posibles. En determinado momento, en un estado particular intervienen funciones en todas las dimensiones antes mencionadas y constituyen una *trayectoria muestral* del proceso.

Además, aclaran que

> La valoración de la idoneidad de un proceso de instrucción matemática requiere disponer de información detallada de los hechos que ocurren y elementos de referencia que autoricen a emitir los juicios de adaptación, pertinencia o eficacia correspondientes a la dimensión valorada. (Godino, et al, 2006, p. 4)

La teoría de Idoneidad Didáctica, ha tenido enfoques un tanto variados y hasta se han utilizado términos iguales con significados diferentes. Por ejemplo, en Vasconcelos et al. (2019) se utiliza la palabra "criterios"para clasificar lo que Godino (2021) señala como facetas. Además, han surgido propuestas para crear indicadores específicos para ciertos temas (Castillo et al., 2022 (a,b); Beltran et al., 2018; Breda y Lima, 2016; Hummes et al., 2019), para asignar medidas a las valoraciones de idoneidad (García et al. 2021, por ejemplo) y más recientemente se insiste en valorar la reflexión sobre la labor docente en la que la noción de idoneidad didáctica permite identificar puntos de mejora. (Castillo et al., 2020; Esqué y Breda, 2021; Godino, 2021; Godino et al., 2021; Morales y Araya, 2020; Posadas y Godino, 2017).

En este documento se adopta la visión de Godino et al. (2021), en la que se supone la articulación coherente de seis facetas, las cuales tienen componentes particulares y estos, a su vez, poseen criterios donde emergen los indicadores de idoneidad didáctica, como se muestra en la Figura 2.2. Este constructo debe ententerse como una guía ordenada en el proceso de reflexión la práctica docente (personal o no) que permita mejorar las estrategias de intervención en las aulas.

Figura 2.2: Facetas y componentes de la Idoneidad Didáctica.

A continuación se describen las seis facetas que identifica Godino et al. (2021), con énfasis en la cognitiva por ser la de mayor interés en este documento.

2.3.1. Idoneidad epistémica

La idoneidad epistémica es el grado de representatividad que tienen los significados institucionales implementados o pretendidos respecto a un significado de referencia. Desde el punto de vista de las matemáticas y su aprendizaje es necesario analizar qué contenidos matemáticos aparecen y con qué frecuencia; así mismo, cuál es el modelo implícito que se asume en una actividad o pequeño grupo de actividades.

El criterio o norma general para esta faceta es **Representatividad**, que debe entenderse como que “los significados institucionales del contenido y las configuraciones de objetos implementados deberían ser representativos del significado global de referencia, teniendo en cuenta las circunstancias contextuales y personales de los sujetos implicados”(Godino, 2021, p. 14).

2.3.2. Idoneidad cognitiva

Esta faceta se refiere al grado en que los significados implementados (pretendidos) están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.

Sobre esta faceta, Alsina y Domingo (2010) señalan que

> la idoneidad cognitiva expresa el grado en que los significados pretendidos o implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos. Vygotsky distinguió la zona de desarrollo real de la zona de desarrollo potencial, y llamó zona de desarrollo próximo a la distancia entre ambas. Para este autor, el papel del profesor consiste en proporcionar la ayuda ajustada y contingente al alumno dentro de la zona de desarrollo próxima para que pueda alcanzar la zona de desarrollo potencial. (p. 10)

El criterio o norma general para esta faceta es **Proximidad y reto alcanzable**, lo que sugiere que “los objetivos de aprendizaje deberían suponer un reto cognitivo alcanzable para los estudiantes, teniendo en cuenta sus circunstancias contextuales y personales”(Godino, 2021, p. 14).

En la Tabla 2.1 se presenta la descripción de componentes y criterios para la idoneidad cognitiva. La tabla muestra los componentes identificados por Godino (2021) y además describe los criterios que este autor ha establecido como producto de muchas investigaciones desarrolladas a lo largo de dos décadas. Sobre estos componentes y criterios se reconoce que es posible hacer algunos aportes, con respaldo en este proceso de estudio y en acuerdo con Castillo et al. (2022a).

Tabla 2.1: Componentes y criterios de idoneidad en la faceta cognitiva

Componentes	**Criterios**
Significados personales (Aprendizajes)	Se debería lograr que los significados personales construidos por los estudiantes se correspondan con los significados institucionales pretendidos o implementados. Este logro se refiere a la comprensión del tema y el desarrolo de las competencias pretendidas.
Relaciones (conexiones)	El aprendizaje debería ser de tipo relacional, de modo que los estudiantes sean capaces de comprender y relacionar los distintos significados incluidos en el proceso de enseñanza y objetos implicados.
Procesos	Se debe tener en cuenta la competencia del estudiante para implementar procesos matemáticos específicos del contenido (modelización, generalización, resolución o planteamiento de problemas, prueba, representación) y metacognitivos (reflexión sobre los propios procesos de pensamiento matemático).
Conocimientos previos	El proceso de instrucción debería considerar los conocimientos previos que tienen los estudiantes a los que va dirigido para abordar el estudio del contenido pretendido.
Diferencias individuales	El proceso de instrucción debería apoyar a los estudiantes según sus diferencias individuales en conocimientos previos y estilos de aprendizaje en el proceso de estudio del contenido pretendido o implementado.
Conflictos cognitivos	El proceso de instrucción debería poder identificar en los estudiantes los conflictos que la investigación didáctica ha revelado como propios y característicos del contenido pretendido o implementado y ayudar a superarlos.
Evaluación	La evaluación de los aprendizajes logrados debería tener en cuenta las características personales de los estudiantes y los distintos niveles de comprensión y competencia que puedan alcanzar. La evaluación debería servir para mejorar el proceso instruccional, por lo que debe contemplar una fase exploratoria, una de seguimiento y una valorativa.

Fuente: Godino, J.D. (2021) p.16, con algunos aportes propios.

Se ha considerado identificar la **Evaluación** como un componente por sí mismo. Por tanto, se propone modificar el criterio asociado al componente **Significados personales** y se aporta un criterio al nuevo, al menos en parte, componente **Evaluación**. En la Tabla 2.1 se muestran estos aportes. En la sección de discusión y análisis de resultados se detallarán los indicadores asociados a cada componente.

Además de la identificación de componentes y criterios, se subraya la necesidad de utilizar herramientas externas para comprender la complejidad cognitiva del proceso de instrucción y para poder dar un juicio sobre el alcance la idoneidad cognitiva. En ese sentido, Godino et al. (2006) indican que

> Para evaluar la idoneidad cognitiva del proceso de instrucción en términos de proximidad de la zona de desarrollo potencial del alumno es necesario hacer un seguimiento detallado de los alumnos (test, entrevistas, evaluaciones orales y escritas, entre otras) para conocer sus significados previos y determinar si las explicaciones dadas por el profesor fueron efectivas. (p. 18)

Los mismos autores concluyen que un juicio positivo sobre la idoneidad cognitiva de un proceso de estudio se basará en tres fases indispensables: a) la existencia de una evaluación inicial de los significados personales de los estudiantes a fin de comprobar que los significados pretendidos suponen un reto manejable, b) la existencia de adaptaciones curriculares que tengan en cuenta las diferencias individuales y c) que los aprendizajes logrados estén lo más próximos posible a los significados institucionales pretendidos/implementados.

2.3.3. Idoneidad interaccional

Un proceso de enseñanza-aprendizaje tiene mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori); por otra, resolver los problemas que surgen durante el proceso de instrucción.

El criterio o norma general para esta faceta es **Negociación**, esto es que "las configuraciones y trayectorias didácticas que se implementen deberían identificar los conflictos semióticos potenciales y poner los medios adecuados para su solución"(Godino, 2021, p. 14).

2.3.4. Idoneidad mediacional

La idoneidad mediacional alude al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Su norma general es **Disponibilidad**, es decir "se debería disponer de los recursos materiales y temporales adecuados para el desarrollo óptimo del proceso de enseñanza y aprendizaje"(Godino, 2021, p. 14).

2.3.5. Idoneidad afectiva

La idoneidad afectiva concierne al grado de implicación (interés o motivación) del alumnado en el proceso de estudio. Está relacionada con los factores que dependen de la institución y con los que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa. El criterio de esta faceta es **Implicación**, lo que significa que "el proceso de instrucción debería lograr el mayor grado posible de implicación del alumnado (interés, motivación, autoestima, disposición)"(Godino, 2021, p. 14).

2.3.6. Idoneidad ecológica

La idoneidad ecológica pone de manifiesto el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad, así como a los condicionamientos del entorno donde se desarrolla. En términos generales, alude al grado en que un método para aprender matemáticas resulta adecuado en el entorno donde se utiliza; el entorno incluye a todos los factores - tanto los de dentro como los de fuera del aula - que determinan la actividad que allí se lleva a cabo.

El criterio o norma general para esta faceta es **Adaptación**, esto es que "el proceso de instrucción debería estar en concordancia con el proyecto educativo del centro y la sociedad, teniendo en cuenta los condicionamientos del entorno en que se desarrolla y las innovaciones basadas en la investigación educativa"(Godino, 2021, p. 14).

A manera de cierre Godino et al. (2006c) sostienen que

> Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la idoneidad didáctica como criterio sistémico de pertinencia (adecuación al proyecto de enseñanza) de un proceso de instrucción, cuyo principal indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y lo significados institucionales pretendidos/implementados. (p. 5)

En la Figura 2.3 se muestra lo que se conoce como el hexágono de valoración de idoneidad. En cada vértice se ubica una de las facetas de idoneidad y sus componentes. La valoración se cataloga como baja, media o alta en la diagonal del hexágono y con esto se construye un nuevo hexágono usualmente irregular.

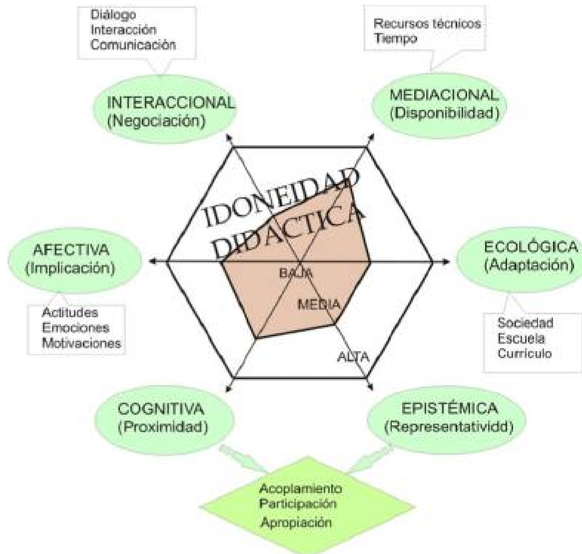


Figura 2.3: Facetas de la Idoneidad Didáctica.

Recientes estudios, como Breda et al. (2018) y Hummes et al. (2019) por ejemplo, hacen referencia a las bondades de la teoría sobre Idoneidad Didáctica en procesos de evaluación de escogencias didácticas, su evolución como estrategia de valoración y la flexible integración de esta con otros diseños de investigación.

Breda et al. (2018), hacen un fascinante recuento del constructo de Idoneidad Didáctica partiendo, de lo que ellos consideran, las dos demandas esenciales de la Didáctica de la Matemática;

> La primera pretende que sus constructos teóricos sirvan para comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y, la segunda, que éstos sirvan para guiar la mejora de dichos procesos. La primera demanda lleva a describir, interpretar y/o explicar los procesos de enseñanza-aprendizaje. La segunda lleva a su valoración y mejora. (p. 257)

Los autores presentan el recorrido del constructo Idoneidad Didáctica, desde la escogencia del término a utilizar (idoneidad en lugar de calidad u otros términos de uso frecuente), la necesidad de abandonar posiciones esencialistas, el reconocimiento de equilibrar la valoración desde diferentes aristas, hasta las consideraciones que se tuvieron para crear un ordenamiento de indicadores.

Por otro lado, Hummes et al. (2019) presentan un estudio donde se articulan la propuesta de Estudio de Clases (Lesson Study) con los criterios valorativos de Idoneidad Didáctica, en el que conluyen que

> en los Estudios de clases (EC) no se realiza este proceso de generación de una pauta organizada en criterios, componentes e indicadores como herramienta para organizar la reflexión. Por tanto, si la metodología EC puede ser muy útil para mejorar la fase inicial de la metodología de los componentes de idoneidad (CI), esta última puede ser una ampliación de la metodología EC para generar una pauta para organizar la reflexión del profesor. (p. 71)

A manera de cierre, Breda et al. (2018) al igual que Hummes et al. (2019), sentencian que

> es una evidencia que las reflexiones del profesorado, cuando éstas son valorativas y se orientan hacia la mejora de los procesos de instrucción, se organizan, implícitamente, usando algunos indicadores de los componentes de los CI, aunque éstos no hayan sido previamente enseñados. (p. 80)

Una remarca final que sustenta la estructura de este proyecto se encuentra en Godino (2021)

> La noción de idoneidad didáctica, sus facetas, componentes, subcomponentes y criterios permite establecer un puente entre las cuestiones de diseño y la investigación-acción realizada por los propios docentes. (p. 21)

Capítulo 3

Metodología

3.1. Tipo de Investigación

Por los alcances de los objetivos propuestos y la referencia teórica utilizada, la presente investigación se ubica en el paradigma socio-crítico. Es importante recalcar que este paradigma es sumamente amplio y que pretende dilucidar un punto de convergencia entre las posiciones positivista y etnográfica con el fin de, a partir de la investigación, diagnosticar, intervenir, reflexionar y actuar sobre problemáticas sociales. De esta forma se propicia la evolución en el conocimiento y se genera un impacto positivo para las sociedades.

Alvarado y García (2008), describen los principios básicos y la génesis del enfoque socio-crítico como

> [...] una unidad dialéctica entre lo teórico y lo práctico. Nace de una crítica a la racionalidad instrumental y técnica preconizada por el paradigma positivista y plantea la necesidad de una racionalidad substantiva que incluya los juicios, los valores y los intereses de la sociedad, así como su compromiso para la transformación desde su interior. (p. 189)

Dado que se propuso un paradigma que reunía condiciones de dos enfoque en principio contradictorios, resulta conveniente comentar un poco más detallado este asunto. Dicho de una manera muy práctica y directa, no se pretendió teorizar sobre las condiciones para garantizar el éxito de una secuencia didáctica ni generar una estrategia que tenga un efectividad total medible estadísticamente y generalizable a cualquier nicho académico, sencillamente se propuso colaborar local y directamente con el trabajo cotidiano de un docente de matemáticas.

Con la secuencia didáctica propuesta se pretendió dotar al docente de una herramienta novedosa, flexible, guiada y sobre todo con un respaldo teórico actual y convincente. Aunado a esto, la valoración de la idoneidad de las actividades propuestas pretende ser un punto de referencia en la reflexión del quehacer docente. Este enfoque analiza exhaustivamente los procesos de enseñanza-aprendizaje pero va mas allá, esos resultados son llevados de nuevo a las aulas traducidos en propuestas didácticas contextualizadas que posteriormente serán también objeto de investigación.

Para Alvarado y García (2008), este paradigma, aplicado en el ámbito educativo, se caracteriza por

> la adopción de una visión global y dialéctica de la realidad educativa, la aceptación compartida de una visión democrática del conocimiento así como de los procesos implicados en su elaboración y la asunción de una visión particular de la teoría del conocimiento y de sus relaciones con la realidad y con la práctica. (p. 190)

En esta posición, se integran en forma dialéctica las tendencias a explicar (teóricamente) las problemáticas en las aulas con la intervención directa en el contexto de investigación. Es decir, se complementan la teorización pura con el diagnóstico y reconocimiento de tales problemáticas, desde la experiencia en el aula, para propiciar un funcionamiento óptimo del sistema didáctico como conjunto.

Específicamente en Didáctica de la Matemática, se ha advertido la necesidad de vincular investigadores y docentes en un frente común; "parece que algo no funciona teniendo un grupo diciendo qué hay que hacer y otro haciéndolo" (Kilpatrick, 1988, citado por Godino, 1993). Los aportes de Artigue (1995), Brousseau (1986) y Douady (1995) son muestras de investigaciones clásicas en las que se complementan las posiciones positivista y etnográfica para generar un acercamiento a lo considerado como paradigma socio-crítico.

3.1.1. Diseño de Investigación e instrumentos

Se decidió utilizar la ingeniería didáctica moderna, es decir con mayor flexibilidad que la ingeniería didáctica original y dotando de protagonismo al docente, como modelo de investigación con algunas modificaciones en las fases de concepción y de evaluación.

Artigue (2009) caracteriza el modo de intervención de esta metodología y la ubica en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau.

> Vista como una práctica de investigación o desarrollo, la ID es claramente una práctica del tipo de intervención controlada, y esta intervención se basa en la teoría. En ese caso, la teoría es la TSD y esto afecta profundamente la visión del diseño. [traducción propia] (p. 11)

Esencialmente, se siguieron las etapas propuestas por Artigue (análisis preliminares, concepción, análisis a priori, experimentación, análisis a posteriori y evaluación) con la salvedad de enfatizar en los conocimientos previos y orientar la evaluación con sustento en los indicadores propuestos por Godino et al. (2021) para determinar el grado de idoneidad cognitiva del diseño didáctico implementado.

En este momento es importante recordar que un buen juicio de idoneidad cognitiva sugiere necesariamente una evaluación de los conocimientos previos necesarios para la implementación de la secuencia didáctica, adaptaciones curriculares que permitan la evolución de la secuencia y la renovación del contrato didáctico y la valoración de la cercanía entre el aprendizaje logrado y los pretendidos. Para este fin se decidió que una combinación complementaria entre el diseño de Ingeniería Didáctica y EOS sería conveniente.

Está documentado y verificado que la combinación de modelos en investigación educativa no tiene nada de contradictorio, más bien resulta ser una alternativa interesante para el análisis en profundidad del fenómeno en estudio. Específicamente en Didáctica de la Matemática y a manera de cierre, Godino (1993) advierte que

> el punto de vista sistémico debe conducir a la superación de los posibles antagonismos entre las distintas concepciones y paradigmas. Es necesario un compromiso integrador [...] Esto lo da la consideración de distintas concepciones como puntos de vista complementarios de una acepción más amplia. (p.8)

2.2.1.1 Análisis preliminares

En esta etapa se hizo una revisión de literatura (programa del curso, investigaciones locales e internacionales sobre procesos de enseñanza de la derivada) y se aplicaron dos cuestionarios (uno dirigido a docentes y otro a estudiantes). Con la revisión de literatura se tiene un panorama general sobre las dificultades asociadas al concepto de derivada, propuestas de enseñanza y los objetivos que persigue el curso. El cuestionario a docentes permite identificar las estrategias de enseñanza que utilizan, los obstáculos que reconocen y recolectar sugerencias de mejora. El cuestionario a estudiantes se dividió en dos secciones, una pretendía recabar información sobre aspectos didáctico-afectivos (rendimiento en cursos previos, preferencias de actividades, valoración del ambiente y dinámica de clase, entre otros) y la otra estaba orientada a aspectos cognitivo-epistémicos (conocimientos previos, conceptos relacionados, interpretaciones y aplicaciones, entre otros).

2.2.1.2 Concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas

Con los insumos de la etapa anterior se diseñó una secuencia didáctica para la enseñanza del concepto de derivada. Además de los supuestos propios que surjan del análisis de la información de la etapa de análisis preliminares, se tuvo como principio básico que la secuencia sea similar a lo que un docente haga en su quehacer diario y estuvo dirigida a la comprensión del concepto de derivada más que al cálculo rutinario.

2.2.1.3 Experimentación

Cada una de las sesiones se grabó. La observación de estas grabaciones permite analizar aspectos como las escogencias hechas por el docente (abordaje, actividades, ejemplos), la reacción que tuvo hacia preguntas formuladas por los estudiantes y el manejo de las herramientas tecnológicas.

2.2.1.4 Análisis *a posteriori* y evaluación

El análisis a posteriori tiene como guía los indicadores derivados de los criterios presentados en la tabla 2.1. La valoración de estos indicadores se hizo desde tres instrumentos complementarios:

- *la observación de las grabaciones de las clases.* Se identificaron segmentos en los que se evidencia presencia de algún componente y se valoró su nivel de idoneidad como baja, media o alta.
- *entrevistas a participantes claves.* A través de "conversaciones" (entrevistas no estructuradas) con estudiantes se pretendió conocer la percepción acerca de la forma en cómo se estaban dirigiendo las clases, la metodología utilizada y los aspectos que, desde su óptica, debían mejorarse o incorporarse. Las entrevistas se realizarón mediante reuniones a través de Zoom.
- *prueba especifica.* Se confeccionó una prueba en la que los ítems pretenden medir la comprensión del concepto de derivada. La prueba incluye situaciones problemas en los cuadros algebraico, numérico, geométrico y combinación de ellos. El análisis de la información se hizo mediante la creación de matrices documentales en las que se reportó el item, las demandas que este tiene y que se esperaba

que el estudiante consiguiera y se compararon con las soluciones aportadas por los estudiantes. Este análisis es similar a lo que un docente hace cuando revisa alguna asignación, en este proyecto se propone que los criterios sean explícitos y el nivel de logro asignado corresponda a un proceso de reflexión y juicio experto por parte del docente.

3.2. Participantes

La investigación se contextualiza en un grupo de 73 estudiantes del curso Cálculo Diferencial e Integral (CDI) en el Instituto Tecnológico de Costa Rica (TEC) en modalidad remota. En este curso, generalmente, se encuentran estudiantes de primer ingreso a la universidad que recién aprueban el curso Matemática General. Este grupo recibió sus clases de manera sincrónica mediante la plataforma Zoom en dos sesiones por semana.

3.3. Validación de instrumentos

Según Pineda et al. (1994), la validez debe entenderse como "el grado en que un instrumento logra medir lo que se pretende medir" (p. 140). Además, enfatizan que la validez es la característica fundamental de cualquier instrumento de investigación.

Para lograr esta condición se utilizó el método de validación por medio de juicio de expertos. Esto significa "recurrir a la ayuda de personas expertas en el tema que se está investigando para que revisen el instrumento, a fin de determinar si cumple con la finalidad establecida" (Pineda et al. 1994, p.140). Entre los especialistas que colaboraron en este proceso se encuentran docentes del Instituto Tecnológico de Costa Rica, la Universidad Nacional, la Universidad de Costa Rica y la Universidad Estatal a Distancia.

Además de las observaciones y sugerencias hechas por los expertos, los instrumentos y la secuencia didáctica fueron aplicados en un grupo piloto para determinar en qué medida las indicaciones y actividades se ajustaban a los objetivos propuestos. Con los insumos obtenidos se incluyeron algunas variantes (ajustes en los tiempos de exposición y práctica, contextualización de las actividades, cambios y reacomodos en las preguntas del cuestionario) y complementos (modificación de enfoque en actividades y la inclusión de actividades de reforzamiento).

En la Figura 3.1 se muestran las etapas que siguió el proyecto, las herramientas que se utilizaron en cada una de ellas y el sustento teórico que las respalda.

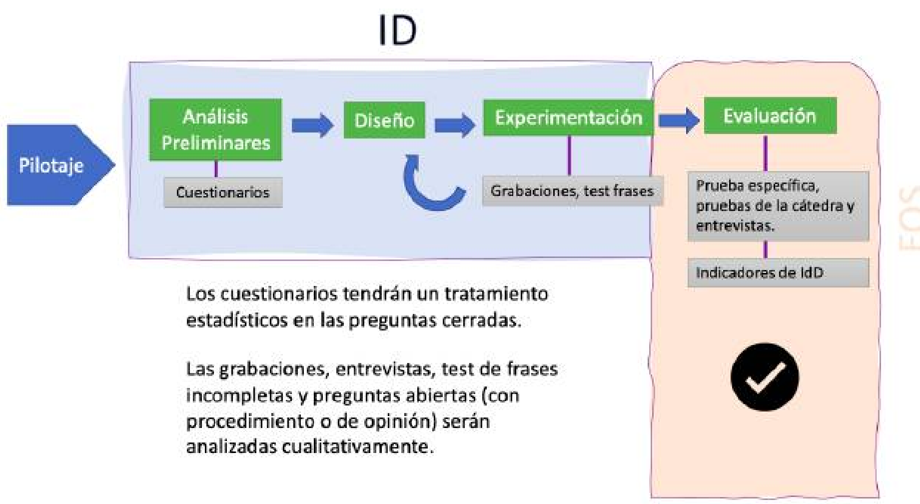


Figura 3.1: Esquema metodológico.

Capítulo 4

Análisis y discusión de resultados

El análisis de la información se abordó desde la Ingeniería Didáctica (ID) en cada una de sus etapas. En la etapa de análisis a posteriori se enfatiza la valoración del grado de idoneidad cognitiva de la secuencia didáctica, para lo cual se siguen los indicadores sugeridos en la tabla 2.1.

4.1. Análisis Preliminares

4.1.1. Revisión de literatura y documentos oficiales

En la sección 1.4 se muestra una revisión extensa de publicaciones referidas a procesos de enseñanza del concepto de derivada de una función. En estos estudios se discuten dificultades asociadas al propio concepto de derivada, se proponen sugerencias de abordaje y se comparten experiencias sobre secuencias didácticas implementadas en clases de cálculo.

De esta revisión de literatura y con la intención de establecer una perspectiva global del tema, se destaca que

- se reconoce la importancia de los temas de cálculo (particularmente el concepto de derivada) en los programas de muchas carreras de ingeniería y en el futuro profesional del estudiante, (Monge, 2013 ; Neira, 2007 y Ortega et al., 2006)
- entre las principales dificultades en la enseñanza del concepto de derivada se señalan el lenguaje utilizado por el docente y en los textos, el uso de simbología, el paso de una representación a otra (numérica, coloquial, algebraica, geométrica), contextos de aplicación, la interpretación y el reconocimiento de la localidad del

concepto, (Cantoral y Mirón, 2000; Dolores, 2000; Ortega et al., 2006 y Vrancken et al., 2008)

- los procesos de enseñanza y aprendizaje siguen siendo rutinarios y guiados por un enfoque clásico donde los estudiantes tienen una participación pasiva, (Ortega et al, 2006 y Vrancken et al., 2008)
- las propuestas de abordaje del concepto de derivada más recomendadas son: utilizar la noción de variación para que surja de manera natural el concepto de derivada (Aguilar y Riestre, 2009; Dolores, 2000; Sanchez, 2006 y Vrancken et al., 2008), introducir el concepto desde una perspectiva histórica (Aguilar y Riestre, 2009 y Dolores, 2000) y apoyarse en el uso de tecnología (Cantoral y Mirón, 2000; Monge, 2013; Sanchez, 2006 y Robles et al., 2010)
- se deben utilizar ejemplos sobre aplicaciones reales del concepto de derivada, (Aguilar y Riestre, 2009; Sanchez, 2006 y Vrancken et al., 2008)
- y el principal conocimiento previo necesario del cual adolecen los estudiantes es el concepto de función. (Neira, 2017 y Vrancken et al., 2008)

Con estos señalamientos se tiene una visión global sobre el estado de los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada, sin embargo es necesario indagar sobre la situación particular de nuestro país y las condiciones, aún más particulares, del curso Cálculo Diferencial e Integral (CDI) en el Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Para ubicar la posición epistemológica, conocer los objetivos que se pretenden lograr y determinar el tiempo que debe asignarse al tema de derivadas de la cátedra de CDI se consultaron el programa, cronograma, folletos y consignas oficiales del curso.

El programa del curso plantea como objetivos específicos para el tema de derivadas que el estudiante

3.1) Comprenda el concepto de derivada de una función

3.2) Determine la derivada de funciones algebraicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversas.

3.3) Comprenda el concepto de diferencial de una función.

3.4) Determine las derivadas de orden superior de una función.

3.5) Determine la derivada de una función dada en forma implícita. (la numeración corresponde a la presentada en el documento) (p. 4)

De la lista de objetivos se desprende que, además de saber calcular o determinar la derivada de una importante variedad de funciones, se espera que el estudiante comprenda el concepto.

Por otro lado, el texto que se utiliza en la cátedra (Borbón, 2018) hace una introducción sobre lo que significa una recta tangente a una curva, para esto establece una relación de tangencia entre una recta y una circunferencia, luego deduce la fórmula de la derivada en un punto a partir de la pendiente de la recta tangente, seguidamente se muestran dos ejemplos donde se usa esta fórmula y finalmente, con el uso de una sustitución, se concluye la fórmula para la derivada de una función en un punto arbitrario.

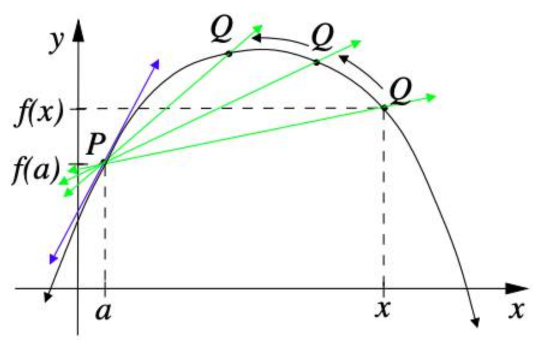


Figura 4.1: Ilustración gráfica de la pendiente de una recta tangente

Este mismo autor, con referencia a la Figura 4.1 consigna que

> [...] esta pendiente de la recta tangente se conoce como la derivada de la función $f(x)$ en el punto $x = a$, es decir
>
> $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
>
> (p. 48)

y un poco más adelante indica que

> [...] para encontrar la derivada de una función $f(x)$ en un punto cualquiera $(x, f(x))$, en este caso
>
> $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$
>
> (p. 50)

Estas dos fórmulas son esenciales en los demás temas que completan el programa de CDI y ponen de manifiesto la posición epistemólogica de la cátedra sobre el concepto de derivada.

4.1.2. Cuestionario a docentes

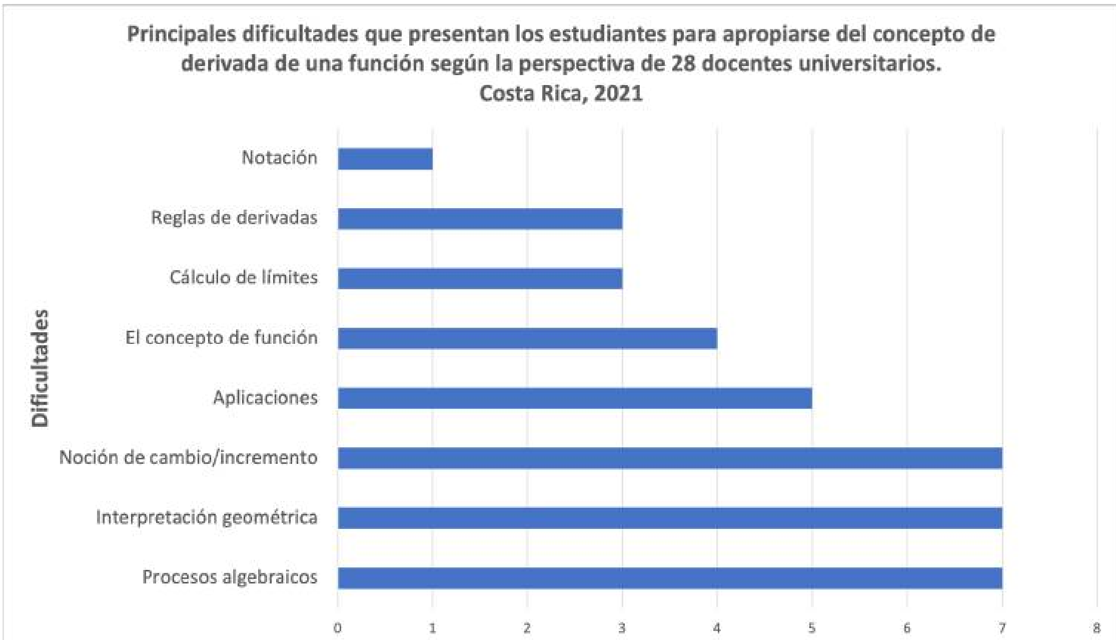
Con la finalidad de determinar la percepción de profesores costarricenses sobre la enseñanza del concepto de derivada se aplicó un cuestionario en línea mediante la plataforma *Google forms*. El formulario fue completado por 28 profesores provenientes de cuatro universidades públicas: Instituto Tecnológico de Costa Rica (TEC), Universidad de Costa Rica (UCR), Universidad Estatal a Distancia (UNED) y Universidad Técnica Nacional (UTN) y dos universidades privadas: Universidad Fidélitas y Universidad Latina de Costa Rica.

Figura 4.2: Encabezado y número de respuestas del cuestionario dirigido a docentes.

Como puede apreciarse en la Figura 4.3, prácticamente todos los profesores que participaron han impartido al menos 5 veces algún curso donde se deba enseñar el concepto de derivada de una función, incluso más del 60 % de ellos lo ha hecho en más de 10 ocasiones. Este es un detalle importante pues puede considerarse que se dispone de los aportes de un grupo experimentado de docentes universitarios.

Figura 4.3: Experiencia de docentes participantes.

Según la experiencia de estos docentes, las principales dificultades que enfrentan los estudiantes para apropiarse del concepto de derivada son los procesos algebraicos asociados al cálculo de derivadas, la interpretación gráfica y la relación de este concepto con la noción de cambio/incremento. Otras dificultades señaladas en menor medida por los docentes se muestran en la Figura 4.4



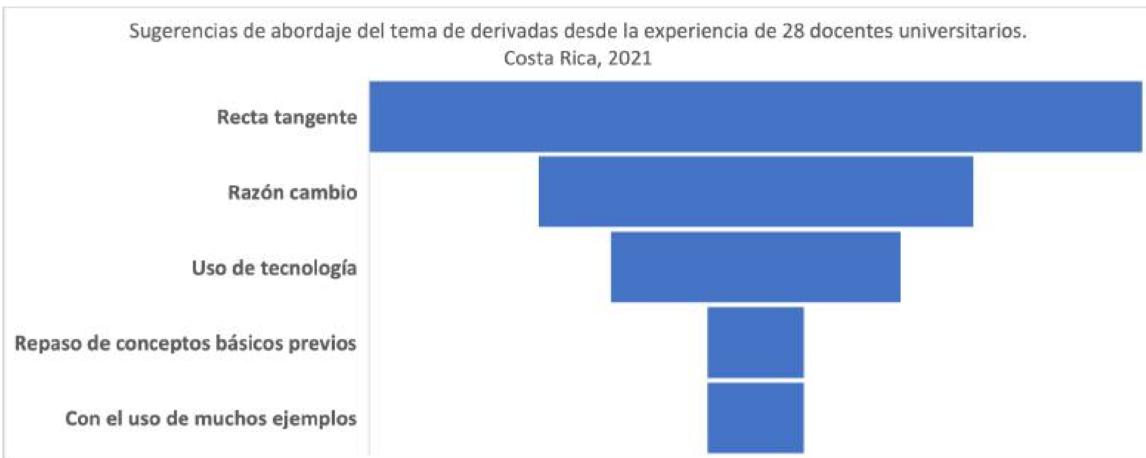
Fuente: Elaboración propia

Figura 4.4: Dificultades presentadas por estudiantes para apropiarse del concepto de derivada.

Además se les consultó si el hecho de recibir clases de manera remota les adiciona alguna dificultad a los estudiantes. Las respuestas a esta consulta mostraron posiciones divididas,

- cerca del 36 % asegura que no tienen ninguna dificultad adicional,
- el mismo porcentaje indica que el efecto de las clases remotas se traduce en temas previos mal trabajados u omitidos,
- 14 % señala que al reducir el tiempo en clases remotas, en comparación con clases presenciales, se tiene una dificultad adicional,

- en menor medida se menciona el poco acompañamiento por parte del docente, la interacción con los compañeros, efectos colaterales propios de la pandemia (pérdida de algún familiar, desempleo en la familia, enfermedad, entre otros) y
- un docente, incluso, sostiene que las clases remotas les favorece a los estudiantes porque "al estar en un contexto de virtualidad los docentes tienen que utilizar herramientas que permiten visualizar y desarrollar conceptos como el de derivada de una forma más clara y animada."



Fuente: Elaboración propia

Figura 4.5: Sugerencias de abordaje del tema de derivada de una función.

Finalmente, se les pidió que desde su experiencia sugirieran la mejor forma de introducir el concepto de derivada. Entre las respuestas obtenidas destacan, en primera instancia, iniciar con una interpretación gráfica a partir de la recta tangente a una curva y, en segundo lugar, la idea de la derivada como razón de cambio instantánea. Además, como puede verse en la Figura 4.5, los docentes sugieren repasar conceptos básicos previos, utilizar herramientas tecnológicas y que en las clases se resuelvan muchos ejemplos.

4.1.3. Cuestionario a estudiantes

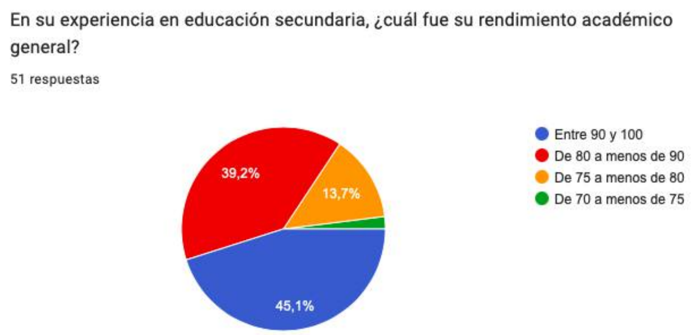
En concordancia con la dualidad *cognitiva-afectiva*, sugerida por Aroza et al. (2016) y Vasconcelos et al. (2019), el cuestionario dirigido a estudiantes pretendía indagar el estado de los participantes desde dos componentes: didáctico-afectivo y cognitivo-epistémico. La aplicación de este cuestionario se hizo mediante la plataforma *Google forms* y fue respondido por 51 estudiantes.

Figura 4.6: Encabezado y número de respuestas del cuestionario dirigido a estudiantes.

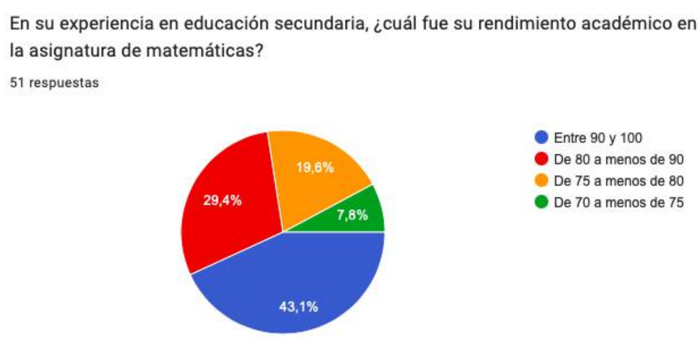
Componente didáctico-afectivo

Uno de los aspectos de interés en la etapa preliminar de una ID es el rendimiento académico del grupo en el que se aplicará la secuencia didáctica. Para tener una referencia del historial académico del grupo de participantes se les consultó sobre el rendimiento que tuvieron en su etapa de educación secundaria (en general y particularmente en matemáticas) y luego a nivel universitario en el curso Matemática General (curso requisito para CDI).

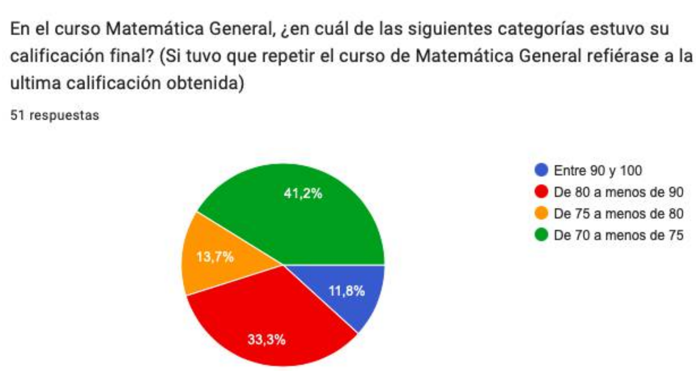
En la Figura 4.7 se muestra como el rendimiento de los estudiantes participantes pasó de ser muy bueno en secundaria (casi el 85 % con notas superiores a 80 a nivel general y cerca del 75 % en matemática), a ser un rendimiento apenas para aprobar el curso a nivel universitario (sólo el 44 % mantuvo notas por encima de 80 en el primer curso de matemáticas). El grupo presenta una tendencia a la baja en el rendimiento académico cuando los cursos son propiamente de matemáticas y a nivel universitario.



(a) Rendimiento general en secundaria



(b) Rendimiento en matemática secundaria



(c) Rendimiento en Matemática General

Figura 4.7: Comparación del rendimiento académico de los estudiantes participantes a nivel de secundaria y universidad.

Como complemento a la información numérica se les solicitó que mencionaran las razones por las que, desde su perspectiva, se explica el rendimiento que han obtenido.

(a) Matemática en secundaria (b) Matemática General

Figura 4.8: Razones por las que se justifica el rendimiento académico de los estudiantes participantes a nivel de secundaria y universidad.

En la Figura 4.8 se muestra que los estudiantes consideran que los contenidos en secundaria se trabajan de forma sencilla y que las clases en muchas ocasiones son destinadas a practicar y esto les agrada. A nivel universitario la modalidad remota es el principal factor señalado, además indican que los contenidos son presentados con mayor rigurosidad y reconocen que no tienen buenos hábitos de estudio.

En la última sección de esta componente se plantearon una serie de características que describen el curso de CDI para que los participantes las juzgaran según su perspectiva. Con esto se cerraría el recorrido descriptivo del grupo desde secundaria hasta las primeras sesiones del curso de CDI.

La primera pregunta presentaba una serie de aseveraciones sobre las clases de CDI, en cada una de ellas los participantes debían indicar si estaban “Muy en desacuerdo (MD)”, “En desacuerdo (D)”, “Neutral (N)”, “De acuerdo (A)” o bien “Totalmente de acuerdo (TA)”.

En la Tabla 4.1 puede apreciarse que en términos generales hay un buen ambiente en la clase. Los participantes reconocen, en una proporción muy alta, que el curso se desarrolla en un ambiente ameno en el que tienen libertad de expresarse, además manifiestan su disposición por lograr un aprendizaje real guiados por un docente comprometido en hacerlo. En menor proporción, pero aún suficiente como para considerarse positivo, se reconoce la utilidad de los contenidos en sus carreras. Sin embargo, la participación de los estudiantes no es tan activa como se quisiera en un proceso de enseñanza-aprendizaje.

Tabla 4.1: Valoración de las primeras sesiones del curso Cálculo Diferencial e Integral. Instituto Tecnológico de Costa Rica, 2021

	MD	**D**	**N**	**A**	**TA**
Las clases transcurren de forma amena.	2	0	7	23	19
Existe un compromiso por parte del docente por generar conocimientos significativos en los estudiantes.	2	0	3	13	33
La participación de los estudiantes durante la clase es activa.	4	3	26	14	4
Los contenidos del curso son un aporte necesario para el ejercicio de su carrera.	2	4	18	14	13
El estudiante tiene libertad de externar sus dudas y aportes a la clase.	2	0	2	17	30
Los estudiantes están en disposición de trabajar por lograr un aprendizaje real de los contenidos del curso.	2	2	11	24	12

Fuente: Elaboración propia

En el cuestionario se incluyó otra pregunta en la que se citaron algunos aspectos del curso que debían ser valorados según la escala “Deficiente (D)”, “Medio (M)”, “Satisfactorio (S)”, “Muy Bueno (MB)” o “Excelente (E)”.

La Tabla 4.2 muestra con claridad que los participantes valoran de manera muy positiva casi la totalidad de los aspectos. La valoración dada al espacio físico no es buena pero es un aspecto en el que puede hacerse poco en los alcances de este proyecto. Sin embargo, la valoración negativa dada a la interacción entre compañeros será un aspecto a considerar en el diseño de la Ingeniería Didáctica sin lugar a dudas.

Tabla 4.2: Valoración de aspectos generales del curso Cálculo Diferencial e Integral. Instituto Tecnológico de Costa Rica, 2021

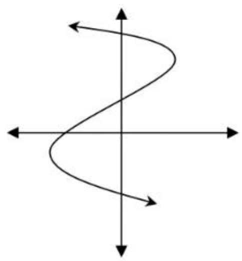
	D	**M**	**S**	**MB**	**E**
Nivel académico del curso.	0	2	14	14	21
Interacción con los compañeros.	17	15	12	5	2
Interacción con el docente.	1	8	14	11	17
Recursos didácticos disponibles en el curso.	1	5	13	13	19
Herramientas tecnológicas utilizadas en el curso.	2	10	12	13	14
Espacio físico donde recibe las clases.	10	7	14	6	14

Fuente: Elaboración propia

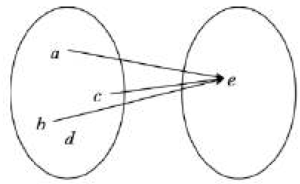
Componente cognitivo-epistémico

En esta sección del cuestionario se incluyeron algunas preguntas con las que se pretendió determinar el manejo de contenidos trabajados en cursos previos como el concepto de función, la interpretación y cálculo de la pendiente de una recta y de límites (específicamente algunos de los generados por la definición de la derivada).

Sobre el concepto de función se les pidió que argumentaran si la imagen que se les mostraba correspondía a una función. En la Figura 4.9 puede verse que las imágenes a y c son vagas como para pretender una única respuesta correcta y esta consideración es adrede pues resulta de interés los argumentos que presenten para afirmar que son o no funciones.



(a) Gráfica



(b) Diagrama

$$y^2 = x$$

(c) Criterio

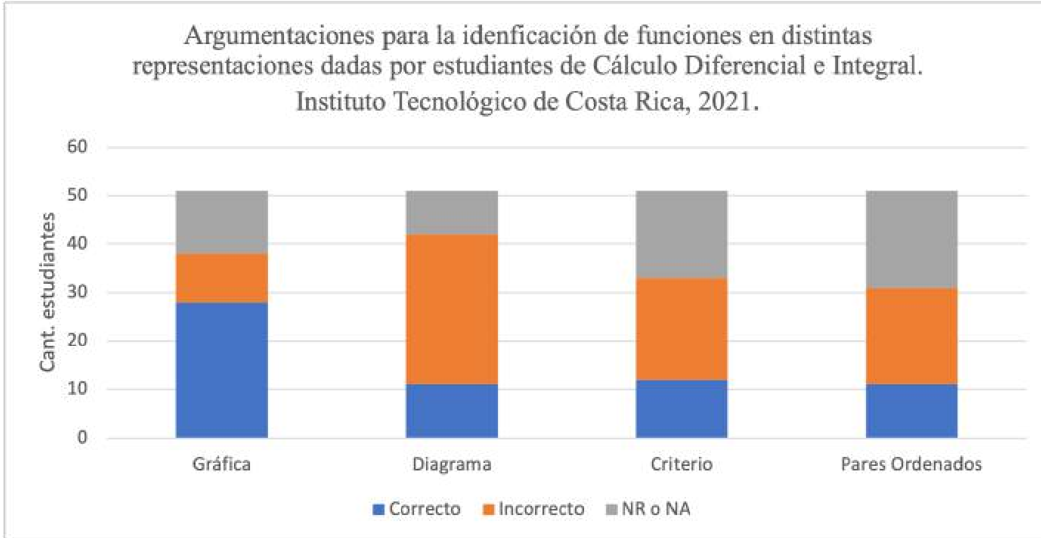
Considere el siguiente enunciado: "Un conjunto f de pares ordenados en el que si (a, b) y (c, b) pertenecen a f entonces a = c" ¿Corresponde este enunciado con la definición de función? Argumente

(d) Pares ordenados

Figura 4.9: Imágenes y definiciones presentadas a los participantes para que argumenten cuáles consideran que son funciones.

Por ejemplo, en el diagrama dado en b una respuesta que diga "No es función porque en dominio el elemento d no está asociado con nadie en el codominio." fue catalogada como **Correcta**, mientras que otra respuesta que dice "No es función porque a y c no pueden asociarse ambas con e." es **Incorrecta**. Además, decir solamente Si o No se consideró **No Argumenta (NA)** y si se escribe cualquier cosa que no corresponda se etiquetó como **No Responde (NR)**.

La Figura 4.10 sugiere que solamente en la representación gráfica se evidencia un dominio del concepto de función para un poco más de las mitad de los participantes. Las representaciones por diagramas, el uso de un criterio y la definición a partir de pares ordenados mostraron argumentaciones correctas en una proporción sumamente baja. Con esta información podemos inferir que será necesario planificar actividades para reforzar el concepto de función antes de introducir el concepto de derivada.



Fuente: Elaboración propia

Figura 4.10: Dominio del concepto de función en distintas representaciones.

Otros dos aspectos considerados en el cuestionario fueron la habilidad para calcular límites y pendientes de rectas, dado que estos tienen relación directa con el concepto de derivada.

A partir de la información dada en la gráfica que se muestra en la Figura 4.11 los participantes debían calcular las pendientes de las funciones f, g y h. Del total de participantes solamente el 21,57 % hizo todos los cálculos de manera correcta, mientras que 43,14 % hizo todos los cálculos equivocados o bien no contestó la pregunta. Sobre el porcentaje restante se tiene que 21,57 % realizó correctamente el cálculo de dos de las pendientes de las rectas y 13,72 % solamente una de las pendientes (mayormente la pendiente de la recta constante g).

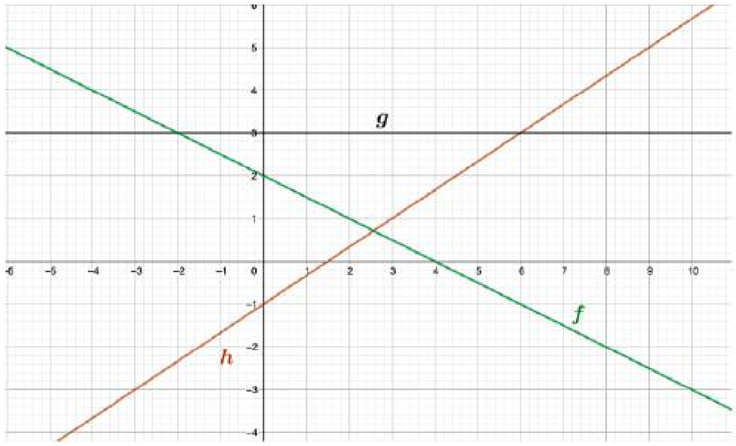


Figura 4.11: Rectas para identificación de pendientes.

Sobre el cálculo de límites se determinó que solamente 14 participantes (cerca del 27,45 %) lograron calcular correctamente el $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$, mientras que para el límite $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$ la situación empeoró pues solamente 5 (9,8 %) participantes lograron calcularlo.

Con este panorama, el cálculo de límites y de las pendientes de rectas son temas que deben reforzarse en la secuencia didáctica que se proponga.

4.1.4. Conclusiones del análisis preliminar

A partir de los insumos obtenidos en la etapa de análisis preliminares se determinaron los siguientes considerandos que sustentan el diseño de las actividades en la secuencia didáctica. Es importante aclarar que estos considerandos son la guía general inical del diseño pero que, a partir las evaluaciones parciales mediante los test de frases incompletas, pueden complementarse o descartarse en el proceso de experimentación.

C1: En el cronograma oficial del curso se establecen dos semanas para la introducción del concepto de derivada y el estudio de reglas de derivación. También el horario del curso está establecido en dos sesiones remotas por semana.

C2: La comprensión del concepto de derivada más que los cálculos rutinarios es lo que se pretende lograr en los estudiantes (revisión de literatura, programa y cronograma del curso).

C3: El ambiente de clases es considerado ameno y con libertad para expresar opiniones y aportes, sin embargo la interacción entre estudiantes no es buena. Este considerando se deduce del cuestionario a estudiantes.

C4: Del cuestionario a estudiantes se desprende que el rendimiento académico de los estudiantes a nivel universitario es deficiente y reconocen que no tienen buenos hábitos de estudio, sin embargo se sienten comprometidos con esforzarse para lograr un aprendizaje significativo.

C5: El concepto de función fue identificado en la revisión de literatura como el conocimiento previo más deficiente en estudiantes de cálculo. Esta consideración fue respaldada por los resultados de los cuestionarios a estudiantes y docentes.

C6: La literatura revisada y la consulta a docentes coinciden en que la interpretación geométrica, los procesos algebraicos y la noción de cambio/incremento son las principales dificultades asociadas a la comprensión del concepto de derivada.

C7: El folleto base del curso, la revisión de literatura y el cuestionario dirigido a docentes recomiendan presentar el concepto de derivada ligado a la pendiente de la recta tangente. Además, se sugiere complementar con la noción de variación instantánea.

C8: Los materiales del curso y los recursos tecnológicos utilizados han sido valorados positivamente. Además, el uso de tecnología en clases de cálculo fue sugerido en la revisión de literatura y por los profesores consultados.

Por tanto, se tomaron las siguientes decisiones sobre el diseño de la secuencia didáctica.

1. La secuencia didáctica estará organizada en tres sesiones remotas en las que se tratarán temas como introducción al concepto de derivada, reglas de derivadas (incluída la regla de la cadena) y derivadas de uso frecuente **(C1)**.
2. Debe incluirse un repaso del concepto de función y actividades que refuercen conocimientos previos necesarios para este tema **(C4, C5)**.
3. La introducción del concepto se realizará desde dos enfoques: límite de la variación media y pendiente de recta tangente **(C2, C6, C7)**.
4. Las actividades deben propiciar mayor interacción entre estudiantes y mantener similitud con las anteriores clases **(C3)**.
5. Incluir actividades con matices de problemas reales **(C2)**.
6. Fomentar el uso de los recursos disponibles en la comunidad de la cátedra de Cálculo Diferencial e Integral (resúmenes, guías semanales, prácticas) **(C8)**.

4.2. Concepción de la secuencia didáctica y supuestos a priori

4.2.1. Sesión 1. Derivadas. Definición

En esta sesión se introduce el concepto desde dos perspectivas: la noción de incremento y luego la derivada como pendiente de la recta tangente.

Actividades de clase

1. Construyendo una pared!

Se presenta la situación de construir una pared de 2 m a partir de un muro con 50 cm de altura. Para esto se deben ir agregando, de manera horizontal, tablas de 15 cm de ancho. En la Figura 4.12 se muestra la ayuda visual que se utilizó.

Figura 4.12: Ilustración para actividad: Construyendo una pared!

La actividad pretende que, con el profesor como facilitador del proceso, se repasen temas como función, variables, modelización e incremento. Además, se pretende relacionar la situación con un criterio y una gráfica.

Como parte del proceso de resolución de la situación problema se sugiere el uso de las siguientes preguntas

1. **¿Cuánto incrementa la altura de la pared por cada tabla que se agregue?** Con esta pregunta se trabaja la noción de incremento y se relaciona con la pendiente de la función lineal que modela la situación.
2. **¿Podría modelarse una situación inversa? (Una pared que ya mide 2 m y se le van quitando tablas)** Introduce la noción de decremento y refuerza

el concepto de función y de pendiente.

3. **¿Crees que cualquier modelo de crecimiento o decrecimiento debe ser lineal?** Esta pregunta permite hablar de la similitud local de la recta tangente a la curva (no lineal) en general.

4. **¿Puedes dar un ejemplo de una situación donde haya tanto crecimiento como decrecimiento?** Amplía el panorama a situaciones donde los comportamientos cambian y sirve de introdución a la actividad siguiente.

2. Esquiando en la nieve!

La actividad pretende hacer surgir de manera natural la utilidad del límite en cálculos de variaciones instantáneas como estrategia para mejorar la precisión. Por otro lado, se han incluido preguntas sobre tiempos que no están tabulados con la intención de generar alguna discusión al respecto. Además, se pretende reforzar la noción de relaciones discretas y representaciones gráficas.

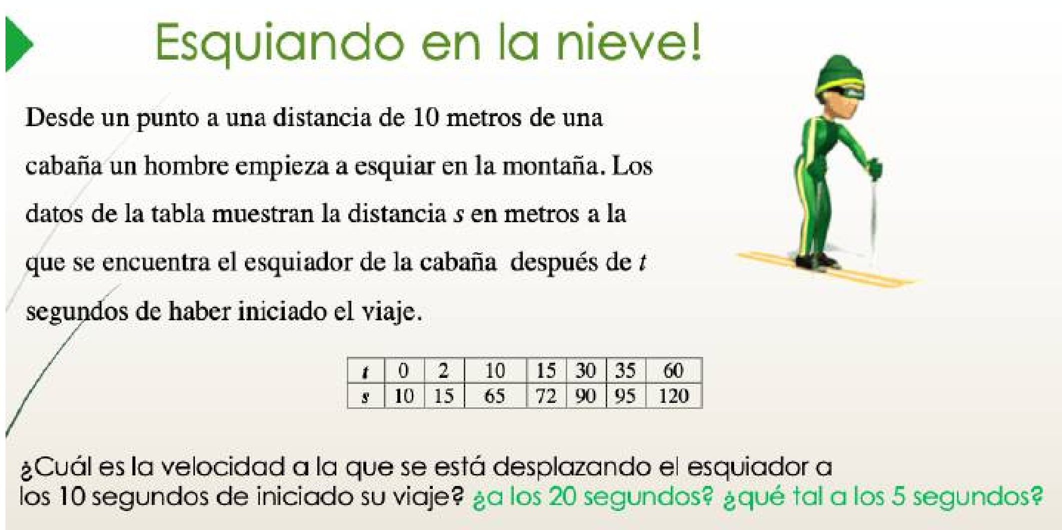


Figura 4.13: Ilustración para actividad: Esquiando en la nieve!

En esta situación la guía del docente es fundamental pues los estudiantes al hacer estimaciones y conjeturas podrían perderse del objetivo (utilizar la noción de límite para precisar la variación instantánea). Las preguntas hechas (pueden verse en la figura 4.13) sugieren la utilización de una medida de variación, en primera instancia variación media, luego (al ser imprecisa) reducir el rango y finalmente la idea de límite resuelve el problema.

3. La recta tangente

Esta es una presentación muy similar a la descrita en Borbón (2018), la cual se describió en la Revisión de literatura y documentos oficiales de la sección de Análisis preliminares.

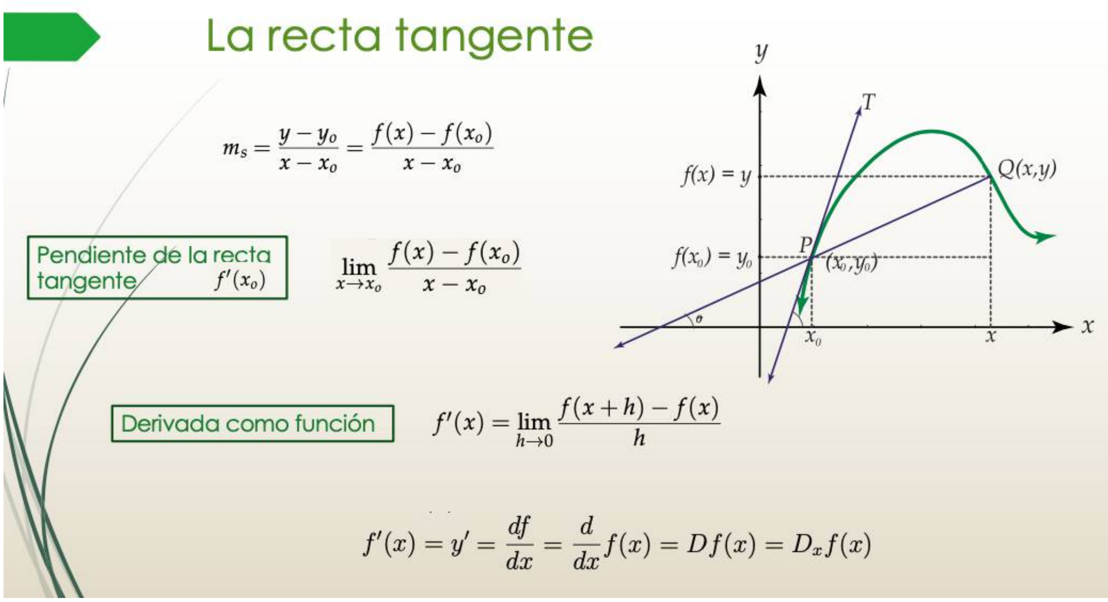


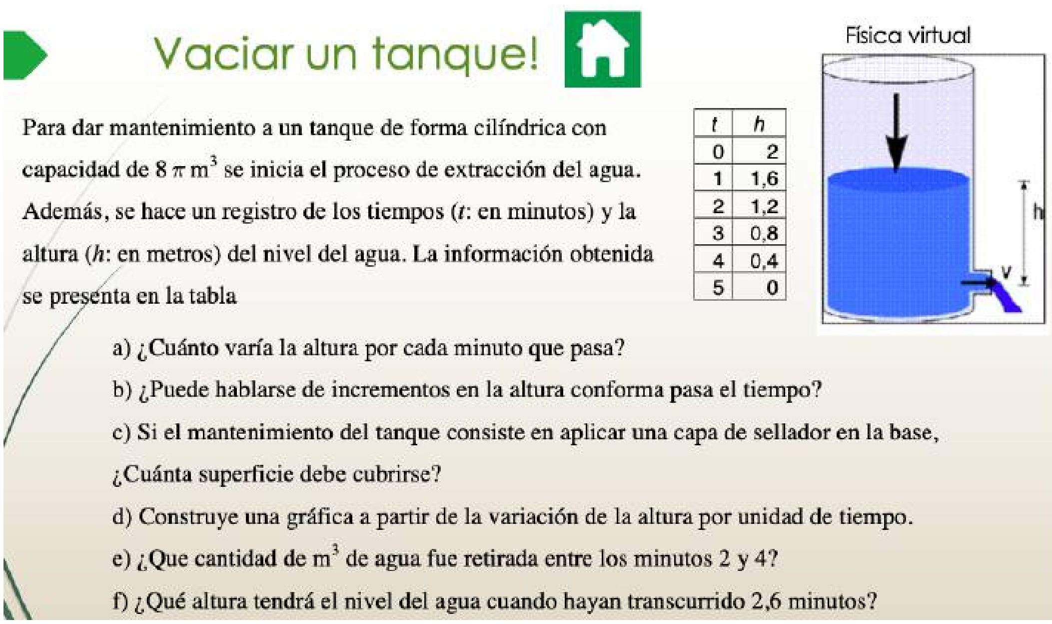
Figura 4.14: Ilustración para actividad: La recta tangente

En la Figura 4.14 puede apreciarse tanto la representación gráfica de una recta secante y una recta tangente como las fórmulas de derivada en un punto y de la función derivada. A partir de la información gráfica y de la fórmula para el cálculo de la pendiente de la recta a partir de dos puntos, el cambio de recta secante a la tangente permite deducir las fórmulas para la derivada.

Adicionalmente, se pretende reforzar el concepto de función, la noción de límite, la técnica de sustitución, la localidad de la derivada y se introducen las notaciones más comunes utilizadas para representar la derivada de una función. La actividad cierra con ejemplos de gráficas en las que se ilustran casos donde la derivada está indeterminada en algún punto.

Actividades reforzamiento y repaso

Vaciar un tanque!



Vaciar un tanque!

Para dar mantenimiento a un tanque de forma cilíndrica con capacidad de 8π m^3 se inicia el proceso de extracción del agua. Además, se hace un registro de los tiempos (t: en minutos) y la altura (h: en metros) del nivel del agua. La información obtenida se presenta en la tabla

t	h
0	2
1	1,6
2	1,2
3	0,8
4	0,4
5	0

a) ¿Cuánto varía la altura por cada minuto que pasa?

b) ¿Puede hablarse de incrementos en la altura conforma pasa el tiempo?

c) Si el mantenimiento del tanque consiste en aplicar una capa de sellador en la base, ¿Cuánta superficie debe cubrirse?

d) Construye una gráfica a partir de la variación de la altura por unidad de tiempo.

e) ¿Que cantidad de m^3 de agua fue retirada entre los minutos 2 y 4?

f) ¿Qué altura tendrá el nivel del agua cuando hayan transcurrido 2,6 minutos?

Figura 4.15: Reforzamiento: Vaciar un tanque!

Ejercicios

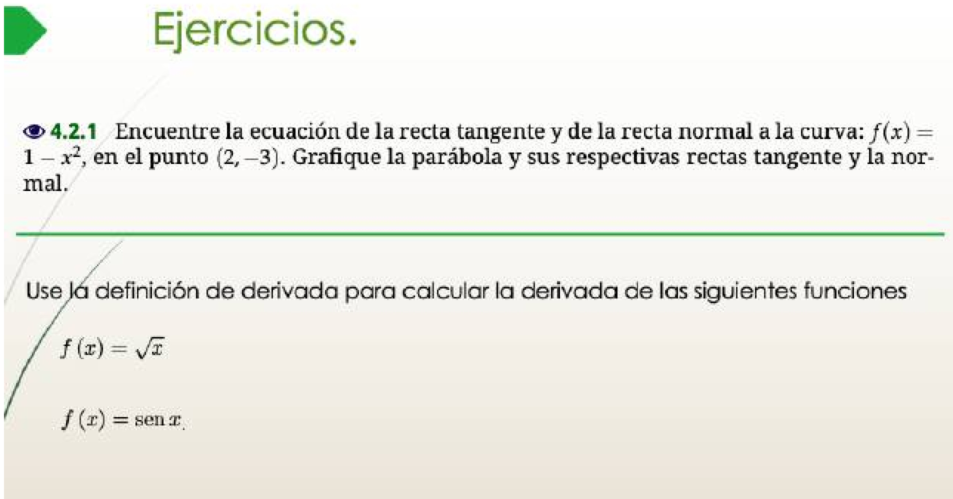


Figura 4.16: Ejercicios de la sesión 1.

Guía semanal

Se sugiere la realización de las actividades 3 y 4 de la guía de la semana 4.

Test de sesión

Al cierre de la sesión se les presenta un enlace para que ingresen y completen el test de frases incompletas:

- La noción de derivada me parece ____________________ .
- Hoy aprendí que ____________________ .
- Lo mejor de la clase de hoy fue ____________________ .

Valore la clase de hoy

☐ Me gusta ☐ Indiferente ☐ No me gusta

Resultados del test

El test lo completaron 25 estudiantes, los cuales, en términos generales, consideran que la noción de derivada es compleja pero interesante. Algunas de las respuestas fueron "*Bastante interesante ya que desconocía completamente del tema*", "*Complicado pero interesante*" e "*Interesante, ya que es una manera muy práctica de conocer por ejemplo una velocidad específica, y no promedio como se conoce normalmente*".

Para completar la frase "**Hoy aprendí que**" los estudiantes hicieron alusión a conceptos como relación entre derivada y recta tangente, razón de cambio, relación derivada-límite y continuidad. Se encontraron frases extensas como "*encontrar la derivada de en un punto por medio de la recta tangente y además también como encontrar la función derivada para así poder evaluarla y encontrar en cualquier punto en donde sea posible evaluar*" o "*Una función es no derivable si esta no es continua y si el límite que describe la derivada da infinito*" y otras más cortas como "*La derivada es un límite*", "*Si es discontinua no es derivable*" y "*A partir de la derivada se puede sacar la recta tangente y la normal*".

Los complementos a la frase "**Lo mejor de la clase de hoy fue**" estuvieron muy variados, algunos destacaron la forma en como se presentó el tema, otros valoraron el ambiente ameno de la clase, los ejercicios y hasta el uso de imágenes animadas fueron aspectos destacados de la sesión. Algunos comentarios fueron "*Que la explicación se realice con explicaciones sencillas para poder comenzar a adaptarnos al tema*", "*Poder entenderle al profesor, ejemplos claros y concretos*", "*Las imágenes y gifs de las gráficas* " y "*Que me sentí libre de preguntar la definición de derivada varias (4) veces y desde distintos puntos de vista*".

Finalmente, como puede verse en la figura 4.17, los estudiantes valoraron de manera muy positiva la sesión 1. Los resultados del test de frases incompletas de esta sesión nos señalan que las actividades desarrolladas lograron generar un ambiente ameno, los estudiantes valoran el uso de herramientas tecnológicas para ilustrar conceptos, reconocen el abordaje desde diferentes perspectivas y que se logró, al menos a corto plazo, un acercamiento a la noción pretendida del concepto de derivada.

Figura 4.17: Valoración de los estudiantes sobre la sesión 1.

4.2.2. Sesión 2. Reglas de Derivadas

Actividades de clase

1. Superpoder deductivo

En esta actividad se hace referencia a la deducción como una habilidad de superhéroe, con la que se logra determinar la derivada de una constante, de una función lineal y se prueba la regla del producto para derivadas. La actividad pretende hacer uso de la idea de variación y la definición de derivada, trabajadas en la clase anterior, para deducir reglas y derivadas de uso frecuente. Nuevamente, la habilidad y guía del docente son esenciales en la actividad.

Figura 4.18: Ilustración para actividad: Superpoder deductivo!!

2. Reglas de derivadas y derivadas de uso frecuente

A manera de resumen se presentan las reglas de derivadas y las derivadas de uso frecuente. Se pretende que los participantes tengan claridad que estas listas son deducciones de la actividad anterior y no simplemente un listado que debe memorizarse.

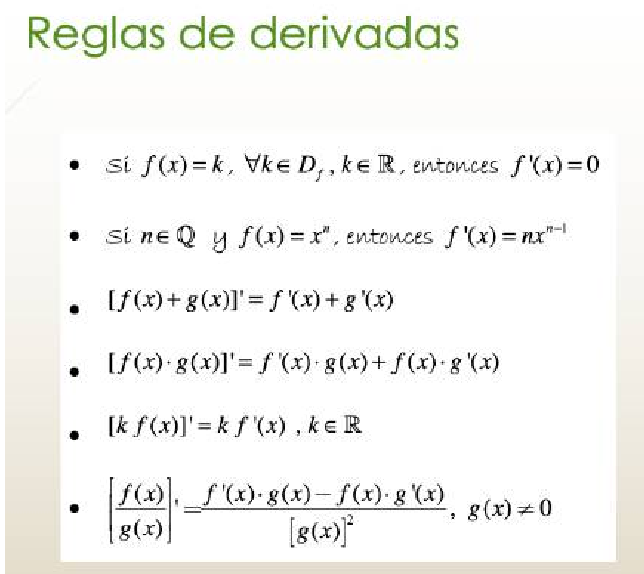


Figura 4.19: Listas de reglas

En la Figura 4.19 se muestran las reglas de derivadas y en la Figura 4.20 las derivadas de funciones que se consideran directas. Estas listas guardan estrecha relación con las publicadas en los resúmenes y guías semanales de la cátedra.

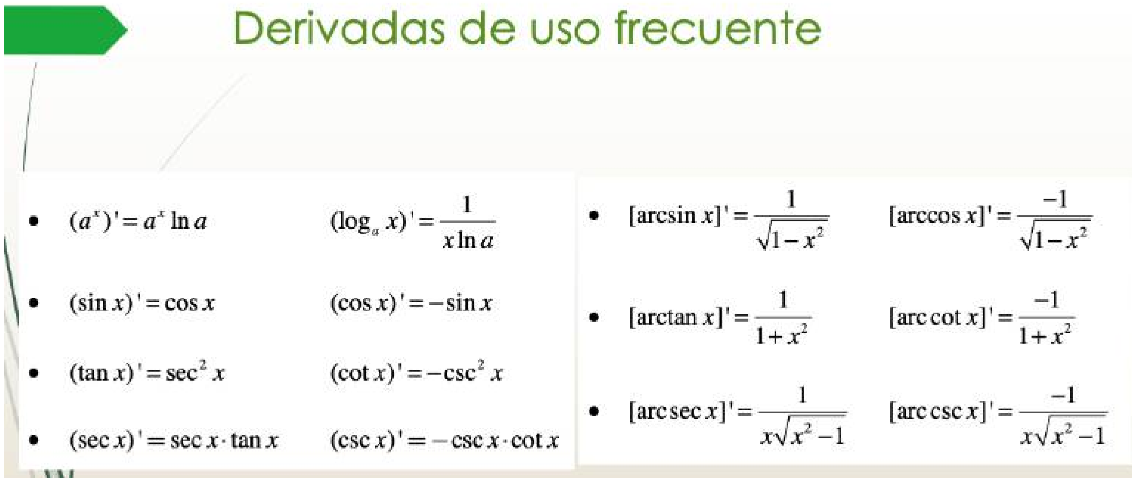


Figura 4.20: Derivadas de uso frecuente.

Actividades reforzamiento y repaso

Ejercicios

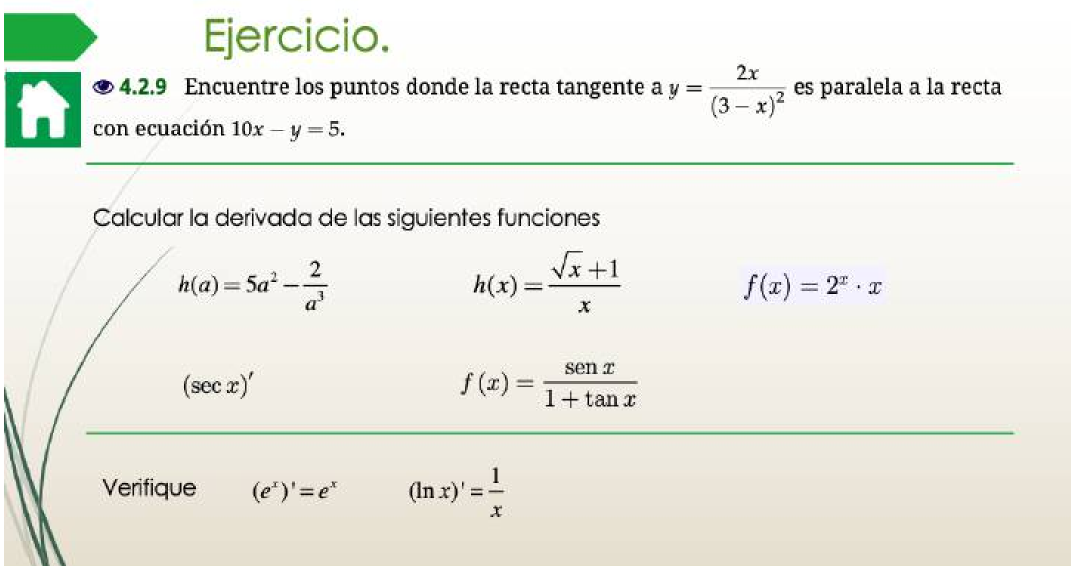


Figura 4.21: Ejercicios de la sesión 2.

Guía semanal

Se sugiere trabajar la guía de la semana 5 completa.

Test de sesión

Al cierre de la sesión se les presenta un enlace para que ingresen y completen el test de frases incompletas:

- Lo que me quedó más claro fue ______________________ .
- Las actividades de hoy pretendían ______________________ .
- Las clases serían más provechosas si ______________________ .

Valore la clase de hoy

☐ Me gusta ☐ Indiferente ☐ No me gusta

Resultados del test

De los 19 estudiantes que completaron el test de frases incompletas, prácticamente todos indican que las reglas de derivadas les resultaron muy claras. A manera de ejemplo se presentan algunos de los complementos utilizados para la frase "**Lo que me quedó más claro fue**": "*Todas las reglas de derivadas me quedaron bastante claras!*", "*Que al usar las propiedades se pueden resolver las derivadas más fácil*" y "*Las reglas de las derivadas se pueden demostrar mediante técnicas similares a las usadas en ejercicios con límites.*"

Otro de los objetivos del test fue indagar la percepción sobre los fines de las actividades desarrolladas. A la frase "**Las actividades de hoy pretendían**" la mayoría solamente reconoció que enseñar a usar las reglas para calcular derivadas, lo cual está bien, sin embargo algunos fueron más específicos y aportaron complementos como

"*Exponer diferentes maneras de calcular derivadas*", "*Deducir las reglas, practicar con algunos ejercicios como utilizar dichas reglas*" y "*Demostrar un método más rápido, más directo y desde mi punto de vista, menor probabilidades de cometer un error*".

También se les solicitó completar la frase "**Las clases serían más provechosas si**" para tener insumos con los que reorientar las sesiones si fuese necesario. Los complementos señalan que están conformes con las clases aunque señalan que las preferirían en modalidad presencial y algunos indican que fuesen más cortas y que hubiese tiempo para practicar durante la clase. Algunos de los aportes son "*Si fueran presenciales jaja. Personalmente considero que da muy buenas lecciones y se ha adaptado muy bien en la modalidad virtual*", "*Dejaran un momento para realizar práctica individualmente en clase*" y "*Realizamos ejercicios paso a paso!*". La Figura 4.22 muestra que la valoración hacia la clase sigue siendo buena pero en menor medida en comparación a la clase anterior.

Figura 4.22: Valoración de los participantes sobre la sesión 2.

4.2.3. Sesión 3. Regla de la Cadena

Actividades de clase

1. Regreso a la escuela!

Con un escenario como el aula de una escuela se pide a los participantes escribir en la pizarra la solución a algunas preguntas básicas sobre composición de funciones. Se pretende repasar el concepto de composición de funciones de una manera lúdica y dejar la puerta entreabierta a la regla de la cadena.

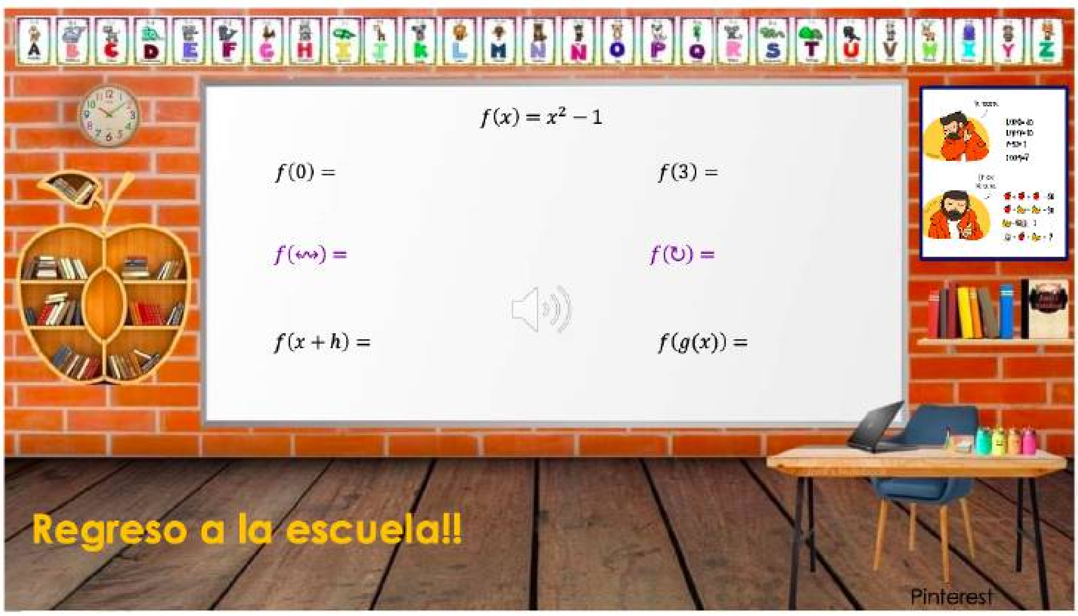


Figura 4.23: Ilustración para actividad: Regreso a la escuela!!

En la figura 4.23 puede verse que se utilizó una función $f(x) = x^2 - 1$ y se solicitaron las imágenes de 0, 3, $\rightsquigarrow$,$\circlearrowleft$, $x + h$ y $g(x)$. Luego, para $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ se solicitaron las imágenes de 1, 4, $\rightsquigarrow$,$\circlearrowleft$, x^2 y $\ln(x)$

2. Regla de la cadena.

Una presentación clásica de la regla de derivadas para funciones compuestas. Se utiliza una cadena para ilustrar como se conectan la función en la composición con su derivada. Además, se enfatiza en que las funciones involucradas en la composición pueden ser más que dos.

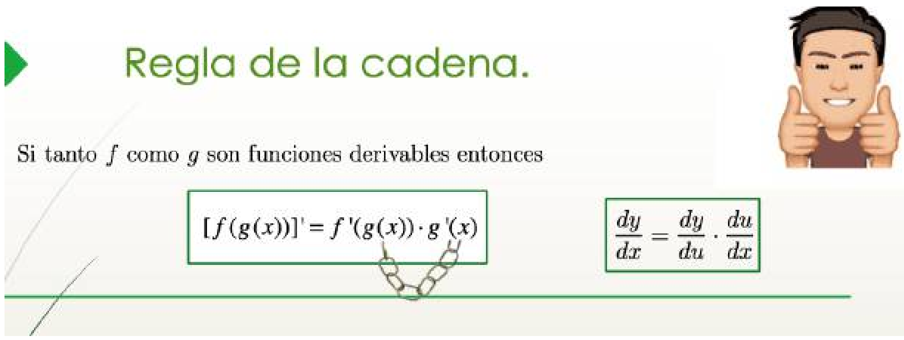


Figura 4.24: Ilustración para actividad: Regla de la Cadena!!

La actividad cierra con la presentación de una regla de la cadena con muchas funciones compuestas y ejemplos con nivel de dificultad moderado.

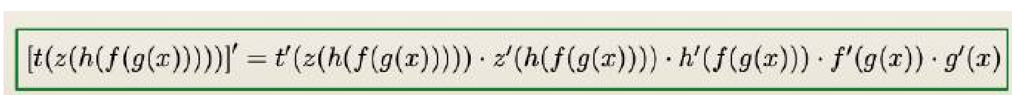


Figura 4.25: Regla de la Cadena para cinco funciones no identidades.

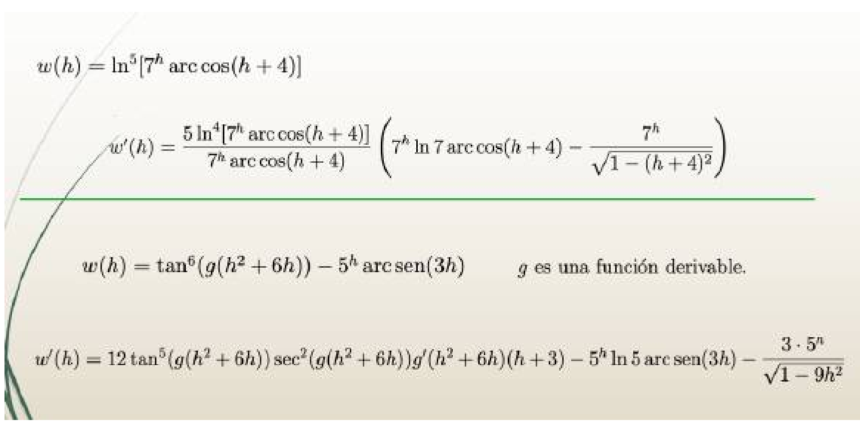


Figura 4.26: Regla de la Cadena. Ejemplos

Actividades reforzamiento y repaso

Ejercicios

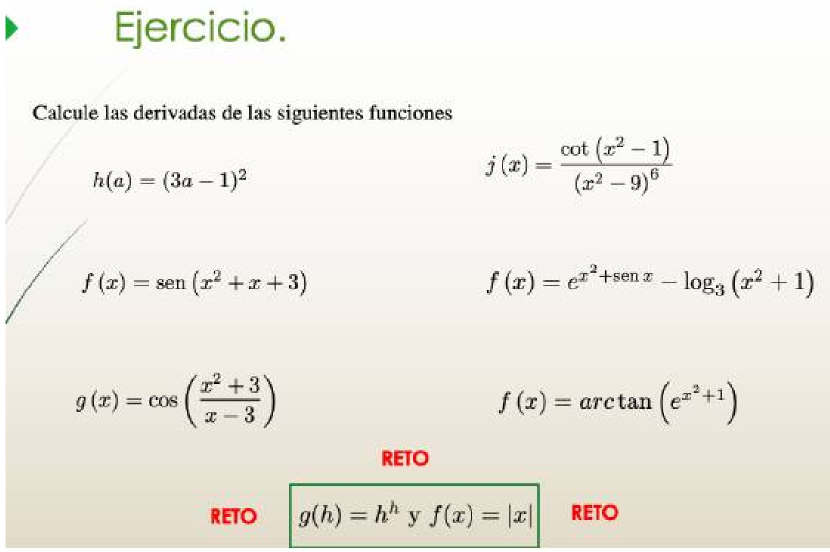


Figura 4.27: Ejercicios de la sesión 3.

Guía semanal

Se sugiere trabajar la actividad 3 de la guía de la semana 6.

Test de sesión

Al cierre de la sesión se les presenta un enlace para que ingresen y completen el test de frases incompletas:

- En la clase me resultó interesante ______________________________ .
- Sobre la Regla de la Cadena puedo decir que ______________________ .
- Quisiera que para las próximas clases ____________________________ .

Valore la clase de hoy

☐ Me gusta ☐ Indiferente ☐ No me gusta

Resultados del test

En esta ocasión el test lo completaron 17 estudiantes. A la frase "**En la clase me resultó interesante**" los complementos hicieron referencia principalmente a la Regla de la Cadena como tal o bien a la derivada de una función compuesta. Por ejemplo, "*Conocer la regla de la cadena*", "*Lo compleja que se puede volver una derivada*" y "*Entender que para derivar el orden es importante*".

Se les solicitó además referirse a la Regla de la Cadena, las respuestas indican que les pareció una regla útil, interesante pero de manejo cuidadoso. Algunas reacciones fueron "*Es bastante interesante sin embargo es de mucho cuidado al realizarlo*", "*Entiendo su funcionalidad, pero me cuesta su aplicación*" y "*Es el tema que mejor he comprendido*".

Como sugerencias para las siguientes clases los estudiantes recomiendan que se mantega la metodología de trabajo, reducir el tiempo de contacto (les parecen muy largas) y hacer ejercicios con mayor detalle. Como muestra de esto se tiene "*Se mantenga la metodología de explicación*", "*Hubieran ejemplos ilustrativos para poder aplicar lo aprendido y algún juego relacionado con lo visto en clase*", "*La clase no se haga tan pesada*" y "*Se mencionen un poco más los pasos mientras se realizan*". La Figura 4.28 muestra que la valoración sigue siendo buena.

Figura 4.28: Valoración de los participantes sobre la sesión 3.

4.3. Análisis a posteriori de la secuencia didáctica

En concordancia con el modelo metodológico propuesto, el análisis a posteriori se realizó con referencia al EOS, específicamente desde la faceta cognitiva y procurando mostrar un proceso reflexivo. No se pretende hacer un análisis didáctico, como se define propiamente en el EOS, sino valorar la idoneidad cognitiva de la secuencia didáctica producto de la reflexión propia del docente.

La principal referencia para guiar el proceso reflexivo son los indicadores presentados en Castillo et al. (2022b), los cuales se contextualizaron a una secuencia remota y se complementaron con indicadores propuestos en este proyecto. En la Tabla 4.3 se resumen estos indicadores y se muestran los códigos asociados que permitieron identificarlos en el análisis particular de cada instrumento.

El análisis se hizo por componentes, en cada uno se describen en detalle los indicadores asociados, se presentan las evidencias que respaldan las reflexiones del docente y finalmente se asigna un color dependiendo de la valoración que se haga. Se asignó verde si el indicador está presente en la secuencia didáctica y se evidencia un alcance alto; amarillo si el indicador está presente pero la reflexión del docente le indica que debe mejorar y rojo si el indicador no está presente o bien la reflexión del docente concluye que su alcance es limitado.

Finalmente, para dar un valoración general sobre la idoneidad cognitiva de la secuencia didáctica se calculó la frecuencia de los colores según las valoraciones en los indicadores particulares.

Tabla 4.3: Componentes e indicadores de idoneidad en la faceta cognitiva

Componentes	Indicadores
Significados personales (Aprendizajes)	**Cr:** Las experiencias propuestas (situaciones, ejemplos, explicaciones u otras) promueven la comprensión de conceptos, procedimientos, proposiciones y las mismas situaciones. **Ct:** Las experiencias propuestas permiten valorar si cada estudiante desarrolla la competencia de comunicar, argumentar y realizar procedimientos con solvencia.
Relaciones (conexiones)	**Cx:** Las experiencias propuestas permiten valorar si el estudiantado establece relaciones o conexiones entre los objetos matemáticos y entre sus correspondientes significados: intuitivo, gráfico, aritmético o algebraico en diferentes contextos.
Procesos	**Pm:** Se incluyen actividades donde se incentive la implementación de procesos matemáticos específicos del contenido (modelización, generalización, resolución o planteamiento de problemas, prueba, representación). **Pr:** Se contemplan actividades de reflexión sobre los procesos de pensamiento matemático realizados.
Conocimientos previos	**Cp:** Se contemplan los conocimientos previos necesarios de acuerdo al nivel educativo correspondiente. **Dm:** Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Diferencias individuales	**Aa:** Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo que guarden linealidad con las presentadas en la secuencia didáctica. **Ac:** Se promueve el acceso, el logro y apoyo de todo el estudiantado mediante el uso de diversas estrategias correctas de abordaje, solución y comunicación
Conflictos cognitivos	**Ee:** Se presentan y discuten estrategias erróneas como fuentes de aprendizaje. **Vc:** Se prevén situaciones con diferentes niveles de dificultad o variación de condiciones. **Ad:** Se advierte de errores y dificultades del alumnado tanto conceptuales como procedimentales.
Evaluación	**Ei:** El proceso de instrucción incluye o propone instrumentos de evaluación, autoevaluación o coevaluación. **Et:** La evaluación se realiza en diferentes momentos: inicial o exploratorio, de contacto o seguimiento y final o valorativo. **En:** La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia.

Fuente: Castillo, et al. (2022) p.11, con algunos aportes propios.

4.3.1. Significados personales (Aprendizaje)

Comprensión (Cr)

Este indicador pretende evidenciar si la secuencia didáctica promueve la comprensión de conceptos, procedimientos u otros objetos asociados a la derivada de una función. Específicamente en el tema de derivadas, según la revisión de literatura, se asocian conceptos como variación, pendiente de una recta, recta tangente, funciones compuestas, continuidad, derivabilidad, límites, entre otros; y procedimientos como factorización, racionalización, cálculo de límites y reglas de derivadas principalmente.

La secuencia didáctica promueve de muy buena forma la comprensión de estos conceptos y procedimientos durante las tres sesiones. En la sesión 1, la actividad llamada *Construyendo una pared*, en la que se tiene un muro con una altura fija y se van agregando tablas de un ancho fijo hasta tener una altura deseada, promueve conceptos como variación y pendiente de una recta. Además, la actividad denominada *Esquiando en la nieve* promueve los conceptos de variación y termina conectando la noción de límite con variación instantánea. También en la sesión 1, con la actividad *Recta tangente* se trabajan conceptos como pendiente de una recta, desplazamientos, representación gráfica de funciones, localidad de la derivada puntual y función derivada. Al final de la sesión se dedica un espacio a la relación de continuidad con derivabilidad. Además, con los ejemplos realizados se fomentaron procedimientos como cálculo de límites, racionalización y factorización.

En la sesión 2 se continuó reforzando la relación entre variación y derivada, sin embargo el énfasis estuvo en el cálculo de derivadas por medio de reglas. Es importante recalcar que en esta sesión estuvieron presente objetos matemáticos que no se habían trabajado: funciones trigonométricas inversas, funciones logarítmicas y exponenciales y rectas paralelas. La sesión 3 trataba de la regla de la Cadena, por lo que se promovieron los conceptos de función compuesta y el uso adecuado de reglas.

A manera de cierre, debe señalarse que este indicador tiene una valoración verde, no solamente por la cantidad de conceptos, procedimientos y proposiciones que se trabajaron si no también por la forma y el orden que se presentaron. En todas las actividades los conceptos surgían de discusiones de las situaciones propuestas y siempre hubo una síntesis e institucionalización por parte del docente.

Competencias (Ct)

Este indicador pretende valorar si los estudiantes desarrollan competencias como comunicar, argumentar y realizar procedimientos con solvencia.

En la sesión 1, las actividades promueven las competencias de comunicar y argumentar. Se les planteaban preguntas en las que debían responder y presentar sus argumentos. Los siguientes son algunos aportes de los estudiantes:

- *puede ser algo como una cuadrática por ejemplo en poblaciones de animales. Cuando uno tiene muchos recursos la población pues va creciendo y cuando los recursos se acaban entonces empieza a disminuir* (como ejemplo de una situación donde hay tanto crecimiento como decrecimiento).

- *no, porque hay otros modelos de crecimiento por ejemplo hay modelos exponenciales y logarítmicos* (respuesta a la consulta sobre si el crecimiento es exclusivo de funciones lineales).

- *las funciones que nos mostró no son derivables en ese punto pero pueden ser derivables en otros puntos* (comentario luego de mostrarles ejemplos gráficos de funciones no derivables).

En la sesión 2, la actividad *Superpoder deductivo* se trató justamente de argumentar, a partir del trabajo de la sesión 1, las derivadas de una función constante, una lineal y la regla del producto. Un par de aportes fueron:

- *Profe, yo veo que el cambio en ese caso es 0* (sobre la derivada de una función constante).
- *La tasa de cambio es y2-y1 sobre x2-x1. Es m* (derivada de una función lineal).

Este indicador tiene una valoración amarilla. Aunque la planificación de la secuencia didáctica si contemplaba actividades para lograr competencias, no se logró tener una participación activa (principalmente en la sesión 3) por lo que la evidencia sobre argumentos o comunicados es escasa. Además, al ser una clase remota es muy complicado tener evidencia de la realización de procedimientos con solvencia.

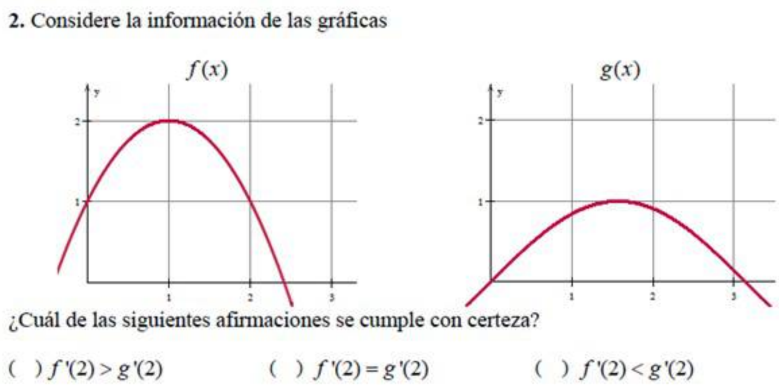
4.3.2. Relaciones

Conexiones (Cx)

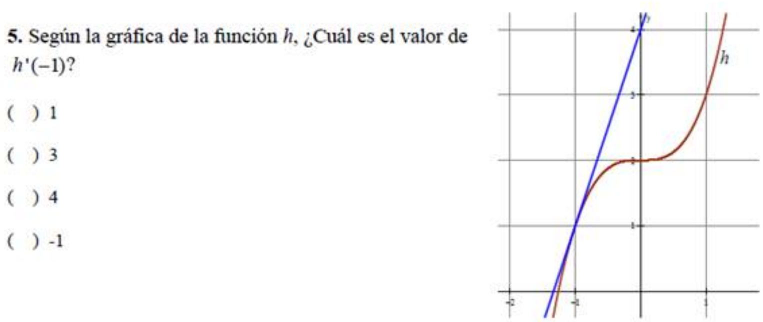
Este indicador pretende valorar si los estudiantes logran establecer conexiones con otros objetos matemáticos y sus diferentes representaciones (intuitiva, gráfica, aritmético, algebraica).

La secuencia didáctica inicia con una sesión donde se presenta la derivada de manera intuitiva a partir de la noción de variación, en otra actividad se presenta de manera gráfica, además se trabaja la derivada por definición y algunos ejercicios meramente numéricos.

La valoración para este indicador es verde porque en cada actividad se reforzaron los trabajos previos y se insistió en que estaban conectados. Por ejemplo, cuando se estaba haciendo el trabajo geométrico para deducir la definición de la derivada, se les indicó que: *Esto en realidad es lo mismo que acabamos de ver, noten que este espacio de aquí es lo mismo que el* Δt *que teníamos hace un rato y este otro es lo mismo que el* Δs. Además, se enfatizaron muy bien las relaciones entre derivada-límite, derivada-pendiente de recta tangente y derivada-crecimiento. En la Figura 4.29 se muestran ejemplos de ejercicios considerados en la etapa de evaluación de la secuencia didáctica.



(a) derivada-crecimiento



(b) derivada-pendiente de recta

Figura 4.29: Ejemplos de ejercicios en los que se evidencia conexiones entre objetos matemáticos relacionados con la derivada.

4.3.3. Procesos

Procesos Matemáticos (Pm)

Este indicador se refiere a si se realizan procesos específicos de la actividad matemática (modelización, generalización, planteamiento y resolución de problemas, pruebas, representaciones).

En la secuencia didáctica se aprecian con claridad los siguientes procesos:

1. *Planteamiento y resolución de problemas:* en la actividad sobre construir una pared, la estimación de la velocidad puntual de esquiador y algunos ejercicios para hacer en casa.

2. *Modelización:* se trabajó con mucho detalle en la actividad sobre construir una pared principalmente.

3. *Representaciones:* en las actividades sobre recta tangente, esquiando en la nieve y Superpoder deductivo.

4. *Pruebas:* se realizó la prueba de la derivada de un producto y se calcularon derivadas por definición.

5. *Generalizaciones:* se extendió la regla de la cadena a más de dos funciones (no identidad) compuestas, generalización de los casos de no derivabilidad.

Estos procesos se realizaron de manera muy adecuada con la guía del docente, por eso se considera que la valoración para este indicador es verde.

Procesos Reflexivos (Pr)

Aunque en la secuencia didáctica contempla procesos de reflexión sobre los procesos de pensamiento matemático realizados durante y al cierre de cada actividad, la valoración para este indicador es amarilla.

En las actividades se incluyeron preguntas para guiar el proceso de reflexión sobre lo que se estaba construyendo, sin embargo la escasa participación de los estudiantes no permitó evidenciar los alcances logrados.

4.3.4. Conocimientos previos

Conocimientos previos necesarios (Cp)

Este indicador se refiere a considerar los conocimientos previos necesarios de acuerdo al nivel educativo correspondiente para alcanzar el conocimiento pretendido, ya sea que se incorpore en las actividades o de manera previa. Hay al menos dos vías para identificar estos conocimientos previos: la experiencia docente y la revisión de literatura. En este proyecto se hizo uso de ambas.

En la fase de análisis preliminares, más propiamente en la revisión de literatura, se identificó que el conocimiento previo que mayor dificultad presenta es el concepto de función. Por tanto, este concepto se reforzó en cada una de las sesiones.

La secuencia didáctica inicia con una actividad en la que se presenta, de manera aplicada a la construcción de una pared, los conceptos de función, dominio, ámbito, modelo, imagen, preimagen, pendiente de una recta, crecimiento y función inversa. Cada uno de estos fue abordado y formalizado por el docente cuando emergían de la situación. De manera similar se trabajaron conocimientos previos como representación gráfica (actividad sobre recta tangente), límites (con la actividad esquiando en la nieve), factorización, racionalización y fórmulas notables (en derivadas por definición) y funciones compuestas (actividad de regreso a la escuela).

La valoración para este indicador es verde, pues se consideran y trabajan conocimientos previos necesarios identificados por la experiencia del docente y la revisión de literatura en situaciones aplicadas o actividades amenas donde el estudiante debía interactuar.

Involucrar las componentes de la faceta interaccional y afectiva en valoraciones de idoneidad cognitiva no es un asunto antojadizo, ya se ha evidenciado en publicaciones como Aroza et al.(2016) y Vasconcelos et al. (2019), que están ligados y tienen influencia entre sí. La secuencia didáctica tuvo los mayores índices de participación en las actividades donde se retomaban conocimientos previos.

Conocimiento alcanzable (Dm)

En este indicador debe valorarse si los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes. El tema de derivada de una función y conceptos asociados tienen una dificultad manejable, esto se evidencia en las mallas curriculares de las carreras a las que se ofrece el curso de CDI, programa del curso y consignas semanales de la cátedra. Además, las actividades que se realizaron están en concordancia con estos documentos y planificadas para un logro gradual del conocimiento pretendido. Este indicador tiene una valoración verde.

4.3.5. Diferencias individuales

Actividades de ampliación y refuerzo (Aa)

Este indicador también tiene valoración verde pues en la secuencia didáctica se incluyeron actividades de ampliación y de refuerzo en cada una de las sesiones sobre la temática que se abordó. Además, para garantizar la consecuencia con los objetivos de la cátedra, se sugirió trabajo extraclase en las consignas directamente.

Estrategias correctas diversas (Ac)

Para este indicador la valoración es roja. Se debe reconoce como faltante en las actividades la promoción del acceso, el logro y apoyo de todo el estudiantado mediante el uso de diversas estrategias correctas de abordaje, solución y comunicación. Los ejercicios y actividades propuestas tenían una marcada forma de solución, no se incluyen situaciones en las que se trabajen formas diferentes de solución.

Este es un aspecto a mejorar en un eventual rediseño de la secuencia didáctica, pues lo único que se acerca a diversas estrategias correctas de solución es haber realizado las mismas derivadas por definición y mediante reglas.

4.3.6. Conflictos cognitivos

Estrategias erróneas (Ee)

Este indicador tiene valoración verde, porque cuando se presentó algún aporte erróneo por parte de los estudiantes estos se retomaron y se utilizaron como fuentes de aprendizaje. Por ejemplo, un cálculo equivocado de la variación media por parte de un estudiante permitió el inicio del proceso de generalización hasta llegar al límite. Incluso hubo un error en la presentación que el profesor llevaba (decía recta horizontal cuando debía ser vertical) que fue evidenciado por un estudiante y esto, además de mostrar la comprensión del estudiante, conllevó a un tiempo ameno por las bromas en la clase.

Un error que merece la atención tuvo lugar en la clase sobre reglas de derivadas, un estudiante argumentó: *factorizar y racionalizar son formas de derivar.* Con el abordaje que se hizo se logró constatar que esa creencia equivocada radicaba en el conflicto cognitivo producido por relacionar la derivada con un límite.

Solo unas semanas atrás se les había enseñado que factorizar y racionalizar eran estrategias útiles para calcular límites, entonces si la derivada es un límite el muchacho concluyó erróneamente que podía derivar funciones mediante estas técnicas. Además, en ese momento se estaban presentando las reglas de derivadas, cuyo potencial es justamente calcular las derivadas sin pasar por el cálculo del límite, entonces factorizar y racionalizar serían excelentes reglas de derivación.

Variación de condiciones (Vc)

Durante el proceso de instrucción se trabajaron situaciones con diferentes niveles de dificultad y algunas de las actividades propuestas permitían variar las condiciones iniciales para enriquecer el proceso.

4. Si $f(x) = 2^3$ entonces $f'(x)$ corresponde a

( ) $2^3 \ln 2$ ( ) $3 \cdot 2^2$ ( ) 2^3 ( ) 0

(a) Baja dificultad

3. A partir de la información proporcionada por la tabla adjunta, determine $(f \circ h)'(1)$

( ) 9

( ) 10

( ) 0

( ) -15

x	$f(x)$	$f'(x)$	$h(x)$	$h'(x)$
1	-2	-3	2	-3
2	4	5	1	-1

(b) Dificultad media

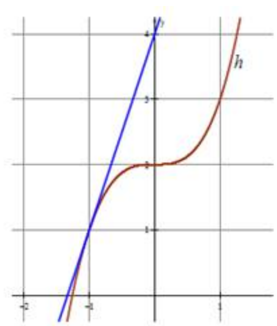
5. Según la gráfica de la función h, ¿Cuál es el valor de $h'(-1)$?

( ) 1

( ) 3

( ) 4

( ) -1



(c) Alta dificultad

Figura 4.30: Evidencia de ejercicios con diferentes niveles de dificultad.

La actividad sobre la construcción de la pared incluía preguntas con el objetivo de variar las condiciones hasta el punto de hacer surgir una relación inversa a la presentada. Los ejercicios sobre reglas de derivadas trabajados incluían algunos pocos de un nivel de exigencia bajo, algunos moderados y algunos eran retadores. En la figura 4.30 se muestran ejercicios con diferentes niveles de dificultad que fueron utilizados en la secuencia didáctica.

A este indicador se le valora como verde.

Advertencia de errores (Ad)

En este indicador se valora si en la secuencia didáctica se advierte de errores y dificultades del alumnado tanto conceptuales como procedimentales asociados al conocimiento pretendido. La experiencia del docente o la investigación previa sobre estrategias de abordaje de un determinado tema son cruciales para lograr que este indicador se satisfaga.

En la secuencia didáctica se advirteron una gran cantidad de errores por lo que se valora este indicador como verde. Como evidencias se tienen,

- *asumir que un modelo y una función real de variable real son la misma cosa:* se hicieron las distinciones de los dominios, ámbitos, restricciones, errores asociados.
- *asociar el crecimiento de la gráfica de cualquier función con la pendiente:* se aclaró que la relación entre crecimiento y pendiente es exclusiva de funciones lineales.
- *un límite no existe solo si los laterales son diferentes:* se complementa esta idea con la no existencia de un límite cuando su valuación da como resultado $\pm\infty$. Esto es importante para argumentar algunos casos de funciones no derivables.

- *la derivada es la recta tangente:* se enfatiza que con la derivada se obtiene la pendiente de la recta tangente no la ecuación de la recta.
- *derivada de una función constante:* se trabajaron casos de funciones con criterios como $f(x) = \log_2 4$ y $g(x) = 7^4$ donde es común confundirse y utilizar reglas de logaritmos, potenciales o exponenciales.
- *derivada de un producto/cociente:* naturalmente los estudiantes tienden a extender la separación de productos y cocientes en factores porque en los límites es válido. Se enfatizó que en derivadas es un error separar y derivar cada parte.
- $f(x+h) = f(x) + h$*:* como anticipación a este error se diseñó la actividad *De regreso a la escuela* en la que de forma muy básica se trabajó la composición de funciones. Además, se retomó este error en los cálculos de derivadas por definición.
- *mal uso de la regla de la cadena:* es un error común concluir $f'(x)g'(x)$ o $f'(g'(x))$ al derivar $f(g(x))$.

4.3.7. Evaluación

Evaluación integral (Ei)

Este indicador se refiere a si el proceso de instrucción incluye o propone instrumentos de evaluación, autoevaluación o coevaluación. En la secuencia didáctica que se está valorando solo hay evaluaciones, por lo que se asigna una valoración amarilla a este indicador. Hay tres evaluaciones pero no se se incluyen auto ni coevaluaciones.

Evaluación temporal (Et)

Se refire a si la evaluación se planifica para aplicar en diferentes momentos: uno inicial o exploratorio, otro de contacto o seguimiento y uno final o valorativo.

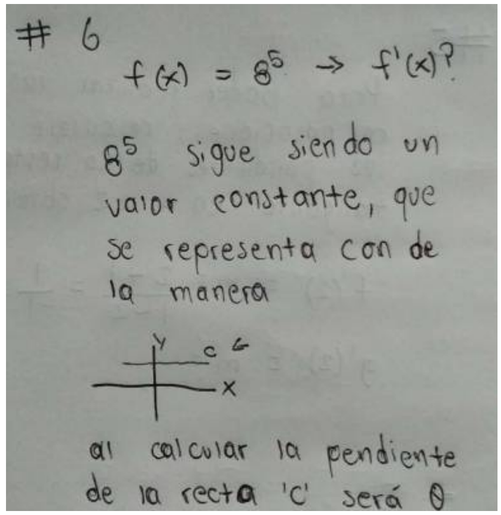
Este indicador es incluido en este proyecto como consecuencia de la experiencia del docente, conversaciones entre colegas que trabajan en temas similares y como reacción a faltantes que se evidenciaron en la revisión de literatura. En la sección sobre conclusiones y recomendaciones se presenta en mayor detalle los argumentos de la propuesta de este indicador.

La secuencia didáctica tiene una evaluación exploratoria en la que se tratan aspectos agrupados en didáctico-afectivo y cognitivo-epistémico, una evaluación de seguimiento a través de test de frases incompletas aplicados al final de cada sesión y finalmente una prueba específica en la que se incluyen ejercicios sobre derivadas en sus diferentes representaciones y con diferentes niveles de dificultad. La valoración para este indicador es verde.

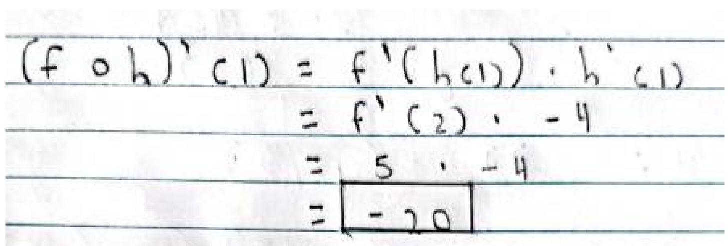
Evaluación gradual (En)

Para valorar este indicador se debe evidenciar que la evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia. La prueba específica incluyó 7 preguntas (2 con dificultad baja, 3 con dificultad intermedia y 2 con alta dificultad) en las que se mezclaron marcos algebraicos, simbólicos, gráficos y numéricos. La valoración para este indicador es verde.

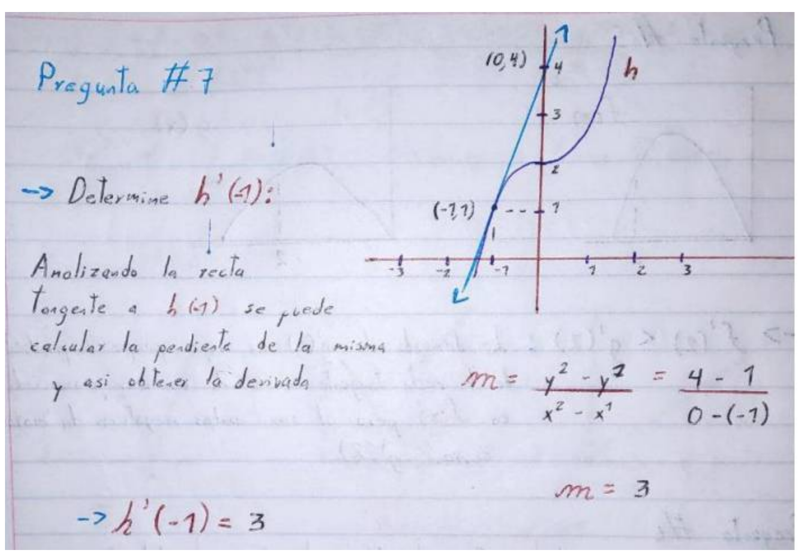
Como evidencia se muestran en la Figura 4.31 algunas respuestas correctas a las preguntas (con diferente nivel de dificultad) que aparecen en la Figura 4.30. La pregunta de baja dificultad tiene las demandas cognitivas de reconocer la función como constante y aplicar correctamente la regla para una función de este tipo. En la muestra de la pregunta con dificultad media se demanda trabajar en un cuadro meramente aritmético, aplicación de la regla de la cadena e identificación de imágenes en gráficas de funciones. La pregunta con alta demanda cognitiva implicó relacionar derivada con la pendiente de la recta tangente, cálculo de la pendiente de la recta a partir de información gráfica y distiguir que se pide el valor puntual de la derivada.



(a) Baja dificultad



(b) Dificultad media



(c) Alta dificultad

Figura 4.31: Evidencia de respuestas a ejercicios con diferentes niveles de dificultad.

Cr	**Ct**	**Cx**	**Pm**	**Pr**
Cp	**Dm**	**Aa**	**Ac**	**Ee**
Vc	**Ad**	**Ei**	**Et**	**En**

Figura 4.32: Valoración de los indicadores de idoneidad cognitiva.

Finalmente, para complementar esta componente se debe mencionar que se tuvo un redimiento adecuado en la prueba específica de 29 de los 43 estudiantes que la presentaron. Este cálculo se hizo considerando las demandas de cada pregunta y revisando si estas fueron logradas de manera deficiente, media o adecuada. Con este panorama y con el esquema de la figura 4.32 se valora la idoneidad cognitiva de la secuencia didáctica como muy buena.

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

En esta sección se resumen los logros que fueron expuestos con detalle en la sección de Análisis y discusión de resultados. Además, se brindan algunas sugerencias producto del proceso de diseño y reflexión sobre la puesta en escena de la secuencia didáctica.

5.1. Conclusiones

Este proyecto, en su conjunto, logra ser una referencia sobre lineamientos prácticos para el diseño de procesos de instrucción (unidades didácticas, conjuntos de actividades, talleres, clases tradicionales, entre otros) y para valorar que tan idóneas fueron las escogencias didácticas realizadas desde la faceta cognitiva.

Uno de los aspectos que debe destacarse, antes de ir particularizando las conclusiones, es que el diseño propuesto no es distante a lo que tradicionalmente se realiza en las aulas o plataformas cuando la clase es remota. Es decir, las actividades, prácticas, ejercicios, evaluación e indicadores de idoneidad no demandan al docente mayor uso de recursos ni requiere procesos de capacitación o especialización teórica adicional, tampoco implica trasladar al estudiantado a un contexto ajeno a sus aulas o estación de trabajo cuando se está en modalidad remota.

Este punto es muy importante porque significa que la implementación de las sugerencias que se presentan pueden ser inmediatas en cualquier contexto educativo y además rescata la labor docente tradicional que en muchas ocasiones parece desgastada. También difumina la resistencia que podría tener el profesorado por adoptar la propuesta, pues en lugar de “señalarle lo que hizo mal o lo que debe cambiar”, se le invita a hacer un proceso de reflexión estructurado sobre su propia labor y que sea el mismo quien identifique puntos de mejora.

Estas consideraciones se evidencian en las etapas del proceso de diseño y encuentran respaldo en la valoración de la idoneidad y el proceso reflexivo realizado. El diseño inicia con la etapa de análisis preliminares, en la cual se propone realizar una revisión bibliográfica y consultas a profesionales y a los propios participantes del proceso; para esto sólo se demanda la utilización de un buscador para referencias académicas y el uso de formularios en línea.

Con las consideraciones aportadas por los análisis preliminares se continúa con el diseño del proceso de instrucción, de manera similar a los planeamientos que los docentes hacen en su labor cotidiana. Se trata de planificar las actividades (de introducción, repaso, institucionalización, ensayos, refuerzo o otro alcance que se establezca a priori) con base en las decisiones tomadas y los objetivos pretendidos en la etapa previa. Es decir, los análisis preliminares dirigen y permean las elecciones de actividades que se diseñen y estas no están cimentadas en teorías o propuestas exógenas, todo es estructurado y preferentemente local.

La etapa de implementación está orientada por el diseño, la habilidad del docente y las elecciones locales (de la misma manera que una clase tradicional). Los resultados de los análisis preliminares no son garantía del éxito de la puesta en escena de la secuencia didáctica, pero si establecen parámetros y posibilidades de intervención flexibles que podrían necesitar modificaciones o actualizaciones para adaptarse a las particularidades de los participantes y el contexto en el que se implementa.

Finalmente, se propone una etapa de reflexión de la labor docente y la valoración de la idoneidad de las escogencias realizadas desde la faceta cognitiva, es decir reflexionar si el diseño, la implementación y la evaluación del proceso lograron acercar el conocimiento adquirido por los participantes al pretendido por el proceso de instrucción. En esta etapa se sugiere utilizar los indicadores del EOS (descritos e ilustrados en este proyecto), para guiar el proceso de reflexión docente. Una vez más la demanda al docente es únicamente comprometerse en el proceso de reflexión y realizar evaluaciones variadas en al menos tres momentos de la secuencia didáctica.

En términos generales, se concluye que la combinación de las etapas de diseño de la ID con el uso de indicadores de idoneidad del EOS resultó ser práctica, eficiente y permitió realizar un proceso de reflexión estructurado que culmina en una valoración positiva desde la faceta cognitiva. Además, el uso de los indicadores del EOS se constituye como una herramienta eficaz para identificar puntos de mejora en los aspectos en los que las evidencias mostraron valoraciones bajas.

Más específicamente podemos enumerar las siguientes conclusiones:

- **Sobre los análisis preliminares**

  La revisión de literatura y documentos oficiales así como los resultados de los cuestionarios, aplicados a docentes experimentados y a los participantes, permitieron establecer una visión general y una serie de considerandos para decidir cómo estructurar la secuencia didáctica.

  Entre los resultados obtenidos se tiene que aunque los estudiantes no han presentado un buen rendimiento académico a nivel universitario, estos reconocen que los documentos de la cátedra son adecuados y que el ambiente de clase les resulta ameno. Además, se sugiere introducir el tema de derivada de una función desde la perspectiva de variación y de manera gráfica a partir de la noción de recta tangente. Se descata también que según el programa del curso CDI se debe lograr la comprensión del concepto y realizar los cálculos de derivadas en dos semanas.

Por otro lado, la revisión de literatura y la consulta a docentes mostró que el concepto de función es el conocimiento previo necesario que se considera más deficiente. Otras problemáticas asociadas al concepto de derivada son la notación, el cálculo de límites, la interpretación del concepto en situaciones cotidianas y los procesos algebraicos necesarios para calcular derivadas tanto desde su definición como con el uso de reglas.

- **Sobre el diseño de la secuencia y supuestos a priori**

  A partir de la información de los análisis preliminares se diseñó una secuencia didáctica de tres sesiones en las que se incluyeron actividades de repaso de conocimientos previos, actividades en las que se pretendía promover procesos como modelización, argumentación y demostraciones. También se incluyeron ejercicios, sugerencias de trabajo extraclase y actividades de reforzamiento.

  El diseño siguió una ruta bastante tradicional: introducción del concepto (de dos formas), deducción de la fórmula, relación con variación y recta tangente, argumento y uso de reglas y finalmente regla de la cadena.

  Es importante reafirmar que este proyecto pretende rescatar la labor docente cotidiana, por tanto las actividades que se diseñaron mantienen esa intención. Los insumos que se obtuvieron en los análisis preliminares fueron amalgamados en actividades que guardasen similitud con clases remotas tradicionales.

- **Sobre la implementación**

Las opiniones de los participantes fueron muy favorables en lo referente al ambiente, la exposición, las actividades propuestas y los recursos de la cátedra. Esto se evidenció en los cuestionarios y entrevistas. Además, al final de cada sesión se aplicó un test de tres frases incompletas en las que se pudo constatar que la valoración a la implementación de cada sesión fue positiva.

Es importante acotar que las valoraciones, aunque positivas en todas las sesiones, mostraron un comportamiento a la baja. El porcentaje de "me gusta"descendió de 92.3 a 76.5 en solo tres sesiones y esto sugiere alguna inconformidad o cansancio conforme se avanzaba en la secuencia didáctica. Sin embargo, en ninguna de las sesiones se obtuvo una valoración de "no me gusta".

Por otro lado, el diseño de la secuencia didáctica incluyó una prueba específica en la que se utilizaron ejercicios de variada dificultad sobre el concepto de derivada en sus diferentes representaciones. Por ejemplo, algunos ejercicios demandaban solamente reconocer la notación adecuada o la variable independiente en alguna relación, mientras que otros demandaban manejo conceptual en representaciones diferentes (numérica-gráfica por ejemplo) y relaciones con otros objetos como la pendiente de una recta o el ritmo de cambio instántaneo.

Luego, de la revisión de los procedimientos presentados por los participantes se concluye que el rendimiento general en esta prueba fue adecuado. La revisión se realizó de manera similar a la que hace un docente sobre los procedimientos para resolver algún ejercicio de desarrollo en las pruebas escritas. Cada item tenía un cuadro en el que se explicitaba las demandas que presentaba y los indicadores para decidir si lo hecho por los participantes se consideraba adecuado, intermedio o deficiente.

- **Sobre la valoración de idoneidad cognitiva**

En primera instancia, es importante acotar que durante el proceso de revisión de literatura se notó un sentido difuso en lo referente a la evaluación y esto motivó proponer algunos ajustes en los componentes e indicadores de la faceta cognitiva en la teoría de idoneidad didáctica del EOS.

En la figura 2.2 puede verse que Evaluación no aparece como uno de los componentes de la faceta cognitiva. Esto se debe a que hasta ese momento, año 2021, se consideraba parte del componente Significados Personales. Sin embargo, la relevancia de la evaluación de los procesos de instrucción es reconocida por muchos autores y esto sugiere un tratamiento y análisis a mayor profundidad.

Como referencia, Godino et al. (2006) señala que para la valoración de la idoneidad cognitiva es necesario un seguimiento detallado de los alumnos y sugiere que las evaluaciones (cortas o no, escritas u orales) permitirían conocer sus significados previos y determinar si el proceso de instrucción fue eficiente. Sin embargo, muchas de las investigaciones sobre reflexiones valorativas de docentes apenas si mencionan esta componente. Por ejemplo, en Morales y Font (2017) de los tres casos documentados solo uno menciona una evaluación de tipo diagnóstica, en Morales y Font (2019) no se menciona la evaluación y en Font et al. (2018) la docente documentada se lamenta de la evaluación que realizó.

Por estas razones se decidió, similiar a lo propuesto por Castillo et al. (2022a), considerar Evaluación como una componente por si misma de la faceta cognitiva y asociarle los indicadores Evaluación integral (Ei), Evaluación temporal (Et) y Evaluación gradual (En) descritos en la Tabla 4.3.

Sobre la valoración específica de la secuencia didáctica implementada, la conclusión es que la idoneidad cognitiva es muy buena. Además, se debe enfatizar que los indicadores utilizados se constituyeron en un guía eficente para el proceso de reflexión sobre la labor docente.

De los 15 indicadores que se analizaron se concluyó que 11 de ellos tienen valoración verde (es decir con alto alcance), 3 de ellos amarilla (presente pero debe mejorar) y solamente 1 tuvo valoración roja (no está presente o bien tiene un alcance muy limitado). Las evidencias señalan que los indicadores presentes en la secuencia y que deben mejorar son Competencias (Ct), Procesos reflexivos (Pr) y Evaluación integral (Ei). Los dos primeros tienen valoraciones amarillas por la escasa participación de los estudiantes en la modalidad remota, lo que no permite generar evidencias. El último es una mejora que debe considerarse en el diseño pues no se incluyeron auto ni coevaluaciones.

El indicador con valoración roja es Estrategías correctas diversas (Ac). Como parte del proceso de reflexión se concluye que no es usual que las actividades que se planteen tengan formas diferentes de solución pero que es un indicador con una aporte valioso a los procesos de instrucción y por tanto deben integrarse en futuros diseños y rediseños.

5.2. Recomendaciones

Desde el punto de vista teórico se sugiere adoptar los ajustes a los indicadores que se presentan en este proyecto. Específicamente incluir el indicador Et que se describe como: la evaluación se realiza en diferentes momentos; inicial o exploratoria, de contacto o seguimiento y una final o valorativa. Esto implica que los valoraciones no se realicen en sesiones muy cortas, se sugiere que sean procesos un poco más largos en los que se puede determinar si realmente se acercaron al conocimiento pretendido.

También se recomienda seguir investigando para incluir indicadores nuevos, fusionar o descartar algunos que han sido propuestos por diversos autores hasta el momento. A los investigadores se les sugiere realizar proyectos como este que involucren las demás facetas de la teoría de Idoneidad Didáctica y que se amplíen los contextos de uso pues hay muy poco en clases remotas. Se reconocen estudios en facetas epístemica y cognitiva, sin embargo hay poco o nada en las facetas afectiva, interaccional, mediacional y ecológica. Además, aunque hay algunos estudios que involucran videos, las valoraciones a clases remotas o virtuales es un tema que está apenas floreciendo.

Al cierre de este proyecto se recomienda a los profesores en general considerar incluir en su labor el proceso de reflexión valorativa de su trabajo. Los docentes de matemáticas que ya reflexionan sobre sus escogencias didácticas tienen en los indicadores de la tabla 4.3 una guía para estructurar este proceso. La propia reflexión de la labor docente, estructurada y guiada por los indicadores presentados, es una excelente forma de potenciar los indicadores con valoraciones altas y para identificar puntos donde se puede mejorar.

Un detalle que debe mencionarse es la doble utilidad de los indicadores de idoneidad didáctica: pueden utlizarse para valorar los procesos de instrucción o pueden ser la guía de diseño de los procesos. Por tanto, se sugiere su uso en contextos de evaluación como prácticas profesionales de futuros docentes o bien como guía para los profesores en servicio.

Finalmente, se recomienda el uso la noción de Ingeniería Didáctica como referencia para diseñar las estrategias de intervención didáctica o procesos de instrucción, en combinación con los indicadores de idoneidad didáctica presentados en este documento. Además, se sugiere el uso de colores para los juicios de valor sobre los indicadores, pues lo más valioso es la reflexión y no resulta productivo desvirtuar el proceso con la asignación de escala numérica.

Bibliografía

[1] Aguilar, A., & Riestra, J. (2009). Una introducción algebraica y dinámica al concepto de derivada. En *El Cálculo y su Enseñanza*, Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional.

[2] Alsina A., & Domingo, M. (2010). Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13* (1), 7-32.

[3] Alvarado, L., & García, M. (2008). Características más relevantes del paradigma socio crítico: su aplicación en investigaciones de educación ambiental y de enseñanza de las ciencias realizadas en el Doctorado de Educación del Instituto Pedagógico de Caracas. Sapiems. *Revista universitaria de investigación*, *9* (2),187-202.

[4] Anido, M., Escola, R., & Héctor, E. (2009). Una ingeniería didáctica para la construcción de concepto de distancia de un punto a una recta en el espacio. Actas de la *VII Conferencia Argentina de Educación Matemática*, 133-143.

[5] Aroza, C., Godino, J.D., & Beltrán, P. (2016). Iniciación a la innovación e investigación educativa mediante el análisis de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad. *AIRES*,*6* (1).

[6] Arteaga, P., Batanero, C., & Gea, M. (2017). La componente mediacional del conocimiento didáctico- matemático de futuros profesores sobre estadística: un estudio de evaluación exploratorio. *Educaçao Matemática Debate*, *1* (1), 54-75.

[7] Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Una empresa docente y Grupo editorial Iberoamericano.

[8] Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Una empresa docente y Grupo editorial Iberoamericano.

[9] Artigue, M. (2002). Ingeniería Didáctica: ¿Cuál es su papel en la investigación didáctica de hoy? *Revue Internationale des Sciences de l'Education. Presses Universitaires du Mirail*, *8*.

[10] Artigue, M. (2009) *Didactical design in mathematics education*. In, C. Winslow (ed.), Nordic Reserarch in Mathematics Education. Sense Publishers. *Proceedings from NORMA*, *8*, 7-16.

[11] Artigue, M. (2020) *Didactic Engineering in Mathematics Education*. In, Lerman. S.(ed.), Encyclopedia of Mathematics Education. Second Edition. Springer. p. 202-206.

[12] Bastías, H., García, D., & Caro, C. (2019). Análisis de la idoneidad didáctica de las prácticas docente respecto a la resolución de problemas de matemática en profesores de secundaria de establecimientos PACE. *AIRES*, *9* (1),1-15.

[13] Beltrán, P. (2015) *Series y largometrajes como recurso didáctico en matemáticas en educación secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED).

[14] Beltrán, P., & Godino, J.D. (2017). Aplicación de Indicadores Idoneidad Afectiva en un proceso de enseñanza de probabilidad en educación secundaria. *Perspectiva Educacional. Formación de Profesores*, *56* (2), 92-116.

[15] Beltrán, P., Godino, J.D., & Giacomone, B. (2018). Elaboración de Indicadores Específicos de Idoneidad Didáctica en Probabilidad: Aplicación para la Reflexión sobre la Práctica Docente. *Bolema 32* (61), 526-548 .

[16] Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema, Rio Claro (SP)*, *32* (60), 255-278.

[17] Breda, A., & Lima, V.M.R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un master para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT*, *5* (1), 74-103.

[18] Briones, G. (2002). "*Metodología de la investigación cualitativa en las ciencias sociales. Programa de Especialización en teoría, métodos y técnicas de investigación social*. Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES), Colombia.

[19] Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches et Didactique des Mtehematiques*, *7* (2).

[20] Calzada, J. (2004) "*La técnica de las frases incompletas: revisión, usos y aplicaciones en procesos de orientación vocacional*".

[21] Cantoral, R. (1993). Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición. *Publicaciones Centroamericanas*, *7*, 391-410.

[22] Cantoral, R., & Mirón, H. (2000). Sobre el status de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3* (3), 265-292.

[23] Castillo, M. J., Burgos, M., & Godino, J. D. (2022a). Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la teoría de la idoneidad didáctica. *Educação e Pesquisa*, *48*.

[24] Castillo, M. J., Burgos, M., & Godino, J. D. (2022b). Guía de análisis de lecciones de libros de texto de Matemáticas en el tema de proporcionalidad. *Uniciencia*, *36* (1), e15399.

[25] Chacón, E., & Roldán, G. (2021). Factores que inciden sobre el rendimiento académico de los estudiantes de primer ingreso del curso Matemática General del Instituto Tecnológico de Costa Rica. *Uniciencia*, *35* (1), 1-21

[26] Chaves, C. (2015). *Aprendizaje significativo de la derivada en la escuela media a partir de una ingeniería didáctica diseñada en torno a la optimización de funciones.* Tesis de Licenciatura. Universidad Tecnológica Nacional.

[27] Chevallard, I. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Primera edición. Aique Grupo Editor S.A.

[28] Cobb, P., Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En Kelly, A.E., Lesh, R.A., Baek, J. Y. (Eds.) *Handbook of design research methods in education. Innovations in science, technology, engineering and mathematics and teaching.*[Cuaderno de diseño de métodos de investigación en educación. Innovaciones en ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas y enseñanza.] (68-95.). Routledge.

[29] D' Amore, B. (1999). Didattica della matematica come epistemología dell apprendiemento matematico. En *Elementi di Didattica della Matematica.*[Elementos de Didáctica de la Matemática], (Cap 2). Pitagora Editrice.

[30] D'Amore, B., & Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica de la didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10* (2).

[31] De Faria, E. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *1* (2).

[32] Dolores, C. (2000). El futuro del cálculo infinitesimal. Capítulo V: ICME-8 Sevilla, España. Grupo Editorial Iberoamérica. pp. 155-181.

[33] Dos Santos, C. (2012). *Idoneidad de procesos de estudio de cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y conocimiento profesional*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

[34] Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Una empresa docente y Grupo editorial Iberoamericano.

[35] Esqué, D., & Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad utilizando la herramienta idoneidad didáctica. *Uniciencia*, *35* (1), 38-54.

[36] Font, V., Breda, A., Seckel, M.J. & Pino-Fan, L. R (2018). Análisis de las reflexiones y valoraciones de una futura profesora de matemática sobre la práctica docente. *Ciencia y Tecnología*, *34* (2), 62-75.

[37] Godino, J. D., Batanero, C., Burgos, M., & Gea, M. (2021). Una perspectiva onto-semiótica de los problemas y métodos de investigación en educación matemática. *Revemop*, e202107, 1-30.

[38] Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., & Wilhelmi, M. (2006) *Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas*. Memoria X Simposio de SEIEM, Huesca, España.

[39] Godino, J.D., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques 26* (1), 39-88.

[40] Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., & Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *34* (2 y 3), 167-200.

[41] Godino, J. D, Wilhelmi, M., & Bencomo, D. (2006). Idoneidad de un proceso de instrucción matemática sobre la noción de función con estudiantes de ingeniería. Coloquio internacional para la enseñanza de la matemática para estudiantes de ingeniería. Pontificia Universidad Católica de Perú.

[42] Godino, J.D. (1993). Paradigmas, problemas y metodologías de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Quadrante* ,*2* (1), 1-10.

[43] Godino, J.D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas". *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *8* (11), 111-132.

[44] Godino, J. D. (2018) "Bases epistemológicas e instruccionales del Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática". Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es JDGodino_bases_epins_EOS.pdf (Versión ampliada y revisada de la segunda parte del trabajo titulado, Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático).

[45] Godino, J. D. (2021). De la ingeniería a la idoneidad didáctica en educación matemática. *Revemop*, e202129, 1-26.

[46] Godino, J. D. (2022). Emergencia, estado actual y perspectivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)*, *2* (2), 1-24.

[47] Goetz, J., & Le Compte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Morata.

[48] Güerci, V. (2016) *Probabilidad: una ingeniería didáctica para el desarrollo del pensamiento estocástico, en el primer año de la enseñanza secundaria. Aportes desde un estudio de caso*. Tesina. Universidad Nacional San Martín.

[49] Güichal, E., Guala, G., Malet, A., & Oscherov, V. (2006). La enseñanza del cálculo desde una ingeniería didáctica". Memorias *I REPEM*, Argentina. 81-91.

[50] Hummes, V., Font, V., & Breda, A. (2019). Uso Combinado del Estudio de Clases y la Idoneidad Didáctica para el Desarrollo de la Reflexión sobre la Propia Práctica en la Formación de Profesores de Matemáticas. *Acta Scientiae, Canoas*, *21* (1), 64-82.

[51] Malet, O., Giacomone, B., & Repetto, A. (2021). La idoneidad Didactica como herramienta metodologica: desarrollo y contextos de uso. *Revemop, Ouro Preto, Brasil*,(3), 1-23.

[52] Mateus, E. (2017). *Análisis Didáctico a un Proceso de Instrucción del Método de Integración por Partes.* Tesis doctorado. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.

[53] Monge, J. (2013). *Visualización del conocimiento como metodología didáctica en el aprendizaje y enseñanza de la matemática.* Tesis doctoral. Universitat de València, España.

[54] Morales, Y., & Araya, D. (2020). Apoyando a los futuros profesores a reflexionar. *Acta Sci. (Canoas)*, *22* (1), 88-112.

[55] Morales, Y. & Font, V. (2019). Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemática. *Educ. Pesqui.*, *45*, e189468.

[56] Neira, G.I (2017). *Dificultades, conflictos y obstáculos en las Prácticas Educativas Universitarias de iniciación al Cálculo Diferencial -PEUC- en estudiantes de ingeniería.* Tesis Doctorado. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

[57] Ortega, L., Guzmán, I., & Mena, A. (2006) ¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad? Universidad Católica de Valparaíso.

[58] Parra, F.J., & Ávila, R. (2015). Hacia una idoneidad didáctica en una clase de Física. *Lat. Am. J. Phys. Educ.*, *9* : 1-7.

[59] Pineda, E., de Alvarado, E., & de Canales, F. (1994) "*Metodología de la investigación. Manual para el desarrollo de personal de salud*. Segunda edición. Organización Panamericana de la Salud Estados Unidos.

[60] Pino-Fan, L., Godino, J., & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (Primera parte). *REVEMAT*. eISSN 1981-1322. Florianópolis (SC) *8* (2), 1-49.

[61] Pocholu, M., & Font, V. (2022). Herramientas y constructos del enfoque onto-semiótico del conocimiento e instrucción matemáticos para el diseño y análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje. En *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos.*, *Volumen 2*, 15-48. Ediciones UNGS.

[62] Posadas, P., & Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didactie*, *1*, 77-96.

[63] Ríos, Y. (2007). Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones. *Revista Omnia*, *13* (2), 120-157.

[64] Rivas, D., Fajardo, E., & Villalba, D (2011). Aplicación de juegos en clase, una mirada desde la ingeniería didáctica. *Ciencia e Ingeniería*, *32* (1), 97-104.

[65] Rivas, H. (2014). *Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

[66] Robles, M.G., Del Castillo, A.G., & Font, V. (2010). La función derivada a partir de la visualización de la linealidad local. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática*, *XIV*, 523-532.

[67] Robles, M. G., Del Castillo, A. G., & Font, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción sobre la derivada. *Educación Matemática*, *24* (1), 35-71.

[68] Robles, M.G., Tellechea, E., & Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática*, *26* (2), 69-109.

[69] Sanchez, M. (2006). Introducción a la derivada en un contexto tecnológico-variacional. *Revista Números*, *64*, 1-10.

[70] Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En Bishop, A. et al. International Handbook of Mathematics Education.

[71] Sneiderman, S. (2006). Las técnicas proyectivas como método de investigación y diagnóstico. Actualización en técnicas verbales: el Cuestionario Desiderativo. *Subjetividad y Procesos Cognitivos*, *8*, 296-331.

[72] Vasconcelos, D. M., & de., Carvalho, J. I. F. (2019). Idoneidade cognitivo-afetiva de uma sequência didática para a construção do conhecimento de razões trigonométricas por meio de uma uma história em quadrinhos. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana - Em Teia*, *10* (2), 1-24.

[73] Vides, S., & Rivera, J. (2015). La ingeniería didáctica en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística. *Revista Omnia*, *21* (2): 96-104.

[74] Vrancken, S., Engler, A., & Müller, D. (2008). Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultados. *Revista Premisa*, *10* (38): 36-46.

[75] Wertsch, J. (1995). *Vigotsky y la formación social de la mente*. Editorial Paidós Ibérica.

[76] Wilhelmi, M., Bencomo, D., & Godino, J. (2004). Criterios de idoneidad de un proceso de instrucción matemática. Aplicación a una experiencia de enseñanza de la noción de función. Memoria de XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática.

Anexos

Anexos A

Programa del curso

TEC | Tecnológico de Costa Rica

Programa del curso MA-1102

Cálculo Diferencial e Integral

Escuela a cargo del curso: Matemática.

Carreras a las que pertenece el curso:

- **Bloque 1**: Licenciatura en Ingeniería Electrónica, Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica, Licenciatura Ingeniería en Computadores.
- **Bloque 2**: Licenciatura en Ingeniería Ambiental, Licenciatura en Ingeniería en Construcción, Licenciatura en Ingeniería en Producción Industrial, Licenciatura en Mantenimiento Industrial, Licenciatura en Ingeniería en diseño industrial, Licenciatura en Agronegocios, Licenciatura en Ingeniería Forestal, Licenciatura en Ingeniería Física, Licenciatura en Seguridad Laboral e Higiene Ambiental.

I parte: Aspectos relativos al plan de estudios

1 Datos generales

Nombre del curso:	Cálculo Diferencial Integral
Código:	MA-1102
Tipo de curso:	Teórico
Electivo o no:	No
N° de créditos:	4
N° horas de clase por semana:	5
N° horas extraclase por semana:	7
% de las áreas curriculares:	No aplica
Ubicación en el plan de estudios:	Primer semestre (Bloque 1), segundo semestre (Bloque 2)
Requisitos:	MA-0101. Matemática General.
Correquisitos:	FI-1101. Física
El curso es requisito de:	MA-1103 Cálculo y Álgebra Lineal
Asistencia:	Libre
Suficiencia:	Sí
Posibilidad de reconocimiento:	Sí
Vigencia del programa:	II Semestre del 2021

2 Descripción general

El curso El curso MA 1102 Cálculo diferencial e integral es el segundo de la secuencia de cursos diseñados para brindar la formación matemática de las carreras de ingeniería que imparte el Instituto Tecnológico de Costa Rica.

La temática principal del curso se resume en los siguientes tópicos: cálculo proposicional, límite y continuidad de una función de una variable, derivada de una función de una variable, aplicaciones de la derivada de una función de una variable, la integral indefinida y la integral definida de una función de una variable, aplicaciones de la integral definida, e integrales impropias de primera especie y de segunda especie.

3 Objetivos

Generales:

1. Introducir el y la estudiante a la simbología propia de la Matemática.
2. Fomentar en el y la estudiante su capacidad de análisis para la realización de razonamientos deductivos.
3. Lograr que el estudiante adquiera conceptos de Cálculo Diferencial e Integral de funciones en una variable.
4. Lograr que el estudiante domine las técnicas fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral de una variable.
5. Lograr que el estudiante adquiera destrezas y habilidades en la resolución de ejercicios y problemas.
6. Fomentar en el estudiante una actitud crítica y creativa.
7. Lograr que el estudiante sea capaz de aplicar los conocimientos adquiridos a la resolución de problemas y situaciones concretas.
8. Fomentar en el estudiante la capacidad para comprender y desarrollar situaciones concretas.
9. Fomentar en el estudiante el interés permanente para la obtención de nuevos conocimientos.
10. Lograr que el estudiante adquiera terminología del Cálculo Diferencial e Integral para comprender y expresar el lenguaje de la ciencia y la tecnología.

Específicos por tema:

1. Cálculo proposicional:
   - 1.1) Comprender el concepto de proposición.
   - 1.2) Trasladar proposiciones dadas en lenguaje natural a lenguaje proposicional.
   - 1.3) Determinar el valor de verdad de una proposición.
   - 1.4) Probar equivalencias lógicas.

1.5) Demostrar que una proposición es consecuencia lógica de otras proposiciones.
1.6) Usar los cuantificadores existencial y universal, y sus propiedades.

2. Límite y continuidad de una función .

2.1) Comprenda el concepto de límite de una función.
2.2) Determine el límite de una función en un punto empleando los teoremas sobre límites.
2.3) Determine el límite al infinito de una función.
2.4) Comprenda el concepto de continuidad de una función.
2.5) Analice la continuidad de una función.

3. Derivada de una función

3.1) Comprenda el concepto de derivada de una función
3.2) Determine la derivada de funciones algebraicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversa.
3.3) Comprenda el concepto de diferencial de una función.
3.4) Determine las derivadas de orden superior de una función.
3.5) Determine la derivada de una función dada en forma implícita.

4. Aplicaciones de la derivada

4.1) Aplique el concepto de derivada a la resolución de problemas que involucren:
   - movimiento rectilíneo
   - razones de cambio
4.2) Represente en un plano cartesiano el gráfico de una función.
4.3) Resuelva problemas que involucren los conceptos de máximo y mínimo de una función.
4.4) Aplique el método de Newton para encontrar ceros de una función

5. Integral indefinida

5.1) Comprenda el concepto de integral indefinida de una función.
5.2) Determine la integral indefinida de una función, haciendo uso de las técnicas de integración.

6. Integral definida

6.1) Comprenda el concepto de integral definida de una función
6.2) Calcule la integral definida de una función, haciendo uso del teorema fundamental del cálculo
6.3) Calcule el área entre curvas, haciendo uso de la integral definida.
6.4) Calcule la longitud de una curva haciendo uso de la integral definida.

6.5) Aplique la integral definida a la resolución de problemas de campos de la Física

7. Integrales impropias

7.1) Comprenda el concepto de integral impropia.
7.2) Comprenda el concepto de convergencia de una integral impropia
7.3) Determine el carácter de convergencia de integrales impropias de primera y segunda especie haciendo uso de la definición.
7.4) Calcule el área bajo una curva haciendo uso de las integrales impropias.
7.5) Determine el carácter de convergencia de integrales impropias de primera especie haciendo uso de los criterios de convergencia.

Relación de los objetivos con los atributos de graduados

Nota: *Simbología de los atributos* → **CI**: Conocimiento de ingeniería, **TIE**: Trabajo individual y en equipo, **AC**: Aprendizaje continuo. *Simbología en el nivel de desarrollo* → **I**: Inicial, **M**: Intermedio, **A**: Avanzado.

Objetivos del curso	Atributos	Nivel de desarrollo por alcanzar
1. Introducir al estudiante a la simbología propia de la Matemática.	CI	I
2. Fomentar en el estudiante su capacidad de análisis para la realización de razonamientos deductivos.	TIE-AC	I
3. Lograr que el estudiante adquiera conceptos de Cálculo Diferencial e Integral de funciones de varias variables.	CI	I
4. Lograr que el estudiante domine las técnicas fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral de una variable.	TIE-CI-AC	I
5. Lograr que el estudiante adquiera destrezas y habilidades en la resolución de ejercicios y problemas.	TIE-CI	I
6. Fomentar en el estudiante una actitud crítica y creativa.	TIE-CI-AC	I
7. Lograr que el estudiante sea capaz de aplicar los conocimientos adquiridos a la resolución de problemas y situaciones concretas.	CI	I
8. Fomentar en el estudiante la capacidad para comprender y desarrollar situaciones concretas.	CI	I
9. Fomentar en el estudiante el interés permanente para la obtención de nuevos conocimientos.	CI	I
10.Lograr que el estudiante adquiera terminología del Cálculo Diferencial e Integral para comprender y expresar el lenguaje de la ciencia y la tecnología.	CI	I

4 Contenidos

1. **Cálculo proposicional** (5 horas[1])

1.1) Los sistemas formales: términos primitivos, axiomas y teoremas.

[1] El número de horas que se enuncia en cada contenido es aproximado.

1.2) Proposiciones atómicas
1.3) Operadores lógicos y proposiciones moleculares.
1.4) Tablas de verdad. Tautologías. Equivalencias tautológicas.
1.5) Predicados y términos. Cuantificadores existencial y universal.
1.6) Métodos de demostración en matemática:
   1.6.a) Prueba directa
   1.6.b) Prueba por contrapositiva
   1.6.c) Prueba por casos
   1.6.d) Prueba por contradicción.

2. **Límite y continuidad de una función** (10 horas)

   2.1) Límite de una función en un punto.
   2.2) Teorema sobre límites
   2.3) Cálculo de límites (algebraicos, exponenciales, logarítmicos y trigonométricos).
   2.4) Límites infinitos y límites al infinito
   2.5) Continuidad de una función
   2.6) Teoremas sobre continuidad de una función

3. **Derivada de una función** (15 horas)

   3.1) Derivada de una función en un punto.
   3.2) Derivada de una función
      - Interpretación geométrica
      - Movimiento rectilíneo. Velocidad instantánea
   3.3) Teoremas sobre derivadas
   3.4) Derivada de una función compuesta
   3.5) Derivada de las funciones: algebraicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversas.
   3.6) Diferencial de una función
   3.7) Derivadas de orden superior
   3.8) Derivación implícita.

4. **Aplicaciones de la derivada** (20 horas)

   4.1) Movimiento rectilíneo
   4.2) La derivada como razón de cambio
   4.3) Crecimiento y decrecimiento de funciones
   4.4) Máximos y mínimos de una función
   4.5) Regla de L'Hôpital

4.6) Concavidad y puntos de inflexión
4.7) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de una función
4.8) Cuadros de variación y trazo de curvas
4.9) Problemas de máximos y mínimos
4.10) Método de Newton para hallar ceros de funciones

5. **Integral indefinida** (12 horas)

5.1) Concepto de integral indefinida
5.2) Propiedades de la integral indefinida
5.3) Técnicas de integración
   - Integración por sustitución
   - Integración por partes
   - Integración con funciones
   - Integración por funciones parciales
   - Integración por sustitución trigonométrica
   - Sustitución $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

6. **Integral definida** (13 horas)

6.1) Integral definida
6.2) Teorema fundamental del cálculo.
6.3) Propiedades de la integral definida.
6.4) Aplicaciones de la integral definida.
   - Área entre curvas
   - Longitud de una curva
   - Trabajo efectuado por una fuerza
   - Ley Hooke
   - Fuerza ejercida por un líquido

7. **Integrales impropias** (5 horas)

7.1) Integrales impropias de primera y segunda especie.
7.2) Convergencia de una integral impropia.
7.3) Criterios de convergencia para integrales impropias de primera especie.

II parte: Aspectos operativos

5 Metodología de enseñanza y aprendizaje

Para el desarrollo del curso el profesor hará una exposición teórica de los temas y presentará ejemplos ilustrativos para complementar la teoría. Durante las clases debe buscarse la participación activa de los estudiantes.

De los estudiantes se espera una participación activa durante cada una de las clases, formulando preguntas y participando constantemente. El estudiante deberá dedicar tiempo extraclase al estudio y solución de ejercicios de la práctica, así como el desarrollo de cada una de las guías semanales que la Cátedra diseñó para el trabajo asincrónico. Cada semana la guía respectiva estará disponible en la **Comunidad de Cálculo Diferencial e Integral**, en el Tec-Digital.

6 Evaluación

El curso se evaluará mediante exámenes parciales, quices, tareas u otras asignaciones que el profesor(a) considere oportuno. La metodología de cómo se aplicarán los exámenes parciales, las tareas, quices u otras asignaciones, se les comunicará con suficiente anticipación.

La distribución del 100 % de la nota será la siguiente:

- Tres exámenes parciales con igual ponderación, con un valor total del 60 %.
- Tres quices de cátedra con igual ponderación, con un valor total del 12 %.
- Proyecto TIE y CI: 8 %
- Quices, tareas u otras asignaciones: 20 %. (mínimo 5 asignaciones)

El curso se aprueba con una nota final mayor o igual que 70. El estudiante con nota final menor o igual que 55 reprueba el curso. El estudiante con nota final igual que 60 o 65 tiene derecho a presentar un examen de reposición (en el que se puede evaluar cualquier contenido del curso). Si el estudiante aprueba el examen (con nota mayor o igual a 70), entonces aprueba el curso con una nota final igual a 70; en caso contrario, la nota final será igual a la que tenía antes de realizar el examen de reposición.

Adicionalmente, deben ser tomadas en cuenta las siguientes consideraciones:

- Las fechas de las pruebas parciales, de las pruebas extraordinarias y del examen de reposición, en conjunto con el periodo en que estas serán aplicadas, estarán disponibles con suficiente anticipación en la Comunidad de Cálculo Diferencial e Integral, en el TEC-Digital. La Coordinación procurará siempre recordar, mediante una noticia en el TEC-Digital, sobre cada una de dichas pruebas; sin embargo, es responsabilidad de cada estudiante revisar con anticipación la información publicada en la Comunidad.
- El reclamo de resultados de una prueba ante el profesor, según lo dispuesto en el artículo 72 del Reglamento del Régimen Enseñanza-Aprendizaje del Tecnológico

de Costa Rica y sus reformas, deberá ser presentado dentro de los tres días hábiles posteriores a la entrega de los resultados al grupo. Los otros recursos deberán respetar los plazos definidos en el mismo artículo. Toda apelación sobre los resultados de una prueba debe realizarse en los plazos y mediante los procedimientos establecidos en la reglamentación institucional vigente.

- Las fechas y hora de aplicación de los exámenes parciales, así como la metodología de cómo será aplicadas las pruebas, les serán comunicadas oportunamente. Según lo dispuesto en el artículo 10 del Reglamento del Régimen Enseñanza-Aprendizaje del Tecnológico de Costa Rica y sus reformas, los representantes estudiantiles deben velar por el cumplimiento de sus responsabilidades académicas por sobre otro tipo de actividad.
- Toda comunicación vía TEC-Digital o correo electrónico, es de carácter oficial.
- Para conocer aspectos específicos de los derechos y deberes de los estudiantes se recomienda consultar el Reglamento del Régimen Enseñanza-Aprendizaje del Tecnológico de Costa Rica y sus reformas.

Sobre EMERGENCIAS en el TEC

Al reportar una emergencia debe: indicar la dirección exacta donde se está presentando dicha emergencia, especificar la naturaleza de la emergencia, e indicar su nombre completo y número telefónico. Dependiendo de las instalaciones en que se encuentre (Cartago, San Carlos, Alajuela, San José o Limón) se tiene un número telefónico distinto y horarios específicos (de lunes a viernes), los cuales se le detallarán a continuación. En todos los casos, fuera del horario indicado deberá reportar la emergencia al 911.

- **Cartago:** de 07:30 a 19:30, llamar al 2550-9111 (o bien, a alguna de las extensiones: 9111 o 39111).
- **San Carlos:** de 07:00 a 16:00, llamar al número 2401-3090.
- **San José:** lunes, miércoles y viernes de 07:30 a 15:30, martes y jueves de 07:30 a 19:30, llamar al número 2550-9082.
- **Limón:** de 07:30 a 16:30, llamar al número 2550-9393.
- **Alajuela:** lunes y viernes de 13:00 a 17:00, martes y jueves de 08:00 a 17:00, llamar al número 2430-5730.

7 Bibliografía

Obligatoria

Disponibles en la comunidad de Cálculo Diferencial e Integral.

- Borbón, A. (2018). *Cálculo Diferencial e Integral* (1^{era} ed.).
- Mora, W. et al (2020). *Práctica del curso Cálculo Diferencial e Integral. Selección de ejercicios con respuestas*. Revista digital Matemática, Educación e Internet.

Complementaria

- Acuña, L. (2016). Cálculo diferencial e Integral. Cartago, Costa Rica: Publicaciones Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Agüero, E. & Fallas, J. (2011). Introducción al cálculo en una variable. Cartago, Costa Rica: Primera Edición. Editorial Tecnológica de Costa Rica.
- Agüero, E., Chavarría, J. & Fallas, J. (2007). Prácticas de cálculo diferencial e integral. Cartago, Costa Rica: Publicaciones Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Ávila, J. (2003). Ejercicios de Cálculo. Límites, derivadas e integrales. Cartago, Costa Rica: Tercera Edición. Editorial Tecnológica de Costa Rica.
- Edwards & Penney. (1989). Cálculo con geometría analítica. Prentice Hall. Editorial Hispanoamericana.
- Gutiérrez, Marco V. (2018) Cálculo Diferencial e Integral, Lógica.
- Hernández, Elsie. (2013) Cálculo Diferencial e Integral con Aplicaciones.
- Larson, Hostetler & Edwards: Cálculo, Volumen 1, 6ta. ed. McGrawhHill, 1999.
- Murillo, M. (2010). Introducción a la matemática discreta. Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica.
- Stewart, J. (1999) Cálculo de una variable, 4ta edición.
- Zill, Dennis G: Cálculo con geometría analítica, Grupo Editorial Iberoamérica, 1987.
- Zill, D. & Jacqueline M. (2011). Álgebra y trigonometría. McGraw – Hill. Publicaciones del Instituto Tecnológico de Costa Rica. (2011). Prácticas, Soluciones y Exámenes. Cálculo Diferencial e integral.

Software y sitios de interés

- Geogebra: `http://www.geogebra.org/`

8 Profesores

Grupo	Profesor y correo	Oficina[2]	Extensión	Consulta
5, 90	Adriana Solis asolis@itcr.ac.cr	Cartago I-11	2021	M: 7:30 a.m. a 9:30 a.m. M: 1:00 p.m. a 3:00 p.m.
1	Juan Pablo Prendas jpprendas@itcr.ac.cr	Cartago II-19	9423	K: 10:30 a.m. a 12 p.m. J: 9:30 a.m. a 11:00 a.m. J: 3 p.m. a 4:30 p.m.
2	Natalia Rodríguez (Coord) nrodriguez@itcr.ac.cr	Cartago I-01	9417	J: 9:30-11:30
3	Manuel Calderón mcalderon@itcr.ac.cr	Cartago I-07	2016	K: 2pm a 4pm M: 3pm a 5pm
4	Mario Villalobos mario.estu@gmail.com	Cartago I-05	2770	M: 12:30 p.m. a 1:30 p.m. V: 12:30 p.m. a 1:30 p.m.
6, 8	Luis Fernando Mora lmora@itcr.ac.cr	Cartago II-18	9424	K: 10:00 a 12:00 M: 7:30 a 8:30
7	Arturo Vásquez arvega@itcr.ac.cr	Cartago I-15	9420	L: 1:00 p.m. a 3:00 p.m. J: 9:00 a.m. a 11:00 a.m.
91	Anddy Alvarado aalvarado@itcr.ac.cr	Cartago II-15	2008	M: 10:00 a 12:00
10	Gabriela Roldán groldan@itcr.ac.cr	Cartago I-16	2007	J: 7:30- 9:30
40	Melvin Ramírez Bogantes meramirez@itcr.ac.cr	Cartago II-21	2435	K: 1:00 p.m. a 3:00 p.m. V: 10:00 a.m. a 12:00 p.m.
60	Emanuelle Soto esoto@itcr.ac.cr	Limón	9229	K: 1pm a 3:30pm J: 1pm-2:30pm

[2] En Cartago, las oficinas que comienzan con I quedan en el primer piso del edificio de la Escuela de Matemática, mientras que oficinas que comienzan con II en el segundo piso.

8 Profesores

Grupo	Profesor y correo	Oficina[3]	Extensión[4]	Consulta[5]
xx	Dylana Freer Paniagua dfeer@itcr.ac.cr	San Carlos CNE-013	3061	M: 1pm a 5pm
50, 51	Rodolfo Jiménez Céspedes rodjimenez@itcr.ac.cr	San Carlos CNE -08	3135	M: 7:30 a 11:30
9	Carlos Monge Madriz camonge@itcr.ac.cr	Cartago II-18	3135	M: 1:00 p.m. a 3:00 p.m.
11	Kendall Rodríguez kerodriguez@itcr.ac.cr	Cartago II -15	2008	J: 1:00 p.m. a 3:00 p.m. V: 2:00 p.m. a 4:00 p.m.

[3] En Cartago, las oficinas que comienzan con I quedan en el primer piso del edificio de la Escuela de Matemática, mientras que oficinas que comienzan con II en el segundo piso.

[4] En Cartago, para llamar marcar 2550 seguido de la extensión indicada.

[5] Para ser atendido en consulta sincrónica, el estudiante debe solicitar una cita a cualquier profesor(a) de la Cátedra, mediante correo electrónico. El profesor se pondrá de acuerdo con el estudiante sobre el día, la hora y el medio disponibles en el que se le atenderá. De manera adicional, el estudiante puede plantear directamente sus consultas por correo electrónico o algún otro medio asincrónico que el profesor(a) defina.

Anexos B

Cronograma del curso

CRONOGRAMA MA-1102 CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II SEMESTRE 2021					
#	**Fecha**	**Horas**	**Contenidos**	**Evaluación**	**Temas**
1	26/07 al 30/07	5	• Los sistemas formales: términos primitivos, axiomas y teoremas. • Proposiciones atómicas. • Operadores lógicos y proposiciones moleculares. • Tablas de Verdad. Tautologías. Equivalencias tautológicas. • Predicados y términos. Cuantificadores existencial y universal. • Métodos de demostración en matemática: Prueba directa (Reglas de inferencia)		Cálculo proposicion al
2	02/08 al 06/08	5	• Límite de una función en un punto. • Teoremas sobre límites. • Cálculo de límites (algebraicos y trigonométricos).		Límites y continuidad de funciones
3	09/08 al 13/08	5	• Límites infinitos y límites al infinito. • Cálculo de límites (exponenciales y logarítmicos).		
4	16/08 al 20/08	5	• Continuidad en un punto y en un intervalo. • Teoremas sobre continuidad de una función. • Derivadas (Introducción) o Interpretación geométrica. (pendiente de la recta tangente) o Movimiento rectilíneo. Velocidad instantánea		
5	23/08 al 27/08	5	• Derivada de una función en un punto. • Derivada de una función. • Reglas de derivación • Teoremas de derivación. • Derivada de las funciones: algebraicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas	Quiz 1 Cátedra Lunes 23 agosto **Parcial 1** (25h)	Derivada de una función
6	30/08 al 03/09	5	• Derivadas de las funciones trigonométricas inversas. • Derivada de funciones compuestas (regla de la cadena) • Concepto de diferencial de una función. • Derivadas de orden superior.	AC Quiz1 Martes 31 agosto	
7	06/09 al 10/09	5	• Derivación implícita. • Recta tangente y normal a una curva. • Derivación logarítmica.		
8	13/09 al 17/09	5	• Movimiento rectilíneo • Problemas con razón de cambio (tasas relacionadas). • Cálculo de límites mediante Regla de L' Hôpital, formas indeterminadas: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0\cdot\infty,\ \infty^0, 0^0, 1^\infty$.		Aplicacione s de la derivada
9	20/09 al 24/09	5	• Crecimiento y decrecimiento de funciones. • Máximos y mínimos de una función. • Concavidad y puntos de inflexión. Criterio de la primera derivada. • Criterio de la segunda derivada.		
10	27/09 al 01/10	5	• Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de una función. • Cuadro resumen y trazo de la gráfica. • Problemas de optimización.	Quiz 2 Cátedra Semana 10 **Parcial 2** (25h)	

11	04/10 al 08/10	5	• Definición de antiderivada. Integral indefinida • Propiedades. Reglas básicas de integración. • Integrales por sustitución.	**AC Quiz 2** Martes 5 octubre	Integración de funciones, definidas e indefinidas
12	11/10 al 15/10	5	• Integración por partes • Integración de funciones trigonométricas.		
13	18/10 al 22/10	5	• Integración por sustitución trigonométrica • Integración por fracciones parciales.	**Proyecto TIE y CI** Lunes 18 octubre	

14	25/10 al 29/10	5	• Integral definida
			  o Aproximación de áreas mediante sumas de Riemann
			  o Definición de integral definida y evaluación de integrales
			• Propiedades de la integral definida
			• Teorema Fundamental del cálculo (Parte 1 y Parte 2)		

15	01/11 al 05/11	5	• Cálculo de integrales definidas (Regla de Barrow) • Aplicación de la integral definida: o Área entre curvas.	**Quiz 3 Cátedra Semana 15**	
16	08/11 al 12/11	5	• Integrales impropias de primera y segunda especie. • Convergencia de integrales impropias utilizando la definición.	**Parcial 3** (30h)	Integrales impropias
17	15/11 al 19/11		Preparación para III Parcial		
18	22/11 al 26/11		III Parcial		
	01/12		**Reposición**		
Entrega de Actas: 02/12/21					

Feriados:

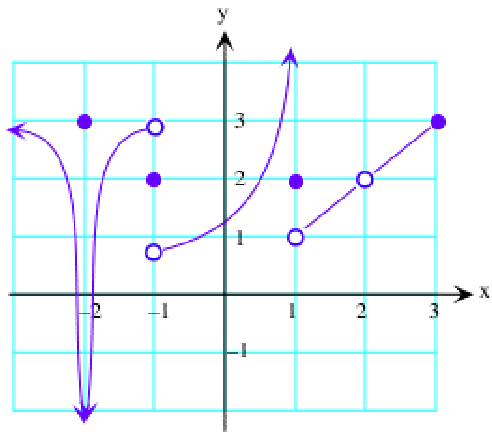
Lunes 26 de julio: Anexión del Partido de Nicoya
Lunes 2 de agosto: Día de Nuestra Señora de los Ángeles
Lunes 13 de setiembre: Independencia nacional

Anexos C

Consignas de la cátedra referidas a derivada

Semana 4

Continuidad de una función



Descripción para la semana:

En esta semana se trabajará el concepto de continuidad de una función en un punto y en un intervalo, así como presentación de algunos los teoremas de continuidad. Además, se realizará una introducción al tema de derivadas, con el fin de comprender este nuevo concepto.

Para llevar a cabo el estudio de los tópicos descritos anteriormente, deberá invertir como mínimo **8 horas de estudio.**

Método de trabajo:

Material

Folleto: Cálculo Diferencial e Integral . Autor: Alexander Borbón. Edición 2018.

Folleto: Práctica del curso CDI.

Pdf Clase pregrabada S4

Vídeos

- **Vídeo:** Clase pregrabada S4 (parte 1)
- **Vídeo** Clase pregrabada S4 (parte 2)
- **Vídeo 1:** Continuidad en un punto.
- **Vídeo 2:** Continuidad de una función en un punto
- **Vídeo 3:** Continuidad en un intervalo
- **Vídeo 4:** Ejemplo 1 continuidad.
- **Vídeo 5:** Ejemplo 2 continuidad.
- **Vídeo 6:** Interpretación geométrica
- **Vídeo 7:** Movimiento rectilíneo. Velocidad instantánea
- **Vídeo 8:** Ejm: Derivada por definición

Evaluación de cátedra

Quiz 1.

Temas:

- Reglas de inferencia.
- Límite de una función en un punto.
- Teoremas sobre límites.
- Cálculo de límites.
- Límites infinitos y al infinito.
- Límites exponenciales y logarítmicos.

Se habilita: lunes 23 de agosto, 6 a.m.

Se cierra: lunes 23 de agosto, 11:55p.m.

El enlace al quiz se publicará en la comunidad.

Contenidos:

1. Continuidad de una función en un punto.
2. Continuidad de una función en un intervalo.
3. Derivada de una función en un punto.
4. Derivada de una función.
   - Interpretación geométrica.
   - Movimiento rectilíneo. Velocidad instantánea.

Objetivos:

1. Comprender del concepto de continuidad de una función en un punto y en un intervalo.
2. Determinar si una función es continua en un punto o en un intervalo.
3. Comprender el concepto de derivada de una función.

Se recomienda organizar su tiempo de manera que pueda trabajar por **etapas** con el fin de cubrir todos los contenidos y actividades, recuerde que el objetivo primordial es aprender y tener un dominio del tema en estudio. Para ello, realice la siguiente secuencia de actividades:

★ Actividad 1 (Clase semanal sobre Continuidad e introducción a las derivadas)

En esta actividad, deberá de observar de manera completa y detallada los vídeos: **Vídeo:** Clase pregrabada S4 (parte 1) y **Vídeo** Clase pregrabada S4 (parte 2), los cuales corresponden a la clase asincrónica de la semana.

★ Actividad 2 (Continuidad de funciones)

Realice lo siguiente:

1) De manera introductoria, observe de manera detallada los vídeos:

- **Vídeo 1:** Continuidad en un punto.
- **Vídeo 2:** Continuidad de una función en un punto
- **Vídeo 3:** Continuidad en un intervalo

2) Estudie del **Folleto:** Cálculo Diferencial e Integral la sección 3, específicamente las páginas de la 42 a la 44 (hasta el ejemplo 61). Preste especial atención al teorema 4 y al teorema 5.

3) Observe de forma detallada los siguientes ejemplos:

- **Vídeo 4:** Ejemplo 1 continuidad.
- **Vídeo 5:** Ejemplo 2 continuidad.

2) Estudie del **Folleto:** Cálculo Diferencial e Integral la sección 3, específicamente los ejemplos del 62 al 67 (páginas de la 44 a la 46). Intente ir anotando los ejemplos en el cuaderno y resolverlos sin ver la solución.

★ Actividad 3 (El problema de la recta tangente)

En este apartado se empezará el estudio del tema de derivadas, específicamente se trabajará el problema de la recta tangente. Para ello se le solicita llevar a cabo las siguientes actividades:

1) Observe los siguientes vídeos:

- **Vídeo 6:** Interpretación geométrica
- **Vídeo 7:** Movimiento rectilíneo. Velocidad instantánea

2) Realice un estudio independiente de la sección **4.1** (páginas: 47 - 50) del **Folleto:** Cálculo Diferencial e Integral .

★ Actividad 4 (Derivada como una función)

En esta sección estudiará como determinar la derivada de una función dado su criterio, usando la definición.

1) Realice un estudio independiente de la sección **4.2** (páginas: 50-51) del **Folleto:** Cálculo Diferencial e Integral .

2) Observe el vídeo:

- **Vídeo 8:** Ejm: Derivada por definición.

★ Actividad 5 (Práctica):

Del **Folleto:** Práctica del curso CDI, realice los siguientes ejercicios:

- Continuidad
  2.5.2: 2.
  2.5.3: (1, 2)
  2.5.4: (4, 5)
  2.5.6
  2.5.7 : (a, b)

- Derivadas por definición
  3.1.1: (2, 3, 6, 9).

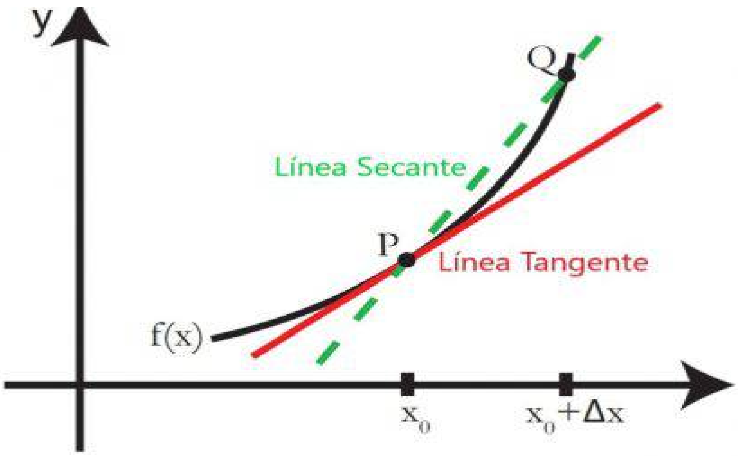
Prácticas de cátedra

- **Práctica Límites 1** . Estará habilitada hasta el domingo 22 de agosto a las 11:55p.m.
- **Práctica Límites y Continuidad** . Estará habilitada hasta el domingo 29 de agosto a las 11:55p.m.

Para acceder a las prácticas virtuales de cátedra haga clic sobre las palabras resaltadas en negrita.

Semana 5

Derivación



Contenidos:

1. Teoremas sobre derivadas.
2. Derivadas de las funciones: algebraicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas.

Objetivos:

Lograr que el estudiante:

1. Determine la derivada de funciones algebraicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

Descripción para la semana:

En esta semana verá como determinar la derivada de una función en un punto y en general, las derivadas básicas y algunas reglas para el cálculo de las mismas.

A continuación, se detallan las actividades que deberá realizar esta semana. Tome en cuenta que para llevarlas a cabo debe invertir unas **8 horas de estudio**.

Método de trabajo:

Materiales

- **Folleto:** Cálculo Diferencial e Integral.
- **Folleto:** Práctica del curso CDI.
- **Resumen:** Semana 5.

Vídeos

- **Vídeo:** Clase pregrabada S5

Pdf Clase pregrabada S5

- **Vídeo 1:** Derivabilidad y continuidad
- **Vídeo 2:** Derivada de la función seno
- **Vídeo 3:** Derivada de la función coseno

Evaluación de cátedra

Quiz 1.

Se habilita: lunes 23 de agosto, 6 a.m.

Se cierra: lunes 23 de agosto, 11:55p.m.

Disponen de una hora para realizar la actividad y un sólo intento.

El enlace al quiz se publicará en la comunidad.

Se recomienda organizar su tiempo de manera que pueda trabajar por **etapas** con el fin de cubrir todos los contenidos y actividades, recuerde que el objetivo primordial es aprender y tener un dominio del tema en estudio. Para ello, realice la siguiente secuencia de actividades:

★ Actividad 1 (Clase semanal)

Observe de manera completa y detallada el **Vídeo:** Clase pregrabada S5, el cual corresponde a la clase asincrónica de la semana.

★ Actividad 2 (Derivada como una función)

En esta sección estudiará un teorema que relaciona el concepto de diferenciable en $x = a$ con el de continuidad en $x = a$.

1) Realice un estudio independiente de la sección **4.2** (páginas: 52-54) del **Folleto:** Cálculo Diferencial e Integral.

2) Observe el vídeo:

- **Vídeo 1:** Derivabilidad y continuidad.

★ Actividad 3 (Propiedades de derivadas)

Esta sección corresponde al estudio de las reglas de derivación. Para esto, realice cada una de las siguientes actividades:

1) Estudie de manera independiente la sección **4.3** (páginas: 55 - 59) del material de referencia: **Folleto:** Cálculo Diferencial e Integral.

2) De manera de práctica, realice los ejemplos que se presentaron en esta sección. Para este estudio puede utilizar el **Resumen:** Semana 5.

3) Observe los siguientes vídeos:

- **Vídeo 2:** Derivada de la función seno.
- **Vídeo 3:** Derivada de la función coseno.

4) Estudie de manera independiente la derivada de las funciones trigonométricas, sección **4.3.5** (páginas: 59-61) del material de referencia: **Folleto:** Cálculo Diferencial e Integral.

★ Actividad 4 (Práctica):

Del **Folleto:** Práctica del curso CDI, realice:

- Cálculo de derivadas
  3.2.1: (3, 6, 12, 20, 21, 22, 23, 26).

Nota: Estos ejercicios son los recomendados de la sección, sin embargo, es necesario ampliar dicha lista para estar preparados para el examen.

Prácticas de cátedra

- **Práctica Límites y Continuidad** . Estará habilitada hasta el domingo 29 de agosto a las 11:55p.m.

Para acceder a las prácticas virtuales de cátedra haga clic sobre las palabras resaltadas en negrita.

Semana 6

Derivación

Contenidos:

1. Derivadas de funciones trigonométricas inversas.
2. Derivada de una función compuesta.
3. Diferencial de una función.
4. Derivada de orden superior.

Objetivos:

Lograr que el estudiante:

1. Determine la derivada de funciones trigonométricas inversas.
2. Determine la derivada de una función compuesta.
3. Comprenda el concepto de diferencial de una función.
4. Determine las derivadas de orden superior de una función.

Descripción para la semana:

En esta semana se continuará el tema de derivadas, repasará las reglas de derivación para las funciones trigonométricas y conocerá las reglas para derivar las funciones trigonométicas inversas. Posteriormente, verá como determinar la derivada de una función compuesta mediante el uso de la regla de la cadena, el concepto de diferencial y por último verá como determinar derivadas de orden superior.

A continuación, se detallan las actividades que deberá realizar esta semana. Tome en cuenta que para llevarlas a cabo debe invertir unas **8 horas de estudio**.

Método de trabajo:

MATERIAL PARA UTILIZAR

- **Folleto:** Cálculo Diferencial e Integral.
- **Folleto:** Práctica del curso CDI.
- **Resumen:** Semana 6.

VIDEOS

- **Vídeo:** Clase pregrabada S6 (I Parte)

Pdf Clase pregrabada S6 (I Parte)

- **Vídeo:** Clase pregrabada S6 (II Parte)

Pdf Clase pregrabada S6 (II Parte)

- **Vídeo 1:** Regla de la cadena
- **Vídeo 2:** Regla de la cadena: Ej 1
- **Vídeo 3:** Regla de la cadena: Ej 2
- **Vídeo 4:** Regla de la cadena: Ej 3
- **Vídeo 5:** Diferencial de una función
- **Vídeo 6:** Segundas derivadas

Se recomienda organizar su tiempo de manera que pueda trabajar por **etapas** con el fin de cubrir todos los contenidos y actividades, recuerde que el objetivo primordial es aprender y tener un dominio del tema en estudio. Para ello, realice la siguiente secuencia de actividades:

★ Actividad 1 (Clase semanal)

Observe de manera completa y detallada los vídeos **Vídeo:** Clase pregrabada S6 (I Parte) y **Vídeo:** Clase pregrabada S6 (II Parte), los cuales corresponden a la clase asincrónica de la semana.

★ Actividad 2 (Derivadas de funciones trigonométricas inversas)

Realice un estudio independiente de la sección **4.3.6** (páginas: 61-62) del **Folleto:** Cálculo Diferencial e Integral.

1. Haga un resumen de las derivadas de las funciones trigonométricas inversas.
2. Estudie los ejemplos 92 y 93.

★ Actividad 3 (Regla de la cadena)

1) Observe los vídeos:

- **Vídeo 1:** Regla de la cadena.
- **Vídeo 2:** Regla de la cadena: Ej 1.
- **Vídeo 3:** Regla de la cadena: Ej 2.
- **Vídeo 4:** Regla de la cadena: Ej 3.

2) Realice un estudio independiente de la sección **4.3.7** (páginas: 62-64) del **Folleto:** Cálculo Diferencial e Integral.

3) De manera de práctica, realice los ejemplos que se presentaron en esta sección. Para este estudio puede utilizar el **Resumen:** Semana 6.

★ Actividad 4 (Diferencial de una función)

1) Observe el siguiente vídeo:

- **Vídeo 5:** Diferencial de una función.

2) Estudie de manera independiente la sección **4.4** (páginas: 70-71) del material de referencia: **Folleto:** Cálculo Diferencial e Integral.

★ Actividad 5 (Derivadas de orden superior):

Realice cuidadosamente, cada una de las actividades que se solicitan:

1) **Estudio independiente del tema:** Basándose en el **Folleto:** Cálculo Diferencial e Integral. Estudie la sección **4.3.8** (páginas 64 y 65). Preste especial atención a los ejemplos, trate de ir tomando nota en su cuaderno.

2) Observe con detalle el **Vídeo 6:** Segundas derivadas.

★ Actividad 6 (Práctica):

Del **Folleto:** Práctica del curso CDI, realice:

- Cálculo de derivadas
  3.2.1: (18, 20,26, 27).
- Regla de la cadena
  3.3.1: (2, 5, 6, 9, 12, 15, 18, 25, 28).
  3.3.2: (1, 4).
- Valor numérico
  3.4.1: (1, 3, 8, 10, 12a, 13b, 15).
- Conceptos teóricos
  3.5.1: (1, 9, 10).

Nota: Estos ejercicios son los recomendados de la sección, sin embargo, es necesario ampliar dicha lista para estar preparados para el examen.

Prácticas de cátedra

- **Práctica Lógica** .
- **Práctica Límites 1** .
- **Práctica Límites y Continuidad** .
- **Práctica Parcial 1** .

Estás prácticas estarán habilitadas durante II semestre 2021.

Para acceder a las prácticas virtuales de cátedra haga clic sobre las palabras resaltadas en negrita.

Anexos D

Cuestionario a Docentes

Consulta a docentes sobre enseñanza del concepto de derivada.

La información que se solicita se manejará de forma confidencial y corresponde a la etapa de análisis preliminares en la concepción de un secuencia didáctica para la enseñanza del concepto de derivada de una función.

* Indica que la pregunta es obligatoria

1. Universidad en la cual labora (o en la que laboró o en la que tiene la mayor parte de su jornada laboral) *

2. ¿Cuántas veces ha impartido algún curso en el que haya enseñado el concepto de derivada? *

Marca solo un óvalo.

- Menos de 5
- Entre 5 y 10 veces
- Más de 10 veces

3. Según su experiencia, ¿cuáles son las principales dificultades que presentan los estudiantes para apropiarse del concepto de derivada? *

4. ¿Considera que los estudiantes que en este momento (efecto de la pandemia y clases remotas) deban aprender el concepto de derivada tienen alguna dificultad adicional? ¿Cuáles? *

5. Según su experiencia, ¿cómo recomendaría introducir el concepto de derivada? *

Anexos E

Cuestionario Inicial a Estudiantes

Cuestionario a estudiantes

El propósito del instrumento consiste en recopilar información para valorar aspectos esenciales para la puesta en escena de una secuencia didáctica. Los fines son exclusivamente de investigación, por lo que se le solicita que sus respuestas sean lo más claras y precisas posibles. Se le agradece su colaboración con la información brindada, la cual será tratada de manera anónima y con absoluta confidencialidad. Siéntase en libertad de expresar sus ideas, preferencias, inquietudes y sugerencias con total transparencia.

* Indica que la pregunta es obligatoria

1. Nombre completo *

2. En su experiencia en educación secundaria, ¿cuál fue su rendimiento académico general? *

Marca solo un óvalo.

- Entre 90 y 100
- De 80 a menos de 90
- De 75 a menos de 80
- De 70 a menos de 75

3. En su experiencia en educación secundaria, ¿cuál fue su rendimiento académico en la asignatura de matemáticas? *

Marca solo un óvalo.

- Entre 90 y 100
- De 80 a menos de 90
- De 75 a menos de 80
- De 70 a menos de 75

4. Indica las razones que consideras explican por qué fue así tu rendimiento académico en matemáticas en secundaria. *

5. En el curso Matemática General, ¿en cuál de las siguientes categorías estuvo su calificación final? (Si tuvo que repetir el curso de Matemática General refiérase a la ultima calificación obtenida) *

Marca solo un óvalo.

- Entre 90 y 100
- De 80 a menos de 90
- De 75 a menos de 80
- De 70 a menos de 75

6. Indica las razones que consideras explican por qué fue así tu rendimiento académico en Matemática General. *

7. ¿Cuál es su opinión acerca de cómo impartían lecciones en secundaria sus profesores de matemáticas? *

8. ¿Cuál es su opinión acerca de cómo impartió sus clases su profesor(a) de Matemática General? (Si estuvo en el curso en más de una ocasión, refiérase a todos sus profesores) *

9. Asigne, según su criterio, la valoración que merece el curso Cálculo Diferencial e Integral, que está cursando en este momento, en los siguientes aspectos. *

Marca solo un óvalo por fila.

	Muy en desacuerdo	En desacuerdo	Neutral	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
Las clases transcurren de forma amena.	⬭	⬭	⬭	⬭	⬭
Existe un compromiso por parte del docente por generar conocimientos significativos en los estudiantes	⬭	⬭	⬭	⬭	⬭
La participación de los estudiantes durante la clase es activa.	⬭	⬭	⬭	⬭	⬭
Los contenidos del curso son un aporte necesario para el ejercicio de su carrera.	⬭	⬭	⬭	⬭	⬭
El estudiante tiene la libertad de externar sus dudas y aportes a la clase.	⬭	⬭	⬭	⬭	⬭
Los estudiantes están en	⬭	⬭	⬭	⬭	⬭

están en disposición de trabajar por lograr un aprendizaje real de los contenidos del curso

disposición de trabajar por lograr un aprendizaje real de los contenidos del curso

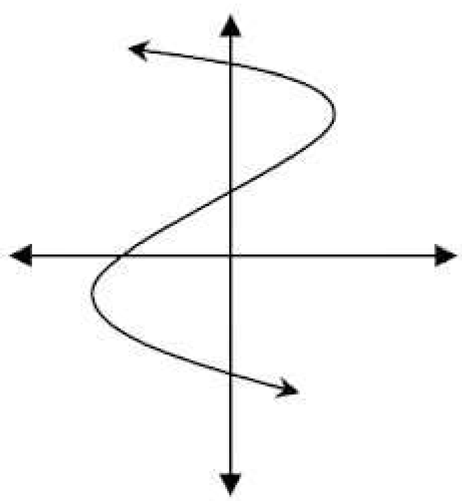
10. Según su criterio, indique el nivel en el que ubicaría cada aspecto del curso Cálculo Diferencial e Integral que está cursando en este momento. *

Marca solo un óvalo por fila.

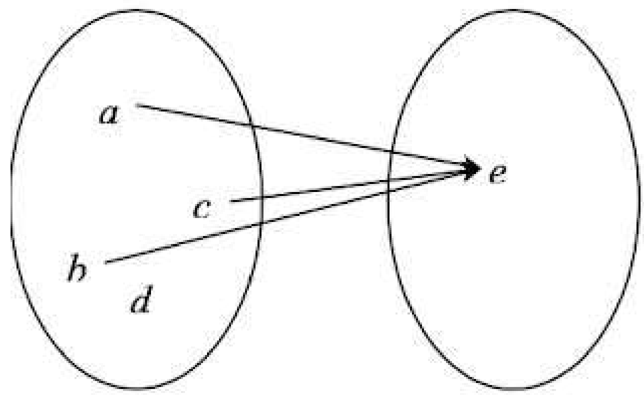
	Deficiente	Medio	Satisfactorio	Muy bueno	Excelente
El nivel académico del curso.					
Interacción con otros compañeros.					
Interacción con el docente.					
Recursos didácticos disponibles en el curso					
Herramientas tecnológicas utilizadas en el curso					
Espacio físico donde recibe las clases.					

11. ¿Qué expectativas académicas tiene respecto al curso Cálculo Diferencial e Integral? *

12. ¿Consideras que en la imagen siguiente está representada una función? Argumente su posición *



13. ¿Consideras que en la imagen siguiente está representada una función? Argumente su posición *

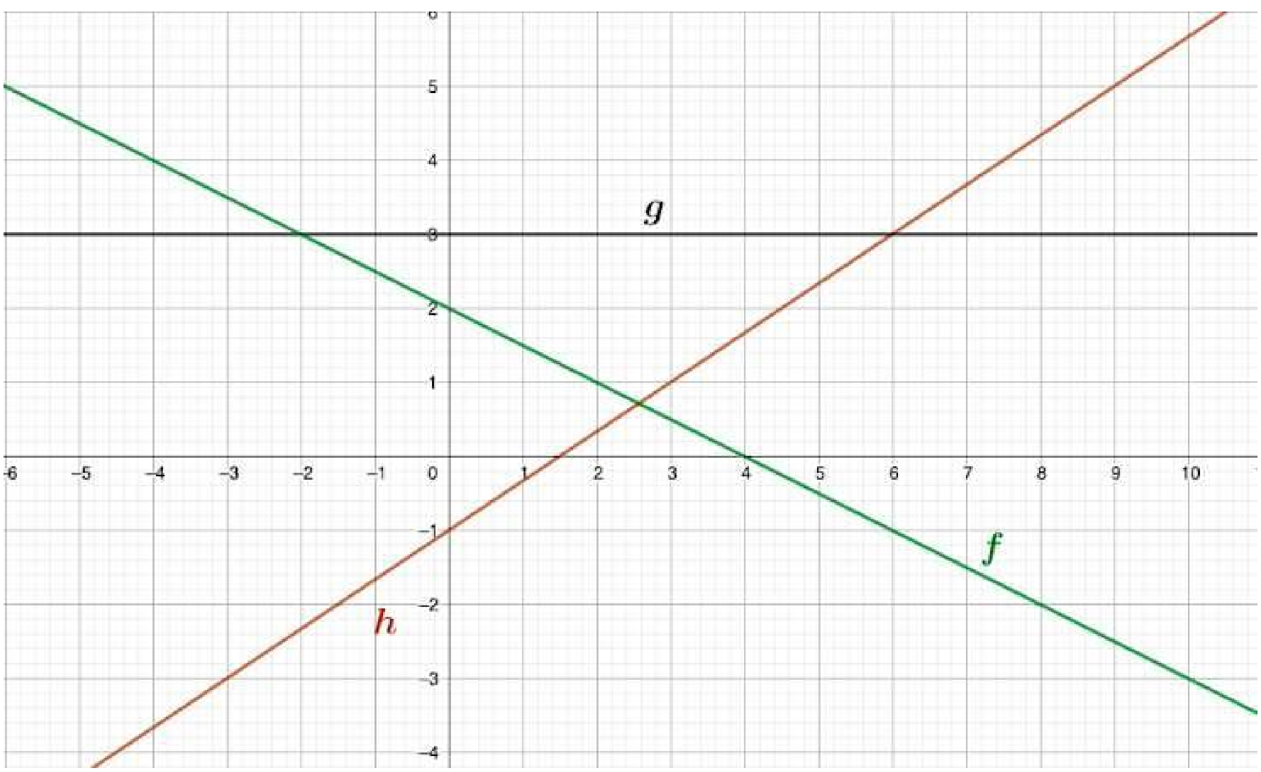


14. ¿Consideras que en la imagen siguiente está representada una función? Argumente su posición *

$$y^2 = x$$

15. Considere el siguiente enunciado: "Un conjunto f de pares ordenados en el que si (a, b) y (c, b) pertenecen a f entonces a = c" ¿Corresponde este enunciado con la definición de función? Argumente *

16. Calcule la pendiente de cada una de las funciones representadas en la siguiente gráfica. *



17. ¿Cómo explicarías que la función con el criterio dado en la imagen tiene un valor minimo? *

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a > 0$$

18. Calcule el siguiente límite *

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$$

19. Calcule el siguiente límite *

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

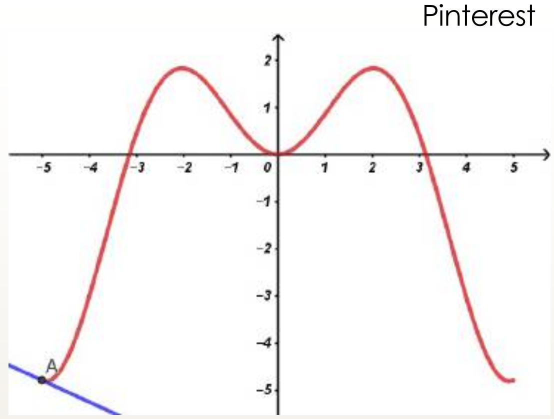
20. Explica cómo podría suceder que el límite de una función en un punto particular no exista. Es decir, *

$$\nexists \lim_{x \to a} g(x)$$

Anexos F

Secuencia Didáctica

Pinterest



TEC | Tecnológico de Costa Rica

Derivadas.

Definición.

Cálculo Diferencial e Integral

II-2021

Proverbios 20:11

Construyendo una pared!

Variables involucradas

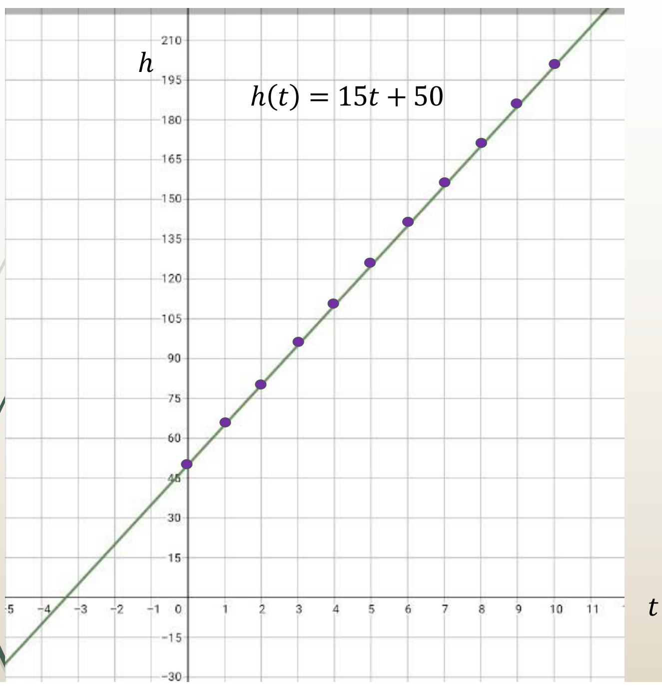
t: cantidad de tablas colocadas

h: altura en centímetros de la pared

Función modeladora

$h(t) = 15t + 50$

Construyendo una pared!



Modelo

$h(t) = 15t + 50$

$t \in \mathbb{Z}, 0 \leq t \leq 10$

¿Cuánto incrementa la altura de la pared por cada tabla que se agrega?

¿Podría modelarse una situación inversa (la pared ya tiene los 2 m y se empiezan a quitar tablas)? Explique

¿Crees que cualquier modelo de crecimiento o de decrecimiento debe ser lineal?

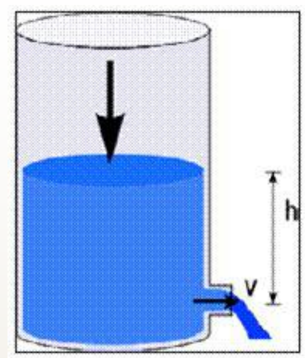
¿Puedes dar ejemplo de alguna situación donde haya tanto crecimiento como decrecimiento?

Vaciar un tanque!

Para dar mantenimiento a un tanque de forma cilíndrica con capacidad de 8π m^3 se inicia el proceso de extracción del agua. Además, se hace un registro de los tiempos (t: en minutos) y la altura (h: en metros) del nivel del agua. La información obtenida se presenta en la tabla

t	h
0	2
1	1,6
2	1,2
3	0,8
4	0,4
5	0

Física virtual



a) ¿Cuánto varía la altura por cada minuto que pasa?

b) ¿Puede hablarse de incrementos en la altura conforma pasa el tiempo?

c) Si el mantenimiento del tanque consiste en aplicar una capa de sellador en la base, ¿Cuánta superficie debe cubrirse?

d) Construye una gráfica a partir de la variación de la altura por unidad de tiempo.

e) ¿Que cantidad de m^3 de agua fue retirada entre los minutos 2 y 4?

f) ¿Qué altura tendrá el nivel del agua cuando hayan transcurrido 2,6 minutos?

Esquiando en la nieve!

Desde un punto a una distancia de 10 metros de una cabaña un hombre empieza a esquiar en la montaña. Los datos de la tabla muestran la distancia *s* en metros a la que se encuentra el esquiador de la cabaña después de *t* segundos de haber iniciado el viaje.

t	0	2	10	15	30	35	60
s	10	15	65	72	90	95	120

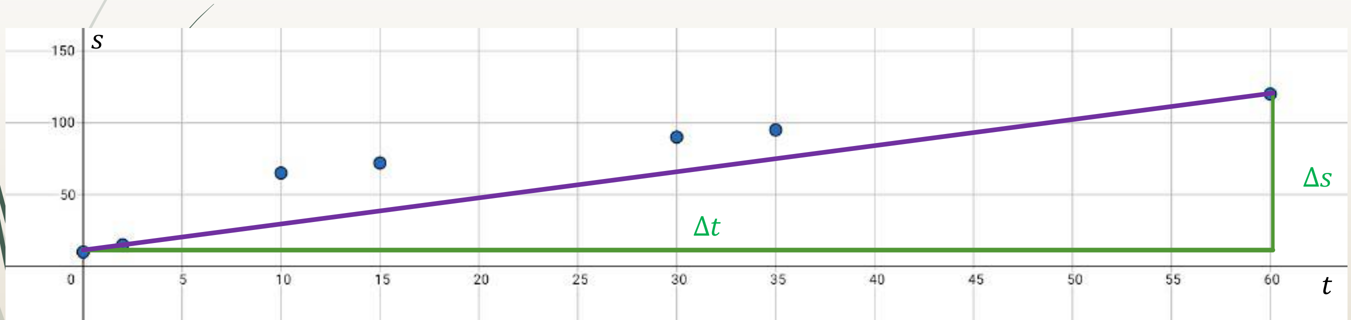
¿Cuál es la velocidad a la que se está desplazando el esquiador a los 10 segundos de iniciado su viaje? ¿a los 20 segundos? ¿qué tal a los 5 segundos?

¿Cuál es la velocidad a la que se está desplazando el esquiador a los 10 segundos de iniciado su viaje?

t	0	2	10	15	30	35	60
s	10	15	65	72	90	95	120

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{120 - 10}{60 - 0} = \frac{11}{6} \approx 1.833$$

Variación media

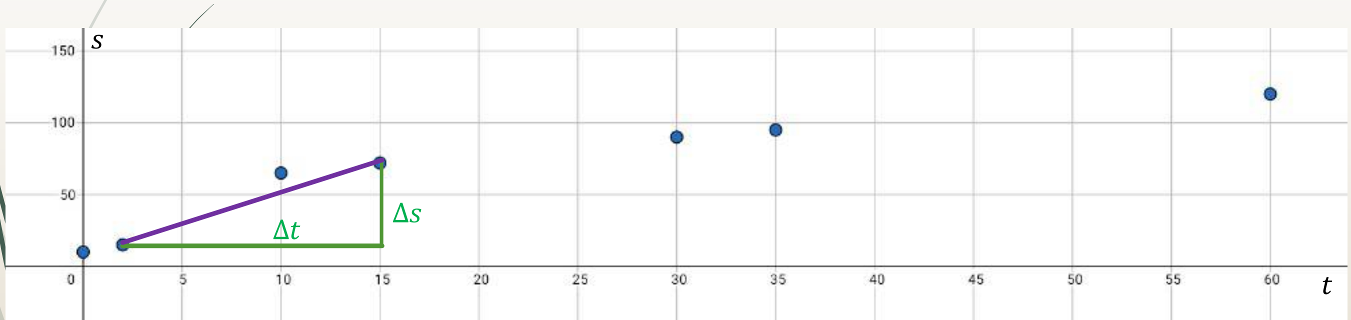


¿Cuál es la velocidad a la que se está desplazando el esquiador a los 10 segundos de iniciado su viaje?

t	0	2	10	15	30	35	60
s	10	15	65	72	90	95	120

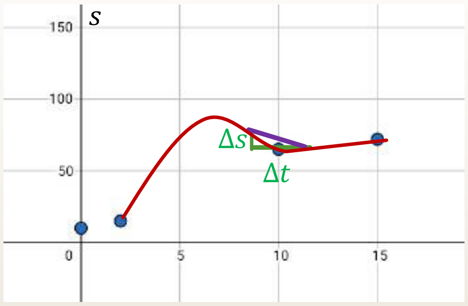
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{72 - 15}{15 - 2} = \frac{57}{13} \approx 4.3846$$

Variación media



¿Cuál es la velocidad a la que se está desplazando el esquiador a los 10 segundos de iniciado su viaje?

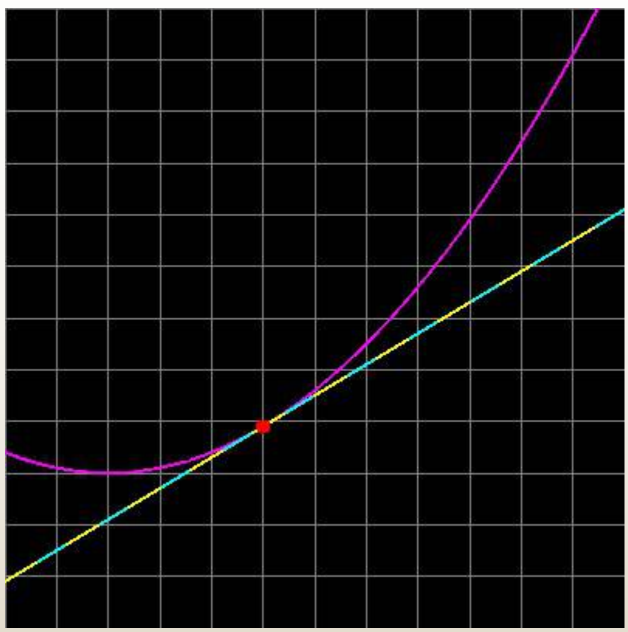
t	0	2	10	15	30	35	60
s	10	15	65	72	90	95	120



Variación instantánea es el límite de la variación media

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(a+\Delta t) - f(a)}{\Delta t}$$

Linealidad



www.vc.ehu.es

Remarcas!

La variación media de una variable s respecto a la variación de la variable t se define como la razón $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

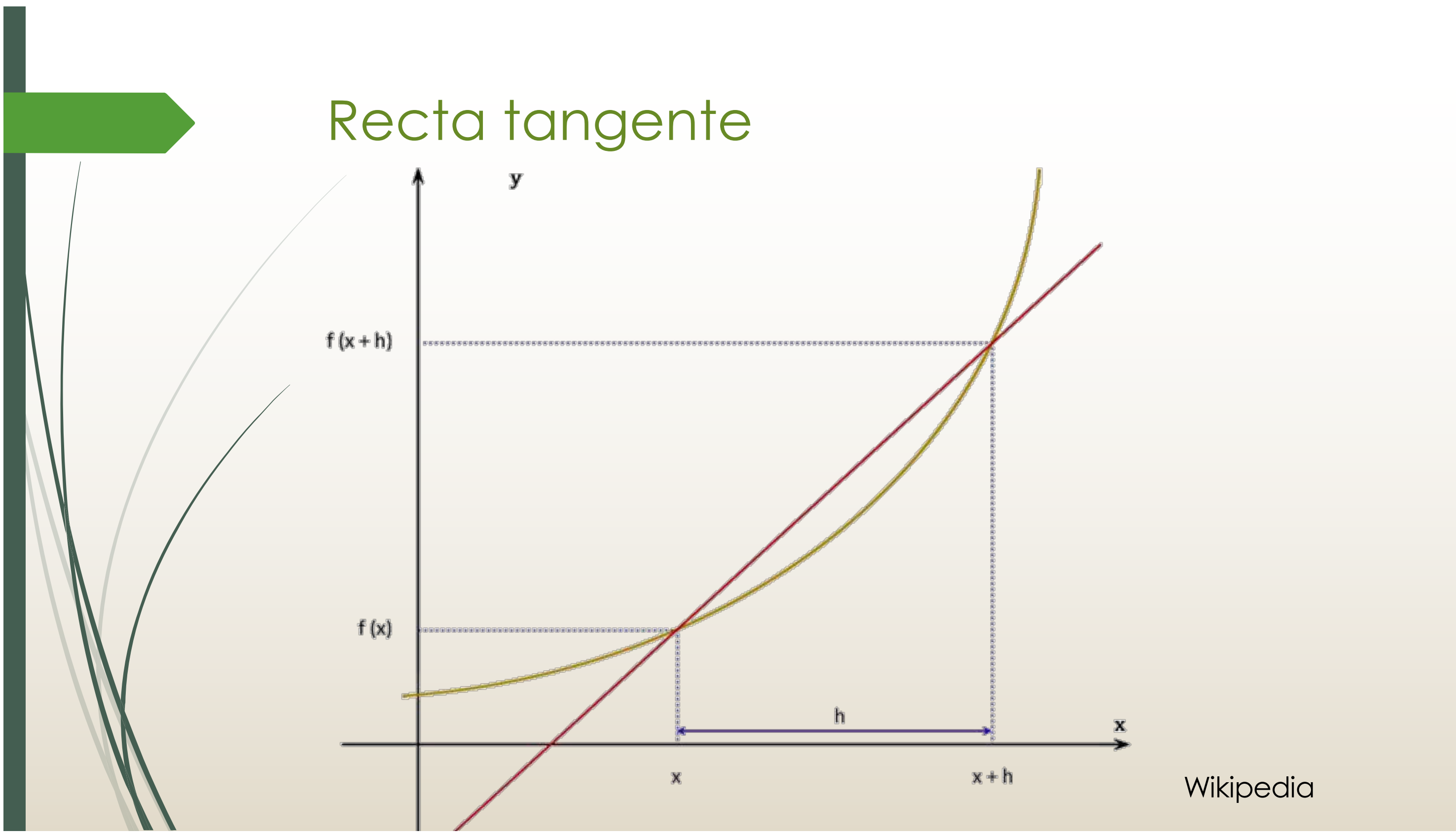
Nótese que la variación instantánea se obtendría al calcular $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

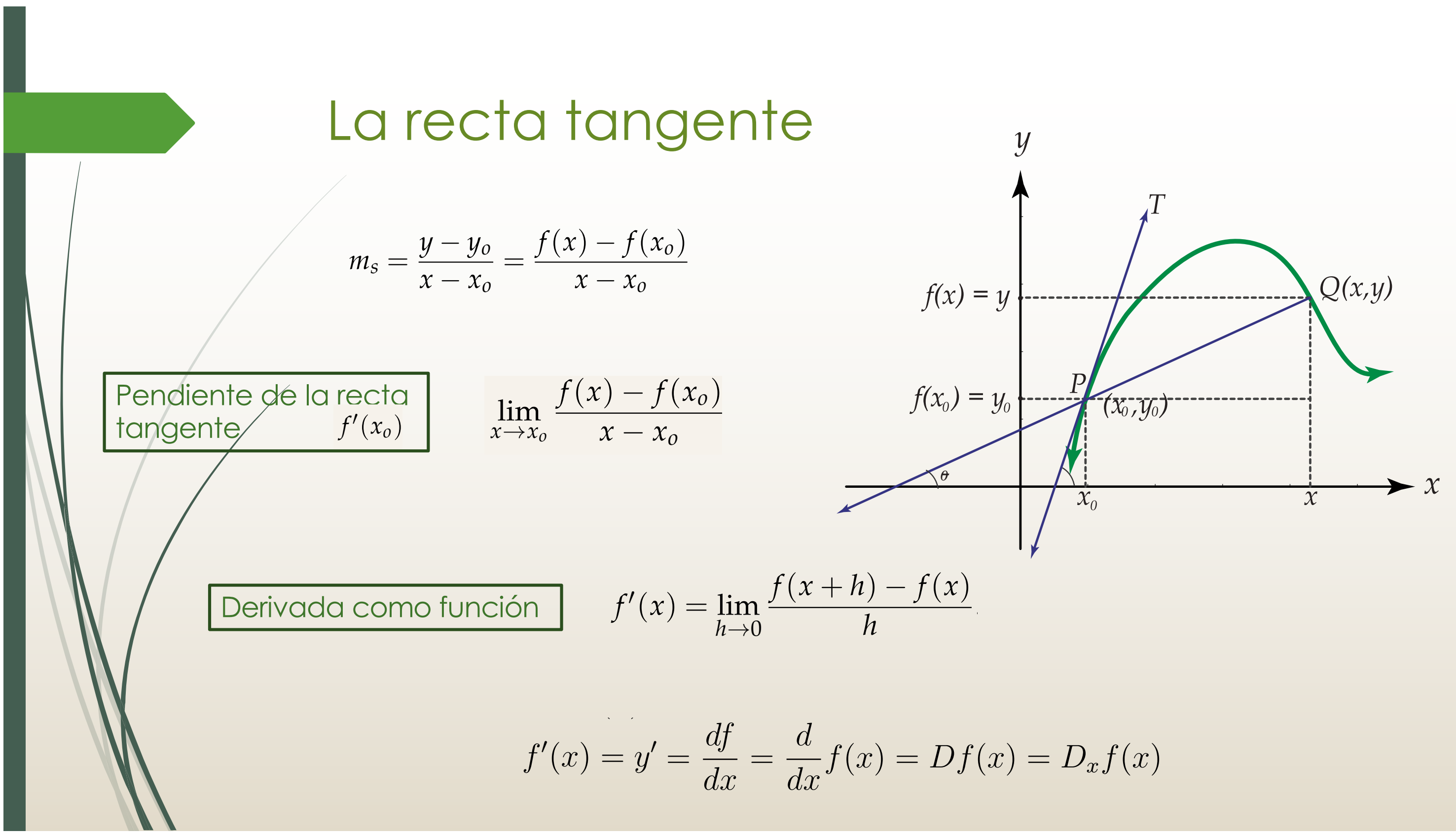
La derivada de una función f en el punto $x = a$ se define como la variación instantánea de f en ese punto.

Es decir,

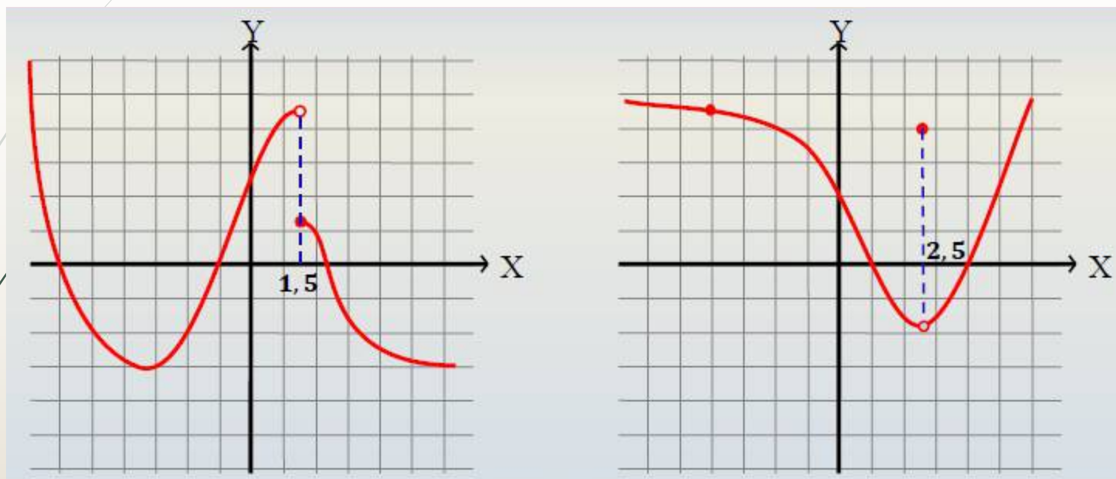
$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

si el límite existe


Recta tangente
y
f (x + h)
f (x)
h
x
x
x + h
Wikipedia

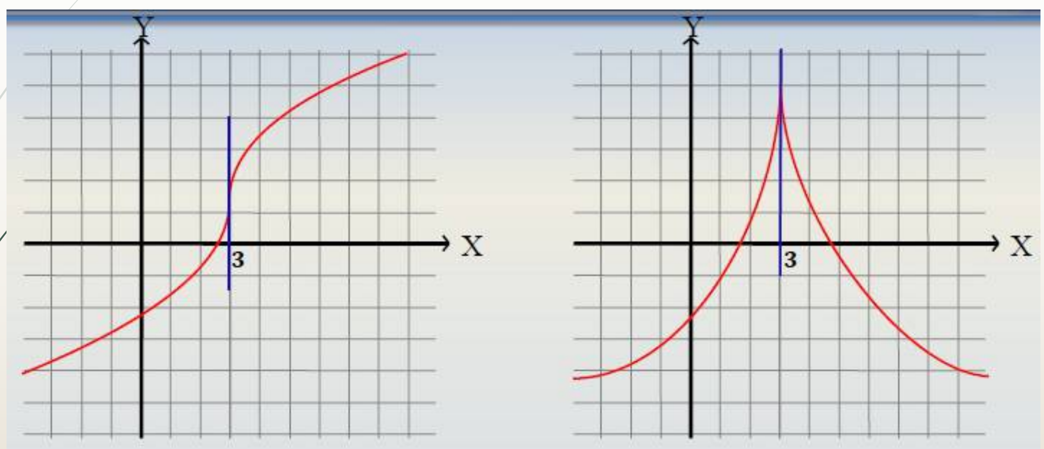

La recta tangente
$m_s = \frac{y - y_o}{x - x_o} = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$
Pendiente de la recta tangente $f'(x_o)$
$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$
Derivada como función
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
$f'(x) = y' = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x)$
y
T
$f(x) = y$
$Q(x,y)$
$f(x_0) = y_0$
P
(x_0, y_0)
θ
x_0
x
x

Funciones no derivables



Si f **no es continua** en $x = a$, entonces f **no es derivable** en $x = a$

Funciones no derivables



Si la recta tangente es vertical en $x = a$ entonces la función no es derivable en $x = a$

Ejercicios.

4.2.1 Encuentre la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva: $f(x) = 1 - x^2$, en el punto $(2, -3)$. Grafique la parábola y sus respectivas rectas tangente y la normal.

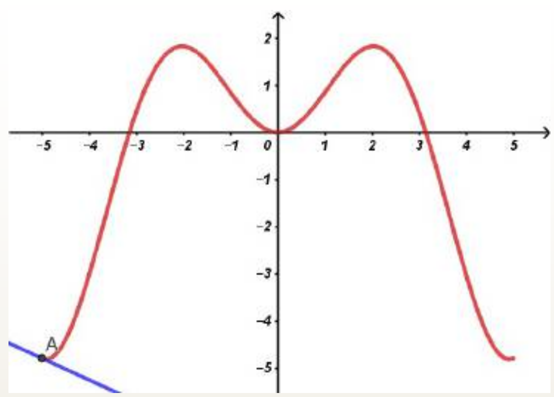
Use la definición de derivada para calcular la derivada de las siguientes funciones

$f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = \operatorname{sen} x$


Gracias por su amable atención!
Favor ingresar al enlace para valorar la clase.
https://forms.gle/gPzZ4zWTirDZtb4HA

TEC | Tecnológico de Costa Rica



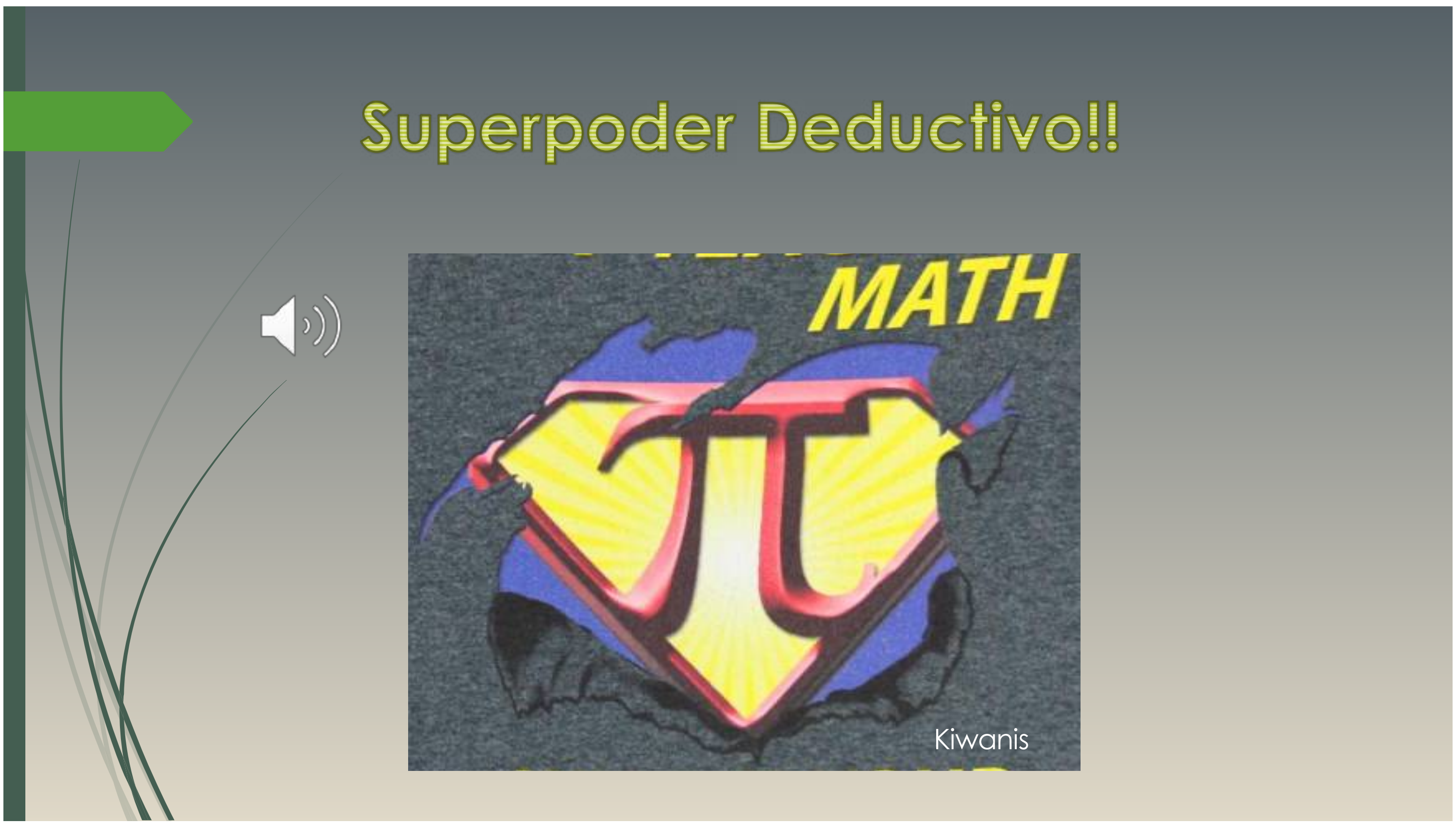
Derivadas.

Reglas.

Cálculo Diferencial e Integral

II-2021

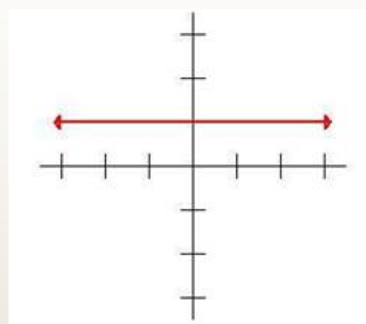
Proverbios 20:11

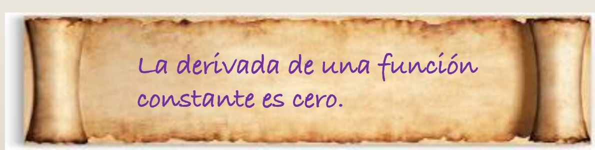

Superpoder Deductivo!!
MATH
Kiwanis

Poder deductivo!!

- Una función constante

$$f(x) = k, k \in \mathbb{R}$$

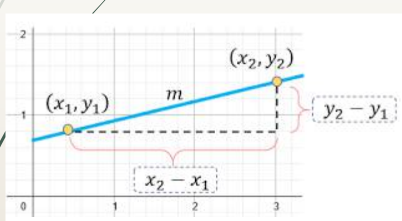


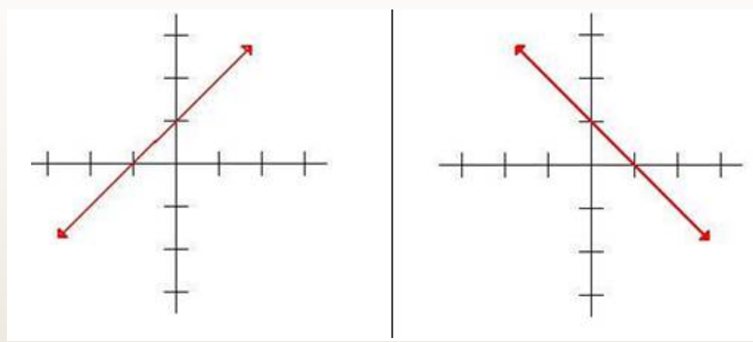


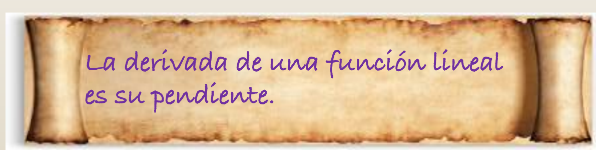
Poder deductivo!!

- Una función lineal

$$f(x) = mx + b$$







Poder deductivo!!

- Regla del producto $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$
\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot f(x) \right] \\
&= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Reglas de derivadas

- Si $f(x) = k$, $\forall k \in D_f$, $k \in \mathbb{R}$, entonces $f'(x) = 0$
- Si $n \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$
- $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
- $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $[k\, f(x)]' = k\, f'(x)$, $k \in \mathbb{R}$
- $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$, $g(x) \neq 0$

Derivadas de uso frecuente

- $(a^x)' = a^x \ln a$ $\qquad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$ $\qquad (\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \sec^2 x$ $\qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$
- $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$ $\qquad (\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$

- $[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad [\arccos x]' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arctan x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad [\operatorname{arc}\cot x]' = \dfrac{-1}{1+x^2}$
- $[\operatorname{arc}\sec x]' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad [\operatorname{arc}\csc x]' = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Ejercicio.

4.2.9 Encuentre los puntos donde la recta tangente a $y = \dfrac{2x}{(3-x)^2}$ es paralela a la recta con ecuación $10x - y = 5$.

Calcular la derivada de las siguientes funciones

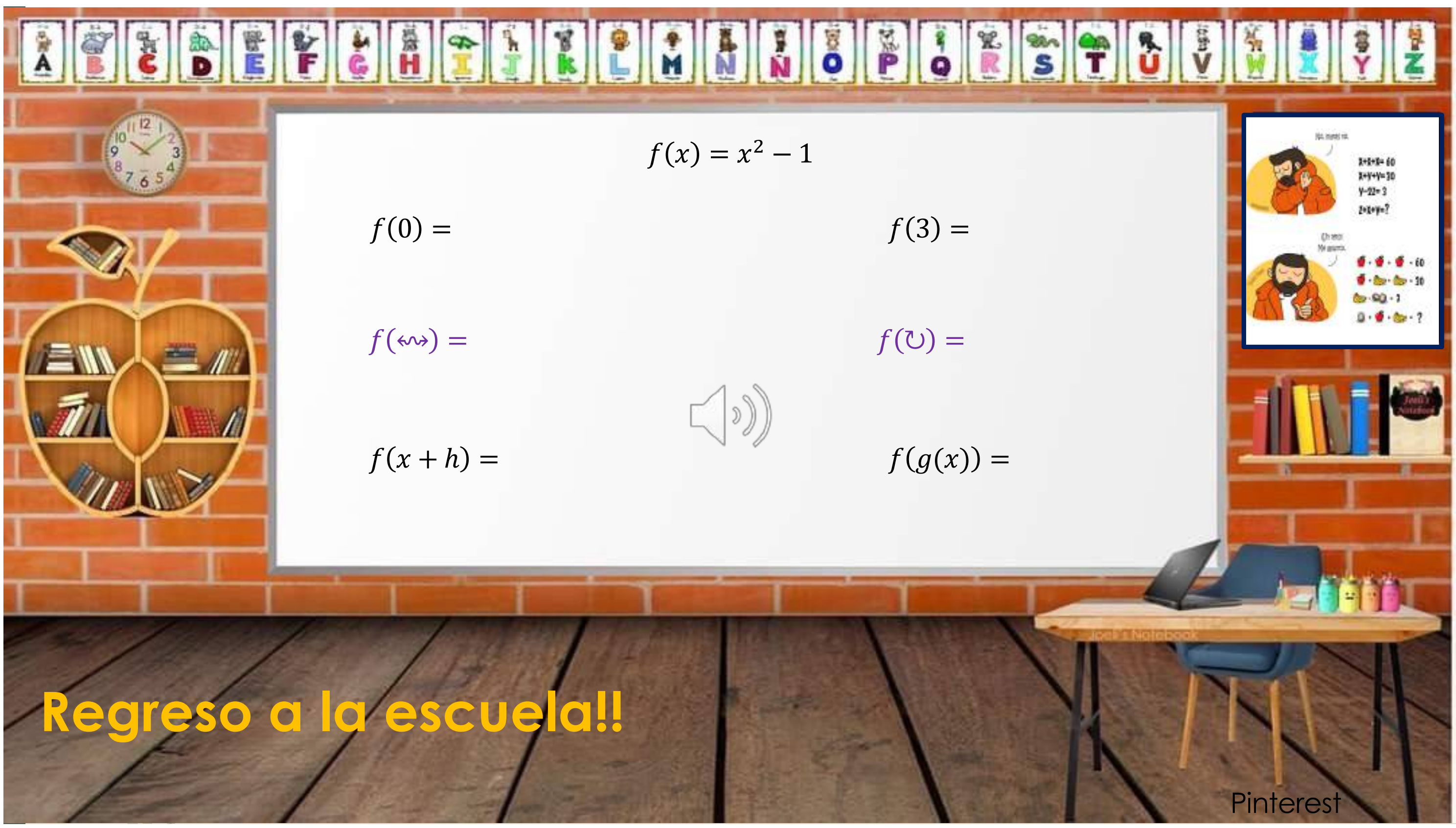
$$h(a) = 5a^2 - \frac{2}{a^3} \qquad h(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{x} \qquad f(x) = 2^x \cdot x$$

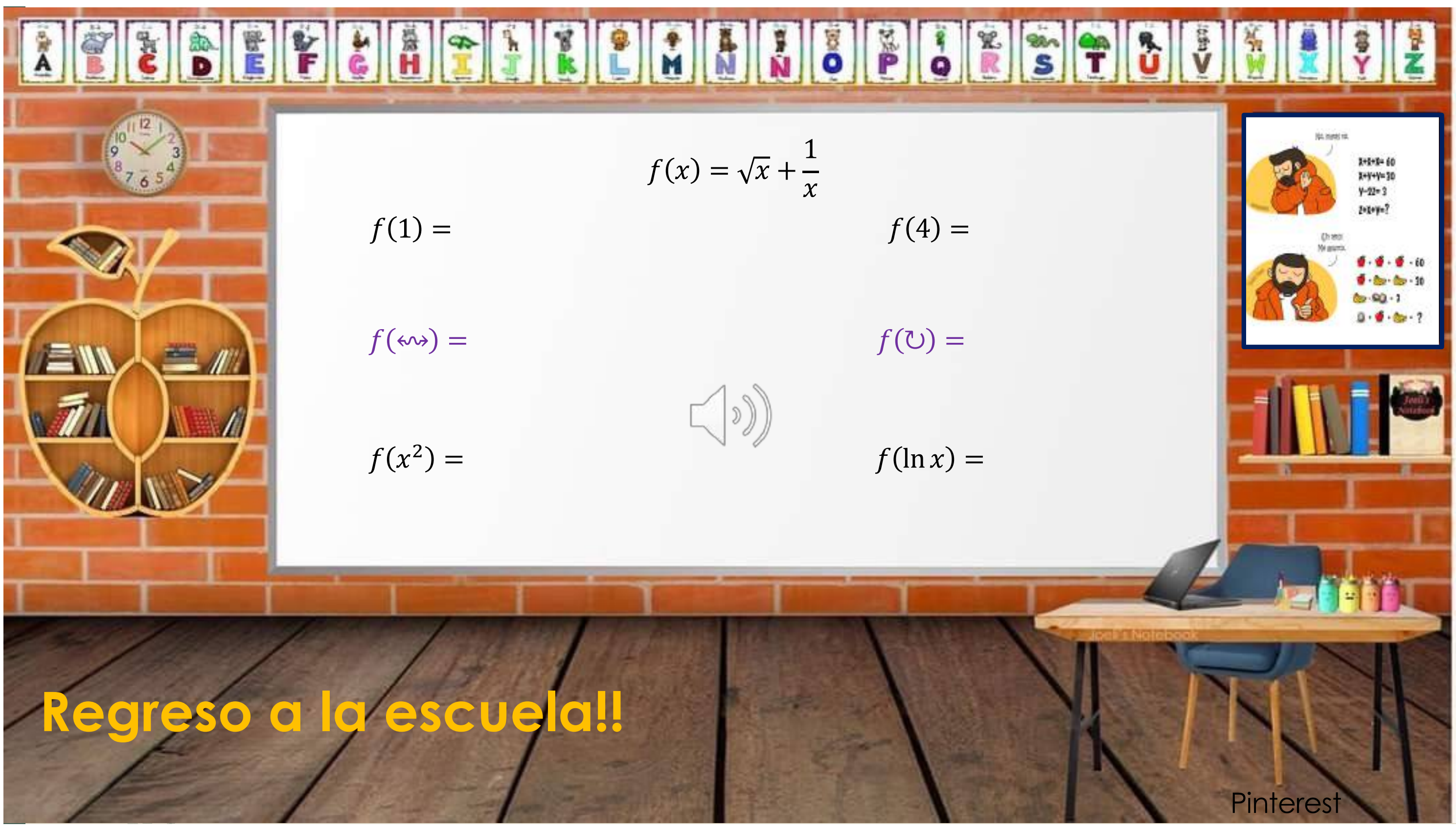
$$(\sec x)' \qquad f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \tan x}$$

Verifique $(e^x)' = e^x$ $\quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$


Gracias por su amable atención!
Favor ingresar al enlace para valorar la clase.
https://forms.gle/1NJitUrvqSPKGHsq9


TEC | Tecnológico de Costa Rica
u(x)
f(u)
Gfycat
Derivadas.
Regla de la cadena. Diferencial
Cálculo Diferencial e Integral
II-2021
Hebreos 1:6


$f(x) = x^2 - 1$
$f(0) =$
$f(3) =$
$f(\leftrightsquigarrow) =$
$f(\circlearrowright) =$
$f(x + h) =$
$f(g(x)) =$
Regreso a la escuela!!
Pinterest



$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$
$f(1) =$
$f(4) =$
$f(\leftrightsquigarrow) =$
$f(\circlearrowright) =$
$f(x^2) =$
$f(\ln x) =$
Regreso a la escuela!!
Pinterest

Derivadas de uso frecuente

- $(a^x)' = a^x \ln a$ $\qquad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$ $\qquad (\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \sec^2 x$ $\qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$
- $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$ $\qquad (\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$

- $[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad [\arccos x]' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arctan x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad [\operatorname{arc}\cot x]' = \dfrac{-1}{1+x^2}$
- $[\operatorname{arc}\sec x]' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad [\operatorname{arc}\csc x]' = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Regla de la cadena.

Si tanto f como g son funciones derivables entonces

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$[t(z(h(f(g(x)))))]' = t'(z(h(f(g(x))))) \cdot z'(h(f(g(x)))) \cdot h'(f(g(x))) \cdot f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ejercicio.

Calcule las derivadas de las siguientes funciones

$$h(a) = (3a-1)^2$$

$$j\left(x\right) = \frac{\cot\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-9\right)^6}$$

$$f\left(x\right) = \operatorname{sen}\left(x^2+x+3\right)$$

$$f\left(x\right) = e^{x^2+\operatorname{sen} x} - \log_3\left(x^2+1\right)$$

$$g\left(x\right) = \cos\left(\frac{x^2+3}{x-3}\right)$$

$$f\left(x\right) = arc\tan\left(e^{x^2+1}\right)$$

RETO

RETO

$$\boxed{g(h) = h^h \text{ y } f(x) = |x|}$$

RETO

Regla de la cadena.

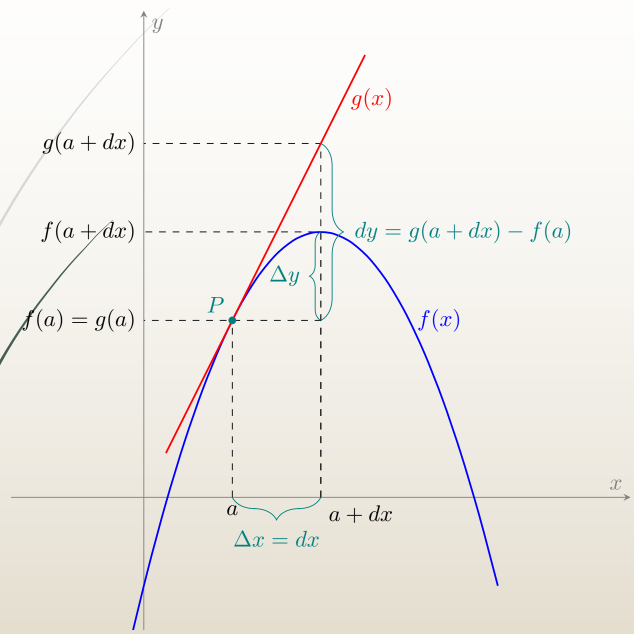
$$w(h) = \ln^5[7^h \arccos(h+4)]$$

$$w'(h) = \frac{5\ln^4[7^h \arccos(h+4)]}{7^h \arccos(h+4)} \left(7^h \ln 7 \arccos(h+4) - \frac{7^h}{\sqrt{1-(h+4)^2}} \right)$$

$$w(h) = \tan^6(g(h^2+6h)) - 5^h \operatorname{arc\,sen}(3h)$$ g es una función derivable.

$$w'(h) = 12\tan^5(g(h^2+6h))\sec^2(g(h^2+6h))g'(h^2+6h)(h+3) - 5^h \ln 5 \operatorname{arc\,sen}(3h) - \frac{3\cdot 5^n}{\sqrt{1-9h^2}}$$

Diferencial de una función



$$g(x) = f'(a)\cdot x - f'(a)\cdot a + f(a)$$

$$\begin{aligned} dy &= g(a+dx) - f(a) \\ &= f'(a)\cdot dx \end{aligned}$$

$$\boxed{dy = f'(x)\cdot dx}$$

$$\boxed{f(a+dx) \approx f(a) + dy = f(a) + f'(a)dx}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Ejercicio

Utilizando diferenciales, calcular aproximadamente el valor de $\sqrt[3]{122}$.

$$f(a+dx) \approx f(a) + dy = f(a) + f'(a)dx$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad dy = f'(x)dx = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx \qquad a = 125$$

$$\sqrt[3]{122} = \sqrt[3]{125-3} \approx \sqrt[3]{125} + \frac{1}{3\sqrt[3]{125^2}} \cdot -3 = 5 - \frac{1}{25} = \frac{124}{25}$$


Gracias por su amable atención!
Favor ingresar al enlace para valorar la clase.
https://forms.gle/ZsvV9YamWx4ZTUos9

Anexos G

Indicadores en segmentos de video

Sesión 1. Definición de derivada.

Construyendo una pared (desde el inicio hasta el minuto 21:20)

Evidencias	Indicadores	Reflexión/valoración
profesor dijo: "dependiendo de la cantidad de tablas que coloque así irá variando la altura." "Esta es la función modeladora" Un estudiante "el número 15 indica cuántas tablas hay" Otro estudiante "15 es la altura de cada tabla" Profe "En el proyecto que tenemos, que es construir la pared, ¿qué aporta?" E "la altura de cada tabla la cual dependiendo de t se va sumando" E "se van agregando 15 cm por cada tabla" P "es el aumento en la altura de la pared por cada tabla que se agregue" "la altura va creciendo a un ritmo de 15 por tabla" E "el 50 es la altura de la base de piedra" Paso a gráfica P "podría ser que yo ponga -4 tablas? No, no puede ser" "tampoco podría poner raíz de 3 tablas" "ni podría poner más de 10 tablas" P "podría modelarse también con una situación inversa. Es decir que la pared ya esté construida y más bien se le vayan quitando tablas"	**Cr, Cp, Dm** **Pm, Dm** **Ct, Cx, Dm** **Ct, Cx, Dm, Cp** **Pr, Cx,** **Ct, Cp, Dm,** **Ct, Vc** **Pr, Dm** **Ct, Cr** **Cx** **Ee, Ad,** **Pm, Cp, Pr**	Construyendo la pared sirvió para reforzar conocimientos previos como función, variables, dependencia de una variable con otra. También se hizo referencia a modelar usando funciones e interpretar las partes que componen una función. Los estudiantes participaron de buena forma y el docente hizo correctamente el proceso de institucionalización del conocimiento pretendido. A partir de la gráfica se muestra algunas cosas que pueden pasar en la función, pero no en el modelo concreto. Este es un aporte muy bueno para diferenciar lo que es modelar. El docente hace referencia a errores comunes como considerar la función igual al modelo. Se incluyen una serie de preguntas para reflexionar sobre lo que se ha hecho y para resumir los temas que se han tratado y los conceptos que se han ido abordando. La actividad que se refiere a la inversa estuvo muy bien pensada y muy bien dirigida y la contextualización con la pared construida y quitar tablas resultó muy clara. Los aportes de los estudiantes mostraron que comprenden adecuadamente la idea.

E "se utilizaría el mismo modelo solo que en lugar de ser positivo en negativo"	**Cr, Cp, Pr**	Los estudiantes hacen aportes muy valiosos sobre lo que implica el crecimiento en una situación inversa y el valor por fijo de la función lineal.
E "y el valor que está fijo ya no es 50 si no 200"	**Cr, Cp, Pr**	Además, se incluye una discusión si cualquier modelo de crecimiento o decrecimiento debe ser lineal. El docente lo plantea como una afirmación para que sea debatida o sostenida, los estudiantes hacen los aportes esperados.
P "uno podría pensar que cualquier modelo de crecimiento o de crecimiento debe ser lineal" (esta afirmación es con el objetivo de que sea discutida)	**Ee, Ad, Vc**	
E "no, porque hay otros modelos de crecimiento por ejemplo hay modelos exponenciales y logarítmicos"	**Cp, Ct**	La actividad sobre funciones que tengan ambos comportamientos también fue muy productiva. Los aportes de los estudiantes fueron muy buenos y el complemento que el profesor le dio permitió incluso contextualizar en época de pandemia ejemplos como emprendimientos.
P: "podrían darme un ejemplo de una situación donde haya tanto crecimiento como de crecimiento" (el docente amplía esta pregunta proporcionando más detalles)	**Aa, Ac**	
E: "puede ser algo como una cuadrática por ejemplo en poblaciones de animales. Cuando uno tiene muchos recursos la población pues va creciendo y cuando los recursos se acaban entonces empieza a disminuir"	**Ct, Cr,**	El docente en todos los casos hace un comentario de cierre resumiendo los aportes (tanto bueno como malos), rescatar los relevantes y hace la correspondiente institucionalización del concepto.
E: "profe, ganancias de una empresa?"	**Aa, Vc,**	Al cierre de este segmento el profesor asigna una actividad para la casa con el nombre vaciar un tanque. Esta es una actividad de reforzamiento, pero además amplía a otro contexto situaciones de ritmo de cambio (NO es una situación lineal, es un ejercicio en un contexto numérico, es una situación de decrecimiento y se incluyen preguntas más retadoras).

Esquiando en la nieve! (desde el minuto 21:20 hasta el minuto 45:40)

Evidencias	Indicadores	Reflexión/valoración
P: debemos suponer que el movimiento es rectilíneo.	Cp, Aa	la actividad incluye 2 preguntas complementarias para trabajar en casa.
P: en este caso no tenemos una curva o un trazo lo que tenemos es un puñado de puntos.	Vc	
P: en una situación real, es decir no controlada, no podemos suponer que la velocidad es constante ni que la aceleración es constante. Eso no sucede. (ilustra con el ejemplo de ir en carro o en bus)	Dm, Pm	El docente hace una introducción adecuada de la idea de variación media, haciendo referencia al concepto de variación que se acaba de presentar en la actividad anterior.
Respecto a la velocidad media	Cx	También se introduce el uso del símbolo delta para las variaciones.
E. Me da 5.5.	Ee	
P: no puede ser tiene que dar entre 10 y 20 porque es multiplicar 10 por 1. 833.		El docente se regresa a explicar de nuevo el cálculo puesto que un estudiante expresó una respuesta incorrecta y además verbalizó que no estaba entendiendo.
E: seguramente no entendí, profe.	Cp	
E: de ahí profe es sólo correr la coma 18.33.		
P: correcto. Aunque este cálculo es correcto aún está lejísimos de lo que dice la tabla que es 65.	Cp, Dm,	El mal cálculo del estudiante se debió a que utilizó otras referencias (que de hecho son más cercanas al valor buscado) y no las que el profesor estaba usando.
P: la aproximación está muy mala. La tabla dice 65 y mi predicción no llega ni a 20. Están de acuerdo conmigo?	Pr, Vc,	
P: este cálculo no es bueno, aunque tiene sentido	Pr, Vc	
E: profe no sea tan duro consigo mismo no está tan mala aproximación.	Afec	
Muestra gráfica		La ilustración gráfica está muy buena se presentó destacado con color el delta t y el delta s y además hizo referencia al supuesto de linealidad.
P: podemos hacerlo mejor tomando un intervalo más pequeño. Podemos hacerlo más local.	Cx	

P. Como me lo están pidiendo en 10 entonces estoy considerando los datos del que está después y del que está antes. Pero sigue siendo una variación media	Cp, Ac,	El paso al límite se llevó de buena forma, Incluso se hizo referencia a la relación entre imágenes y desplazamiento. El concepto de límite surgió de manera natural.
P. Hagan el cálculo por favor para que vean que está mucho mejor, aunque todavía no es muy buena apenas es 44 pero la anterior no llegaba ni a 20.	Pm	
P. Cuál creen que es la solución para hacer esto aún más preciso?	Pr	Se aprecia una conexión bastante clara con la idea del límite y la forma gráfica.
Conclusión con el límite		
E: si delta t tiende a cero entonces nos daría una división de constante entre 0.	Ee, Ad	El abordaje al aporte incorrecto que hizo el estudiante estuvo muy bien pues permitió incluso iniciar un proceso de generalización.
P: eh no, de hecho sería cero sobre cero. (Lo explica muy bien)	Cx, Cp	De nuevo el cierre está muy bien haciendo un recuento desde el inicio con la idea de variación media un poco alejada, luego ir haciendo más cortos los intervalos y por fin cerrando con la idea de límites.
P. De hecho estos límites siempre son cero sobre cero. Pero no hay problema porque ya aprendimos a trabajarlos.	Pm,	
P; si usted monta bien la forma de la derivada siempre le va a dar un límite cero sobre cero. De hecho esa es una forma de chequear que van bien.	Cx, Pm, Ac	Se cierra con la conclusión que la variación instantánea es el límite de la variación media.
P: ¿Cómo es eso que, aunque la curva no sea recta, seguimos pensando en linealidad? Es que si uno se acerca mucho mucho mucho cualquier curva parece una recta.	Pm, Cr,	Además se insiste en la idea de linealidad y se cierra con una animación donde se hace un acercamiento local a una curva y se nota como parece ser recta. Después de la animación se cierra con las remarcas sobre la relación entre la variación instantánea y la variación media y la derivada por definición.

Recta tangente (desde el minuto 45:40 hasta el final)

Evidencias	Indicadores	Reflexión/valoración
P. Esto en realidad es lo mismo que acabamos de ver noten cómo es este espacio de aquí es lo mismo que el delta t que teníamos hace un rato y este otro es lo mismo que el delta s	Cp, Dm, Pr	el docente hace una hace una referencia inmediata al tema de los desplazamientos tengo una animación donde se muestra una recta secante tendiendo a ser tangente.
Deducción de la fórmula en “quieto”		Nuevamente se hace referencia a que localmente la curva y la recta tangente se parecen.
P. El cociente de los deltas que hace un rato repasamos coincide con la fórmula de la pendiente que conocen de cursos anteriores.		
P: me da lo mismo que el límite de hace un rato es decir que este límite me da la variación instantánea en el x cero.	Cp, Cx, Dm, Vc,	En esta actividad la presentación es muy clara en una secuencia adecuada. Las conclusiones son bastante bien fundamentadas.
P: en general lo que da es el ritmo, el ritmo como crece o decrece.	Cx,	
P: Cuando vas en bus, entonces la velocidad cuando vas por el mall Oxigeno.		
E: ¿profe entonces no existe la derivada de una función lo que existe es la derivada en un punto específico?		
P: hasta aquí eso es lo que tenemos, pero dame un momento hacia eso vamos	Ct, Cr, Cx	La pregunta que hizo el estudiante sirvió perfectamente para introducir el paso de una derivada puntual a la derivada de una función. Para esto el profesor comentó que lo que se hace es un cambio de variable.
P. Esta fórmula te da la derivada en un punto y esta otra te da lo mismo solo que en cualquier punto.		Además de la explicación de las diferencias de las fórmulas el profesor enfatiza en la interpretación diferente que tiene cada uno de los resultados. Utiliza referencia de la actividad anterior es decir en ocasiones habla de pendiente de recta tangente y en otras habla de variaciones con la intención de mostrar la conexión de ambas.
E: yo no le entendí profe.. Yo las veo que son iguales.	Cx, Cp,	A la reacción del estudiante el docente además de repetir la diferencia entre

	Vc, Cp,	ambas interpretaciones se apoya con dibujos de líneas tangentes en diferentes puntos de la gráfica.
Funciones no derivables	Ct,	Al final de esta actividad se incluyen diferentes notaciones para representar las derivadas
P: la derivada es un límite y por tanto podría no existir.		
P: Las ecuaciones de rectas verticales tienen la forma x = a porque la pendiente resulta ser infinita.	Dm, Cp,	el docente se apoya en ilustraciones deben funciones no derivables, hace trazo de rectas tangentes por un lado y por el otro y muestra que no coinciden las pendientes.
E: no derivable es que no puedo calcular la derivada, ya sea porque da diferente por un lado o por el otro o porque da infinito	Cp, Cx	Se ilustra en los casos de discontinuidad y de rectas tangentes verticales.
E: la pendiente es lo que no se puede calcular	Ct, Cr, Pr	Se hace referencia a un error muy común de considerar que el límite no existe sólo si los laterales son diferentes, tampoco existe si el límite resulta infinito.
E: las funciones que nos mostró no son derivables en ese punto pero puede ser derivables en otros puntos.	Ee, Ad	También un error común es considerar la pendiente como la recta tangente.
	Pr, Ct, Cr	Para este aporte del estudiante el profesor recuerda que podemos encontrar una función derivada y si nos fijamos en los puntos donde esta derivada tiene problemas pues ahí es unos puntos donde la función no es derivable. De nuevo se apoya en trazos sobre la gráfica de la función no derivable para mostrar que sí lo es en otras partes.
	Cx	Un estudiante hace la observación que en el texto dice la recta horizontal cuando debe ser vertical
Ejemplos		También usa como referencia una función 1/x
Recta tangente y normal		
Un estudiante: La función derivada lo que me da es la pendiente de las tangentes relacionadas con x.		Se repasan los conceptos y se refuerza con punto de tangencia y recta normal.

Derivada por definición raíz de x. (la de sen x se envió por video) E: conviene racionalizar		Error común en la composición de f(x+h). Este ejemplo sirve para aclarar la diferencia entre la derivada puntual y la derivada de una función. El profe luego de calcular la derivada en el punto lo relaciona con trayectorias. Resultó ser muy completo pues usa la definición, se refuerza la interpretación, conocimientos previos (composición, límites, fórmulas notables) y luego se graficaron. Reforzamiento de la fórmula y repaso de racionalización. El profe aprovechó para ilustrar que esta función no tiene problemas en cero pero que su derivada sí tiene problemas en cero.

Sesión 2. Reglas de derivadas.

Superpoder deductivo (desde el inicio hasta el minuto 19:25)

Evidencias	Indicadores	Reflexión/valoración
P: ¿cuál el cambio en y o f(x)? E: Profe, yo veo que el cambio en ese caso es 0. P: Quien me dice la tasa a la cambia el valor de f(x)? E: La tasa de cambio es y2-y1 sobre x2-x1. Es m. P: No podemos traer la idea del producto de límites a este caso. P: esta es la primera de las reglas que es “antinatural”	Cp, Cx, Dm, Pm, Pr Ct, Cr Pm (prueba), Cp,	Haciendo uso de la noción de variación se deduce la derivada de una función constante, lineal. También se hacen recuentos de conocimientos previos sobre funciones. Y los pasos del cuadro algebraico al geométrico (gráfico) La deducción de la regla del producto es más formal, tiene una construcción más creativa. Inicia con la definición de producto de funciones. Se hace referencia al error de considerar la derivada como un producto de derivadas. Hay un error en la construcción. El docente lo reconoce en el momento y hace la corrección.

Reglas de derivadas y derivadas de uso frecuente! (desde el minuto 19:25 hasta el minuto 40:15)

Evidencias	Indicadores	Reflexión/valoración
P: La regla del múltiplo constante es una consecuencia de la regla del producto y de la función constante. E: Tengo una duda, usted dijo que la derivada y los límites es lo mismo P: cualquier derivada en la forma de límite tiene la forma 0/0 pero no es cierto que cualquier límite que sea 0/0 corresponda con una derivada. E: Factorizar, racionalizar son formas de derivar?	Cx, Dm, Cp Pr, Ee, Ad, Ee, Cp,	Se presenta un listado de las reglas de derivadas. Se hace referencia a las que ya se dedujeron y se enfatiza en que todas se pueden demostrar. El docente explica adecuadamente la diferencia entre límite y derivada, enfatizando en la forma que tiene la derivada a partir de f. El docente usa dos ejemplos concretos para mostrar que la reciprocidad no es una equivalencia.

E: las reglas de derivadas se pueden demostrar a partir de límites.	Pr, Ct	Este estudiante presenta un conflicto cognitivo sobre límites 0/0, derivadas y estrategias para calcular límites. El docente enfatiza en lo NO conmutatividad de la regla del cociente.
E: ¿Qué pasa en el cociente si g(x) es cero?	Pr, Dm, Cp	El docente responde adecuadamente, explica que las funciones pueden existir por separado pero que al ponerlas en cociente tenemos una función nueva y el dominio cambio, por lo que g(x) no puede ser cero.
E: ¿en la derivada del logaritmo de x con base a puedo aplicar la del logaritmo natural?	Cp, Dm, Ad,	Las derivadas de funciones de uso frecuente se presentan de manera tradicional. La interpretación de las reglas es correcta y se hace referencia a errores como confundir la exponencial con la potencial.
	Pm, Pr	Se ha referencia a la demostración de la derivada de la función seno en un video de reforzamiento. (Cuidado con el -)
E: ¿Al evaluar arcoseno se generan grados o radianes?	Pm, Cp, Dm	Se discuten también las derivadas de los arcos. A partir de una pregunta de un chico, se hace una explicación mas detallada para las inversas.
P: Si, recomendamos radianes por ser compatibles con números reales.	Cp, Pm	El profesor enfatiza que esas medidas dependiendo del contexto puede representar algo concreto (hace referencia a las tablas en la actividad de la pared) Modelar

Ejercicios (desde el minuto 40:15 hasta el final)

Evidencias	**Indicadores**	**Reflexión/valoración**
Recta tangente	Ar, Cp, Cx,	Se dejó para la casa porque se parece a uno que se hizo la clase anterior. Se presentan detalles que deben considerar (paralelismo, no tener el punto de tangencia). Se les da la gráfica como ayuda. Con trazos tangentes sobre la gráfica se explica muy bien lo que se pide
Cálculo de derivadas	Cp, Pm, Pr, Vc, Ac	Aunque no estaban en la lista se retomaron las mismas que se hicieron la clase anterior por definición, ahora con reglas. Aquí hubo pérdida de conexión del profesor y la clase se terminó de manera asincrónica.
	Pm, Cp	Algunas se calcularon de varias maneras (evitando el cociente) Se verificó la derivada de sec x. Se deducen también las derivadas de e^x y logaritmo natural. Se aprovechó para usar varias notaciones.

Sesión 3. Regla de la cadena.

Regreso a la escuela! (desde el inicio hasta el minuto 17:05)

Evidencias	Indicadores	Reflexión/valoración
P: ¿cuál es la imagen de 0? Ec: -1. P: Por qué? E: Porque uno cambia la x por 0.	Cp, Dm, C	Con un ambiente como de escuela, se presentan algunas funciones y se les solicita calcular imágenes. Luego, se cambian los números por otros símbolos. La idea es repasar composición de funciones. También se repasa la idea de dominio (crucial para composiciones)

Regla de la Cadena! (desde el minuto 17:05 hasta el minuto 40:15)

Evidencias	Indicadores	Reflexión/valoración
Muy poca o nula participación. P: Cuando uno valúa va de lo particular hacia lo general, cuando derivamos es al revés vamos de lo más general hacia lo más particular.	Cp, Dm Aa, Vc, Cp Ee, Ad,	Se repasan las derivadas de uso frecuente. Se presentan la forma usual con dos funciones y luego se amplía con un ejemplo de 5 funciones compuestas. Composición no producto ni cociente.

Ejercicios (desde el minuto 40:15 hasta el minuto 1:29)

Evidencias	Indicadores	Reflexión/valoración
Algunos aportes incorrectos Derivada de coseno es tangente. Sin (x2 +x+3) compone seno, una cuadrática y una lineal. J(x) tiene tres compuestas.. (correcto hay un cociente). En esta un estudiante dijo es un cociente de composiciones.	Cp, Pm, Pr Cp Ee, Ad	En todos los casos antes de calcular las derivadas, se reconocen cuantas funciones (no identidad) logran apreciar, cuál es la más particular. Las primeras se hicieron sin cadena para luego comparar. Se enfatiza en el error común de no derivar la función particular y de no valuar la función en la más particular.

	Vc	Se plantea un reto con funciones particulares (h^h, va(h))
	Cr, Ct	Cierra con ejercicios de un nivel avanzado. El último tema del video no corresponde a la secuencia que nos ocupa. También se advierte el error de derivar constantes como función (ln 2, 7^4) Los ejercicios están bien escogidos pues se retoman reglas anteriores y funciones variadas.
Una chica solicita que se repase la forma en como se reconocen las funciones que están compuestas.		El docente hace un buen recuento y cierra con el último ejemplo para mostrar.

Anexos H

Cuestionario Final

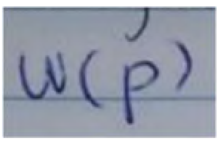
Prueba Específica (estudiante 01)

Item #1 Dificultad: Baja

1. Si w es una función de z, la variación de w cuando z es igual a p se simboliza como

( ) $f'(p)$ ( ) $w(p)$ ( ) $\frac{\Delta w}{\Delta p}$ ( ) $w'(p)$

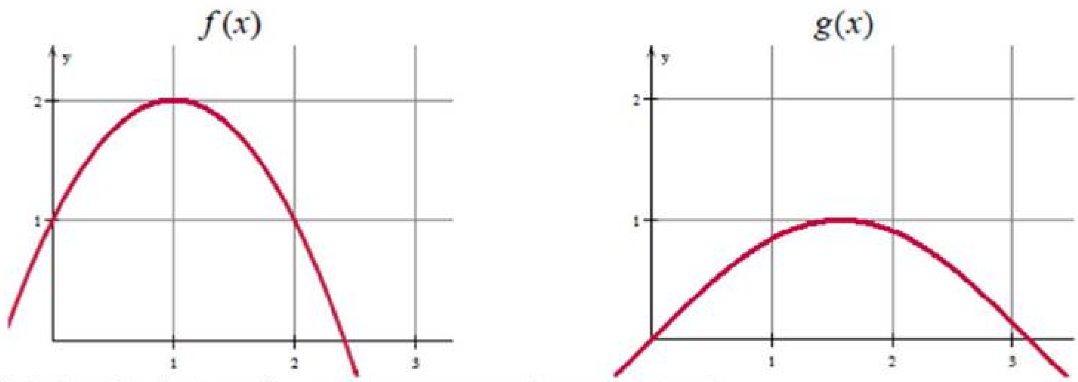
Evidencia



Demandas (Indicadores)	Nivel de logro
1. Reconocer la dependencia de la variable w respecto a z.	**Adecuado.** Parece reconocer que w es la variable dependiente
2. Identificar la conexión entre la noción de variación con la de derivada.	**Deficiente**. No utiliza la derivada si no la imagen directa.
3. Identificar p como un valor especifico de z	**Adecuado.** En la respuesta sugerida hace la sustitución de z por p.

Item #2 Dificultad: Intermedia

2. Considere la información de las gráficas



¿Cuál de las siguientes afirmaciones se cumple con certeza?

( ) $f'(2) > g'(2)$ ( ) $f'(2) = g'(2)$ ( ) $f'(2) < g'(2)$

Evidencia

$f'(2) > g'(2)$. Ya que según se visualizo la recta $f'(2)$ es mayor a $g'(2)$ según su pendiente

Demandas (Indicadores)	Nivel de logro
1. Relacionar en la imagen del valor de la derivada con la pendiente de la recta tangente a la curva en $x = 2$.	**Deficiente.** Parece confundir las imágenes de la función con las de las derivadas
2. Aproximar o inferir el valor de la pendiente de las rectas tangentes.	**Deficiente.** No realiza ningún procedimiento.
3. Establecer la relación entre ambas pendientes negativas.	**Deficiente.** No realiza ningún procedimiento.

Item #3 Dificultad: Intermedia

3. A partir de la información proporcionada por la tabla adjunta, determine $(f \circ h)'(1)$

( ) 9

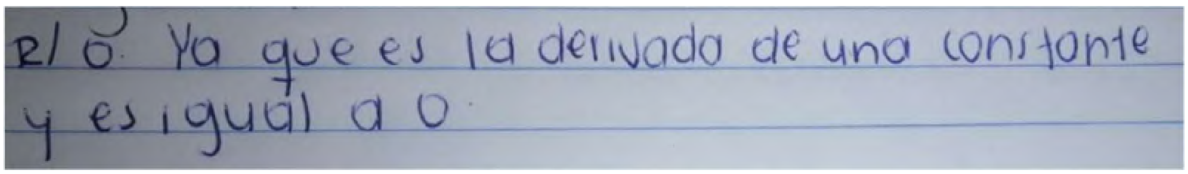
( ) 10

( ) 0

( ) -15

x	$f(x)$	$f'(x)$	$h(x)$	$h'(x)$
1	-2	-3	2	-3
2	4	5	1	-1

Evidencia


R/ 0. Ya que es la derivada de una constante y es igual a 0.

Demandas (Indicadores)	Nivel de logro
1. Trabajo en un cuadro numérico para el valor puntual x =1.	**Deficiente.** Confunde con función constante.
2. Identificar la composición de las funciones f y h.	**Deficiente.** No realiza ningún procedimiento.
3. Uso correcto de la regla de la cadena.	**Deficiente.** No realiza ningún procedimiento.

Item #4 Dificultad: Baja

4. Si $f(x) = 2^3$ entonces $f'(x)$ corresponde a

( ) $2^3 \ln 2$ ( ) $3 \cdot 2^2$ ( ) 2^3 ( ) 0

Evidencia

2^3 ln 2. Es exponencial.

Demandas (Indicadores)	Nivel de logro
1. Identificar que se trata de una función constante.	**Deficiente.** Confunde con una exponencial
2. Uso correcto de la regla de derivada de una constante.	**Deficiente.** Usa regla de la exponencial.

Item #5 Dificultad: **Alta**

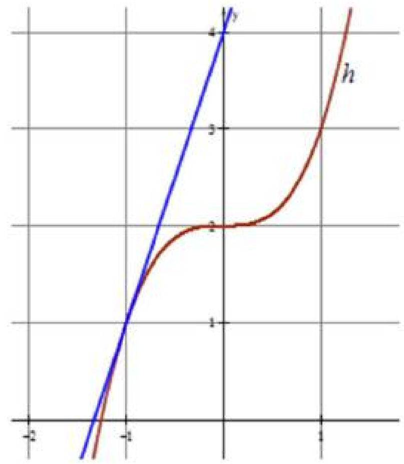
5. Según la gráfica de la función h, ¿Cuál es el valor de $h'(-1)$?

( ) 1

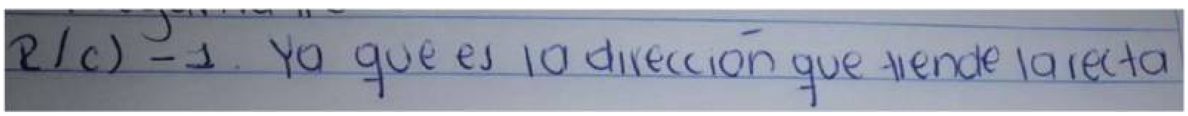
( ) 3

( ) 4

( ) -1



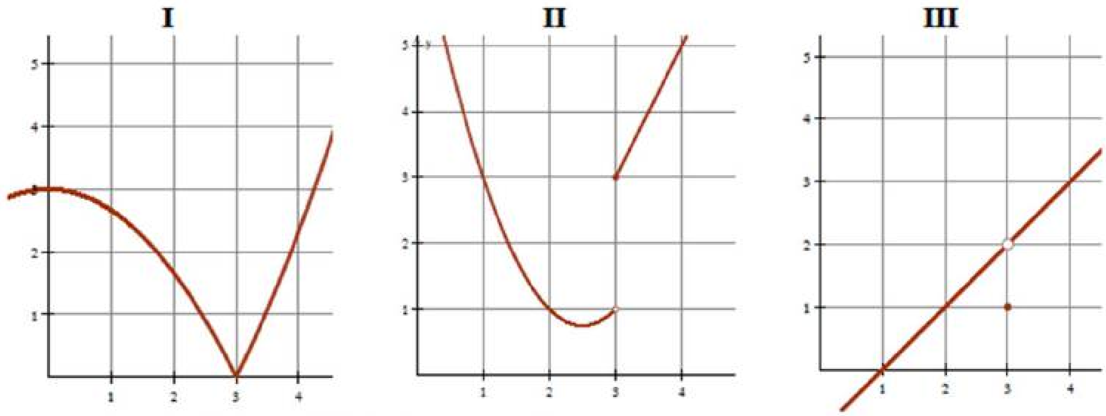
Evidencia


R/c) −1. Ya que es la dirección que tiende la recta

Demandas (Indicadores)	Nivel de logro
1. Conexión entre el cuadro numérico y gráfico	**Intermedio**. Hace alguna conexión entre la inclinación y un número negativo.
2. Relacionar derivada con pendiente de recta tangente.	**Deficiente.** Aunque hace alguna conexión entre recta y la derivada, no hay claridad.
3. Cálculo de la pendiente de la recta tangente a partir de desplazamientos en la gráfica.	**Deficiente.** No realiza ningún procedimiento.

Item #6 Dificultad: Intermedia

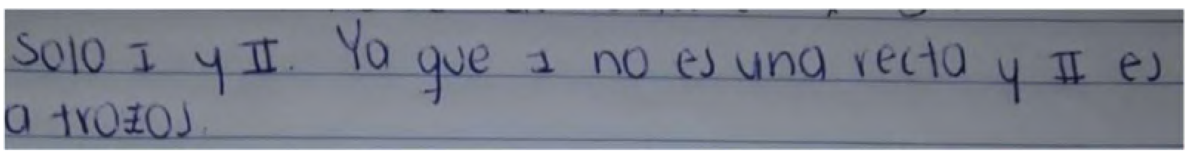
6. Considere la información de las siguientes gráficas de algunas funciones



¿Cuáles de ellas NO son derivables en $x = 3$?

( ) Sólo I y II ( ) Sólo I y III ( ) Sólo II y III ( ) I, II y III

Evidencia


Solo I y II. Ya que I no es una recta y II es a trozos.

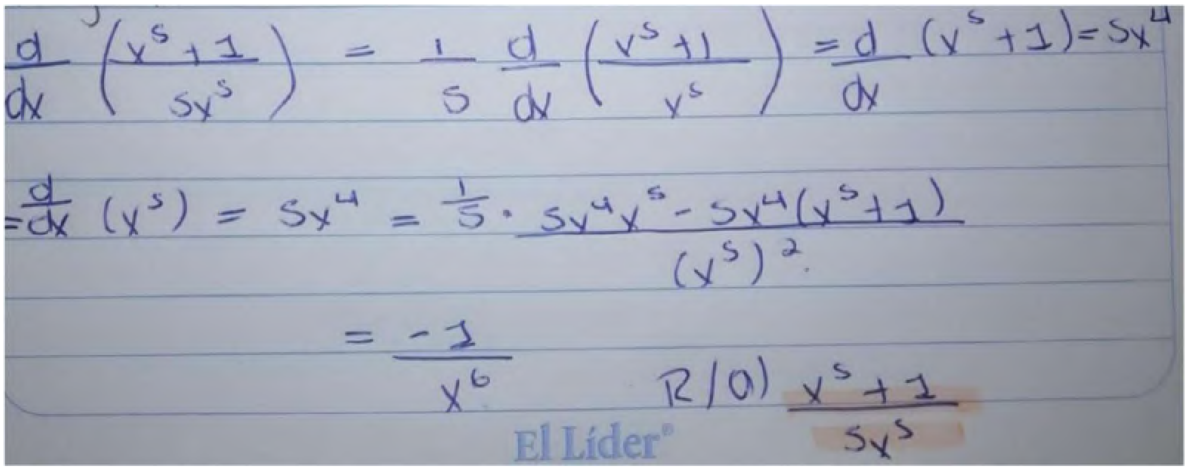
Demandas (Indicadores)	Nivel de logro
1. Relacionar continuidad y derivadas.	**Deficiente.** No sugiere relación entre continuidad y derivadas.
2. Trabajo en cuadro gráfico.	**Intermedio:** Reconoce que dos de ellas no son rectas y que una de las gráficas es a trozos.
3. Comprensión de la noción de función derivable.	**Deficiente.** No muestra ninguna compresión sobre función derivable

Item #7 Dificultad: Alta

7. Si h es una función de modo que $h'(x) = \frac{-1}{x^2}$, entonces un posible criterio para h corresponde a

( ) $\frac{2x+1}{x}$ ( ) 0 ( ) $\frac{-1}{2x}$ ( ) $\frac{2}{x^3}$

Evidencia



$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y^5+1}{5y^5}\right) = \frac{1}{5}\frac{d}{dx}\left(\frac{y^5+1}{y^5}\right) = \frac{d}{dx}(y^5+1) = 5y^4$$

$$= \frac{d}{dx}(y^5) = 5y^4 = \frac{1}{5} \cdot \frac{5y^4y^5 - 5y^4(y^5+1)}{(y^5)^2}$$

$$= \frac{-1}{y^6}$$

R/(a) $\frac{y^5+1}{5y^5}$

Demandas (Indicadores)	Nivel de logro
1. Comprender la dirección inversa en las relaciones f y f'.	**Adecuado.** El procedimiento muestra que comprende que debe derivar las opciones.
2. Resolución de problemas por no cumplimento de demandas (descarte).	**Adecuado.** Prueba las opciones, de hecho.
3. Uso correcto de la regla de la derivada potencial.	**Adecuado.** La derivada que presenta es una opción correcta.

Valoración individual para estudiante: Deficiente

Anexos I

Resultados Cuestionario Final

	Item 1			Item 2			Item 3			Item 4		Item 5			Item 6			Item 7						
E\I	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	**A**	**I**	**D**	
1	A	D	A	D	D	D	D	D	D	D	D	I	D	D	D	I	D	A	A	A	5	2	13	D
2	A	A	A	D	D	D	D	D	D	A	A	A	D	D	A	A	A	A	A	A	12	0	8	A
3	D	I	D	I	D	D	D	D	D	A	A	A	A	A	A	A	I	A	D	D	8	3	9	D
4	D	I	D	D	D	D	D	D	D	A	A	D	D	D	A	A	A	A	D	A	7	1	12	D
5	A	A	A	A	A	I	D	D	D	A	A	A	A	A	A	A	A	D	D	A	14	1	5	A
6	A	D	A	D	D	D	D	D	D	A	A	D	D	D	I	I	I	A	A	A	7	3	10	D
7	A	A	A	A	I	I	D	D	D	A	A	I	D	I	A	I	I	D	D	A	8	6	6	A
8	I	A	I	D	D	D	D	D	D	A	A	A	A	I	A	A	I	D	D	D	7	4	9	D
9	I	A	I	D	D	D	A	A	A	A	A	I	D	D	A	A	A	A	A	A	12	3	5	A
10	A	I	A	D	D	D	D	D	D	A	A	D	D	D	A	A	A	A	A	A	10	1	9	A
11	A	A	A	A	A	A	D	D	D	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	17	0	3	A
12	A	A	A	A	A	I	D	D	D	A	A	A	A	D	A	A	A	A	A	A	15	1	4	A
13	A	D	A	A	I	A	A	D	D	A	A	A	A	D	A	A	A	A	A	A	15	1	4	A
14	A	A	A	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	A	D	4	0	16	D
15	A	D	A	D	D	D	D	D	D	A	A	I	D	D	D	D	D	A	A	A	7	1	12	D
16	A	D	A	D	D	D	I	I	I	D	D	A	I	I	A	A	A	D	D	D	6	5	9	D
17	A	A	A	D	D	D	I	I	A	A	A	I	D	D	A	A	A	A	D	I	10	4	6	A
18	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	20	0	0	A
19	A	D	A	A	A	I	A	I	A	A	A	I	A	D	A	A	A	A	A	A	15	3	2	A
20	A	A	A	A	A	I	A	A	A	A	A	D	D	D	A	A	A	A	A	A	16	1	3	A
21	A	A	A	D	D	D	A	A	A	A	A	D	D	D	A	A	I	A	A	A	13	1	6	A
22	A	D	A	D	D	D	A	D	D	A	A	I	D	D	A	A	I	A	A	A	10	2	8	A
23	A	A	A	A	A	A	A	D	D	A	A	A	A	A	A	A	I	A	A	A	17	1	2	A
24	A	I	D	D	D	D	D	D	D	A	A	D	D	D	A	I	I	D	D	D	4	3	13	D
25	D	D	D	D	D	D	A	A	A	A	A	D	D	D	D	I	D	A	A	A	8	1	11	D
26	A	A	A	A	A	A	D	D	D	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	17	0	3	A
27	A	A	A	A	I	D	A	A	I	A	A	D	I	D	A	A	I	A	A	A	13	4	3	A
28	A	A	A	A	I	A	I	I	D	A	A	D	D	D	A	I	A	A	A	A	12	4	4	A
29	A	A	A	D	D	I	A	A	A	A	A	D	D	D	A	I	D	A	A	A	12	2	6	A
30	A	A	A	A	A	D	A	A	A	D	D	A	A	A	A	A	A	A	A	A	17	0	3	A
31	A	A	A	A	A	D	A	A	D	D	D	D	D	D	A	A	A	A	A	A	13	0	7	A

32	A	I	D	A	A	D	D	D	D	D	D	D	D	D	A	A	A	I	D	D	6	2	12	D
33	A	I	D	A	A	A	A	A	D	A	A	D	D	D	A	A	D	A	A	A	13	1	6	A
34	A	I	D	I	D	D	I	D	D	A	A	D	D	D	A	A	A	A	A	A	9	3	8	A
35	A	A	A	A	A	D	I	D	D	A	A	A	A	A	I	A	D	A	A	A	14	2	4	A
36	A	I	D	I	D	D	A	D	D	D	D	D	D	D	A	I	D	D	D	D	3	3	14	D
37	A	A	D	A	A	D	D	D	D	A	A	I	D	D	A	A	A	A	A	A	12	1	7	A
38	A	A	A	D	D	D	D	D	D	A	A	A	D	D	A	I	I	A	A	A	10	2	8	A
39	A	A	A	D	D	D	D	D	D	A	A	D	D	D	I	I	A	A	A	A	9	2	9	D
40	A	A	A	D	D	D	D	D	D	A	A	A	A	A	A	I	I	A	A	I	11	3	6	A
41	D	D	D	I	D	D	A	A	A	A	A	D	D	D	A	A	A	A	A	A	11	1	8	A
42	A	A	A	A	A	I	D	D	D	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	16	1	3	A
43	A	A	D	D	D	D	D	I	D	D	D	D	D	D	A	A	A	A	A	A	8	1	11	D
A	37	26	30	19	15	7	16	11	10	35	35	16	14	10	36	30	24	35	33	34				
I	2	8	2	4	4	7	5	5	2	0	0	8	2	3	3	11	11	1	0	2				
D	4	9	11	20	24	29	22	27	31	8	8	19	27	30	4	2	8	7	10	7				
	A	A	A	D	D	D	D	D	D	A	A	D	D	D	A	A	A	A	A	A				