

EL TEMA DE FUNCIONES EN LOS LIBROS DE TEXTO: UN ANÁLISIS DE LAS TAREAS PROPUESTAS

THE SUBJECT OF FUNCTIONS IN TEXTBOOKS: AN ANALYSIS OF THE PROPOSED TASKS

María Fernanda Vargas, Juan Francisco Ruiz-Hidalgo, José Antonio Fernández-Plaza
Universidad de Costa Rica. (Costa Rica), Universidad de Granada. (España)
mariafernanda.vargas@ucr.ac.cr, jfruiuz@ugr.es, joseanfplaza@ugr.es

Resumen:

Este trabajo tiene como objetivo estudiar las tareas propuestas en 3 libros de texto costarricenses, utilizados en décimo año, para el tema de funciones que es uno de los tópicos que más dificultades presenta en Secundaria. Se realiza un análisis de contenido basado en una serie de categorías que contemplan aspectos estructurales de la tarea, de contenido (significado) y cognitivos. Tras el análisis se evidencia una tendencia en los tres libros analizados, destacando la baja demanda cognitiva de las tareas propuestas. Se espera que los resultados lleven a los docentes a reflexionar sobre las tareas que presentan a sus estudiantes y la forma de enriquecerlas.

Palabras clave: libros de texto, tareas escolares, demanda cognitiva, habilidades matemáticas, funciones

Abstract:

This work is aimed at analyzing the tasks proposed in 3 Costa Rican textbooks, used in tenth grade, for the subject of functions, which is one of the most difficult topics in secondary education. So, a content analysis is carried out based on a series of categories that involve structural aspects of the task, content (meaning), and cognitive aspects. After the analysis, a trend is evident in the three books analyzed, highlighting the low cognitive demand of the proposed tasks. It is hoped that the results will lead teachers to reflect on the tasks they present to their students and how to enrich such tasks.

Keywords: textbooks, school tasks, cognitive demand, mathematics skills, functions

■ Introducción

Aunque la mayoría de los libros son creados pensando en el estudiante, gran parte del uso suele dárselo el docente. Esto es debido a que muchos docentes los emplean como la principal herramienta para planear sus lecciones (Pepin y Haggarty, 2001). Por lo tanto, resulta importante estudiar y analizar el tipo de oportunidades de aprendizaje que esta herramienta proporciona. Randahl (2012) tras analizar el uso que se le da a un libro de texto de cálculo, concluye que este se percibe principalmente como fuente de tareas. De tal forma que este es un buen aspecto para considerar cuando se analizan libros de texto.

La relevancia de las tareas es tal, que diversos estudios afirman que lo que los estudiantes aprenden está determinado en buena medida por las tareas que los docentes asignan (Sullivan et al., 2013), pues se considera que es mediante estas que se brinda realmente oportunidades de aprendizaje al alumnado (Anthony y Walshaw, 2009), permitiendo desarrollar habilidades de razonamiento y pensamiento (Lee et al., 2016). De esta forma, las tareas transmiten mensajes sobre qué son las matemáticas y qué implica conocerlas.

Dada su importancia e influencia, la investigación y estudios sobre libros de texto ha aumentado en los últimos años. Las líneas de trabajo son diversas; por ejemplo, algunos se centran en la presentación de los contenidos (p. ej. Park, 2016; Wang et al., 2017) y otros se enfocan en la comparación (p. ej. Martínez De La Rosa, 2015). Un aspecto bastante interesante que abordan numerosos trabajos sobre libros de texto tiene que ver con el tipo de tareas que se plantean y la demanda cognitiva que requieren (p. ej. Hadar y Ruby, 2019). E incluso, hay trabajos que analizan libros de texto para inferir el significado de un contenido matemático que pretende el currículo nacional (p. ej. Pino-Fan et al., 2019).

En esa línea, el presente artículo es una extensión del trabajo presentado en RELME 35, que da continuidad a otros estudios realizados (p. ej. Vargas et al., 2020) y tiene por objetivo analizar las tareas propuestas en tres libros de texto costarricenses para el tema de funciones con el foco de visualizar, de forma general, las ideas sobre función que se fomentan, con lo cual reflexionar sobre la influencia que estas podrían tener en la construcción del significado por parte del estudiantado.

El trabajar con el contenido de funciones se debe a las distintas dificultades manifestadas por parte de estudiantes, e incluso profesores, respecto a este tópico (Amaya De Armas et al., 2021; Yoon y Thompson, 2020). Pues se ha evidenciado que a menudo poseen nociones variadas y desconectadas del significado de función (Sfard, 1992).

■ Marco teórico

Para este trabajo utilizaremos el marco teórico desarrollado en Rico y Moreno (2016) que se denomina *Análisis Didáctico*. Este marco tiene un origen curricular y se estructura según cuatro tipos de análisis (contenido, cognitivo, instrucción y evaluación). En el caso concreto de este trabajo, las tareas matemáticas escolares son uno de los organizadores del análisis de la *instrucción escolar*.

Para esto, se entiende por tarea escolar como “una propuesta que solicita la actividad del alumno en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como oferta intencional para el aprendizaje o como instrumento para evaluación del aprendizaje” (Moreno y Ramírez, 2016, p. 244). El análisis de las tareas propuestas en libros de texto escolares ha sido abordado de distintas maneras, enfocándose en distintos aspectos (Fan, 2013). En nuestro caso para llevar a cabo el análisis, organizamos las categorías de Moreno y Ramírez (2016), tal como lo hicimos en Vargas et al. (2020), en tres bloques:

1. Aspectos sintácticos (forma): se analiza la estructura y formulación de la tarea.
2. Aspectos semánticos (significado): considerando el análisis de contenido en Rico (2016), contemplamos el contenido, contexto y situación de la tarea.
3. Aspectos de aprendizaje o cognitivos: se incluye la demanda cognitiva potencial, el manejo de sistemas de representación, los procesos matemáticos que fomenta y las habilidades específicas que permitirían desarrollar.

Estas tres categorías nos ayudan entender no solo el tipo de tarea que propone para el tema de funciones, sino el nivel de dificultad con el que se espera sea abordado este contenido.

■ Metodología

Para este estudio se han analizado 3 libros de texto utilizados en Costa Rica en décimo año, a los cuales haremos referencia como libro A (Publicaciones Porras y Gamboa, 2015), libro B (Cambroner, 2017) y libro C (Gómez, 2015). Es importante mencionar que, en Costa Rica, el Ministerio de Educación Pública no define un libro que deba ser usado en todo el país, es el docente quien decide si emplea alguno o se basa en varios de ellos para sus lecciones. Por lo tanto, la escogencia de los tres que se analizaron se basa en una consulta realizada a algunos docentes sobre el material de apoyo que utilizan para planificar sus lecciones; además de la disponibilidad y acceso a los mismos. En la tabla 1 se aprecia el número de tareas propuestas, así como la cantidad de ítems o subapartados en los que se dividen, siendo nuestra unidad de análisis precisamente cada uno de los ítems propuestos. En total 1262 ítems.

Tabla 1. Número de tareas en cada libro según área temática.

Área temática	Cantidad de tareas (cantidad de ítems)		
	Libro A	Libro B	Libro C
Introducción de la noción de función	28 (85)	9 (31)	254 (314)
Análisis de gráficas (monotonía, asíntotas)	35 (80)		180 (184)
Dominio máximo y composición de funciones	4 (13)	8 (15)	142
Función lineal y cuadrática	92 (181)	20 (45)	205
Total	159 (326)	37 (91)	781 (845)

Fuente: elaboración propia.

Pese a que cada libro tiene sus particularidades, abordan básicamente los mismos contenidos; aunque profundizando más o menos en cada uno de ellos. Por ejemplo, el libro B estudia en un mismo capítulo los aspectos básicos de una función y la representación gráfica (ver tabla 1). Un primer aspecto por destacar es la notoria diferencia en la cantidad de tareas que propone cada libro para el tema de funciones.

Sistema de categorías para el análisis

Tal como se señaló en el marco teórico, se contemplaron 9 variables distribuidas en 3 categorías. De la categoría *sintética* se analizaron:

- Estructura (abierta/cerrada): Ponte (2004) considera que una tarea cerrada es aquella en la que se expresa con claridad lo que se da y lo que se pide, mientras que una abierta no está del todo claro lo que se da, lo que se pide, o ambas cosas. Señala, además, que las tareas abiertas se pueden clasificar en proyectos o investigaciones, mientras que las cerradas en ejercicios o problemas.
- Planteamiento (directo/inverso): para Groetsch (2001), en una tarea directa se dispone de unos datos, cierto procedimiento y se solicita un resultado, el cual es único. En las tareas inversas, se desconocen los datos o el procedimiento que producen cierto resultado; estas tareas pueden tener múltiples soluciones o ser insolubles. Por ejemplo, una tarea directa es dar el criterio de una función y solicitar el cálculo de imágenes; una tarea inversa sería determinar el criterio de una función conociendo las imágenes de algunos elementos de su dominio.

De la categoría del *significado*, se analizó:

- Contenido: identificamos el contenido matemático en cada uno de los ítems.

- Situación: agruparemos los ítems según en la situación PISA en que se presentan: personales, sociales, laborales o científicas (OECD, 2016).
- Contexto: tomamos los distintos contextos matemáticos, funciones o necesidades a las que el contenido de función atiende en cada uno de los ítems.

De la categoría *cognitiva*:

- Demanda cognitiva potencial, donde se definen cuatro niveles: (a) memorización, (b) procedimiento sin conexión, (c) procedimiento con conexión y (d) hacer matemática (Stein et al., 1996).
- Manejo de sistemas de representación: basados en (Duval, 1999) se analizar si la tarea solicita transformaciones intra-sistemas (procesamiento) o conexiones entre sistemas (conversiones).
- Procesos matemáticos que fomenta: razonar y argumentar, resolver problemas, conectar, representar o comunicar (Ministerio de Educación Pública, 2012).
- Habilidades específicas por desarrollar de acuerdo con lo que establece el Ministerio de Educación Pública (2012) para décimo año.

■ Resultados

En el siguiente apartado se detallan los resultados obtenidos para cada una de las variables analizadas.

Estructura y formulación de la tarea

La *estructura* de prácticamente todas las tareas analizadas es cerrada, esto quiere decir que no se plantean proyectos o investigaciones que fomenten la indagación por parte del estudiantado. Sin embargo, se hallaron un par de ejemplos de ítems, en los que se aprovecha el contexto de la tarea para que el estudiantado reflexione sobre una problemática social.

Aunque es entendible que las tareas cerradas tengan más presencia, pues demandan menos tiempo de ejecución y esto permite poder realizar otras tareas, lo cierto es que las tareas abiertas fomentan una serie de habilidades necesarias como la indagación, selección y análisis de datos, por lo que sería deseable hallar más tareas de este tipo.

Ahora bien, es importante no confundir una tarea de estructura abierta con una de respuesta abierta. Las tareas de estructura abierta pueden llevar a distintas respuestas, pero también una tarea de estructura cerrada podría aceptar más de una respuesta válida. Por ejemplo, en la figura 1, se aprecia una tarea cerrada de respuesta abierta. Y aunque no formaba parte del análisis, detectamos que este tipo de tarea (respuesta abierta) también es poco común en los libros de texto analizados.

Figura 1. Tarea propuesta en el libro C.

Dibuje una gráfica que represente a la función $h :]-1, 2[\rightarrow]-3, 3[$ sobreyectiva y estrictamente decreciente.

Fuente: tarea tomada de Gómez (2015).

En cuanto a la *formulación* de la tarea, la tabla 2 muestra los resultados en cada caso. Es impresionante la diferencia entre el porcentaje de ítems formulados de forma directa y los inversos.

Tabla 2. *Formulación de los ítems analizados.*

Formulación	Porcentaje (%) de ítems según la formulación		
	Libro A N=359	Libro B N=9	Libro C N=845
Directa	94	95	93
Inversa	6	5	7
N= cantidad de ítems en cada libro			

Fuente: elaboración propia.

Debe señalarse que en el análisis de cada uno de los ítems se tomó en cuenta la intención de este; por lo que en algunos casos ítems que pudieran ser similares fueron clasificadas de forma distinta. Por ejemplo, “hallar el criterio de una función lineal conociendo dos de sus puntos” puede considerarse inversa, si se le plantea al estudiante antes de estudiar el procedimiento para determinar hallar el valor de m y b en la ecuación de la recta; pues al conocer las fórmulas podríamos hablar de un planteamiento directo: se dan unos datos, se espera se aplique un procedimiento para dar un resultado. Mientras que en la primera opción ese procedimiento no estaba establecido y demandaba de un razonamiento a la inversa.

Aunque ambos tipos de tareas son necesarios y provechosos en el proceso de aprendizaje, las tareas inversas tienen la particularidad que más que aplicar un procedimiento demandan la comprensión de este, por lo que son un recurso muy provecho que generalmente tienen una complejidad mayor.

Contenido

Como se indicó en la metodología, los temas abordados en cada uno de los libros fueron básicamente los mismos; no obstante, la profundidad de aspectos abordados y la cantidad de ejercicios propuestos en cada caso era distinta. En la tabla 3 se aprecia el porcentaje de ítems dedicados en cada caso, la clasificación o separación en cuanto al contenido se realizó considerando la separación que hacían los propios libros.

Tabla 3. *Contenido abordado en cada uno de los ítems analizados.*

Contenido	Porcentaje (%) de ítems según el contenido		
	Libro A N=359	Libro B N=91	Libro C N=845
Criterio de una función	8	9	6
Nociones gráficas funciones (variables dependiente e independiente, ámbito, dominio, imagen, cortes con los ejes, gráfico)	29	26	27
Concepto de función (Función vs relación)	8	7	5
Composición de funciones	4	16	5
Monotonía y extremos	6	1	12
Clasificación de funciones según el codominio	3	9	5
Representación gráfica de una función	5	9	3
Análisis de funciones a partir de su representación gráfica.	10	7	6
Particularidades de la función lineal (valores de m y b , propiedades...)	8	1	4

Particularidades de la función cuadrática (eje simetría, vértice, concavidad, propiedades...)	8	3	9
Resolución de problemas	11	9	7
Rectas perpendiculares y paralelas	-	3	-
Dominio máximo	-	-	11
N= cantidad de ítems en cada libro			

Fuente: elaboración propia.

Se debe aclarar que en el libro B se encontraron más ítems relacionados con la monotonía de la función, pero estos siempre se incluyeron dentro del contenido de análisis de funciones a partir de su representación gráfica, mientras que los otros libros primero lo incluyeron como un contenido aparte.

Se puede observar que, en casi todos los casos, el porcentaje de ítems en cada contenido es similar, destacando que en el que más ítems se plantean es en la sección de nociones básicas de funciones, lo cual parece lógico al tratarse de la base del contenido. Una diferencia es el porcentaje de ítems propuestos por el libro B a la composición de funciones; o el libro C al dominio máximo, temas que, como se detalla más adelante no aparece en los planes de estudio para ese año escolar. Un aspecto que llama la atención es que solo un ítem del libro A solicitaba la representación tabular de una función, el sistema de representación más solicitado fue el gráfico.

Contexto y situación

Un aspecto de gran relevancia es el contexto y la situación en la que son planteadas las tareas, pues estas dan información sobre la aplicabilidad del contenido dentro y fuera de la matemática. En la tabla 4 se muestra una clasificación de *contextos* en los que se propusieron los ítems y su distribución porcentual. Tal como se aprecia, las funciones fueron abordadas fundamentalmente en un contexto algebraico y gráfico, lo cual es importante, pues permite al estudiante visualizar diferentes contextos matemáticos en los que involucra la función. Sin embargo, el contexto aplicado tuvo menor presencia en los tres libros.

Tabla 4. Contexto de los ítems propuestos.

Contexto	Porcentaje (%) de ítems según el contexto		
	Libro A N=359	Libro B N=91	Libro C N=845
Algebraico	42	31	56
Gráfico	43	56	29
Aplicado	15	13	15
N= cantidad de ítems en cada libro			

Fuente: elaboración propia.

Más interesante aún es analizar la situación dentro de la cual se plantearon los ítems, pues tal como se aprecia en la tabla 5, la mayoría se presentan dentro de una situación matemática; esto incluso en tareas con un contexto aplicado, como se aprecia en la figura 2.

Tabla 5. Situación en la que se plantea cada ítem.

Situación	Porcentaje (%) de ítems según la situación		
	Libro A N=359	Libro B N=91	Libro C N=845
Matemática	84	88	90
Otra ciencia	4	-	1
Laboral	4	4	5
Personal	2	7	2
Social	6	1	2

N= cantidad de ítems en cada libro

Fuente: elaboración propia.

Este es un resultado al que hay que prestarle atención, pues este tipo de tareas refuerzan la idea mal concebida de que la matemática es una disciplina cuya utilidad está dentro de la misma matemática.

Figura 2. Tarea propuesta en el libro C.

35) Considere la figura adjunta y las proposiciones :

i) El área sombreada se puede calcular con la fórmula $A(x) = (4 - x)(10 - x)$

ii) Para $x = 2$ el área es 20 .

De ellas son verdaderas

A) Solo i)
B) Solo ii)
C) Ambas
D) Ninguna

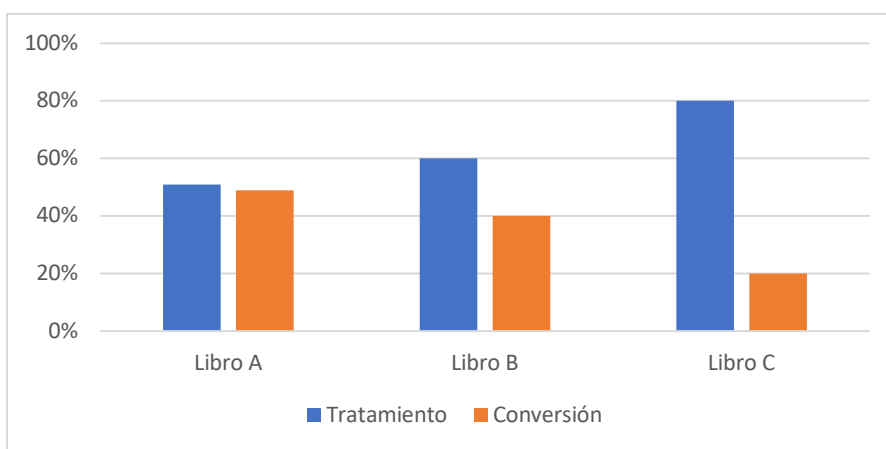
Fuente: tarea tomada de Gómez (2015).

Manejo del sistema de representación

Con esta variable iniciamos los aspectos cognitivos de la tarea, como se mencionó, el fomento de conexiones entre sistemas de representación es una cuestión deseable en el estudio de contenidos matemáticos. En el planteamiento de la tarea, se usan distintos sistemas de representación, destacando en este caso el simbólico y el verbal. Sin embargo, resulta de interés analizar el manejo que se solicita de dicho sistema.

Como se observa en la figura 3, el tratamiento o la conversión entre sistemas es algo que se aborda de manera distinta en los libros; por ejemplo, el libro A es bastante equilibrado al respecto, solicitando ambos procesos casi que de forma igualitaria; mientras que el libro C se basa en el tratamiento o procesamiento del sistema dado. Esto es algo relevante, pues si bien el dominio de los distintos sistemas de representación es importante, también lo es el poder establecer conexiones entre estos.

Figura 3. Manejo de los sistemas de representación solicitado en los ítems.



Fuente: elaboración propia.

Demanda cognitiva potencial

La demanda cognitiva potencial es uno de los aspectos más estudiados respecto a las tareas que se plantean al estudiar matemática. Como señalamos en el apartado del marco teórico, para el análisis empleamos la categorización dada por Stein et al. (1996), quienes consideran cuatro niveles de demanda cognitiva. Sin embargo, para una mejor clasificación de los ítems analizados, creamos un sistema de subcategorías basado en el tipo de tareas que se encontró durante el análisis, lo cual permite clarificar un poco el tipo de tarea propuesta. En la tabla 6 se aprecian los resultados obtenidos.

Tabla 6. Demanda cognitiva de los ítems analizados.

Categoría	Subcategoría	Porcentaje (%) de ítems según la demanda		
		Libro A N=359	Libro B N=91	Libro C N=845
Memorización		-	3	-
Procedimiento sin conexión	Cálculo directo	21	32	17
	Cálculo indirecto	11	10	19
	Resolución de problemas simples (dado el criterio)	7	7	6

Procedimiento con conexión	Aplicar propiedades (dado el criterio)	-	1	2
	Reconocer o identificar	6	17	12
	Representación (criterio)	4	10	3
	Representación (condiciones)	1	-	-
	Interpretación de gráficas	35	11	15
	Deducción-Razonamiento	6	7	7
	Transcripción al lenguaje simbólico		-	5
Hacer matemática	Análisis de propiedades	4	-	9
	Resolución de problemas (sin criterio)	5	2	3
	Justificación - Prueba	-	-	2
N= cantidad de ítems en cada libro				

Fuente: elaboración propia.

Destaca el bajo porcentaje de tareas en el nivel de demanda más alto; pues la mayoría de los ítems se centran en el segundo nivel: procedimiento sin conexión. Esto nos evidencia que las tareas planteadas para el tema de funciones buscan reforzar, principalmente, la aplicación correcta de algoritmos; sin necesidad de razonamientos complejos ni el establecer conexiones entre los diferentes elementos estudiados respecto al tema. Aunque es destacable que una cantidad considerable de ítems se encontraran en el tercer nivel de demanda cognitiva.

Procesos y habilidades matemáticas

Finalmente, también relacionados con aspectos cognitivos, se analizaron los procesos y las habilidades matemáticas fomentadas por cada uno de los ítems. Desde el currículo costarricense se proponen 5 procesos matemáticos que deben trabajarse a través de todos los contenidos matemáticos, y para cada nivel educativo se plantean una serie de habilidades que esperan desarrollarse.

En la tabla 7 se observa en qué porcentaje cada uno de los procesos se manifestó en los ítems analizados; es importante mencionar que en un mismo ítem puede involucrarse más de un proceso.

Tabla 7. Procesos matemáticos fomentados en cada uno de los ítems.

Proceso	Porcentaje (%) de ítems que fomentan cada proceso		
	Libro A N=359	Libro B N=91	Libro C N=845
Razonar y argumentar	23	14	25
Plantear y resolver problemas	15	10	7
Conectar, establecer relaciones	3	89	5
Representar de diversas formas	53	46	33
Manipulación simbólica	31	58	44
Comunicar	-	-	7
N= cantidad de ítems en cada libro			

Fuente: elaboración propia.

Es claro que el proceso que más se fomenta al estudiar funciones es el de representación, dada su relevancia y la frecuencia con la que se observó, se separaron aquellos ítems que lo que fomentan es la representación y manipulación simbólica, que como se puede observar abarca un alto porcentaje de los ítems. Esto resulta importante, pues esto reafirma la creencia de que la matemática consiste en una serie de símbolos que debemos aprender a manipular. Además, llama la atención el poco fomento de procesos tan importantes como el de establecer relaciones entre los distintos elementos e ideas involucradas en el estudio de las funciones. En ese sentido no se aprecia un equilibrio entre el desarrollo de los distintos procesos.

Un aspecto en el que sí se apreció mayor balance, fue en cuanto a las habilidades estipuladas en los planes de estudio. Tal como se aprecia en la tabla 8, todas las habilidades fueron abordadas en los libros, y aunque hay un porcentaje mucho mayor de tareas en la habilidad de analizar funciones a partir de sus representaciones, lo cierto es que es una habilidad mucho más general que otras de las establecidas.

Algo a destacar es que el libro C, incluyó varias tareas que abordaban temas y habilidades no propuestas en el currículo, como es el caso de las tareas que tienen que ver con dominio máximo, e incluso dedicó cerca de 40 ítems para el repaso de conocimientos previos.

Tabla 8. *Habilidad específica que promueve cada ítem.*

Habilidad	Porcentaje (%) de ítems según la habilidad		
	Libro A N=359	Libro B N=91	Libro C N=845
Identificar si una relación dada en forma tabular, simbólica o gráfica corresponde a una función.	8	7	5
Evaluar el valor de una función dada en forma gráfica o algebraica, en distintos puntos de su dominio.	10	3	12
Analizar una función a partir de sus representaciones.	29	21	35
Calcular la composición de dos funciones.	3	16	5
Representar gráficamente una función lineal.	3	3	2
Determinar la pendiente, la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en forma gráfica o algebraica.	14	8	4
Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella.	6	11	3
Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$	8	18	8
Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas.	12	10	9
Relacionar la representación gráfica con la algebraica.	7	3	3

N= cantidad de ítems en cada libro

Fuente: elaboración propia.

■ Conclusiones

En términos generales, pese a que la cantidad de ítems es muy diferente en cada libro, se aprecia una tendencia similar en algunos aspectos. Por ejemplo, la estructura y el planteamiento de las tareas analizadas es el mismo en los tres libros, tratándose de tareas cerradas y directas. Y aunque está bien presentar este tipo de tareas, resulta necesario enfrentar al estudiantado a tareas abiertas e inversas que fomenten más que la aplicación de procedimientos y algoritmos.

Respecto a los aspectos de significado, llama enormemente la atención la tendencia a no presentar la matemática como una herramienta útil en la resolución de problemas cotidianos; si bien es cierto se hallan algunos ejemplos de tareas en situaciones distintas a la matemática, también es verdad que el predominio lo tienen las tareas en esta situación y en contextos no aplicados, lo cual coincide con otros estudios previos en donde las tareas presentan la idea de que las aplicaciones de la matemática están dentro de la misma disciplina (Vargas et al., 2020).

En cuanto a la demanda cognitiva, se trata principalmente de tareas que solicitan un procedimiento sin conexión, lo cual es interesante, pues se ha demostrado que altos logros de aprendizaje se asocian con tareas que involucran altos niveles de pensamiento y razonamiento (Smith y Stein, 1998).

En esa línea, se analizó el manejo de los sistemas de representación solicitado, y aunque una buena cantidad de tareas piden realizar conexiones entre un sistema y otro, la mayoría lo que demanda es una manipulación sobre un único sistema. Lo cual es un aspecto que podría mejorarse, pues diversos estudios señalan que el manejo y conexiones entre los distintos sistemas promueven una mejor comprensión (p. ej. Chang et al., 2016).

Por otra parte, el análisis permitió observar que algunos procesos matemáticos, como el de resolver problemas, son poco abordados, lo cual llama mucho la atención pues es precisamente el enfoque que plantea el Ministerio de Educación en Costa Rica. Esto se reafirma al analizar el fomento de las habilidades específicas que deben desarrollarse; donde la habilidad de plantear y resolver problemas tiene poca presencia en los libros de texto analizados.

En resumen, aunque en los libros se encuentran ejemplos muy interesantes de tareas, es importante reflexionar sobre la tendencia que siguen, pues estas tareas en conjunto son las que influyen en los significados que construye el estudiantado respecto al tema de funciones. Por lo tanto, esperamos que el análisis pueda servir de guía para que los docentes caractericen y reflexionen sobre las tareas que plantean a sus estudiantes, con miras a enriquecer el aprendizaje de las Matemáticas.

■ Referencias bibliográficas

- Amaya De Armas, T., Castellanos, A. G. y Pino-Fan, L. R. (2021). Competencias de profesores en formación en matemáticas al transformar las representaciones de una función. *Uniciencia*, 35(2), 1-15. <https://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.12>
- Anthony, G. y Walshaw, M. (2009). *Effective pedagogy in mathematics*. international Academy of Education.
- Cambronero, F. (2017). *Matemática 10. Un enfoque práctico*. Didáctica Multimedia.
- Chang, B., Cromley, J. G. y Tran, N. (2016). Coordinating Multiple Representations in a Reform Calculus Textbook. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14, 1475-1497. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9652-3>
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.
- Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: Towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education*, 45, 765-777.
- Gómez, L. (2015). *Matemática 10°. Desarrollando habilidades*. Editorial PIMAS.

- Groetsch, C. W. (2001). Teaching-Inverse problems: The other two-thirds of the story. *Quaestiones Mathematicae*, 24(1), 89-94.
- Hadar, L. L. y Ruby, T. L. (2019). Cognitive opportunities in textbooks: The cases of grade four and eight textbooks in Israel. *Mathematical Thinking and Learning*, online. <https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1564968>
- Lee, K. H., Lee, E. J. y Park, M. S. (2016). Task Modification and Knowledge Utilization by Korean Prospective Mathematics Teachers. *Pedagogical Research*, 1(2). <http://dx.doi.org/10.20897/lectito.201654>
- Martínez De La Rosa, F. (2015). Esquemas conceptuales de los estudiantes en relación con algunas características de las funciones. *Suma*, 79, 41-52.
- Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de estudio de Matemáticas*. San José, Costa Rica.
- Moreno, A. y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 243-257). Pirámide.
- OECD (2016). *PISA 2015 assessment and analytical framework: Science, reading, mathematics and financial literacy*. París, Francia: OECD.
- Park, J. (2016). Communicational approach to study textbook discourse on the derivative. *Educational Studies in Mathematics*, 91, 395-421.
- Pepin, B. y Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: A way to understand teaching and learning cultures. *ZDM Mathematics Education*, 33(5), 158-175.
- Pino-Fan, L., Parra-Urrea, Y. y Castro-Gordillo, W. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno, *Revista Internacional de Investigación en Educación*, 11(23), 201-220. doi: 10.11144/Javeriana.m11-23.sfp
- Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos y J. P. Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Graó.
- Publicaciones Porras y Gamboa. (2015). *Matemática 10*. Autores.
- Randahl, M. (2012). First-year engineering students' use of their mathematics textbook—Opportunities and constraints. *Mathematics Education Research Journal*, 24, 239-256. <https://doi.org/10.1007/s13394-012-0040-9>
- Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 85-100). Pirámide.
- Rico, L. y Moreno, A. (Eds.). (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*. Pirámide.
- Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification the case of function. In G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59-84). Mathematical Association of America. MAA Notes 25.
- Smith, M. y Stein, M. (1998). Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 344-350.
- Stein, M. K., Grover, B. W. y Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2), 255-288.
- Sullivan, P., Clarke, D. y Clarke, B. (Eds.). (2013). *Teaching with Tasks for Effective Mathematics Learning*. Springer.

- Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2020). La derivada en los libros de texto de 1° de bachillerato: un análisis a las tareas propuestas. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 18, 87-102.
- Wang, Y., Barmby, P. y Bolden, D. (2017). Understanding Linear Function: A Comparison of Selected Textbooks from England and Shanghai. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15, 131-153. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9674-x>
- Yoon, H. y Thompson, P. (2020). Secondary teachers' meanings for function notation in the United States and South Korea. *Journal of Mathematical Behavior*, 60, 100804. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100804>