La representación de pin del grupo ortogonal infinitodimensional

Joseph C. Várilly

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, 11501 San José, Costa Rica

Memoria del II Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemáticas,
San Ramón, Costa Rica (1994), 167–187

Abstract

We develop in detail the pin representation for the infinite dimensional restricted orthogonal group. This is a projective representation which permutes "Gaussian" elements in the fermion Fock space: our construction proceeds by explicit computation of the group cocycle in generic and exceptional cases.

Resumen

Desarrollamos en detalle la representación de pin del grupo ortogonal infinitodimensional restringido. Esta es una representación proyectiva que permuta elementos "gaussianos" en el espacio de Fock fermiónico: nuestra construcción procede por el cálculo explícito del cociclo del grupo en los casos genérico y excepcional.

1. Introducción

En este artículo se desarrolla la representación de pin del grupo ortogonal infinitodimensional (restringido) en todo detalle, orientado por sus aplicaciones a la teoría de campos cuánticos. Esta representación ha sido bosquejado por Pressley y Segal [1], usando el formalismo de fibrados de determinantes; y hay dos tratamientos notables [2, 3] que la extraen de las representaciones de álgebras de Clifford. En [4], Gracia-Bondía y el autor construyen la representación de pin por su acción sobre "elementos gaussianos" del espacio de Fock, extendiendo el esquema de [1], para poder aplicarla a la teoría de campos electromagnéticos externos. El objeto de este artículo es elaborar la representaciones de pin y de espín (del subgrupo ortogonal especial) en más detalle.

La sección 2 reseña la teoría algebraica de espacios vectoriales infinitodimensionales con una forma simétrica y sus respectivas estructuras complejas. El grupo ortogonal restringido consta de transformaciones ortogonales cuya parte antilineal, respecto de una estructura compleja fija, es de Hilbert y Schmidt; se parametriza un vecindario de la identidad de este grupo por operadores lineales invertibles y por operadores antilineales de Hilbert y Schmidt antisimétricos.

La sección 3 introduce el espacio de Fock fermiónico. Se define un desarrollo en serie de los elementos "gaussianos" de este espacio, cuyos coeficientes son pfaffianos de matrices antisimétricos.

Se reseña el conocido papel del espacio de Fock como receptáculo de "cuantizaciones plenas" [5] del espacio vectorial con forma simétrica; la representación de pin se concibe aquí como la acción del grupo ortogonal restringido por operadores entrelazantes entre cuantizaciones plenas.

En la sección 4, se construye explícitamente la representación de pin del grupo ortogonal restringido, en dos fases. Primeramente, se calcula su acción sobre el vector vacío del espacio de Fock. En seguida, se determina su acción sobre los elementos gaussianos, y el cociclo de espín asociado; finalmente, una acción compatible de operadores de reflexión conduce a la representación de pin plena, con un cociclo bien definido.

Se deja de lado la consideración de la representación del álgebra de Lie y de sus aplicaciones, estudiadas extensamente en [4]. Aquí se limita a observar que las llamadas anomalías fermiónicas pueden obtenerse directamente del cociclo de esta representación infinitesimal, el cual se deriva del cociclo del grupo, objeto del presente trabajo.

2. Estructura algebraica del grupo ortogonal

Los campos libres, tanto bosónicos como fermiónicos, tienen como su "espacio de movimientos" el espacio vectorial de las soluciones de una ecuación de onda. La evolución del campo deja fija una forma bilineal real distinguida; en el caso bosónico, esta es alternante, mientras en el caso fermiónico es simétrica. Las *simetrías* de estos campos son isomorfismos lineales reales del espacio vectorial subyacente, que conservan esa forma bilineal; constituyen, respectivamente, el grupo simpléctico y el grupo ortogonal infinitodimensionales. En el caso bosónico, el campo cuántico libre asociado puede obtenerse de la llamada representación metapléctica [6–9] del grupo simpléctico infinitodimensional. El campo cuántico fermiónico libre se deriva de la representación de pin del grupo ortogonal [1–4].

2.1. Estructuras complejas ortogonales

Tómese un espacio vectorial real V con una forma bilineal *simétrica* d. No se pierde nada esencial con suponer que ese espacio es completo en la métrica inducida por d, así que se supondrá que (V, d) es un espacio de Hilbert real.

Luego se elige una *estructura compleja ortogonal* J, es decir, un operador $\mathbb{R}$-lineal sobre V que cumple:

$$J^2 = -1; \quad \text{y} \quad d(Ju, Jv) = d(u, v) \quad \text{para} \quad u, v \in V.$$

En otras palabras, la estructura compleja J debe ser una transformación *ortogonal* sobre (V, d). Se puede considerar V como espacio vectorial *complejo* donde

$$(\alpha + i\beta)v := \alpha\, v + \beta\, Jv, \quad \text{para} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ v \in V.$$

Entonces la forma hermítica

$$\langle u \mid v \rangle := d(u, v) + i d(Ju, v)$$

hace de (V, d, J) un espacio de Hilbert complejo.

El *grupo ortogonal* $\mathrm{O}(V) \equiv \mathrm{O}(V, d)$ es el conjunto de aplicaciones $\mathbb{R}$-lineales $g \colon V \to V$ tales que $d(gu, gv) = d(u, v)$ para $u, v \in V$. Nótese que $g \in \mathrm{O}(V)$ si y solo si $g^t g = 1$, donde g^t denota la transpuesta de g respecto de d.

Los elementos de $\mathrm{O}(V)$ se descomponen en sus partes lineal y antilineal: $g = p_g + q_g$, donde

$$p_g := \tfrac{1}{2}(g - JgJ), \qquad q_g := \tfrac{1}{2}(g + JgJ).$$

(Es claro que $Jp_g = p_g J$ y $Jq_g = -q_g J$.) Tenemos

$$\begin{aligned} p_{g^{-1}} &= \tfrac{1}{2}(g^{-1} - Jg^{-1}J) = \tfrac{1}{2}(g^t - Jg^tJ) = p_g^t, \\ q_{g^{-1}} &= \tfrac{1}{2}(g^{-1} + Jg^{-1}J) = \tfrac{1}{2}(g^t + Jg^tJ) = q_g^t. \end{aligned}$$

Tomando las partes lineal y antilineal de $gg^{-1} = g^{-1}g = 1$, se obtiene, para $g \in \mathrm{O}(V)$:

$$p_g p_g^t + q_g q_g^t = p_g^t p_g + q_g^t q_g = 1, \quad p_g q_g^t = -q_g p_g^t, \quad p_g^t q_g = -q_g^t p_g. \tag{2.1}$$

El conjunto $\mathcal{J}(V)$ de estructuras complejas ortogonales sobre V es parte del álgebra de Lie del grupo ortogonal. La acción adjunta $J' \mapsto gJ'g^{-1}$ de $\mathrm{O}(V)$ sobre su álgebra de Lie preserva $\mathcal{J}(V)$.

► La *complexificación* $V_\mathbb{C} := V \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} = V \oplus iV$ es un espacio de Hilbert complejo con una forma hermítica definida positiva $\langle\!\langle w_1 \,|\, w_2 \rangle\!\rangle := 2d(w_1^*, w_2)$. Aquí d denota la amplificación compleja a $V_\mathbb{C}$ de la d original sobre V. Sea C la conjugación natural sobre $V_\mathbb{C}$, $C(u + iv) := (u + iv)^* = u - iv$. La amplificación compleja de $g \in \mathrm{O}(V)$ es un operador *unitario* sobre $V_\mathbb{C}$ que conmuta con C, y cualquier unitario U sobre $V_\mathbb{C}$ que conmuta con C se restringe a un elemento de $\mathrm{O}(V)$.

Escríbase $P_\pm := \frac{1}{2}(1 \mp iJ)$. Entonces $W_0 := P_+ V_\mathbb{C} = P_+ V$ es un subespacio de Hilbert de $V_\mathbb{C}$, con $V_\mathbb{C} = W_0 \oplus W_0^*$. Se puede verificar que $\langle\!\langle P_+ u \,|\, P_+ v \rangle\!\rangle = \langle u \,|\, v \rangle$ y que $\langle\!\langle P_- u \,|\, P_- v \rangle\!\rangle = \langle v \,|\, u \rangle$, para $u, v \in V$. Además, W_0 es isotrópico para d, pues $d(u - iJu, v - iJv) = 0$.

Una *polarización* para d es un subespacio complejo $W \leqslant V_\mathbb{C}$ que es isotrópico para d y que cumple $W \oplus W^* = V_\mathbb{C}$; es decir, W es un subespacio isotrópico máximo para d. Se puede escribir $W = \{\, u - iJ_W u : u \in V \,\}$; la condición $d(w_1, w_2) = 0$ para $w_1, w_2 \in W$ dice que J_W es ortogonal con $J_W^2 = -1$. Inversamente, si $J' \in \mathcal{J}(V)$, el subespacio $W' := \{\, u - iJ'u : u \in V \,\}$ es una polarización para d. Así, $W \mapsto J_W$ es una biyección entre polarizaciones para d y estructuras complejas ortogonales sobre V. El grupo $\mathrm{O}(V)$ actúa sobre las polarizaciones por $W \mapsto gW$, y resulta que $J_{gW} = gJ_W g^{-1}$.

Si W_1, W_2 son dos polarizaciones para d, entonces $\dim W_1 = \dim W_2 = \frac{1}{2} \dim V_\mathbb{C}$ como espacios de Hilbert complejos; y hay una transformación unitaria $U \colon W_1 \to W_2$. Ahora $CUC \colon W_1^* \to W_2^*$ es también unitaria, y $U \oplus CUC$ es un operador unitario sobre $V_\mathbb{C}$ que conmuta con C, así que $U \oplus CUC = g \in \mathrm{O}(V)$; con $gW_1 = W_2$. Por tanto, $\mathrm{O}(V)$ actúa *transitivamente* sobre las polarizaciones, y por consiguiente también sobre $\mathcal{J}(V)$. El subgrupo de isotropía de J en $\mathcal{J}(V)$ es $\mathrm{U}_J(V)$, el grupo unitario del espacio de Hilbert (V, d, J).

► La aplicación $\mathrm{O}(V) \to \mathcal{J}(V) : g \mapsto gJg^{-1}$ es una fibración, y no posee una sección global. Sin embargo, tiene secciones locales, dadas por el siguiente resultado.

Proposición 2.1. *Sea $J' \in \mathcal{J}(V)$ tal que $\|J' - J\|_{\mathrm{op}} < 2$, donde la norma es la de operadores acotados sobre (V, d). Existe $h \in \mathrm{O}(V)$ tal que $J' = hJh^{-1}$ y $h^2 = -J'J$.*

Demostración. El operador $\mathbb{R}$-lineal $B := \frac{1}{2}(1 - J'J)$ es invertible si $\|J' - J\|_{\mathrm{op}} < 2$, pues $B^t B = BB^t = 1 + \frac{1}{4}(J' - J)^2$, así que $\|B^t B\|_{\mathrm{op}} \geqslant 1 - \frac{1}{4}\|J' - J\|_{\mathrm{op}}^2 > 0$ y luego $B^t B$ es definida positiva.

Por la descomposición polar en el espacio de Hilbert real (V, d) se obtiene $B = hA = Ah$, donde $A = (B^t B)^{1/2} = (BB^t)^{1/2}$ es un operador definido positivo sobre V; y $h = BA^{-1} = A^{-1}B \in \mathrm{O}(V)$. Además,

$$J'h = \tfrac{1}{2}(J' + J)A^{-1} = \tfrac{1}{2}A^{-1}(J' + J) = hJ,$$

puesto que $A^2 = 1 + \frac{1}{4}(J' - J)^2$ conmuta con J y J', y por ende A^{-1} también conmuta con ellos. Entonces $hJh^{-1} = J'$. En vista de que

$$h^2 A^2 = (hA)^2 = B^2 = \tfrac{1}{4}(1 - J'J)^2 = -J'JA^2,$$

la relación $h^2 = -J'J$ sigue por la invertibilidad de A. □

El operador h es la parte ortogonal de la descomposición polar de $\frac{1}{2}(1 - J'J)$, y luego h queda determinado dentro del dominio $\|J' - J\|_{\mathrm{op}} < 2$; así, la sección local $J' \mapsto h$ será continua para topologías apropiadas sobre $\mathrm{O}(V)$ y $\mathcal{J}(V)$. Es obvio que $\|J' - J\|_{\mathrm{op}} \leqslant 2$ para $J' \in \mathcal{J}(V)$ cualquiera; pero hay muchas J' que cumplen $\|J' - J\|_{\mathrm{op}} = 2$.

2.2. El grupo ortogonal restringido

El *grupo ortogonal restringido* $\mathrm{O}'(V)$ es el subgrupo de $\mathrm{O}(V)$ formado por los g tales que $[J, g]$ es un operador de Hilbert y Schmidt (HS). Obsérvese que $[J, g] \in \mathrm{HS}$ si y solo si $J - gJg^{-1} \in \mathrm{HS}$ si y solo si $q_g \in \mathrm{HS}$. También se define $\mathcal{J}'(V) = \{\, J' \in \mathcal{J}(V) : J - J' \in \mathrm{HS}(V) \,\}$.

Las “polarizaciones restringidas” son las W para las cuales $J - J_W$ es de Hilbert y Schmidt; ellas forman la órbita de W_0 bajo la acción del subgrupo $\mathrm{O}'(V)$. Como $\mathrm{U}_J(V) = \{\, g \in \mathrm{O}(V) : [J, g] = 0 \,\}$, este es también el subgrupo de isotropía de J o de W_0 bajo las respectivas acciones de $\mathrm{O}'(V)$.

En el caso finitodimensional, $\mathcal{J}'(V) \approx \mathrm{O}(2n)/\mathrm{U}(n)$, el cual posee dos componentes conexas; una de ellas es $\mathrm{SO}(2n)/\mathrm{U}(n)$. Puede mostrarse que J_W queda en la misma componente conexa que J si y solo si $\dim(W \cap W_0^*)$ es par. En el caso infinitodimensional, estos resultados siguen válidos [2]: $\mathcal{J}'(V)$ tiene dos componentes conexas, y la componente de $J_W \in \mathcal{J}'(V)$ está determinada por la paridad de $\dim(W \cap W_0^*)$. Similarmente, $\mathrm{O}'(V)$ tiene dos componentes conexas: g queda en la componente neutra si y solo si $\dim(gW_0 \cap W_0^*)$ es par. Se denotará por $\mathrm{SO}'(V)$ la componente neutra de $\mathrm{O}'(V)$.

Para ver que $\dim(W \cap W_0^*)$ es finita, obsérvese que $B := \frac{1}{2}(1 - J_W J)$ es un operador de Fredholm, porque $B^\dagger B = BB^\dagger = 1 + \frac{1}{4}(J_W - J)^2$ difiere de 1 por un operador trazable. Además,

$$\begin{aligned}
\ker B = \ker B^\dagger &= \{\, z \in V_{\mathbb{C}} : Jz = -J_W z \,\} \\
&= \{\, z \in V_{\mathbb{C}} : \tfrac{1}{2}(1 \mp iJ)z = \tfrac{1}{2}(1 \pm iJ_W)z \,\} \\
&= (W \cap W_0^*) \oplus (W^* \cap W_0). \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

En particular, B tiene índice cero. Como $W^* \cap W_0 = C(W \cap W_0^*)$, se sigue que $\dim(W \cap W_0^*) = \frac{1}{2}\dim(\ker B)$, la cual es finita.

Obsérvese también que $W \cap W_0^* = \{0\}$ si y solo si $\frac{1}{2}(1 - J_W J)$ es invertible, si y solo si $\|J_W - J\|_{\mathrm{op}} < 2$. Para tales polarizaciones restringidas W, se puede escribir $w = z_1 + z_2^*$ con $z_j = u_j - iJu_j \in W_0$ para $j = 1, 2$. Esto define un operador $\mathbb{R}$-lineal $T_W : V \to V$ por $T_W(u_1) := u_2$. Al examinar $iw = iz_1 - (iz_2)^*$, se ve que $T_W J = -JT_W$, así que T_W es antilineal. Además,

$$0 = \tfrac{i}{2}\Re\, d(w, w') = \tfrac{i}{2}\Re\,\big(d(z_1, {z_2'}^*) + d(z_1', z_2^*)\big) = d(u_1, T_W u_1') + d(T_W u_1, u_1')$$

para $u_1, u_1' \in V$; por ende, T_W es *antisimétrico*. En vista de que

$$w = z_1 + z_2^* = (1 + T_W)u_1 - iJ(1 - T_W)u_1 = (1 + T_W)z_1,$$

se ve que J_W y T_W corresponden bajo dos transformaciones de Cayley:

$$J_W = J(1 - T_W)(1 + T_W)^{-1}, \qquad T_W = (J - J_W)(J + J_W)^{-1},$$

pues $\ker(J_W + J) = \{0\}$ cuando $W \cap W_0^* = \{0\}$; en consecuencia, T_W es un operador de Hilbert y Schmidt. En síntesis, $T_W \in \mathrm{Sk}(V)$, donde $\mathrm{Sk}(V)$ denota el espacio vectorial de *operadores antilineales antisimétricos de la clase de Hilbert y Schmidt* sobre V.

► Si $g \in \mathrm{O}'(V)$, entonces $\ker p_g$ y $\ker p_g^t$ son subespacios complejos de (V, d, J) de dimensión compleja $n = \dim(gW_0 \cap W_0^*)$. De hecho, vale $n = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}}(\ker B)$ por (2.2), donde

$$B = \tfrac{1}{2}(1 - gJg^{-1}J) = \tfrac{1}{2}(1 + (p_g + q_g)(p_g^t - q_g^t)) = p_g p_g^t + q_g p_g^t = g p_g^t,$$

al usar (2.1); como $B^t = p_g g^t = p_g g^{-1}$, vale $\dim_{\mathbb{C}} \ker p_g = \dim_{\mathbb{C}} \ker p_g^t = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}}(\ker B)$.

Si $n = 0$, entonces p_g es invertible (con inverso acotado, por ser de Fredholm). Si $n \neq 0$, defínase $r \in \mathrm{O}'(V)$ como sigue. Si $v \in V$ es un vector de norma 1, la *reflexión* en el hiperplano ortogonal a v está dada por:

$$\rho_v(u) := u - 2d(v, u)v. \tag{2.3}$$

Esta es una transformación ortogonal impropia, pues $\ker p_{\rho_v}$ es unidimensional. Tómese ahora una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ para $\ker p_g^t$, y defínase

$$r := \rho_{e_1} \rho_{e_2} \cdots \rho_{e_n}. \tag{2.4}$$

Ahora $Jr = -rJ$ sobre $\ker p_g^t$ y $Jr = rJ$ sobre $(\ker p_g^t)^\perp$, así que q_r tiene rango n. Además, $p_{rg} = r q_g$ sobre $\ker p_g$, mientras $p_{rg} = p_g$ sobre $(\ker p_g)^\perp$. Como $q_g^t(q_g v) = (p_g^t p_g + q_g^t q_g)v = v$ para $v \in \ker p_g$, se ve que p_{rg} es inyectivo. Como p_{rg} es Fredholm y por ende tiene rango cerrado, cuyo complemento ortogonal es $\ker p_{rg}^t$, entonces $\dim(\ker p_{rg}^t) = \dim(\ker p_{rg}) = 0$, así que p_{rg} es sobreyectivo, y por lo tanto es invertible.

► Se introduce la notación $\mathrm{SO}'_*(V) := \{\, g \in \mathrm{SO}'(V) : p_g^{-1} \text{ existe} \,\}$. Esto no es un subgrupo de $\mathrm{SO}'(V)$, pero sí es un conjunto abierto y denso en la topología de $\mathrm{SO}'(V)$ inducida por la norma $g \mapsto \|g\|_{\mathrm{op}} + \|[J, g]\|_{\mathrm{HS}}$.

Cuando p_g es invertible, se puede definir $T_g := q_g p_g^{-1}$. Ahora $T_g = T_{gW_0}$, así que $T_g \in \mathrm{Sk}(V)$; resulta que $p_g^t(1 - T_g^2)p_g = 1$ en vista de (2.1). Los pares (p_g, T_g) que cumplen estas condiciones constituyen una parametrización de $\mathrm{SO}'_*(V)$.

Conviene abreviar $\widehat{T}_g := T_{g^{-1}}$. Nótese que $1 = gg^{-1} = (1 + T_g)p_g(1 + \widehat{T}_g)p_g^{-1}$; de la parte antilineal de esta ecuación se obtiene $\widehat{T}_g = -p_g^{-1} T_g p_g$.

En el caso general T_g no existe, pero se puede emplear T_{rg} donde r es el producto de reflexiones (2.3). Nótese que q_{rg} se anula en $\ker p_g$, así que $T_{rg} = q_{rg} p_{rg}^{-1}$ se anula en el subespacio $p_{rg}(\ker p_g) = \ker p_g^t$.

Es evidente que $p_{gh} = p_g p_h + q_g q_h$. Se requiere una fórmula para T_{gh}. De (2.1) se obtiene

$$p_g + q_g \widehat{T}_g = p_g + q_g(q_g^t p_g^{-t}) = (p_g p_g^t + q_g q_g^t)p_g^{-t} = p_g^{-t}.$$

Cuando $\widehat{T}_g$, T_h and T_{gh} existen (es decir, cuando $g^{-1}, h, gh \in \mathrm{SO}'_*(V)$), se deduce que

$$\begin{aligned} T_{gh} &= (p_g T_h + q_g)(q_g T_h + p_g)^{-1} = (q_g + p_g T_h)(1 - \widehat{T}_g T_h)^{-1} p_g^{-1} \\ &= q_g p_g^{-1} + (q_g + p_g T_h - q_g(1 - \widehat{T}_g T_h))(1 - \widehat{T}_g T_h)^{-1} p_g^{-1} \\ &= T_g + p_g^{-t} T_h (1 - \widehat{T}_g T_h)^{-1} p_g^{-1}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

3. El espacio de Fock fermiónico

3.1. Elementos "gaussianos"

De ahora en adelante, se toma una estructura compleja ortogonal fija $J \in \mathcal{J}(V)$ y se considera V como el espacio de Hilbert complejo (V, d, J).

El *álgebra exterior* $\Lambda(V)$ de V se define como $\Lambda(V) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\wedge n}$, donde $V^{\wedge n}$ es el espacio vectorial complejo generado algebraicamente por los productos alternantes

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \pm_\sigma v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)},$$

con $V^{\wedge 0} \simeq \mathbb{C}$ por convenio. Se denotará por Ω un vector fijo de norma 1 en $V^{\wedge 0}$. El producto interno sobre $\Lambda(V)$ se define por

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_m \mid v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \rangle := \delta_{mn} \det\big[\langle u_k \mid v_l \rangle\big].$$

Si $\{e_n\}$ es una base ortonormal para el espacio de Hilbert complejo (V, d, J), los elementos $\varepsilon_K := e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_r}$, donde $K = \{k_1, \dots, k_r\}$ es un conjunto finito de enteros positivos escritos en orden creciente: $k_1 < \cdots < k_r$, forman una familia ortonormal en $\Lambda(V)$. (Tómese $e_\emptyset := \Omega$.) Esta familia es una base ortonormal para la compleción de $\Lambda(V)$ en espacio de Hilbert, que es el espacio de Fock fermiónico, denotado por $\mathcal{F}(V)$.

Ahora $\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1$, donde $\mathcal{F}_0$ es la compleción de la parte par $\bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\wedge(2k)}$ del álgebra exterior $\Lambda(V)$, y $\mathcal{F}_1$ es la compleción de $\bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\wedge(2k+1)}$.

► Si $T \in \mathrm{Sk}(V)$, la serie

$$H_T := \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle e_i \mid T e_j \rangle e_i \wedge e_j$$

converge en $\mathcal{F}_0$ porque $\sum_{i,j=1}^{\infty} |\langle e_i \mid T e_j \rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \langle T e_j \mid T e_j \rangle < \infty$, y la suma es independiente de la base elegida.

Se llaman *gaussianos* a los siguientes elementos "exponenciales cuadráticos" de $\mathcal{F}_0$:

$$f_T := \exp^\wedge(\tfrac{1}{2} H_T) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m m!} H_T^{\wedge m}. \tag{3.1}$$

Si $T_m \in \mathrm{Sk}(V)$ se define por $T_m(e_{2m-1}) := -e_{2m}$, $T_m(e_{2m}) := e_{2m-1}$, y $T_m(e_j) := 0$ para otros j, entonces $H_{T_m} = 2e_{2m-1} \wedge e_{2m}$; y $f_{T_m} = \Omega + e_{2m-1} \wedge e_{2m}$. Además, si $T = T_1 + \cdots + T_m$, entonces $H_T = 2 \sum_{k=1}^{m} e_{2m-1} \wedge e_{2m}$; y $f_T = \Omega + e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2m} +$ (términos de orden inferior). Por inducción en m, permutaciones de la base ortonormal $\{e_j\}$ y linealidad, se obtiene que el subespacio cerrado de $\mathcal{F}$ generado por $\{\, f_T : T \in \mathrm{Sk}(V)\,\}$ es todo $\mathcal{F}_0$.

Es importante obtener el desarrollo de los elementos gaussianos f_T en la base ortonormal $\{\varepsilon_K\}$ de $\mathcal{F}(V)$. Primero, obsérvese que

$$\frac{1}{2^m m!} H_T^{\wedge m} = \sum_{|K|=2m} \frac{1}{2^m m!} (\pm)_K \langle e_{k_1} \mid T e_{k_2}\rangle \dots \langle e_{k_{2m-1}} \mid T e_{k_{2m}}\rangle e_{k_1} \wedge \dots \wedge e_{k_{2m}}, \tag{3.2}$$

donde $(\pm)_K$ es el signo de la permutación que coloca $K = \{k_1, \dots, k_{2m}\}$ en orden creciente, y T_K denota la matriz antisimétrica $2m \times 2m$ con entradas $\langle e_k \mid T e_{k'}\rangle$ para $k, k' \in K$. Recuérdese [10] que el *pfaffiano* de una matriz antisimétrica A de tamaño $2m \times 2m$ se define por

$$\operatorname{Pf} A := \frac{1}{2^m m!} \sum_{\sigma \in S_{2m}} (-1)^\sigma a_{\sigma(1)\sigma(2)}\, a_{\sigma(3)\sigma(4)} \dots a_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}, \tag{3.3}$$

y obedece $(\operatorname{Pf} A)^2 = \det A$. Si A es una matriz antisimétrica de tamaño $(2m+1)\times(2m+1)$, entonces $\det A = 0$; y se define $\operatorname{Pf} A := 0$. Entonces se puede reescribir (3.2) en la forma

$$\frac{1}{2^m m!} H_T^{\wedge m} = \sum_{|K|=2m} \operatorname{Pf}(T_K)\, \varepsilon_K. \tag{3.4}$$

Por convenio, se toma $\operatorname{Pf}(T_\emptyset) := 1$. Se obtiene así el desarrollo de (3.1):

$$f_T = \sum_{K \text{ finita}} \operatorname{Pf}(T_K)\, \varepsilon_K, \tag{3.5}$$

donde solamente las partes finitas $K \subset \mathbb{N}$ de cardinalidad par contribuyen a la suma.

Se debe calcular el producto interno de dos gaussianos fermiónicos. Este cálculo se reparte en una serie de lemas.

Lema 3.1. *Si A es una matriz $n \times n$ invertible, los menores principales de A y A^{-1} cumplen:*

$$\det((A^{-1})_{K'}) = \frac{\det A_K}{\det A} \tag{3.6}$$

donde $K \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ y $K' := \{1, 2, \dots, n\} \setminus K$.

Demostración. Sea $B := A^{-1}$. Si $I = \{i_1, \dots, i_r\}$, $J = \{j_1, \dots, j_r\}$ son partes de $\{1, 2, \dots, n\}$ de la misma cardinalidad (escritas en orden creciente), se denota por A_{IJ} la submatriz de A con filas en I y columnas en J (así que $A_K = A_{KK}$); y sea $s(I, J) := i_1 + \dots + i_r + j_1 + \dots + j_r$. El desarrollo de Laplace del determinante de A respecto de las filas I es:

$$\det A = \sum_{|J|=|I|} (-1)^{s(I,J)} (\det A_{IJ})(\det A_{I'J'}).$$

Si $|K| = |I|$ pero $K \neq I$, la sumatoria $\sum_{|J|=|I|} (-1)^{s(K,J)} (\det A_{IJ})(\det A_{K'J'})$ es el determinante de una matriz cuyas filas I son las filas I de A, pero cuyas filas I' son las filas K' de A (en algún orden); esta matriz tiene un par de filas iguales, y su determinante es 0.

Por otra parte, la fórmula de Cauchy y Binet [11] para matrices compuestas da

$$\sum_{|J|=|I|} (\det A_{IJ})(\det B_{JK}) = \begin{cases} 1 & \text{si } I = K, \\ 0 & \text{si } I \neq K. \end{cases}$$

así, $\det B_{JK} = (\det A)^{-1}(-1)^{s(K,J)} \det A_{K'J'}$. Al tomar $J = K$, se obtiene (3.6). □

Lema 3.2. *Si V es finitodimensional, con $\dim V = 2m$, y si $S, T \in \mathrm{Sk}(V)$, entonces*

$$\det(1 - TS) = \biggl(\sum_{K \text{ par}} (\operatorname{Pf} S_K)^* \operatorname{Pf} T_K \biggr)^2, \tag{3.7}$$

donde la suma recorre las partes pares K de $\{1, 2, \dots, 2m\}$.

Demostración. Se adapta el argumento de [1, p. 241] (válido para matrices antisimétricas reales) al caso complejo.

Supóngase primero que S es invertible. Entonces SC es un operador $\mathbb{C}$-lineal invertible sobre V; del Lema 3.1 se obtiene

$$\det(SC) \det((SC)^{-1})_{K'} = \det(SC)_K \,.$$

Sea $R := S^{-1}$. Entonces $RC = C(CR)C = C((SC)^{-1})C$; las entradas de su matriz son las conjugadas complejas de las de la matriz de $(SC)^{-1}$; de ahí sigue $\det(SC)(\det(RC)_{K'})^* = \det(SC)_K$. Tomando raíces cuadradas, se llega a la fórmula

$$\operatorname{Pf} S \, (\operatorname{Pf} R_{K'})^* = \pm \operatorname{Pf} S_K \,,$$

donde el signo $\pm$ depende de K pero no de las entradas matriciales de S – el pfaffiano (3.3) es un polinomio “universal” en las entradas matriciales. Tomando casos particulares de S, es fácil verificar que

$$\operatorname{Pf} S \, (\operatorname{Pf} R_{K'})^* = (-1)^{m - \frac{1}{2}|K|} \eta_K \operatorname{Pf} S_K \,,$$

donde η_K es el signo de la permutación que reordena $\{1, 2, \dots, 2m\}$ como (K', K). Por ejemplo, para K vacío, se obtiene $(\operatorname{Pf} S^{-1})^* = (-1)^m (\operatorname{Pf} S)^{-1}$.

Ahora $H_R \wedge H_T = H_T \wedge H_R$ porque los bivectores $e_i \wedge e_j$ conmutan en $\Lambda(V)$, y del teorema binomial se deduce que

$$(H_{R-T})^{\wedge m} = (H_R - H_T)^{\wedge m} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (H_R)^{\wedge(m-k)} H_T^{\wedge k}.$$

Al desarrollar ambos lados con (3.4), el término de grado máximo resulta ser

$$\operatorname{Pf}(R - T) \, \varepsilon_{\{1,\dots,2m\}} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \sum_{|K|=2m} \operatorname{Pf} R_{K'} \operatorname{Pf} T_K \, \varepsilon_{K'} \wedge \varepsilon_K,$$

y por consiguiente:

$$(\operatorname{Pf} S)^* \operatorname{Pf}(R - T) = (\operatorname{Pf} S)^* \sum_K (-1)^{\frac{1}{2}|K|} \eta_K \operatorname{Pf} R_{K'} \operatorname{Pf} T_K = (-1)^m \sum_K (\operatorname{Pf} S_K)^* \operatorname{Pf} T_K \,.$$

Al tomar el cuadrado de ambos lados, se obtiene finalmente:

$$
\begin{aligned}
\det(1 - TS) = \det(SC)^* \det(RC - TC) &= [(-1)^m (\operatorname{Pf} S)^* \operatorname{Pf}(R - T)]^2 \\
&= \Bigl(\sum_{K \text{ par}} (\operatorname{Pf} S_K)^* \ \operatorname{Pf} T_K \Bigr)^2 .
\end{aligned}
$$

Ambos lados de (3.7) son polinomios en las entradas matriciales de S y T, que coinciden cuando S es invertible; por continuidad, coinciden para todo $S, T \in \mathrm{Sk}(V)$. □

Si V es finitodimensional y A es un operador $\mathbb{C}$-lineal sobre V, $\det A$ denota el determinante de la matriz con entradas $\langle e_i \mid A e_j \rangle$. Cuando V es infinitodimensional, el determinante de A tiene sentido si y solo si $A - 1$ es trazable. Por ejemplo, se puede adoptar la definición $\det(\exp N) := \exp(\operatorname{Tr} N)$ para N trazable [2].

Lema 3.3. *Sean $S, T \in \mathrm{Sk}(V)$ con V de dimensión finita par o infinita. Si $\det^{1/2}(1 - TS)$ denota la raíz cuadrada de $\det(1 - TS)$ que vale 1 cuando $S = 0$ ó $T = 0$, el siguiente desarrollo es válido:*

$$
\det{}^{1/2}(1 - TS) = \sum_K (\operatorname{Pf} S_K)^* \ \operatorname{Pf} T_K, \tag{3.8}
$$

donde la suma recorre las submatrices principales de lados pares.

Demostración. Si $\dim V = 2m < \infty$, (3.8) es consecuencia directa del Lema 3.2. Si $\dim V = \infty$, entonces

$$
\sum_{K \text{ finita}} |\operatorname{Pf} T_K|^2 = \sum_{K \text{ finita}} (\operatorname{Pf} T_K)^* \ \operatorname{Pf} T_K = \det{}^{1/2}(1 - T^2) = \det{}^{1/2}(1 + T^t T) \tag{3.9}
$$

para T de rango finito en primera instancia. Si T es de Hilbert y Schmidt, entonces $\det(1 - T^2)$ existe y es finito, como el límite creciente de determinantes $\det(1 - T_r^2)$, donde los T_r forman una sucesión de operadores de rango finito que convergen en la norma de Hilbert y Schmidt a T. Por consiguiente, (3.9) es válido para T de Hilbert y Schmidt; en cuyo caso K recorre todos las partes finitas pares de $\mathbb{N}$.

Luego la serie $\sum_{K \text{ finita}} (\operatorname{Pf} S_K)^* \ \operatorname{Pf} T_K$ converge cuando $S, T \in \mathrm{Sk}(V)$ por la desigualdad de Schwarz; su cuadrado vale $\det(1 - TS)$ para S, T de rango finito; por lo tanto, (3.8) vale para todo $S, T \in \mathrm{Sk}(V)$. □

Ya es posible calcular el producto interno de dos gaussianos fermiónicos.

Proposición 3.4. *Si $S, T \in \mathrm{Sk}(V)$, entonces*

$$
\langle f_S \mid f_T \rangle = \det{}^{1/2}(1 - TS). \tag{3.10}
$$

Demostración. Esto sigue de los desarrollos (3.5) y (3.8), porque

$$
\langle f_S \mid f_T \rangle = \sum_{K, L \text{ finita}} (\operatorname{Pf} S_K)^* \ \operatorname{Pf} T_L \ \langle \varepsilon_K \mid \varepsilon_L \rangle = \sum_{K \text{ finita}} (\operatorname{Pf} S_K)^* \ \operatorname{Pf} T_K = \det{}^{1/2}(1 - TS). \qquad □
$$

Una propiedad útil de los pfaffianos es su "desarrollo de Laplace" como sumas de productos de menores complementarios. El "desarrollo en primera fila" es [10]:

$$\operatorname{Pf} A = \sum_{j=2}^{2m} (-1)^j a_{1j} \operatorname{Pf} A_{1j,1j}\,,$$

cuando A es una matriz antisimétrica $2m \times 2m$, y $A_{1j,1j}$ es el menor principal obtenido al borrar sus primeras y j-ésimas filas y columnas. Si $T \in \operatorname{Sk}(V)$ y $K = \{1, k_2, \dots, k_{2r}\}$, se sigue que

$$\operatorname{Pf} T_K = \sum_{j \in K} (\pm)_j \langle e_1 \mid T e_j \rangle \operatorname{Pf} T_{K''}$$

donde $K'' = K \setminus \{1, j\}$ y $(\pm)_j$ es el signo de la permutación $K \mapsto (1, j, K')$. En consecuencia, se obtiene:

$$\operatorname{Pf} T_K\, \varepsilon_K = \sum_{j \in K} \langle e_1 \mid T e_j \rangle \operatorname{Pf} T_{K'}\, e_1 \wedge e_j \wedge \varepsilon_{K'}. \tag{3.11}$$

3.2. Relaciones canónicas de anticonmutación

El álgebra de campos (fermiónicos, libres) sobre el espacio (V, d) es el álgebra de Clifford complexificada $\mathcal{A}(V_{\mathbb{C}}) := \mathrm{C}\ell(V, d) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, que es una C^*-álgebra. Hay una aplicación lineal $B\colon V_{\mathbb{C}} \to \mathcal{A}(V_{\mathbb{C}})$ (el "campo fermiónico"), tal que $B(w^*) = B(w)^\dagger$, que cumple

$$\{B(v), B(v')\} = 2\, d(v, v') \quad \text{para todo} \quad v, v' \in V. \tag{3.12}$$

Cualquier C^*-álgebra generada por operadores $\{\, B'(w) : w \in V_{\mathbb{C}} \,\}$ que cumplen las mismas condiciones es isomorfo [2] a $\mathcal{A}(V_{\mathbb{C}})$ por $B(w) \mapsto B'(w)$.

Hay una representación fiel irreducible π_J de $\mathcal{A}(V_{\mathbb{C}})$ sobre $\mathcal{F}(V)$ dada por la llamada construcción GNS respecto del "estado de Fock" ω_J [2] determinado por $\omega_J(B(u)B(v)) := \langle u|v\rangle$. Los operadores de anulación y creación para el campo fermiónico libre son los operadores $\mathbb{R}$-lineales sobre $\mathcal{F}(V)$ dados por:

$$a_J(v) := \pi_J(B(P_- v)), \qquad a_J^\dagger(v) := \pi_J(B(P_+ v)). \tag{3.13}$$

Se verifica $\pi_J(B(w))\Omega = 0$ para $w \in W_0^*$; Ω es el "vector del vacío" asociado a la polarización W_0. En vista de $P_\pm = \frac{1}{2}(1 \mp iJ)$, resulta que $a_J(Jv) = -i\, a_J(v)$ y $a_J^\dagger(Jv) = i\, a_J^\dagger(v)$ para $v \in V$; y $\pi_J B(v) = a_J(v) + a_J^\dagger(v)$. Ahora $V^{\wedge 1} \subset \mathcal{F}(V)$ es el espacio de Hilbert complejo (V, d, J), y en consecuencia $iv = Jv$ en $V^{\wedge 1}$; luego $a_J^\dagger(v)\Omega = \frac{1}{2}v - \frac{i}{2}Jv = v$, $a_J(v)\Omega = \frac{1}{2}v + \frac{i}{2}Jv = 0$ en $V^{\wedge 1}$. Más generalmente,

$$a_J^\dagger(v_1) a_J^\dagger(v_2) \cdots a_J^\dagger(v_k)\, \Omega = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k \in V^{\wedge k}.$$

Se puede verificar directamente que $\{\pi_J(B(v)), \pi_J(B(v'))\} = 2\, d(v, v')$ sobre vectores de la forma $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$. Las relaciones canónicas de anticonmutación (CAR):

$$\{a_J(v), a_J(v')\} = 0, \qquad \{a_J(v), a_J^\dagger(v')\} = \langle v \mid v' \rangle$$

son consecuencias de (3.13).

Mientras se dispone a usar una sola estructura compleja J, no vale la pena distinguir el álgebra de Clifford $\mathcal{A}(V_{\mathbb{C}})$ y su imagen bajo la representación fiel π_J. Por lo tanto, se escribirá $B(v)$ en vez de $\pi_J(B(v))$ y se considerará el "álgebra CAR" $\mathcal{A}(V_{\mathbb{C}})$ como un álgebra de operadores sobre el espacio de Fock $\mathcal{F}(V)$.

3.3. Cuantizaciones plenas

Para $U \in \mathrm{U}_J(V)$, se define el operador unitario $\Gamma_J(U)$ sobre $\mathcal{F}(V)$ por:

$$\Gamma_J(U)(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n) := Uv_1 \wedge Uv_2 \wedge \cdots \wedge Uv_n,$$

y $\Gamma_J(U)\,\Omega := \Omega$. De $B(v) = a_J(v) + a_J^\dagger(v)$ se sigue la propiedad de entrelazamiento:

$$\Gamma_J(U)B(v)\Gamma_J(U)^{-1} = B(Uv).$$

En la teoría cuántica de campos, una *cuantización plena* [5] de (V, d) consta de $(\mathcal{K}, B', \Omega, \Gamma)$, donde: (a) $\mathcal{K}$ es un espacio de Hilbert separable; (b) $B'(V)$ es un sistema de operadores autoadjuntos sobre $\mathcal{K}$ que cumple (3.12); (c) Ω es un vector de norma 1 en $\mathcal{K}$ que es un vector cíclico para $B'(V)$; y (d) Γ es una representación unitaria de $\mathrm{U}_J(V)$ que entrelaza $B'(V)$, tal que $\Gamma(U)\,\Omega = \Omega$ para todo U, y que tiene *energía positiva*. Esta última es una propiedad de la representación infinitesimal $d\Gamma$, y significa que $d\Gamma(A)$ es un operador positivo sobre $\mathcal{K}$ cuando A es un operador positivo sobre el espacio de Hilbert (V, d, J).

Proposición 3.5. *$(\mathcal{F}(V), B, \Omega, \Gamma_J)$ es una cuantización plena de (V, d).*

Demostración. Solamente falta verificar la condición de energía positiva.

Si A es un operador autoadjunto sobre (V, d, J), $d\Gamma(A) := \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\Gamma(\exp(itA))$ es definido por $d\Gamma(A)(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n) := \sum_{k=1}^n v_1 \wedge \cdots \wedge v_{k-1} \wedge Av_k \wedge v_{k+1} \wedge \cdots \wedge v_n$ para $v_1, \dots, v_n \in \mathrm{Dom}(A)$. Tales $v_1, \dots, v_n$ generan un subespacio denso $\mathcal{D}_0$ de $\mathcal{F}(V)$ que queda invariante bajo el grupo uniparamétrico $\Gamma(\exp(itA))$; por tanto, $\mathcal{D}_0$ es un corazón para $d\Gamma(A)$ [12].

Si $v_1, \dots, v_n \in \mathrm{Dom}(A)$ son linealmente independientes, vale

$$\begin{aligned}
&\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \mid d\Gamma(A) v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \rangle \\
&\quad = \sum_{j,k=1}^n (-1)^{j+k} \langle v_j \mid Av_k \rangle \, \langle v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v}_j \wedge \cdots \wedge v_n \mid v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v}_k \wedge \cdots \wedge v_n \rangle \\
&\quad = \sum_{j,k=1}^n m_{jk} \langle v_j \mid Av_k \rangle
\end{aligned} \tag{3.14}$$

donde m_{jk} es el cofactor (j, k) de la matriz de Gram $\{\langle v_j \mid v_k \rangle\}$, la cual es definida positiva; y $M = \{m_{jk}\} = \|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n\|^2 \{\langle v_j \,|\, v_k \rangle\}^{-1}$ es también definida positiva. Si el operador A es positivo, entonces $\{\langle v_j \,|\, Av_k \rangle\} = \{\langle A^{-1/2} v_j \,|\, A^{-1/2} v_k \rangle\}$ es una matriz de Gram semidefinida positiva, así que (3.14) es la traza del producto de dos matrices positivas, y como tal, es no negativa. Al reemplazar $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ por una combinación lineal de m términos del mismo tipo, y al aplicar el mismo argumento con $A \otimes E_m$ en lugar de A, siendo E_m la matriz $m \times m$ con cada entrada igual a 1, se obtiene

$$\langle z \mid d\Gamma(A) z \rangle \geqslant 0, \quad \text{para} \quad z = \sum_{i=1}^m v_{i1} \wedge \cdots \wedge v_{in} \in (\mathrm{Dom}\, A)^{\wedge n}.$$

Esto dice que la restricción de $d\Gamma(A)$ al corazón $\mathcal{D}_0$ es positiva, y su clausura $d\Gamma(A)$ es un operador positivo sobre $\mathcal{F}(V)$. ◻

4. La representación de pin

4.1. Corrimiento del vector del vacío

Se puede crear otras cuantizaciones plenas de (V, d) a partir de $(\mathcal{F}(V), B, \Omega, \Gamma_J)$ al reemplazar B por $v \mapsto B(gv)$ para $g \in \mathrm{O}(V)$ cualquiera. De hecho, se sigue de (3.12) que $w \mapsto B(gw)$ (para $w \in V_{\mathbb{C}}$) extiende a un $*$-automorfismo del álgebra CAR $\mathcal{A}(V_{\mathbb{C}})$. Es natural, entonces, preguntar si estas dos cuantizaciones plenas son unitariamente equivalentes, es decir, si este $*$-automorfismo generado por g es "unitariamente implementable".

Para $g \in \mathrm{O}(V)$ dado, se busca un operador unitario $\mu(g)$ sobre $\mathcal{F}(V)$ tal que

$$\mu(g)\, B(v) = B(gv)\, \mu(g), \quad \text{para todo} \quad v \in V. \tag{4.1}$$

La estructura compleja J se transforma en gJg^{-1}; los operadores de creación y anulación sufren una *transformación de Bogoliubov*:

$$a_{gJg^{-1}}(gv) = a_J(p_g v) + a_J^\dagger(q_g v), \qquad a^\dagger_{gJg^{-1}}(gv) = a_J(q_g v) + a_J^\dagger(p_g v). \tag{4.2}$$

Si $\mu(g)$ existiera, se cumpliría:

$$\mu(g) a_J(v) = a_{gJg^{-1}}(gv)\mu(g), \qquad \mu(g) a_J^\dagger(v) = a^\dagger_{gJg^{-1}}(gv)\mu(g).$$

El *vector del vacío saliente* $\mu(g)\Omega$ es anulado por $a_{gJg^{-1}}(gv)$, para todo $v \in V$. Ahora el conjunto $\{\, a_J(v) : v \in V \,\}$ se anula sobre múltiplos de Ω solamente, así que el conjunto de operadores $\{\, a_{gJg^{-1}}(gv) : v \in V \,\}$ también tienen un núcleo común unidimensional. Se mostrará a continuación que este "sector del vacío saliente" existe cuando g pertenece al grupo ortogonal restringido $\mathrm{O}'(V)$. Primero se comprobará que el vacío saliente es un gaussiano fermiónico cuando la parte lineal de g es invertible.

Proposición 4.1. *Si $g \in \mathrm{SO}'_*(V)$, entonces $a_{gJg^{-1}}(gv) f_{T_g} = 0$ para todo $v \in V$.*

Demostración. Al reemplazar v por $p_g^{-1} v$ y al usar (4.2), se reduce la tarea a la de mostrar que

$$(a(v) + a^\dagger(T_g v)) f_{T_g} = 0 \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Para este efecto, se emplea el desarrollo (3.5), el cual converge por (3.9) puesto que $T_g \in \mathrm{Sk}(V)$. Por lo tanto, basta establecer que $(a(e_1) + a^\dagger(Te_1)) f_T = 0$ cuando $T \in \mathrm{Sk}(V)$ y e_1 es el primer vector de una base ortonormal de V.

A partir de (3.11), se obtiene

$$\begin{aligned} a(e_1) f_T &= a(e_1) \sum_K (\operatorname{Pf} T_K)\, \varepsilon_K = a(e_1) \sum_{L \ni 1} (\operatorname{Pf} T_{1 \cup L})\, e_1 \wedge \varepsilon_L \\ &= a(e_1) \sum_{L \not\ni 1} \sum_{j \in L} \langle e_1 \mid T e_j \rangle (\operatorname{Pf} T_{L \setminus j})\, e_1 \wedge e_j \wedge \varepsilon_{L \setminus j} \\ &= -\sum_{j=1}^{\infty} \langle e_1 \mid T e_j \rangle \sum_{M \not\ni 1} (\operatorname{Pf} T_M)\, e_j \wedge \varepsilon_M = -\sum_{M \not\ni 1} (\operatorname{Pf} T_M)\, T e_1 \wedge \varepsilon_M. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$
\begin{aligned}
(a(e_1) + a^\dagger(Te_1))\, f_T &= \sum_{N \ni 1} (\operatorname{Pf} T_N)\, Te_1 \wedge \varepsilon_N = \sum_{L \not\ni 1} (\operatorname{Pf} T_{1\cup L})\, Te_1 \wedge e_1 \wedge \varepsilon_L \\
&= \sum_{L \not\ni 1} \sum_{j \in L} \langle e_1 \mid Te_j \rangle (\operatorname{Pf} T_{L\setminus j})\, Te_1 \wedge e_1 \wedge e_j \wedge \varepsilon_{L\setminus j} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_1 \mid Te_j \rangle \sum_K (\operatorname{Pf} T_K)\, Te_1 \wedge e_1 \wedge e_j \wedge \varepsilon_K \\
&= \sum_K (\operatorname{Pf} T_K)\, Te_1 \wedge Te_1 \wedge e_1 \wedge \varepsilon_K = 0. \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

Los diversos intercambios de sumas se permiten porque, a partir de (3.9), la serie converge en la norma de $\mathcal{F}(V)$. □

Como el sector del vacío saliente es unidimensional, se ve que $a_{gJg^{-1}}(gv)\Psi = 0$ para todo v implica que $\Psi = c_g f_{T_g}$ para alguna constante c_g.

► En el caso general, p_g no es necesariamente invertible; es necesario devolverse a $\mathrm{SO}'_*(V)$ por reflexiones [13]. Si $n = \dim(\ker p_g) = \dim(\ker p_g^t)$, sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal para el subespacio $\ker p_g^t$. Entonces $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ es un vector de norma 1 en el espacio vectorial complejo unidimensional $\Lambda^n(\ker p_g^t)$, y por ende queda determinado hasta un factor de fase. Si r es el producto de reflexiones (2.4), resulta que el siguiente vector queda en el sector del vacío saliente:

$$
e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \wedge f_{T_{rg}} := \sum_K (\operatorname{Pf}(T_{rg})_K)\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \wedge \varepsilon_K. \qquad (4.4)
$$

Para comprobar esa última afirmación, se debe verificar que

$$
(a_J(p_g v) + a_J^\dagger(q_g v))(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \wedge f_{T_{rg}}) = 0.
$$

Si $v \in \ker p_g$, entonces $p_g v = 0$ y $q_g v \in \ker p_g^t$, pues $p_g^t q_g v = -q_g^t p_g v = 0$. Entonces resulta que $a_J^\dagger(q_g v)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \wedge f_{T_{rg}}) = (q_g v \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \wedge f_{T_{rg}} = 0$, porque $q_g v$ es una combinación lineal de $e_1, \dots, e_n$.

En cambio, si $v \in (\ker p_g)^\perp$, entonces $\langle p_g v \mid e_k \rangle = \langle v \mid p_g^t e_k \rangle = 0$, y se sigue que

$$
\begin{aligned}
&[a_J(p_g v) + a_J^\dagger(q_g v)](e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \wedge f_{T_{rg}}) \\
&\qquad = (-1)^n e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \wedge [a_J(p_g v) + a_J^\dagger(q_g v)] f_{T_{rg}} \\
&\qquad = (-1)^n e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \wedge [a_J(p_{rg} v) + a_J^\dagger(q_{rg} v)] f_{T_{rg}} = 0,
\end{aligned}
$$

porque $p_{rg} = p_g$, $q_{rg} = q_g$ sobre el subespacio $(\ker p_g)^\perp$.

Finalmente, fíjese que los vectores básicos $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \wedge \varepsilon_K$ en (4.4) generan un subespacio cerrado de $\mathcal{F}_0(V)$ o bien de $\mathcal{F}_1(V)$, según sea n par o impar. Esto es así porque T_{rg} se anula sobre $\ker p_g^t$, y por eso K recorre efectivamente las partes pares de $\{n+1, n+2, \dots\}$. Luego el sector del vacío saliente queda en $\mathcal{F}_0(V)$ o $\mathcal{F}_1(V)$ según g queda en $\mathrm{SO}'(V)$ o en la componente no neutra de $\mathrm{O}'(V)$.

4.2. Permutación de elementos gaussianos

Ya se puede retomar el asunto de la existencia de los operadores unitarios $\mu(g)$. Como el sistema $\{ B(v) : v \in V \}$ es irreducible, el operador $\mu(g)$ queda determinado por el vector $\mu(g)\Omega$ debido a (4.1); y $\mu(g)\Omega$ pertenece al subespacio unidimensional generado por $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \wedge f_{T_{gr}}$ si $g \in \mathrm{O}'(V)$. Shale y Stinespring [14] mostraron que un vector del vacío saliente puede existir en $\mathcal{F}(V)$ solamente si $[J, g]$ es de Hilbert y Schmidt. Una demostración actual [4, 13] de este teorema pasa por mostrar que un tal vector es necesariamente de la forma: (const) $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \wedge f_{T_{rg}}$. Para que esta expresión sea convergente, n debe ser finito y $f_{T_{rg}}$ debe quedar en $\mathcal{F}(V)$; por (3.10), el operador $1 - T_{rg}^2$ debe poseer un determinante, es decir, T_{rg} debe ser de Hilbert y Schmidt. Ambas condiciones se cumplen si y solo si $g \in \mathrm{O}'(V)$, porque la finitud de n muestra que p_g es de Fredholm.

Entonces $\mu(g)\,\Omega = c_g\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \wedge f_{T_{rg}}$. La deseada unitariedad de $\mu(g)$ requiere que

$$1 = \langle \mu(g)\Omega \mid \mu(g)\Omega \rangle = |c_g|^2 \langle f_{T_{rg}} \mid f_{T_{rg}} \rangle = |c_g|^2 \det{}^{1/2}(1 - T_{rg}^2).$$

Luego $|c_g| = \det^{-1/4}(1 - T_{rg}^2)$. *Se fija el factor de fase* al tomar $c_g > 0$, es decir,

$$c_g := \det{}^{-1/4}(1 - T_{rg}^2). \tag{4.5}$$

Pese a la ambigüedad en la definición de r, que depende de una base ortonormal de $\ker p_g^t$, se sabe que T_{rg} se anula sobre $\ker p_g^t$, y de ahí se obtiene $c_g = \det^{1/4}\big(p_g^t p_g|_{(\ker p_g)^\perp}\big)$, independiente de r.

► Hay una *acción local* de $\mathrm{SO}'(V)$ sobre $\mathrm{Sk}(V)$, dada por

$$g \cdot S := (q_g + p_g S)(p_g + q_g S)^{-1}.$$

Si p_g es invertible, $(p_g + q_g S)^{-1}$ existe para S pequeña (en la norma de Hilbert y Schmidt en $\mathrm{Sk}(V)$). Aun cuando p_g no sea invertible, basta encontrar $T \in \mathrm{Sk}(V)$ con $p_g + q_g T$ invertible; por ejemplo, si $\ker p_g$ tiene base ortonormal $\{e'_1, \dots, e'_{2k}\}$, tómese T tal que $H_T = e'_1 \wedge e'_2 + \cdots + e'_{2k-1} \wedge e'_{2k}$; entonces los S con $p_g + q_g S$ invertible forman un vecindario abierto de T en $\mathrm{Sk}(V)$. Para simplificar la tarea, se supondrá por ahora que p_g es invertible.

Es claro que $g \cdot S$ es antilineal y de Hilbert y Schmidt; además, las relaciones (2.1) dan

$$(p_g + q_g S)^t (q_g + p_g S) = -(q_g + p_g S)^t (p_g + q_g S)$$

cuando $S^t = -S$, de donde $g \cdot S$ es también antisimétrica, así que $g \cdot S \in \mathrm{Sk}(V)$. Se comprueba que $gh \cdot S = g \cdot (h \cdot S)$ cuando $h \cdot S$ y $gh \cdot S$ están definidos. A partir de (2.5) con $T_h = S$, se deduce la expresión alternativa:

$$g \cdot S = T_g + p_g^{-t} S (1 - \widehat{T}_g S)^{-1} p_g^{-1}. \tag{4.6}$$

Para $g \in \mathrm{SO}'_*(V)$ dado, distinto de 1, los S tales que $p_g + q_g S$ es invertible forman un vecindario abierto de 0 en $\mathrm{Sk}(V)$, así que $\{ f_S : g \cdot S \text{ existe} \}$ genera un subespacio denso de $\mathcal{F}_0(V)$. Entonces se puede definir un operador unitario sobre $\mathcal{F}_0(V)$ por la prescripción:

$$\mu(g) f_S := c_g\, \phi_g(S) f_{g \cdot S}, \tag{4.7}$$

donde $\phi_g(S) \in \mathbb{C}$ se elige de tal manera que $\mu(g)$ sea unitario. Se cumple

$$\begin{aligned} \langle c_g \phi_g(S) f_{g\cdot S} \mid c_g \phi_g(T) f_{g\cdot T} \rangle &= |c_g|^2 \phi_g(S)^* \phi_g(T) \langle f_{g\cdot S} \mid f_{g\cdot T} \rangle \\ &= \phi_g(S)^* \phi_g(T) \det{}^{-1/2}(1 - T_g^2) \det{}^{1/2}(1 - (g \cdot T)(g \cdot S)), \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde

$$\begin{aligned}
&\det{}^{-1/2}(1-T_g^2)\det{}^{1/2}(1-(g\cdot T)(g\cdot S)) = \det{}^{1/2}(p_g^t p_g)\det{}^{1/2}(1-(g\cdot T)(g\cdot S)) \\
&= \det{}^{1/2}\big(1+T(1-\widehat{T}_g T)^{-1}\widehat{T}_g + \widehat{T}_g S(1-\widehat{T}_g S)^{-1} - (1-T\widehat{T}_g)^{-1}T(1-\widehat{T}_g^2)S(1-\widehat{T}_g S)^{-1}\big) \\
&= \det{}^{-1/2}(1-T\widehat{T}_g)\ \det{}^{-1/2}(1-\widehat{T}_g S)\ \det{}^{1/2}(1-TS).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede tomar

$$\phi_g(S) := \det{}^{1/2}(1-S\widehat{T}_g), \tag{4.9}$$

que reduce el lado derecho de (4.8) a $\langle f_S \,|\, f_T\rangle$; entonces (4.7) se extiende por linealidad y continuidad a un operador unitario $\mu(g)$ sobre $\mathcal{F}_0(V)$. Obsérvese que $\phi_g(0) = 1$ por la determinación pfaffiana de la raíz cuadrada $\det^{1/2}(1)$.

De (4.6) y (4.9), se sigue que

$$\begin{aligned}
\phi_{gh}(S) &= \det{}^{1/2}(1-S(\widehat{T}_h + p_h^{-1}\widehat{T}_g(1-T_h\widehat{T}_g)^{-1}p_h^{-t})) \\
&= \det{}^{1/2}(p_h^{-t}(1-S\widehat{T}_h)p_h^t - p_h^{-t}Sp_h^{-1}\widehat{T}_g(1-T_h\widehat{T}_g)^{-1})) \\
&= \det{}^{-1/2}(1-T_h\widehat{T}_g)\ \det{}^{1/2}((1-S\widehat{T}_h)p_h^t(1-T_h\widehat{T}_g)p_h^{-t} - Sp_h^{-1}\widehat{T}_g p_h^{-t}) \\
&= \det{}^{-1/2}(1-T_h\widehat{T}_g)\,\phi_h(S)\ \det{}^{1/2}(1-T_h\widehat{T}_g - p_h^{-t}(1-S\widehat{T}_h)^{-1}Sp_h^{-1}\widehat{T}_g) \\
&= \det{}^{-1/2}(1-T_h\widehat{T}_g)\,\phi_h(S)\,\phi_g(h\cdot S),
\end{aligned}$$

cuando $g, h, gh \in \mathrm{SO}'_*(V)$, toda vez que $h\cdot S$ y $gh\cdot S$ existen. Tales S forman un vecindario de 0 en $\mathrm{Sk}(V)$, y los gaussianos correspondientes f_S forman un conjunto total en $\mathcal{F}_0(V)$; por tanto,

$$\mu(g)\mu(h) = c(g,h)\mu(gh), \tag{4.10}$$

donde el *cociclo* $c(g,h)$ obedece

$$c(g,h) := c_g c_h c_{gh}^{-1}\det{}^{1/2}(1-T_h\widehat{T}_g) = \exp\big(i\arg\det{}^{1/2}(1-T_h\widehat{T}_g)\big). \tag{4.11}$$

Si V es finitodimensional, este cociclo es cohomólogo a otro cociclo con valores (±1); es suficiente redefinir el coeficiente (4.5) al sustituir $c_g := \det^{-1/4}(1-T_{rg}^2)$ por $\tilde{c}_g := \det^{1/2}(p_{rg})$ en la definición (4.7) de $\mu(g)$. Fíjese que $|\tilde{c}_g| = |c_g|$, así que se trata de una redefinición del factor de fase en el vector del vacío saliente. El cociclo (±1) puede aprovecharse para la construir el grupo de Lie $\mathrm{Spin}(2m)$ como recubrimiento doble del grupo $\mathrm{SO}(2m)$. Sin embargo, si V es de dimensión infinita, el operador p_{rg} no posee determinante en general, porque no difiere de la identidad por un operador trazable. El cociclo (4.11) entonces toma valores en todo el círculo unitario $\mathrm{U}(1)$, necesariamente.

► Es posible expresar los últimos cálculos en lenguaje geométrico como sigue. El espacio de polarizaciones restringidos $\mathcal{J}'(V)$ es una variedad de Kähler de dos componentes, modelada en el espacio de Hilbert $\mathrm{Sk}(V)$ – que puede identificarse con el espacio tangente de $\mathcal{J}'(V)$ en J – dotada de una acción del grupo $\mathrm{O}'(V)$. Las transformaciones impropias en $\mathrm{O}'(V)$ intercambian las dos componentes de $\mathcal{J}'(V)$. Considérese la acción de $\mathrm{SO}'(V)$ en la componente $\mathcal{J}'_+(V)$ que contiene J. Hay un fibrado de línea complejo $E \xrightarrow{\eta} \mathcal{J}'(V)$, linealmente encajado en $\mathcal{F}(V)$, y la aplicación $\lambda f_S \mapsto (S,\lambda)$ es una trivialización local en la carta $\{\, J' \in \mathcal{J}'(V) : \|J'-J\| < 2\,\}$, la cual es un conjunto abierto y denso en $\mathcal{J}'_+(V)$, donde $S = (J-J')(J+J')^{-1}$.

Se define una familia de secciones holomorfas de este fibrado de línea en la carta de marras por:

$$\psi_S(T) := \det{}^{1/2}(1 - TS)\, f_T,$$

para $S \in \mathrm{Sk}(V)$. Tales secciones generan un espacio prehilbertiano cuyo producto interno es

$$\langle \psi_R \mid \psi_S \rangle := \det{}^{1/2}(1 - SR), \tag{4.12}$$

y la acción local $S \mapsto g \cdot S$ de $\mathrm{SO}'(V)$ sobre $\mathrm{Sk}(V)$ induce una aplicación lineal $\check{\mu}(g)\colon \psi_S \mapsto c_g \phi_g(S) \psi_{g \cdot S}$ en el espacio de secciones. Se puede verificar que $\check{\mu}(g)$ preserva el producto interno (4.12) y que $\check{\mu}(g)\check{\mu}(h)\psi_S = c(g,h)\check{\mu}(gh)\psi_S$. La condición de cociclo (4.10) dice que el grupo que actúa sobre E no es $\mathrm{SO}'(V)$ sino una extensión central unidimensional de $\mathrm{SO}'(V)$ por $\mathrm{U}(1)$, siendo $c(g,h)$ el cociclo de la extensión. Para completar la construcción de $\mu(g)$, se debe hallar trivializaciones locales sobre un juego completo de cartas para $\mathcal{J}'(V)$. Teniendo en cuenta que $\mathrm{O}'(V)$ actúa transitivamente sobre $\mathcal{J}'(V)$, basta considerar cartas de la forma $\{\, rh \cdot J : h \in \mathrm{SO}'_*(V) \,\}$, donde r es algún producto finito de reflexiones.

4.3. La acción de las reflexiones

Volviendo a la presentación explícita de $\mu(g)$ sobre el espacio de Fock $\mathcal{F}(V)$, se debe entonces determinar $\mu(g)\Psi$ *y los cociclos respectivos*, cuando $g = rh$ con $h \in \mathrm{SO}'_*(V)$ y r es un producto de n reflexiones en $\mathrm{O}'(V)$, para $\Psi \in \mathcal{F}_0(V)$ ó $\mathcal{F}_1(V)$. El caso $n = 0$, $\Psi \in \mathcal{F}_0(V)$, ya está hecha en (4.7). A continuación se determinará:

(a): $\mu(r)$ para ciertas transformaciones ortogonales impropias;

(b): $\mu(g)\Psi$ para $g \in \mathrm{SO}'_*(V)$, $\Psi \in \mathcal{F}_1(V)$;

(c): $\mu(rh)\Psi$ para $h \in \mathrm{SO}'_*(V)$, r del caso (a), $\Psi \in \mathcal{F}_0(V)$; y finalmente,

(d): el caso general.

En cada etapa se exhibirá los cociclos y se verificará su consistencia.

Caso (a): Si $v \in V$ con $d(v,v) = 1$, defínase $r_v \in \mathrm{O}'(V)$ por

$$r_v(u) := 2d(v,u)v - u. \tag{4.13}$$

Fíjese que $r_v = -\rho_v$, donde ρ_v es la reflexión en el hiperplano ortogonal a v, dado por (2.3). Se define:

$$\mu(r_v) := B(v). \tag{4.14}$$

Si u, v son vectores de norma 1 en V con $\langle u \mid v \rangle \neq 0$, entonces $s = r_u r_v \in \mathrm{SO}'(V)$ y p_s es invertible. Para comprobar eso, nótese que $p_{r_u} = p_{r_v} = -1$, $q_{r_u} = q_{r_v} = 0$ sobre el subespacio $\{\, z \in V : \langle u \mid z \rangle = \langle v \mid z \rangle = 0 \,\}$; entonces se puede suponer que V es el espacio vectorial complejo generado por u y v; que $u = \alpha v + \beta v'$ con v' un vector de norma 1 tal que $\langle v' \mid v \rangle = 0$; luego $\alpha \neq 0$, $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$. Colóquese $u' := \beta^* v - \alpha^* v'$, así que $\langle u' \mid u \rangle = 0$, y nótese que $v = \alpha^* u + \beta u'$, $v' = \beta^* u - \alpha u'$. Al calcular s en la base $\{v, v'\}$, se obtiene:

$$p_s(v) = \alpha(\alpha v + \beta v'), \quad p_s(v') = \alpha(-\beta^* v + \alpha^* v'), \quad T_s v = (\beta/\alpha^*)v'. \tag{4.15}$$

Entonces p_s sí es invertible, pues $\alpha = \langle v \mid u \rangle \neq 0$. Más generalmente, si $\dim_{\mathbb{C}} V > 2$, T_s se anula en el complemento ortogonal de $\{v, v'\}$ y por eso,

$$f_{T_s} = \Omega + \langle v' \mid T_s v \rangle\, v' \wedge v = \langle u \mid v \rangle^{-1} (\langle u \mid v \rangle\, \Omega + u \wedge v), \tag{4.16}$$

y $\|\langle u \mid v \rangle\, \Omega + u \wedge v\| = 1$ en la norma de $\mathcal{F}(V)$. Por lo tanto,

$$\mu(s)\, \Omega = c_s f_{T_s} = \exp(-i \arg\langle u \mid v \rangle)\, (\langle u \mid v \rangle\, \Omega + u \wedge v).$$

Por otra parte, de (4.14) se deduce que

$$\mu(r_u)\mu(r_v)\, \Omega = B(u)B(v)\, \Omega = \langle u \mid v \rangle \Omega + u \wedge v,$$

así que

$$\mu(r_u)\mu(r_v)\, \Omega = c(r_u, r_v)\mu(r_u r_v)\, \Omega,$$

con

$$c(r_u, r_v) = \exp(i \arg\langle u \mid v \rangle).$$

Lema 4.2. $\mu(r_u)\mu(r_v)\, \Psi = c(r_u, r_v)\mu(r_u r_v)\, \Psi$ *para todo* $\Psi \in \mathcal{F}_0(V)$.

Demostración. Como u, v son vectores de norma 1, resulta que

$$B(u)B(v)\big(\langle v \mid u \rangle \Omega - u \wedge v\big) = \Omega,$$

y por ende, para $s = r_u r_v$,

$$\mu(s)\big(\langle v \mid u \rangle \Omega - u \wedge v\big) = \langle v \mid u \rangle \mu(s) f_{\widehat{T}_s} = \langle v \mid u \rangle c_s^{-1} \Omega = \exp(-i \arg\langle u \mid v \rangle)\Omega,$$

porque $s \cdot \widehat{T}_s = 0$ y $\phi_s(\widehat{T}_s) = \det^{1/2}(1 - \widehat{T}_s^2) = c_s^{-2}$; luego $\mu(r_u)\mu(r_v) = c(r_u, r_v)\mu(r_u r_v)$ en el subespacio de $\mathcal{F}_0(V)$ generado por Ω y $u \wedge v$. El subespacio complementario es densamente generado por gaussianos f_T tales que $Tu = Tv = 0$. Para tales f_T, se verifica

$$B(u)B(v) f_T = \langle u \mid v \rangle f_T + u \wedge v \wedge f_T,$$

en vista de (4.3) con $e_1 = u$ ó v; mientras $\mu(s) f_T = c_s \phi_s(T) f_{s \cdot T}$ con $\phi_s(T) = 1$, $s \cdot T = T_s + T$. Por eso, al usar (4.16), se obtiene

$$\mu(s) f_T = \exp(-i \arg\langle u \mid v \rangle)\, \big(\langle u \mid v \rangle\, \Omega + u \wedge v\big) \wedge f_T.$$

Por lo tanto, $\mu(r_u)\mu(r_v) = c(r_u, r_v)\mu(r_u r_v)$ en todo $\mathcal{F}_0(V)$. $\square$

Caso (b): El siguiente paso es completar la definición de $\mu(g)$ para $g \in \mathrm{SO}'_*(V)$, al definirlo en el subespacio $\mathcal{F}_1(V)$. Hay que hacerlo de tal manera que $\mu(g)B(v) = B(gv)\mu(g)$ sobre $\mathcal{F}_0(V)$, al colocar

$$\mu(g)(B(v) f_S) := B(gv)\mu(g) f_S \tag{4.17}$$

para los $S \in \mathrm{Sk}(V)$ tales que $g \cdot S$ existe. Se puede definir

$$\mu(g r_u) := \mu(g)\mu(r_u) \quad \text{para} \quad g \in \mathrm{SO}'_*(V),$$

y en consecuencia $c(g, r_u) := 1$; de (4.17) se ve que $\mu(g r_u) f_S = B(gu)\mu(g) f_S$. La consistencia de estas definiciones parciales es consecuencia del lema siguiente.

Lema 4.3. *Si $g \in \mathrm{SO}'_*(V)$ y si u, v son vectores de norma 1 en V con $\langle u \mid v\rangle \neq 0$, se verifica, para todo $\Psi \in \mathcal{F}_0(V)$:*

$$\mu(g)B(u)B(v)\,\Psi = B(gu)B(gv)\mu(g)\,\Psi. \tag{4.18}$$

Demostración. Como $B(u)B(v) = c(r_u, r_v)\mu(r_u r_v)$ sobre $\mathcal{F}_0(V)$, basta verificar que

$$c(r_u, r_v)\mu(g)\mu(r_u r_v) = c(r_{gu}, r_{gv})\mu(r_{gu} r_{gv})\mu(g)$$

sobre $\mathcal{F}_0(V)$. Ahora $r_{gu} r_{gv} = g r_u r_v g^{-1}$, así que esta afirmación se reduce a la de *establecer la identidad del cociclo*:

$$c(r_u, r_v)\, c(g, r_u r_v) = c(r_{gu}, r_{gv})\, c(r_{gu} r_{gv}, g) \tag{4.19}$$

para aquellos g, u, v que cumplen las hipótesis del Lema.

Colóquese $s := r_u r_v$; por (4.11), el lado izquierdo de (4.19) es igual a

$$\exp(i \arg\langle u \mid v\rangle) c_g c_s c_{gs}^{-1} \det{}^{1/2}(1 - T_s \widehat{T}_g).$$

Esto se simplifica en

$$c_g c_{gs}^{-1} \langle u \mid v\rangle \big(1 + \langle \widehat{T}_g v \mid v'\rangle\, \langle v' \mid T_s v\rangle\big) \tag{4.20}$$

donde $\{v, v'\}$ es una base ortonormal para el subespacio generado por u y v; el desarrollo pfaffiano (3.8) de $\det^{1/2}(1 - T_s \widehat{T}_g)$ no tiene más términos, porque T_s se anula en el complemento ortogonal de este subespacio bidimensional.

Al escribir $u = \alpha v + \beta v'$, con $\alpha = \langle v \mid u\rangle$, se obtiene $\langle v' \mid T_s v\rangle = \beta \langle u \mid v\rangle^{-1}$ de (4.15); luego (4.20) se convierte en

$$c_g c_{gs}^{-1} \big(\langle u \mid v\rangle + \langle \widehat{T}_g v \mid \beta v'\rangle\big) = c_g c_{gs}^{-1} \big(\langle u \mid v\rangle + \langle \widehat{T}_g v \mid u\rangle\big).$$

De modo similar, con $s' = r_{gu} r_{gv}$, el lado derecho de (4.19) da

$$\exp(i \arg\langle gu \mid gv\rangle)\, c_g c_{s'} c_{s'g}^{-1} \det{}^{1/2}(1 - T_g \widehat{T}_{s'}),$$

que se simplifica en

$$c_g c_{gs}^{-1} \langle gu \mid gv\rangle \big(1 + \langle \widehat{T}_{s'} gu \mid u''\rangle\, \langle u'' \mid T_g gu\rangle\big),$$

donde u'' denota un vector de norma 1 ortogonal a gu en el subespacio generado por gu y gv. Sea $gv =: \tilde{\alpha} gu + \tilde{\beta} u''$, con $\tilde{\alpha} = \langle gu \mid gv\rangle$. Además, $\widehat{T}_{s'} = T_{(s')^{-1}}$, con $(s')^{-1} = r_{gv} r_{gu}$, y en este caso (4.15) produce

$$\langle gu \mid gv\rangle \langle \widehat{T}_{s'} gu \mid u''\rangle \langle u'' \mid T_g gu\rangle = \tilde{\beta}^* \langle u'' \mid T_g gu\rangle = \langle gv \mid T_g gu\rangle.$$

Basta, entonces, verificar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\langle gu \mid gv\rangle + \langle gv \mid T_g gu\rangle &= \langle gu \mid gv\rangle + \langle p_g v + q_g v \mid q_g(u + p_g^{-1} q_g u)\rangle \\
&= \langle gu \mid gv\rangle + \langle u - \widehat{T}_g u \mid q_g^t (p_g v + q_g v)\rangle \\
&= \langle u \mid (p_g^t + q_g^t)(p_g v + q_g v)\rangle + \langle q_g u \mid gv\rangle + \langle \widehat{T}_g u \mid p_g^t q_g v - v + p_g^t p_g v\rangle \\
&= \langle u \mid v\rangle - \langle \widehat{T}_g u \mid v\rangle + \langle q_g u \mid gv\rangle + \langle p_g \widehat{T}_g u \mid gv\rangle \\
&= \langle u \mid v\rangle - \langle \widehat{T}_g u \mid v\rangle = \langle u \mid v\rangle + \langle \widehat{T}_g v \mid u\rangle,
\end{aligned}$$

al usar las relaciones (2.1) y la antisimetría de $\widehat{T}_g$. $\square$

Caso (c): En consecuencia,

$$\mu(g)B(u)[B(v)\,\Psi] = B(gu)\mu(g)[B(v)\,\Psi]$$

si $\Psi \in \mathcal{F}_0(V)$; esto es, si $B(v)\Psi \in \mathcal{F}_1(V)$. Por lo tanto, $\mu(g)B(u) = B(gu)\mu(g)$ sobre todo $\mathcal{F}(V)$ cuando $g \in \mathrm{SO}'_*(V)$. De (3.12) se ve que

$$B(u)B(v) = 2\,d(u,v) - B(v)B(u) = B(r_u v)B(u),$$

así que (4.18) puede escribirse en la forma

$$[\mu(g)B(u)]B(v)\,\Psi = \mu(g)B(r_u v)B(u)\,\Psi = B(gr_u v)[\mu(g)B(u)]\,\Psi,$$

así que $\mu(gr_u)B(v) = B(gr_u v)\mu(gr_u)$ sobre $\mathcal{F}_0(V)$. Esta identidad se cumple también sobre $\mathcal{F}_1(V)$ por cálculos similares, y se deduce que (4.1) es válida para elementos de la forma $g = hr_u$ con $h \in \mathrm{SO}'_*(V)$. Como $hr_u h^{-1} = r_{hu}$, es también válida para elementos $g := r_v h$ con $h \in \mathrm{SO}'_*(V)$.

Caso (d): Considérese ahora el caso general de $g \in \mathrm{O}'(V)$. Se puede escribir $g = rh$ donde p_h es invertible y $r = r_{e_1} \cdots r_{e_n}$ es el producto de n elementos de la forma (4.13), donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal de $\ker p_g^t$; en cuyo caso se define

$$\mu(g) := B(e_1) \cdots B(e_n)\mu(h).$$

En particular, $\mu(g)\,\Omega = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \wedge f_{T_h}$, como era de esperar.

El cociclo (4.5) se extiende a todo $\mathrm{O}'(V)$ como sigue:

- Defínase $c(g, r_u) := 1$ cuando $g \in \mathrm{SO}'_*(V)$ y r_u es de la forma (4.13).
- Colóquese $c(gr_u, r_v) := c(g, r_u r_v)\, c(r_u, r_v)$ si $d(u,v) \neq 0$; pero si $d(u,v) = 0$, tómese $c(g, r_u r_v)$, $c(r_u, r_v)$, $c(gr_u, r_v)$ todos iguales a 1. De este modo, la ecuación de cociclo $c(g, r_u)\, c(gr_u, r_v) = c(g, r_u r_v)\, c(r_u, r_v)$ se cumple en todos los casos.
- En general, colóquese $\mu(g, r_{e_1} \cdots r_{e_k}) := 1$ si $g \in \mathrm{SO}'(V)$ y $\{e_1, \dots, e_k\}$ es un conjunto ortonormal de vectores en V.

La ecuación de cociclo $c(g,h)\, c(gh,k) = c(g,hk)\, c(h,k)$ entonces determina los valores restantes de $c(g,h)$, de tal manera que (4.10) permanece válida para todo $g, h \in \mathrm{O}'(V)$.

► Esto termina la construcción de la “representación de pin” de $\mathrm{O}'(V)$ sobre $\mathcal{F}(V)$. Evidentemente, es una representación proyectiva irreducible. Su restricción al subgrupo $\mathrm{SO}'(V)$ posee dos subespacios irreducibles ortogonales, a saber, $\mathcal{F}_0(V)$ y $\mathcal{F}_1(V)$; esta restricción es la “representación de espín” de $\mathrm{SO}'(V)$.

Agradecimientos

Agradecemos a José M. Gracia-Bondía, Héctor Figueroa y Guillermo Moreno para discusiones útiles. Este trabajo germinó en el ambiente acogedor del Departamento de Matemáticas del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional en México. Reconocemos el apoyo del Deutscher akademischer Austauschdienst (DAAD) y la hospitalidad del Forschungszentrum BiBoS de la Universität Bielefeld durante su desarrollo. Agradecemos el apoyo de la Vicerrectoría de Investigación de la Universidad de Costa Rica.

Referencias

[1] A. Pressley and G. B. Segal, *Loop Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1986.

[2] H. Araki, "Bogoliubov automorphisms and Fock representations of canonical anticommutation relations", Contemp. Math. **62** (1987), 23–141.

[3] A. L. Carey and J. Palmer, "Infinite complex spin groups", J. Funct. Anal. **83** (1989), 1–43.

[4] J. M. Gracia-Bondía and J. C. Várilly, "QED in external fields from the spin representation", J. Math. Phys. **35** (1994), 3340–3367.

[5] I. E. Segal, "The complex-wave representation of the free boson field", Adv. Math. Suppl. Studies **3** (1978), 321–343.

[6] J. M. Gracia-Bondía and J. C. Várilly, "The metaplectic representation and boson fields", preprint CPP/91/21, Austin, TX, 1991.

[7] M. Vergne, "Groupe symplectique et seconde quantification", C. R. Acad. Sci. Paris **285A** (1977), 191–194.

[8] G. B. Segal, "Unitary representation of some infinite dimensional groups", Commun. Math. Phys. **80** (1981), 301–342.

[9] J. C. Várilly and J. M. Gracia-Bondía, "*S*-matrix from the metaplectic representation", Mod. Phys. Lett. A **7** (1992), 659–667.

[10] N. Bourbaki, *Algèbre, Chapitre 9*, Hermann, Paris, 1959.

[11] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Chelsea, New York, 1959.

[12] M. E. Taylor, *Noncommutative Harmonic Analysis*, Mathematical Surveys and Monographs **22**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[13] S. N. M. Ruijsenaars, "On Bogoliubov transformations. II. The general case", Ann. Phys. **116** (1978), 105–134.

[14] D. Shale and W. F. Stinespring, "Spinor representations of infinite orthogonal groups", J. Math. Mech. **14** (1965), 315–322.