

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
SISTEMA DE ESTUDIOS DE POSGRADO

PRONÓSTICO DE SERIES DE TIEMPO MEDIANTE
VECTORES AUTO REGRESIVOS CON SIMULACIÓN PARA
ESTIMAR LA DISTRIBUCIÓN POSTERIOR DE
COEFICIENTES EN EL CONTEXTO DE VARIABLES
CREDITICIAS Y MACROECONÓMICAS EN COSTA RICA.

Trabajo de investigación aplicada sometido a la
consideración de la Comisión del Programa de Estudios de
Posgrado en Estadística para optar al grado y el título de
Maestría Profesional en Estadística.

DANIEL CALVO BRICEÑO

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio, Costa Rica

2024

DEDICATORIA

A mi padre y madre, por su amor incondicional, por enseñarme el valor del esfuerzo y la perseverancia, y estar apoyándome en cada paso de mi vida.

A mis hermanos, por estar siempre a mí lado, por su apoyo en momentos difíciles y compartir esos momentos de alegría.

A mi esposa, por sus palabras de aliento y comprensión, por apoyarme en perseguir mis sueños.

AGRADECIMIENTO

Quiero agradecer a mi director de tesis, el Dr. Guaner Rojas, por su guía, paciencia y valiosas recomendaciones. Su experiencia y conocimientos han sido fundamentales a lo largo de este proyecto.

Los lectores, el Dr. Juan Muñoz y el Dr. Ricardo Alvarado por el apoyo desde el inicio hasta el final de este proyecto, por las observaciones y sugerencias realizadas.

Al Sr. Francisco Quirós y mis profesores del bachillerato el Dr. Luis Barboza y el Dr. Juan José Víquez, por su recomendación para poder emprender este camino.

Agradezco a mis extraordinarios compañeros de estudio Jesús Guzmán, Pablo Zamora.

“Este trabajo final de investigación aplicada fue aceptado por la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Estadística de la Universidad de Costa Rica, como requisito parcial para optar al grado y título de Maestría Profesional en Estadística”

Dr. Juan Robalino Herrera
**Representante de la Decana
Sistema de Estudios de Posgrado**

Dr. Guaner Rojas Rojas
Profesor Guía

Dr. Juan Muñoz Giró
Lector

Dr. Ricardo Alvarado Barrantes
Lector

Dr. Gilbert Brenes Camacho
**Director
Programa de Posgrado en Estadística**

Daniel Calvo Briceño
Sustentante

Índice general

Índice general	v
Resumen	VII
Resumen en Inglés	VIII
Índice de cuadros	IX
Índice de figuras	X
1. Introducción	1
1.1. Objetivo General	4
1.2. Objetivos Específicos	4
2. Marco Teórico	5
2.1. Teoría de Series de Tiempo	5
2.1.1. Estacionariedad	6
2.1.2. Prueba de raíz unitaria	7
2.2. Modelos de vectores auto regresivos (VAR)	8
2.2.1. Estimación de rezagos	9
2.2.2. Valores Atípicos	10
2.2.3. Diagnóstico	10
2.2.4. Prueba de Portmanteau Multivariada	10
2.2.5. Prueba de heterocedasticidad ARCH	11
2.2.6. Prueba de normalidad Jarque Bera	11
2.3. Simulación y estadística Bayesiana	12
2.3.1. Inferencia Bayesiana	12
2.3.2. Estimación Bayesiana de un modelo de regresión lineal	13
2.3.3. Distribución previa	15
2.3.4. Método Cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC)	16
2.3.5. Muestreo de Gibbs	16
2.3.6. Criterios de convergencia	18
3. Metodología	20
3.1. Datos Utilizados	20
3.2. Descripción de las variables	21

3.2.1.	Variables Crediticias	21
3.2.2.	Variables Macroeconómicas	22
3.3.	Estrategia de análisis	24
3.3.1.	Especificación modelo VAR frecuentista	24
3.3.2.	Simulación de la distribución posterior de coeficientes	27
3.3.3.	La previa <i>Minnesota</i>	27
3.3.4.	Evaluación de los pronósticos	30
3.3.5.	Raíz de Error Cuadrático Medio (RMSE)	30
3.3.6.	Error de Porcentaje Medio Absoluto (MAPE)	30
3.4.	Software estadístico	31
4.	Resultados	32
4.1.	Análisis descriptivo	32
4.1.1.	Análisis de correlaciones	33
4.1.2.	Análisis de Estacionariedad	34
4.1.3.	Análisis de valores atípicos	35
4.2.	Aplicación del modelo VAR frecuentista	35
4.2.1.	Estimación de rezagos	36
4.2.2.	Estimación del modelo	36
4.2.3.	Ajuste del modelo	39
4.3.	Pruebas de diagnóstico modelo frecuentista	40
4.3.1.	Autocorrelación de los residuos y heterocedasticidad	40
4.3.2.	Normalidad de los residuos	40
4.4.	Estimación de la distribución posterior de los coeficientes usando si- mulación Monte Carlo con cadenas de Markov	40
4.5.	Criterios de convergencia	41
4.6.	Comparación de resultados	44
5.	Conclusiones	47
	Bibliografía	50
	A. Apéndice A	54
	B. Apéndice B	55

Resumen

Las instituciones financieras desempeñan un papel esencial en la economía al facilitar la intermediación financiera, canalizando el ahorro hacia la inversión. Sin embargo, esta actividad conlleva riesgos inherentes, como el riesgo de crédito, liquidez, tasas de interés y operativo. El riesgo de crédito se refiere a la posibilidad de que un deudor incumpla sus obligaciones. Dicho riesgo puede afectar la rentabilidad de los bancos y, en casos extremos, generar problemas de solvencia y crisis financieras si la morosidad es alta, lo que perjudica la confianza en el sistema bancario. Para gestionar estos riesgos, las entidades financieras necesitan modelos sólidos que pronostiquen la calidad de su cartera crediticia. La Superintendencia General de Entidades Financieras (SUGEF) promueve pruebas de estrés para evaluar la gestión de riesgos de cada entidad. Además de factores internos como liquidez y rentabilidad, factores macroeconómicos como el PIB, inflación y tipos de interés también influyen en la morosidad del sistema financiero. Estudios han demostrado la sensibilidad de la morosidad a factores macroeconómicos como la deuda pública y la inflación. Asimismo, se ha encontrado que variables como la actividad económica y las nuevas colocaciones de crédito no tienen un impacto inmediato en la morosidad, mientras que la inflación y el tipo de cambio sí lo tienen. De tal modo, se propone utilizar modelos de vectores autorregresivos (VAR) para relacionar variables macroeconómicas con indicadores crediticios. Se plantea una comparación entre el enfoque frecuentista y bayesiano para estimar estos modelos. El enfoque bayesiano, al incorporar información adicional sobre los parámetros a estimar, ofrece ventajas sobre el frecuentista, especialmente en muestras pequeñas donde puede haber problemas de sobreajuste. Los modelos VAR bayesianos mitigarían este problema al asignar una distribución de probabilidad a los coeficientes del modelo, reduciendo así la influencia de la variabilidad aleatoria en las estimaciones.

Resumen en Inglés

Financial institutions play a crucial role in the economy by facilitating financial intermediation, channeling savings into investments. However, this activity involves inherent risks, such as credit, liquidity, interest rate, and operational risks. Credit risk refers to the possibility that a debtor will default on their obligations. This risk can affect the profitability of banks and, in extreme cases, lead to solvency issues and financial crises if delinquency rates are high, harms confidence in the banking system. To manage these risks, financial institutions need robust models to forecast the quality of their loan portfolios. General Superintendence of Financial Entities (SUGEF) promotes stress tests to assess the risk management of each entity. In addition to internal factors such as liquidity and profitability, macroeconomic factors like GDP, inflation, and interest rates also influence financial system delinquency. Studies have shown the sensitivity of delinquency to macroeconomic factors such as public debt and inflation. Moreover, it has been found that variables like economic activity and new credit placements do not have an immediate impact on delinquency, whereas inflation and the exchange rate do. It is proposed to use vector autoregressive (VAR) models to relate macroeconomic variables to credit indicators. A comparison between the frequentist and Bayesian approaches for estimating these models is suggested. The Bayesian approach, by incorporating additional information about the parameters to be estimated, offers advantages over the frequentist approach, especially in small samples where overfitting can be an issue. Bayesian VAR models mitigate this problem by assigning a probability distribution to the model coefficients, thereby reducing the influence of random variability in the estimates.

Índice de cuadros

3.1. Variables utilizadas en el desarrollo de los modelos.	20
3.2. Distribución de la cartera de crédito de saldo principal por entidad bancaria.	21
4.1. Estadísticas descriptivas de las variables, enero 2012 - diciembre 2019	33
4.2. Prueba de Estacionariedad de Dickey-Fuller	34
4.3. Estimación cantidad de rezagos óptimos	36
4.4. Modelo VAR Bancos Públicos: Ecuaciones y coeficientes	37
4.5. Modelo VAR Bancos Privados: Ecuaciones y coeficiente	38
4.6. Prueba de Portmanteau y ARCH	40
4.7. Test de normalidad de residuos multivariante	40

Índice de figuras

4.1. Comportamiento histórico de las variables crediticias - Período enero 2012-diciembre 2019	32
4.2. Correlación de la variables utilizadas	34
4.3. Diagramas de cajas	35
4.4. Valores Ajustados - Modelo VAR Bancos Públicos	39
4.5. Traza e histograma de los parámetros estimados - Bancos Públicos . .	42
4.6. Función de autocorrelación - Bancos Públicos	43
4.7. Variación del Error - Bancos Públicos	45
4.8. Variación del Error - Bancos Privados	46
B.1. Comportamiento histórico de las variables macroeconómicas - Periodo Enero 2012-Diciembre 2019	55
B.2. Valores Ajustados - Modelo VAR Bancos Privados	56
B.3. Pronósticos modelo VAR frecuentista para Bancos Públicos	57
B.4. Pronósticos modelo VAR frecuentista para Bancos Privados	58
B.5. Traza e histograma de los parámetros estimados - Bancos Públicos . .	59
B.6. Función de autocorrelación - Bancos Privados	60
B.7. Traza e histograma de los parámetros estimados - Bancos Privados . .	61
B.8. Traza e histograma de los parámetros estimados - Bancos Privados . .	62
B.9. Función de autocorrelación - Bancos Privados	63
B.10. Función de autocorrelación - Bancos Privados	64
B.11. Criterio de Geweke - Bancos Públicos	65
B.12. Criterio de Geweke - Bancos Públicos	65
B.13. Criterio de Geweke - Bancos Privados	66
B.14. Criterio de Geweke - Bancos Privados	66
B.15. Criterio de Gelman y Rubin - Bancos Públicos	67
B.16. Criterio de Gelman y Rubin - Bancos Públicos	67
B.17. Criterio de Gelman y Rubin - Bancos Privados	68
B.18. Criterio de Gelman y Rubin - Bancos Privados	68

Introducción

Las instituciones financieras juegan un papel importante y fundamental en la economía al tener como principal función la actividad de intermediación financiera, captar los recursos financieros excedentarios y prestarlos a los agentes deficitarios, participando como canalizadores del ahorro y la inversión. Esta actividad bancaria conlleva una serie de riesgos que forman parte de su negocio, y que deben ser asumidos para poder obtener beneficios (Altuve & Hurtado, 2018).

En una actividad financiera se define el riesgo como la posibilidad de pérdidas económicas debido a eventos adversos. Entre otros riesgos, pero no limitados a estos, las entidades financieras pueden enfrentar el riesgo de crédito, riesgo de liquidez, riesgos de tasas de interés, riesgo operativo. En esta investigación se define el riesgo de crédito para las entidades bancarias, como la posibilidad a que está expuesta una entidad financiera de que el deudor incumpla con sus obligaciones (morosidad) en los términos pactados en el contrato de crédito (SUGEF, 2023).

Cuando la entidad bancaria empieza a percibir un deterioro de su cartera de crédito puede ver perjudicada su rentabilidad, y eventualmente se podría generar un problema de solvencia si la entidad o grupo financiero empieza a generar pérdidas sostenidas y déficit de provisiones (reservas crediticias). Incluso, si el porcentaje de créditos de mala calidad (morosos) es relativamente alto, la confianza en el sistema puede verse afectada, ello puede generar la posibilidad de que la colectividad de los agentes piense que sus depósitos peligran, y aunque no sea cierto, acudir de manera masiva a retirar el dinero que tengan disponible (corrida bancaria), generando inestabilidad en el sistema financiero.

La industria financiera debe contar con modelos robustos que generen pronósticos de la evolución de la calidad de la cartera, que podría constituir un aspecto clave en la gestión de riesgos (Vera & Costa, 2007). A nivel local, la Superintendencia General de Entidades Financieras (SUGEF), promueve la realización de estos ejercicios a través de la ejecución de pruebas de estrés y realza los beneficios que genera al sistema financiero dado que permite a cada entidad evaluar la calidad de su gestión de riesgos (SUGEF, 2022).

En la actividad bancaria existe un conjunto de características que afectan la morosidad del sistema, se pueden mencionar: liquidez, rentabilidad, política crediticia, eficiencia en el manejo del riesgo. Además, de estos elementos de carácter interno de las entidades bancarias también existen factores macroeconómicos que pueden

explicar el comportamiento y la tendencia de la morosidad del sistema financiero (Altuve & Hurtado, 2018).

Según Altuve (2018) las variables macro económicas que en general se estudian como factores explicativos, suelen ser las siguientes: tasa de variación real del Producto Interno Bruto (PIB), precios de las materias primas, salarios, tasa de desempleo, inflación, tipo de cambio, tipos de interés (nominales y reales), *ratio* de endeudamiento y oferta monetaria. Cabe señalar que el grado de importancia de dichas variables difiere entre los distintos trabajos empíricos considerados. La investigación de Martínez (2018) revisa la sensibilidad de la tasa de morosidad y la cartera comercial improductiva (cartera morosa) con factores macroeconómicos. Este análisis se realiza mediante el empleo de modelos econométricos los cuales revelan de manera concluyente el impacto adverso de un aumento del riesgo país y la deuda pública. En conclusión, enfatiza en la necesidad de considerar con atención la interacción entre estos factores macroeconómicos y la estabilidad financiera representada por el indicador de morosidad.

El estudio de datos de panel realizado por Cruz, Durán y Muñoz (2001) relaciona de forma significativa las variables macroeconómicas de inflación (IPC), Índice Mensual de Actividad Económica (IMAE) y las nuevas colocaciones con el indicador de morosidad del sistema bancario nacional. Se concluye que el indicador de morosidad es más afectado por la devaluación y la inflación en comparación con la actividad económica (IMAE) y las nuevas colocaciones de crédito. Los cambios en las variables económicas reales, como la actividad económica y las nuevas colocaciones de crédito, no tienen un impacto inmediato en los indicadores de riesgo. En contraste, es importante destacar que la inflación y el tipo de cambio tienen un efecto prácticamente inmediato en los indicadores.

Por último, Ureña (2022) en un estudio sobre la cartera de crédito consumo y vivienda del Banco Nacional relaciona el indicador de Mora de esta cartera con las variables macroeconómicas IMAE y la Tasa Básica Pasiva y otras variables de a nivel interno. Se concluye que se presenta un mayor riesgo en la calidad de la cartera de vivienda y consumo ante deterioros en el indicador del IMAE y alzas en la tasa básica pasiva.

Uno de los métodos más comunes y apropiados para la modelación de variables macroeconómicas son los vectores autorregresivos (*VAR*). Esta corresponde a una técnica de series de tiempo multivariado que agrega a las proyecciones (pronósticos) de una determinada variable y su interrelación con otras variables.

En esta investigación se propone extender dicho análisis y generar con pronósticos estimados mediante los vectores autorregresivos a partir del enfoque frecuentista

y agregar (comparar) resultados adicionales a partir de un enfoque Bayesiano utilizando métodos numéricos de Cadenas de Markov vía Monte Carlo (MCMC) para realizar la estimación de la probabilidad posterior. Este enfoque adicional propuesto plantea ventajas en comparación con métodos frecuentistas; al especificar la distribución previa con estudios o análisis anteriores (Koop, 2003), lo cual permite que el investigador incorpore información adicional sobre los parámetros a estimar la cual, no es parte de los datos obtenidos para la modelación (Blake & Mumtaz, 2017).

Es importante mencionar que desde el enfoque frecuentista de series de tiempo según Koop (2003) el logro de resultados robustos requiere de una cantidad de observaciones que en muchos casos puede ser restrictiva para el investigador al no contar con suficientes períodos de observación. En este sentido Montero, Rojas y Francis (2015) señalan que el enfoque Bayesiano tiene mayor precisión que los métodos clásicos en condiciones de tamaños de muestra pequeños. También Cardenas, Correa y Díaz (2015) encuentran evidencia de mejores resultados con muestras pequeñas en condiciones de alta variabilidad.

La estimación de los modelos VAR está vinculada tanto al número de variables como la cantidad de rezagos. Por ende, en algunos casos, se presenta una amplia gama de parámetros que deben ser considerados. Lo anterior puede generar inconvenientes, ya que la cantidad de parámetros aumenta de manera cuadrática con el número de variables incorporadas y de forma proporcional a la cantidad de rezagos de cada variable, generando un posible problema de sobreajuste producto de la dimensionalidad o cantidad de parámetros. En un modelo que emplea series económicas, para las cuales generalmente se dispone de un número limitado de observaciones, junto con una alta variabilidad aleatoria inherente a su naturaleza y utilizando un método de estimación que busca minimizar las discrepancias de los datos, conduce a un problema de sobreajuste. Esto significa que el modelo estimado reproduce la variabilidad empírica aleatoria (ruido) en lugar de la variabilidad sistemática (Señal), (Ballabriga, 1998). Adicional a ello, Mendieta (2015), en los VAR frecuentistas se limita el análisis a modelos que consideran un conjunto de datos reducido de variables, por tanto, modelos con enfoque Bayesiano han permitido la construcción de modelos con mayor amplitud. Cuando se trabaja con un conjunto extenso de variables los modelos estimados mediante el VAR frecuentista pueden conducir a una estimación inconsistente de parámetros y a un pobre desempeño en términos de la calidad del pronóstico.

Los modelos VAR con enfoque Bayesiano surgen como una solución al desafío de sobreajuste inherente a los modelos VAR frecuentistas. Estos modelos buscan mitigar la influencia de la variabilidad aleatoria en las estimaciones. Incorpora mayor

información al modelo mediante la especificación de una distribución de probabilidad para los coeficientes del modelo y asigna una distribución a priori que no concentra todo el peso en un único valor, y se establece un rango razonable de incertidumbre. Este puede ser ajustado por la muestra de datos, especialmente cuando ambas fuentes de información difieren de manera significativa, lo que reduce el problema de sobreajuste (Arroyo, 2011).

En esta investigación se plantea la utilización de modelos de vectores auto regresivos bajo ambos enfoques para interrelacionar la variables crediticias como la tasa de morosidad y crecimiento de cartera a nivel del sistema financiero nacional con variables macroeconómicas.

1.1. Objetivo General

Generar pronósticos con series de tiempo mediante vectores auto regresivos con simulación para estimar la distribución posterior de coeficientes en el contexto de variables crediticias y macroeconómicas en Costa Rica.

1.2. Objetivos Específicos

1. Describir la metodología utilizada para el planteamiento de los modelos de vectores auto regresivos estimando la distribución posterior por métodos numéricos.
2. Evaluar la metodología propuesta para el pronóstico de los valores futuros de la serie para los distintos tamaños de muestra.
3. Comparar los resultados del enfoque Bayesiano y frecuentista para los distintos tamaños de muestra, en función del error cuadrático medio (RMSE) y error porcentual absoluto medio (MAPE).

Marco Teórico

2.1. Teoría de Series de Tiempo

Una serie de tiempo o cronológica corresponde a un conjunto de observaciones obtenidas secuencialmente en el tiempo. Los datos de series económicas o de variables de crédito financiero corresponden a casos particulares de series de tiempo discretas, es decir, se obtienen o registran solo en momentos particulares, usualmente equiespaciados como, por ejemplo, cada hora, mes o año (Hernández, 2011).

Los análisis de series temporales se pueden clasificar en modelos univariantes y modelos multivariantes. Los primeros se centran en el uso de datos históricos de la misma serie para identificar patrones que describan la evolución de la serie y permitan realizar pronósticos extrapolando dichos patrones hacia el futuro. Por otro lado, los modelos multivariantes o causales establecen relaciones estadísticas entre los valores de la serie bajo estudio y otras variables, denominadas predictoras o explicativas. Se espera que esta relación sea útil para pronosticar valores futuros de la serie, considerando la influencia de las variables predictoras (Hernández, 2011). Este último se abarca en esta investigación mediante la técnica de vectores auto regresivos que se explica en la sección 2.2.

Las series temporales se distinguen por los siguientes patrones o movimientos:

- **Movimiento de tendencia:** movimiento creciente o decreciente, que persiste durante un intervalo largo del tiempo.
- **Movimiento estacional:** es un patrón de cambio idéntico, o casi idéntico, en una serie que se repite año tras año, producido por cambios climáticos o en las costumbres de la gente. Generalmente para detectar variaciones estacionales se analizan datos trimestrales, cuatrimestrales o mensuales.
- **Movimiento cíclico:** constituye fluctuaciones ondulatorios o ciclos con duración de 2 a 10 o más años. Estos movimientos pueden ser periódicos o no, es decir, pueden mostrar o no patrones idénticos después de intervalos iguales de tiempo. En la práctica los ciclos son difíciles de estimar y se les incluye generalmente en el movimiento de tendencia.
- **Movimiento irregular:** consiste en variaciones en la serie que no siguen ningún patrón regular o reconocible, es decir, muestran un patrón impredecible o

aleatorio.

Es importante mencionar que los cuatro patrones anteriores pueden presentarse individualmente en una serie, o puede ocurrir combinados de diversas formas.

Los modelos auto regresivos (AR) corresponden a un caso particular de un proceso estocástico ARIMA (*Auto Regressive Integrate Moving Average*) desde el enfoque de Box-Jenkins (1976). En un modelo de regresión múltiple se pronostica la variable de interés usando una combinación lineal de sus predictores. En un modelo auto regresivo, el pronóstico de la variable de interés se realiza a partir de una combinación lineal de sus valores pasados para el caso univariado, o del presente y pasado de otras variables endógenas en caso multivariado.

Así, un modelo auto regresivo para el caso univariado de orden p denotado por $\mathbf{AR}(p)$ puede escribirse como:

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t, \quad (2.1)$$

donde ϵ_t es un ruido blanco (una sucesión de variables aleatorias mutuamente no correlacionadas e idénticamente distribuidas con medio 0 y varianza σ_ϵ^2).

Los modelos basados en el enfoque de Box-Jenkins se aplican a series estacionarias. Es decir, el valor observado de una serie y_t puede verse como el resultado de observar una variable aleatoria en el tiempo t , la cual tiene una media y una varianza. La media de y_t , podría ser diferente en diferentes momentos t y lo mismo podría ocurrir con su varianza (Hernández, 2011). Las series de tiempo analizadas se basan en el supuesto de que son consideradas estacionarias (en sentido débil), esto significa que la media y la varianza son constantes y su covarianza es invariante en el tiempo (Gujarati, 2003).

2.1.1. Estacionariedad

Una serie y_t , es estacionaria (débilmente) si cumple las tres condiciones siguientes:

1. La media de y_t , vale lo mismo en cualquier tiempo t , es decir, $E(y_t) = \mu$, una constante independiente de t .
2. La varianza de y_t vale lo mismo en cualquier tiempo t , es decir $Var(y_t) = \sigma^2$, una constante independiente de t .
3. $corr(y_t, y_s) = corr(y_u, y_v)$ si $t - s = u - v$. Es decir, la correlación entre dos valores de la serie en dos periodos de tiempo, digamos t y s , depende solamente del intervalo de tiempo que los separa, y no de los valores de t y s .

Definición 1 *Dos series temporales \mathbf{X}_t y \mathbf{Y}_t se dice que son conjuntamente estacionarias si cada serie es estacionaria, y la función de covarianza cruzada*

$$\gamma_{\mathbf{XY}}(h) = \text{Cov}(\mathbf{X}_{t+h}, \mathbf{Y}_t) = E[(\mathbf{X}_{t+h} - \mu_X)(\mathbf{Y}_t - \mu_Y)]$$

es una función que solamente depende de h .

La revisión de la estacionariedad de cada serie se puede realizar aplicando la prueba de Dickey-Fuller (analizada en la siguiente sección). Y se define la función de correlación cruzada de dos series temporales conjuntamente estacionarias por:

$$\rho_{XY}(h) = \frac{\gamma_{XY}(h)}{\sqrt{\gamma_X(0), \gamma_Y(0)}}$$

Propiedades:

- $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$
- $\rho_{XY}(h) \neq \rho_{XY}(-h)$ pues $\text{Cov}(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_1)$ y $\text{Cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_2)$ no siempre son iguales.
- $\rho_{XY}(h) = \rho_{YX}(-h)$

2.1.2. Prueba de raíz unitaria

Una prueba de estacionariedad (raíz unitaria) es Dickey-Fuller aumentada. Esta considera tres ecuaciones diferentes que se pueden utilizar para probar la presencia de raíz unitaria:

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= \gamma y_{t-1} + \epsilon_t \\ \Delta y_t &= a_0 + \gamma y_{t-1} + \epsilon_t \\ \Delta y_t &= a_0 + \gamma y_{t-1} + a_1 t + \epsilon_t \end{aligned}$$

La diferencia entre estas tres regresiones es la presencia de los elementos determinísticos a_0 y a_1 . La primera ecuación es un modelo puro de caminata aleatoria, la segunda agrega un intercepto y la tercera agrega un intercepto junto con una tendencia lineal. El parámetro de interés consiste en estimar alguna de las ecuaciones anteriores mediante mínimos cuadrados ordinarios (MCO) para obtener el valor estimado de γ y su error estándar asociado y de ahí rechazar o no la hipótesis nula $H_0 = \gamma = 0$. La prueba que incluye cambios en los rezagos es la prueba Dickey-Fuller aumentada (Ureña, 2022).

En resumen, la hipótesis nula en la prueba Dickey-Fuller es que la serie temporal tiene una raíz unitaria, lo que implica que no es estacionaria.

2.2. Modelos de vectores auto regresivos (VAR)

Para el caso multivariado esta investigación aplica el modelo del tipo vector auto regresivo (VAR). Estos fueron desarrollados por Christopher Sims en la década de los años ochentas (Sims, 1980), y son considerados herramientas útiles en el análisis de series de tiempo multivariadas, en donde cada serie analizada depende de sus propios valores rezagados y de los valores rezagados de las demás variables lo cual permite detectar con mayor precisión los movimientos dinámicos de la serie (Alarcón & Chuñir, 2012).

La caracterización de las interacciones simultáneas entre un grupo de variables es la gran ventaja de los modelos tipo VAR. Este es un modelo de ecuaciones simultáneas formado por un sistema de ecuaciones de forma reducida sin restringir. Las ecuaciones de forma reducida indican que los valores contemporáneos de las variables del modelo no aparecen como variables explicativas en ninguna de las ecuaciones. Por el contrario, el conjunto de variables explicativas de cada ecuación está constituido por un bloque de rezagos de cada una de las variables del modelo. Las ecuaciones no restringidas significan que aparece en cada una de ellas el mismo grupo de variables explicativas. El modelo VAR es muy útil cuando existe evidencia de simultaneidad entre un grupo de variables, y que sus relaciones se transmiten a lo largo de un determinado número de períodos (Novales, 2017).

El modelo VAR presenta la siguiente estructura:

$$\mathbf{Y}_t = c + \mathbf{B}_1\mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{B}_2\mathbf{Y}_{t-2} + \cdots + \mathbf{B}_p\mathbf{Y}_{t-p} + \mathbf{A}\mathbf{X}_t + \epsilon_t \quad (2.2)$$

Siendo c un vector de dimensión k , \mathbf{Y}_t es un vector de k variables endógenas, \mathbf{Y}_{t-p} corresponde al vector endógeno formado por los valores de las k variables en el período $t - p$. El vector \mathbf{X}_t es un vector exógeno formado por los valores de las variables del período t . La matriz \mathbf{B}_i es una matriz cuadrada $k \times k$. \mathbf{A} es una matriz $k \times r$, siendo r el número de variables exógenas. Y ϵ_t un proceso multivariado de ruido blanco con distribución normal de media 0 y varianza constante, por último, p corresponde al número de rezagos. (Alarcón & Chuñir, 2012).

Alarcón y Chunir (2012) establece en su análisis de series temporales con enfoque en modelos VAR un proceso que consta de cuatro etapas que se describen a continuación y que se adoptaran algunos pasos para desarrollar los modelos en esta investigación.

1. **Preparación:** revisión de la estacionariedad de la series contempladas en el análisis. Para esto se utilizará el estadístico de Dickey-Fuller aumentada.
2. **Identificación:** inicialmente consiste en determinar la interrelación del número de rezagos del vector auto regresivo y los rezagos de las variables endógenas que explican el movimiento del vector (relaciones de cointegración).
3. **Verificación del modelo:** para estimar un modelo adecuado VAR, se realizarán las siguientes pruebas de diagnóstico. Luego de la estimación del modelo se verificará la existencia de raíces unitarias, para verificar la autocorrelación se utilizará la prueba de Portmanteau que corresponde a la prueba de Ljung-Box para el caso multivariado. La verificación de la heterocedasticidad se realizará mediante la prueba ARCH (Heterocedasticidad Condicional Auto Regresiva por sus siglas en inglés) y la prueba de normalidad de los residuos será contrastará mediante el estadístico de Jarque Bera multivariado (*JB*). En la sección 2.2.3 se explica detalladamente cada una de pruebas anteriores.
4. **Pronósticos del modelo:** una vez identificado el modelo y superada la verificación del modelo se pueden generar los valores futuros.

2.2.1. Estimación de rezagos

La cantidad de rezagos óptimos (orden del modelo VAR) que se utilizarán para las variables explicativas del modelo, se basan en los criterios de información. Las pruebas de razón de verosimilitud secuencial sería otra opción para realizar esta estimación.

En la práctica es común utilizar los criterios de información *AIC*, *BIC* y *Hanna Quinn* para la determinación del orden p del modelo VAR:

$$\begin{aligned}
 AIC(p) &= \log|\tilde{\Sigma}_{a,p}| + \frac{2}{T}pK^2 \\
 BIC(p) &= \log|\tilde{\Sigma}_{a,p}| + \frac{\log(T)}{T}pK^2 \\
 HQ(p) &= \log|\tilde{\Sigma}_{a,p}| + \frac{2\log(\log(T))}{T}pK^2
 \end{aligned}$$

donde $\tilde{\Sigma}_{a,p}$ es la estimación de $\tilde{\Sigma}_{a,*}$ de acuerdo al VAR(p).

2.2.2. Valores Atípicos

En el contexto de regresión, y análisis econométrico, un valor atípico puede definirse como un valor con un residuo alto. El residuo representa la diferencia que puede ser negativa o positiva entre el valor real de la variable dependiente y su valor estimado dentro del modelo. El residuo es grande cuando se compara con los demás residuos y este análisis se puede inspeccionar mediante un gráfico Q-Q plot (Gujarati, 2003).

Los modelos VAR, así como el modelo de regresión, asumen que los residuos siguen una distribución normal y que la varianza de los residuos es constante en todos los niveles de la variable independiente. Los valores atípicos a menudo violan estos supuestos lo cual puede generar distorsiones en las inferencias o pronósticos estimados.

Los valores atípicos se abordarán de la siguiente forma:

- **Identificación:** La detección de los valores atípicos puede realizarse mediante visualización de datos, como diagramas de caja, gráficos de dispersión o análisis de residuos.
- **Tratamiento:** Una vez identificados los valores atípicos, se debe tomar la decisión del impacto que conlleva y si desde el punto de vista del investigador es necesario eliminarlos si se consideran errores, aplicar transformaciones para suavizar su impacto o utilizar otros modelos más robustos que sean menos sensibles a los valores atípicos.

2.2.3. Diagnóstico

La realización de las siguientes pruebas al modelo de VAR son necesarias para verificar la correcta estimación de los coeficientes y de los pronósticos.

2.2.4. Prueba de Portmanteau Multivariada

El siguiente estadístico es usado para probar la no auto correlación y correlación cruzada en las series de tiempo y_t . Para ρ_i la matriz de autocovarianza, la hipótesis nula $H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_m = 0$ y la hipótesis alternativa $H_a : \rho_i \neq 0$ para algún $i \in \{1, \dots, m\}$. La prueba estadística es una generalización de la prueba de Ljung-Box (estadístico $Q(m)$) para el caso univariado.

$$Q_k(m) = T^2 \sum_{i=1}^m \frac{\text{tr}(\hat{\rho}'_i \hat{\rho}_0^{-1} \hat{\rho}_i \hat{\rho}_0^{-1})}{T - i}$$

Donde T es el tamaño de la muestra, k es la dimensión de y_t , y $tr(\cdot)$ es la traza de la matriz. Bajo la hipótesis nula y algunas condiciones regulares, $Q_k(m)$ sigue asintóticamente una distribución $\chi_{k^2m}^2$.

2.2.5. Prueba de heterocedasticidad ARCH

Heterocedasticidad Condicional Auto Regresiva (ARCH) es un modelo estadístico utilizado para analizar y modelar la volatilidad en series de tiempo. Tsay (2010) sugiere dos pruebas para realizar este análisis. Defina una serie $a_t = r_t - \mu_t$ como los residuales de la media. La serie $\{a_t^2\}$ se utiliza para comprobar la heterocedasticidad condicional, también conocida como el efecto ARCH. La primera es aplicar el estadístico de Ljung-Box $Q(m)$ para la serie $\{a_t^2\}$ donde la hipótesis nula H_0 corresponde a que los primeros m rezagos del ACF (función de autocorrelación) de la serie a_t^2 son cero. La segunda prueba para la heterocedasticidad condicional considera el multiplicador de Lagrangae de Engle (1982), esta prueba es equivalente al estadístico F para probar que $\alpha_i = 0$ ($i = 1, \dots, m$) en una regresión lineal. Se denota:

$$a_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 a_{t-1}^2 + \dots + \gamma_m a_{t-m}^2 + e_t, \text{ con } t = m + 1, \dots, T$$

En la ecuación anterior, e_t denota el termino de error, m es entero positivo y T es el tamaño de la muestra. La hipótesis nula es $H_0: \gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0$. Sea $SSR_0 = \sum_{t=m+1}^T (a_t^2 - \omega)^2$, con $\omega = (1/T) \sum_{t=1}^T a_t^2$ y $SSR_1 = \sum_{t=m+1}^T \hat{e}_t^2$, donde \hat{e}_t es el residuo de la regresión anterior. Tenemos que

$$F = \frac{(SSR_0 - SSR_1)/m}{SSR_1/(T - 2m - 1)},$$

que es asintóticamente con una distribución chi-cuadrado con m grados de libertad. La regla de decisión es rechazar la hipótesis nula si $F > \chi_m^2(\alpha)$, donde $\chi_m^2(\alpha)$ es menor que 100(1 - α)th percentil de χ_m^2 , o el p valor de F es menor que α .

2.2.6. Prueba de normalidad Jarque Bera

Según Gujarati (2003) la prueba de Jarque Bera (JB) es un contraste de grandes muestras (asintótico) y fundamentado en los residuos MCO. Esta prueba evalúa la asimetría (S) y la kurtosis (K) de los residuos MCO. La hipótesis nula H_0 : normalidad (los residuos siguen una distribución normal) y la hipótesis alternativa H_a : no normalidad. El estadístico esta dado por:

$$JB = T \left[\frac{S_1^2}{6} + \frac{(K - 3)^2}{24} \right]$$

Con T el tamaño de la muestra. Para una variable que sigue una distribución normal tenemos que $S = 0$ y $K = 3$. Por lo tanto, la prueba de normalidad JB es un test de hipótesis conjunta sobre si S y K son 0 y 3 respectivamente. El estadístico JB sigue una distribución chi-cuadrado con 2 grados de libertad (χ_2^2).

2.3. Simulación y estadística Bayesiana

2.3.1. Inferencia Bayesiana

Consideremos dos variables aleatorias A y B . Se destacan los siguientes resultados:

$$P(A, B) = P(A|B)P(B) \quad (2.3)$$

con $P(A, B)$ es la probabilidad conjunta de A y B ocurriendo, $P(A|B)$ es la probabilidad de que ocurra A condicionado a que ocurra B (i.e. la probabilidad condicional de A dado B) y $P(B)$ es la probabilidad marginal de B . Alternando los roles de A y B se puede obtener la siguiente expresión:

$$P(A, B) = P(B|A)P(A) \quad (2.4)$$

Igualando 2.1 y 2.2 y reordenando los factores de ambas ecuaciones se tendría la expresión conocida como el Teorema de Bayes (Koop, 2003)

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} \quad (2.5)$$

Sea y es un vector de datos y θ un vector de parámetros de un modelo que intenta explicar y , aplicando la *Regla de Bayes* se obtiene:

$$P(\theta|y) = \frac{P(y|\theta) \cdot P(\theta)}{P(y)} \quad (2.6)$$

Se puede obviar el termino $P(y)$ ya que el interés se focaliza en utilizar los datos para aprender sobre θ y por lo tanto, $P(y)$ se puede considerar como una constante.

$$P(\theta|y) \propto P(y|\theta) \cdot P(\theta) \quad (2.7)$$

donde: \propto denota proporcionalidad, $P(\theta|y)$ es la densidad posterior, $P(y|\theta)$ es la función de verosimilitud (FV) condicional en los parámetros y $P(\theta)$ es la densidad previa.

La densidad previa contiene toda la información anterior que se tiene sobre los parámetros y que no está incluida en los datos. La econometría clásica (frecuentista) no utiliza este tipo de información, por lo que la incorporación de la previa constituye la principal diferencia del enfoque Bayesiano.

2.3.2. Estimación Bayesiana de un modelo de regresión lineal

En la estimación Bayesiana de un modelo de regresión lineal y modelos VAR siguiendo a Cordero (2020) hay tres componentes claves que deben ser considerados y se resumen como:

- Especificación de la distribución previa de los datos: en la fase inicial, es crucial definir una distribución de probabilidad previa que pueda reflejar información que la persona investigadora pueda tener con anterioridad, sobre cómo están distribuidos los datos antes de incorporar cualquier información nueva. Esta distribución previa proporciona una base para la actualización posterior en función de los datos observados.
- La Función de verosimilitud de los datos observados: utilizando la muestra de datos el paso siguiente es la estimación de la función de verosimilitud que mide la probabilidad de observar los datos reales dadas las suposiciones del modelo.
- Distribución posterior de los parámetros: después de observar los datos, el proceso se mueve hacia la actualización de las suposiciones originales. Esto se hace utilizando la teoría de Bayes, que combina la experiencia previa con la nueva información proporcionada por los datos observados para obtener una distribución de probabilidad posterior.

Considere estimar el siguiente modelo de regresión:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{B}\mathbf{X}_t + v_t \quad (2.8)$$

$$v_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (2.9)$$

\mathbf{Y}_t una matriz de la variable dependiente de tamaño $T \times 1$, \mathbf{X}_t es una matriz de tamaño $T \times K$ de variables independientes y/o determinísticas. Y \mathbf{B} una matriz de coeficientes de tamaño $K \times 1$ y σ^2 corresponde a la varianza del error.

Un procedimiento econométrico para la estimación de los parámetros anteriores usando la función de verosimilitud a partir de los datos \mathbf{Y}_t y \mathbf{X}_t es el siguiente:

$$F(\mathbf{Y}_t | \mathbf{B}, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-T/2} \exp\left(\frac{-(\mathbf{Y}_t - \mathbf{B}\mathbf{X}_t)'(\mathbf{Y}_t - \mathbf{B}\mathbf{X}_t)}{2\sigma^2}\right) \quad (2.10)$$

y estimar el $\hat{\mathbf{B}}$ y $\hat{\sigma}^2$ usando el estimador de máxima verosimilitud obteniendo los estimadores MCO para $\hat{\mathbf{B}}_{OLS} = (\mathbf{X}_t')^{-1}(\mathbf{X}_t'\mathbf{Y}_t)$ y el estimador (segado) de máxima verosimilitud para la varianza del error $\hat{\sigma}^2 = \frac{v_t'v_t}{T}$, donde es notable que la característica principal del enfoque frecuentista es que la estimación de los parámetros se basa únicamente en la información contenida en los datos.

El análisis Bayesiano se aparta de este enfoque al permitir que se incorporen creencias previas sobre los parámetros \mathbf{B} y σ^2 en el proceso de estimación. Para ser exactos, el econometrista Bayesiano frente a la tarea de estimación la ecuación procedería en los siguientes pasos.

Paso 1: Se forma una creencia previa sobre los parámetros a estimar. Esta creencia previa suele representar información que el investigador tiene sobre \mathbf{B} y σ^2 que se deriva usando los datos \mathbf{Y}_t y \mathbf{X}_t . Estas creencias previas pueden haberse formado a partir de experiencias pasadas o mediante estudios (estimando modelos) a partir de otros conjuntos de datos. El punto clave es que estas creencias se expresan en forma de distribución de probabilidad. Por ejemplo, la previa de los coeficientes se expresa como

$$P(\mathbf{B}) \sim N(\mathbf{B}_0, \Sigma_0)$$

donde la media B_0 representa el comportamiento actual sobre los elementos de B .

Paso 2: Se recolecta información de \mathbf{Y}_t y \mathbf{X}_t y define la función de verosimilitud del modelo como en la ecuación 2.10. Este paso es idéntico al enfoque frecuentista y representa la información sobre los parámetros del modelo contenidos en los datos.

Paso 3: Actualizar la información obtenida en la previa (paso 1) en función de la información contenida en los datos (usando la función del paso 2). Es decir, combina la distribución previa $P(\mathbf{B}, \sigma^2)$ y la función de verosimilitud $F(\mathbf{Y}_t | \mathbf{B}, \sigma^2)$ para obtener la distribución posterior $H(\mathbf{B}, \sigma^2 | Y_t)$.

Formalmente la distribución posterior $H(\mathbf{B}, \sigma^2 | Y_t)$ es definida por el Teorema de Bayes en la ecuación 2.5 de la siguiente forma:

$$H(\mathbf{B}, \sigma^2 | \mathbf{Y}_t) = \frac{F(\mathbf{Y}_t | \mathbf{B}, \sigma^2) \times P(\mathbf{B}, \sigma^2)}{F(\mathbf{Y})} \quad (2.11)$$

se establece que la distribución posterior es un producto de la función de verosimilitud $F(\mathbf{Y}_t | \mathbf{B}, \sigma^2)$ y la distribución previa $P(\mathbf{B}, \sigma^2)$ dividido por la densidad de los datos $F(\mathbf{Y})$ conocida como la densidad marginal de los datos. Note que $F(\mathbf{Y})$ es un escalar y de la misma forma que la ecuación 2.7 la ecuación 2.11 puede reescribirse

como:

$$H(\mathbf{B}, \sigma^2 | \mathbf{Y}_t) \propto F(\mathbf{Y}_t | \mathbf{B}, \sigma^2) \times P(\mathbf{B}, \sigma^2) \quad (2.12)$$

2.3.3. Distribución previa

Para la especificación de la distribución previa este trabajo sigue a Mendieta (2015), quien a su vez, se basa en el método propuesto por Litterman (1996), donde las k variables que conforman el modelo VAR son presentadas a priori como caminatas aleatorias. Una justificación para esta selección es que las caminatas aleatorias típicamente tienen un buen poder predictivo sobre las series de tiempo macroeconómicas.

Reescribiendo la ecuación presentada en 2.2 sin las variables exógenas:

$$\mathbf{Y}_t = c + \mathbf{B}_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{B}_2 \mathbf{Y}_{t-2} + \cdots + \mathbf{B}_p \mathbf{Y}_{t-p} + \epsilon_t \quad (2.13)$$

Litterman (1996) sugiere usar una previa dado que todas las ecuaciones de que conforman el sistema anterior estén centradas en alrededor de una caminata aleatoria, es decir la media asociada a la distribución previa puede ser descrita como:

$$\mathbf{Y}_t = c + \mathbf{Y}_{t-1} + \epsilon_t \quad (2.14)$$

La contracción de los elementos de la diagonal de \mathbf{B}_1 hacia uno en la ecuación 2.13, y los parámetros restantes $\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_p$, sugiere una mayor ponderación para los rezagos más recientes pues se espera que estos generen información más relevantes que los más alejados. Adicionalmente, supone que los rezagos de una misma variable debiesen explicar una mayor proporción de su varianza en contraste con los rezagos de otras. Esto se deduce al fijar los siguientes momentos de la distribución previa para los coeficientes:

$$E(B_k)_{i,j} = \begin{cases} \delta_i, & j = i, k = 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.15)$$

$$V(A_k)_{i,j} = \begin{cases} \frac{\lambda^2}{k^2}, & j = i, k = 1 \\ \vartheta \frac{\lambda^2 \sigma_i^2}{k^2 \sigma_j^2} & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.16)$$

Los elementos $(B_k)_{i,j}$ de la ecuación 2.15 corresponden a la coordenada i, j de

la matriz \mathbf{B} correspondiente al rezago k . Los coeficientes de las matrices \mathbf{B} son asumidos como independientes y normalmente distribuidos. La matriz de varianzas y covarianzas de los residuos es constante y conocida, donde $\Phi = \Sigma$, con $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$ una distribución previa difusa para los interceptos.

2.3.4. Método Cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC)

En el ámbito de la estadística, los métodos de *Monte Carlo* basados en cadenas de Markov, abreviados como MCMC (por su siglas en inglés, *Markov Chain Monte Carlo*), representan una herramienta fundamental para la investigación y el análisis de distribuciones de probabilidad. Estos se basan en la idea de crear una secuencia de estados interconectados en una cadena de Markov, de modo que esta cadena alcance una distribución de equilibrio que sea similar a la distribución de probabilidad que estamos estudiando.

Al registrar sistemáticamente los estados sucesivos de esta cadena, obtenemos una muestra que se aproxima gradualmente a la distribución objetivo. Entre más iteraciones se realicen en esta cadena, mayor será la aproximación de la muestra a la distribución real que deseamos analizar. En el proceso de construcción de estas cadenas, se pueden emplear diversos algoritmos, y uno de los más destacados es el algoritmo de Metrópolis-Hastings o el muestreo de Gibbs.

Los algoritmos mencionados en el párrafo anterior son especialmente valiosos para los investigadores, dado que les permite abordar problemas complejos de muestreo y modelado de distribuciones con precisión y eficiencia, lo que aporta una base sólida para el desarrollo y la fundamentación de investigaciones académicas y tesis en el campo de la estadística y la probabilidad. Los métodos de simulación como el muestreo de Gibbs simplificaron enormemente la integración, y hace posible extender el análisis Bayesiano a una variedad de modelos econométricos (Blake & Mumtaz, 2017). Esta investigación se centrará en el estudio del muestreo de Gibbs, la definición la previa y su integración con el modelo VAR.

2.3.5. Muestreo de Gibbs

Definición 2 El muestreo de Gibbs es un método numérico que utiliza sorteos de distribuciones condicionales para aproximar distribuciones conjuntas y marginales.

Por el contrario, la distribución posterior condicional de cada conjunto de parámetros está fácilmente disponible. De acuerdo con la definición 2, se puede aproximar la distribución posterior marginal mediante el muestreo de las distribuciones condicionales.

En el muestreo de Gibbs, suponga que tenemos una distribución conjunta de k variables, esta puede, por ejemplo, ser una distribución posterior conjunta:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (2.17)$$

y se está interesado en obtener distribuciones marginales como:

$$f(x_i), \quad i = 1, \dots, k$$

La solución para este problema podría ser integrar la distribución conjunta 2.17. Sin embargo, esto puede ser complicado de estimar o inviable en algunos casos (Blake & Mumtaz, 2017). Asumiendo que la forma de la distribución condicional $f(x_i | x_j)$, $i \neq j$ es conocida, el algoritmo del muestreo de Gibbs puede ser usado para aproximar la distribución marginal realizando los siguiente pasos:

1. Se deben definir los valores iniciales $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$
2. Se muestrea x_1^1 la primera variable condicionada a los $n - 1$ valores iniciales restantes:

$$f(x_1^1 | x_2^0, \dots, x_n^0)$$

3. Se muestrea x_2^1 la segunda variable y se incluyen las variables del paso anterior de la siguiente forma:

$$f(x_2^1 | x_1^1, x_3^0, \dots, x_n^0)$$

- k. Se muestrea x_k^1 y se incluyen las variables de los pasos anteriores

$$f(x_k^1 | x_1^1, x_2^1, \dots, x_{k-1}^1)$$

para completar 1 iteración del algoritmo de Gibbs. Esto finalizaría una iteración del algoritmo, repitiendo estos pasos un gran número de veces las muestras de la distribución condicional convergen a la distribución marginal conjunta. Es importante mencionar que este algoritmo al inicio comienza a muestrear desde puntos fuera de la distribución marginal pero luego de varias iteraciones empieza a converger.

2.3.6. Criterios de convergencia

El enfoque más general para evaluar la convergencia de los valores obtenidos de los parámetros a partir de la distribución posterior se basa en la gráfica e inspección de la traza e histogramas de la muestra MCMC generada. En términos generales, no se puede determinar si una cadena ha convergido, aunque se puede analizar la probabilidad de que haya convergido analizando la estacionariedad de la serie. Por esta razón, se debe verificar que las muestras tomadas en una parte de la cadena tienen una distribución similar a las muestras tomadas en otras partes (Hoff, 2009).

Análisis gráfico

La evidencia de convergencia es satisfactoria si la traza muestra un comportamiento asintótico sobre las últimas m observaciones. Otros diagnósticos que se pueden utilizar corresponden a histograma (densidad), media ergódica y la función de autocorrelación que muestra el nivel de dependencia en la cadena.

- Traza: Corresponden a una comparación entre el índice de la cadena de Markov y la realización de la cadena. Gráficamente el resultado obtenido es similar a un ruido blanco, donde la estabilidad del proceso corresponde a un indicador del alcance del estado estacionario de la cadena.
- Gráficos de densidad.
- Gráficos de la función de autocorrelación.
- Gráficos de correlación cruzada entre variables.

Diagnósticos de convergencia

Aparte de la estacionariedad de la serie y el análisis gráfico, existen enfoques para abordar esto utilizando una única cadena, como los criterios de eficiencia numérica relativa, por ejemplo, Geweke, o los criterios de Raftery & Lewis. Estos evalúan la eficiencia numérica relativa al comparar la variabilidad empírica de los valores muestreados con un estimador de varianza que mantiene consistencia con la correlación (Congdon, 2006). Raftery & Lewis se aplica a cadenas simples. Tiene como objetivo tanto detectar convergencia a la distribución estacionaria, como entregar rangos para la precisión de los cuantiles estimados de las funciones de las variables de interés. El criterio de Geweke (estadístico Z) compara las medias calculadas en distintos segmentos de la cadena. Consiste en dividir la cadena en dos conjuntos, el primero contiene el primer 10 % de iteraciones y el segundo el 50 %. Si la cadena es

estacionaria, las dos secuencias deben ser similares (Guzmán, 2023). Se estima de la siguiente forma:

$$Z = \frac{\bar{\theta}_a - \bar{\theta}_b}{\sqrt{Var(\theta_a) + Var(\theta_b)}} \quad (2.18)$$

Conforme la longitud de la cadena crece, la distribución muestral Z se aproxima a una $N(0, 1)$. Esto significa que valores de $|Z| \leq 2$ indican que las variables han alcanzado la convergencia (Díaz, Covarrubias & Sistachs, 2015). Aunque las cadenas únicas pueden ser adecuadas para problemas simples, algunos criterios se fundamentan en la necesidad de emplear dos o más cadenas simultáneas con valores iniciales distintos. Ello se realiza con el propósito de garantizar una cobertura completa del espacio de parámetros muestrales, reduciendo así la probabilidad de que la muestra quede atrapada en una región limitada del espacio. La evaluación de la convergencia en cadenas múltiples se puede realizar mediante los factores de reducción de escala de Gelman-Rubin, quienes comparan la variabilidad en la muestra con los valores de parámetros tanto dentro como entre las distintas cadenas (Congdon, 2006). El criterio de Gelman y Rubin compara la varianza entre dos o más cadenas, como lo efectúa el análisis de variancia clásico. Teniendo m cadenas de iteraciones, se tiene que

$$\hat{R} = \sqrt{\frac{\widehat{Var}(\theta|y)}{w}} \quad (2.19)$$

$$\widehat{Var}(\theta|y) = \frac{n-1}{n}W + \frac{1}{n}B \quad (2.20)$$

$$B = \frac{n}{m-1} \sum_{i=1}^n (\bar{\theta}_{.j} - \bar{\theta}_{..})^2 \quad (2.21)$$

$$W = \frac{1}{m} \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{\theta}_{.j} - \bar{\theta}_{..})^2 \right] \quad (2.22)$$

Si los valores de \hat{R} son sustancialmente mayores a 1 se considera que falta convergencia a las cadenas analizadas.

Metodología

3.1. Datos Utilizados

El detalle de las variables utilizadas en los modelos así como sus fuentes de extracción se pueden observar con detalle en el cuadro 3.1. Estas variables hacen referencia a métricas que se utilizan para medir el comportamiento de las economías (Cordero, 2020). Las variables crediticias incluidas en este estudio son: Tasa de cartera en mora y cobro judicial y crecimiento de la Cartera Total. La Superintendencia General de Información Financiera (SUGEF) y el Banco Central de Costa Rica (BCCR) son las principales fuentes de extracción de los datos. Los datos por utilizar comprenden el periodo 2012-2019, dejando el año 2019 para la evaluación de la calidad de los pronósticos generados por cada uno de los modelos. La fuente de extracción de cada una de las variables se explica en el cuadro 3.1.

Cuadro 3.1: Variables utilizadas en el desarrollo de los modelos.

Variables Créditicias	Nombre	Fuente
Tasa de cartera en mora y cobro judicial	IndMora	SUGEF
Crecimiento de la cartera total	CarCre	SUGEF
Variables Macroeconómicas		
Tasa básica pasiva	TBP	BCCR
Tipo de cambio compra	TCC	BCCR
Índice de precios del consumidor	IPC	BCCR
Índice mensual de actividad económica	IMAE	BCCR
Riesgo País (<i>Emerging Markets Bonds Index</i>)	RIP	J.P. Morgan Chase

Las variables crediticias son separadas por segmento bancario, como se observa en el cuadro 3.2. Las entidades consideradas en el análisis poseen una cobertura aproximada del 91 % del total del activo crediticio en los últimos 4 años del periodo del análisis. El primer segmento contiene de forma agregada a los Bancos Comerciales del Estado y creados por leyes especiales denominados Bancos Públicos y el segundo segmento compuesto por los Bancos Privados grandes denominado Bancos Privados.

La separación por segmento bancario en esta investigación se fundamenta en el reconocimiento de las características distintivas inherentes al modelo de negocio de los Bancos Públicos y Bancos Privados. Este enfoque se justifica dado que estas características pueden actuar como factores diferenciadores significativos que enriquecen el análisis y permiten una comprensión más completa con la inclusión de los

factores macroeconómicos. En primer lugar, la consideración de una mayor oferta de crédito en moneda extranjera por parte de los Bancos Privados es de suma relevancia, dado su potencial impacto en la estabilidad financiera y por ende la mayor sensibilidad en el tipo de cambio (Bermúdez, 2022). La mayor participación de estos bancos en estrategias para atraer clientes en el segmento de créditos de consumo, donde se tienen a 4 entidades en el top 5 de mayores emisores de tarjetas de crédito en el país (Barahona, Álvarez & Ramírez, 2023). Por último, la diferencia en la cuota de mercado puede influir en la dinámica competitiva del sector bancario y, por ende, en las estrategias y políticas adoptadas por los diferentes tipos de bancos.

Cuadro 3.2: Distribución de la cartera de crédito de saldo principal por entidad bancaria.

Grupo	Entidad	Dic 2016	Dic 2017	Dic 2018	Dic 2019
Bancos comerciales del estado	BNCR	31 %	31 %	29 %	29 %
Banco estatal creado por leyes especiales	BCR	21 %	20 %	19 %	20 %
Bancos Privados	BPDC	15 %	15 %	15 %	15 %
Bancos Privados	BAC	16 %	17 %	17 %	18 %
Bancos Privados	Scotiabank	10 %	9 %	11 %	11 %
Bancos Privados	Davivienda	8 %	8 %	8 %	9 %
Bancos Privados	Promerica	4 %	5 %	5 %	6 %
Otros		10 %	9 %	9 %	8 %
Total		92 %	92 %	92 %	93 %

A continuación se presenta una breve descripción de cada una de la variables presentadas en el cuadro 3.1.

3.2. Descripción de las variables

3.2.1. Variables Crediticias

- Tasa de cartera en mora y cobro judicial (IndMora)** : Los indicadores de morosidad de la cartera han sido interpretados en la literatura económica no sólo como señales y reflejo de incrementos en el riesgo, sino que además de episodios de crisis financieras (Vera & Costa, 2007). Este indicador de seguimiento sobre la calidad de la cartera crediticia aproxima la morosidad mediante la razón cartera morosa a cartera total, indicador que se considera apropiado y fácil de calcular e interpretar, entre mayor sea el valor de este indicador, mayor será el deterioro de la calidad de la cartera en el ámbito de un banco en particular y del sistema como un todo (Cruz, Durán & Muñoz, 2001).

$$\text{Tasa de cartera en mora y cobro judicial} = \frac{\text{cartera morosa}}{\text{cartera total}} \quad (3.1)$$

Para definir la cartera en mora, se utiliza el concepto de mora legal, la cual incluye la totalidad de la deuda como atrasada a partir de un día de fecha pactada de pago más los créditos en cobro judicial (Cruz, Durán & Muñoz, 2001).

- **Crecimiento de la cartera total (CarCre)** : establece que durante la fase expansiva del ciclo económico, la cartera crediticia tiende a expandirse de forma acelerada contribuyendo a profundizar la expansión económica. Asimismo, la contracción de préstamos suele acompañar a la fase descendiente del ciclo económico, lo cual permite una desaceleración mayor del ciclo. Así, en las fases expansivas del ciclo, los niveles de morosidad del crédito tienen a reducirse. Por el contrario, en las fases recesivas, la contracción del crédito y elevación de la morosidad son inminentes (Díaz, 2009). Aumentos en la colocación de crédito estarían relacionados con una disminución del indicador de morosidad, siempre que se mantenga un crecimiento de cartera.

3.2.2. Variables Macroeconómicas

- **Tasa básica pasiva (TBP)**: corresponde a una tasa de referencia para los préstamos en Costa Rica. La TBP busca aproximar el costo financiero que efectivamente enfrentan los intermediarios financieros del país en la captación de recursos en moneda nacional. Ese costo corresponde a la tasa de interés que los intermediarios reconocen por sus captaciones de fondos en moneda nacional, tanto a plazo como a la vista. La TBP se calcula como un promedio ponderado de las tasas de interés que los intermediarios financieros reconocen en sus captaciones en colones a plazos entre 150 y 210 días (BCCR, 2022). Movimientos en las tasas de interés de referencia representan un factor de gran relevancia en la economía de un país, ya que tienen el potencial de influir de manera directa en el crédito y el ahorro de los agentes económicos. En presencia de tasas de interés bajas, la inversión y el consumo financiado serán más atractivos lo que impulsa la producción, en caso contrario, se desestimulan estos componentes en la economía. El mantener tasas de interés elevadas también es sinónimo de asumir un mayor riesgo en las operaciones crediticias, por tanto, se esperaría un incremento del indicador de morosidad. (Luna-Viera et al, 2022)
- **Tipo de Cambio Compra (TCC)**: es el precio o tasa de cambio entre una

divisa y la moneda local. Incrementos en el tipo de cambio de economías expuestas a la dolarización aumenta la probabilidad de incumplimiento de los deudores. Esta relación puede darse por un descalce de monedas en las posiciones de las unidades económicas, o por el hecho de depreciaciones o ajustes en el tipo de cambio generan, al igual que el ajuste de tasas, encarecimiento de insumos y presiones de liquidez (Vera & Costa, 2007). Adicional a esto, la apreciación de la moneda reduciría la carga de la deuda para los tomadores de préstamos en moneda extranjera lo cual disminuiría el indicador de morosidad y el tamaño de la cartera por diferencial cambiario.

- **Índice de precios del consumidor (IPC):** se utiliza para medir la evolución de los precios a través del tiempo de un conjunto de bienes y servicios, representativos del consumo final de los hogares. Está asociado al poder adquisitivo de los consumidores, lo cual implica que, si suben los precios de dichos bienes y servicios los individuos deben pagar más por el mismo consumo y por ende su capacidad de adquirir más bienes y servicios se reduce (Cordero, 2020). Periodos de mayor inflación podrían reducir el ingreso real de los prestatarios, que implicaría un incremento en el indicador de morosidad (Altuve & Hurtado, 2018).
- **Índice mensual de actividad económica (IMAE):** corresponde a un indicador de corto plazo que tiene como finalidad aproximar la evolución del valor bruto de producción (VBP), a un determinado mes para las diferentes industrias que conforman el Producto Interno Bruto (PIB) a precios básicos. La variación interanual del IMAE sirve como aproximación de la evolución mensual del VBP (BCCR, 2012). Se espera que en periodos donde la serie del IMAE tenga un comportamiento con tendencia positiva, se espera que disminuya el indicador de morosidad; caso contrario una tendencia negativa en este indicador se estima que aumente el indicador de mora (IndMora) (Ureña, 2022). Aunado a esto también en periodos de crecimiento económico se podría esperar una mayor colocación de préstamos, en consecuencia, también un crecimiento del indicador CarCre.
- **Riesgo País (RIP):** este indicador corresponde al *EMBI* (Indicador de Bonos de Mercados Emergentes por sus siglas en inglés), es el principal indicador de riesgo país, y es calculado por *JP Morgan Chase*. Es la diferencia de tasa de interés que pagan los bonos denominados en dólares, emitidos por países subdesarrollados y los bonos del Tesoro de Estados Unidos, que son considerados *libres* de riesgo (Riesgo País EMBI – América Latina, 2023). Este diferencial

se expresa en puntos básicos, los bonos más riesgosos pagan un interés más alto, por lo tanto el diferencial (*spread*) de estos bonos respecto a los bonos del tesoro es mayor. Esto implica que el mayor rendimiento que poseen los bonos riesgo en compensación con la probabilidad de incumplimiento de pago de los mismos. Un incremento del riesgo país podría estar relacionado con una inestabilidad macroeconómica como alta inflación, déficit fiscal o problemas estructurales en la economía. Esto puede conllevar a la dificultad de los individuos en el cumplimiento de sus obligaciones, generando un posible incremento en el indicador de morosidad.

3.3. Estrategia de análisis

En una primera etapa, se procede a realizar la estimación de los modelos de Vectores Auto Regresivos (VAR) empleando las metodologías descritas para la estimación bajo enfoque Frecuentista y Bayesiano, aplicadas a cada una de las variables crediticias detalladas en la sección 3.2.1. Tomando como covariables o variables explicativas a las variables macroeconómicas. Esta fase permitirá obtener resultados robustos y comparables de cada método utilizado.

Una vez completada la estimación de los modelos VAR con base en ambas metodologías, se llevará a cabo un análisis comparativo de los pronósticos generados por cada uno de los enfoques durante un período determinado. Este análisis comparativo se centrará en evaluar la precisión y la capacidad predictiva de ambos métodos.

3.3.1. Especificación modelo VAR frecuentista

Para la especificación del modelo VAR con la metodología frecuentista se utilizarán todas las variables descritas en la sección 3.1. Un total de cinco variables macroeconómicas y dos variables relacionadas con el comportamiento de la cartera crediticia. Dado p la cantidad de rezagos, la estructura del modelo se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\text{IndMora}_t^i &= c_1 + \beta_{1,1}^i \text{IndMora}_{t-1}^i + \beta_{1,2}^i \text{CarCre}_{t-1}^i + \beta_{1,3}^i \text{TBP}_{t-1} + \beta_{1,4}^i \text{TCC}_{t-1} + \\
&\quad \beta_{1,5}^i \text{IPC}_{t-1} + \beta_{1,6}^i \text{IMAE}_{t-1} + \beta_{1,7}^i \text{RIP}_{t-1} + \dots + \\
&\quad \beta_{1,7(p-1)+1}^i \text{IndMora}_{t-p}^i + \beta_{1,7(p-1)+2}^i \text{CarCre}_{t-p}^i + \beta_{1,7(p-1)+3}^i \text{TBP}_{t-p} + \\
&\quad \beta_{1,7(p-1)+4}^i \text{TCC}_{t-p} + \beta_{1,7(p-1)+5}^i \text{IPC}_{t-p} + \beta_{1,7(p-1)+6}^i \text{IMAE}_{t-p} + \\
&\quad \beta_{1,7(p-1)+7}^i \text{RIP}_{t-p} + \epsilon_1 \\
\text{CarCre}_t^i &= c_2 + \beta_{2,1}^i \text{IndMora}_{t-1}^i + \beta_{2,2}^i \text{CarCre}_{t-1}^i + \beta_{2,3}^i \text{TBP}_{t-1} + \beta_{2,4}^i \text{TCC}_{t-1} + \\
&\quad \beta_{2,5}^i \text{IPC}_{t-1} + \beta_{2,6}^i \text{IMAE}_{t-1} + \beta_{2,7}^i \text{RIP}_{t-1} + \dots + \\
&\quad \beta_{2,7(p-1)+1}^i \text{IndMora}_{t-p}^i + \beta_{2,7(p-1)+2}^i \text{CarCre}_{t-p}^i + \beta_{2,7(p-1)+3}^i \text{TBP}_{t-p} + \\
&\quad \beta_{2,7(p-1)+4}^i \text{TCC}_{t-p} + \beta_{2,7(p-1)+5}^i \text{IPC}_{t-p} + \beta_{2,7(p-1)+6}^i \text{IMAE}_{t-p} + \\
&\quad \beta_{2,7(p-1)+7}^i \text{RIP}_{t-p} + \epsilon_2
\end{aligned}$$

donde i representa el segmento bancario $i \in \{\text{Bancos P\u00fablicos}, \text{Bancos Privados}\}$. Como es un modelo VAR tambi\u00e9n se calcula las ecuaciones donde las variables dependientes son macroecon\u00f3micas como las siguientes:

$$\begin{aligned}
\text{TBP}_t &= c_3 + \beta_{3,1}^i \text{IndMora}_{t-1}^i + \beta_{3,2}^i \text{CarCre}_{t-1}^i + \beta_{3,3}^i \text{TBP}_{t-1} + \beta_{3,4}^i \text{TCC}_{t-1} + \\
&\quad \beta_{3,5}^i \text{IPC}_{t-1} + \beta_{3,6}^i \text{IMAE}_{t-1} + \beta_{3,7}^i \text{RIP}_{t-1} + \cdots + \\
&\quad \beta_{3,7(p-1)+1}^i \text{IndMora}_{t-p}^i + \beta_{3,7(p-1)+2}^i \text{CarCre}_{t-p}^i + \beta_{3,7(p-1)+3}^i \text{TBP}_{t-p} + \\
&\quad \beta_{3,7(p-1)+4}^i \text{TCC}_{t-p} + \beta_{3,7(p-1)+5}^i \text{IPC}_{t-p} + \beta_{3,7(p-1)+6}^i \text{IMAE}_{t-p} + \\
&\quad \beta_{3,7(p-1)+7}^i \text{RIP}_{t-p} + \epsilon_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{TCC}_t &= c_4 + \beta_{4,1}^i \text{IndMora}_{t-1}^i + \beta_{4,2}^i \text{CarCre}_{t-1}^i + \beta_{4,3}^i \text{TBP}_{t-1} + \beta_{4,4}^i \text{TCC}_{t-1} + \\
&\quad \beta_{4,5}^i \text{IPC}_{t-1} + \beta_{4,6}^i \text{IMAE}_{t-1} + \beta_{4,7}^i \text{RIP}_{t-1} + \cdots + \\
&\quad \beta_{4,7(p-1)+1}^i \text{IndMora}_{t-p}^i + \beta_{4,7(p-1)+2}^i \text{CarCre}_{t-p}^i + \beta_{4,7(p-1)+3}^i \text{TBP}_{t-p} + \\
&\quad \beta_{4,7(p-1)+4}^i \text{TCC}_{t-p} + \beta_{4,7(p-1)+5}^i \text{IPC}_{t-p} + \beta_{4,7(p-1)+6}^i \text{IMAE}_{t-p} + \\
&\quad \beta_{4,7(p-1)+7}^i \text{RIP}_{t-p} + \epsilon_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{IPC}_t &= c_5 + \beta_{5,1}^i \text{IndMora}_{t-1}^i + \beta_{5,2}^i \text{CarCre}_{t-1}^i + \beta_{5,3}^i \text{TBP}_{t-1} + \beta_{5,4}^i \text{TCC}_{t-1} + \\
&\quad \beta_{5,5}^i \text{IPC}_{t-1} + \beta_{5,6}^i \text{IMAE}_{t-1} + \beta_{5,7}^i \text{RIP}_{t-1} + \cdots + \\
&\quad \beta_{5,7(p-1)+1}^i \text{IndMora}_{t-p}^i + \beta_{5,7(p-1)+2}^i \text{CarCre}_{t-p}^i + \beta_{5,7(p-1)+3}^i \text{TBP}_{t-p} + \\
&\quad \beta_{5,7(p-1)+4}^i \text{TCC}_{t-p} + \beta_{5,7(p-1)+5}^i \text{IPC}_{t-p} + \beta_{5,7(p-1)+6}^i \text{IMAE}_{t-p} + \\
&\quad \beta_{5,7(p-1)+7}^i \text{RIP}_{t-p} + \epsilon_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{IMAE}_t &= c_6 + \beta_{6,1}^i \text{IndMora}_{t-1}^i + \beta_{6,2}^i \text{CarCre}_{t-1}^i + \beta_{6,3}^i \text{TBP}_{t-1} + \beta_{6,4}^i \text{TCC}_{t-1} + \\
&\quad \beta_{6,5}^i \text{IPC}_{t-1} + \beta_{6,6}^i \text{IMAE}_{t-1} + \beta_{6,7}^i \text{RIP}_{t-1} + \cdots + \\
&\quad \beta_{6,7(p-1)+1}^i \text{IndMora}_{t-p}^i + \beta_{6,7(p-1)+2}^i \text{CarCre}_{t-p}^i + \beta_{6,7(p-1)+3}^i \text{TBP}_{t-p} + \\
&\quad \beta_{6,7(p-1)+4}^i \text{TCC}_{t-p} + \beta_{6,7(p-1)+5}^i \text{IPC}_{t-p} + \beta_{6,7(p-1)+6}^i \text{IMAE}_{t-p} + \\
&\quad \beta_{6,7(p-1)+7}^i \text{RIP}_{t-p} + \epsilon_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{RIP}_t &= c_7 + \beta_{7,1}^i \text{IndMora}_{t-1}^i + \beta_{7,2}^i \text{CarCre}_{t-1}^i + \beta_{7,3}^i \text{TBP}_{t-1} + \beta_{7,4}^i \text{TCC}_{t-1} + \\
&\quad \beta_{7,5}^i \text{IPC}_{t-1} + \beta_{7,6}^i \text{IMAE}_{t-1} + \beta_{7,7}^i \text{RIP}_{t-1} + \cdots + \\
&\quad \beta_{7,7(p-1)+1}^i \text{IndMora}_{t-p}^i + \beta_{7,7(p-1)+2}^i \text{CarCre}_{t-p}^i + \beta_{7,7(p-1)+3}^i \text{TBP}_{t-p} + \\
&\quad \beta_{7,7(p-1)+4}^i \text{TCC}_{t-p} + \beta_{7,7(p-1)+5}^i \text{IPC}_{t-p} + \beta_{7,7(p-1)+6}^i \text{IMAE}_{t-p} + \\
&\quad \beta_{7,7(p-1)+7}^i \text{RIP}_{t-p} + \epsilon_7
\end{aligned}$$

En esta investigación realizaremos énfasis en el estudio de las ecuaciones para el

IndMoraⁱ y CarCreⁱ.

3.3.2. Simulación de la distribución posterior de coeficientes

El muestreo de Gibbs para la estimación del modelo VAR se resume en los siguientes pasos (Blake & Mumtaz, 2017):

1. Definir la previa de los coeficientes y la matriz de covarianza del modelo VAR. La previa para los coeficientes del modelo VAR sigue una distribución normal dada por $p(\mathbf{b}) \sim N(\tilde{\mathbf{b}}_0, \mathbf{H})$. La previa para la matriz covarianza de los residuos Σ es una Inversa de Wishart y dado por $IW(\bar{\mathbf{S}}, \alpha)$. Los valores iniciales para Σ se pueden estimar usando MCO.
2. Muestreo de los coeficientes VAR de la distribución posterior $H(\mathbf{b}|\Sigma, \mathbf{Y}_t) \sim N(\mathbf{M}^*, \mathbf{V}^*)$ donde

$$\underbrace{\mathbf{M}^*}_{(N \times (N \times P + 1)) \times 1} = (\mathbf{H}^{-1} + \Sigma^{-1} \otimes \mathbf{X}'_t \mathbf{X}_t)^{-1} (\mathbf{H}^{-1} \tilde{\mathbf{b}}_0 + \Sigma^{-1} \otimes \mathbf{X}'_t \mathbf{X}_t \hat{\mathbf{b}})$$

$$\underbrace{\mathbf{V}^*}_{(N \times (N \times P + 1)) \times (N \times (N \times P + 1))} = (\mathbf{H}^{-1} + \Sigma^{-1} \otimes \mathbf{X}'_t \mathbf{X}_t)^{-1}$$

Una vez \mathbf{M}^* y \mathbf{V}^* son calculados,

$$\underbrace{\mathbf{B}^1}_{(N \times (N \times P + 1)) \times 1} = \mathbf{M}^* + [\bar{\mathbf{b}} \times (\mathbf{V}^*)^{1/2}]'$$

3. La distribución posterior para Σ dada por $H(\Sigma|\beta, \mathbf{Y}_t) \sim IW(\bar{\Sigma}, T + \alpha)$ donde $\bar{\Sigma} = \bar{\mathbf{S}} + (\mathbf{Y}_t - \mathbf{X}_t \mathbf{B}^1)'(\mathbf{Y}_t - \mathbf{X}_t \mathbf{B}^1)$
4. Se repiten los pasos 2 y 3 para obtener $\mathbf{B}^1, \dots, \mathbf{B}^M$ y $\Sigma^1, \dots, \Sigma^M$. Después de eliminar los valores “quemados” de estas iteraciones, los restantes formaran las distribuciones empíricas de \mathbf{B} y Σ

3.3.3. La previa *Minnesota*

La previa de *Minnesota* dado su origen en el Banco de la Reserva Federal de Minnesota, incorpora en la previa el comportamiento de las variables endógenas incluidas en el VAR siguiendo una caminata aleatoria o un proceso AR(1) (autorregresivo de orden 1). La media de la previa de *Minnesota* para los coeficientes del VAR implican la siguiente forma:

$$\mathbf{Y}_t = \begin{pmatrix} \text{IndMora}_t^i \\ \text{CarCre}_t^i \\ \text{TBP}_t \\ \text{TCC}_t \\ \text{IPC}_t \\ \text{IMAE}_t \\ \text{RIP}_t \end{pmatrix} + \mathbf{C}_t + \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,5} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{2,5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{5,1} & \beta_{5,2} & \cdots & \beta_{5,5} \end{pmatrix} \mathbf{Y}_{t-1} + \cdots + \nu_t \quad (3.2)$$

Las medias de la previa de *Minnesota* siguen un proceso AR(1) o de caminata aleatoria si $\beta_{1,1}^0 = \beta_{2,2}^0 = \beta_{3,3}^0 = \beta_{4,4}^0 = \beta_{5,5}^0 = \beta_{6,6}^0 = \beta_{7,7}^0 = 1$. En otras palabras estaría dada por el siguiente vector:

$$\tilde{\beta}_0 = (0, \beta_{1,1}^0, 0, 0, 0, 0, 0, \beta_{2,2}^0, 0, \dots) \quad (3.3)$$

Donde las primeras siete filas corresponden a los coeficientes del primer rezago, luego las del segundo rezago y así sucesivamente. La varianza se estima por la relación de los coeficientes $\beta_{i,j}$ donde:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\lambda_1}{l^{\lambda_2}} \right)^2 && \text{si } i = j \\ & \left(\frac{\sigma_i \lambda_1 \lambda_2}{\sigma_j l^{\lambda_3}} \right)^2 && \text{si } i \neq j \\ & (\sigma_1 \lambda_4)^2 && \text{para la constante} \end{aligned}$$

Donde i se refiere a la variable dependiente i en la i -ésima ecuación y j a las variables independiente en la ecuación. Por lo tanto, si $i = j$ entonces nos referimos a los coeficientes de rezagos de la variable i . Los parámetros σ_i y σ_j son errores estándar calculados de un modelo autoregresivo usando las variables del modelos VAR, estimado vía MCO. El cociente de σ_i y σ_j controla la posibilidad de que i y j estén en diferentes escalas. Note que l es la cantidad de rezagos. Los parámetros λ 's tienen como objetivo controlar la rigidez de las ecuaciones anteriores:

- λ_1 Controla la desviación estándar de la previa de los rezagos. Si $\lambda_1 \rightarrow 0$ $\beta_1, \beta_2 \rightarrow \beta_{1,1}^0, \beta_{2,2}^0$ respectivamente, entonces todos los otros rezagos tienden a cero.

- λ_2 Controla la desviación estándar de la previa en los rezagos de las variables que no sean la variable dependiente. Si $\lambda_2 \rightarrow 0$ $\beta_{i,j} \rightarrow 0$. Si $\lambda_2 \rightarrow 1$ no habrá ninguna distinción entre los rezagos de la variable dependiente y las otras variables.
- λ_3 Controla el grado en que los coeficientes de los rezagos que sean mayores a 1 tiendan a cero, es decir, a medida que aumenta λ_3 el peso de los coeficientes de los rezagos más altos se reduce, lo cual puede interpretarse como dar mayor peso a los valores presentes de las variables.
- λ_4 Controla la varianza de la previa de la constante. Si $\lambda_4 \rightarrow 0$, los términos de la constante se reducen a 0.

Siguiendo las indicaciones del modelo y los parámetros previamente mencionados, se genera una matriz de varianzas de considerables dimensiones. Sin embargo, si reducimos el análisis a un VAR(2), se puede ilustrar de una manera más sencilla la estructura de la matriz de varianzas, donde la matriz \mathbf{H} corresponde una matriz 10×10 .

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} (\sigma_1 \lambda_4)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_1)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\sigma_1 \lambda_1 \lambda_2}{\sigma_2}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\lambda_1}{2^{\lambda_3}}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\sigma_1 \lambda_1 \lambda_2}{\sigma_2 2^{\lambda_3}}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\sigma_2 \lambda_4)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\sigma_2 \lambda_1 \lambda_2}{\sigma_1 2^{\lambda_3}}\right)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\sigma_2 \lambda_1 \lambda_2}{\sigma_1 2^{\lambda_3}}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\lambda_1}{2^{\lambda_3}}\right)^2 \end{pmatrix}$$

La variante de la matriz anterior a la matriz de 10×10 es que la diagonal continúa con los mismos cinco elementos para la segunda variable y el resto de los elementos de la matriz se completa con ceros.

Para este caso, el primer elemento de la diagonal controla la previa de la constante. El segundo elemento de la diagonal controla la previa del $\beta_{1,1}$ del coeficiente del primer rezago de la primera variable independiente. El tercer elemento de la diagonal controla la previa del coeficiente del primer rezago. Finalmente, el tercer y cuarto elemento de la diagonal controla la previa de los coeficientes respectivamente. Los valores teóricos de los hiperparámetros que controlan las previas corresponden a los sugeridos por Fabio Canova (2007), donde:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0.2 \\
\lambda_2 &= 0.5 \\
\lambda_3 &= 1 \quad \text{o} \quad 2 \\
\lambda_4 &= 10^5
\end{aligned}$$

Para verificar la convergencia de estos modelos, se emplean cuatro métodos de evaluación: análisis de las trazas, gráfico de densidad, el criterio de Geweke y el criterio de Gelman-Rubin.

3.3.4. Evaluación de los pronósticos

Para la evaluación de la capacidad predictiva de los modelos estimados, del total de observaciones de la base de datos se realizará una división entre datos de entrenamiento y datos para testear. Dejando las últimas 12 observaciones para el testeo. Se tendrán dos criterios de evaluación la Raíz del Error Cuadrático Medio (RMSE por sus siglas en inglés) y el Error de Porcentaje Medio Absoluto (MAPE por sus siglas en inglés).

3.3.5. Raíz de Error Cuadrático Medio (RMSE)

Definición 3 Raíz de Error Cuadrático Medio (RMSE): La RMSE de los valores predichos \hat{y}_t de la variable dependiente y_t , observadas h veces, se calcula como:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^h (\hat{y}_t - y_t)^2}{h}} \quad (3.4)$$

3.3.6. Error de Porcentaje Medio Absoluto (MAPE)

Definición 4 Error de Porcentaje Medio Absoluto (MAPE): mide el tamaño del error en términos porcentuales, con valores predichos \hat{y}_t de la variable dependiente y_t , observadas h veces, se calcula como:

$$\text{MAPE} = \frac{1}{h} \frac{|y_t - \hat{y}_t|}{|y_t|} \quad (3.5)$$

3.4. Software estadístico

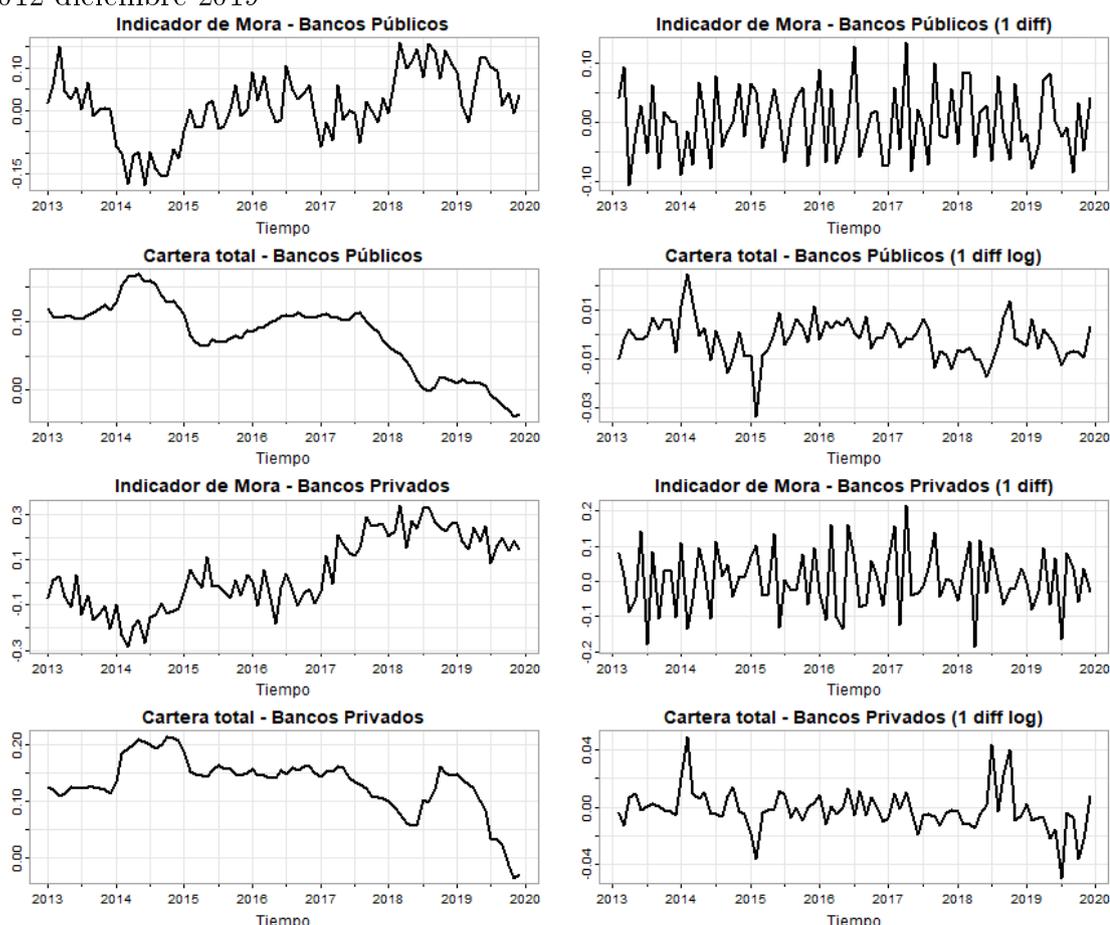
Esta investigación se apoyó el software de programación estadístico R, con el intérprete Rstudio y donde destacan la utilización del paquete vars (Pfaff, 2024) que contiene las funciones para la estimación del VAR frecuentista. El modelo para la estimación del muestreo de Gibbs y la utilización de la previa se programó basado en la publicación de Blake & Mumtaz (2017), para el Banco de Inglaterra y la Universidad Queen Mary que tiene como objetivo presentar temas relevantes en econometría Bayesiana desde una perspectiva aplicada.

Resultados

4.1. Análisis descriptivo

Las figuras 4.1 y B.1 (anexo) ilustran los patrones históricos de las variables macroeconómicas seleccionadas para la estimación, abarcando el período desde enero de 2012 hasta diciembre de 2019. Como en las series estudiadas se muestra un patrón de tendencia claro, en algunos casos decreciente como por ejemplo la variable Cartera Total para ambos tipos de bancos, o creciente en tramos de la serie como por ejemplo la Tasa Básica Pasiva, el Tipo de Cambio o el Índice de Precios del Consumidor. Lo anterior es un indicador de la no estacionariedad de la serie, un problema que será abarcado en la sección 4.1.2.

Figura 4.1: Comportamiento histórico de las variables crediticias - Período enero 2012-diciembre 2019



El cuadro 4.1 resume los principales estadísticos descriptivos de las variables

utilizadas en la modelación. Se destaca con una mayor variabilidad en los datos observados la variación interanual de la Tasa Básica Pasiva (TBP) y el Riesgo País (IRP), con mínimos presentados entre los años 2013 y 2014, cuando se presentó cierta estabilidad del indicador producto más de condiciones de mercado que de la implementación de la nueva metodología que se empezó a calcular desde finales del año 2012. Una situación similar se puede observar sobre el indicador de morosidad de los Bancos Privados IndMora-Pri en el cual se observa una volatilidad del 16.21 % sobre la variación interanual. Este comportamiento en menor medida también se puede observar para el mismo período (2014) en el indicador de morosidad de los Bancos Públicos IndMora-Pub que incluye los Bancos comerciales del estado y los creados por leyes especiales. El cuadro resume los principales estadísticos descriptivos de las variables descritas en la sección 3.1.

Cuadro 4.1: Estadísticas descriptivas de las variables, enero 2012 - diciembre 2019

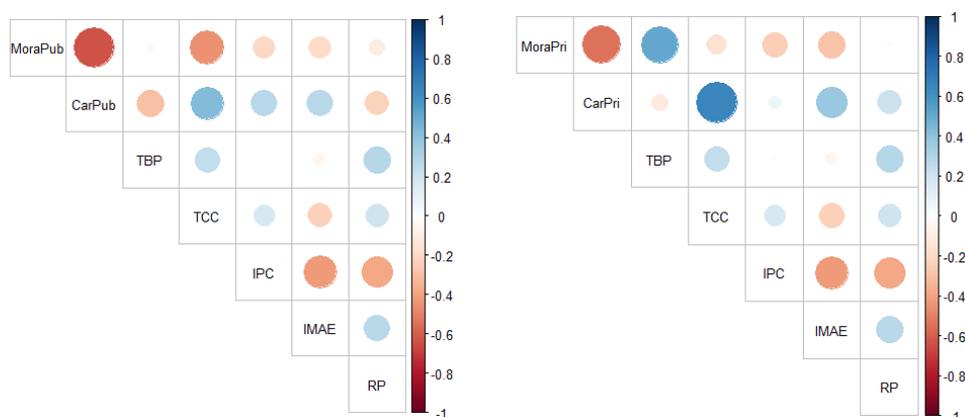
VARIABLES	Variable	Promedio	Mediana	Desv.Est	Máxima	Mínimo
Bancos	IndMora-Pub	1.90 %	2.11 %	11.03 %	26.18 %	-22.63 %
Públicos	CarCre-Pub	7.23 %	8.16 %	5.50 %	18.23 %	-4.92 %
Bancos	IndMora-Pri	4.34 %	1.44 %	16.21 %	34.27 %	28.75 %
Privados	CarCre-Pri	13.07 %	14.15 %	5.03 %	21.39 %	-3.75 %
	TBP	-6.78 %	-2.40 %	19.99 %	29.32 %	-47.19 %
VARIABLES	TCC	2.25 %	2.00 %	3.64 %	10.23 %	-6.45 %
Macro-	IPC	2.31 %	-2.15 %	1.97 %	6.31 %	-1.21 %
económicas	IMAE ¹	3.25 %	3.17 %	1.33 %	6.84 %	0.85 %
	RIP	0.90 %	5.25 %	27.62 %	48.19 %	-72.56 %

¹ IMAE tendencia ciclo cuya base es el año base 2017

4.1.1. Análisis de correlaciones

En la figura 4.2 se puede apreciar la correlación de Pearson entre las variables utilizadas en los modelos. Se puede observar que la correlación del indicador de morosidad y la Cartera Total en ambos segmentos de bancos presenta una correlación negativa, esperable dado si observamos las tendencias en la figura 4.1. La cartera total para Bancos Privados presenta una correlación positiva importante con la variable macroeconómica del tipo de cambio, lo cual podría estar relacionado con la oferta de crédito de este segmento en moneda extranjera. El restante de relaciones es cercano a cero entre las variables crediticias y variables macroeconómicas.

Figura 4.2: Correlación de la variables utilizadas



4.1.2. Análisis de Estacionariedad

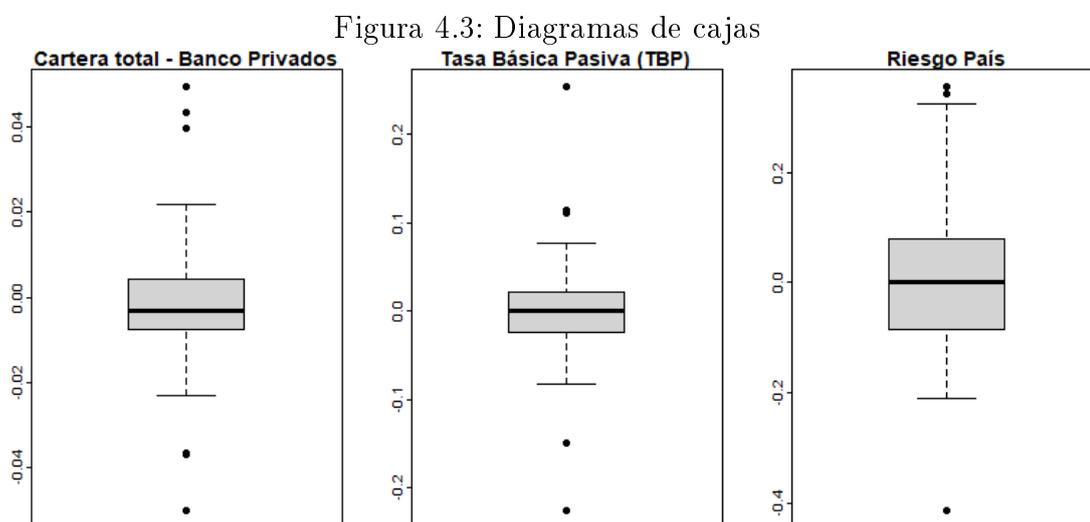
Como se revisó previamente en la sección 2.2, el análisis de VAR contempla que las series utilizadas sean estacionarias. Como se observa a la izquierda de las figuras 4.1 y B.1 (anexo), se muestra la variación interanual de las series donde se observa una tendencia en cada una de sus gráficas, lo cual puede significar que su media y varianza en periodos posteriores puedan aumentar o disminuir si existe tendencia positiva o negativa respectivamente. Por esta razón a la derecha de los gráficos se pueden observar las variables utilizadas en este estudio con 1 diferencia, se procede a realizar la prueba (explicada en 2.1.2) para confirmar la estacionariedad de las series. La cantidad de rezagos utilizada en esta prueba se determina por el criterio AIC (véase cuadro 4.2).

Cuadro 4.2: Prueba de Estacionariedad de Dickey-Fuller

Variables	Nombre	Estadístico	Valor Crítico 5 %	Contraste
Bancos	IndMora-Pub	-9.3323	-1.95	Rechazo H0
Públicos	CarCre-Pub	-4.1818	-1.95	Rechazo H0
Bancos	IndMora-Pri	-11.142	-1.95	Rechazo H0
Privados	CarCre-Pri	-4.9618	-1.95	Rechazo H0
	TBP	-4.3122	-1.95	Rechazo H0
Variables	TCC	-5.4865	-1.95	Rechazo H0
Macro	IPC	-5.1301	-1.95	Rechazo H0
económicas	IMAE	-7.1420	-1.95	Rechazo H0
	RIP	-7.0904	-1.95	Rechazo H0

4.1.3. Análisis de valores atípicos

Como se identificó en la sección 4.1, las variables Tasa Básica Pasiva (TBP), Riesgo País (RIP) y Cartera de Bancos Privados (CarCre-Pri) presentan una volatilidad importante. Un análisis de valores extremos mediante gráficos de caja, permite observar la presencia de valores atípicos los cuales debemos estudiar dada su influencia en las estimaciones y una posible violación de supuestos del modelo VAR. Como se aprecia en la figura 4.3, se confirma la presencia de valores atípicos mediante el análisis visual del diagrama de caja. Se realizará un proceso de imputación seleccionando los valores atípicos de mayor influencia para suavizar el efecto de los valores a partir de la técnica de interpolación lineal. En total se imputan dos valores para la TBP y RIP, y cuatro valores para la CarCre-Pri.



4.2. Aplicación del modelo VAR frecuentista

El primer paso en la estimación del modelo VAR frecuentista, donde se verificó previamente la estacionariedad de las series de tiempo utilizadas, corresponde a la selección del orden (p) del modelo. Esta decisión se realizará según lo revisado en la sección 2.2.1. Es importante recalcar que también la selección de la cantidad de rezagos puede fijarse de acuerdo al criterio experto del investigador.

4.2.1. Estimación de rezagos

Para la estimación óptima de los rezagos utilizados en los modelos se consideran los criterios de información Akaike (AIC), Hannan y Quinn (HQ), y Bayesiana de Schwarz (BIC). Utilizando la función VARselect del paquete vars en R. Los resultados se pueden visualizar en el cuadro 4.3. La cantidad de rezagos a utilizar será fijada por un criterio experto con un valor $p = 2$.

Cuadro 4.3: Estimación cantidad de rezagos óptimos

Modelo VAR	AIC	BIC	HQ
Bancos Públicos	6	1	2
Bancos Privados	6	1	2

4.2.2. Estimación del modelo

Los resultados obtenidos por los modelos se pueden visualizar en los cuadros 4.4 y 4.5. Las variables significativas para el análisis fueron el Índice de Precios al Consumidor (IPC), la Tasa Básica Pasiva (TBP) y el Tipo de Cambio (TCC). Para explicar el crecimiento de cartera (CarCre) y el indicador de morosidad (IndMora), en los Bancos Públicos, el rezago de CarCre fue relevante para el crecimiento de cartera. Además, los rezagos t-1 y t-2 del indicador de morosidad y el rezago t-2 del tipo de cambio fueron significativos. En los Bancos Privados, el IPC fue significativo al 10 %, y los rezagos t-1 y t-2 del indicador de morosidad, el TCC en t-1 y la TBP en t-2 resultaron relevantes.

Es relevante destacar que el TCC fue significativo en ambos modelos VAR generados, mostrando un efecto distinto ante las variaciones de esta variable. Para los bancos públicos, el TCC mostró un signo positivo para el coeficiente del segundo rezago, implicando que incrementos en las variaciones del tipo de cambio afectan positivamente el indicador de morosidad. En contraste, para los Bancos Privados, el efecto se observó en el primer rezago con un signo negativo, indicando que variaciones positivas en el tipo de cambio podrían disminuir el indicador de morosidad. Esto refuerza la idea de separar ambos enfoques entre Bancos Públicos y Privados, dado que por su modelo de negocio, los Banco Privados un porcentaje importante de su cartera en moneda extranjera, por lo tanto, ante estas variaciones se podría experimentar un incremento en el tamaño total de la cartera, es decir el denominador del indicador y generando esto genera una disminución en el valor del IndMora.

Cuadro 4.4: Modelo VAR Bancos Públicos: Ecuaciones y coeficientes

Variable	CarCre _t	IndMora _t	TBP _t	TCC _t	IPC _t	IMAE _t	RIP _t
CarCre _{t-1}	0.2998 (·)	-0.4574	1.0311	0.2725	-0.2059(*)	-0.0225	-1.2322
IndMora _{t-1}	-0.0285	-0.5254(***)	-0.1776(*)	-0.0695(·)	0.0081	-0.0046	-0.0487
TBP _{t-1}	0.0192	-0.3525	0.3043(*)	0.0697	-0.0008	0.0036	-0.0861
TCC _{t-1}	0.0209	-0.6263	0.3043 (·)	0.0076	0.1565(**)	-0.0166	-1.8576
IPC _{t-1}	0.1223	-0.8092	0.2903	0.7682(·)	0.1167	-0.0830(*)	0.7869
IMAE _{t-1}	-0.2651	3.2789	2.3851	0.5295	0.0652	1.3730(***)	-0.4576
RIP _{t-1}	0.0144	0.0650	0.0376	0.0326(·)	0.0016	-0.0034(*)	-0.0823
CarCre _{t-2}	0.1315	-1.6461	0.2553	0.1681	0.0269	-0.0074	1.5175
IndMora _{t-2}	-0.0135	-0.3273(*)	-0.2144(**)	-0.0643(·)	-0.0260(*)	0.0056	-0.5266
TBP _{t-2}	-0.0393	0.2899	0.2895(**)	-0.1000(·)	0.0190	0.0042	-0.3156
TCC _{t-2}	-0.0133	1.3073(*)	-0.2622	-0.1500	0.0322	0.0062	0.5076
IPC _{t-2}	0.0476	0.0206	0.6931	0.4063	-0.0309	-0.0048	-0.1450
IMAE _{t-2}	0.2974	-3.9945	-2.0315	-0.3503	-0.5241(·)	-0.8190(***)	1.2552
RIP _{t-2}	0.0022	0.0042	0.0542(·)	0.0219	-0.01017(*)	0.0003	-0.0428
Cons	-0.0010	-0.0047	0.0050	0.0015	-0.0008	-0.0001	0.0267

Nivel significancia estadística (***) 0.001, (**) 0.01, (*) 0.05, (·) 0.1

Cuadro 4.5: Modelo VAR Bancos Privados: Ecuaciones y coeficiente

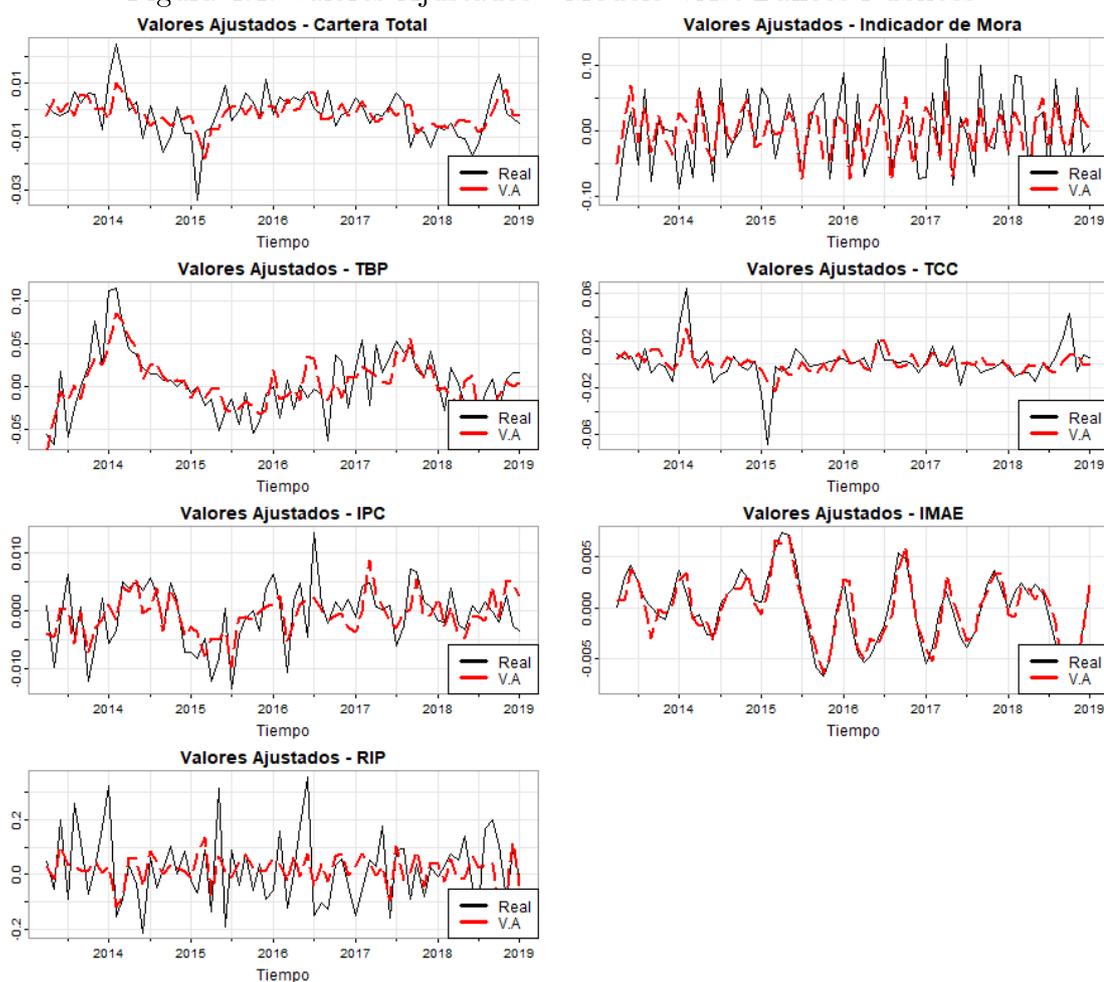
Variable	CarCre _t	IndMora _t	TBP _t	TCC _t	IPC _t	IMAE _t	RIP _t
Cartera _{t-1}	0.1625	0.51364	-0.9429	0.5604(·)	0.0175	-0.0054	2.4261
IndMora _{t-1}	-0.0294	-0.6138(***)	-0.1156(*)	-0.0447(·)	0.0315(***)	-0.0015	-0.6049(**)
TBP _{t-1}	0.0091	-0.35455	0.4700(**)	0.0767	-0.0170	-0.0025	0.6549
TCC _{t-1}	0.1003	-2.1748(*)	0.2610	-0.0607	0.0836	-0.01064	-3.4365(*)
IPC _{t-1}	0.5173(·)	-1.7284	0.1379	0.6318	0.0705	-0.0902(*)	0.1853
IMAE _{t-1}	0.7003	1.7677	2.9543	0.2765	0.1123	1.3682(***)	2.6182
RIP _{t-1}	0.0039	-0.0209	0.0088(·)	0.0219	-0.0023	-0.0020	-0.1412
Cartera _{t-2}	-0.0474	0.5187	1.0604	-0.0952	0.0609	-0.0793(*)	0.3500
IndMora _{t-2}	-0.0211	-0.3779(**)	-0.1361(*)	-0.0476(·)	0.0071	0.0023	-0.3209
TBP _{t-2}	-0.0350	0.6156(*)	0.2426(*)	-0.0698	0.0301(·)	0.0086	-0.6845
TCC _{t-2}	-0.0396	-0.2830	-0.6394	-0.1218	0.0500	0.0364(·)	0.0638
IPC _{t-2}	-0.3036	2.2627	-0.1947	0.0612	-0.0126	-0.0175	-2.4267
IMAE _{t-2}	-0.6342	-6.0770	-3.7517(*)	-0.7600	-0.4832(·)	-0.7605(***)	-5.4492
RIP _{t-2}	-0.0010	0.0988	0.0542	0.0236	-0.0099(*)	0.0001	-0.0445
Cons	-0.0006	0.0099	0.0029	0.0016	-0.0005	-0.0001	0.0320

Nivel significancia estadística (***) 0.001, (**) 0.01, (*) 0.05, (·) 0.1

4.2.3. Ajuste del modelo

Se elaboran los gráficos de ajuste para cada una de las variables en los modelos estimados en la sección anterior, con el propósito de contrastar visualmente los valores observados y los valores estimados (ajustados) por el modelo correspondiente a cada variable. En la figura 4.4 se presentan los valores ajustados para el modelo estimado de los Bancos Públicos y la figura B.2 (anexo) para Bancos Privados. Los valores ajustados se presentan mediante una línea roja. Los gráficos muestran un buen ajuste logrado para ambos modelos VAR Frecuentista.

Figura 4.4: Valores Ajustados - Modelo VAR Bancos Públicos



En los anexos B.3 y B.4 se pueden observar gráficamente los resultados de los pronósticos de doce meses hacia adelante para este modelo.

4.3. Pruebas de diagnóstico modelo frecuentista

4.3.1. Autocorrelación de los residuos y heterocedasticidad

La prueba de Portmanteau se muestra en la cuadro 4.6 que no se observa presencia de correlación serial en los residuos, de ambos modelos. Con respecto al contraste de presencia de heterocedasticidad también se rechaza la hipótesis nula H_0 . Por tanto, se satisface el supuesto de varianza constante.

Cuadro 4.6: Prueba de Portmanteau y ARCH

Modelo VAR	Prueba	P-Valor	Contraste
Bancos	Portmanteau	0.0993	No rechazo H_0
Públicos	ARCH	1.000	No rechazo H_0
Bancos	Portmanteau	0.8141	No rechazo H_0
Privados	ARCH	1.0000	No rechazo H_0

4.3.2. Normalidad de los residuos

En el cuadro 4.7 se presentan los resultados de la prueba de normalidad multivariante. En todos los casos se no se cuenta con suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula de normalidad de los residuos.

Cuadro 4.7: Test de normalidad de residuos multivariante

Modelo VAR	Prueba	Chi-cuadrado	df	P-Valor	Contraste
Bancos	JB-Test	11.511	7	0.6455	No rechazo H_0
Públicos	Skewness only	5.880	7	0.5538	No rechazo H_0
	Kurtosis only	5.630	7	0.5835	No rechazo H_0
Bancos	JB-Test	17.801	7	0.2160	No rechazo H_0
Privados	Skewness only	6.770	7	0.4532	No rechazo H_0
	Kurtosis only	11.031	7	0.1373	No rechazo H_0

4.4. Estimación de la distribución posterior de los coeficientes usando simulación Monte Carlo con cadenas de Markov

Para la realización de la estimación de la distribución posterior de los coeficientes usando simulación se utilizó el código en R del Anexo 1 A. La cantidad de rezagos utilizadas es igual que el modelo frecuentista un orden $p = 2$. Además dado que se

utilizará la previa Minnesota, resulta necesario definir los valores iniciales para para cada variable, y los valores por defecto de los hiperparámetros λ vistos en la sección 3.3.3. Los valores iniciales para la previa de Minnesota corresponden a un promedio de cada variable detallados en la siguiente ecuación para $\tilde{\beta}_0$:

$$\tilde{\beta}_0 = \left(\begin{array}{ll} \text{CarCre-Pub} & = 0.0010031039 \\ \text{IndMora-Pub} & = 0.0010031039 \\ \\ \text{CarCre-Pri} & = -0.0012452537 \\ \text{IndMora-Pri} & = 0.0045722277 \\ \\ \text{TBP}_0 & = 0.0007646932 \\ \text{TCC}_0 & = 0.0011853870 \\ \text{IPC}_0 & = -0.0005452145 \\ \text{IMAE}_0 & = -0.0000959814 \\ \text{RIP}_0 & = 0.0211597072 \end{array} \right)$$

La cantidad de iteraciones para el muestreo de Gibbs se establece en 50000, y el número de valores “quemados” será de 40000. Se establece un número de iteraciones suficientemente grande para asegurar la convergencia.

4.5. Criterios de convergencia

Como se puede observar en las figuras 4.5 y 4.6 la evidencia de convergencia para los parámetros de modelo se cumple. El análisis de traza, el histograma y la función de autocorrelación muestran el alcance del estado estacionario de la cadena. Los gráficos generados para el restante de variables así como los resultados de los diagnósticos de convergencia (criterio de Geweke y el criterio de Gelman-Rubin) se presentan gráficamente en el anexo B.

Figura 4.5: Traza e histograma de los parámetros estimados - Bancos Públicos

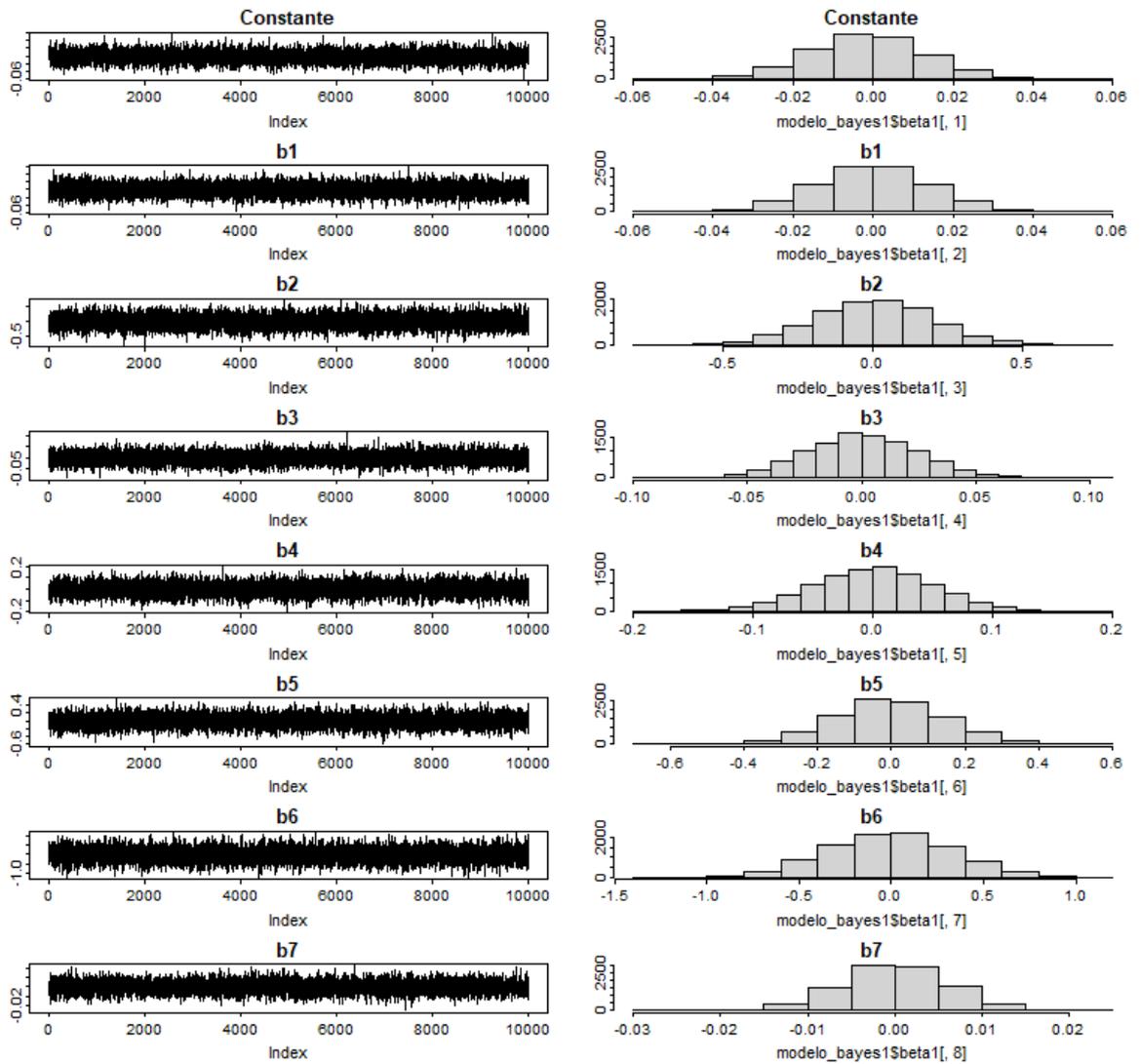
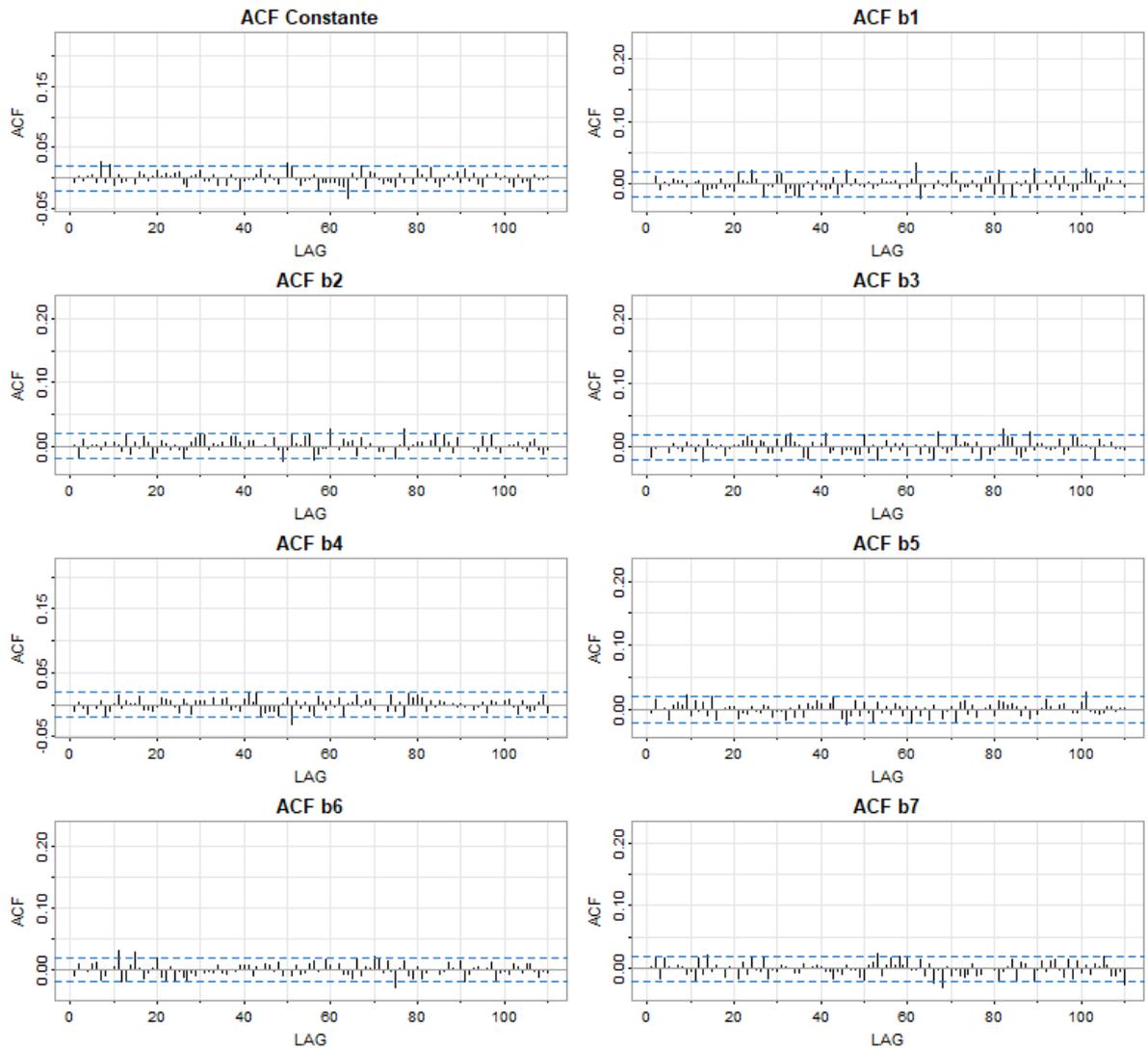


Figura 4.6: Función de autocorrelación - Bancos Públicos



4.6. Comparación de resultados

En esta sección se revisarán los resultados de los modelos planteados en las secciones 4.2 y 4.4. La comparación de resultados para distintos tamaños de muestra tiene como objetivo evaluar la calidad de los pronósticos que son generados por ambos modelos. Para este análisis se disponen de nueve ventanas de tiempo, que corresponden a distintos tamaños de muestra $n \in \{25, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72\}$ donde el valor de 72 es la cantidad de observaciones disponible en el estudio. El objetivo es evaluar a los modelos en cada una de las ventanas de tiempo y realizar una comparación entre el valor real y el ajustado por los modelos VAR. Lo anterior se realizará al considerar la diferencia entre el valor ajustado por los modelos VAR, y el valor real de la serie utilizando las funciones de medición del error como raíz del error cuadrático medio (RMSE) y el error de porcentaje absoluto (MAPE), mencionados en la sección 3.3.4.

En la Figura 4.7 se presentan los resultados de la variación del error para el RMSE y MAPE para los modelos VAR aplicados a bancos públicos. Al analizar la calidad de los pronósticos medidos por el RMSE, se observa que la metodología generada por el modelo VAR con simulación de Monte Carlo con cadenas de Markov exhibe un mejor desempeño que el VAR frecuentista en las primeras tres ventanas de tiempo, específicamente con un número de observaciones menor o igual a 36 (equivalente a tres años de información con periodicidad mensual).

No obstante, al considerar todos los periodos y una medida promedio para el RMSE, se destaca que el modelo generado para la Cartera Total presenta un RMSE de 1.06 en comparación con 1.18 para el modelo frecuentista. Para el Indicador de Mora, los valores son de 7.28 y 3.66 para los modelos frecuentista y Bayesiano respectivamente, indicando un mejor ajuste para este último en este modelo.

Cuando se examina el MAPE, se evidencia una tendencia descendente a medida que aumenta el tamaño de la muestra en ambas metodologías de cálculo para el VAR. Dado que este indicador evalúa el tamaño promedio de los errores como un porcentaje del valor real, la mejora esperada en la calidad de los pronósticos se vuelve más evidente a medida que se dispone de un mayor conjunto de datos.

En la Figura 4.8, se exhiben los resultados del análisis del ajuste de los modelos aplicados a bancos privados. Es crucial resaltar que, en comparación con los bancos públicos, se observan variaciones porcentuales menores en el indicador MAPE. Este indicador demuestra una mayor estabilidad en la variación del error a lo largo de las diferentes ventanas de análisis. Es particularmente significativo destacar que, en este estudio, los modelos VAR generados mediante simulación Monte Carlo con cadenas

de Markov muestran un desempeño superior antes de alcanzar los 36 periodos de observación en seis de las ocho mediciones realizadas, en comparación con los modelos frecuentistas. Este hallazgo destaca la eficacia de la metodología de simulación propuesta en términos de calidad de pronóstico para los bancos públicos y privados, especialmente cuando se dispone de información limitada para el análisis.

Figura 4.7: Variación del Error - Bancos Públicos

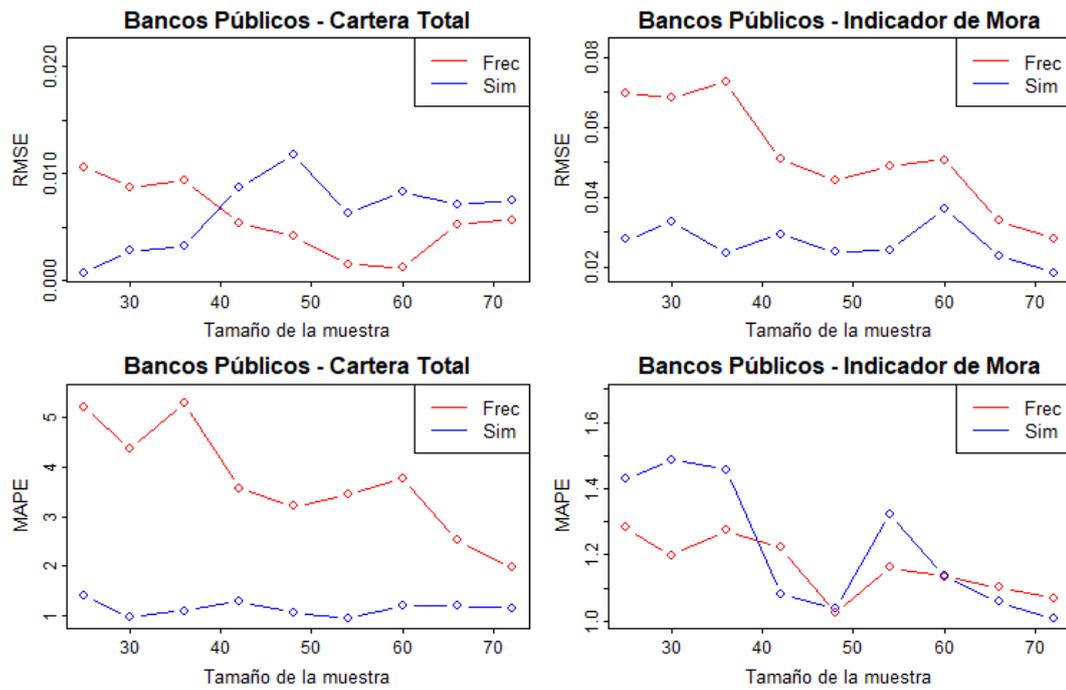
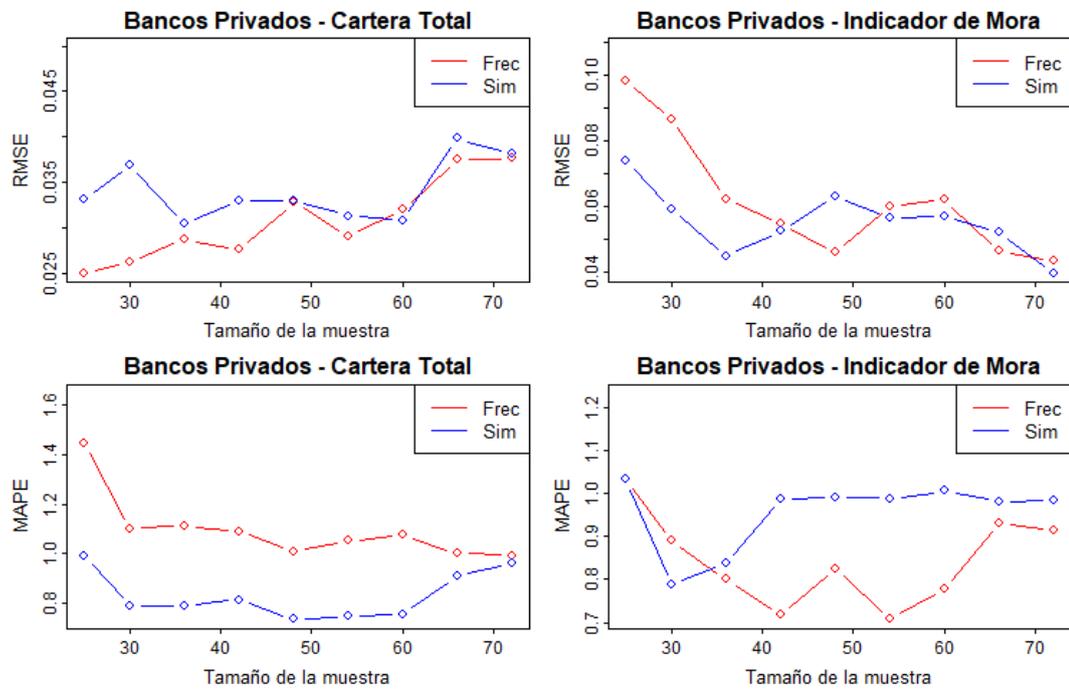


Figura 4.8: Variación del Error - Bancos Privados



Conclusiones

La utilización de modelos de vectores autoregresivos proporcionan al análisis de factores macroeconómicos y crediticios la posibilidad de generar conclusiones, con base en un modelo que parte de un enfoque holístico, el cual puede reflejar la interconexión de factores que influyen en el comportamiento crediticio. Lo cual eventualmente llevará a una mejor comprensión y predicción de los eventos crediticios.

La utilización de modelos robustos genera valor no solamente para la institución, sino también a vista del regulador financiero genera una herramienta valiosa para demostrar la utilización de metodologías de análisis crediticio y financiero más sólidas y una gestión de crédito más efectiva. La inclusión de variables macroeconómicas para robustecer el análisis de variables crediticias contribuye con tener un mejor entendimiento de como los cambios en los factores económicos pueden afectar el riesgo crediticio. Dicho esto, con miras de apoyar y ayudar a los responsables en la toma de decisiones y anticipar tendencias económicas claves y por ende, tomar las medidas preventivas o correctivas según sean necesarias.

Dentro de la investigación se determinó la importancia de realizar un análisis diferenciando por segmento bancario para Bancos Privados y Públicos dado su tamaño y modelo de negocio. La determinación de factores que influyen en las variables crediticias como el indicador de morosidad y cartera total de las entidades además del planteamiento de modelos prospectivos, comprueban un compromiso hacia una mejor gestión del riesgo crediticio. Lo anterior es muy relevante para tener un panorama de la situación del riesgo de crédito y las posible provisiones y generación de alertas tempranas que se deban tomar ante perspectivas futuras que pudieran ser adversas y las cuales puedan poner en sobre alerta no solo a las entidades sino a todo el sistema financiero.

Las dos metodologías utilizadas para la estimación de modelos VAR suponen ventajas y desventajas que el investigador a cargo debe tener en consideración al momento de seleccionar la técnica para modelar. La estimación del VAR Frecuentista supone el cumplimiento de una gran cantidad de supuestos para la obtención de resultados robustos. Este modelo busca determinar el comportamiento de la Cartera Total y el de Indicadores de morosidad para ambos segmentos bancarios, ante cambios de variables macroeconómicas. En el análisis de las variables que fueron significativas en estos modelos destacan los efectos en variaciones del tipo de cambio. Estos refuerzan la importancia de considerar las diferencias estructurales entre Ban-

cos Públicos y Privados al analizar el impacto de los determinantes en la morosidad y el crecimiento de la cartera.

Adicionalmente, se puede evidenciar cómo se obtiene una mejor bondad de ajuste en ambas metodologías conforme se incrementan la cantidad de observaciones. En teoría de series de tiempo, algunos expertos consideran un mínimo de sesenta observaciones (en caso de tener periodicidad mensual) para lograr un buen ajuste entre el modelo y los datos, situación que se alinea con los resultados obtenidos. También el planteamiento del modelo VAR a partir de simulación para la estimación de sus coeficientes genera pronósticos con un grado mayor de variabilidad que los modelos frecuentistas.

Los modelos construidos bajo este enfoque cumplen con los criterios de convergencia revisados en el marco teórico, y es notable comentar que sus pronósticos poseen menor variación de error para muestras pequeñas en comparación con el modelo frecuentista. Ello comprueba uno de los objetivos de esta investigación que en el caso empírico estudiado el modelo VAR simulado podría generar un mejor ajuste que el VAR frecuentista bajo estas condiciones. También es relevante mencionar que ambos modelos mejoran los indicadores de desempeño (pronósticos) conforme se va incrementando el tamaño de muestra. Esto es esperable dada la mayor cantidad de información que estaría disponible para el ajuste de los modelos. Esta investigación fue realizada partiendo de la utilización de la previa de Minnesota para reflejar las creencias previas en el análisis bayesiano, otras líneas de investigación pueden derivarse al modificar este supuesto y considerar modelar la previa a partir de alguna distribución.

La afectación por la pandemia del COVID 19 entre los años 2020 y 2021 generó que se adoptaran nuevas medidas en la administración del riesgo de crédito (CONASSIF, 2020). Las entidades adaptaron sus políticas a la coyuntura, lo que conllevó a que se generaran herramientas de mitigación de riesgo y espacio para que las entidades ofrecieran y renegociaran créditos. Algunas de estas medidas como arreglos de pago o readecuaciones de crédito que en condiciones previas a la pandemia no se hubieran otorgado (Flores-Estrada, 2021). Esto conlleva a una alteración de los indicadores que miden el desempeño y el riesgo de las carteras de crédito, al no contemplar operaciones de crédito que no entraron en mora por los planes de ayuda brindados por las entidades.

Finalmente, en la actualidad la implementación de modelos VAR estimados a partir de simulación y definición de previas basadas en una cantidad de muestra (historia) relativamente pequeña pueden ser aún más relevantes para los departamentos que administran el riesgo de crédito, dada la limitada información Post-Pandemia

con que cuentan las instituciones para robustecer el análisis de la gestión de riesgo ante una nueva realidad.

Bibliografía

- [1] Alarcón Valverde, L. A y Chuñir Panjón, L. (2012). *Evaluación de modelos econométricos alternativos de series de tiempo para el pronóstico de la inflación en el Ecuador en el corto plazo: periodo 2000-2010*. BS Thesis. 2012. <http://dspace.ucuenca.edu.ec/handle/123456789/1042>
- [2] Altuve, J. L. y Hurtado, A. J .(2018). *Análisis de los factores que influyen en la morosidad del sistema bancario venezolano (2005-2015)*. <https://www.redalyc.org/journal/364/36457129005/html/>
- [3] Arroyo, N. (2011). *Métodos Bayesianos para la proyección de variables macroeconómicas en Uruguay*. Universidad Católica de Uruguay.
- [4] Ballabriga, F.C. (1998). *Un modelo macroeconómico BVAR para la economía española: Metodología y resultados*. España: Imprenta del Banco de España.
- [5] BCCR. (2022). *Marco legal: acuerdos junta directiva BCCR-6059-2022-Art13*. <https://www.bccr.fi.cr/marco-legal/DocAcuerdosJuntaDirectiva/BCCR-6059-2022-Art13.pdf>
- [6] BCCR. (2012). *Nota técnica: Índice Mensual de Actividad Económica (IMAE)*. <https://gee.bccr.fi.cr/indicadoreseconomicos/Documentos/DocumentosMetodologiasNotasTecnicas/NOTA%20TECNICA%20IMAE%20REFERENCIA%202012.pdf>
- [7] Blake, A. y Mumtaz, H. (2017). *Applied Bayesian econometrics for central bankers*. Bank of England. <https://www.bankofengland.co.uk/ccbs/applied-bayesian-econometrics-for-central-bankers-updated-2017>
- [8] Box, G. y Jenking, G. (1976). *Time series analysis: forecasting and control*. Holden-day. Oakland, California.
- [9] CONASSIF. (2020). *Conassif adopta medidas complementarias ante la propagación del virus Covid-19*. https://www.sugef.fi.cr/informacion_relevante/Noticias/Boletin%20medidas%20adicionales%20Covid19%20Conassif.pdf
- [10] Congdon, P. (2006) *Bayesian Statistical Modelling*. Sussex: John Wiley & Sons..

- [11] Canova, F. (2007) *Methods for Applied Macroeconomic Research*. Princeton University Press, Princeton.
- [12] Cardenas, V., Correo, J., Díaz, F. F. (2015). *Classical and bayesian statistical methods for demand forecasting. A comparative analysis*. Revista Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, 4(1), pp. 52-67.
- [13] Cordero, M. (2020). *Comparación de un modelo dinámico de equilibrio general estocástico (BVAR-DSGE) y modelos de series de tiempo estándar de vectores autorregresivos (VAR frecuentista y VAR Bayesiano), aplicados para el pronóstico de variables económicas*. Trabajo Final de Graduación. Universidad de Costa Rica.
- [14] Cruz, O., Durán, R. y Muñoz, E. (2001). *Sensibilidad de la razón de morosidad y liquidez del sistema bancario nacional ante cambios en el entorno: un enfoque utilizando datos de panel*. Revista economía y sociedad, No17 pp 81-108.
- [15] Díaz, L., Covarrubias, D., & Sistachs, V. (2015). *Enfoque bayesiano del modelo de regresión logística usando cadenas de Markov Monte Carlo*. Investigación Operacional.
- [16] Díaz, O. (2009). *Determinantes del ratio de morosidad en el sistema financiero boliviano*. Banco Central de Bolivia.
- [17] EMBI. (2023). *Riesgo País EMBI – América Latina* <https://www.invenomica.com.ar/riesgo-pais-emb-america-latina-serie-historica/>
- [18] Engle, R. (1982). *Autorregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom Inflation*. Econometrica. 50, po. 987-1008.
- [19] Flores-Estrada, M. (2021). *El riesgo aumentó en el sistema financiero durante la pandemia*. Semanario Universidad. <https://semanariouniversidad.com/pais/el-riesgo-aumento-en-el-sistema-financiero-durante-la-pandemia/>
- [20] Foley, D. (2021). *A Bayesian approach to time series forecasting - towards data science*. Medium. <https://towardsdatascience.com/a-bayesian-approach-to-time-series-forecasting-d97dd4168cb7>
- [21] Gujarati, D. N. (2003). *Basic Econometrics*, McGraw-Hill Companies.
- [22] Hamilton, J. (2003). *Time series analysis*, Princeton University Press.

- [23] Hernández O. (2011). *Introducción a las Series Cronológicas*. Editorial Universidad de Costa Rica.
- [24] Hoff P. D. (2009). *A first Course in Bayesian Statistical Methods*. Springer.
- [25] Koop G. (2003). *Bayesian Econometrics*, Wiley, Massachusetts, 2nd edition.
- [26] Luna-Viera C. Nuñez-Paredes W y Tulcanaza-Prieto A. (2022). *Determinantes macroeconómicos de la tasa de morosidad en préstamos hipotecarios en el Banco del Instituto de Seguridad Social, Periodo 2011-2021*, Innova Research Journal.
- [27] Martínez Ramos, A, F. (2018). *Modelos econométricos para determinar el comportamiento de la cartera comercial de los bancos privados grandes ecuatorianos en el periodo 2007-2015*. Trabajo Final de Graduación. Universidad Andina Sino Bolívar.
- [28] Barahona, L., Álvarez, H., Ramírez, S. (2023). *Segundo estudio trimestral de tarjetas de crédito*. Ministerio de Economía, Industria y Comercio de Costa Rica.
- [29] Mendieta Alvarado, W. (2015). *Un VAR Bayesiano de media escala para la economía nicaragüense*. Banco Central de Nicaragua.
- [30] Montero, E., Rojas-Rojas, G. (2015). *Efecto de una capacitación sobre los puntajes de la prueba de admisión de la Universidad de Costa Rica: una aproximación bayesiana*. Actualidades en Psicología, 29 (119), pp. 115-130.
- [31] Novales, A. (2017). *Modelos vectoriales autoregresivos VAR*. Universidad Complutense.
- [32] Pfaff, B. (2024). *VAR Modelling [R package vars version 1.6-1]*. <https://cran.r-project.org/web/packages/vars/index.html>
- [33] Bermudez, M. (2022). *Crédito en moneda extranjera es la mitad del total bancario, a pesar de leve descenso*. Semanario Universidad. <https://semanariouniversidad.com/pais/credito-en-moneda-extranjera-es-la-mitad-del-total-bancario-a-pesar-de-leve-descenso/>
- [34] Sims, C. A. (1980). *Macroeconomics and Reality*. Econometrica. 48, po. 1-48.
- [35] SUGEF. (2023). *Acuerdo SUGEF 1-05: Reglamento para la calificación de deudores*. v77 Abril 2023.
- [36] SUGEF. (2022). *Bottom Up Stress Test: Guía Metodológica*. Marzo 2022.

- [37] Tsay, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*. John Wiley & Sons.
- [38] Ureña, O. (2022). *Efecto del ciclo económico den la calidad de la cartera de crédito de consumo y vivienda 2007-2021*. Trabajo Final de Graduación. Universidad de Costa Rica.
- [39] Vaneput, N. (2019). *Forecast KPI: RMSE, MAE, MAPE & Bias*. Recuperado el 9 de julio del 2020: <https://medium.com/analytics-vidhya/forecast-kpi-rmse-mae-mape-bias-cdc5703d242d>
- [40] Vera, L, y Costa, I. (2007). *Estimación y Proyección de la Calidad de la Cartera de Crédito utilizando Variables Macroeconómicas: Un estudio para Venezuela..* Revista Economía y Estadística, Cuarta Época. Vol.45, No.2 p.29-52.

Apéndice A

El código utilizado esta disponible en:

[https://drive.google.com/drive/folders/113sukcByMnYqbS0t6EmKcaoU8h0b5KT0?
usp=drive_link](https://drive.google.com/drive/folders/113sukcByMnYqbS0t6EmKcaoU8h0b5KT0?usp=drive_link)

Apéndice B

Figura B.1: Comportamiento histórico de las variables macroeconómicas - Periodo Enero 2012-Diciembre 2019

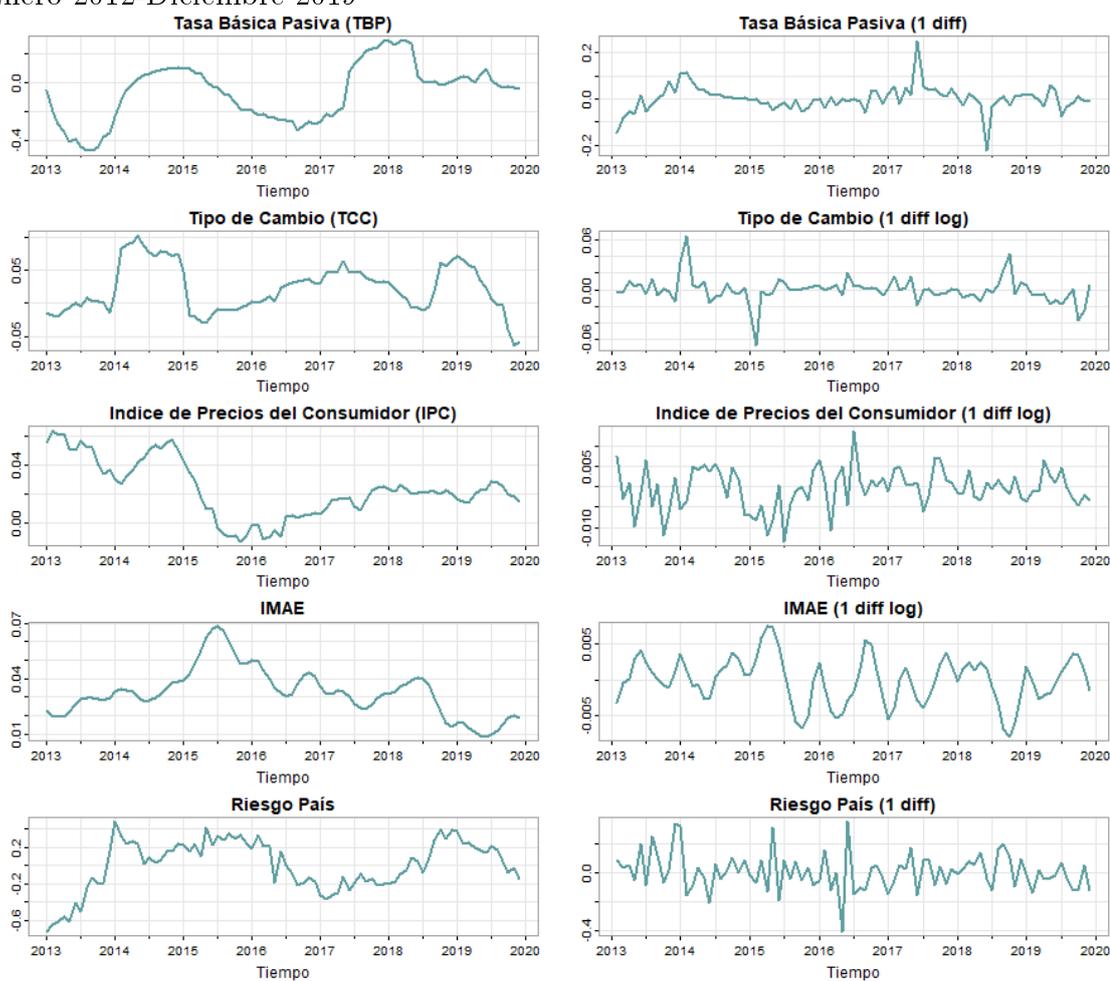


Figura B.2: Valores Ajustados - Modelo VAR Bancos Privados

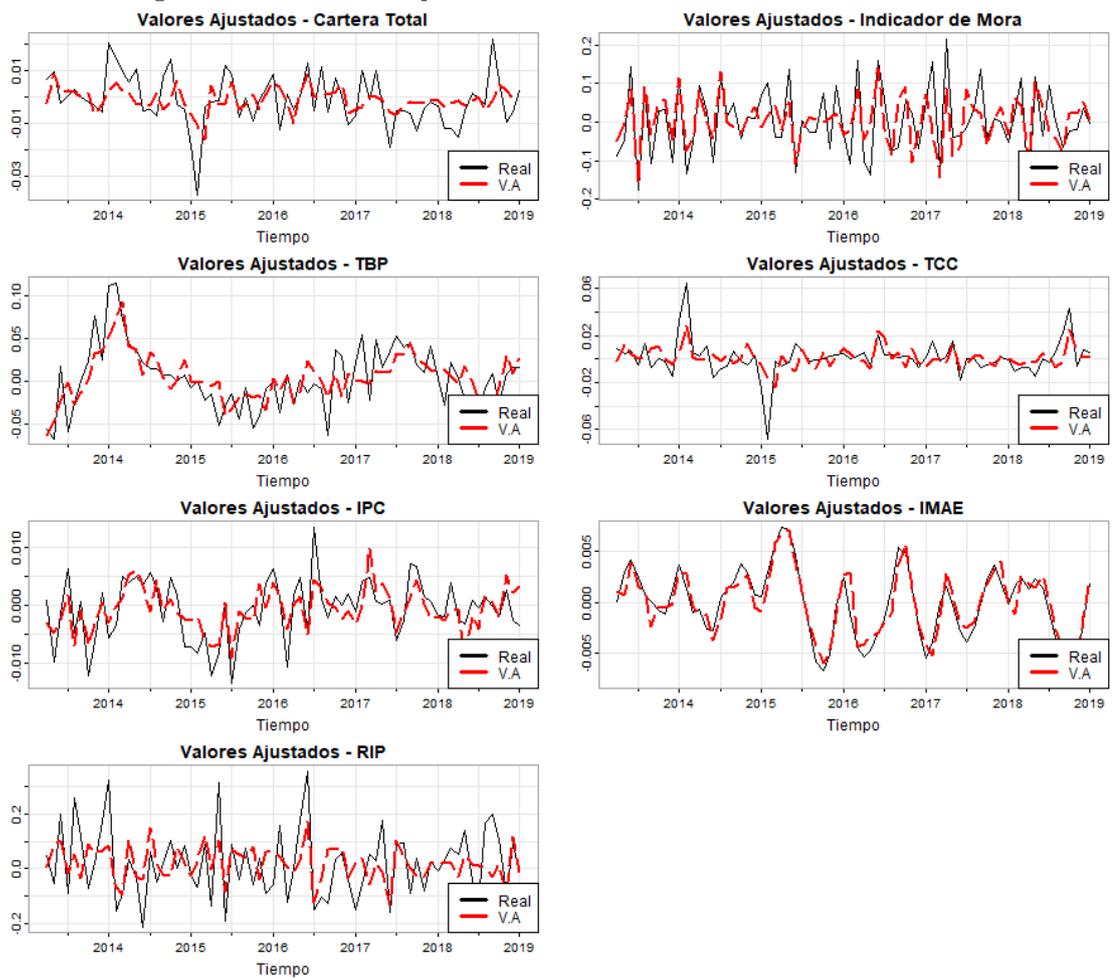


Figura B.3: Pronósticos modelo VAR frecuentista para Bancos Públicos

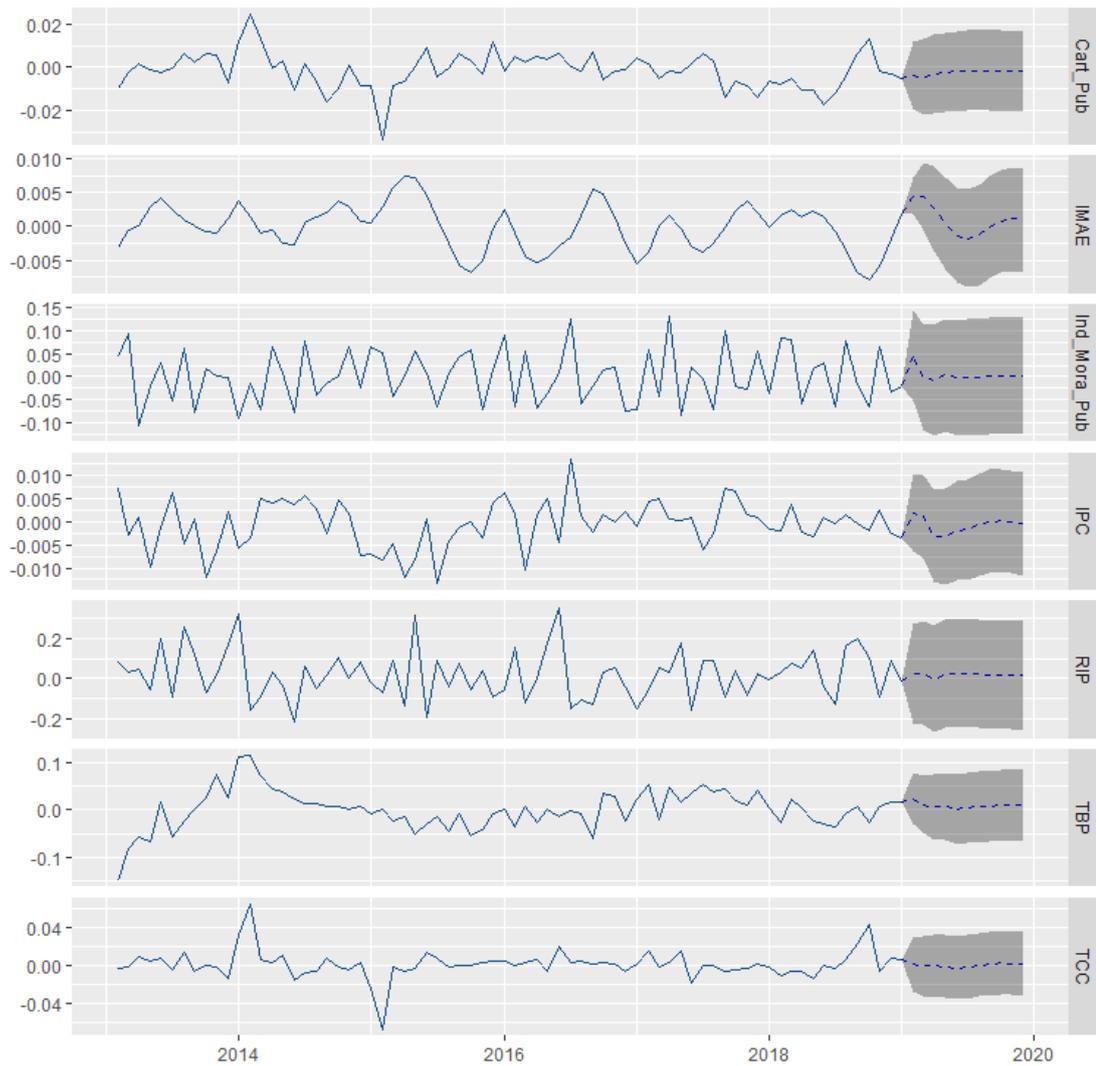


Figura B.4: Pronósticos modelo VAR frecuentista para Bancos Privados

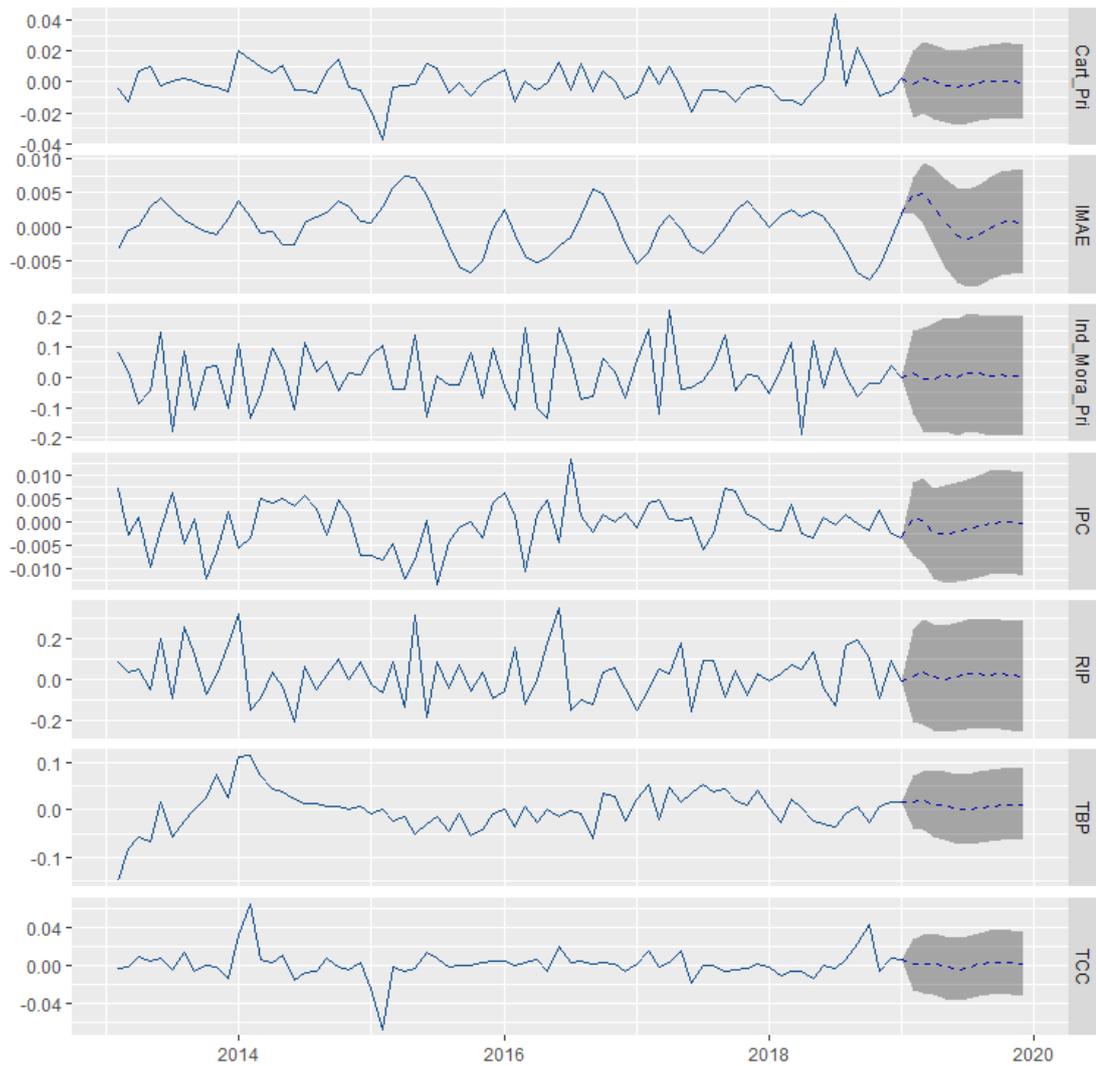


Figura B.5: Traza e histograma de los parámetros estimados - Bancos Públicos

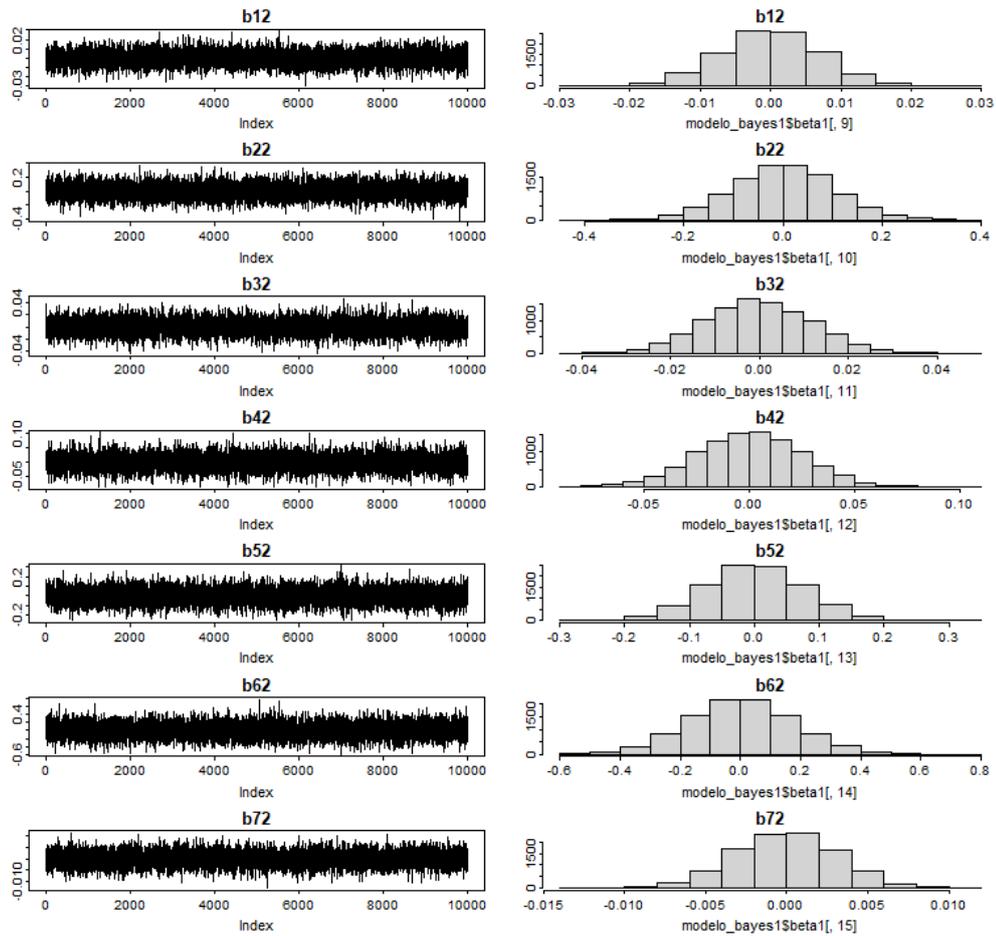


Figura B.6: Función de autocorrelación - Bancos Privados

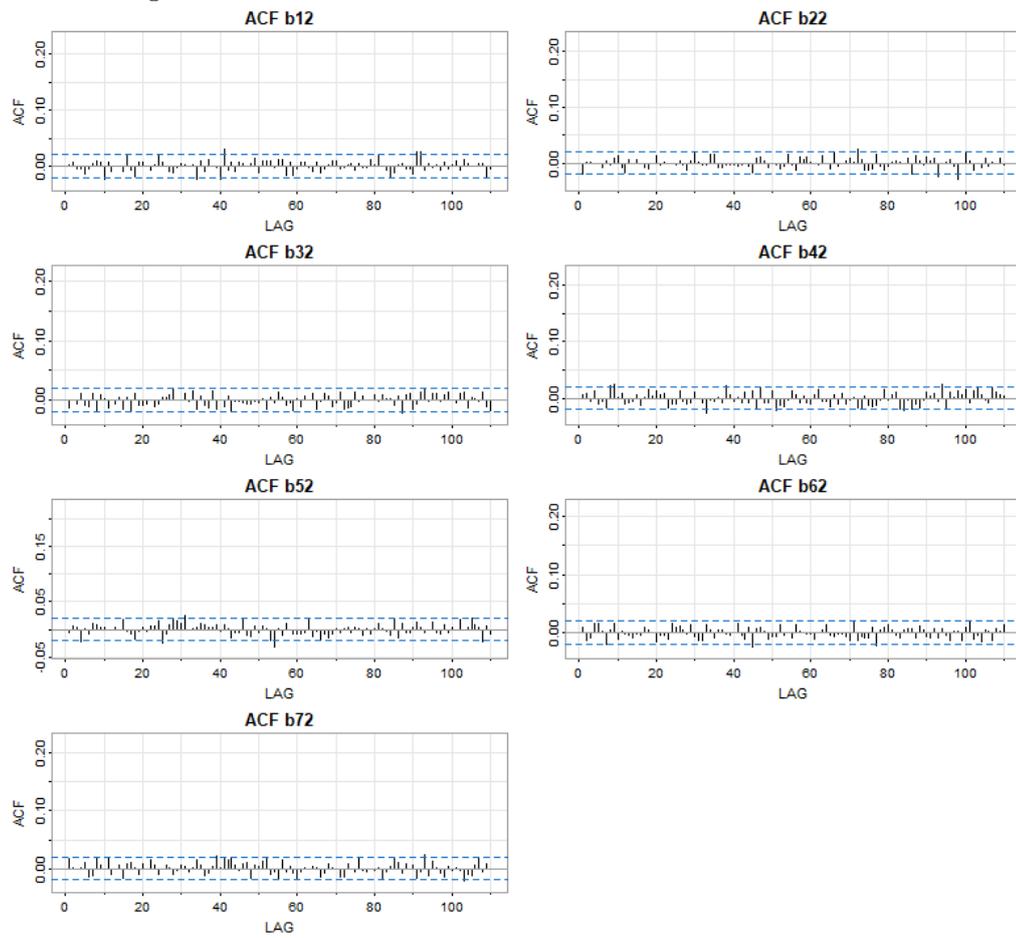


Figura B.7: Traza e histograma de los parámetros estimados - Bancos Privados

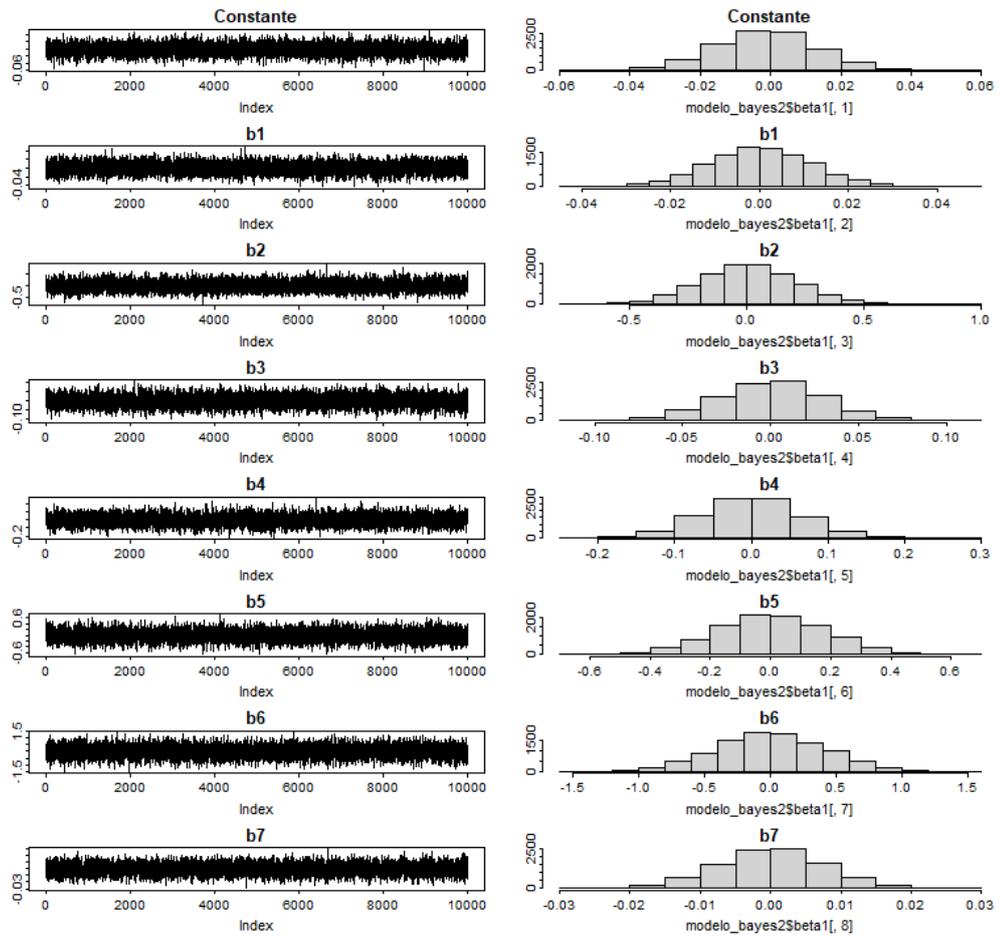


Figura B.8: Traza e histograma de los parámetros estimados - Bancos Privados

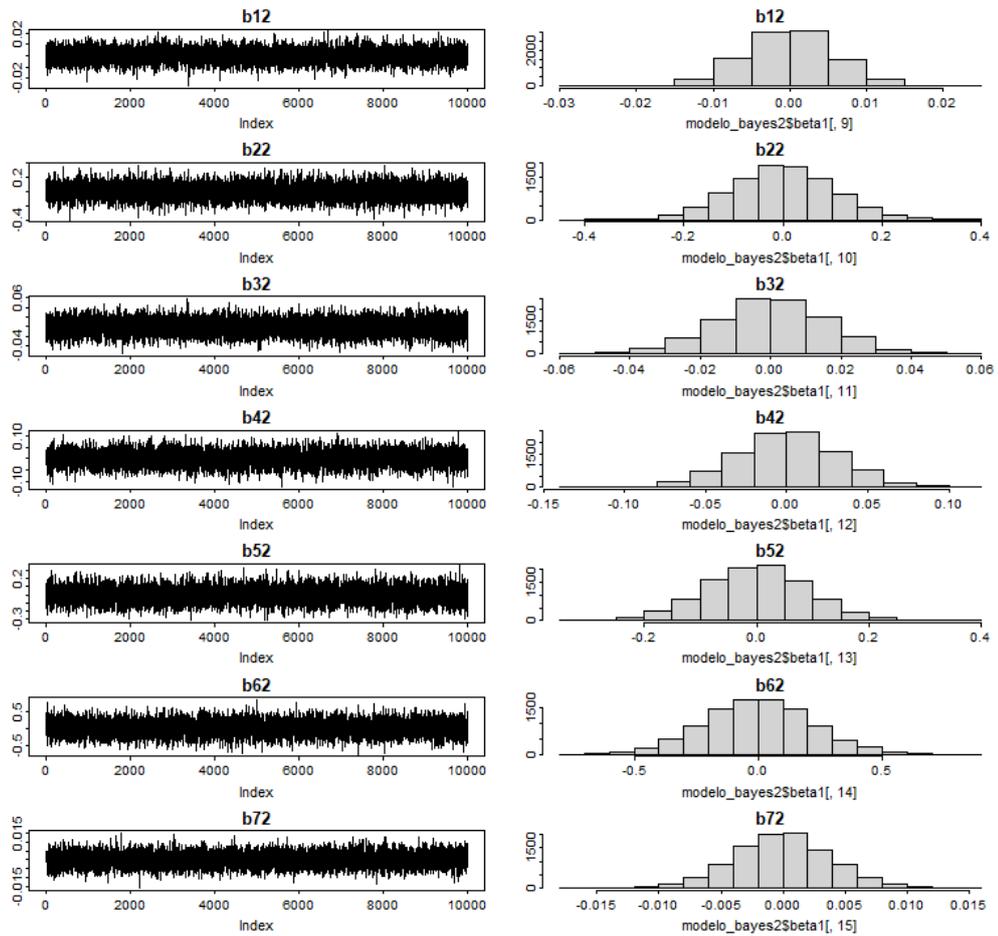


Figura B.9: Función de autocorrelación - Bancos Privados

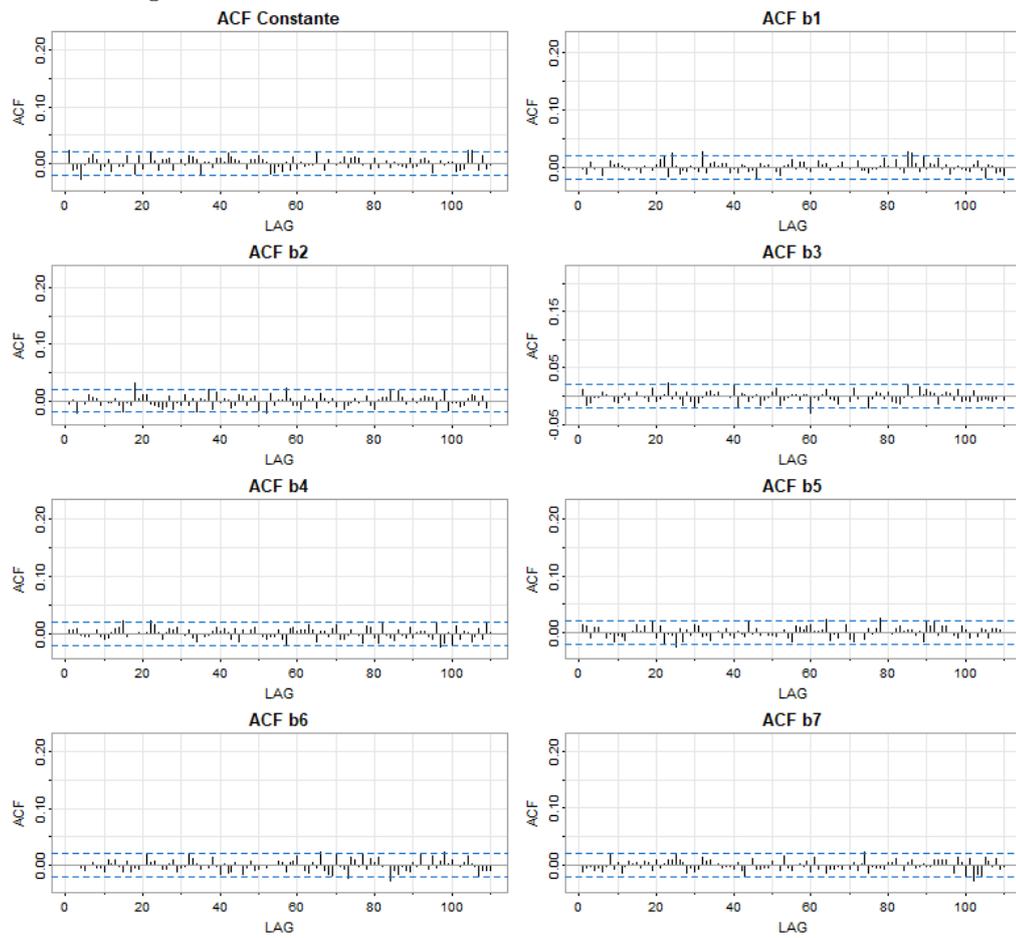


Figura B.10: Función de autocorrelación - Bancos Privados

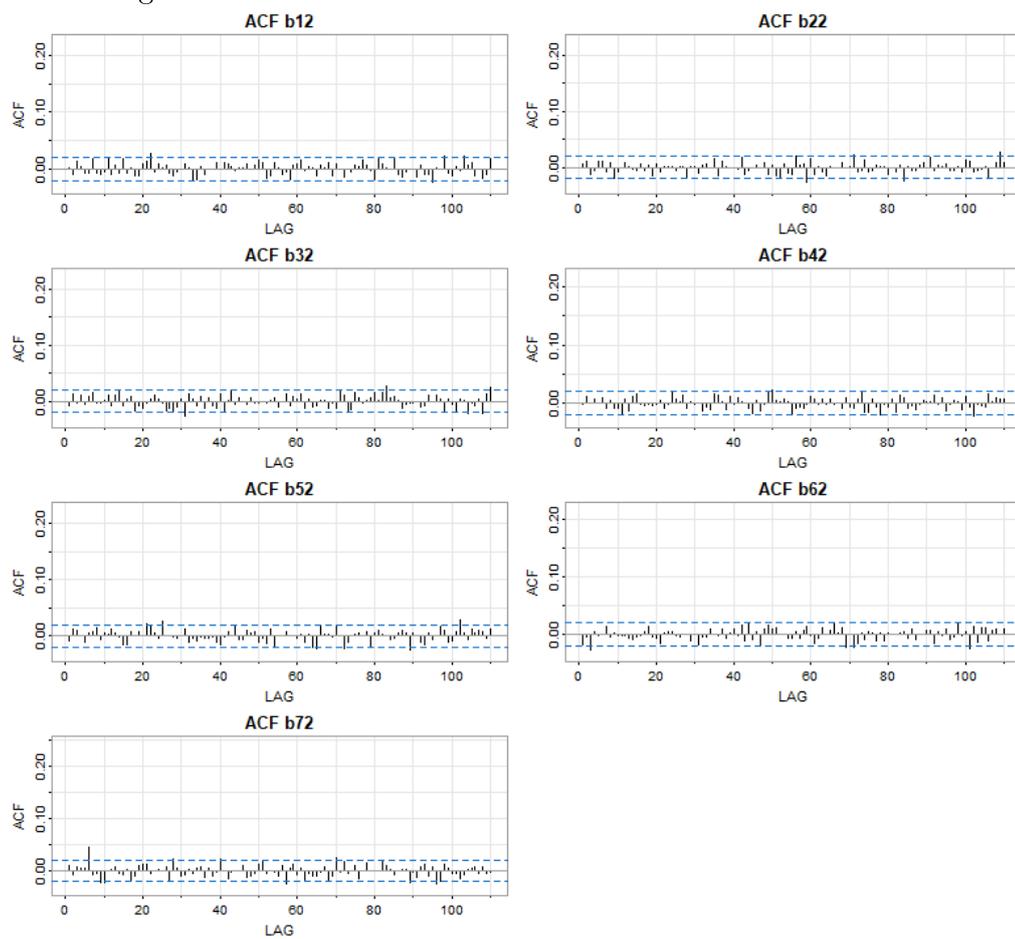


Figura B.11: Criterio de Geweke - Bancos Públicos

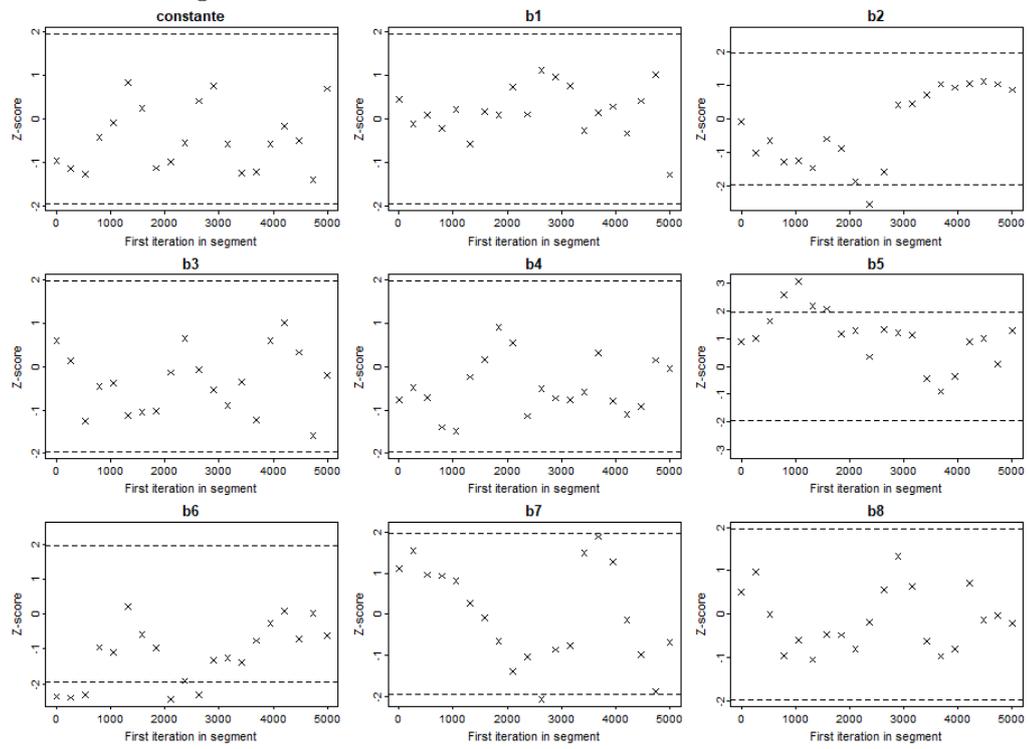


Figura B.12: Criterio de Geweke - Bancos Públicos

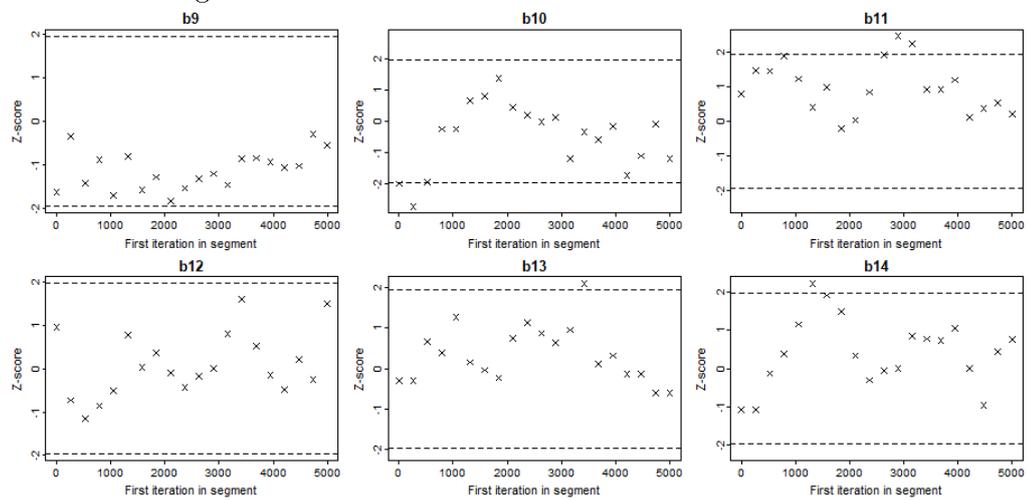


Figura B.13: Criterio de Geweke - Bancos Privados

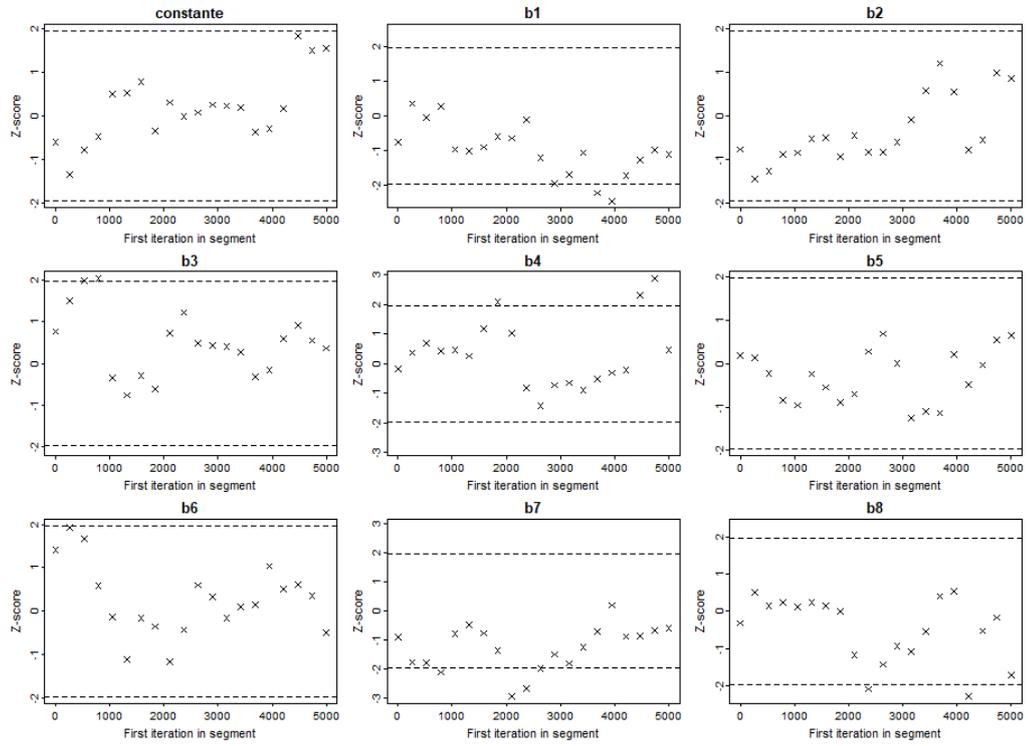


Figura B.14: Criterio de Geweke - Bancos Privados

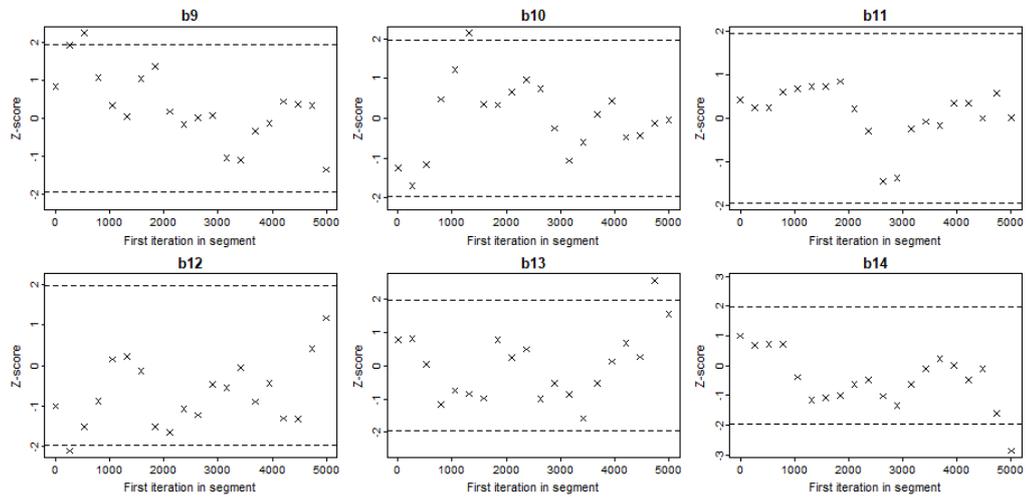


Figura B.15: Criterio de Gelman y Rubin - Bancos Públicos

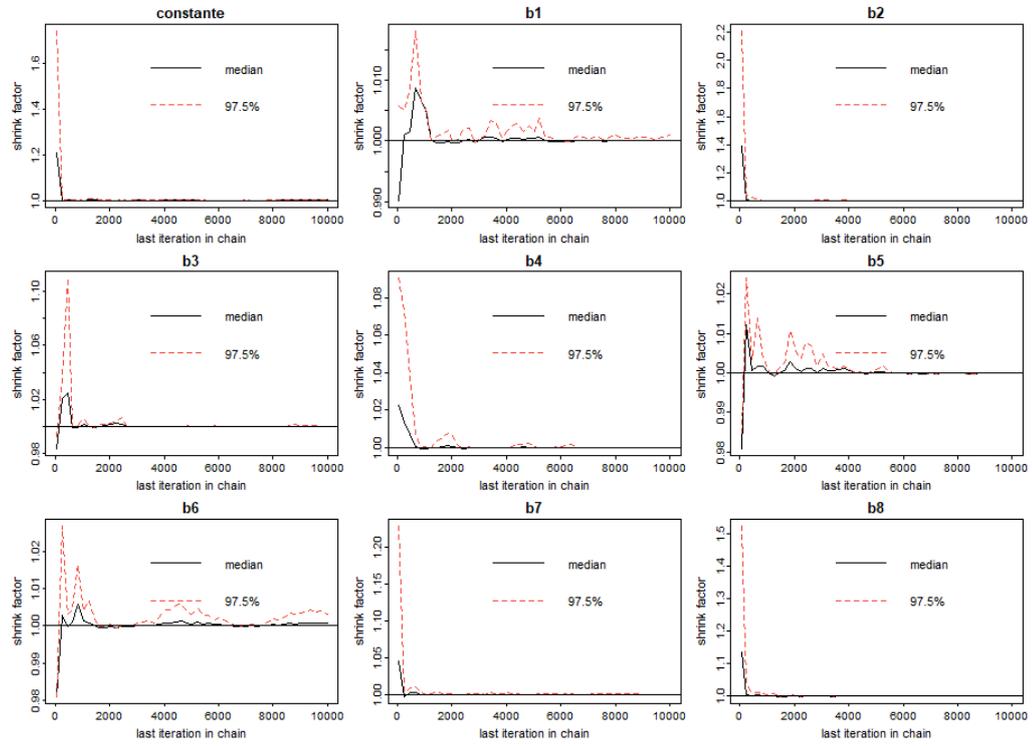


Figura B.16: Criterio de Gelman y Rubin - Bancos Públicos

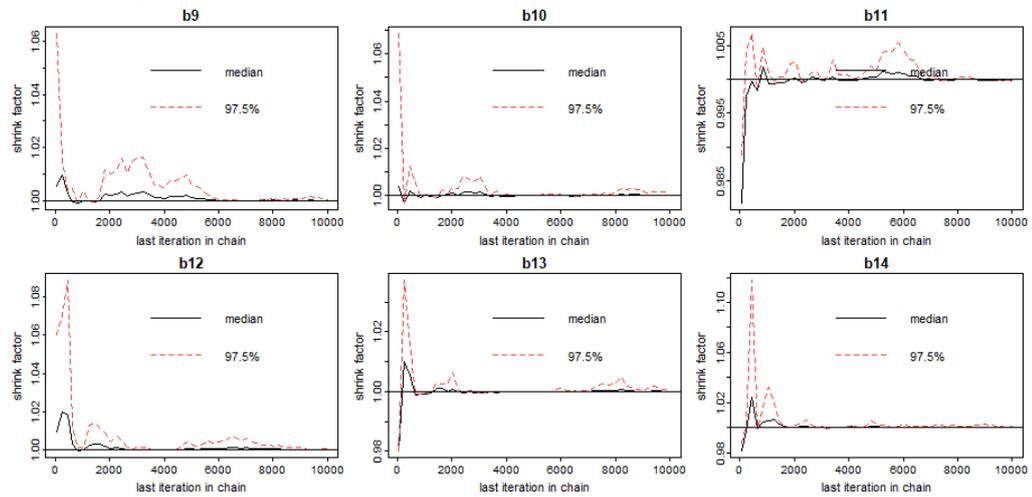


Figura B.17: Criterio de Gelman y Rubin - Bancos Privados

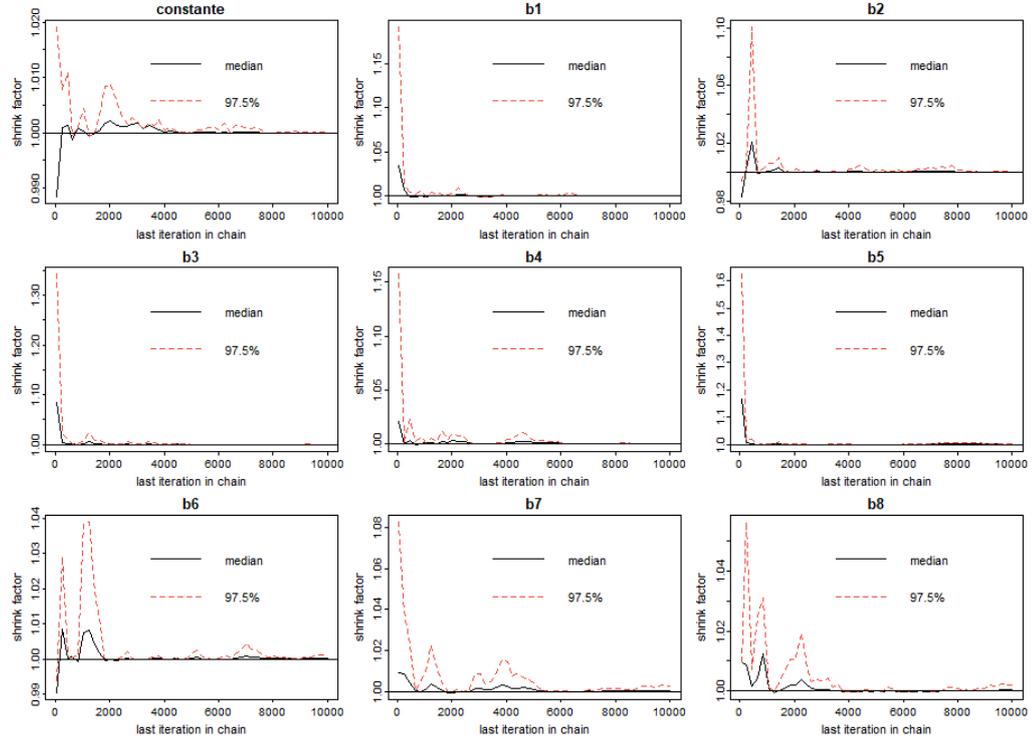


Figura B.18: Criterio de Gelman y Rubin - Bancos Privados

