

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
SISTEMA DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**PARTE PRIMA A P
DEL ESQUEMA FUNDAMENTAL EN GRUPOS
SOBRE ANILLOS DE VALUACIÓN DISCRETA**

*Tesis sometida a la consideración de la Comisión del Programa de
Estudios de Posgrado en Matemática para optar al grado y título de
Maestría Académica en Matemática*

JIMMY JOSÉ CALVO MONGE

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio, Costa Rica 2020

Dedicatoria

A doña Rosa.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi asesor Marco Antei. Con él he adquirido una cantidad enorme de conocimiento durante este proceso. Le agradezco infinitamente su dedicación y diligencia en dirigir esta tesis. Nunca se mostró reacio a ayudarme con algo. Le admiro su gran capacidad la enorme paciencia que tuvo al atender las innumerables dudas y aclaraciones que le solicité en el transcurso de este año y medio. Considero que gracias a él me encuentro mucho mejor preparado como matemático y podré afrontar con un poco más de confianza los retos que vienen en mi profesión. Ha sido un verdadero placer aprender tanto con él y verdaderamente no tengo cómo agradecerle lo suficiente.

También quiero agradecer a los miembros de mi comité de tesis que me han apoyado desde el inicio y se han mostrado gustosos de formar parte de este proceso conmigo. Sus guías han sido muy valiosas y he aprendido mucho con todos ellos, tanto en mi maestría como en mi bachillerato cuando fueron mis profesores. A Joseph Várilly le agradezco haberse tomado la molestia de revisar y perfeccionar los detalles .tex de este documento. A Adrián Barquero le agradezco su apoyo constante, con el cual he contado incluso desde antes de formalizar mi proyecto de tesis.

Agradezco también a mis dos mejores amigos Carlos Andrés y Ximena, quienes muchas veces me apoyaron emocionalmente en aquellos momentos donde todo me parecía muy difícil. ¡Gracias chiquillos! Por último quiero agradecer a mis padres y hermanos, quienes siempre han creído en mí y me han apoyado en todo lo que pueden. Los quiero mucho.

Esta tesis fue aceptada por la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Matemática de la Universidad de Costa Rica, como requisito parcial para optar al grado y título de Maestría Académica en Matemática.



Dr. Alberto Hernández Alvarado

Representante del Decano del Sistema de Estudios de Posgrado



Dr. Marco Antei

Director de Tesis



Dr. Adrián Barquero Sánchez

Lector



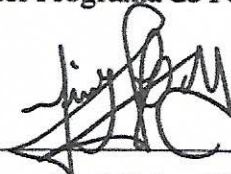
Dr. Joseph C. Várilly Boyle

Lector



Dr. Pedro Méndez Hernández

Representante del Programa de Posgrado en Matemática



Jimmy José Calvo Monge

Candidato

Índice general

Dedicatoria	II
Agradecimientos	II
Simbología	VI
Motivación e Introducción	1
1 Preliminares	8
1.1. Elementos básicos de teoría de categorías	8
1.2. Haces y Esquemas	20
1.3. Propiedades de Esquemas	25
1.4. Haces de Módulos y haces quasi-coherentes	30
2 Esquemas afines en grupos	36
2.1. Esquemas en grupos	36
2.2. Esquemas afines en grupos	39
2.3. Representaciones de esquemas afines en grupos	44
2.4. Esquemas separables (o étales)	50
3 Categorías y Retículos Tannakianos	54
3.1. Categorías Tannakianas	54
3.2. Retículos Tannakianos	65
4 Esquema fundamental en grupos	74
4.1. Una mirada a la teoría del grupo fundamental étale	74
4.2. Torsores: Definiciones y Propiedades	83
4.3. Esquema Fundamental en grupos de Nori	87
4.4. Construcción profinita del esquema fundamental de Nori	102
4.5. Esquema fundamental en grupos para esquemas de Dedekind	111
5 Parte prima a p del esquema fundamental en grupos	119
Bibliografía	146

Resumen

Si X es un esquema propio, suave y conexo sobre $\text{Spec}(R)$, para R un anillo de valuación discreta completo, dotado de una sección $x : \text{Spec}(R) \rightarrow X$, es posible construir los esquemas fundamentales en grupos $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X_\eta, x_\eta)$, donde X_η denota la fibra genérica de X sobre K , el cuerpo de fracciones de R . Estos objetos clasifican los torsores sobre X y X_η respectivamente. Un problema histórico es determinar si $\pi_1(X, x)$ tiene por fibra genérica a $\pi_1(X_\eta, x_\eta)$. Hasta el momento esto es desconocido en el caso general. Bajo la motivación del tratamiento dado por A. Grothendieck para el grupo fundamental étale, si p es la característica del cuerpo residual de R , en esta tesis demostramos que la fibra genérica de $\pi_1(X, x)^{(p')}$ coincide con $\pi_1(X_\eta, x_\eta)^{(p')}$, donde para un esquema en grupos profinito G denotamos por $G^{(p')}$ al máximo cociente de G que es coprimo a p , conocido como la parte prima a p de G . Demostramos que la existencia de este isomorfismo entre partes primas a p es equivalente a resolver el problema de extender a todo X un G -torsor, para G un esquema afín en grupos finito sobre $\text{Spec}(K)$ de orden primo relativo a p , definido sobre la fibra genérica X_η . Para encontrar la extensión deseada del torsor sobre X_η hacemos fuerte uso de la teoría de retículos tannakianos.

Abstract

If X is a proper, smooth and connected scheme over $\text{Spec}(R)$, for a complete discrete valuation ring R , with a section $x : \text{Spec}(R) \rightarrow X$, it is possible to construct the fundamental group schemes $\pi_1(X, x)$ and $\pi_1(X_\eta, x_\eta)$, where X_η denotes the generic fiber of X over K , the field of fractions of R . These objects classify the torsors over X and X_η respectively. A historical problem is to determine if the generic fiber of $\pi_1(X, x)$ equals $\pi_1(X_\eta, x_\eta)$. So far this is unknown for the general case. Motivated by the work of A. Grothendieck for the étale fundamental group, if p is the characteristic of the residual field of R , in this thesis we prove that the generic fiber of $\pi_1(X, x)^{(p')}$ coincides with $\pi_1(X_\eta, x_\eta)^{(p')}$, where for a profinite group scheme G we write its maximal coprime to p quotient as $G^{(p')}$, known as the prime to p part of G . We show that the existence of such isomorphism of prime to p parts is equivalent to solving the problem of extending to all of X a G -torsor defined over X_η , where G is a finite affine group scheme over $\text{Spec}(K)$ of order coprime to p . To find the desired extension of the torsor over X_η we make strong use of the theory of tannakian lattices.

Simbología

$\text{Obj}(\mathcal{C})$	Objetos de una categoría $\mathcal{C}$
$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$	Morfismos en la categoría $\mathcal{C}$ entre los objetos X y Y
$\text{End}(F)$	Grupo de endomorfismos de F
$\text{Aut}(F)$	Grupo de automorfismos de F
$\text{End}_R^{\otimes}(F)$	Grupo de endomorfismos tensoriales y R -lineales de F
$\text{Aut}_R^{\otimes}(F)$	Grupo de automorfismos tensoriales y R -lineales de F
$\text{Iso}(\omega, \eta)$	Isomorfismos entre ω y η
$\text{Iso}_R^{\otimes}(\omega, \eta)$	Isomorfismos tensoriales y R -lineales entre ω y η
$\text{Nat}(\omega, \eta)$	Transformaciones naturales entre ω y η
$\text{Nat}_R^{\otimes}(\omega, \eta)$	Transformaciones naturales tensoriales y R -lineales entre ω y η
Conjuntos	Categoría de conjuntos
$\text{Mod}(R)$	Categoría de R -módulos
$\text{Modf}(R)$	Categoría de R -módulos finitos
$\text{Mod}^0(R)$	Categoría de R -módulos finitos y proyectivos
Vect_k	Categoría de k -espacios vectoriales finito-dimensionales
Grupos	Categoría de grupos
$k\text{-Alg}$	Categoría de k -álgebras
$X \times_Y Z$	Producto fibrado de X y Z sobre Y
$\mathcal{O}_X$	Haz estructural de X
$\mathcal{O}_{X,x}$	Tallo de $(X, \mathcal{O}_X)$ en el punto x
$f^{-1}\mathcal{F}$	Haz imagen inversa de $\mathcal{F}$
$f^*\mathcal{F}$	Pullback del haz $\mathcal{F}$ bajo el morfismo f
$f_*\mathcal{F}$	Haz imagen directa de $\mathcal{F}$
$\text{rg}(V)$	Rango de V
$\mathcal{F}^{\vee} = \mathcal{F}^*$	Dual de $\mathcal{F}$
$\text{Spec}(A)$	Espectro primo del anillo A
$X(T)$	Morfismos $T \rightarrow X$
$k[G]$	Álgebra de Hopf que representa a G
$\text{Rep}(G)$	Categoría de representaciones de G
$\text{Comod}(A)$	Categoría de A -comódulos
$\text{Comodf}(A)$	Categoría de A -comódulos finitos
$\text{Comod}^0(A)$	Categoría de A -comódulos finitos y proyectivos
$\pi_1(S, \bar{s})$	Grupo fundamental étale de S con punto geométrico $\bar{s}$
$\text{Vect}(X)$	Categoría de fibrados vectoriales sobre X
$\text{Fin}(X)$	Haces localmente libres y finitos de $\mathcal{O}_X$ -módulos
$\text{SS}(X)$	Haces localmente libres y semi-estables de pendiente 0 sobre X
$\text{EF}(X)$	Haces esencialmente finitos sobre X
$\pi_1^N(X, x)$	Esquema fundamental en grupos de Nori para X con punto k -racional x .



Autorización para digitalización y comunicación pública de Trabajos Finales de Graduación del Sistema de Estudios de Posgrado en el Repositorio Institucional de la Universidad de Costa Rica.

Yo, Jimmy José Calvo Monge, con cédula de identidad 3-0486-0517, en mi condición de autor del TFG titulado Parte prima a p del esquema fundamental en grupos sobre anillos de valuación discreta

Autorizo a la Universidad de Costa Rica para digitalizar y hacer divulgación pública de forma gratuita de dicho TFG a través del Repositorio Institucional u otro medio electrónico, para ser puesto a disposición del público según lo que establezca el Sistema de Estudios de Posgrado. SI ☒ NO * ☐

*En caso de la negativa favor indicar el tiempo de restricción: _____ año (s).

Este Trabajo Final de Graduación será publicado en formato PDF, o en el formato que en el momento se establezca, de tal forma que el acceso al mismo sea libre, con el fin de permitir la consulta e impresión, pero no su modificación.

Manifiesto que mi Trabajo Final de Graduación fue debidamente subido al sistema digital Kerwá y su contenido corresponde al documento original que sirvió para la obtención de mi título, y que su información no infringe ni violenta ningún derecho a terceros. El TFG además cuenta con el visto bueno de mi Director (a) de Tesis o Tutor (a) y cumplió con lo establecido en la revisión del Formato por parte del Sistema de Estudios de Posgrado.

INFORMACIÓN DEL ESTUDIANTE:

Nombre Completo: Jimmy José Calvo Monge.

Número de Carné: B31281 Número de cédula: 3-0486-0517.

Correo Electrónico: jimmy.calvo@ucr.ac.cr / jimjocamon94@gmail.com.

Fecha: 17-11-2020. Número de teléfono: 89884004.

Nombre del Director (a) de Tesis o Tutor (a): Marco Antei.

FIRMA ESTUDIANTE

Nota: El presente documento constituye una declaración jurada, cuyos alcances aseguran a la Universidad, que su contenido sea tomado como cierto. Su importancia radica en que permite abreviar procedimientos administrativos, y al mismo tiempo genera una responsabilidad legal para que quien declare contrario a la verdad de lo que manifiesta, puede como consecuencia, enfrentar un proceso penal por delito de perjurio, tipificado en el artículo 318 de nuestro Código Penal. Lo anterior implica que el estudiante se vea forzado a realizar su mayor esfuerzo para que no sólo incluya información veraz en la Licencia de Publicación, sino que también realice diligentemente la gestión de subir el documento correcto en la plataforma digital Kerwá.

Motivación e Introducción

En topología algebraica clásica se estudia el grupo fundamental de un par (X, x) , donde X es un espacio topológico y $x \in X$ es un punto de X . El grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ consiste de las clases de equivalencia bajo homotopía de funciones continuas $f: [0, 1] \rightarrow X$ con $f(0) = f(1) = x$. La composición de dos de estas funciones sirve como una multiplicación y el elemento neutro es el *lazo constante* $f_x \equiv x$. Este grupo fundamental es de gran ayuda cuando se necesita clasificar espacios topológicos, especialmente cuando las propiedades de la topología general clásica son insuficientes para este fin. Quizá la propiedad más importante del grupo fundamental es su función como *clasificador* de los cubrimientos de un espacio topológico.

Un cubrimiento de X se define como una función continua y sobreyectiva $f: Y \rightarrow X$ tal que para todo $x \in X$ existe un vecindario abierto $V_x \subset X$ que contiene a x tal que $f^{-1}(V_x)$ es una unión disjunta de abiertos en Y , todos mapeados homeomórficamente a V_x mediante f . Un ejemplo de un cubrimiento es cuando un grupo G actúa sobre un espacio Y . En [Ful95, Capítulo 13] se demuestra que bajo ciertas hipótesis sobre la acción de G sobre Y se tiene que la proyección $\pi: Y \rightarrow Y/G$ es un cubrimiento, donde Y/G es el cociente de Y por la acción de G , dotado de la topología cociente. Estos son conocidos como G -cubrimientos.

El siguiente teorema [Ful95, p. 184] nos ilustra por qué el grupo fundamental está fuertemente relacionado con los G -cubrimientos.

Teorema 0.1. *Sea $f: Y \rightarrow X$ un cubrimiento, con Y conexo y X localmente arco-conexo, y sea $f(y) = x$. Si $f_*(\pi_1(Y, y))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X, x)$, entonces $f: Y \rightarrow X$ es un G -cubrimiento, con*

$$G = \pi_1(X, x) / f_*(\pi_1(Y, y)),$$

donde f_* es el homomorfismo de grupos fundamentales inducido por f .

Es posible concluir a partir de éste resultado que todo G -cubrimiento de X es en realidad un cubrimiento dado por la acción de un subgrupo de $\pi_1(X, x)$, asumiendo arco-conexidad del espacio X , y se puede demostrar la existencia de un $\pi_1(X, x)$ -cubrimiento $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow X$

tal que para todo G -cubrimiento $f : Y \rightarrow X$ hay un morfismo $\hat{f}$ que completa el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\hat{f}} & Y \\ & \searrow \hat{f} & \downarrow f \\ & & X. \end{array}$$

Dicho cubrimiento es llamado el *cubrimiento universal* de X .

Con el desarrollo de la geometría algebraica y el surgimiento de la teoría de esquemas por parte de Alexandre Grothendieck y otros de sus colegas en los años 1960s, se empezó a buscar una generalización de esta colección de propiedades universales del grupo fundamental que funcionara para clasificar los cubrimientos que surgen en esta nueva teoría. La idea inicial de Grothendieck, plasmada en su Seminario de Geometría Algebraica [SGA₁], fue construir un objeto clasificador de los cubrimientos de Galois de un esquema X . La teoría de Grothendieck de hecho fue realizada en un concepto más amplio: el de las categorías de Galois, sin embargo presentamos acá un caso especial de su tratamiento, que nos funciona como una motivación más concreta para nuestro proyecto.

Un *cubrimiento étale* de un esquema X es un morfismo finito, étale (suave) y fielmente plano $f : Y \rightarrow X$. Si se considera un punto geométrico $x \in X$, el límite inverso de la familia $\{Y_i\}_{i \in I}$ formada por dichos cubrimientos, es decir

$$\hat{X} := \varprojlim Y_i,$$

es llamado el *cubrimiento universal* de X , y Grothendieck demostró que dicho objeto se puede construir. Por su definición como un límite proyectivo de cubrimientos, éste cumple una propiedad universal similar a la del cubrimiento universal en topología, siempre existe un morfismo $\hat{f}_i : \hat{X} \rightarrow Y_i$ de $\hat{X}$ a cualquier cubrimiento étale de X que hace el siguiente diagrama conmutar,

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & & \\ & \searrow \hat{f}_i & \\ & & Y_i \\ & & \downarrow f_i \\ & & X. \end{array}$$

El límite inverso de los grupos de automorfismos de los cubrimientos étale de X , es decir

$$\pi_1^{\text{ét}}(X, x) := \varprojlim \text{Aut}_X(Y_i),$$

es el objeto construido por Grothendieck, llamado el grupo fundamental étale de X . La construcción de Grothendieck se enfoca sólo en los cubrimientos suaves de X , sin embargo él mismo propuso que quizá sería posible crear un objeto con un mayor rango de clasificación.

En 1976 Madhav Nori construyó un objeto de esa naturaleza. La idea de Nori fue considerar el análogo, en la categoría de esquemas sobre un cuerpo fijo k , de un G -recubrimiento, en este caso es lo que se conoce como un G -torsor.

En la generalización natural de la teoría de G -cubrimientos, el análogo del concepto de grupo es lo que se conoce como un *esquema en grupos*. Un S -esquema X , dado por un morfismo $X \xrightarrow{g} S$, es un *esquema en grupos* si para todo S -esquema Y , los conjuntos $X(R) := \text{Hom}_S(X, Y)$ [Morfismos de S -esquemas] tienen una estructura de grupo que además es funtorial, es decir que si $h: Y \rightarrow T$ es un morfismo de S -esquemas entonces el morfismo inducido $h^*: X(T) \rightarrow X(Y)$ es un homomorfismo de grupos. Particularmente en nuestro tratamiento trabajaremos con los esquemas afines en grupos, es decir esquemas en grupos de la forma $G = \text{Spec}(A)$, donde A es un anillo.

El análogo del concepto de G -cubrimiento en topología es el concepto de G -torsor. Si X es un esquema sobre un esquema S , $X \rightarrow S$, y G es un esquema afín en grupos sobre S , entonces un G -torsor sobre X es un morfismo de esquemas fielmente plano $f: Y \rightarrow X$ con un morfismo (acción) $\sigma: G \times Y \rightarrow Y$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times Y & \xrightarrow{\sigma} & Y \\ \downarrow p_2 & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

es cartesiano, entre otras hipótesis.

Nori estudió el caso de cómo definir un esquema en grupo fundamental para $X \rightarrow \text{Spec}(k)$ un k -esquema, con k cuerpo y con $x_0 \in \text{Hom}_k(\text{Spec}(k), X)$ un punto k -racional en X . Su estrategia fue considerar la categoría $\mathcal{C}$ cuyos objetos son tripletes (Q, G, y_0) donde Q es un G -torsor sobre X , con G un k -esquema en grupos afín finito (es decir, $G = \text{Spec}(A)$, donde A es una k -álgebra finita), y $y_0 \in \text{Hom}_k(\text{Spec}(k), Q)$, tal que $f \circ y_0 = x_0$, donde $f: Q \rightarrow X$. La categoría $\mathcal{C}'$ está formada por los objetos (Q, G, y_0) , como en $\mathcal{C}$, sin embargo se admite que G sea profinito (no sólo finito).

Un *esquema fundamental en grupos* para (X, x_0) es un objeto de $\mathcal{C}'$, denotado $(\tilde{Q}, \pi^N(X, x_0), \tilde{x}_0)$, tal que para todo (Q, G, y_0) en $\mathcal{C}$ existe un único morfismo de $(\tilde{Q}, \pi^N(X, x_0), \tilde{x}_0)$ en (Q, G, y_0) . Notamos enseguida que esto emula la caracterización de la cubierta universal de un espacio topológico. Observamos también, que a diferencia del

grupo fundamental étale, este objeto no es un grupo en el sentido clásico de la palabra, sino un *objeto grupo* en la categoría de esquemas.

En [Nori76], M. Nori demostró el siguiente resultado sobre la existencia del esquema fundamental en grupos.

Teorema 0.2. *Si X es un esquema reducido¹ y conexo, entonces X tiene un esquema fundamental en grupos.*

Logró construir dicho objeto mediante el uso de la teoría de categorías tannakianas sobre cuerpos. Esta teoría es bastante técnica, y uno de sus principales resultados es un hecho conocido como *Dualidad Tannakiana*, en el que se estipula que toda categoría tannakiana sobre un cuerpo k se asocia naturalmente a un esquema afín en grupos profinito (es decir que es límite proyectivo de esquemas afines en grupos finitos). Su propuesta de categoría tannakiana fue la de los haces esencialmente finitos sobre X . Nori demostró que el esquema en grupos asociado a la categoría tannakiana que propuso, funciona como esquema fundamental en grupos para la categoría $\mathcal{C}$. Con estos resultados se pudo conseguir un esquema fundamental en grupos que clasifica los torsos sobre X , usualmente este objeto es denotado por $\pi_1^N(X, x)$.

En el artículo [AEG15], M. Antei, M. Emsalem y C. Gabarri lograron la construcción de un esquema fundamental en grupos para cuando X es un S -esquema, para S un esquema de Dedekind, y en particular, para cuando $S = \text{Spec}(R)$, donde R es un anillo de valuación discreta. Denotamos este esquema en grupos con la notación usual $\pi_1(X, x)$. Cuando R es anillo de valuación discreta, entonces $S = \text{Spec}(R) = \{\eta = (0), s = (\pi)\}$, donde η es el punto genérico y s es el punto especial de S y π es un uniformizante de R . Al tomar pullbacks sobre dichos puntos se obtienen esquemas sobre cuerpos: la fibra genérica X_η , que es un K -esquema, y la fibra especial X_s , que es un k -esquema, donde K es el cuerpo de fracciones de R y k es el cuerpo residual $k = R/(\pi)$ de R .

Como X_η y X_s son esquemas sobre cuerpos, y hemos visto que la teoría de Nori da la existencia del esquema en grupo fundamental para esquemas sobre cuerpos, tiene sentido preguntarse si la construcción de [AEG15] se relaciona con la construcción de Nori mediante el proceso de tomar pullbacks, es decir, si el pullback de $\pi_1(X, x)$ sobre su fibra genérica es isomorfo a $\pi_1^N(X_\eta, x_\eta)$, y similarmente sobre la fibra especial.

Una pregunta similar fue formulada por Grothendieck cuando desarrolló su teoría del grupo fundamental étale y de hecho representa la motivación para el trabajo en el nuevo

¹Un esquema reducido es un esquema X que tiene una cubierta por abiertos afines $\{U_i = \text{Spec}(A_i)\}$ donde cada A_i es un anillo reducido, es decir sin elementos nilpotentes no triviales.

contexto del esquema en grupo fundamental. Ésta inquietud fue contestada satisfactoriamente por Grothendieck en términos de fibras geométricas. La notación $G^{(p')}$ donde G es un grupo profinito (que es límite proyectivo de grupos finitos) denota el mayor cociente de G con orden primo relativo a p , y corresponde al límite proyectivo de aquellos cocientes de G con orden primo relativo a p . En [Szo9] se puede encontrar el siguiente resultado debido a Grothendieck.

Teorema 0.3. *Sea R un anillo de valuación discreta completo con un cuerpo residual k algebraicamente cerrado. Ponemos $S := \text{Spec}(R)$. Además sea $f: X \mapsto S$ un morfismo de esquemas propio y suave, denote por η y s los puntos genérico y especial de S respectivamente. Denotamos X_s y $X_{\bar{\eta}}$ la fibra especial y la fibra genérica geométrica de X respectivamente, es decir el pullback sobre la clausura algebraica Ω de $K = \text{Frac}(R)$ de la fibra genérica de X y fijamos un punto geométrico $\bar{x}: \text{Spec}(\Omega) \rightarrow X_{\bar{\eta}}$. Entonces existe un morfismo natural*

$$\varphi: \pi^{\text{ét}}(X_{\bar{\eta}}, \bar{x}) \rightarrow \pi^{\text{ét}}(X, \bar{x})$$

que es sobreyectivo y:

- ★ Si $\text{char}(k) = 0$ entonces φ es un isomorfismo;
- ★ Si $\text{char}(k) = p > 0$ entonces el morfismo natural inducido sobre los cocientes relativos

$$\varphi^{(p')}: \pi^{\text{ét}}(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})^{(p')} \rightarrow \pi^{\text{ét}}(X, \bar{x})^{(p')}$$

es un isomorfismo.

Este teorema representa la relación entre el grupo fundamental de X y el de su fibra genérica geométrica $X_{\bar{\eta}}$. El objeto $\pi^{\text{ét}}(X, x)^{(p')}$ se llama la parte prima a p del grupo fundamental étale de X en x .

En el contexto del esquema fundamental en grupos surge la necesidad de probar un resultado similar. El problema de relacionar la fibra genérica del esquema fundamental en grupos con su pullback sigue sin una contestación definitiva y representa una oportunidad de investigación en ésta área. Además es un problema que se encuentra en concordancia con el espíritu de las investigaciones de Grothendieck, que es estudiar el comportamiento del grupo fundamental bajo cambios de base.

Cuando se piensa en el problema de comparar el esquema fundamental en grupos de X $\pi_1(X, x)$ y el de su fibra genérica $\pi_1^N(X_{\eta}, x_{\eta})$ se observa que ambos son objetos muy distintos: el primero es un esquema sobre $S = \text{Spec}(R)$ y el segundo un esquema sobre

$\mathrm{Spec}(K)$. El resultado natural y deseado en este caso sobre la fibra genérica es que exista un isomorfismo al considerar el pullback de $\pi_1(X, x)$, es decir un isomorfismo de K -esquemas

$$\pi_1^N(X_\eta, x_\eta) \simeq \pi_1(X, x) \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(K).$$

Sin embargo, a pesar de que se puede construir en algunos casos importantes (X un esquema abeliano, por ejemplo), se ignora aún si dicho isomorfismo existe en general.

No obstante, en aras del teorema 0.3, podemos enfocar nuestra atención en el objeto $\pi_1(X, x)^{(p')}$ (y similarmente en $\pi_1^N(X_\eta, x_\eta)^{(p')}$). Para un esquema X (sobre R o K) el esquema $\pi_1(X, x)^{(p')}$ será llamado la parte prima a p del esquema fundamental en grupos de X .

La teoría que hemos discutido, especialmente el teorema 0.3, nos inclina hacia la construcción de un isomorfismo

$$\pi_1^N(X_\eta, x_\eta)^{(p')} \rightarrow \pi_1(X, x)_\eta^{(p')},$$

donde denotamos $\pi_1(X, x)_\eta$ por el pullback

$$\pi_1(X, x) \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(K).$$

Esta conexión entre esquemas fundamentales y sus partes primas a p es la que proponemos como objetivo principal de esta tesis.

El desarrollo de este documento se encuentra dividido de la siguiente manera.

En el primer capítulo presentaremos los elementos básicos necesarios para el desarrollo de nuestro proyecto. Estudiaremos temas fundamentales como la teoría de haces y esquemas, propiedades iniciales de esquemas, productos fibrados de esquemas, haces de módulos sobre esquemas, haces quasi-coherentes, imágenes inversas y directas de haces y un estudio de los fibrados vectoriales sobre un esquema. También brindamos algunas definiciones y propiedades básicas en la teoría de categorías, conceptos como núcleos e imágenes de morfismos, categorías aditivas y abelianas y equivalencias de categorías.

En el segundo capítulo examinaremos la teoría de los esquemas en grupos. Iniciaremos con la definición formal de un esquema en grupos en una categoría de esquemas relativos, aunque el caso de esquemas afines en grupos es el que estudiaremos con más detalle. Será importante acá la exposición de la teoría de coálgebras sobre un anillo, comódulos y representaciones de un esquema afín en grupos.

En el tercer capítulo vamos a estudiar la teoría de categorías tannakianas sobre un cuerpo y retículos tannakianos sobre un anillo de Dedekind. En ambos casos presentaremos los

resultados de dualidad tannakiana correspondientes, que relacionan estas categorías con la categoría de representaciones de un esquema afín en grupos.

En el cuarto capítulo nos proponemos presentar la teoría del esquema fundamental en grupos. Iniciaremos, a modo de motivación, con una exposición de la teoría del grupo fundamental étale de A. Grothendieck, y haremos énfasis en el morfismo de especialización obtenido por Grothendieck para este objeto. Seguidamente examinaremos las construcciones del esquema fundamental en grupos. Primero estudiaremos la construcción tannakiana de M. Nori para esquemas sobre un cuerpo y seguidamente analizaremos la construcción proyectiva del esquema fundamental en grupos debida a M. Antei, M. Emsalem y C. Gasbarri, así como sus principales propiedades.

En el quinto capítulo se encuentra la demostración de nuestro resultado sobre la parte prima a p del esquema fundamental en grupos para un esquema X de tipo finito sobre un anillo de valuación discreta completo R . Durante este capítulo y en otros lugares de este documento haremos énfasis en la importancia de tratar el problema de la extensión de cubrimientos de esquemas que estén definidos sobre sus fibras genéricas. Veremos que el asunto se basa fuertemente en el problema de extensión de cubrimientos y argumentaremos por qué esto implica el resultado que nos proponemos obtener.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Elementos básicos de teoría de categorías

Definición 1.1. Una categoría $\mathcal{C}$ consiste de lo siguiente:

- (a) Una colección ¹ de objetos $\text{Obj}(\mathcal{C})$.
- (b) Para cada par de objetos X, Y en $\text{Obj}(\mathcal{C})$, un conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Los elementos de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ usualmente se denotan como flechas $f: X \rightarrow Y$, y son llamados morfismos de X en Y .
- (c) Para cualesquiera tres objetos en X, Y, Z en $\mathcal{C}$, una composición

$$\begin{aligned}\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto gf,\end{aligned}$$

y un morfismo identidad $1_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ para todo objeto X en $\mathcal{C}$, tal que $g1_X = g$ y $1_Y f = f$ para todo $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ y $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, donde Y es un objeto cualquiera de $\mathcal{C}$. A veces la composición gf se escribirá $g \circ f$, abusando de la conocida notación para funciones.

Observación. El producto de dos categorías $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ es la categoría $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ cuyos objetos son pares (X_1, X_2) donde $X_i \in \text{Obj}(\mathcal{C}_i)$ para $i = 1, 2$, y los morfismos son pares (ϕ_1, ϕ_2) de morfismos en las categorías $\mathcal{C}_i$. Una subcategoría de una categoría $\mathcal{C}$ es una categoría $\mathcal{D}$ que consiste de algunos objetos de $\mathcal{C}$ y algunos morfismos de $\mathcal{C}$. Decimos que $\mathcal{D}$ es una subcategoría plena de $\mathcal{C}$ si $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ para cualquier par de objetos $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{D}) \subset \text{Obj}(\mathcal{C})$.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría, denotamos $\mathcal{C}^{op}$ a la categoría opuesta de $\mathcal{C}$, que es la categoría cuyos objetos son los mismos de $\mathcal{C}$ y sus morfismos están dados por $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ para $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C}^{op}) = \text{Obj}(\mathcal{C})$.

¹Podríamos hablar de un conjunto de objetos, sin embargo esto podría generar problemas dentro de la teoría de conjuntos, más generalmente se considera una *clase* de objetos. Una categoría en la que la clase de objetos es un conjunto se llama una categoría pequeña.

El concepto de funtor nos presenta una manera de relacionar dos categorías, en la que se preserve la estructura de composición de morfismos.

Definición 1.2. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías. Un funtor (covariante) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ asigna a cada objeto X de $\mathcal{C}$ un objeto $F(X)$ de $\mathcal{D}$ y a cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ en $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ un morfismo $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ en $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ tal que

$$\star F(1_X) = 1_{F(X)} \text{ para todo objeto } X \text{ de } \mathcal{C}.$$

$$\star \text{ Si } f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \text{ y } g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \text{ se cumple que}$$

$$F(gf) = F(g)F(f)$$

$$\text{en } \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Z))$$

Un funtor contravariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un funtor covariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{op}$.

Note que para cada par de objetos $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ el funtor F brinda una aplicación de conjuntos de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ en $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$, a la que llamaremos $F_{X,Y}$.

Definición 1.3. Considere un funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

- (a) El funtor F es fiel si para todo $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, la aplicación $F_{X,Y}$ es inyectiva.
- (b) El funtor F es pleno si para todo $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, la aplicación $F_{X,Y}$ es sobreyectiva.
- (c) El funtor F es plenamente fiel si para todo $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, la aplicación $F_{X,Y}$ es biyectiva.

Definición 1.4. Si F, G son dos funtores con de la categoría $\mathcal{C}_1$ en la categoría $\mathcal{C}_2$, un morfismo de funtores (o transformación natural) Φ entre F y G es una colección de morfismos $\Phi_X : F(X) \rightarrow G(X)$ para cada objeto $X \in \text{Obj}(\mathcal{C}_1)$, tales que para todo morfismo $\phi : X \rightarrow Y$ en $\mathcal{C}_1$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\Phi_X} & G(X) \\ F(\phi) \downarrow & & \downarrow G(\phi) \\ F(Y) & \xrightarrow{\Phi_Y} & G(Y) \end{array}$$

es conmutativo. El morfismo Φ es un isomorfismo si cada Φ_X es un isomorfismo. En ese caso escribimos $F \simeq G$. El conjunto de morfismos entre dos funtores se denota como $\text{Nat}(F, G)$, el conjunto de isomorfismos como $\text{Iso}(F, G)$, también escribimos

$$\text{End}(F) := \text{Nat}(F, F)$$

$$\text{Aut}(F) := \text{Iso}(F, F)$$

para un funtor F .

Definición 1.5. Dos categorías $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ son equivalentes si existen dos funtores $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ y $G : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$ tales que $F \circ G \simeq \text{id}_{\mathcal{C}_2}$ y $G \circ F \simeq \text{id}_{\mathcal{C}_1}$. Las categorías son isomorfas si podemos asegurar igualdad en los anteriores isomorfismos.

Hay una forma más concreta de establecer una equivalencia de categorías.

Definición 1.6. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías. Un funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es esencialmente sobreyectivo si para todo objeto $W \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ existe un objeto $V \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ tal que $W \simeq F(V)$, es decir hay dos morfismos $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(V), W)$ y $g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, F(V))$ tales que $gf = 1_{F(V)}$ y $fg = 1_W$.

Proposición 1.7. [Szog, Lemma 1.4.9] Dos categorías $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ son equivalentes si y sólo si existe un funtor $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ que es plenamente fiel y esencialmente sobreyectivo.

Demostración. Suponga que $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son equivalentes, es decir existen funtores $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ y $G : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$ e isomorfismos de funtores $\Phi : F \circ G \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}_2}$, $\Psi : G \circ F \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}_1}$. Es inmediato que el funtor F es esencialmente sobreyectivo: dado $Y \in \text{Obj}(\mathcal{C}_2)$, éste es isomorfo a $F(G(Y))$ mediante Φ . Ahora, para cualesquiera dos objetos $X, Y \in \mathcal{C}_1$ considere la sucesión de aplicaciones

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(X), F(Y)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(G(F(X)), G(F(Y))) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X, Y)$$

dadas por $F_{XY}, G_{F(X)F(Y)}$ para las primeras dos flechas y la tercera inducida por el isomorfismo Ψ . La composición de estas tres aplicaciones es la identidad, lo que implica que F_{XY} es una biyección, por lo que F es plenamente fiel. Ahora, asuma que existe un funtor $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ que es plenamente fiel y esencialmente sobreyectivo. Para cada objeto $V \in \text{Obj}(\mathcal{C}_2)$ existe un isomorfismo $i_V : F(A_V) \rightarrow V$ para algún $A_V \in \text{Obj}(\mathcal{C}_1)$. Considere el funtor $G : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$ que envía a V en A_V y a un morfismo $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(V, W)$ en el morfismo $G(\phi) := F_{A_V A_W}^{-1}(i_W^{-1} \circ \phi \circ i_V)$. Usando el hecho que F es plenamente fiel se puede demostrar que esto nos da la equivalencia de categorías deseada. Omitiremos los detalles de esta verificación. $\square$

Damos ahora una breve discusión de los funtores representables sobre las categorías de conjuntos. Denotaremos por **Conjuntos**, a la categoría cuyos objetos son los conjuntos y sus morfismos son las funciones entre conjuntos.

Definición 1.8. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$. Definimos el funtor covariante $F = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ de $\mathcal{C}$ en la categoría **Conjuntos**, dado en objetos por

$$F(A) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$$

y en morfismos $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, por

$$F(\phi) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B)$$

$$F(\phi)(\psi) = \phi \circ \psi.$$

Decimos en este caso que X representa al funtor F . Un funtor covariante $G : \mathcal{C} \rightarrow \text{Conjuntos}$ es representable si $G \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ para algún $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.

Es claro que un morfismo en $\mathcal{C}$, $\phi : Y \rightarrow X$, induce un morfismo $\Phi : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -)$ mediante la composición con ϕ . El lema de Yoneda dice que todo morfismo entre funtores representables es de esa forma, más adelante estudiaremos una prueba de un resultado similar a este, por el momento sólo lo enunciaremos.

Lema 1.9 (Lema de Yoneda). *Si $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \text{Conjuntos}$ son dos funtores representados por los objetos X, Y respectivamente, entonces todo morfismo de funtores $\Phi : F \rightarrow G$ viene inducido por un morfismo $\phi : Y \rightarrow X$*

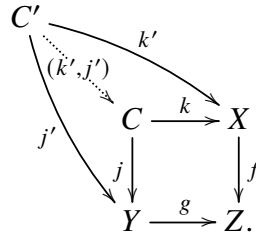
En las categorías se pueden construir varios tipos de objetos que cumplen con propiedades universales específicas. El producto fibrado será uno que utilizaremos frecuentemente.

Definición 1.10. Si X, Y, Z son tres objetos de una categoría $\mathcal{C}$, y $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, entonces el producto fibrado de X y Y sobre Z es un triplete (C, k, j) , si existe, donde C es un objeto de $\mathcal{C}$ y $k \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, X)$, $j \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y)$ son dos morfismos tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{k} & X \\ j \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array} \quad (1.1)$$

es conmutativo y además se cumple la siguiente propiedad universal: si (C', k', j') es otro triplete de la misma naturaleza, tal que $f \circ k' = g \circ j'$, entonces existe un único morfismo

$(k', j') : C' \rightarrow C$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:



Cuando se cumple esta propiedad universal decimos que el diagrama anterior es cartesiano. El objeto C se escribe como $X \times_Z Y$. El morfismo (k', j') a veces se denota como $k' \times_X j'$, o simplemente $k' \times j'$.

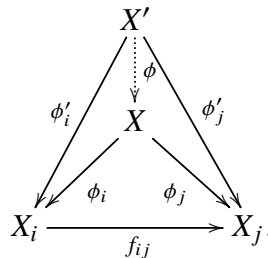
Observación. Cuando tenemos un morfismo $f : Y \rightarrow X$, podemos construir a $Y \times_X Y$ usando $k = j = f$ en la definición. Denotamos Δ al morfismo $(\text{id}_Y, \text{id}_Y) : Y \rightarrow Y \times_X Y$, y se le llama el morfismo *diagonal*.

Otra construcción categórica que nos interesa es la de los límites.

Definición 1.11. Sea I un conjunto ordenado por $\leq$ y dirigido: para todo $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \leq k, j \leq k$. Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos en $\mathcal{C}$ indexada por I y $\{f_{ij}\}$ una familia de morfismos $f_{ij} : X_i \rightarrow X_j$, para $i \geq j \in I$, tales que

- (a) $f_{ii} = 1_{X_i}$ para todo $i \in I$.
- (b) $f_{ik} = f_{jk} f_{ij}$ para todo $i, j, k \in I$ con $i \geq j \geq k$.

En este caso decimos que el sistema $\{X_i, f_{ij}\}$ es un sistema proyectivo (o inverso). El límite proyectivo (o límite inverso) del sistema (X_i, f_{ij}) es un objeto X de $\mathcal{C}$ y una colección de morfismos $\phi_i : X \rightarrow X_i$ para cada $i \in I$, que cumplen $f_{ij} \phi_i = \phi_j$ para todo $i, j \in I$, y además se cumple la siguiente propiedad universal: Si X' es un objeto de $\mathcal{C}$ y $\phi'_i : X' \rightarrow X_i$ es una colección de morfismos tal que $f_{ij} \phi'_i = \phi'_j$ para todo $i, j \in I$, entonces existe un único morfismo $\phi : X' \rightarrow X$ que cumple $\phi_i \phi = \phi'_i$ para todo $i \in I$. El siguiente diagrama ilustra esta situación.



Usualmente el objeto X , llamado el límite proyectivo del sistema $\{X_i\}_{i \in I}$ se denota como

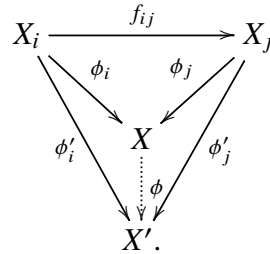
$$\varprojlim_{i \in I} X_i$$

También existe la noción dual de un límite inductivo o directo.

Definición 1.12. Sea I un conjunto ordenado por $\leq$ y dirigido: para todo $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \leq k, j \leq k$. Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos en $\mathcal{C}$ indexada por I y $\{f_{ij}\}$ una familia de morfismos $f_{ij} : X_i \rightarrow X_j$, para $i \leq j \in I$, tales que

- (a) $f_{ii} = 1_{X_i}$ para todo $i \in I$.
- (b) $f_{ik} = f_{jk} f_{ij}$ para todo $i, j, k \in I$ con $i \leq j \leq k$.

En este caso decimos que el sistema $\{X_i, f_{ij}\}$ es un sistema inductivo (o directo). El límite inductivo (o límite directo) del sistema (X_i, f_{ij}) es un objeto X de $\mathcal{C}$ y una colección de morfismos $\phi_i : X_i \rightarrow X$ para cada $i \in I$, que cumplen $\phi_j f_{ij} = \phi_i$ para todo $i \leq j \in I$, y además se cumple la siguiente propiedad universal: Si X' es un objeto de $\mathcal{C}$ y $\phi'_i : X_i \rightarrow X'$ es una colección de morfismos tal que $\phi'_j f_{ij} = \phi'_i$ para todo $i \leq j \in I$, entonces existe un único morfismo $\phi : X \rightarrow X'$ que cumple $\phi \phi_i = \phi'_i$ para todo $i \in I$. El siguiente diagrama ilustra esta situación.



Usualmente el objeto X , llamado el límite inductivo (o directo) del sistema $\{X_i\}_{i \in I}$ se denota como

$$\varinjlim_{i \in I} X_i$$

En muchas categorías los límites proyectivos y directos existen, para nosotros será útil el hecho que algunas de ellas son la categoría de grupos y la de anillos. La construcción del siguiente ejemplo se puede hacer en esas categorías.

Ejemplo 1.13 (Construcción del límite directo de una familia dirigida de grupos). Considere un sistema inductivo (A_i, f_{ij}) de grupos abelianos. Daremos una construcción para su

límite directo. Considere los pares (A_i, a_i) con $a_i \in A_i$, y sobre ellos defina la relación de equivalencia $(A_i, a_i) \sim (A_j, a_j)$ si y sólo si existe un $k \geq i, j$ tal que $f_{ik}(a_i) = f_{jk}(a_j)$ en A_k . Se puede verificar simplemente que esta es una relación de equivalencia. Sea G el conjunto cociente bajo esa relación de equivalencia, denotemos la clase del elemento (A_i, a_i) por $[A_i, a_i]$. En G se puede definir una operación

$$[A_i, a_i] + [A_j, a_j] := [A_k, f_{ik}(a_i) + f_{jk}(a_j)],$$

donde k es cualquier índice con $k \geq i, j$. Se puede comprobar que esta operación está bien definida y que hace de G un grupo abeliano. El cero de G es el elemento $[A_i, 0]$. Las aplicaciones $\phi_i : A_i \rightarrow G$ están dadas por $\phi_i(a) = [A_i, a]$ y cumplen $\phi_j f_{ij} = \phi_i$ para $i \leq j \in I$. Suponga que $B, \{\phi'_i\}_{i \in I}$ es otro grupo abeliano que cumple la misma propiedad, la aplicación $\phi : G \rightarrow B$ que nos da la propiedad universal deseada está dada por $\phi([A_i, a_i]) = \phi'_i(a_i)$. Se puede corroborar que está bien definida y que cumple la conmutatividad del diagrama deseado.

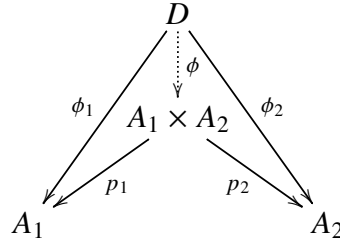
Observación. Usualmente se utilizan los términos sistema filtrado (respectivamente sistema cofiltrado) en relación a conjuntos sobre los cuales se puede construir un límite directo (respectivamente un límite inverso) para un funtor. Presentamos estas definiciones.

Una categoría $\mathcal{C}$ es filtrada si para cualesquiera dos objetos A, B en $\mathcal{C}$, existe un objeto C con flechas $A \rightarrow C, B \rightarrow C$ y además, para cualquier par de morfismos $u, v : A \rightarrow B$ existe un tercer objeto C y un morfismo $w : B \rightarrow C$ tal que $wu = vw$. De manera opuesta, una categoría $\mathcal{C}$ es cofiltrada si para cualesquiera dos objetos A, B de $\mathcal{C}$, existe un tercer objeto C , con flechas $C \rightarrow A, C \rightarrow B$, y para cualquier par de morfismos $u, v : A \rightarrow B$, existe un tercer objeto C y un morfismo $w : C \rightarrow A$ tal que $uw = vw$.

Las categorías que nos interesarán son aquellas en las que los conjuntos de morfismos tienen una estructura algebraica adicional. Ahora presentamos algunas definiciones y resultados que necesitaremos sobre categorías aditivas y abelianas.

Definición 1.14. Dados dos objetos A_1, A_2 de una categoría $\mathcal{C}$, un producto en $\mathcal{C}$ de A_1 y A_2 es un objeto $A_1 \times A_2 \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ junto con morfismos $p_i : A_1 \times A_2 \rightarrow A_i$ para $i = 1, 2$, tal que para todo par de morfismos $\phi_i : D \rightarrow A_i, i = 1, 2$ donde D es un objeto cualquiera de $\mathcal{C}$, existe un morfismo $\phi : D \rightarrow A_1 \times A_2$ tal que $\phi_i = p_i \phi$, para $i = 1, 2$. El siguiente

diagrama ilustra esta situación:

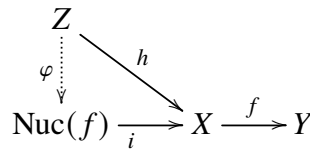


El morfismo ϕ se denota usualmente como (ϕ_1, ϕ_2) .

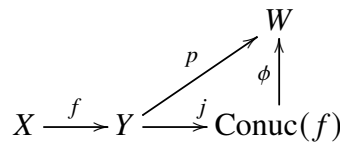
Definición 1.15. Una categoría aditiva es una categoría $\mathcal{C}$ en la que todo par de objetos tiene un producto en $\mathcal{C}$ y además cada conjunto de morfismos $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ tiene una estructura de grupo abeliano en la que la composición $(\phi, \psi) \mapsto \phi\psi$ es $\mathbb{Z}$ -bilineal. Si además cada $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ es un k -módulo, para k un anillo conmutativo con identidad, decimos entonces que la categoría $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva k -lineal.

Note que en una categoría aditiva $\mathcal{C}$ todo $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ tiene un morfismo 0_{AB} que denotaremos simplemente como 0 .

Definición 1.16. Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva y $f: X \rightarrow Y$ un morfismo entre dos objetos de $\mathcal{C}$, el núcleo de f es un par $(\text{Nuc}(f), i)$, donde $\text{Nuc}(f) \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e $i: \text{Nuc}(f) \rightarrow X$, tales que $f \circ i = 0$ y para todo par (Z, h) con $h: Z \rightarrow X$ tal que $f \circ h = 0$ se cumple que existe un único morfismo $\varphi: Z \rightarrow \text{Nuc}(f)$ tal que $i \circ \varphi = h$. El siguiente diagrama ilustra esta situación:



Por su parte el conúcleo de f es un par $(\text{Conuc}(f), j)$, donde $\text{Conuc}(f) \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ y $j: Y \rightarrow \text{Conuc}(f)$, tales que $j \circ f = 0$ y para todo par (W, p) con $p: Y \rightarrow W$ tal que $p \circ f = 0$ se cumple que existe un único morfismo $\phi: \text{Conuc}(f) \rightarrow W$ tal que $\phi \circ j = p$. El siguiente diagrama ilustra esta situación:



La imagen $\text{im}(f)$ de un morfismo $f: X \rightarrow Y$ se define como el núcleo de la aplicación $j: B \rightarrow \text{Conuc}(f)$, y la coimagen, $\text{coim}(f)$, como el conúcleo de la aplicación $i: \text{Nuc}(f) \rightarrow X$. Debido a las propiedades de núcleos y conúcleos es posible encontrar una aplicación natural $\text{coim}(\phi) \rightarrow \text{im}(\phi)$.

La imagen del morfismo f tiene asociado un triplete $(\text{im}(f), h, g)$ donde $\text{im} \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, $h: X \rightarrow \text{im}(f)$, $g: \text{im}(f) \rightarrow Y$, tales que $f = g \circ h$ y si (Z, h', g') es otro triplete con $f = g' \circ h'$ entonces existe un único morfismo $m: \text{im}(f) \rightarrow Z$ que hace el siguiente diagrama conmutar

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\ & \searrow h \quad \nearrow g & \\ & \text{im}(f) & \\ & \vdots & \\ & Z & \end{array}$$

La sucesión

$$X \xrightarrow{\quad f \quad} \text{im}(f) \xrightarrow{\quad g \quad} Y$$

se llama la factorización imagen del morfismo $f: X \rightarrow Y$. Decimos que funtor $\omega: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre dos categorías con imágenes, preserva imágenes si preserva la factorización imagen de todo morfismo f en $\mathcal{C}$.

Una categoría abeliana es una categoría aditiva en la que todo morfismo ϕ tiene un núcleo y un conúcleo (y por tanto una imagen y una coimagen) y la aplicación natural $\text{coim}(\phi) \rightarrow \text{im}(\phi)$ es un isomorfismo.

Los productos en una categoría abeliana usualmente los denotaremos con la notación de suma directa $\oplus$.

Definición 1.17. Un morfismo $\phi: A \rightarrow B$ en una categoría abeliana es un monomorfismo si el morfismo $\text{Nuc}(\phi) \rightarrow A$ es el morfismo 0, y es un epimorfismo si el morfismo $B \rightarrow \text{Conuc}(\phi)$ es el morfismo 0. Decimos que A es un subobjeto de B si hay un monomorfismo $A \rightarrow B$ y que B es un cociente de A si hay un epimorfismo $A \rightarrow B$.

Un ejemplo sencillo de una categoría abeliana es la categoría de módulos sobre cierto anillo. Veremos ahora, que bajo ciertas hipótesis, una categoría abeliana es equivalente a una categoría de este tipo.

Definición 1.18. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Si $\phi: A \rightarrow B$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, denotamos $B/A: \text{Conuc}(\phi)$. Un objeto A de $\mathcal{C}$ se dice ser simple si para todo sub-objeto

$f: A' \rightarrow A$, el monomorfismo f es o el morfismo 0 o es un isomorfismo. Denotamos $A \subset B$ cuando hay un monomorfismo $A \rightarrow B$.

Una serie de composición para un objeto A de $\mathcal{C}$, es una sucesión de monomorfismos

$$\dots \subset F^2 \subset F^1 \subset F^0 = A$$

donde cada cociente F^i/F^{i+1} es un objeto simple. A tiene longitud finita si tiene una serie de composición finita.

Un funtor entre dos categorías es exacto, si preserva núcleos e imágenes, o equivalentemente, preserva sucesiones exactas cortas.

Un objeto P de $\mathcal{C}$ se llama proyectivo si para todo epimorfismo $f: A \rightarrow B$ y toda aplicación $p: P \rightarrow B$ existe $p': P \rightarrow A$ tal que $f \circ p' = p$. Esto es equivalente a decir que el funtor $\text{Hom}(P, -)$ es exacto.

Un objeto G de $\mathcal{C}$ se llama un generador si el funtor $\text{Hom}(G, -)$ es fiel.

Más adelante necesitaremos la siguiente proposición sobre categorías abelianas.

Proposición 1.19. [Sz09, Proposition 6.4.2] *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana tal que todo objeto de $\mathcal{A}$ tiene longitud finita. Asuma que $\mathcal{A}$ tiene un generador proyectivo P . Entonces el funtor $\text{Hom}(P, -)$ induce una equivalencia de $\mathcal{A}$ con la categoría $\text{Modf}_{\text{End}(P)}$ de $\text{End}(P)$ -módulos finitamente generados.*

Para la prueba utilizaremos el siguiente lema.

Lema 1.20. [Sz09, Lemma 6.4.3] *Bajo las hipótesis de la proposición 1.19, para todo objeto $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ existe un epimorfismo $P^{\oplus r} \rightarrow A$ para algún entero positivo r .*

Demostración. Empiece con un morfismo $\phi_1: P \rightarrow A$, si es un epimorfismo terminamos, si no entonces hay un morfismo no cero $P \rightarrow A/\text{im}(\phi_1)$, que se levanta a un morfismo $\phi_2: P \rightarrow A$,

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \phi_2 \swarrow & \downarrow & \\ A & \longrightarrow & A/\text{im}(\phi_1). \end{array}$$

Con ello podemos construir $(\phi_1, \phi_2): P \oplus P \rightarrow A$. y se cumple

$$\text{im}(\phi_1) \subset \text{im}(\phi_1, \phi_2) \subset A.$$

Continuando con este proceso, como A tiene longitud finita, después de una cantidad finita llegamos a un r tal que $\text{im}(\phi_1, \dots, \phi_r) = A$, es decir $(\phi_1, \dots, \phi_r) : P^{\oplus r} \rightarrow A$ es un epimorfismo. $\square$

Prueba de la proposición 1.19. Para cada objeto A de $\mathcal{A}$, el conjunto $\text{Hom}(P, A)$ es un $\text{End}(P)$ -módulo derecho, la acción se obtiene mediante la composición por la derecha de morfismos, además para cada objeto A , $\text{Hom}(P, A)$ es un $\text{End}(P)$ -módulo finitamente generado, en efecto: tome un epimorfismo $P^{\oplus r} \rightarrow A$, que existe por la proposición anterior, notando el isomorfismo $\text{End}(P)^{\oplus r} \rightarrow \text{Hom}(P, P^{\oplus r})$ uno obtiene una aplicación sobreyectiva $\text{End}(P)^{\oplus r} \rightarrow \text{Hom}(P, A)$. Ahora hay que mostrar que este funtor es una equivalencia de categorías.

Como P es un generador, debemos mostrar solamente que el funtor $\text{Hom}(P, -)$ es pleno (por definición de generador, es fiel). Sea $\phi : \text{Hom}(P, A) \rightarrow \text{Hom}(P, B)$ un morfismo de conjuntos, hay que probar que ϕ viene de un morfismo $A \rightarrow B$. Considere epimorfismos $\Sigma : P^{\oplus r} \rightarrow A, \Pi : P^{\oplus s} \rightarrow B$ dados por el lema anterior. Aplicando el funtor $\text{Hom}(P, -)$ obtenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \text{End}(P)^{\oplus r} & \xrightarrow{\tilde{\Sigma}} & \text{Hom}(P, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \phi & & \\ \text{End}(P)^{\oplus r} & \xrightarrow{\tilde{\Pi}} & \text{Hom}(P, B) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Como $\text{End}(P)^{\oplus r}$ es un $\text{End}(P)$ -módulo libre, y por lo tanto proyectivo, la teoría de módulos proyectivos nos dice que existe un morfismo $\tilde{\psi} : \text{End}(P)^{\oplus r} \rightarrow \text{End}(P)^{\oplus s}$ que hace conmutar al diagrama anterior. Como ψ es una aplicación lineal de $\text{End}(P)$ -módulos libres, entonces $\tilde{\psi}$ está dada por multiplicación por una matriz $s \times r$ de elementos de $\text{End}(P)$. Esta matriz define un morfismo $\psi : P^{\oplus r} \rightarrow P^{\oplus s}$ que induce el morfismo $\tilde{\psi}$. Ahora, por contrucción, el morfismo

$$\tilde{\Psi} : \text{End}(P)^{\oplus r} \xrightarrow{\tilde{\psi}} \text{End}(P)^{\oplus s} \xrightarrow{\tilde{\Pi}} \text{Hom}(P, B)$$

anula el núcleo del morfismo $\tilde{\Sigma} : \text{End}(P)^{\oplus r} \rightarrow \text{Hom}(P, A)$, por lo que, al ser P proyectivo y el funtor $\text{Hom}(P, -)$ exacto, entonces la aplicación compuesta

$$\Psi : P^{\oplus r} \xrightarrow{\psi} P^{\oplus s} \xrightarrow{\Pi} B$$

anula el núcleo de $\Sigma : P^{\oplus r} \rightarrow A$. Como Σ es un epimorfismo tenemos que por la propiedad universal de conúcleo de Σ , existe una $f : A \rightarrow B$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & \nearrow \Psi = \Pi \circ \psi & \uparrow f \\ \text{Nuc}(\Sigma) & \xrightarrow{i} P^{\oplus r} & \xrightarrow{\Sigma} A \end{array}$$

Veamos que la aplicación inducida $\tilde{f} : \text{Hom}(P, A) \rightarrow \text{Hom}(P, B)$ es igual a ϕ . Si $g \in \text{Hom}(P, A)$, como $\tilde{\Sigma}$ es sobreyectivo, existe un $h \in \text{End}(P)^{\oplus r}$ tal que $g = \tilde{\Sigma}(h)$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} \phi(g) &= \phi(\tilde{\Sigma}(h)) \\ &= \tilde{\Pi}(\tilde{\psi}(h)) \\ &= \tilde{\Psi}(h) \\ &= \widetilde{f \circ \Sigma}(h) \\ &= \tilde{f}(\tilde{\Sigma}(h)) \\ &= \tilde{f}(g). \end{aligned}$$

Finalmente, para la sobreyectividad esencial, sea M un $\text{End}(P)$ -módulo derecho finitamente generado. Es posible escribir M como el conúcleo de una aplicación $\alpha : \text{End}(P)^{\oplus r} \rightarrow \text{End}(P)^{\oplus s}$ de $\text{End}(P)$ -módulos libres [esto es posible para módulos finitamente generados]. Hemos probado que α viene de una aplicación $P^{\oplus r} \rightarrow P^{\oplus s}$. Si C denota el conúcleo de esta última aplicación, usando que el funtor $\text{Hom}(P, -)$ es exacto, entonces $\text{Hom}(P, C) \simeq M$. $\square$

También necesitaremos más adelante un resultado que nos describe las subcategorías de una categoría que cumple las condiciones de la proposición 1.19.

Proposición 1.21. [Szo9, Proposition 6.4.4] *Asuma las hipótesis de la proposición 1.19. Sea $\mathcal{B}$ una subcategoría plena de $\mathcal{A}$, que es cerrada bajo subobjetos, cocientes y sumas directas finitas. Existe un ideal $I \subset \text{End}(P)$ únicamente determinado, y una equivalencia de categorías entre $\mathcal{B}$ y $\text{Modf}_{\text{End}(P)/I}$. Además esa equivalencia de categorías identifica el funtor inclusión $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ con el funtor $\text{Modf}_{\text{End}(P)/I} \rightarrow \text{Modf}_{\text{End}(P)}$ que envía un $\text{End}(P)/I$ -módulo a su estructura de $\text{End}(P)$ -módulo obtenida mediante la aplicación cociente $\pi : \text{End}(P) \rightarrow \text{End}(P)/I$.*

Para demostrar esto usaremos el siguiente lema.

Lema 1.22. [Szo9, Lemma 6.4.5] Bajo las hipótesis de 1.21, para cada objeto A de $\mathcal{A}$ existe un cociente maximal de A , $q_{\mathcal{B}}(A) \in \text{Obj}(\mathcal{B})$. Más precisamente, para cada objeto A de $\mathcal{A}$ hay un epimorfismo $\rho_A : A \rightarrow q_{\mathcal{B}}(A)$, donde $q_{\mathcal{B}}(A)$ es un objeto de $\mathcal{B}$ y para todo epimorfismo $\rho : A \rightarrow B$ con B un objeto de $\mathcal{B}$ existe un $\lambda : q_{\mathcal{B}}(A) \rightarrow B$ tal que $\rho = \lambda \circ \rho_A$.

Demostración. Sea $K_{\mathcal{B}}(A)$ la intersección de los núcleos de todos los epimorfismos $A \rightarrow B$ con $B \in \text{Obj}(\mathcal{B})$, y sea $q_{\mathcal{B}}(A) := A/K_{\mathcal{B}}(A)$. Por construcción $q_{\mathcal{B}}(A)$ satisface la propiedad universal deseada. Lo que resta verificar es que $q_{\mathcal{B}}(A)$ es un objeto de $\mathcal{B}$. Como A tiene longitud finita, entonces existen finitos objetos $B_1, \dots, B_n$ en $\mathcal{B}$ junto con epimorfismos $\rho_i : A \rightarrow B_i$ tales que $K_{\mathcal{B}}(A) = \bigcap \text{Nuc}(\phi_j)$. Note que hay aplicaciones $\psi_i : A/\bigcap \text{Nuc}(\phi_j) \rightarrow A/\text{Nuc}(\phi_i)$, por lo que debido a la propiedad del producto en la categoría $\mathcal{A}$, hay un monomorfismo $A/\bigcap \text{Nuc}(\phi_j) \rightarrow \bigoplus A/\text{Nuc}(\phi_j)$, y cada uno de estos objetos está en $\mathcal{B}$, por hipótesis, así que $q_{\mathcal{B}}(A)$ es un objeto de $\mathcal{B}$. $\square$

Prueba de la proposición 1.21. Dado un generador proyectivo P de $\mathcal{A}$, entonces se puede comprobar que el objeto $q_{\mathcal{B}}(P)$ es un generador proyectivo de $\mathcal{B}$. Por la proposición 1.19, el funtor $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(q_{\mathcal{B}}(P), -)$ induce una equivalencia de categorías entre $\mathcal{B}$ y $\text{Mod}_{\text{End}(q_{\mathcal{B}}(P))}$. Hay una aplicación natural $q : \text{End}(P) \rightarrow \text{End}(q_{\mathcal{B}}(P))$, dada por composición con el morfismo $\rho_P : P \rightarrow q_{\mathcal{B}}(P)$, usando la proyectividad de P y que ρ_P es un epimorfismo, podemos ver que esta aplicación es sobreyectiva, por lo que $\text{End}(q_{\mathcal{B}}(P)) \simeq \text{End}(P)/I$, donde $I = \text{Nuc}(q)$, y ese isomorfismo satisface las propiedades requeridas por la proposición. $\square$

1.2. Haces y Esquemas

Primero presentaremos las definiciones de haces sobre un espacio topológico. Nos basamos en el segundo capítulo de [Har77]. X será un espacio topológico.

Definición 1.23. Un prehaz $\mathcal{F}$ de grupos abelianos (aunque puede ser de anillos también) sobre X consiste de lo siguiente,

- (a) para cada abierto $U \subseteq X$, un grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$.
- (b) para cada inclusión $V \subseteq U$ de conjuntos abiertos de X , un morfismo de grupos abelianos $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$,

sujeto a las condiciones

- a. $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$.

- b. ρ_{UU} es la identidad en $\mathcal{F}(U)$ para todo U abierto de X .
- c. Si $W \subseteq V \subseteq U$ son conjuntos abiertos de X entonces $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

Escribimos $\rho_{UV}(s) = s|_V$, si $s \in \mathcal{F}(U)$ y $V \subseteq U$. Las funciones ρ_{UV} se llaman las aplicaciones de restricción del prehaz $\mathcal{F}$. Los elementos de $\mathcal{F}(U)$, para un abierto U se llaman las secciones del prehaz $\mathcal{F}$ en U .

Definición 1.24. Un prehaz $\mathcal{F}$ en un espacio X es un haz si satisface las siguientes condiciones complementarias:

- d. Si U es un abierto, si $\{V_i\}$ es una cubierta por abiertos de U y $s \in \mathcal{F}(U)$ es un elemento tal que $s|_{V_j} = 0$ para todo j entonces $s = 0$.
- f. Si U es un abierto y $\{V_j\}$ es una cubierta por abiertos de U , y tenemos elementos $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ tales que $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$ para todo i, j entonces existe un $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{V_i} = s_i$ para todo i .

Definición 1.25. Si $\mathcal{F}$ es un prehaz en X y $x \in X$, definimos el tallo de $\mathcal{F}$ en x como el límite proyectivo de todos los $\mathcal{F}(U)$ sobre los abiertos U que contienen a x , ordenados por la inclusión y dirigidos por las aplicaciones restricción. Denotamos a este objeto como $\mathcal{F}_x$.

Observación. Debido a la construcción algebraica usual del límite directo, un elemento de $\mathcal{F}_P$ está representado por un par (U, s) donde $U \subseteq X$ es un abierto y $s \in \mathcal{F}(U)$ es una sección de $\mathcal{F}$ en U . Dos pares $(U, s), (V, t)$ definen el mismo elemento de $\mathcal{F}_P$ si y sólo si existe un abierto $W \subset U \cap V$ tal que $s|_W = t|_W$.

Definición 1.26. Un morfismo de prehaces $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ se define como una colección de morfismos $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ para cada abierto $U \subseteq X$, tales que siempre que hay una inclusión de abiertos $V \subseteq U$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{UV} \downarrow & & \downarrow \rho'_{UV} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

es conmutativo, donde ρ, ρ' son las aplicaciones de restricción de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ respectivamente.

Proposición 1.27. [Har77, Proposition 1.1, pág. 63] Sea $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de haces en un espacio topológico X . Entonces φ es un isomorfismo si y sólo si la aplicación inducida en los tallos $\varphi_P : \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{G}_P$ es un isomorfismo para todo $P \in X$.

Si $\mathcal{F}$ es un prehaz, entonces es posible demostrar la existencia de un haz $\mathcal{F}^+$, llamado el haz asociado a $\mathcal{F}$, tal que todo morfismo de $\mathcal{F}$ en un haz $\mathcal{G}$ se factoriza a través de $\mathcal{F}^+$, esto es lo que dice la siguiente proposición, de manera más específica.

Proposición 1.28. [Har77, Proposition 1.2, pág. 64] Dado un prehaz $\mathcal{F}$, existe un haz $\mathcal{F}^+$ y un morfismo $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$, con la propiedad que para todo haz $\mathcal{G}$ y todo morfismo $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, existe un único morfismo $\psi : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ tal que $\varphi = \psi \circ \theta$.

Definición 1.29. Sea $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de haces. Definimos los prehaces núcleo de φ , denotado por $\text{Nuc}(\varphi)$, imagen de φ , denotado por $\text{im}(\varphi)$ y coimagen de φ denotado como $\text{coim}(\varphi)$, como los prehaces dados por

$$\begin{aligned}\text{Nuc}(\varphi)(U) &= \text{Nuc}(\varphi(U)) \\ \text{im}(\varphi)(U) &= \text{im}(\varphi(U)) \\ \text{coim}(\varphi)(U) &= \text{coim}(\varphi(U))\end{aligned}$$

respectivamente, en cada abierto $U \subseteq X$.

El prehaz núcleo es un haz, mientras que los prehaces imagen y coimagen no lo son necesariamente. Denotaremos el haz imagen de φ como el haz asociado al prehaz imagen de φ y se denotará $\text{im}(\varphi)$ también, lo mismo para la coimagen.

Definición 1.30. Un subhaz de un haz $\mathcal{F}$ es un haz $\mathcal{F}'$ tal que cada $\mathcal{F}'(U)$ es un subgrupo de $\mathcal{F}(U)$ y las aplicaciones de restricción de $\mathcal{F}'$ son las inducidas por las de $\mathcal{F}$. Se sigue que en cualquier punto $P \in X$, $\mathcal{F}'_P$ es un subgrupo de $\mathcal{F}_P$.

Si $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de haces, el haz cociente $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ es el haz asociado al prehaz

$$U \mapsto \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U).$$

Un morfismo $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ de haces, es inyectivo si $\text{Nuc}(\varphi) = 0$ [el haz cero] y es inyectivo si $\text{im}(\varphi) = \mathcal{G}$.

Una sucesión de haces

$$\dots \longrightarrow \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{F}^i \xrightarrow{\varphi^i} \mathcal{F}^{i+1} \longrightarrow \dots$$

se llama exacta, si para cada i , $\text{Nuc}(\varphi^i) = \text{im}(\varphi^{i-1})$. En particular una sucesión corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{J} \longrightarrow 0$$

es exacta si φ es inyectivo, ψ es sobreyectivo y $\text{Nuc}(\psi) = \text{im}(\varphi)$.

Definición 1.31. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua entre espacios topológicos. Para $\mathcal{F}$ un haz sobre X , se define el haz imagen directa $f_*\mathcal{F}$ sobre Y , como $f_*\mathcal{F}(V) := \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ para $V \subseteq Y$ un abierto. Para un haz $\mathcal{G}$ en Y definimos el haz imagen inversa $f^{-1}\mathcal{G}$ como el haz asociado al prehaz sobre X dado en un abierto $U \subseteq X$ por

$$f^{-1}\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{\substack{V \subseteq Y \text{ abierto} \\ f(U) \subseteq V}} \mathcal{G}(V).$$

Ahora estudiaremos la noción de esquema. Primero presentamos la teoría del espectro afín de un anillo.

Definición 1.32. Sea A un anillo con identidad. El espectro afín de A es el conjunto

$$\text{Spec}(A) := \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \subseteq A \text{ es ideal primo de } A\}.$$

Para $\mathfrak{a}$ un ideal de A se define

$$V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) : \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\},$$

Lema 1.33. [Har77, Lemma 2.1, pág. 70]

- a. Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ son dos ideales de A , entonces $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.
- b. Si $\{\mathfrak{a}_i\}$ es cualquier conjunto de ideales de A , entonces $V(\bigoplus_i \mathfrak{a}_i) = \bigcap V(\mathfrak{a}_i)$.
- c. Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ son dos ideales, entonces $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$ si y sólo si $\sqrt{\mathfrak{b}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Observación. Debido al lema anterior en el conjunto $\text{Spec}(A)$ se puede definir una topología, en la que los conjuntos cerrados son los de la forma $V(\mathfrak{a})$ para $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal. Note que $V(A) = \emptyset$ y $V((0)) = \text{Spec}(A)$. Esta se llama la topología de Zariski sobre $\text{Spec}(A)$.

Es posible construir un haz de anillos, $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$, sobre $\text{Spec}(A)$. Si se denota por $A_{\mathfrak{p}}$ a la localización del anillo A en el ideal $\mathfrak{p}$, para cada $U \subseteq \text{Spec}(A)$, abierto, se define $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U)$ como el anillo formado por las funciones s de U en la unión disjunta de los $A_{\mathfrak{p}}$ para $\mathfrak{p} \in U$, tales que $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$ para todo $\mathfrak{p} \in U$ y tales que para todo $\mathfrak{p} \in U$ existen un vecindario V abierto que contiene a $\mathfrak{p}$ y elementos $a, f \in A$ con $f \notin \mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V$ que cumplen que $s(\mathfrak{q}) = a/f$ en $A_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V$, en otras palabras son funciones que localmente son el cociente de elementos de A .

El espectro de un anillo A , consiste del espacio topológico $\text{Spec}(A)$ y el haz de anillos $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ definido anteriormente.

Definición 1.34. Para $f \in A$ denotamos $D(f)$ como el complemento del cerrado $V(\langle f \rangle)$ en $\text{Spec}(A)$, comprende todos los ideales primos de A que no contienen al elemento f .

Estudiamos ahora algunas propiedades del haz $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$, que de ahora en adelante será llamado $\mathcal{O}_A$.

Proposición 1.35. [Har77, Proposition 2.2, pág. 71] Sea A un anillo, y $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_A)$ su espectro.

- a. Para todo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, el tallo $(\mathcal{O}_A)_{\mathfrak{p}}$ del haz $\mathcal{O}_A$ es isomorfo al anillo local $A_{\mathfrak{p}}$.
- b. Para cualquier elemento $f \in A$, el anillo $\mathcal{O}_A(D(f))$ es isomorfo a la localización A_f .
- c. En particular $\mathcal{O}_A(\text{Spec}(A)) \simeq A$.

Definición 1.36. Un espacio anillado es un par $(X, \mathcal{O}_X)$ que consiste de un espacio topológico X y un haz de anillos $\mathcal{O}_X$ en X . Un morfismo de espacios anillados de $(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ es un par $(f, f^\#)$ donde $f: X \rightarrow Y$ es una función continua y $f^\#: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ es un morfismo de haces sobre Y . El espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio anillado localmente si para todo punto $P \in X$ el tallo $(\mathcal{O}_X)_P = \mathcal{O}_{X,P}$ es anillo local.

Queremos definir la noción de morfismo entre espacios localmente anillados. Note que el morfismo de haces $f^\#: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ induce un homomorfismo de anillos $\mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ para todo abierto $V \subseteq Y$. A medida que V abarca todos los vecindarios abiertos de $f(P)$, tenemos que $f^{-1}(V)$ abarca un subconjunto de los vecindarios abiertos de P , tomando límites directos tenemos una aplicación

$$\mathcal{O}_{Y,f(P)} = \varinjlim_V \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \varinjlim_V \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$$

y el último conjunto está contenido en el tallo $\mathcal{O}_{X,P}$. De esta manera obtenemos una aplicación $\hat{f}_P: \mathcal{O}_{Y,f(P)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,P}$. Si dicha aplicación lleva el ideal maximal del anillo local $\mathcal{O}_{Y,f(P)}$ en el ideal maximal del anillo local $\mathcal{O}_{X,P}$ entonces decimos que $(f, f^\#)$ es un morfismo de espacios localmente anillados.

Proposición 1.37. [Har77, Proposition 2.3, pág. 73]

- a. Si A es un anillo, entonces $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_A)$ es un espacio localmente anillado.

- b. Si $\varphi : A \rightarrow B$ es un homomorfismo de anillos, entonces φ induce un morfismo natural de espacios localmente anillados

$$(f, f^\#) : (\text{Spec}(B), \mathcal{O}_B) \rightarrow (\text{Spec}(A), \mathcal{O}_A)$$

- c. Si A, B son anillos, entonces todo morfismo de espacios localmente anillados de $(\text{Spec}(B), \mathcal{O}_B)$ en $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_A)$ está inducido por un homomorfismo de anillos $\varphi : A \rightarrow B$, como en b.

Definición 1.38. Un esquema afín es un espacio localmente anillado de la forma $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_A)$. Un esquema es un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ en el que todo punto tiene un vecindario abierto tal que el espacio topológico U , junto con el haz $\mathcal{O}_X|_U$ es isomorfo, como espacio localmente anillado, a un esquema afín. Llamamos X al espacio asociado al esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ y a $\mathcal{O}_X$ se le llamará el haz estructural del esquema $(X, \mathcal{O}_X)$. Un morfismo de esquemas es un morfismo de espacios localmente anillados.

1.3. Propiedades de Esquemas

Teniendo en mente la definición de esquemas, presentamos ahora algunas definiciones y propiedades que utilizaremos más adelante. Por ejemplo, en la categoría de esquemas podemos contruir el producto fibrado de dos morfismos.

Teorema 1.39. *En la categoría de esquemas el producto fibrado siempre existe.*

La demostración de este resultado se puede consultar en [Har77, Theorem 3.3, pág. 87]. En particular, es importante recalcar que en el caso afín cuando $X = \text{Spec}(A)$, $Y = \text{Spec}(B)$ y $S = \text{Spec}(k)$ (o sea, A, B son dos k -álgebras) entonces el producto fibrado es $X \times_S Y = \text{Spec}(A \otimes_k B)$, ya que el producto tensorial cumple la propiedad dual del producto fibrado.

Observación. Suponga que $f : X \rightarrow S, g : Y \rightarrow S$ son dos morfismos de esquemas. El morfismo $f_Y : X \times_S Y \rightarrow Y$ obtenido del diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{f_Y} & Y \\ \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

usualmente se llama el morfismo obtenido a partir de f mediante cambio de base (o extensión de escalares en algunos casos).

Lema 1.40. Sea X un espacio localmente anillado y sea $x \in X$. Sea $k(x)$ el cuerpo $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$, donde $\mathfrak{m}_x$ es el ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$. Si K es un cuerpo entonces hay una correspondencia

$$\{\text{Morfismos de esquemas } f : \text{Spec}(K) \rightarrow X\} \leftrightarrow \{\text{Inclusiones } k(x) \rightarrow K \text{ para } x \in X\}$$

En particular hay un morfismo natural $\text{Spec}(k(x)) \rightarrow X$.

Demostración. Considere la proyección canónica $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow k(x)$, ésta induce un morfismo de esquemas $\text{Spec}(k(x)) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$. Ahora, si $\text{Spec}(A) = U \subseteq X$ es un abierto afín de X que contiene a x , hay un morfismo $A = \Gamma(X, U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ [el morfismo de la definición de límite directo], lo que induce un morfismo de esquemas

$$\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \longrightarrow \text{Spec}(A) = U \hookrightarrow X$$

Por tanto obtenemos un morfismo $\text{Spec}(k(x)) \rightarrow X$ que de hecho no depende del abierto U seleccionado. Ahora, si hay una inclusión $k(x) \rightarrow K$ entonces tenemos un morfismo de esquemas $\text{Spec}(K) \rightarrow \text{Spec}(k(x))$, y al componer con el morfismo obtenido anteriormente tenemos un morfismo $\text{Spec}(K) \rightarrow X$.

Recíprocamente, si tenemos un morfismo $s : \text{Spec}(K) \rightarrow X$, obtenemos el morfismo de esquemas $s^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow s_*\mathcal{O}_K$, donde $s^\#(U) : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_K(s^{-1}(U))$. Si $U = X$ entonces tenemos un morfismo

$$s^\#(X) : \mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_K(s^{-1}(X)) = \mathcal{O}_K(\text{Spec}(K)) = K$$

Además, para todo $x \in X$ hay un morfismo

$$s_x^\# : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{K,s^{-1}(x)}$$

Pero $\mathcal{O}_{K,(0)} = K$, entonces si $x \in X$ es tal que $s(0) = x$ tendremos que

$$s_x^\# : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow K$$

lo cual es un morfismo local, por lo que podemos pasar al cociente por $\mathfrak{m}_x$ y obtener un morfismo

$$s_x^\# : \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \rightarrow K$$

es decir un morfismo

$$k(x) \rightarrow K$$

que debe ser inyectivo, puesto que $k(x)$ es un cuerpo. Estos dos procesos son inversos uno del otro, con lo que se concluye con la correspondencia deseada. $\square$

Definición 1.41. Sea $f: Y \rightarrow X$ un morfismo de esquemas y sea $x \in X$. La fibra del morfismo f sobre el punto x es el esquema

$$Y_x := Y \times_X \text{Spec}(k(x))$$

Topológicamente la fibra del morfismo f sobre el punto x se puede identificar con el espacio $f^{-1}(\{x\})$. La construcción del producto fibrado le da una estructura de esquema.

Ejemplo 1.42. Quizá el ejemplo central de este proyecto es el siguiente. Si R es un anillo de valuación discreta entonces $X = \text{Spec}(R) = \{\eta, s\}$ donde η es el ideal (0) y s es el ideal maximal de R . El punto η es abierto y denso en X , llamado punto genérico de X , el punto s por su parte es cerrado en X y es llamado el punto especial. Si $f: X \rightarrow \text{Spec}(R)$ es un morfismo de esquemas, podemos construir la fibra del morfismo f sobre el punto genérico η , que llamaremos la fibra genérica, que es $X_\eta := X \times_{\text{Spec}(R)} \text{Spec}(k(\eta))$, que es un $k(\eta)$ -esquema. Pero note que $k(\eta) = K = \text{Frac}(R)$, pues por la proposición 1.35 $(\mathcal{O}_R)_\eta$ es isomorfo a la localización R_η , que es un anillo local cuyo cuerpo residual es isomorfo a K . Por esto tenemos un diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc} X_\eta & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(K) & \longrightarrow & R. \end{array}$$

Similarmente la fibra de f sobre s , llamada la fibra especial, $X_s := X \times_{\text{Spec}(R)} \text{Spec}(k(s))$. Usando la proposición 1.35 se puede demostrar que $k(s) = k = R/\langle \pi \rangle$, el cuerpo residual de R (π es algún uniformizante de R , generador de su único ideal maximal). Por lo tanto se tiene un diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc} X_s & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(k) & \longrightarrow & R. \end{array}$$

El caso de un anillo de valuación discreta es muy importante e históricamente ha sido un tema altamente apreciado en esta área. Topológicamente se puede demostrar que la fibra genérica X_η de un R -esquema X se puede considerar como un subesquema abierto y denso de X . Esto es un hecho importante, ya que nos indica que el estudio de ciertas propiedades sobre X se podría (tentativamente) reducir al estudio de ellas sobre la fibra genérica y aprovechar de alguna forma su densidad en X . En los capítulos 4 y 5 discutiremos mucho este fenómeno.

La siguiente proposición da una forma de caracterizar los morfismos entre esquemas afines y es una reformulación de la proposición 1.37. La categoría $\mathfrak{Sch}_{\text{Spec}(k)}$ es la que tiene por objetos a los esquemas sobre $\text{Spec}(k)$ y por morfismos aquellos morfismos entre esquemas que son compatibles con la estructura de $\text{Spec}(k)$ -esquemas. La categoría $\mathfrak{Sch}$ es más general y tiene por objetos a los esquemas.

Proposición 1.43. *Si A, B son dos anillos, entonces hay una biyección*

$$\text{Hom}_{\mathfrak{Sch}}(\text{Spec}(A), \text{Spec}(B)) \leftrightarrow \text{Hom}_{\text{anillos}}(B, A)$$

Si A, B son dos álgebras sobre un anillo k entonces hay una biyección

$$\text{Hom}_{\mathfrak{Sch}_{\text{Spec}(k)}}(\text{Spec}(A), \text{Spec}(B)) \leftrightarrow \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(B, A).$$

A continuación presentaremos una lista de propiedades de esquemas y morfismos de esquemas con las que trabajaremos en adelante. Primero presentamos algunas cualidades específicas de la topología de esquemas. Usualmente un esquema se denota sólo por X , sin hacer referencia a su haz estructural.

Definición 1.44. (i) Un esquema X es Noetheriano si puede ser cubierto por un número finito de abiertos afines $\text{Spec}(A_i)$, donde cada A_i es un anillo Noetheriano.

(ii) Un esquema X es reducido si para todo U abierto de X el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ no tiene elementos nilpotentes no triviales (es decir $\mathcal{O}_X(U)$ es un anillo reducido).

(iii) Un esquema X es irreducible si su espacio topológico asociado es irreducible (es decir, no se puede escribir como la unión de dos partes cerradas y propias $X = X_1 \cup X_2$).

(iv) Un esquema X es integral si para todo U abierto de X el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ es un dominio entero.³

(v) Un esquema X es normal, si para todo punto $x \in X$, el anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$ es un dominio integralmente cerrado.

Definición 1.45. La dimensión de un esquema X es su dimensión como espacio topológico. La dimensión de un espacio topológico $\mathcal{X}$ es el supremo sobre los enteros n tales que existe una cadena

$$Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_n = X$$

²No necesariamente se requiere que sean dos partes cerradas disjuntas, esto sería la definición de conexidad.

³Un esquema es integral si y sólo si es reducido e irreducible, ver Proposición 3.1 de [Har77].

de subconjuntos cerrados irreducibles $Z_i \subset X$.

Definición 1.46. Sea $f: X \rightarrow Y$ un morfismo de esquemas.

- (i) f es una inmersión cerrada si f induce un homeomorfismo de X en un subespacio cerrado de Y y además el morfismo de haces $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ es sobreyectivo.
- (ii) f es finito si existe un cubrimiento de Y por abiertos afines $V_i = \text{Spec}(B_i)$ tal que $f^{-1}(V_i) = \text{Spec}(A_i)$ y cada A_i es una B_i -álgebra finita.
- (iii) f es de tipo finito si existe un cubrimiento de Y por abiertos afines $V_i = \text{Spec}(B_i)$ tal que $f^{-1}(V_i)$ puede ser cubierto por una cantidad finita de abiertos afines $U_{ij} = \text{Spec}(A_{ij})$ donde cada A_{ij} es una B_i -álgebra finitamente generada.
- (iv) f es plano si para todo $x \in X$, el morfismo inducido en tallos: $f_x^\# : \mathcal{O}_{f(x),Y} \rightarrow \mathcal{O}_{x,X}$ es un morfismo plano de anillos.
- (v) f es fielmente plano si es plano y sobreyectivo, o equivalentemente si cada morfismo inducido en tallos: $f_x^\# : \mathcal{O}_{f(x),Y} \rightarrow \mathcal{O}_{x,X}$ es un morfismo fielmente plano de anillos.
- (vi) f es separado si el morfismo diagonal $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$ es una inmersión cerrada.
- (vii) f es propio si es separado, de tipo finito y cumple que es cerrado (envía un cerrado en un cerrado) y además cumple que si $Y' \rightarrow Y$ es otro morfismo, el morfismo correspondiente obtenido al aplicar cambio de base $f' : X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ también es cerrado.
- (viii) f es afín si Y tiene una cubierta por abiertos afines $U_i = \text{Spec}(A_i)$ tal que para todo i el subesquema abierto $f^{-1}(U_i)$ es afín también.

Definición 1.47. Si X es un esquema sobre un cuerpo k , es decir, hay un morfismo $\phi : X \rightarrow \text{Spec}(k)$. Decimos que X es una curva si el morfismo ϕ es separado de tipo finito, X es integral y X tiene dimensión 1.

La siguiente proposición nos será útil más adelante. Se puede consultar en el Capítulo 2, sección 3 de [Har77], también se encuentra una demostración en [Liu06, Proposition 1.22, pág. 120].

Proposición 1.48. Sea X un esquema integral. Existe un esquema integral y normal $\tilde{X}$ y un morfismo $\tilde{X} \rightarrow X$, con la siguiente propiedad universal: para todo esquema integral

y normal Z y para todo morfismo dominante $f: Z \rightarrow X$ se cumple que f se factoriza a través de $\tilde{X}$. El esquema $\tilde{X}$ se llama la normalización de X .

Proposición 1.49. [Liu06, Proposition 1.4, pág. 80] Sea S un esquema, y X, Y dos S -esquemas. Entonces las siguientes son verdaderas

- (i) Hay isomorfismos de esquemas $X \times_S S \simeq X$, $X \times_S Y \simeq Y \times_S X$ y si Z es otro S -esquema $X \times_S (Y \times_S Z) \simeq (X \times_S Y) \times_S Z$.
- (ii) Si Z es un Y esquema (y por tanto un S -esquema también) entonces hay un isomorfismo de esquemas: $(X \times_S Y) \times_Y Z \simeq X \times_S Z$.

La invarianza de los morfismos fielmente planos bajo cambio de base será un resultado que utilizaremos implícitamente en este trabajo, por ello enunciamos dicha propiedad a continuación.

Lema 1.50. [Stack15, Lemma 28.24.6 y Lemma 10.38.7] Los morfismos (fielmente) planos son estables bajo cambio de base. Concretamente: Si $f: Y \rightarrow X$ es un morfismo (fielmente) plano, entonces si $Z \rightarrow X$ es un X -esquema, entonces $Y \times_X Z \rightarrow Z$ es (fielmente) plano.

1.4. Haces de Módulos y haces quasi-coherentes

Definición 1.51. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Un haz de $\mathcal{O}_X$ -módulos, o simplemente un $\mathcal{O}_X$ -módulo, es un haz $\mathcal{F}$ sobre X tal que para todo $U \subseteq X$ abierto, $\mathcal{F}(U)$ tiene una estructura de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo de manera que si $U \subseteq V$ entonces el morfismo restricción $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ es compatible con las estructuras de módulos dadas por el morfismo $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$. Un morfismo de haces de módulos $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de haces tal que para todo $U \subseteq X$ abierto, la aplicación $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ es un homomorfismo de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulos.

Definición 1.52. Un $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{F}$ es localmente libre si existe una cubrimiento de X por abiertos U , tal que $\mathcal{F}|_U$ es un $\mathcal{O}_X$ -módulo libre, es decir para cada $V \subseteq U$ abierto $\mathcal{F}(V)$ es un $\mathcal{O}_X(V)$ -módulo libre. Cuando X es conexo entonces el rango, que es el número de copias de $\mathcal{O}_X$ que requiere $\mathcal{F}$ localmente, está bien definido. En este caso el haz de módulos $\mathcal{F}$ se llama un fibrado vectorial sobre X ⁴. El conjunto de fibrados vectoriales sobre X se

⁴En realidad, los fibrados vectoriales tienen una definición histórica diferente, pero hay una identificación con los objetos que estamos describiendo, por esto es que utilizaremos esta definición.

denotará $\text{Vect}(X)$. El producto tensorial de dos $\mathcal{O}_X$ -módulos, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ es el haz asociado al prehaz

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U).$$

Un haz localmente libre de rango 1 se llama un haz invertible.

Lema 1.53. [GW10, Proposition 11.1, pág. 288] Si $f: X \rightarrow Y$ es un morfismo de espacios topológicos (una función continua) entonces para cualesquiera $\mathcal{F}$ haz en X y $\mathcal{G}$ haz en Y , hay una biyección de conjuntos ⁵

$$\text{Hom}_X(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \leftrightarrow \text{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

Definición 1.54. Si $f: Y \rightarrow X$ entonces hay un morfismo de haces $f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$, debido al lema anterior (Tomamos el morfismo $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ y consideramos su imagen bajo la correspondencia del lema anterior). Si $\mathcal{G}$ es un haz de $\mathcal{O}_Y$ -módulos entonces definimos el pullback del haz $\mathcal{G}$ mediante el morfismo f , $f^*\mathcal{G}$, como el haz de $\mathcal{O}_X$ -módulos dado por el producto tensorial

$$f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

Observación. Una propiedad que cumple esta aplicación es que $f^*\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_Y$, si $f: Y \rightarrow X$, y que $f^*(\mathcal{G}^{\oplus n}) \simeq (f^*\mathcal{G})^{\oplus n}$, para $\mathcal{G}$ un haz de $\mathcal{O}_X$ -módulos. Éstas propiedades básicas estarán presentes de manera constante en los cálculos de ésta tesis.

Los haces de $\mathcal{O}_X$ -módulos generalizan el concepto de un módulo sobre un anillo. En el caso de un esquema afín, se puede observar de una mejor manera la conexión, al crear un haz de módulos a partir de un módulo dado.

Definición 1.55. Sea A un anillo y M un A -módulo. Definimos el haz asociado a M sobre $\text{Spec}(A)$, denotado por $\widetilde{M}$, como sigue. Para cada ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq A$ sea $M_{\mathfrak{p}}$ la localización de M en $\mathfrak{p}$. Para un conjunto abierto $U \subseteq \text{Spec}(A)$ defina $\widetilde{M}(U)$ como el conjunto de funciones s de U en la unión disjunta de todos los $M_{\mathfrak{p}}$ para $\mathfrak{p} \in U$, tales que $s(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}}$ para todo $\mathfrak{p} \in U$ y además para todo $\mathfrak{p} \in U$ existe un vecindario $V \subseteq U$ y elementos $f, m \in A$, con $f \notin \mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in V$, tales que $s(\mathfrak{q}) = f/m$ en $M_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q} \in V$.

Un haz de $\mathcal{O}_X$ -módulos $\mathcal{F}$ se llama quasi-coherente si X puede ser cubierto por abiertos afines $U_i = \text{Spec}(A_i)$ tal que para todo i existe un A_i -módulo M_i con $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \widetilde{M_i}$. Decimos que $\mathcal{F}$ es coherente si además cada M_i puede tomarse como un A_i -módulo finitamente generado.

⁵En lenguaje de categorías esto dice que f^{-1} es un adjunta izquierda para f_* .

Proposición 1.56. [Har77, Proposition 5.4, pág. 113] Sea X un esquema. Entonces un $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{F}$ es quasi-coherente si y sólo si para todo abierto afín $U = \text{Spec}(A)$ de X , existe un A -módulo M tal que $\mathcal{F}|_U \simeq \widetilde{M}$. Si X es Noetheriano entonces $\mathcal{F}$ es coherente si y sólo si lo mismo es cierto, con la condición extra que M sea un A -módulo finitamente generado.

Observación. Sea $X = \text{Spec}(A)$ y $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ es un haz de $\mathcal{O}_X$ -módulos, donde M es un A -álgebra. Si $\varphi : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ es un morfismo de esquemas afines -y por tanto B es un A -álgebra. Entonces $\varphi^*\mathcal{F} \simeq \widetilde{M_B}$, donde $M_B := M \otimes_A B$.

La siguiente proposición nos será de ayuda en varias partes de este trabajo. Nos dice cómo recuperar un esquema a partir de un haz de $\mathcal{O}_X$ -álgebras.

Proposición 1.57. Sea X un esquema y $\mathcal{A}$ un haz quasi-coherente de $\mathcal{O}_X$ -álgebras (es decir, un haz de anillos que a la vez es un haz quasi-coherente de $\mathcal{O}_X$ -módulos). Entonces existe un (único) esquema Y con un morfismo $f : Y \rightarrow X$ tal que $f_*\mathcal{O}_Y \simeq \mathcal{A}$. El esquema Y se denota como $\text{Spec}(\mathcal{A})$.

Demostración. Este es el ejercicio II.5.17 de [Har77]. También una demostración se puede consultar en [Vak18, 17.1, pág. 447]. $\square$

Veamos un ejemplo de cómo se utiliza la propiedad anterior en la construcción de otros objetos.

Definición 1.58. Sea X un esquema integral y $\varphi : Y \rightarrow X$ un morfismo, sabemos que esto genera un morfismo de $\mathcal{O}_X$ -álgebras: $\mathcal{O}_X \rightarrow \varphi_*\mathcal{O}_Y$, por lo que en cada abierto $U \subset X$ hay un morfismo $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \varphi_*\mathcal{O}_Y(U)$, denotamos por $\mathcal{A}(U)$ a la clausura integral de $\mathcal{O}_X(U)$ en $\varphi_*\mathcal{O}_Y(U)$. Así se obtiene un haz de $\mathcal{O}_X$ -álgebras $\mathcal{A}$, cuyo espectro $\text{Spec}(\mathcal{A})$ (de acuerdo a proposición anterior) es lo que llamamos $\overline{Y}$, la normalización (relativa) de X en Y . Naturalmente hay una sucesión $Y \rightarrow \overline{Y} \rightarrow X$, que se deduce de los morfismos a nivel local dados por $\mathcal{O}_X(U) \subset \mathcal{A}(U) \subset \varphi_*\mathcal{O}_Y(U)$.

La normalización $\overline{\varphi} : \overline{Y} \rightarrow X$, de un morfismo $\varphi : Y \rightarrow X$, cumple la siguiente propiedad universal: si $\psi : Y' \rightarrow X$ es un morfismo normal tal que φ se factoriza a través

de ψ , entonces existe un único morfismo $\bar{Y} \rightarrow Y'$ que hace el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & & & & \\
 \downarrow \varphi & \searrow & & \searrow & \\
 & & Y' & \xleftarrow{\quad} & \bar{Y} \\
 & \swarrow \psi & & \swarrow \varphi| & \\
 X & & & &
 \end{array}$$

conmutar. Note que este es el análogo de la misma propiedad (contravariante) que posee la clausura integral en una extensión de anillos. Una demostración de esta propiedad, así como de la construcción de la normalización relativa se encuentra en [Stack15, Lemma 29.51.4].

Ahora enunciamos una propiedad importante de la normalización relativa, relacionada con sus cambios de base.

Proposición 1.59. [Stack15, Lemma 37.17.2] Sea

$$\begin{array}{ccc}
 Y_2 & \longrightarrow & Y_1 \\
 f_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\
 X_2 & \xrightarrow{\varphi} & X_1
 \end{array}$$

un cuadrado cartesiano de morfismos de esquemas, en el que φ es un morfismo suave. Sea $Y_i \rightarrow \bar{Y}_i \rightarrow X_i$, la normalización de X_i en Y_i para $i = 1, 2$. Entonces $\bar{Y}_2 = X_2 \times_{X_1} \bar{Y}_1$.

Definición 1.60. Si $\mathcal{F}, \mathcal{H}$ son dos haces de $\mathcal{O}_X$ -módulos sobre X , se define el haz $\mathcal{G} := \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ como

$$\mathcal{G}(U) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}_U, \mathcal{H}_U),$$

donde $\mathcal{F}_U := i_U^* \mathcal{F}$, para la inclusión $i_U : U \rightarrow X$, de un abierto $U \subseteq X$. El dual de un haz de $\mathcal{O}_X$ -módulos $\mathcal{F}$ se define como $\mathcal{F}^\vee := \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$. El dual de un haz de $\mathcal{O}_X$ -módulos cumple las siguientes propiedades, se pueden consultar en Capítulo 2, sección 5 de [Har77].

Proposición 1.61. Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema y $\mathcal{F}$ un haz de $\mathcal{O}_X$ -módulos que es localmente libre de rango finito.

a. $(\mathcal{F}^\vee)^\vee \simeq \mathcal{F}$.

b. Si $\mathcal{G}$ es un $\mathcal{O}_X$ -módulo cualquiera, entonces $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq \mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$.

c. Para cualesquiera $\mathcal{O}_X$ -módulos $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ se cumple que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mathcal{H}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H})).$$

d. $\mathcal{F}^\vee$ también es localmente libre de rango finito.

e. Si $f: X \rightarrow Y$ es un morfismo de esquemas, y $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ dos haces de $\mathcal{O}_Y$ -módulos, entonces existe un morfismo natural de haces de $\mathcal{O}_X$ -módulos

$$\alpha: f^*(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{F}, f^*\mathcal{G}).$$

Si f es plano, entonces α es un isomorfismo.

Las siguientes proposiciones nos serán de utilidad más adelante. Ambas tratan sobre propiedades de haces de módulos que se conservan bajo morfismos planos o fielmente planos.

Proposición 1.62 (Algunas propiedades de descenso plano). a. Si $f: X' \rightarrow X$ es un morfismo fielmente plano y quasi-compacto (un morfismo fpqc) y $\mathcal{F}$ es un haz de $\mathcal{O}_X$ -módulos quasi-coherente tal que $f^*\mathcal{F}$ es un haz de $\mathcal{O}_{X'}$ -módulos localmente libre, entonces $\mathcal{F}$ también es localmente libre.

b. Descenso plano de secciones globales: Sea $A \rightarrow B$ un morfismo de anillos plano, X un A -esquema, y X_B el cambio de base $X_B := X \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(B)$, entonces hay un isomorfismo natural $\mathcal{O}_X(X) \otimes_A B \simeq \mathcal{O}_{X_B}(X_B)$.

c. Un resultado un poco más general que el inciso b.: sea $f: X \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$ un morfismo de esquemas separado y quasi-compacto. Sea B una A -álgebra plana. Sea $X_B := X \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(B)$ y $\rho: X_B \rightarrow X$ el morfismo proyección. Entonces para todo haz quasi-coherente $\mathcal{F}$ sobre X hay un isomorfismo

$$\mathcal{F}(X) \otimes_A B \simeq \rho^*\mathcal{F}(X_B).$$

Demostración. Para a. en el Lemma 35.7.6 de [Stack15] se demuestra un caso más general. Para b. se puede consultar [Liu06, Proposition 1.24, pág. 85], y por último la demostración de c. se encuentra en [Liu06, Corollary 2.27, pág. 189]. $\square$

Proposición 1.63. [GW10, Proposition 12.6, pág. 323] ó [Liu06, Ejercicio 1.16, pág. 174]

Sea $f: X \rightarrow S$ un morfismo de esquemas y considere el cambio de base

$$\begin{array}{ccc} X_T & \xrightarrow{f_T} & T \\ p \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{f} & S. \end{array}$$

- (a) (Imagen directa conmuta con cambio de base plano) Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$ -módulo quasi-coherente, entonces

$$\pi^* f_* \mathcal{F} \simeq (f_T)_* p^* \mathcal{F}.$$

- (b) (Fórmula de Proyección) Si $\mathcal{G}$ es un haz localmente libre en S entonces

$$f_* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{G} \simeq f_* (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^* \mathcal{G}).$$

Capítulo 2

Esquemas afines en grupos

En una categoría cualquiera, hay poca información a priori sobre sus objetos y es poco usual que a éstos se les pueda otorgar una estructura algebraica determinada. Sin embargo se pueden definir objetos en una categoría que se comporten funcionalmente como un grupo, o que lleven consigo propiedades algebraicas similares a las de un grupo, y la manera de hacer esto es utilizando los morfismos de la categoría y sus composiciones. Estos objetos se llaman objetos en grupos para una categoría. Lograr definir el análogo de un grupo para una categoría dada es importante porque permite realizar construcciones de utilidad, como por ejemplo acciones de grupos (o su análogo en una categoría en general).

En este capítulo nos concentraremos en el desarrollo de esa teoría en la categoría de esquemas, es decir, presentaremos la teoría de esquemas en grupos. En particular el enfoque estará sobre los esquemas en grupos que son afines y sus múltiples propiedades algebraicas.

2.1. Esquemas en grupos

Si S es un esquema, la categoría de esquemas sobre S , es decir esquemas X con un morfismo $X \rightarrow S$, será denotada por $\mathfrak{Sch}_S$. Un morfismo de S -esquemas entre $X, Y \in \text{Obj}(\mathfrak{Sch}_S)$ es un morfismo de esquemas $f: X \rightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \downarrow \\ & & S, \end{array}$$

donde las flechas $X \rightarrow S$ y $Y \rightarrow S$ son las que hacen de X y Y dos S -esquemas. Si $X, R \in \text{Obj}(\mathfrak{Sch}_S)$ denotaremos por $X(R)$ al conjunto de morfismos de S -esquemas $f: R \rightarrow X$. Los esquemas en grupos nos permitirán establecer conceptos análogos al de acción de grupos sobre espacios topológicos. En realidad hay dos definiciones equivalentes de lo que es un esquema en grupos, presentamos ambas y luego discutiremos porqué se tratan de la misma definición.

Definición 2.1. Un objeto $X \xrightarrow{g} S$ en $\mathfrak{Sch}_S$ es un esquema en grupos sobre S , o sólo esquema en grupos, si existen morfismos de esquemas

$$\begin{aligned} m : X \times_S X &\rightarrow X & (\text{Multiplicación}), \\ i : X &\rightarrow X & (\text{Inversa}) \end{aligned}$$

y un elemento $e \in X(S)$, tales que

(i) (Identidad) El siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(id,e)} & X \times_S X \\ \downarrow (e,id) & \searrow \simeq & \downarrow m \\ X \times_S X & \xrightarrow{m} & X. \end{array}$$

(ii) (Inversa) Los diagramas

$$\begin{array}{ccc} X \times_S X & \xrightarrow{i \times id} & X \times_S X \\ \Delta \uparrow & & \downarrow m \\ X & \xrightarrow{e \circ g} & X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X \times_S X & \xrightarrow{id \times i} & X \times_S X \\ \Delta \uparrow & & \downarrow m \\ X & \xrightarrow{e \circ g} & X \end{array}$$

son conmutativos.

(iii) (Asociatividad) El diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \times_S X \times_S X & \xrightarrow{id \times m} & X \times_S X \\ \downarrow m \times id & & \downarrow m \\ X \times_S X & \xrightarrow{m} & X \end{array}$$

es conmutativo también.

Definición 2.2. Un objeto $X \xrightarrow{g} S$ en $\mathfrak{Sch}_S$ es un esquema en grupos si para todo $R \in \mathfrak{Sch}_S$, los conjuntos $X(R)$ tienen una estructura de grupo que es funtorial, es decir que si $h : R \rightarrow T$ es un morfismo de S -esquemas entonces el morfismo inducido $h^* : X(T) \rightarrow X(R)$ que envía un $f : T \rightarrow X$ en $f \circ h$, es un homomorfismo de grupos.

Note que la primera definición no es nada más que una presentación categórica de los axiomas de grupo. La idea es definir el concepto de grupo mediante morfismos. Para demostrar que estas proposiciones son equivalentes debemos considerar el siguiente resultado. En la sección que sigue se presentará la prueba de un teorema muy similar.

Lema 2.3 (Lema de Yoneda). *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Para $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ se define el funtor $h_A := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$. Entonces para $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ hay una biyección*

$$\text{Hom}_{\text{funtores}}(h_A, h_B) \leftrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B).$$

Note que este lema implica que si tenemos una serie de morfismos $g_C : h_A(C) \rightarrow h_B(C)$ para cada $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, que son functoriales en $\mathcal{C}$, entonces existe un único morfismo $g : A \rightarrow B$ en la categoría $\mathcal{C}$ tal que $g_C = g_* : h \mapsto g \circ h$.

Proposición 2.4. *Las definiciones 2.1 y 2.2 son equivalentes.*

Demostración. Sea $X \xrightarrow{g} S \in \mathfrak{Sch}_S$ que cumple la definición 2.1, probamos que cumple la definición 2.2. El morfismo $m : X \times_S X \rightarrow X$ genera una familia de morfismos $m_R : (X \times_S X)(R) \rightarrow X(R)$ mediante la precomposición: Si $h : R \rightarrow X \times_S X$ entonces $m_R := m_* : h \mapsto m \circ h$. Note que hay un isomorfismo entre $X(R) \times X(R)$ y $(X \times_S X)(R)$ ya que si $(f, g) \in X(R) \times X(R)$ entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow g & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & S \end{array}$$

es conmutativo puesto que f y g son morfismos de S -esquemas y por tanto podemos asignar el morfismo $(f, g) \in (X \times_S X)(R)$, la propiedad universal del producto fibrado nos dice que esta asignación es un isomorfismo. Por lo tanto $m_R : (X \times_S X)(R) \rightarrow X(R)$ nos genera una aplicación $m_R : X(R) \times X(R) \rightarrow X(R)$ (la denotaremos m_R también). El morfismo $i : X \rightarrow X$ da lugar al morfismo $i_R := i_* : X(R) \rightarrow X(R)$ y el elemento $e \in X(S)$ genera un elemento $\hat{e} \in X(R)$ dado por $e \circ j$, donde $j : R \rightarrow S$ es el morfismo que hace de R un S -esquema. Los diagramas anteriores hacen que éstas tres aplicaciones funcionen como multiplicación, inversa e identidad (respectivamente) en el conjunto $X(R)$, esto se puede verificar de manera sencilla. Además las estructuras de grupo obtenidas en este proceso son functoriales.

Ahora, sea $X \xrightarrow{g} S \in \mathfrak{Sch}_S$ que cumple la definición 2.2, probamos que cumple la definición 2.1. Tenemos entonces que cada $X(R)$ tiene estructura de grupo. Por tanto para

todo R tenemos una multiplicación $X(R) \times X(R) \rightarrow X(R)$. Entonces la multiplicación en los grupos $X(R)$ nos da una colección de morfismos $(X \times_S X)(R) \rightarrow X(R)$, los cuales deben ser inducidos por un morfismo $m : X \times_S X \rightarrow X$, por la observación que hicimos al teorema de inmersión de Yoneda. Similarmente obtenemos morfismos $i : X \rightarrow X$ (dado por la inversa en cada grupo) y $e : S \rightarrow X$ (dado por la identidad en cada grupo). La correspondencia del Lema de Yoneda junto con los axiomas de grupo nos dan los diagramas conmutativos que deben cumplir los morfismos dados en la definición 2.1. $\square$

2.2. Esquemas afines en grupos

Los resultados de esta sección (y las dos siguientes) son tomados de [Wa79]. Aquí k será un anillo conmutativo con identidad. Los esquemas afines en grupos surgen del estudio del problema de encontrar soluciones a un sistema de ecuaciones polinomiales. Si I es un ideal del anillo de polinomios $k[x_1, \dots, x_n]$, podemos preguntarnos por el conjunto de soluciones

$$F(R) := \{a \in \mathbb{A}^n(R) : f(a) = 0 \in R \forall f \in I\}.$$

La siguiente proposición nos revela cómo estudiar esas soluciones desde otro punto de vista.

Proposición 2.5. *Para cada k -álgebra R , existe un isomorfismo de k -álgebras entre $F(R)$ y $\text{Hom}_k(A, R)$, donde $A = k[x_1, \dots, x_n]/I$. Además este isomorfismo es una correspondencia natural, es decir si $\varphi : R \rightarrow T$ es un morfismo de k -álgebras, entonces el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} F(R) & \xrightarrow{\varphi^{\times n}} & F(T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_k(A, R) & \xrightarrow{\varphi_*} & \text{Hom}_k(A, T) \end{array}$$

es conmutativo.

Demostración. Sea $r = (r_1, \dots, r_n) \in F(R)$, y considere el morfismo $\phi : k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow R$ que envía cada x_i en r_i . Entonces el ideal I es enviado a cero mediante tal morfismo y por tanto obtenemos un morfismo $\psi(r) : A \rightarrow R$. Note que el morfismo $\varphi \circ \psi(r) : A \rightarrow T$ envía x_i en $\varphi(r_i)$, que es precisamente el morfismo que se obtiene con el punto $\varphi^{\times n}(r)$, por lo que tenemos la conmutatividad del diagrama. Recíprocamente si $f : A \rightarrow R$ entonces el punto $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ pertenece a $F(R)$. Es sencillo verificar que ésta correspondencia es biyectiva. $\square$

El funtor $F_A : k\text{-Alg} \rightarrow \text{Conjuntos}$ dado por $F_A(R) := \text{Hom}_k(A, R)$ es un funtor representable (por el k -álgebra A). Un funtor de esa forma y que cae en la categoría de grupos (es decir, a cada $\text{Hom}_k(A, R)$ se le da una estructura funtorial de grupo) se llama un esquema afín en grupos. Si G es un esquema afín en grupos representado por A , decimos $A = k[G]$.

Lema 2.6. *Un esquema afín en grupos $F_A : k\text{-Alg} \rightarrow \text{Grupos}$ es un esquema en grupos en la categoría de esquemas afines sobre k .*

Demostración. Para esto sólo debemos recordar que hay una biyección

$$\text{Hom}_k(A, R) \leftrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{Sch}_{\text{Spec}(k)}}(\text{Spec}(R), \text{Spec}(A))$$

para A, R dos k -álgebras. Por lo que F se identifica con el funtor

$$\begin{aligned} F : \mathfrak{Sch}_{\text{Spec}(k)} &\rightarrow \text{Grupos} \\ \text{Spec}(R) &\mapsto \text{Hom}_{\mathfrak{Sch}_{\text{Spec}(k)}}(\text{Spec}(R), \text{Spec}(A)), \end{aligned}$$

En el que cada $X(\text{Spec}(R))$ tiene una estructura funtorial de grupo, donde $X = \text{Spec}(A)$. Esto hace que X sea un esquema en grupos de acuerdo a la definición 2.2. $\square$

Hay varios ejemplos básicos que son de interés.

- (i) Si $A = k[x]$ el funtor representado por A se denota por $\mathbb{G}_a$ y está dado en cada k -álgebra R por $\mathbb{G}_a(R) = R$, que es un grupo bajo la suma.
- (ii) Si $A = k[x, y]/(xy - 1) = k[x, 1/x]$, entonces el funtor representado por A se denota por $\mathbb{G}_m$ y mediante la correspondencia de la proposición 2.5 está dado en cada k -álgebra por $\mathbb{G}_m(R) = \{r \in R : \exists s \in R \text{ tal que } rs = 1\} = R^\times$, un grupo bajo la multiplicación.
- (iii) Si $A = k[x]/(x^n - 1)$, el funtor representado por A se denota por μ_n , y vale $\mu_n(R) = \{r \in R : r^n = 1\}$, que son grupos bajo la multiplicación.
- (iv) Si la característica de k es p , un primo, se denota por α_p al funtor representado por $A = k[x, y]/x^p$. En este caso $\alpha_p(R) = \{r \in R : r^p = 0\}$. Note que $\alpha_p(R)$ tiene una estructura de grupo dada por la suma, debido a la propiedad $(x + y)^p = x^p + y^p$.

- (v) Si $A = k[x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, 1/(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})]$ el funtor representado por A se denota por GL_2 y cumple $\mathrm{GL}_2(R)$ es el conjunto de matrices invertibles 2×2 con coeficientes en R . Similarmente se pueden definir los funtores GL_m . Cada grupo se define utilizando la multiplicación de matrices. El caso $m = 1$ se denota por $\mathbb{G}_m$ y vale $\mathbb{G}_m(R) = R^\times$, el grupo multiplicativo de la k -álgebra R .

Ahora, gracias a la proposición 2.6, si $F = \mathrm{Hom}_k(A, -)$ es un esquema afín en grupos para una k -álgebra A , entonces $X = \mathrm{Spec}(A)$ es un esquema en grupos en la categoría $\mathcal{S}\mathrm{ch}_{\mathrm{Spec}(k)}$, y por la definición 2.1, existen morfismos

$$m : X \times_{\mathrm{Spec}(k)} X \rightarrow X$$

$$i : X \rightarrow X$$

$$e : \mathrm{Spec}(k) \rightarrow X,$$

que cumplen los diagramas conmutativos de la definición 2.1. Debido a la proposición 1.43, que nos da una biyección contravariante entre morfismos de esquemas afines y morfismos entre sus álgebras de definición, y además gracias al hecho que $X \times_{\mathrm{Spec}(k)} X = \mathrm{Spec}(A \otimes_k A)$ -ver prueba del teorema 1.39- estos morfismos inducen los correspondientes morfismos de k -álgebras

$$\Delta : A \rightarrow A \otimes_k A$$

$$S : A \rightarrow A$$

$$\epsilon : A \rightarrow k,$$

que a su vez cumplen la conmutatividad de los siguientes diagramas.

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes_k A \otimes_k A & \xleftarrow{\mathrm{id} \otimes \Delta} & A \otimes_k A & & k \otimes_k A \xleftarrow{\epsilon \otimes \mathrm{id}} A \otimes_k A & & A \xleftarrow{(S, \mathrm{id})} A \otimes_k A \\ \Delta \otimes \mathrm{id} \uparrow & & \uparrow \Delta & & \simeq \uparrow & & \uparrow \Delta \\ A \otimes_k A & \xleftarrow{\Delta} & A, & & A \xleftarrow{=} A, & & k \xleftarrow{\epsilon} A. \end{array}$$

Definición 2.7. Un k -álgebra A , junto con aplicaciones Δ, ϵ, S que satisfacen los diagramas de la figura 2.2, se llama un álgebra de Hopf sobre k , o una k -coálgebra o coálgebra sobre k . La aplicación Δ se llama la comultiplicación del álgebra de Hopf A , S se llama la coinversa (o antípoda) y ϵ se llama la counidad. Cuando un k -álgebra de Hopf representa a un k -esquema afín en grupos G , escribimos $A = k[G]$.

Existe una versión contravariante del Lema de Yoneda, que presentamos a continuación en el contexto de esquemas en grupo afines.

Lema 2.8 (Lema de Yoneda, versión contravariante). *Sean E y F dos funtores (con valores en la categoría de conjuntos) representados por k -álgebras A y B . Entonces hay una correspondencia*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{funtores}}(E, F) \leftrightarrow \mathrm{Hom}_k(B, A)$$

Demostración. Sea $\varphi : B \rightarrow A$ un morfismo dado. Un elemento en $E(R)$ corresponde a un morfismo $A \rightarrow R$, y un elemento en $F(R)$ a un morfismo $B \rightarrow R$, la composición $B \rightarrow A \rightarrow R$ por la derecha con el morfismo φ genera una aplicación de $E(R)$ en $F(R)$, que es functorial. Esto claramente da un morfismo de funtores $E \rightarrow F$. Recíprocamente, si $\Phi : E \rightarrow F$ es un morfismo de funtores, tome la identidad $\mathrm{id}_A : A \rightarrow A \in E(A)$, aplicando Φ obtenemos un morfismo $\varphi = \Phi(\mathrm{id}_A) : B \rightarrow A \in F(A)$. Lo que debemos ver es que Φ es el morfismo inducido por φ como en el párrafo anterior. Si $g \in E(R)$, entonces $g : A \rightarrow R$, queremos ver que $\Phi_R(g) = g \circ \varphi = g \circ \Phi_A(\mathrm{id}_A)$. Sin embargo esto se deduce de la definición de morfismo entre funtores, que nos dice que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} E(A) & \xrightarrow{\Phi(g)=g \circ -} & E(R) \\ \Phi_A \downarrow & & \downarrow \Phi_R \\ F(A) & \xrightarrow{\Phi(g)=g \circ -} & F(R) \end{array}$$

□

De hecho, la prueba del lema de Yoneda nos permite obtener la comultiplicación, coinversa y counidad de un esquema afín en grupos dado, pues son las aplicaciones asociadas de forma contravariante a la multiplicación, inversa y unidad del esquema en grupos.

Ejemplo 2.9. Veamos cómo obtener la comultiplicación sobre $A = k[x]$, que es el álgebra que representa el esquema afín en grupos $\mathbb{G}_a$. Sabemos que en cada $\mathrm{Hom}_k(k[X], R) \simeq R$ definimos una estructura de grupo mediante la suma. Note que tenemos un morfismo (de funtores)

$$m : \mathrm{Hom}_k(A, -) \times \mathrm{Hom}_k(A, -) \rightarrow \mathrm{Hom}_k(A, -)$$

que en cada k -álgebra R está dado por

$$\begin{aligned} m_R : \text{Hom}_k(A, R) \times \text{Hom}_k(A, R) &\rightarrow \text{Hom}_k(A, R) \\ (g, f) &\mapsto g + f \\ (g + f)(a) &= g(a) + f(a). \end{aligned}$$

Sin embargo, para cada R -álgebra hay un isomorfismo

$$\begin{aligned} \text{Hom}_k(A \otimes_k A, R) &\simeq \text{Hom}_k(A, R) \times \text{Hom}_k(A, R) \\ \Phi &\mapsto (\Phi_1, \Phi_2) \\ \Phi_1(a) &= \Phi(a \otimes 1) \\ \Phi_2(a) &= \Phi(1 \otimes a) \end{aligned}$$

Por lo que tenemos entonces un morfismo (de funtores)

$$m : \text{Hom}_k(A \otimes_k A, -) \rightarrow \text{Hom}_k(A, -)$$

dado en cada R por

$$\begin{aligned} m_R : \text{Hom}_k(A \otimes_k A, R) &\rightarrow \text{Hom}_k(A, R) \\ \Phi &\mapsto \Phi_1 + \Phi_2 \end{aligned}$$

El lema de Yoneda nos dice que la aplicación Δ está dada por

$$\Delta := m_{A \otimes_k A}(\text{id}_{A \otimes_k A}) = (\text{id}_{A \otimes_k A})_1 + (\text{id}_{A \otimes_k A})_2$$

Por lo que Δ está dado por

$$\Delta(x) = (\text{id}_{A \otimes_k A})_1(x) + (\text{id}_{A \otimes_k A})_2(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

Similarmente, se puede calcular que $S(x) = -x$ y $\epsilon(x) = 0$. De manera análoga, reemplazando la suma por multiplicación, la estructura para $\mathbb{G}_m$ viene dada por $\Delta(x) = x \otimes x$, $S(x) = 1/x$ y $\epsilon(x) = 1$.

Ejemplo 2.10 (Grupos finitos y esquemas afines en grupos). Sea Γ un grupo finito. Sea k^Γ el conjunto de funciones de Γ en k . Sea $e_\sigma \in k^\Gamma$ que vale 1 en σ y 0 en los otros puntos de Γ , entonces el conjunto $\{e_\sigma\}$ genera a $A = k^\Gamma$. Como anillo A es sólo $k \times \cdots \times k$. Note que

se tienen las relaciones $e_\sigma^2 = e_\sigma$, $e_\sigma e_\tau = 0$ y $\sum_\sigma e_\sigma = 1$. Haciendo

$$\Delta(e_\rho) = \sum_{\rho=\sigma\tau} (e_\sigma \otimes e_\tau)$$

$$S(e_\sigma) = e_{\sigma^{-1}}$$

$$\epsilon(e_\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \text{ es la unidad de } \Gamma \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

obtenemos una estructura de álgebra de Hopf sobre A . El esquema afín en grupos definido así se llama un esquema afín en grupos constante.

Terminamos esta sección con algunas definiciones sencillas pero importantes de aclarar desde un inicio.

Definición 2.11. Sea k un anillo conmutativo con identidad.

- (a) Un k -esquema en grupos $G = \text{Spec}(A)$, para A una k -coálgebra, se dice ser finito si A es una k -álgebra finita.
- (b) Si además A es un k -módulo libre, el grado de $G = \text{Spec}(A)$ se define como el rango de A sobre k , y se denota por $|G|$, es decir $|G| = \text{rg}_k(A)$. En particular cuando G es un esquema afín en grupos constante su orden es igual al orden del grupo finito utilizado para definirlo.

2.3. Representaciones de esquemas afines en grupos

Considere un funtor $G: k\text{-Alg} \rightarrow \text{Grupos}$ y X un funtor $X: k\text{-Alg} \rightarrow \text{Conjuntos}$. Una acción de G en X es un morfismo de funtores $G \times X \rightarrow X$ tal que cada aplicación $G(R) \times X(R) \rightarrow X(R)$ sea una acción de grupos. El caso que nos interesa por el momento es cuando $X(R) = V \otimes_k R$, para V un k -álgebra. Si la acción de $G(R)$ sobre $X(R)$ es R -lineal, decimos que se trata de una representación lineal de G en V . Una representación lineal es lo mismo que un morfismo de funtores $G \rightarrow G_V$, donde $G_V(R) = \text{Aut}_R(V \otimes R)$. En efecto, si tenemos la acción

$$G(R) \times (V \otimes_k R) \rightarrow V \otimes_k R \text{ dada por } (g, v \otimes r) \mapsto g \cdot (v \otimes r) \quad (2.1)$$

Entonces para cada $g \in G(R)$ se puede considerar el automorfismo

$$\begin{aligned} \varphi_g : V \otimes_k R &\rightarrow V \otimes_k R \\ v \otimes r &\mapsto g \cdot (v \otimes r), \end{aligned}$$

y esta asignación será funtorial. Hay en realidad una manera más específica de describir las representaciones sobre un k -módulo finito V .

Teorema 2.12. [Wa79, Theorem 3.1, p. 22] *Sea G un esquema afín en grupos representado por A . Entonces representaciones lineales de G en V corresponden a aplicaciones k -lineales $\rho : V \rightarrow V \otimes_k A$ tales que los diagramas*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho} & V \otimes A \\ \rho \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes \Delta \\ V \otimes A & \xrightarrow{\rho \otimes \text{id}} & V \otimes A \otimes A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho} & V \otimes A \\ \downarrow = & & \downarrow \text{id} \otimes \epsilon \\ V & \xrightarrow{\simeq} & V \otimes k \end{array}$$

son conmutativos.

Demostración. Sea Φ una representación. En $G(A)$ obtenemos una aplicación A -lineal $\Phi(\text{id}(A)) : V \otimes_k A \rightarrow V \otimes_k A$, que está determinada por su restricción a $V \simeq V \otimes_k k$, a la cual llamamos ρ . Como Φ es un morfismo de funtores, para todo $g : A \rightarrow R$ tenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V \otimes A & \xrightarrow{\Phi(\text{id})} & V \otimes A \\ \text{id} \otimes g \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes g \\ V \otimes R & \xrightarrow{\Phi(g)} & V \otimes R \end{array}$$

conmuta. Por lo tanto, al restringir $\Phi(g)$ a $V \otimes_k k \simeq V$ tenemos que $\Phi(g)|_{V \otimes_k k} = (\text{id} \otimes g) \circ \rho$, y como $\Phi(g)$ se ve determinada por $\Phi(g)|_{V \otimes_k k}$, tenemos que Φ se ve determinado completamente por ρ . Ahora, para cualquier aplicación k -lineal $\rho : V \rightarrow V \otimes_k A$ obtenemos de esta forma una aplicación natural de conjuntos $\Phi : G(R) \rightarrow \text{End}_R(V \otimes_k R)$. Para tener una representación, debemos tener que la unidad de $G(R)$ actúe como la identidad. Esto

dice que

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\rho} & V \otimes A \\
 \downarrow \cong & \searrow \text{id} \otimes \epsilon & \\
 V \otimes_k k & \xrightarrow{\quad} & V \otimes R
 \end{array}$$

debe conmutar para todo R . Esto es la conmutatividad del segundo cuadro de 2.12. La otra condición es que $\Phi(g)\Phi(h) = \Phi(gh)$. Ahora, por lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \Phi(gh)|_{V=V \otimes_k k} &= (\text{id} \otimes gh) \circ \rho \\
 &= (\text{id} \otimes (g, h) \circ \Delta) \circ \rho \\
 &= (\text{id} \otimes (g, h)) \circ (\text{id} \otimes \Delta) \circ \rho.
 \end{aligned}$$

Por su parte,

$$\begin{aligned}
 \Phi(g)\Phi(h)|_{V=V \otimes_k k} &= [\Phi(g)] \circ ((\text{id} \otimes h) \circ \rho) \\
 &= [(\text{id} \otimes (g, \text{id})) \circ (\rho \otimes \text{id})] \circ ((\text{id} \otimes h) \circ \rho) \\
 &= (\text{id} \otimes (g, h)) \circ (\rho \otimes \text{id}) \circ \rho
 \end{aligned}$$

Como deseamos que $\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h)$ entonces necesitamos que

$$(\text{id} \otimes \Delta) \circ \rho = (\rho \otimes \text{id}) \circ \rho,$$

lo cual es el primer diagrama conmutativo de 2.12. □

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.13. Un *comódulo* sobre un álgebra de Hopf A (o un A -comódulo) es un k -espacio vectorial V junto con un morfismo de k -módulos $\rho : V \rightarrow V \otimes A$ tal que los diagramas de la figura en 2.12 son conmutativos.

El comódulo regular sobre A es $(A, \rho = \Delta)$, los diagramas conmutativos son acá los mismos que en la definición de álgebra de Hopf. El comódulo trivial sobre A es (A, ρ) , para $\rho : A \rightarrow A \otimes_k A$ dado por $\rho(a) = a \otimes 1$.

Observación. En adelante $\text{Rep}(G)$ denotará la categoría de representaciones lineales finito dimensionales de G . Por lo anterior entonces esta categoría es equivalente a la categoría $\text{Comod}(A)$ de comódulos finito dimensionales sobre el álgebra de Hopf A que representa a G . En adelante identificaremos estas dos categorías. Un objeto de $\text{Rep}(G)$ entonces es un par (V, ρ) donde V es un A -comódulo y ρ es un morfismo como en el teorema 2.12.

Definición 2.14. Si (V, ρ) es un comódulo sobre A , decimos que el subespacio W es un subcomódulo de V si $\rho(W) \subseteq W \otimes A$, en ese caso $(W, \rho|_W)$ es un comódulo sobre A .

Teorema 2.15. Sea A un álgebra de Hopf sobre un cuerpo k . Todo comódulo V sobre A es una unión directa de subcomódulos finito-dimensionales.

Demostración. Por 'unión directa' nos referimos a límite directo (la construcción algebraica usual). Probamos que todo $v \in V$ está contenido en algún subcomódulo finito dimensional (sobre k). Sea $\{a_i\}$ una base de A (puesto que A es un espacio vectorial sobre k), entonces escriba $\rho(v) = \sum v_i \otimes a_i$, donde todos los v_i son cero, excepto una cantidad finita. Si escribimos $\Delta(a_i) = \sum r_{ijk} a_j \otimes a_k$ [pues $a_j \otimes a_k$ es base de $A \otimes A$], entonces

$$\sum \rho(v_i) \otimes a_i = (\rho \otimes \text{id})\rho(v) = (\text{id} \otimes \Delta)\rho(v) = \sum v_i \otimes r_{ijk} a_j \otimes a_k$$

Comparando los coeficientes de a_k tenemos que $\rho(v_k) = \sum v_i \otimes r_{ijk} a_j$. De manera que el subespacio W generado por v y los v_i es un subcomódulo. $\square$

Definición 2.16. Si (A, Δ, S, ϵ) es un álgebra de Hopf, decimos que una subálgebra W es subálgebra de Hopf de A si $\Delta(W) \subseteq W \otimes W$ y $S(W) \subseteq W$.

Teorema 2.17. Sea A un álgebra de Hopf sobre k , un cuerpo. Entonces A es una unión directa de subálgebras finito dimensionales sobre k .

Demostración. Basta demostrar que todo subconjunto finito de A está contenido en una subálgebra finito dimensional sobre k . Por el resultado previo (para el comódulo (A, Δ) , cualquier conjunto finito está contenido en un subespacio finito dimensional V , con $\Delta(V) \subseteq V \otimes A$. Sea $\{v_j\}$ una base para V , con $\Delta(v_j) = \sum v_i \otimes a_{ij}$. Entonces $\Delta(a_{ij}) = \sum a_{ik} \otimes a_{kj}$, por lo que el subespacio U generado por $\{v_j\}$ y $\{a_{ij}\}$ satisface $\Delta(U) \subseteq U \otimes U$. Si $\Delta(a) = \sum b_i \otimes c_i$ entonces es sencillo verificar que $\Delta(Sa) = \sum S c_i \otimes S b_i$, por lo que el subespacio L generado por U y $S(U)$ satisface que $\Delta(L) \subseteq L \otimes L$ y $S(L) \subseteq L$. $\square$

Ahora, si $\text{Rep}'(G)$ denota la categoría de todas las posibles representaciones de G (finito dimensionales o no), entonces lo que nos dice lo anterior es que todo elemento de $\text{Rep}'(G)$ es un límite directo de elementos de su subcategoría $\text{Rep}(G)$, cuando el anillo base, k , es un cuerpo.

Observación. Suponga que V es un k -módulo libre, con base $\{v_i\}$, y escriba $\rho(v_j) = \sum_i v_i \otimes a_{ij}$. Entonces

$$\begin{aligned} (\text{id} \otimes \Delta)(\rho(v_j)) &= (\text{id} \otimes \Delta)\left(\sum_i v_i \otimes a_{ij}\right) \\ &= \sum_i v_i \otimes \Delta(a_{ij}), \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} (\rho \otimes \text{id})(\rho(v_j)) &= (\rho \otimes \text{id})\left(\sum_i v_i \otimes a_{ij}\right) \\ &= \sum_i \rho(v_i) \otimes a_{ij} \\ &= \sum_i \left(\sum_k v_k \otimes a_{ki}\right) \otimes a_{ij} \\ &= \sum_k v_k \otimes \left(\sum_i a_{ki} \otimes a_{ij}\right). \end{aligned}$$

Por axiomas de comódulos tenemos entonces que

$$\sum_k v_k \otimes \Delta(a_{kj}) = \sum_k v_k \otimes \left(\sum_i a_{ki} \otimes a_{ij}\right),$$

e igualando coeficientes tenemos que

$$\Delta(a_{kj}) = \sum_i a_{ki} \otimes a_{ij}.$$

Ahora, procedemos a dar una caracterización de los esquemas afines en grupos representados por álgebras finitamente generadas.

Definición 2.18. Un esquema afín en grupos G se llama algebraico si su álgebra de Hopf es finitamente generada (sobre el anillo base k). Si G, H son esquemas afines en grupos representados por k -álgebras A, B respectivamente, decimos que H es un subgrupo cerrado de G si hay un morfismo sobreyectivo de k -álgebras de Hopf $A \rightarrow B$.

Cuando H es un subgrupo cerrado de G , entonces H está definido por ciertas ecuaciones polinomiales, que comprenden a las ecuaciones que definen a G y otras ecuaciones adicionales. Por ejemplo, el esquema en grupos afín SL_n , dado en k -álgebras por

$$\text{SL}_n(R) := \{\text{Matrices invertibles de orden } n, A, \text{ con coeficientes en } R \text{ y } \det(A) = 1\}$$

Está representado por $A = k[X, 1/\det, \det - 1]$, que es un cociente de $A = k[X, 1/\det]$, que es el álgebra que representa a GL_n . Así que SL_n es un subgrupo cerrado de GL_n . De hecho, todos los esquemas afines en grupo son así.

Teorema 2.19. *Todo esquema afín en grupos algebraico sobre un cuerpo k es un subgrupo cerrado de algún GL_n .*

Demostración. Hay que encontrar un morfismo sobreyectivo de $k[\mathrm{GL}_n] \rightarrow k[G] = A$, para G un grupo algebraico afín sobre k . Notamos que $k[\mathrm{GL}_n] = k[x_{11}, \dots, x_{nn}, 1/\det]$.

Sea V un subcomódulo de A finito dimensional que contiene a los generadores de A como k -álgebra (que son finitos, estamos considerando k -álgebras finitamente generadas, como álgebras). Sea $\{v_j\}$ una base de V y ponga $\Delta(v_j) = \sum v_i \otimes a_{ij}$. Considere el morfismo:

$$\begin{aligned} k[x_{11}, \dots, x_{nn}, 1/\det] &\rightarrow A \\ X_{ij} &\mapsto a_{ij} \end{aligned}$$

Este morfismo de k -álgebras cumple que su imagen contiene a los a_{ij} , pero $v_j = (\epsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(v_j) = \sum \epsilon(v_i)a_{ij}$, por lo que la imagen contiene a V y por tanto contiene a todo A . $\square$

Finalmente presentamos una proposición que nos será de utilidad luego.

Proposición 2.20. *Sean A una coalgebra y M un A -comódulo derecho. La sucesión de k -módulos*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\rho} M \otimes_k A \xrightarrow{f} M \otimes_k A \otimes_k A$$

es exacta, donde $f = \rho \otimes \mathrm{id}_A - \mathrm{id}_M \otimes \delta$.

Demostración. El primer axioma de comódulos implica que el núcleo de f contiene a la imagen de ρ y el segundo que ρ es inyectiva, vea los diagramas del teorema 2.12. Veamos que el núcleo de f es igual a la imagen de ρ . Sea $\alpha = \sum m_i \otimes a_i$ en el núcleo de f . Usando los resultados anteriores podemos encontrar un subcomódulo finito dimensional $M' \subset M$ y una subcoalgebra finito dimensional $A' \subset A$ tal que $\alpha \in M' \otimes_k A'$. Por esta razón podemos asumir que A y M son finito dimensionales sobre k . Tomando duales sobre k en la anterior sucesión, obtenemos una k -álgebra finito dimensional $B = A^*$ y un B -módulo $N = M^*$ y una sucesión

$$B \otimes_k B \otimes_k N \xrightarrow{g} B \otimes_k N \xrightarrow{\rho^*} N \longrightarrow 0,$$

donde g es la diferencia de las aplicaciones $b \otimes b' \otimes n \mapsto b(b' \otimes n)$ y $b \otimes b' \otimes n \mapsto (bb') \otimes n$. Es sencillo verificar que esta última sucesión es exacta, y por lo tanto la sucesión inicial también (Para esto vea [Szo9, Corollary 6.1.11]). $\square$

2.4. Esquemas separables (o étales)

Presentaremos ahora una clase importante de esquemas afines en grupos. Sea k un cuerpo, $\bar{k}$ una clausura algebraica de k y k_s su clausura separable en $\bar{k}$.

Proposición 2.21. [Wa79, Lemma 1, pág. 46] *Sea A un k -álgebra finito dimensional. Entonces A es un producto finito de álgebras A_i , cada una de las cuales tiene un único ideal maximal que consiste de elementos nilpotentes.*

Demostración. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A , entonces $A/\mathfrak{p}$ es un dominio entero finito dimensional sobre k . Para $0 \neq [x] \in A/\mathfrak{p}$ tenemos una cadena de subespacios $[x]A/\mathfrak{p} \supseteq [x]^2A/\mathfrak{p} \supseteq [x]^3A/\mathfrak{p} \supseteq \dots$. Por finitud, eventualmente tendremos $[x]^nA/\mathfrak{p} = [x]^{n+1}A/\mathfrak{p}$. Por lo tanto $[x]^n$ es un múltiplo de $[x]^{n+1}$, lo que implica que $[x]$ es invertible. Así tenemos que $A/\mathfrak{p}$ es en realidad un cuerpo y $\mathfrak{p}$ es maximal. Ahora, si $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_{m+1}$ son ideales primos, por maximalidad podemos encontrar un $x_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \mathfrak{p}_{m+1}$ para cada $i = 1, \dots, m$, por lo que $x = x_1 \cdots x_m$ está en $\cap_{i=1}^m \mathfrak{p}_i$ pero no está en $\mathfrak{p}_{m+1}$. Así que $\cap_{i=1}^{m+1} \mathfrak{p}_i$ es más pequeño que $\cap_{i=1}^m \mathfrak{p}_i$. Nuevamente, esta cadena descendiente debe parar, lo que implica que sólo hay finitos ideales primos. Cada $\{\mathfrak{p}\} = V(\mathfrak{p})$ es cerrado (porque $\mathfrak{p}$ es maximal), lo que implica que $\text{Spec}(A)$ es un conjunto finito y discreto, es decir $\text{Spec}(A)$ es la unión disjunta de $V(\mathfrak{p}_i)$ para $i = 1, \dots, m$. Esto implica que

$$\sum_{i=1}^m \mathfrak{p}_i = A \text{ y } \prod_{i=1}^m \mathfrak{p}_i \subseteq \sqrt{0},$$

debido al lema 1.33. Si selecciona $a_i \in \mathfrak{p}_i$ tales que $a_1 + \dots + a_m = 1$, y para algún n se cumple que $(a_1 \cdots a_m)^n = 0$, es decir $a_1^n \cdots a_m^n = 0$. Es posible demostrar que se cumple también

$$\sum_{i=1}^m \langle a_i \rangle^n = 1.$$

Se pueden seleccionar elementos $e_i \in \langle a_i \rangle^n$ tales que $e_1 + \dots + e_m = 1$ y $e_i^2 = 0$ para todo i , y $e_1 \cdots e_m = 0$. Si $A_i = \langle e_i \rangle$, se tendrá que la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \prod_{i=1}^m A_i &\mapsto A \\ (r_1 e_1, \dots, r_m e_m) &\mapsto r_1 e_1 + \dots + r_m e_m \end{aligned}$$

es un isomorfismo de anillos, y cada A_i cumple lo necesario. $\square$

El siguiente es un resultado expuesto en [Wa79], brindamos una prueba con más detalles. Recordemos que un anillo reducido es un anillo sin elementos nilpotentes no triviales.

Teorema 2.22. [Wa79, Theorem 1, pág. 47] Sea A un k -álgebra finito dimensional. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- (a) $A \otimes_k \bar{k}$ es reducido.
- (b) $A \otimes_k \bar{k} \simeq \bar{k} \times \cdots \times \bar{k}$ [$\dim_k A$ veces].
- (c) El número de homomorfismos de k -álgebras $A \rightarrow \bar{k}$ es igual a la dimensión de A .
- (d) A es el producto de extensiones separables de k .
- (e) $A \otimes_k k_s \simeq k_s \times \cdots \times k_s$.

Demostración. (1 $\Rightarrow$ 2): Escriba $A = \prod_{i=1}^m A_i$ como en la proposición anterior. Entonces

$$A \otimes_k \bar{k} \simeq \prod_{i=1}^m A_i \otimes_k \bar{k}.$$

Si $A \otimes_k \bar{k}$ es reducido, entonces cada $A_i \otimes_k \bar{k}$ también, y por lo tanto cada A_i es reducido. Un elemento no invertible en A_i es nilpotente, pero como A_i es reducido entonces este elemento debe ser 0, por lo que A_i es una extensión de cuerpos de k . De esta manera $A_i \otimes_k \bar{k} \simeq \bar{k}^{n_i}$, donde $n_i = [A_i : k]$. Por lo tanto tenemos que

$$A \otimes_k \bar{k} \simeq \prod_{i=1}^m \bar{k}^{n_i} = \bar{k}^{\times N},$$

donde $N = \dim_k(A) = \sum_{i=1}^m n_i$.

(2 $\Rightarrow$ 1): Es claro ya que $\bar{k} \times \cdots \times \bar{k}$ es reducido, porque $\bar{k}$ es un cuerpo.

(2 $\Rightarrow$ 3): Si $A \otimes_k \bar{k} \simeq \bar{k}^{\times \dim_k A}$, entonces

$$\text{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \bar{k}) \simeq \text{Hom}_{\bar{k}\text{-Alg}}(A \otimes_k \bar{k}, \bar{k}) \simeq \text{Hom}_{\bar{k}\text{-Alg}}(\bar{k}^{\times \dim_k A} \bar{k}, \bar{k}),$$

en el último conjunto hay $\dim_k A$ elementos, en efecto, si ϕ es un homomorfismo de $\bar{k}$ -álgebras entre $\bar{k}^{\times \dim_k A}$ y $\bar{k}$, y sea $e_i \in \bar{k}^{\times \dim_k A}$ dado por $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ con 1 en la i -ésima entrada, si i es tal que $\phi(e_i) \neq 0$, como $e_i e_j = 0$ para $j \neq i$ entonces $\phi(e_i) \phi(e_j) = 0$ por lo que $\phi(e_j) = 0$ para $j \neq i$, y de esta manera hay un morfismo de $\bar{k}$ -álgebras para cada copia de $\bar{k}$.

(3 $\Rightarrow$ 4): Continuando con la notación

$$A = \prod_{i=1}^m A_i$$

Si $\phi \in \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \bar{k})$, entonces por un argumento similar al párrafo anterior ϕ se anula sobre todos los A_j excepto en uno, A_i , y sobre éste vale cero sobre sus nilpotentes (que son el ideal maximal $\mathfrak{m}_i$ de A_i), por lo tanto hay un morfismo bien definido

$$\phi : A_i/\mathfrak{m}_i \rightarrow \bar{k},$$

note que $A_i/\mathfrak{m}_i$ es una extensión finita de cuerpos de k . Entonces tenemos que

$$\# \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \bar{k}) = \sum_{i=1}^m \# \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(A_i, \bar{k}) = \sum_{i=1}^m \# \text{Hom}_k(A_i/\mathfrak{m}_i, \bar{k}),$$

y observemos que

$$\# \text{Hom}_k(A_i/\mathfrak{m}_i, \bar{k}) \leq [A_i/\mathfrak{m}_i : k] \leq \dim_k(A_i)$$

Si se cumple 3. entonces se tiene que

$$\# \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \bar{k}) = \dim_k A = \sum_{i=1}^m \dim_k A_i,$$

por lo que necesariamente se cumple que

$$\dim_k A_i = \dim_k(A_i/\mathfrak{m}_i) = \# \text{Hom}_k(A_i/\mathfrak{m}_i, \bar{k}),$$

y esto nos implica, gracias a la teoría de extensiones de cuerpos, que $A_i/\mathfrak{m}_i$ es una extensión separable de k . Sin embargo al igualar dimensiones sobre k se debe tener que $A_i/\mathfrak{m}_i \simeq A_i$, es decir $\mathfrak{m}_i = 0$, y así A es el producto de extensiones separables sobre k .

Para (4 $\Rightarrow$ 3): nuevamente se sigue por la teoría de extensiones de cuerpos, recuerde que L/k es separable si y sólo si el número de homomorfismos de cuerpos de L en $\bar{k}$ es igual a $[L : k]$.

(4 $\Rightarrow$ 5): Por 4 sabemos que todos los morfismos de k -álgebras de A en $\bar{k}$ caen en k_s . Por 3 (que es equivalente a 4) tenemos que

$$\dim_k A = \# \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \bar{k}) = \# \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, k_s) = \# \text{Hom}_{k_s\text{-Alg}}(A \otimes_k k_s, k_s) \quad (2.2)$$

Ahora, por la proposición anterior, escriba

$$A \otimes_k k_s = \prod_{i=1}^n B_i.$$

Donde cada B_i es una k_s -álgebra. Como 4. se da, entonces

$$A = \prod_{i=1}^m A_i,$$

donde cada A_i es una extensión separable de k , en particular cada A_i es un anillo reducido y por lo tanto

$$A \otimes_k k_s \simeq \prod A_i \otimes_k k_s$$

es un anillo reducido también, esto implica que cada B_i es un reducido, y por lo tanto es un cuerpo (por un argumento similar a la primera parte de esta prueba). Así cada B_i es una extensión finita y separable de k_s , y por ello $B_i \simeq k_s$ para todo $i = 1, \dots, n$. Gracias a 2.2, se tiene que $n = \dim_k A$.

Finalmente, para $(5 \Rightarrow 2)$: Note que $A \otimes_k \bar{k} \simeq A \otimes_k (k_s \otimes_{k_s} \bar{k}) \simeq (A \otimes_k k_s) \otimes_{k_s} \bar{k} \simeq (k_s^{\times \dim_k A}) \otimes_{k_s} \bar{k} \simeq \bar{k}^{\times \dim_k A}$. $\square$

Definición 2.23. Un k -álgebra que cumple alguna de las propiedades anteriores se llama un álgebra separable (o étale) sobre k .

Capítulo 3

Categorías y Retículos Tannakianos

Las categorías tannakianas serán de suma importancia para el desarrollo de esta investigación. El origen de esta teoría está en las investigaciones de Tadao Tannaka y Mark Grigorievich Krein sobre grupos topológicos compactos. El principal resultado de sus trabajos es lo que se conoce como dualidad de Tannaka-Krein, que relaciona un grupo topológico con su categoría de representaciones. No haremos énfasis en esta teoría, sin embargo el espíritu será inspirado por el concepto de la dualidad de Tannaka y Krein: obtener objetos a partir de sus 'representaciones'. La teoría moderna, que será la que expondremos en este capítulo, fue desarrollada por Saavedra Rivano en [Saa72], y fortalecida más adelante por investigaciones de Pierre Deligne, [Del90], y posteriormente por Duong-Hai. Aquí nos basaremos en el tratamiento dado por [Szo9] y también en [EGNO09].

3.1. Categorías Tannakianas

Iniciamos con el estudio de las categorías tensoriales.

Definición 3.1. Una categoría $\mathcal{C}$ se llama tensorial si posee un funtor

$$\begin{aligned} \otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \\ (X, Y) &\mapsto X \otimes Y, \end{aligned}$$

y un isomorfismo de funtores

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \\ \Phi_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z &\simeq X \otimes (Y \otimes Z) \end{aligned}$$

tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W & \xrightarrow{\Phi \otimes \text{id}} & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \\ & \searrow \text{id} \otimes \Phi \quad \swarrow \Phi & \\ & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W)) & \end{array}$$

es conmutativo para todo $X, Y, Z, W \in \text{Obj } \mathcal{C}$. Es costumbre llamar al isomorfismo Φ la restricción de asociatividad, y al diagrama anterior como el axioma pentagonal.

Un objeto unidad en una categoría tensorial $\mathcal{C}$ es un objeto $1 \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ junto con un isomorfismo $\nu : 1 \rightarrow 1 \otimes 1$ tal que los funtores $X \mapsto 1 \otimes X$ y $X \mapsto X \otimes 1$ son plenamente fieles.

Ejemplo 3.2. La categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo k , escrita como $(\text{Mod}(k))$, es un ejemplo simple de categoría tensorial sobre k , el funtor $\otimes$ es simplemente el producto tensorial (sobre k) entre k -módulos y el objeto unidad es k . En general el tratamiento puede hacerse sobre un anillo conmutativo con identidad R , en cuyo caso la categoría $\text{Mod}(R)$ de R -módulos, es una categoría tensorial.

En [EGNO09] a este concepto también se le llama categoría monoidal, debido a su inspiración en el comportamiento de un monoide. De hecho, si G es un monoide (una estructura con una operación binaria asociativa y un elemento identidad) y A es un grupo abeliano, se puede formar la categoría $\mathcal{C}(G)$ cuyos objetos se ven indexados por los objetos de G , los cuales se pueden designar como δ_g , para $g \in G$, y los conjuntos de morfismos en dicha categoría se definen como $\text{Hom}(\delta_{g_1}, \delta_{g_2}) = \emptyset$ si $g_1 \neq g_2$ y es igual a A si $g_1 = g_2$. El funtor $\otimes$ se puede definir como en objetos $\delta_g \otimes \delta_h = \delta_{gh}$ y en morfismos como $a \times b = ab$ para $a, b \in A$. Con esta construcción obtenemos una categoría tensorial (esto es [EGNO09, Example 1.3.6]). Note que si G es un monoide no conmutativo, entonces en una categoría tensorial no necesariamente se cumple $X \otimes Y \simeq Y \otimes X$, es decir no hay conmutatividad entre objetos.

Una restricción de conmutatividad en una categoría tensorial $\mathcal{C}$ es un isomorfismo Ψ de tensores de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$ dado en un par de objetos (X, Y) por

$$\Psi_{X,Y} : X \otimes Y \simeq Y \otimes X$$

tal que se cumple el axioma hexagonal: para todos $X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X \otimes (Y \otimes Z) & & \\
 & \swarrow \text{id} \otimes \Phi & & \searrow \Phi & \\
 X \otimes (Z \otimes Y) & & & & (X \otimes Y) \otimes Z \\
 \downarrow \Phi & & & & \downarrow \Psi \\
 (X \otimes Z) \otimes Y & & & & Z \otimes (X \otimes Y) \\
 \searrow \Psi \otimes \text{id} & & & \swarrow \Phi & \\
 & (Z \otimes X) \otimes Y & & &
 \end{array}$$

es conmutativo. Si esto se cumple decimos que la categoría tensorial $\mathcal{C}$ es conmutativa.

Observación. Para cada objeto $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ existen isomorfismos canónicos

$$\alpha_X^1 : 1 \otimes X \xrightarrow{\simeq} X$$

y

$$\beta_X^1 : X \otimes 1 \xrightarrow{\simeq} X.$$

En efecto, el isomorfismo $\nu \otimes \text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1 \otimes (1 \otimes X), 1 \otimes X)$ debe estar inducido por un morfismo $\alpha_X^1 : 1 \otimes X \rightarrow X$, debido a que el funtor $X \rightarrow 1 \otimes X$ es plenamente fiel, y por esta razón α_X^1 debe ser un isomorfismo. De manera similar podemos construir el morfismo β_X^1 . En lo que sigue asumimos que todas las categorías tensoriales tienen un objeto unidad.

Observación. Note que en estas definiciones las restricciones de asociatividad y conmutatividad no son estrictas, lo único que requerimos es un isomorfismo (por ejemplo, $(X \otimes Y) \otimes Z \simeq X \otimes (Y \otimes Z)$ en el caso de asociatividad o $X \otimes Y \simeq Y \otimes X$ en el caso de conmutatividad). En realidad, esta condición no es muy restrictiva. De acuerdo a [EGNO09, Theorem 1.8.5] cualquier categoría monoidal no estricta es equivalente a una categoría monoidal estricta (este es un resultado de MacLane).

Naturalmente, la forma de relacionar dos categorías tensoriales debe ser mediante un funtor que preserve los productos tensoriales en cada categoría.

Definición 3.3. Un funtor tensorial entre dos categorías tensoriales $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ es un funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, junto con un isomorfismo Λ de funtores de $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ dado en un par de objetos de $\mathcal{C}$ (X, Y) por

$$\Lambda_{X,Y} : F(X \otimes Y) \simeq F(X) \otimes F(Y)$$

tal que para todos $X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} F((X \otimes Y) \otimes Z) & \xrightarrow{\Lambda_{X \otimes Y, Z}} & F(X \otimes Y) \otimes F(Z) & \xrightarrow{\Lambda_{X,Y} \otimes \text{id}} & (F(X) \otimes F(Y)) \otimes F(Z) \\ F(\Phi_{X,Y,Z}) \downarrow & & & & \downarrow \Phi_{F(X), F(Y), F(Z)} \\ F(X \otimes (Y \otimes Z)) & \xrightarrow{\Lambda_{X,Y \otimes Z}} & F(X) \otimes F(Y \otimes Z) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \Lambda_{Y,Z}} & F(X) \otimes (F(Y) \otimes F(Z)) \end{array}$$

conmuta. Además requerimos que si $1, 1'$ son los objetos unidad de $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ respectivamente, entonces $F(1) = 1'$.

Definición 3.4. Una categoría tensorial $\mathcal{C}$ es rígida, si para todo $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ existe un objeto X^* con morfismos $\epsilon : X \otimes X^* \rightarrow 1$ y $\delta : 1 \rightarrow X^* \otimes X$ tales que los diagramas

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\cong} & 1 \otimes X \\
\cong \downarrow & & \uparrow \epsilon \otimes \text{id} \\
X \otimes 1 & \xrightarrow{\text{id} \otimes \delta} & X \otimes X^* \otimes X
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
X^* & \xrightarrow{\cong} & X^* \otimes 1 \\
\cong \downarrow & & \uparrow \text{id} \otimes \epsilon \\
1 \otimes X^* & \xrightarrow{\delta \otimes \text{id}} & X^* \otimes X \otimes X^*
\end{array}$$

son conmutativos. A veces el dual se denota por $X^\vee$, más adelante utilizaremos esta notación en ejemplos más específicos.

Ejemplo 3.5. En la categoría Vect_k de k -espacios vectoriales de dimensión finita (que es una categoría tensorial con el objeto unidad k), el dual $X^* := \text{Hom}(X, k)$ cumple las condiciones para ser un dual en la categoría Vect_k . El morfismo $\epsilon : V \otimes V^* \rightarrow 1$ está dado por la aplicación de evaluación

$$v \otimes \varphi \mapsto \varphi(v) \in k$$

para $\varphi \in X^*$, $v \in X$. El morfismo δ se contruye de la siguiente manera. Para X un k -espacio vectorial, hay un isomorfismo

$$\tau_{X,X} : X^* \otimes X \rightarrow \text{Hom}_k(X, X)$$

$$\varphi \otimes v \mapsto \varphi \circ \phi_v$$

donde $\phi_v : k \rightarrow X$ es la aplicación $\phi_v(\lambda) = \lambda v$ para $\lambda \in k$. La aplicación k -lineal que envía 1 en $\tau_{X,X}^{-1}(1_X)$ es lo que se conoce como la coevaluación δ_X (o solo δ). Estos morfismos ϵ, δ cumplen la conmutatividad de los diagramas expuestos en la definición de dual, esto es sencillo de comprobar utilizando k -bases y sus bases duales, omitiremos estos detalles aquí.

Proposición 3.6. [Szo9, Lemma 6.3.2] *El dual X^* de un objeto X está únicamente determinado bajo isomorfismo.*

Demostración. Fijamos X y ϵ y mostramos que X^* representa el funtor contravariante $Z \mapsto \text{Hom}(X \otimes Z, 1)$, de lo cual se seguirá la unicidad (Lema de Yoneda). Sea $\phi : X \otimes Z \rightarrow 1$,

y considere $\nu : Z \rightarrow X^*$ dado por la composición

$$Z \xrightarrow{\simeq} 1 \otimes Z \xrightarrow{\delta \otimes \text{id}_Z} X^* \otimes X \otimes Z \xrightarrow{\text{id}_{X^*} \otimes \phi} X^* \otimes 1 \xrightarrow{\simeq} X^*$$

De los diagramas de la figura 3.4 se sigue que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X \otimes Z & \xrightarrow{\text{id} \otimes \nu} & X \otimes X^* \\ & \searrow \phi & \downarrow \epsilon \\ & & 1 \end{array}$$

y con esto tenemos la representabilidad del funtor dado. $\square$

Proposición 3.7. [Szo9, Lemma 6.3.3] Sean F, G dos funtores tensoriales de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$. Si $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ son rígidas, entonces todo morfismo de funtores entre F y G es un isomorfismo.

Demostración. En una categoría tensorial rígida todo morfismo $\phi : X \rightarrow Y$ tiene una transpuesta $\phi^* : X \rightarrow Y^*$ que se obtiene a partir de la composición

$$Y^* \xrightarrow{\simeq} 1 \otimes Y^* \xrightarrow{\delta \otimes \text{id}} X^* \otimes X \otimes Y^* \xrightarrow{\text{id} \otimes \phi \otimes \text{id}} X^* \otimes Y \otimes Y^* \xrightarrow{\text{id} \otimes \epsilon} X^* \otimes 1 \xrightarrow{\simeq} X^*.$$

El mapeo $\phi \mapsto \phi^*$ induce una biyección $\text{Hom}(X, Y) \simeq \text{Hom}(Y^*, X^*)$. Dado un morfismo $\Phi : F \rightarrow G$ de funtores tensoriales, y un objeto X , tenemos isomorfismos $F(X)^* \simeq F(X^*)$ y $G(X)^* \simeq G(X^*)$, debido a la proposición anterior [Como F y G son tensoriales, ambos preservan los diagramas en la definición del dual]. El morfismo Φ_{X^*} induce entonces un morfismo $F(X)^* \rightarrow G(X)^*$ con una transpuesta $(\Phi_{X^*})^* : G(X) \rightarrow F(X)$. Esto crea un morfismo de funtores $G \rightarrow F$ que es la inversa (como funtor) de Φ . $\square$

Ahora tenemos todo lo que necesitamos para definir una categoría tannakiana.

Definición 3.8. Una categoría tannakiana neutral sobre un cuerpo k es una categoría $\mathcal{T}$ tensorial, rígida, k -lineal y abeliana cuyo objeto unidad satisface $\text{End}(1) = \text{Hom}_{\mathcal{T}}(1, 1) \simeq k$, y que además está equipada con un funtor tensorial exacto y fiel $\omega : \mathcal{T} \rightarrow \text{Vect}_f(k)$, en la categoría de espacios vectoriales finito dimensionales sobre k . Este funtor se llama el funtor fibra de la categoría $\mathcal{T}$.

Ejemplo 3.9. Si A es una k -coálgebra, entonces la categoría $\text{Comod}(A)$ cuyos objetos son los comódulos sobre A y los morfismos son los morfismos k -lineales de comódulos, es una categoría tannakiana neutral, la estructura tensorial viene dada por el producto tensorial usual y el funtor fibra es el funtor olvidadizo, que considera a cada comódulo sólo como un espacio vectorial sobre k . Esta categoría es representativa dentro de las categorías tannakianas y a continuación veremos por qué.

El principal resultado sobre categorías tannakianas que vamos a presentar en esta sección es el de dualidad tannakiana, que dice lo siguiente.

Teorema 3.10 (Dualidad tannakiana para categorías tannakianas). *Si $(\mathcal{T}, \omega)$ es una categoría tannakiana neutral sobre un cuerpo k entonces existe un k -esquema afín en grupos G y una equivalencia de categorías entre $\mathcal{T}$ y $\text{Rep}(G)$.*

Este teorema se puede reformular de una manera más específica:

Teorema 3.11. *Sea $\mathcal{T}$ una categoría k -lineal y abeliana, equipada de un funtor k -lineal exacto y fiel $\omega : \mathcal{T} \rightarrow \text{Vect}_f(k)$. Existe una k -coalgebra $A_{\mathcal{T}}$ tal que cada $\omega(X)$ tiene una estructura natural de $A_{\mathcal{T}}$ -comódulo. Más aún ω induce una equivalencia de categorías entre $\mathcal{C}$ y la categoría $\text{Comod}_{A_{\mathcal{T}}}$ de comódulos finito dimensionales sobre $A_{\mathcal{T}}$.*

A continuación vamos a presentar una prueba del teorema anterior. El tratamiento que daremos viene del capítulo 6 de [Szo9] y también es tomado de [Del90]. Necesitaremos varios resultados auxiliares.

Definición 3.12. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana y $X \in \text{Obj}(\mathcal{A})$, un objeto de $\mathcal{A}$. La subcategoría plena de $\mathcal{A}$ formada por objetos de $\mathcal{A}$ isomorfos a subcocientes de sumas directas de finitas copias de X , se llamará la subcategoría plena de $\mathcal{A}$ generada por X y se denotará como $\langle X \rangle$.

La idea de la demostración del teorema 3.11 es demostrarlo para las subcategorías plenas generadas por objetos de $\mathcal{A}$, y luego hacer un argumento de unión o límite directo para obtener el resultado del teorema para la categoría $\mathcal{A}$. La siguiente proposición es debida a Gabber y nos ayudará a probar el resultado para las subcategorías plenas generadas por objetos de $\mathcal{A}$. Recordemos que la primera sección del primer capítulo hemos definido la noción de un objeto proyectivo en una categoría abeliana así como la noción de una serie de composición.

Proposición 3.13. [Szo9, Proposition 6.5.5] *Sea $\mathcal{A}$ una categoría k -lineal y abeliana en la que todo objeto tiene una serie de composición finita y los k -espacios vectoriales $\text{Hom}(A, B)$ son de dimensión finita para cualesquiera objetos A, B de $\mathcal{A}$. Entonces para todo objeto X de $\mathcal{A}$ la categoría $\langle X \rangle$ tiene un generador proyectivo P .*

Para demostrar la proposición anterior necesitaremos tres lemas.

Lema 3.14. [Szo9, Lemma 6.5.6] Sea $\mathcal{S}$ el conjunto (finito) de objetos simples de $\langle X \rangle$ que ocurren en una serie de composición para X . Asuma que para todo $S \in \mathcal{S}$ hay un epimorfismo $\phi_S : P_S \rightarrow S$, con P_S proyectivo y en $\langle X \rangle$. Entonces $P = \bigoplus_{S \in \mathcal{S}} P_S$ es un generador proyectivo para $\langle X \rangle$.

Demostración. Sumas finitas de objetos proyectivos son nuevamente objetos proyectivos, por tanto sólo debemos exhibir un morfismo no cero $P \rightarrow X'$ para cada objeto no cero X' de $\langle X \rangle$. Por definición de la categoría $\langle X \rangle$ hay una serie de composición de X' que contiene a un objeto $S \in \mathcal{S}$ y por tanto hay un morfismo $S \rightarrow X'$. Definimos un epimorfismo $P \rightarrow S$ que valga ϕ_S en el componente P_S extendido por 0 en los otros componentes. Como P es proyectivo este morfismo se levanta a un morfismo $P \rightarrow X'$, que es no nulo. $\square$

Entonces lo que debemos hacer para probar la proposición 3.13 es construir los objetos $P_S \rightarrow S$. Para ello utilizaremos el concepto de una extensión esencial.

Definición 3.15. En una categoría abeliana $\mathcal{A}$ una extensión esencial de un objeto Y en $\mathcal{A}$ consiste de un objeto E junto con un epimorfismo $\alpha : E \rightarrow Y$ tal que no existe ningún subobjeto $E' \subset E$ distinto de E tal que la composición $E' \rightarrow E \rightarrow Y$ continúe siendo un epimorfismo. Cuando Y es simple esto es equivalente a decir que todos los subobjetos $E' \subset E$ están contenidos en el núcleo de α .

Lema 3.16. [Szo9, Lemma 6.5.7] Sea S un objeto simple en una categoría abeliana y $\alpha : E \rightarrow S$ una extensión esencial. Para cada objeto simple T la aplicación natural

$$\alpha^* : \text{Hom}(S, T) \rightarrow \text{Hom}(E, T)$$

inducida por α , es un isomorfismo. En particular $\text{Hom}(E, T) = 0$ para T no isomorfo con S .

Demostración. Dado un morfismo no cero $\phi : E \rightarrow T$, debemos tener que $\text{Nuc}(\phi) \subset \text{Nuc}(\alpha)$, debido a que S es simple. La aplicación inducida $T/\text{Nuc}(\phi) \rightarrow T/\text{Nuc}(\alpha)$ debe ser un isomorfismo pues ambos objetos son simples, y así $\text{Nuc}(\phi) = \text{Nuc}(\alpha)$, con lo que obtenemos que ϕ se factoriza a través de α , es decir, existe ϕ' tal que $\phi = \phi' \circ \alpha = \alpha^*(\phi')$. Así el mapeo $\phi \mapsto \phi'$ es una inversa para α^* . La segunda afirmación se sigue del hecho que $\text{Hom}(S, T) = 0$ para dos objetos simples S, T no isomorfos. $\square$

El siguiente lema da un criterio para cuando una extensión esencial es proyectiva.

Lema 3.17 ([Szo9] Lemma 6.5.8). *Sea $E \rightarrow S$ una extensión esencial de un objeto simple S . Para todo $Y \in \langle X \rangle$ hay una desigualdad*

$$\dim_k \operatorname{Hom}(E, Y) \leq l_S(Y) \dim_k \operatorname{End}(S), \quad (3.1)$$

donde $l_S(Y)$ es el número de miembros de una serie de composición de Y que son isomorfos a S . Además, son equivalentes

- (a) *E es proyectivo.*
- (b) *Hay igualdad en (3.1) para todo objeto Y de $\langle X \rangle$.*
- (c) *Hay igualdad en (3.1) para $Y = X$.*

Demostración. El lado derecho de la desigualdad 3.1 es aditivo para sucesiones exactas cortas. Note que si tenemos una sucesión exacta de objetos

$$0 \longrightarrow Y' \longrightarrow Y \longrightarrow Y'' \longrightarrow 0,$$

entonces si consideramos el lado izquierdo obtenemos la desigualdad

$$\dim_k \operatorname{Hom}(E, Y) \leq \dim_k \operatorname{Hom}(E, Y') + \dim_k \operatorname{Hom}(E, Y''), \quad (3.2)$$

la cual es una igualdad si y sólo si el funtor $\operatorname{Hom}(E, -)$ es exacto, es decir si y sólo si E es proyectivo. Por el lema 3.16 hay igualdad en la fórmula 3.1 para Y simple. Para un Y arbitrario, podemos considerar una serie de composición de Y y utilizar los argumentos anteriores para concluir la desigualdad 3.1. Con este argumento hemos probado la doble implicación $1. \Leftrightarrow 2.$ y la implicación $2. \Rightarrow 3.$ es evidente. Para demostrar $3. \Rightarrow 2.$ note que si la igualdad es cierta para X entonces es posible demostrar que cierta para sumas directas de copias de X y sus cocientes y subcocientes debido a la desigualdad 3.2, es decir para todo objeto de $\langle X \rangle$. $\square$

Prueba de la proposición 3.13. Debido al lema 3.14 lo que debemos hacer es construir una extensión esencial proyectiva $P_S \rightarrow S$ para todo objeto simple S en $\langle X \rangle$. Lo hacemos al considerar una serie de composición

$$\{0\} = F^r \subset \cdots \subset F^1 \subset F^0 = X,$$

y construimos, por inducción en i , extensiones esenciales $P_i \rightarrow S$ que satisfacen

$$\dim_k \operatorname{Hom}(P_i, X/F^i) = l_S(X/F^i) \dim_k \operatorname{End}(S). \quad (3.3)$$

En efecto, empecemos con $P_1 := S$. Asumiendo que hemos construido P_{i-1} , consideremos una k -base $\phi_1, \dots, \phi_n$ de $\text{Hom}_k(P_i, X/F^i)$. Para $1 \leq j \leq n$, tome el producto fibrado Q_j definido por el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} Q_j & \longrightarrow & X/F^{i+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_i & \xrightarrow{\phi_j} & X/F^i \end{array}$$

donde la flecha vertical derecha es la proyección natural; note que las flechas verticales son epimorfismos. Sea Q el producto fibrado ¹ de los Q_j sobre P_i , para $1 \leq j \leq n$, y sea $P_{i+1} \subset Q$ el subobjeto minimal con la propiedad que la composición $P_{i+1} \rightarrow Q \rightarrow P_i$ es un epimorfismo. Entonces será una extensión esencial de P_i y por tanto también de S .

Para mostrar que P_{i+1} cumple la igualdad 3.3, observe primero que como $P_{i+1} \rightarrow P_i$ es un epimorfismo, la aplicación inducida $\text{Hom}(P_i, X/F^i) \rightarrow \text{Hom}(P_{i+1}, X/F^i)$ es inyectiva, pero la dimensión del primer espacio vectorial de esta aplicación es $l_S(X/F^i) \dim_k \text{End}(S)$ por la hipótesis de inducción y la del segundo es a lo sumo $l_S(X/F^i) \dim_k \text{End}(S)$, gracias a 3.1 aplicado con $E = P_{i+1}$ y $Y = X/F^i$. Esto es solo posible si

$$\text{Hom}(P_i, X/F^i) \simeq \text{Hom}(P_{i+1}, X/F^i) \quad (3.4)$$

Del diagrama de arriba inferimos que cada ϕ_j da lugar a una aplicación $\psi_j : Q_j \rightarrow X/F^{i+1}$ mediante el cambio de base. Como los ϕ_j forman una k -base de $\text{Hom}(P_i, X/F^i)$, componiendo los ψ_j con los epimorfismos $P_{i+1} \rightarrow Q_j$ se obtiene un morfismo $\text{Hom}(P_i, X/F^i) \rightarrow \text{Hom}(P_{i+1}, X/F^{i+1})$, y al componer éste con el isomorfismo 3.4 obtenemos un morfismo

$$\text{Hom}(P_{i+1}, X/F^i) \rightarrow \text{Hom}(P_{i+1}, X/F^{i+1}),$$

que funciona como una sección al morfismo natural

$\text{Hom}(P_{i+1}, X/F^{i+1}) \rightarrow \text{Hom}(P_{i+1}, X/F^i)$. En fin, todo esto nos asegura que la sucesión

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(P_{i+1}, F^i/F^{i+1}) \longrightarrow \text{Hom}(P_{i+1}, X/F^{i+1}) \longrightarrow \text{Hom}(P_{i+1}, X/F^i) \longrightarrow 0$$

es exacta (sólo necesitábamos corroborar la sobreyectividad de la última aplicación). La dimensión del término de la izquierda es $l_S(F^i/F^{i+1}) \dim_k \text{End}(S)$ gracias al lema 3.16, y la del término de la derecha es $l_S(X/F^i) \dim_k \text{End}(S)$ por la hipótesis de inducción y 3.4, gracias al lema 3.17 y a la igualdad en 3.2 obtenemos la fórmula requerida para $i + 1$. Por el lema anterior $P_S = P_r$ es el objeto deseado y esto completa la demostración. $\square$

¹Se puede demostrar en efecto que en una categoría abeliana los productos fibrados existen, esto puede consultarse en el libro Algebra I, de Serge Lang.

Combinando la proposición 1.19 y la proposición 3.13, tenemos inmediatamente el siguiente resultado.

Corolario 3.18. [Szo9, Corollary 6.5.9] *Con las hipótesis de la proposición 3.13, el funtor $A \mapsto \text{Hom}(P, A)$ induce una equivalencia de categorías entre la subcategoría $\langle X \rangle$ y $\text{Modf}_{\text{End}(P)}$, que es la categoría de $\text{End}(P)$ -módulos (derechos) finitamente generados.*

Lo que nos queda ver es que ω lleva a $\langle X \rangle$ en una categoría de comódulos. Note que $M = \omega(P)$ es un k -espacio vectorial finito-dimensional que tiene una estructura de $\text{End}(P)$ -módulo derecho, para un par $(\phi, a) \in \text{End}(P) \times \omega(P)$ considere la multiplicación $\phi \cdot a := \omega(\phi)(a)$. Ahora tenemos que:

Proposición 3.19. [Szo9, Proposition 6.5.10] *Mediante la equivalencia de categorías del corolario anterior el funtor ω se convierte isomorfo al funtor que envía un $\text{End}(P)$ -módulo derecho N en el k -espacio vectorial $N \otimes_{\text{End}(P)} \omega(P)$.*

Demostración. Para cada objeto A en $\langle X \rangle$ la regla $\phi \otimes x \mapsto \omega(\phi)(x)$ define una aplicación natural $\text{Hom}(P, A) \otimes_{\text{End}(P)} \omega(P) \rightarrow \omega(A)$ que es incluso funtorial en A . Es un isomorfismo para $A = P$, y como es compatible con sumas directas finitas, también es un isomorfismo para $A = P^{\oplus r}$, con $r > 0$. Dado un objeto arbitrario A , consideramos- en virtud del lema 1.20, un epimorfismo $\lambda : P^{\oplus r} \rightarrow A$, y consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}(P, K) \otimes \omega(P) & \longrightarrow & \text{Hom}(P, P^{\oplus r}) \otimes \omega(P) & \longrightarrow & \text{Hom}(P, A) \otimes \omega(P) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow & & \\ \omega(K) & \longrightarrow & \omega(P^{\oplus r}) & \longrightarrow & \omega(A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde $K := \text{Nuc}(\lambda)$ y los productos tensoriales se toman sobre $\text{End}(P)$. La fila inferior es exacta porque ω es exacto, y la fila superior es exacta (en la derecha) debido al producto tensorial. Ya vimos que la aplicación vertical del medio es un isomorfismo, y por tanto es sobreyectiva, y esto implica que la aplicación de la aplicación vertical de la derecha. Com esto sucede para todo objeto A , en particular para $A = K$, entonces tendremos sobreyectividad en la aplicación vertical de la izquierda, y usando que la aplicación vertical del medio es inyectiva, persiguiendo el diagrama se puede demostrar que la aplicación de la derecha es inyectiva también, y por tanto un isomorfismo (que da lugar a uno entre funtores). $\square$

Gracias a nuestras hipótesis sobre ω tenemos que:

Corolario 3.20. [Sz09, Corollary 6.5.11] *El functor $N \mapsto N \otimes_{\text{End}(P)} \omega(P)$ es exacto y fiel en $\text{Mod}_{\text{End}(P)}$.*

Observación. De ahora en adelante usamos la notación $R := \text{End}(P)$ y $M := \omega(P)$. Note que el producto tensorial $A := M^* \otimes_R M$ tiene sentido como k -espacio vectorial, porque el k -espacio vectorial dual M^* tiene una estructura de $\text{End}(P)$ -módulo derecho inducida por la de M . Lo que haremos es definir una estructura de k -coálgebra en A .

Generalmente, dado un R -módulo derecho N , tenemos una aplicación natural

$$\text{id}_{N \otimes_R M} \otimes \delta_M : N \otimes_R M (= (N \otimes_R M) \otimes_k k) \rightarrow N \otimes_R M \otimes_k M^* \otimes_k M \quad (3.5)$$

donde $\delta_M : k \rightarrow M^* \otimes_k M$ es la coevaluación discutida en el ejemplo 3.5. Cuando $N = M^*$ esto define una comultiplicación $\Delta : A \rightarrow A \otimes_k A$, junto con la counidad $A \rightarrow k$ dada por la aplicación $\phi \otimes m \rightarrow \phi(m)$ obtenemos una estructura de k -coálgebra en A [Omitiremos la verificación de los diagramas asociados]. Más aun, para cada R -módulo N la aplicación 3.5 da a $N \otimes_R M$ una estructura de A -comódulo derecho. De esta manera obtenemos un functor $N \mapsto N \otimes_R M$ de la categoría de R -módulos en la de A -comódulos.

Proposición 3.21. [Sz09, Proposition 6.5.12] *El functor discutido en la observación 3.1 induce una equivalencia de categorías entre los R -módulos finitamente generados y los A -comódulos finito-dimensionales sobre como k -espacios vectoriales.*

Demostración. Por el corolario 3.20 este functor es fiel, así que debemos mostrar que es pleno y esencialmente sobreyectivo. Sea V un A -comódulo, con su aplicación $\rho : V \rightarrow V \otimes_k A$. Como $A = M^* \otimes_R M$ tenemos dos aplicaciones naturales de R -módulos derechos $V \otimes_k M \rightarrow V \otimes_k M^* \otimes_R M \otimes_k M^*$: una es $\rho \otimes \text{id}_{M^*}$ y la otra es $\text{id}_V \otimes \delta_M \otimes \text{id}_{M^*}$. Escriba λ para la diferencia de estas dos aplicaciones y sea $N = \text{Nuc } \lambda$. Tensorizando λ con id_M sobre R obtenemos una aplicación $V \otimes_k A \rightarrow V \otimes_k A \otimes_k A$ que es igual a la aplicación $\rho \otimes \text{id}_A - \text{id}_V \otimes \Delta$, y gracias a la proposición 2.20 y a la exactitud del functor $N \mapsto N \otimes_R M$ (Corolario 3.20) obtenemos un isomorfismo $N \otimes_R M \simeq V$, con lo que probamos que el functor dado es esencialmente sobreyectivo. $\square$

Esto nos demuestra el teorema 3.11 para las subcategorías de la forma $\langle X \rangle$. Ahora debemos aplicar un argumento de límite directo para demostrar el teorema en general.

Prueba del Teorema 3.11. Escriba la categoría $\mathcal{T}$ como la unión de sus subcategorías $\langle X \rangle$ sobre todos los objetos X de $\mathcal{T}$. Este sistema de subcategorías está ordenado parcialmente por la inclusión y además está dirigido, porque dados dos objetos $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{T})$, las categorías

$\langle X \rangle, \langle Y \rangle$ son subcategorías de $\langle X \oplus Y \rangle$. Por la proposición 3.13 cada subcategoría $\langle X \rangle$ es equivalente a una categoría de módulos Modf_{R_X} , y por la proposición 1.21, una subcategoría $\langle Y \rangle$ es equivalente a una categoría de módulos $\text{Modf}_{R_X/I}$. De la proposición 3.21 obtenemos además una equivalencia entre Modf_{R_X} y Comodf_{A_X} donde $A_X = (M_X)^* \otimes M_X$, para $M_X = \omega(P_X)$, donde P_X es el generador proyectivo de la categoría $\langle X \rangle$, que existe por la proposición 3.13. Por la proposición 3.19 obtenemos una estructura de A_X -comódulo para $\omega(X)$.

Si $Y \subset X$ (y por tanto $\langle Y \rangle$ es una subcategoría de $\langle X \rangle$), entonces la coálgebra A_Y que corresponde a la subcategoría plena $\langle Y \rangle \simeq \text{Modf}_{R_X/I}$ es

$$A_Y := (M \otimes_{R_X} R_X/I)^* \otimes_{R_X/I} M \otimes_{R_X} R_X/I \simeq (M \otimes_{R_X} R_X/I)^* \otimes_{R_X} M$$

cuya aplicación natural en $A_X = M^* \otimes_{R_X} M$ es inyectiva ya que tensorizar con M es un funtor exacto, por el corolario 3.20. El límite directo

$$A_{\mathcal{T}} := \varinjlim_{X \in \text{Obj}(\mathcal{T})} A_X$$

es una coálgebra en la que cada A_X es una subcoálgebra. Como cada $\omega(X)$ es un A_X -comódulo, podemos otorgarle una estructura de $A_{\mathcal{T}}$ -comódulo extendiéndolo su estructura como A_X -comódulo a todo $A_{\mathcal{T}}$. El hecho que ω induce una equivalencia de categorías entre $\mathcal{T}$ y $\text{Comodf}_{A_{\mathcal{T}}}$ se deduce de aplicar (en el límite) la equivalencia conocida sobre cada subcategoría $\langle X \rangle$ y el hecho de que todo $A_{\mathcal{T}}$ -comódulo viene de algún A_X -comódulo mediante cambio de base, para algún objeto X de $\mathcal{T}$. $\square$

Definición 3.22. Si $(\mathcal{T}, \omega)$ es una categoría tannakiana, el esquema afín en grupos asociado G se llama el grupo fundamental tannakiano de la categoría $\mathcal{T}$.

La existencia de este esquema en grupos será explotada más adelante cuando examinemos las construcciones de un esquema fundamental en grupos.

3.2. Retículos Tannakianos

Ahora presentaremos la teoría de categorías tannakianas sobre un anillo de Dedekind. Ésta teoría será de mucha importancia en nuestro tratamiento del esquema fundamental en grupos sobre un anillo de valuación discreta más adelante. Habrá muchas similitudes y conexiones con la teoría anterior. Presentaremos un resultado de dualidad similar al

de categorías tannakianas sobre un cuerpo. Nos basaremos en el tratamiento dado por [DuHai18].

En esta sección R es un anillo de Dedekind o dominio de Dedekind: es un dominio entero que no es un cuerpo, que es integralmente cerrado, Noetheriano y de dimensión 1 (esto es, todo ideal primo es maximal). Un ejemplo de estos anillos son los anillos de enteros de cuerpos de números, hecho que fue ampliamente estudiado por Richard Dedekind en el siglo XIX. Otro ejemplo, que en realidad será el que tendrá todo nuestro interés, es el de un anillo de valuación discreta.

En adelante G será un esquema afín en grupos plano sobre R y $L := R[G]$ será su R -coálgebra asociada. $\text{Comod}^0(L)$ denota la categoría de comódulos finitos y proyectivos sobre L , y $\text{Comod}_f(L)$ la categoría de comódulos finitos sobre L . Similarmente, sobre un anillo B , escribiremos $\text{Mod}_f(B)$ como la categoría de B -módulos finitos y $\text{Mod}^0(B)$ la categoría de B -módulos finitos y proyectivos.

Definición 3.23. Si $\mathcal{C}$ es una categoría R -lineal abeliana y tensorial, un objeto de $\mathcal{C}$ se llama rígido si posee un dual en $\mathcal{C}$. Denotamos por $\mathcal{C}^0$ a la subcategoría plena de $\mathcal{C}$ que consiste de los objetos rígidos. Decimos que $\mathcal{C}$ está dominada por $\mathcal{C}^0$ si todo objeto de $\mathcal{C}$ es un cociente de un objeto rígido. La categoría $\mathcal{C}^0$ se llama la categoría de definición de $\mathcal{C}$

Lo que estudiaremos es cómo pasar de una categoría R -lineal a una categoría K -lineal mediante el proceso de cambio de base.

Definición 3.24 (Extensión de escalares de una categoría). Sean $\varphi : R \rightarrow S$ un morfismo de anillos y $\mathcal{C}$ una categoría R -lineal. Definimos la categoría $\mathcal{C}_S$ obtenida de $\mathcal{C}$ a partir de la extensión escalar φ como la categoría cuyos objetos son los mismos que $\mathcal{C}$ y sus conjuntos de morfismos vienen dados por

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, Y) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \otimes_R S,$$

para $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.

La categoría $\mathcal{C}_S$ es S -lineal y naturalmente hay un funtor R -lineal $\varphi^* : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$. Si φ es plano, entonces φ^* preserva epimorfismos y monomorfismos. Dado $\omega : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor R -lineal entre dos categorías R -lineales $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ entonces de manera natural se obtiene un funtor $\omega_S : \mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{D}_S$, dado en objetos por

$$\omega_S(X) = \omega(X)$$

y en morfismos por

$$\omega_S(f) = \omega \otimes_R \text{id}_K(f),$$

para $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \otimes_R K$.

Si $\mathcal{M}$ es una categoría R -lineal y tensorial, el funtor tensor $\otimes: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, es un funtor R -bilinear que se extiende a un funtor S -bilinear $\otimes_S: \mathcal{M}_S \times \mathcal{M}_S \rightarrow \mathcal{M}_S$ de la forma discutida anteriormente, por lo que $\mathcal{M}_S$ es tensorial también. Si $\mathcal{M}$ es rígida entonces $\mathcal{M}_S$ también.

Si L es una R -coálgebra plana y $L_K := L \otimes_R K$ entonces L_K es una coálgebra sobre K . Hay un funtor natural

$$\begin{aligned} \text{Comod}^0(L) &\rightarrow \text{Comod}_f(L_K) \\ M &\rightarrow M \otimes_R K \end{aligned}$$

que induce un funtor

$$\phi: (\text{Comod}^0(L))_K \rightarrow \text{Comod}_f(L_K)$$

Éste último, de acuerdo a [Wedo4, subsección 6.4], es una equivalencia de categorías abelianas, por lo que si G es un esquema afín en grupos sobre R entonces hay una equivalencia de categorías abelianas tensoriales:

$$(\text{Rep}^0(G))_K \equiv \text{Rep}_f(G_K)$$

En una categoría aditiva y tensorial $\mathcal{C}$, el anillo de endomorfismos del objeto unidad I es un anillo conmutativo. Ahora, dado un anillo conmutativo cualquiera B , una categoría aditiva rígida y tensorial sobre B es una categoría $\mathcal{T}$, rígida, tensorial y aditiva tal que $\text{End}(I) \simeq B$, donde I es el objeto unidad de $\mathcal{T}$. Un objeto J en $\mathcal{T}$ se llama trivial, si hay un monomorfismo $J \rightarrow I^n$ para algún n . La subcategoría plena de objetos triviales de $\mathcal{T}$ se denotará como $\mathcal{T}^{\text{triv}}$.

Definición 3.25. Un retículo tannakiano neutral sobre R es una categoría aditiva rígida tensorial $\mathcal{T}$ sobre R , que cumple lo siguiente:

- (a) Todo morfismo en $\mathcal{T}$ tiene núcleo e imagen.
- (b) La categoría $\mathcal{T}_K$ obtenida por extensión de escalares es abeliana.

(c) Hay un funtor tensorial R -lineal aditivo

$$\omega : \mathcal{T} \rightarrow \text{Mod}(R)$$

tal que

- ★ ω es fiel y preserva núcleos e imágenes.
- ★ ω restringido a $\mathcal{T}^{\text{triv}}$ es plenamente fiel.

Lema 3.26. *Si $(\mathcal{T}, \omega)$ es un retículo tannakiano neutral entonces la imagen de ω está en $\text{Mod}^0(R)$ y para todo par de objetos $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{T})$, el conjunto de morfismos $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$ es un R -módulo finito y plano, en particular esto implica que el funtor $i_* : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_K$ es fiel, para $i : R \rightarrow K$ la inclusión.*

Demostración. De acuerdo a [DuHai18], como $\mathcal{T}$ es rígida, esto implica que la imagen de ω está en $\text{Mod}^0(R)$. Como ω es fiel entonces los R -módulos $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$ son R -módulos finitos y planos, ya que cada morfismo

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_R(\omega(X), \omega(Y))$$

es una inclusión en un R -módulo finito y proyectivo (ya que cada $\omega(X) \in \text{Mod}^0(R)$) y por tanto cada $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$ es finito y plano sobre R . Esto implica que $i^* : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_K$ es fiel, porque entonces la aplicación

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \otimes_R K = \text{Hom}_{\mathcal{T}_K}(X_K, Y_K)$$

será inyectiva. □

Observación. Como $i^* : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_K$ es fiel, identificamos a $\mathcal{T}$ con su imagen en $\mathcal{T}_K$. Un objeto X de $\mathcal{T}$, cuando se considera como objeto de $\mathcal{T}_K$ se denotará X_K y la imagen de un morfismo f en $\mathcal{T}$ bajo el funtor i^* se denotará por f también.

Para $a \in R$, $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{T})$, usamos $[a]$ para el morfismo $X \rightarrow Y$ inducido por a , y escribiremos af para cualquiera de los morfismos $f \circ [a]$, $[a] \circ f$. Como cada $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$ es un R -módulo finito, podemos concluir que si $f : X_K \rightarrow Y_K$ es un morfismo en $\mathcal{T}_K$, entonces existe un $a \in R$ tal que af es un morfismo en $\mathcal{T}$.

Los retículos tannakianos están relacionados con las categorías tannakianas sobre cuerpos, debido a la siguiente proposición.

Proposición 3.27. *Si $(\mathcal{T}, \omega)$ es un retículo tannakiano neutral sobre un anillo de Dedekind R , entonces el funtor $\omega_K : \mathcal{T}_K \rightarrow \text{Vect}(K)$ es exacto y por tanto $(\mathcal{T}_K, \omega_K)$ es una categoría tannakiana neutral sobre K .*

Para demostrar este resultado haremos uso de dos lemas. Este argumento lo hemos tomado de [DuHai18]. Omitiremos la demostración del primer lema.

Lema 3.28. *Sea $g : X \rightarrow Y$ tal que $g : X_K \rightarrow Y_K$ es un isomorfismo. Entonces existe $a \in R$ y $h : Y \rightarrow X$ tal que $h \circ g = g \circ h = [a]$. Más generalmente, dados objetos X, Y, Z en $\mathcal{T}$ y morfismos $f : X \rightarrow Z, g : Y \rightarrow Z$, asuma que existe $h : X_K \rightarrow Y_K$ tal que $g \circ h = f$, entonces existe $a \in R$ tal que $h' : X \rightarrow Y$ tal que $ah = h'$ y $g \circ h' = af$. El siguiente diagrama ilustra esta situación.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{[a]} & X \\ h' \downarrow & \swarrow h & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

Lema 3.29. *Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo en $\mathcal{T}$. Si existe $\varphi : \omega(X) \rightarrow \omega(Y)$ tal que $a\varphi = \omega(f)$ para un $a \in R$ entonces existe un $g : X \rightarrow Y$ con $ag = f$ y $\omega(g) = \varphi$.*

Demostración. Suponga primero que $Y = I$, el objeto unidad. Considere la factorización imagen de $f = hg$,

$$X \xrightarrow{g} J \xrightarrow{h} I.$$

Aplicando ω tenemos

$$\begin{array}{ccc} \omega(X) & \xrightarrow{\omega(g)} & \omega(J) \\ \varphi \downarrow & \searrow \omega(f) & \downarrow \omega(h) \\ R & \xrightarrow{[a]} & R. \end{array}$$

Como $\omega(h)$ es inyectiva y su imagen está en aR , se factoriza como $\omega(J) \xrightarrow{\psi} R \xrightarrow{[a]} R$. Como ω es plenamente fiel en objetos triviales, existe un $h' : J \rightarrow I$ tal que $\psi = \omega(h')$ y por tanto $\varphi = \omega(h' \circ g)$. Como $\omega(f) = a\varphi = \omega(h' \circ g) = \omega(a(h' \circ g))$ y ω es fiel, entonces $f = a(h' \circ g)$.

Para el caso general, existe un isomorfismo

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X \otimes Y^\vee, I)$$

$$q \mapsto \hat{q},$$

que es compatible con ω , es decir que induce un isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(\omega(X), \omega(Y)) &\simeq \mathrm{Hom}_R(\omega(X \otimes Y^\vee), \omega(I)) \\ \psi &\mapsto \tilde{\psi}. \end{aligned}$$

Por lo que si $\varphi : \omega(X) \rightarrow \omega(Y)$, tenemos un morfismo $\tilde{\varphi} : \omega(X \otimes Y^\vee) \rightarrow \omega(I) = R$, tal que $a\tilde{\varphi} = \hat{f}$. Por lo anterior existe $\tilde{g} : X \otimes Y^\vee \rightarrow I$ tal que $a\tilde{g} = \hat{f}$ y $\omega(\tilde{g}) = \tilde{\varphi}$. Usando la inversa del isomorfismo anterior se obtiene la aplicación g deseada. $\square$

Prueba de la proposición 3.27. Recuerde que el funtor $i_* : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_K$ preserva mono y epimorfismos. Probamos que ω_K preserva núcleos y epimorfismos. Sea $f : Y_K \rightarrow Z_K$ un epimorfismo en $\mathcal{T}_K$. Multiplicando f por un elemento de R si es necesario, podemos asumir que f es un morfismo en $\mathcal{T}$. Considere la factorización imagen de f en $\mathcal{T}$: $Y \xrightarrow{h} \mathrm{im}(f) \xrightarrow{g} Z$. En $\mathcal{T}_K$ g es epimorfismo y monomorfismo y por tanto es un isomorfismo. Ahora, $\omega(h)$ es sobreyectiva (ω preserva núcleos e imágenes), y por lo tanto también lo es $\omega_K(h)$, así que $\omega_K(f)$ también es sobreyectiva. Ahora, sea $g : X_K \rightarrow Y_K$ el núcleo de f en $\mathcal{T}_K$. Similarmente podemos asumir que g está en $\mathcal{T}$. Hay una aplicación inducida por $g : X \rightarrow \mathrm{Nuc}(f)$, en $\mathcal{T}$. Considere su factorización imagen

$$X \xrightarrow{p} \mathrm{im}(g) \xrightarrow{q} \mathrm{Nuc}(f).$$

Tenemos, como en lo de arriba, que q es epi y monomorfismo en $\mathcal{T}_K$, y aplicando ω a la factorización anterior,

$$\omega(X) \xrightarrow{\omega(p)} \omega(\mathrm{im}(g)) \xrightarrow{\omega(q)} \omega(\mathrm{Nuc}(f)),$$

obtenemos que $\omega(q)$ es una transformación lineal invertible en $\mathrm{Vect}(K)$ y $\omega(p)$ es sobreyectiva. En $\mathrm{Vect}(K)$ se puede verificar que esto implica que $\omega(X)$ es el núcleo de $\omega(f)$. $\square$

De manera similar al caso de las categorías tannakianas sobre un cuerpo, los retículos tannakianos satisfacen un resultado de dualidad, que estudiaremos a continuación.

Teorema 3.30. *Si $(\mathcal{T}, \omega)$ es un retículo tannakiano sobre un anillo de Dedekind R , entonces existe una equivalencia de categorías entre $\mathcal{T}$ y $\mathrm{Rep}^0(G)$ para algún esquema afín en grupos G sobre R .*

Para demostrar este teorema haremos uso del espacio de coeficientes de un comódulo sobre un álgebra de Hopf.

Definición 3.31. Sea V un L -comódulo finito y proyectivo, donde L es una R -álgebra de Hopf. La coacción $\rho : V \rightarrow V \otimes_R L$ induce un mapeo R -lineal

$$Cf : V^* \otimes_R V \rightarrow L$$

$$\varphi \otimes m \mapsto \sum_i \varphi(m_i) m'_i$$

para $\varphi \in V^*$ y $m \in V$ con $\rho(m) = \sum_i m_i \otimes m'_i$. La imagen $Cf(V)$ se llama el espacio de coeficientes de V .

Proposición 3.32. Si V es un L -comódulo, para L una R -álgebra de Hopf entonces $Cf(V)$ es una R -subálgebra de Hopf de L , y además la aplicación $\rho : V \rightarrow V \otimes_R L$ se factoriza a través de $V \otimes Cf(V)$, lo que hace de V un $Cf(V)$ -comódulo.

Demostración. Si $\{v_j\}$ es un conjunto generador de V como R -módulo (que asumimos ser finito sobre R), por la observación 2.3, tenemos que si

$$\rho(v_j) = \sum_i v_i \otimes a_{ij}$$

entonces

$$\Delta(a_{ij}) = \sum_k a_{ik} \otimes a_{kj}$$

Si $\{\delta_j\}$ es el dual de $\{v_j\}$ en V^* , entonces

$$\begin{aligned} \Delta(Cf(\delta_r \otimes v_j)) &= \Delta\left(\sum_i \delta_r(v_i) a_{ij}\right) \\ &= \Delta(a_{rj}) \\ &= \sum_k a_{rk} \otimes a_{kj} \\ &= \sum_k Cf(\delta_r \otimes v_k) \otimes Cf(\delta_k \otimes v_j) \end{aligned}$$

Esto nos dice entonces que

$$\Delta(Cf(V)) \subset Cf(V) \otimes Cf(V)$$

Por lo que $Cf(V)$ es una R -subálgebra de Hopf de L . De lo anterior tenemos que $Cf(\delta_k \otimes v_j) = a_{kj}$, por lo que

$$\rho(v_j) = \sum_k v_k \otimes Cf(\delta_k \otimes v_j)$$

es decir, la imagen de ρ está contenida en $V \otimes Cf(V)$, así que al tomar su restricción obtenemos una coacción de V sobre $Cf(V)$. $\square$

Prueba del Teorema 3.30. Por la proposición 3.27, la categoría $(\mathcal{T}_K, \omega_K)$ es una categoría tannakiana neutral sobre K , por el teorema 3.10 hay una equivalencia de categorías

$$\omega_K : \mathcal{T}_K \equiv \text{Comod}_f(\mathcal{L})$$

para alguna K -coálgebra $\mathcal{L}$, por lo que para todo objeto X en $\mathcal{T}$ se cumple que

$$\omega(X) \otimes_R K = \omega_K(X_K)$$

es un comódulo sobre $\mathcal{L}$. Denote por $\mathcal{L}_R$ la unión de todos los espacios de coeficientes $Cf(\omega(X))$, sobre todos los objetos X de $\mathcal{T}$. Entonces $\mathcal{L}_R$ es una R -subcoálgebra de $\mathcal{L}$ sobre la cual cada $\omega(X)$ es un comódulo, por la proposición 3.32, y además tenemos que $\mathcal{L}_R \otimes_R K = \mathcal{L}$. Por lo tanto el funtor ω se factoriza a través del funtor

$$\omega : \mathcal{T} \rightarrow \text{Comod}^0(\mathcal{L}_R). \quad (3.6)$$

Lo que hacemos ahora es mostrar que el funtor en 3.6 es una equivalencia de categorías. Probemos que ω es plenamente fiel. Por hipótesis ω es fiel. La dualidad tannakiana para $\mathcal{T}_K$ dice que

$$\omega(\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)) \otimes_R K = \text{Hom}_{\mathcal{L}}(\omega_K(X_K), \omega_K(Y_K)).$$

Si $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{L}_R}(\omega(X), \omega(Y))$ entonces la igualdad anterior asegura la existencia de un $a \in R$ tal que $a\varphi = \omega(f)$ para un $f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$, por el lema 3.29, existe $g \in \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$ tal que $\omega(g) = \varphi$, con lo que tenemos que ω es pleno. Los detalles de la prueba que ω es esencialmente sobreyectivo pueden consultarse en [DuHai18], por simplicidad omitiremos esta parte de la prueba. $\square$

Finalmente, presentamos cómo asignar un esquema en grupos sobre R a un retículo tannakiano.

Definición 3.33. Sea $(\mathcal{T}, \omega)$ un retículo tannakiano neutral sobre R . Sea S un R -álgebra fielmente plana. Para un funtor fibra $\omega : \mathcal{T} \rightarrow \text{Mod}(R)$, el funtor $\text{Aut}_R^\otimes : R\text{-Alg} \rightarrow \text{Grupos}$ está dado por

$$S \mapsto \text{Aut}_S^\otimes(\omega \otimes_R S),$$

donde $\text{Aut}_S^\otimes(\omega \otimes_R S)$ es el conjunto (grupo) de morfismos tensoriales S -lineales entre funtores

$$\omega \otimes_R S \rightarrow \omega \otimes_R S,$$

para $\omega \otimes_R S : \mathcal{T}_S \rightarrow \text{Mod}(S)$ la extensión de escalares del funtor ω .

El funtor $\text{Aut}_R^\otimes(\omega)$ es en realidad un esquema afín en grupos sobre R o sea un funtor representable en la categoría de R -álgebras. Más específicamente, en [DuHai18] se demuestra lo siguiente. La prueba utiliza varios resultados de [Saa72].

Proposición 3.34. [DuHai18] *Existe una R -coálgebra L tal que para toda R -álgebra S se cumple que*

$$\text{Aut}_R^\otimes(\omega)(S) \simeq \text{Hom}_{\text{Alg}}(L, S),$$

por lo que $\text{Aut}_R^\otimes(\omega)$ es un esquema afín en grupos sobre R .

De hecho, la dualidad Tannakiana de $\mathcal{T}$ se puede enunciar más específicamente utilizando el esquema en grupos $\text{Aut}_R^\otimes(\omega)$, como lo mencionamos en el siguiente resultado.

Teorema 3.35. [DuHai18, Theorem 2.3.2, pág.11] *Sea $(\mathcal{T}, \omega)$ un retículo Tannakiano sobre un anillo de Dedekind R . Entonces el esquema en grupo $G = \text{Aut}_R^\otimes(\omega)$ induce una equivalencia de categorías entre $\mathcal{T}$ y $\text{Rep}^0(G)$.*

Capítulo 4

Esquema fundamental en grupos

4.1. Una mirada a la teoría del grupo fundamental étale

Para motivar el estudio del esquema fundamental en grupos presentaremos una pequeña introducción a la teoría de los cubrimientos de Galois de un esquema y a la construcción del grupo fundamental étale. Esta teoría representa una importante generalización de la teoría de Galois, en el contexto de los esquemas y sus cubrimientos. Nos interesarán los teoremas estructurales obtenidos por Grothendieck para el grupo fundamental étale. Nos basamos en el tratamiento dado en el Capítulo 5 de [Szo9], en donde se encuentran demostraciones de algunos resultados que exhibiremos acá. En primer lugar, debemos estudiar los cubrimientos étale de un esquema.

Definición 4.1. Un morfismo finito de esquemas $\phi : X \rightarrow S$ es localmente libre si el haz imagen directa $\phi_* \mathcal{O}_X$ es localmente libre (de rango finito). Si además cada fibra X_P de ϕ es el espectro de un $k(P)$ -álgebra finita y étale entonces decimos que ϕ es un morfismo étale finito. Un cubrimiento étale finito es un morfismo étale finito sobreyectivo. Un punto geométrico de un esquema S , es un morfismo $\bar{s} : \text{Spec}(\Omega) \rightarrow S$, donde Ω es un cuerpo algebraicamente cerrado. La imagen de $\bar{s}$ será un punto s de S tal que Ω es una extensión algebraicamente cerrada de $k(s)$. Dados $\phi : X \rightarrow S$ un morfismo de esquemas y $\bar{s} : \text{Spec}(\Omega) \rightarrow S$ un punto geométrico de S , la fibra geométrica $X_{\bar{s}}$ de ϕ sobre $\bar{s}$ se define como el producto fibrado $X \times_S \text{Spec}(\Omega)$ definido por ϕ y $\bar{s}$.

Para estudiar la teoría de Galois de los cubrimientos étale debemos estudiar los grupos de automorfismos de dichos cubrimientos.

Definición 4.2. Dado un morfismo de esquemas $\phi : X \rightarrow S$, definimos $\text{Aut}(X|S)$ como el grupo de automorfismos de esquemas $f : X \rightarrow X$ que preservan a ϕ . Si $\bar{s} : \text{Spec}(\Omega) \rightarrow S$ hay una acción natural por la izquierda de $\text{Aut}(X|S)$ en la fibra geométrica $X_{\bar{s}}$, que viene del cambio de base.

Si $\phi : X \rightarrow S$ es un cubrimiento étale finito y conexo, se puede demostrar que $\text{Aut}(X|S)$ es un grupo finito. Puede consultar [Szo9, Corollary 5.3.4, pág. 166] para verificar ésto.

Definición 4.3. Sean $\phi : X \rightarrow S$ un morfismo afín y sobreyectivo de esquemas y $G \subset \text{Aut}(X|S)$ un subgrupo finito. Defina un espacio anillado $G \backslash X$ y un morfismo de espacios anillados $\pi : X \rightarrow G \backslash X$ como sigue. El espacio topológico asociado de $G \backslash X$ es el cociente de X por la acción de G , y π es la proyección natural. Entonces defina el haz estructural en $G \backslash X$ como el subhaz $(\pi_* \mathcal{O}_X)^G$, de elementos G -invariantes en $\pi_* \mathcal{O}_X$. Bajo esta construcción $G \backslash X$ es un esquema y π es un morfismo de esquemas afín y sobreyectivo (ver [Szo9, Proposition 5.3.6, pág. 167]).

Antes de observar el principal resultado de la teoría de Galois para cubrimientos étale, presentamos esta proposición, que es la proposición 5.3.7 de [Szo9].

Proposición 4.4. Sea $\phi : X \rightarrow S$ un cubrimiento étale finito y conexo y $G \subset \text{Aut}(X|S)$ un subgrupo finito de S -automorfismos de X . Entonces $X \rightarrow G \backslash X$ es un cubrimiento étale finito de $G \backslash X$ y $G \backslash X$ es un cubrimiento étale finito de S .

Un cubrimiento étale finito $\phi : X \rightarrow S$ se llama de Galois, si $\text{Aut}(X|S)$ actúa transitivamente sobre las fibras geométricas de S . El siguiente teorema establece una relación importante entre cubrimientos de Galois de S y subgrupos de $\text{Aut}(X|S)$, su demostración se puede encontrar en la proposición 5.3.8 de [Szo9].

Ejemplo 4.5. Debido a la correspondencia (contravariante) entre morfismos entre esquemas afines y morfismos de álgebras, si $S = \text{Spec}(k)$, donde k es un cuerpo, entonces un cubrimiento de Galois de S es de la forma $x = \text{Spec}(L) \rightarrow \text{Spec}(k)$, donde L es una k -álgebra separable (lo cual incluye el caso en que L/k es una extensión separable). Cuando L/k es una extensión de cuerpos, entonces $\text{Aut}(X|S)$ coincide con el grupo de Galois de dicha extensión. Como vemos esto nos da el indicio que la teoría de recubrimientos de Grothendieck extiende los resultados de la teoría de Galois clásica al contexto de los esquemas. Ejemplo de ello es el siguiente teorema.

Teorema 4.6 (Teoría de Galois para cubrimientos étale finitos). Sea $\phi : X \rightarrow S$ un cubrimiento étale finito de Galois. Si $Z \rightarrow S$ es un cubrimiento étale finito y conexo que posee un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & Z \\ & \searrow \phi & \downarrow \psi \\ & & S, \end{array}$$

entonces $\pi : X \rightarrow Z$ es un cubrimiento étale finito de Galois, y en realidad $Z \simeq H \backslash X$ para algún subgrupo H de $G = \text{Aut}(X|S)$. De esta forma obtenemos una biyección entre subgrupos de G y cubrimientos étale finitos intermedios de S . El cubrimiento $\psi : Z \rightarrow S$ es de Galois si y sólo si H es un subgrupo normal de G , en cuyo caso $\text{Aut}(Z|S) \simeq G/H$.

Observación. Es importante recalcar que cuando ϕ es un morfismo dado por una extensión de Galois de cuerpos (en el sentido clásico) entonces el teorema anterior coincide con el clásico teorema fundamental de la teoría de Galois. Note que un cubrimiento étale finito de Galois de esquemas afines de cuerpos es lo mismo que una extensión separable de cuerpos. Esta es una importante generalización hecha durante el siglo XX, en la que la idea de separabilidad se puede extender a cubrimientos más generales que las extensiones de cuerpos.

Ya que hemos dado un vistazo a la teoría de Galois de cubrimientos étale de un esquema, procedemos a estudiar un poco la construcción de Grothendieck para el grupo fundamental étale (o algebraico).

Definición 4.7. Para un esquema S , denote Fet_S la categoría cuyos objetos son los cubrimientos étale finitos de S y los morfismos son morfismos de esquemas sobre S . Fije un punto geométrico $\bar{s} : \text{Spec}(\Omega) \rightarrow S$. Para un objeto $X \rightarrow S$ de Fet_S consideramos la fibra geométrica $X_{\bar{s}} = X \times_S \text{Spec}(\Omega)$ y llamamos $\text{Fib}_{\bar{s}}(X)$ a su conjunto asociado (su espacio topológico visto como conjunto). Dado un morfismo $X \rightarrow Y$ en Fet_S , hay un morfismo inducido de esquemas $X_{\bar{s}} \rightarrow Y_{\bar{s}}$, y por lo tanto una aplicación de conjuntos $\text{Fib}_{\bar{s}}(X) \rightarrow \text{Fib}_{\bar{s}}(Y)$. De esta manera hemos definido un funtor

$$\text{Fib}_{\bar{s}} : \text{Fet}_S \rightarrow \text{Conjuntos},$$

al cual llamamos el funtor fibra en el punto geométrico $\bar{s}$.

Dado un funtor $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$, un automorfismo de F es un isomorfismo de funtores $\Phi : F \rightarrow F$. El grupo de automorfismos de F se denota por $\text{Aut}(F)$. Note que si $\phi \in \text{Aut}(F)$ y $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, entonces por definición hay un morfismo $F(C) \rightarrow F(C)$ inducido por ϕ . Para un funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Conjuntos}$, esto da una acción natural izquierda de $\text{Aut}(F)$ en $F(C)$.

Definición 4.8. Dado un esquema S y un punto geométrico $\bar{s} : \text{Spec}(\Omega) \rightarrow S$, definimos el grupo fundamental algebraico $\pi_1(S, \bar{s})$ como el grupo de automorfismos del funtor $\text{Fib}_{\bar{s}}$ en Fet_S .

Ejemplo 4.9. (a) En el caso cuando $S = \text{Spec}(k)$ para k un cuerpo, y está dotado de un punto geométrico $\bar{s} : \text{Spec}(\Omega) \rightarrow S$ uno obtiene que el funtor $\text{Fib}_{\bar{s}}$ está representado por k_s , la clausura separable de k en Ω . [Aquí vemos el porqué de introducir un punto geométrico en nuestro análisis, intuitivamente responde a la necesidad de incluir nuestros cuerpos en un cuerpo ambiente que sea algebraicamente cerrado]. En este caso, tenemos entonces que $\pi_1(S, \bar{s}) \simeq \text{Gal}(k_s|k)$. Éste último se conoce como el grupo de Galois absoluto de k y ha sido fuente de serias investigaciones, por ejemplo un avance significativo en esa materia es el artículo *Détermination d'un groupe de Galois* de Adrien Douady (1964) donde se trata el caso $k = \mathbb{Q}(x)$, o en general en el caso $k = C(x)$ para C un cuerpo algebraicamente cerrado estudiado por D. Harbater y F. Pop (1995). Problemas abiertos hoy en día consisten en estudiar la estructura de este grupo cuando $k = \mathbb{Q}$ o cuando $k = \mathbb{Q}_{ab}$, la máxima extensión abeliana de $\mathbb{Q}$ (vea Conjetura de Shafarevich).

(b) Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Una variedad abeliana sobre k es un k -esquema en grupos que es propio, suave y conexo. Se conoce que la ley de multiplicación en una variedad abeliana es conmutativa, de ahí el nombre de variedad abeliana. El ejemplo más significativo de una variedad abeliana es el de una curva elíptica.

El grupo fundamental étale de una variedad abeliana puede ser descrito explícitamente. Si A es una variedad abeliana, entonces podemos considerar el grupo $A(k)$, (o más bien $A(\text{Spec}(k))$), usando las notaciones del capítulo 2), que está formado por secciones del morfismo estructural $A \rightarrow \text{Spec}(k)$. Para cada n podemos considerar la multiplicación por n de $A(k)$ en sí mismo, denotada por $n_A : A(k) \rightarrow A(k)$ y su núcleo lo denotamos como $K_n := \text{Nuc}(n_A)$ (es el conjunto de puntos de n -torsión dentro de $A(k)$). El módulo de Tate l -ádico de A , denotado por $T_l(A)$, es el límite inverso de los subgrupos K_{l^r} para $r \geq 0$, y el módulo de Tate de A , denotado por $T(A)$ es el producto de los módulos de Tate l -ádicos sobre $l \geq 0$. Un teorema de Serre y Lang (ver [SGA1, théoreme 2.1, Exposé X]) dice que

$$\pi_1(A, 0) \simeq T(A) = \prod_l T_l(A) \simeq \varprojlim_n K_n.$$

Es decir que el grupo fundamental étale se expresa como el límite inverso de los núcleos de las multiplicaciones sobre A . Weil dió una caracterización de dichos núcleos dada por el siguiente criterio (ver [SGA1, Exposé X]) de Weil:

- (i) Si n es primo relativo a $\text{char}(k)$ entonces K_n es un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -módulo libre de rango $2g$, donde $g = \dim(A)$. Por tanto en ese caso $T_n(A) \simeq (\mathbb{Z}_n)^{\oplus 2g}$ (donde $\mathbb{Z}_n$ son los enteros n -ádicos).
- (ii) Si n es una potencia de $p = \text{char}(k)$ entonces K_n es un módulo libre de rango ν para algún $0 \leq \nu \leq g$, que es independiente de n . En este caso $T_n(A) \simeq (\mathbb{Z}_p)^{\oplus \nu}$.

De acuerdo a Grothendieck, esto hace que el grupo fundamental étale no varíe regularmente con respecto a una familia parametrizada de variedades abelianas.

En realidad, el grupo fundamental algebraico es un grupo profinito, es decir es el límite directo de un sistema dirigido de grupos finitos. Para ver ésto necesitamos algunas definiciones.

Definición 4.10. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Conjuntos}$ un funtor. Decimos que F es pro-representable si existe un sistema inverso $P = (P_i, \phi_{ij})$ de objetos de $\mathcal{C}$ indexado por un conjunto dirigido ordenado parcialmente I , y un isomorfismo funtorial

$$\varinjlim \text{Hom}(P_i, X) \simeq F(X)$$

para todo objeto X en $\mathcal{C}$.

Teorema 4.11 (Grothendieck). *El funtor $\text{Fib}_{\bar{s}}$ es pro-representable.*

Esto se demuestra en el teorema 5.4.2 de [Szog]. Lo importante es la construcción dada. Si I es el conjunto de todos los cubrimientos finitos étale de Galois $P_i \rightarrow S$, definimos un orden $i \leq j$ si existe un morfismo $P_j \rightarrow P_i$. En la proposición 5.2.9 de [Szog], se demuestra que este es un sistema directo. Este conjunto es el que se demuestra ser el conjunto necesario para la pro-representabilidad de $\text{Fib}_{\bar{s}}$. De hecho, una importante conclusión de este teorema es que

$$\pi_1(S, \bar{s}) \simeq \varprojlim_{i \in I} \text{Aut}(P_i|S).$$

Ver Corolario 5.4.8 de [Szog], para una demostración.

De esta forma, este objeto clasifica los cubrimientos étale finitos del esquema S . Si $\psi : X \rightarrow Y$ es un morfismo de esquemas, donde X, Y son cubrimientos étale de S y $\bar{t} : \text{Spec}(\Omega) \rightarrow X$ es un punto geométrico de X , entonces éste genera un punto geométrico de Y dado por $\psi \circ \bar{t}$, al cual también llamamos $\bar{t}$, y con ésto se genera un morfismo natural de grupos fundamentales $\pi_1(X, \bar{t}) \rightarrow \pi_1(Y, \bar{t})$. De hecho se tiene que para un esquema

conexo S , el grupo fundamental no depende del punto geométrico seleccionado, esto es el Corolario 5.5.2 de [Szo9], enunciamos este resultado en la siguiente proposición.

Proposición 4.12. *Sea S un esquema conexo. Para cualesquiera dos puntos geométricos $\bar{s} : \text{Spec}(\Omega) \rightarrow S$ y $\bar{s}' : \text{Spec}(\Omega') \rightarrow S$ hay un isomorfismo de grupos profinitos $\pi_1(S, \bar{s}) \rightarrow \pi_1(S, \bar{s}')$.*

Observación. Sean S y S' dos esquemas conexos, equipados de puntos geométricos $\bar{s} : \text{Spec}(\Omega) \rightarrow S$ y $\bar{s}' : \text{Spec}(\Omega') \rightarrow S'$ respectivamente. Si existe un morfismo $\phi : S' \rightarrow S$, con $\phi \circ \bar{s}' = \bar{s}$, entonces podremos construir un morfismo $\phi_* : \pi_1(S', \bar{s}') \rightarrow \pi_1(S, \bar{s})$ como sigue. Mediante el cambio de base $X \rightarrow X \times_S S'$, el morfismo ϕ induce un funtor $\text{CB}_{S,S'} : \text{Fet}_S \rightarrow \text{Fet}_{S'}$, el cual envía un morfismo de cubrimientos finitos étale $X \rightarrow Y$ sobre S , en el morfismo inducido $X \times_S S' \rightarrow Y \times_S S'$. Además, la composición $\phi \circ \bar{s}' = \bar{s}$ implica la igualdad de funtores $\text{Fib}_{\bar{s}} = \text{Fib}_{\bar{s}'} \circ \text{CB}_{S,S'}$, y de esta manera, todo automorfismo de funtores $\Phi : \text{Fib}_{\bar{s}'} \rightarrow \text{Fib}_{\bar{s}'}$ induce un automorfismo $\Phi \circ \text{CB}_{S,S'} : \text{Fib}_{\bar{s}} \rightarrow \text{Fib}_{\bar{s}}$, y en fin lo que tenemos es un homomorfismo de grupos

$$\phi_* : \pi_1(S', \bar{s}') \rightarrow \pi_1(S, \bar{s}),$$

dado por la composición con $\text{CB}_{S,S'}$. En [Szo9] se presentan las siguientes condiciones para que dicho morfismo sea inyectivo o sobreyectivo, las enunciaremos a continuación.

- (a) [Szo9, Proposition 5.5.4] El morfismo ϕ_* es sobreyectivo si y sólo si para todo cubrimiento étale finito y conexo $X \rightarrow S$ el cambio de base $X \times_S S'$ sigue siendo conexo.
- (b) [Szo9, Corollary 5.5.8] El morfismo ϕ_* es inyectivo si y sólo si para todo cubrimiento étale finito conexo $X' \rightarrow S'$, existe un cubrimiento finito étale $X \rightarrow S$ y un morfismo $X_i \rightarrow X'$ sobre S' , donde X_i es una componente conexa de $X \times_S S'$.

En particular, combinando ambos resultados podemos concluir lo siguiente: si

$$\phi_* : \pi_1(S', \bar{s}') \rightarrow \pi_1(S, \bar{s})$$

es un isomorfismo, entonces para todo cubrimiento étale finito y conexo $X' \rightarrow S'$ existe un cubrimiento étale conexo $X \rightarrow S$ tal que $X' \simeq X \times_S S'$.

Ahora estudiaremos un caso particular de ésta teoría, que nos sirve como una importante motivación para nuestro trabajo.

Sea R un anillo de valuación discreta completo y sea $S = \text{Spec}(R)$. Usamos las notaciones del ejemplo 1.42. Tome los puntos geométricos $\bar{\eta} : \text{Spec}(\bar{K}) \rightarrow S$ y $\bar{s} : \text{Spec}(\bar{k}) \rightarrow S$, que se obtienen a partir de η y s mediante el cambio de base, donde $\bar{K}, \bar{k}$ son las clausuras algebraicas de K y k respectivamente. Dado un morfismo de esquemas, denotamos $X_\eta, X_s, X_{\bar{\eta}}, X_{\bar{s}}$ los cambios de base bajo las aplicaciones correspondientes.

Teorema 4.13 (Grothendieck). [Szo9, Theorem 5.7.9, pág. 192] o [SGA1, Exposé X, théorème 2.1, pág. 268] Sea S como antes, y sea $\phi : X \rightarrow S$ un morfismo propio. Fije puntos geométricos $\bar{x}$ y $\bar{y}$ de $X_{\bar{s}}$ y $X_{\bar{\eta}}$ respectivamente, entonces

- (a) La aplicación natural $\pi_1(X_s, \bar{y}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{y})$ es un isomorfismo.
- (b) Asuma que k es algebraicamente cerrado, ϕ es plano y las fibras geométricas $X_{\bar{\eta}}, X_{\bar{s}}$ son reducidas. Entonces la aplicación natural $\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{x})$ es sobreyectiva.

La prueba de este teorema se puede encontrar en [SGA1], y su estudio se sale del espectro de este proyecto.

Si k es algebraicamente cerrado y $\bar{s} = s$, podemos considerar la aplicación

$$sp : \pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x}) \longrightarrow \pi_1(X, \bar{x}) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(X, \bar{y}) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(X_s, \bar{y}),$$

donde el isomorfismo del medio viene de 4.12 y el isomorfismo del final de la parte 1. del teorema anterior. Esta aplicación se llama el mapeo de especialización.

Para un grupo profinito

$$G = \varprojlim G_i,$$

se denota $G^{(p')}$ como el máximo cociente primo a p de G , es decir

$$G^{(p')} = \varprojlim_{\text{mcd}(|G_i|, p)=1} G_i,$$

denotado la parte prima a p de G .

El principal resultado que se posee sobre esta aplicación es el siguiente (ver [Szo9, Theorem 5.7.10, pág. 192] o también el argumento original en [SGA1, Exposé X, corollaire 3.9, pág. 283]).

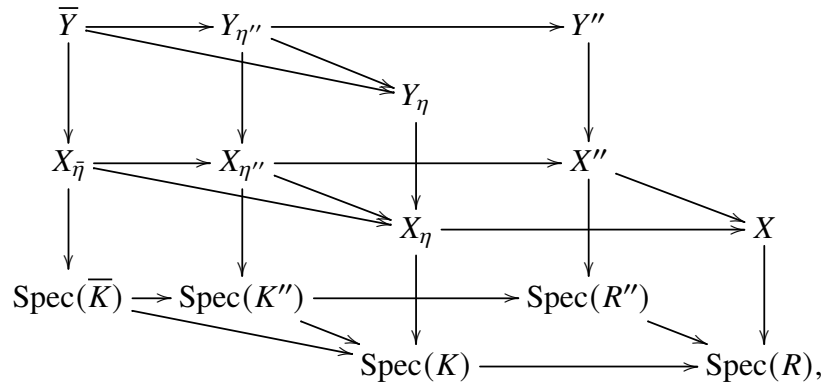
Teorema 4.14 (Grothendieck). Con las notaciones como arriba, y $p = \text{char}(k)$, asumiendo que ϕ es propio y suave con fibras geométricamente conexas, entonces el mapeo de especialización induce un isomorfismo

$$\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})^{(p')} \simeq \pi_1(X_{\bar{s}}, \bar{y})^{(p')}$$

Observación. Gracias al isomorfismo del teorema 4.13a), en realidad el resultado que se demuestra en este teorema es la existencia de un isomorfismo $\pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{x})^{(p')} \simeq \pi_1(X, \bar{x})^{(p')}$, y esto a su vez implica un resultado valioso sobre las extensiones de cubrimientos de Galois, dado en la prueba de este teorema, por tanto analicemos un poco algunos detalles del argumento para esta demostración; lo siguiente lo tomamos de [Sz09, Theorem 5.7.10, pág. 194].

De acuerdo a la observación 4.1, se deben de demostrar dos cosas: para la sobreyectividad del morfismo se debe comprobar que para todo cubrimiento étale finito conexo $Y \rightarrow X$, el cambio de base $Y_{\bar{\eta}}$ se mantiene conexo, y para la inyectividad, basta demostrar que todo cubrimiento étale de Galois $\bar{Y} \rightarrow X_{\bar{\eta}}$ de grado primo a p proviene mediante el cambio de base de un cubrimiento de Galois $Y \rightarrow X$ de grado primo a p ¹. Veamos con ciertos detalles la prueba de la inyectividad, que es la que más nos interesa. En la primera parte de la prueba de este teorema, [Sz09] argumenta que $\bar{Y} \rightarrow X_{\bar{\eta}}$ proviene por medio del cambio de base de un cubrimiento étale finito de $X_{\eta'}$, para una extensión finita K'/K . De acuerdo a 4.13a), podemos reemplazar X por $X' = X \times_{\text{Spec}(R)} \text{Spec}(R')$, donde R' es la clausura integral de R en K' , ya que ambos X y X' tienen el mismo grupo fundamental étale, que es $\pi_1(X_s, \bar{y})$, esto se deduce de la existencia de un isomorfismo entre fibras especiales $X_s \simeq (X')_s$, el cual justificaremos en el siguiente capítulo. Por este argumento entonces podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\bar{Y} \rightarrow X_{\bar{\eta}}$ proviene de un cubrimiento étale finito de Galois $Y_{\eta} \rightarrow X_{\eta}$.

En este caso se cuenta con una extensión de cuerpos K''/K y un cubrimiento finito étale de Galois $Y'' \rightarrow X''$, donde $X'' = X \times_{\text{Spec}(R)} \text{Spec}(R'')$ para R'' la clausura integral de R en K'' , tal que $\bar{Y} \rightarrow X_{\bar{\eta}}$ proviene de $Y'' \rightarrow X''$ mediante el cambio de base. Esto se encuentra explicado en el siguiente diagrama.

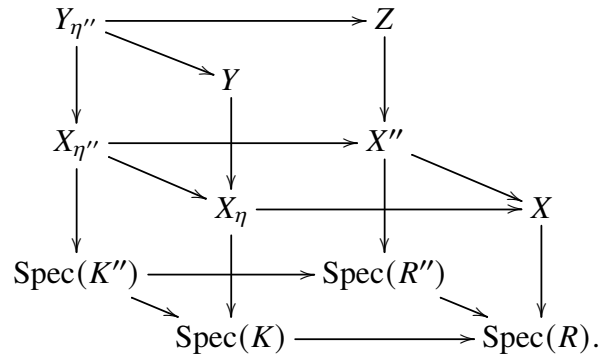


¹El grado es el orden de su grupo de automorfismos $\text{Aut}(\bar{Y}|X_{\bar{\eta}})$.

donde $X_{\eta''} = X'' \times_{\text{Spec}(R'')} \text{Spec}(K'')$ y similarmente $Y_{\eta''} = Y_{\eta} \times_{\text{Spec}(K)} \text{Spec}(K'')$ que coincide entonces con $Y'' \times_{\text{Spec}(R'')} \text{Spec}(K'')$.

La respuesta a este problema está dada por la extensión $K'' := K(\sqrt[p]{\pi})$, donde π es un uniformizante de R y el esquema Y'' se contruye como $Y'' := T \times_{\text{Spec}(R)} \text{Spec}(R'')$, donde T es la normalización de X en el esquema Y_{η} (recuerde la definición 1.58 en página 33). Note que la extensión K''/K es una extensión finita de Galois, debido a la teoría de Kummer, y por tanto K''/K es separable.

Una consecuencia inmediata de este teorema es la siguiente: suponga que tenemos un cubrimiento étale finito de Galois $f: Y \rightarrow X_{\eta}$ de grado primo relativo con p , entonces existe una extensión finita y Galois K''/K y un cubrimiento étale finito de Galois $h: Z \rightarrow X''$ cuyo pullback sobre la fibra genérica de X'' coincide con el pullback $f_{\eta''}: Y_{\eta''} \rightarrow X_{\eta''}$ de f sobre K'' , donde $X'' := X \times_{\text{Spec}(R)} \text{Spec}(R'')$, R'' es la clausura integral de R en K'' , $Y_{\eta''} := Y \times_{\text{Spec}(K)} \text{Spec}(K'')$ y $X_{\eta''} := X \times_{\text{Spec}(K)} \text{Spec}(K'')$ y además Z está dado por el pullback sobre R'' de la normalización de X en Y . Esto se ve ilustrado en el diagrama



En el capítulo 5 estos resultados serán cruciales.

Ejemplo 4.15. En la teoría de Grothendieck se muestra por qué es necesaria la hipótesis de la primalidad con respecto a $p = \text{char}(k)$. De hecho esta hipótesis es necesaria y se puede observar en el caso de un esquema abeliano. Veamos unas pequeñas observaciones en este aspecto.

Un esquema $X \rightarrow \text{Spec}(R)$ se llama abeliano si X_K es una variedad abeliana sobre K y X_s es una variedad abeliana sobre k (es decir sus fibras son variedades abelianas). Por su parte, si $p = \text{char}(k) > 0$, decimos que una curva elíptica sobre k es supersingular si no tiene puntos geométricos de p -torsión (es decir no hay puntos de torsión de orden p sobre $E(\bar{k})$). Un resultado sobre las curvas elípticas supersingulares es que sobre este tipo de curvas todo cubrimiento étale de Galois de orden p tiene un grupo de automorfismos que es conexo.

Ahora, por su parte note que el esquema en grupos constante asociado a $\Gamma = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ no es conexo sobre k , es decir $G = \text{Spec}(k^\Gamma)$ no es un esquema afín en grupos conexo. Si $f : Y \rightarrow X_s$ es un G -torsor, y X_s es una curva elíptica supersingular entonces G debe ser un grupo conexo. Ello nos dice que cualquier cubrimiento étale de Galois de X_K cuyo grupo de automorfismos sea $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, no se puede extender a un cubrimiento de Galois sobre X , ya que la fibra especial de este cubrimiento sobre X sería un cubrimiento étale de Galois de X_s con grupo de automorfismos dado por $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, lo cual hemos visto que no es posible.

Con este ejemplo vemos que en algunos casos es imposible extender cubrimientos étale de Galois. Sin embargo en la siguiente sección veremos una familia más grande de cubrimientos, que es mucho más maleable en general.

4.2. Torsores: Definiciones y Propiedades

En esta sección X es un esquema sobre un anillo A .

Definición 4.16. Si G es un esquema en grupos afín y plano sobre A , un G -torsor sobre X (o un G -fibrado principal sobre X) es un morfismo $f : Y \rightarrow X$ fielmente plano, junto con una acción ² $\sigma : G \times_{\text{Spec}(A)} Y \rightarrow Y$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times_{\text{Spec}(A)} Y & \xrightarrow{\sigma} & Y \\ \downarrow p_2 & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

es conmutativo, y el morfismo $\lambda := (\sigma, p_2)$ obtenido del diagrama

$$\begin{array}{ccccc} G \times_{\text{Spec}(A)} Y & & \xrightarrow{\sigma} & & Y \\ & \searrow \lambda & & \searrow & \downarrow f \\ & & Y \times_X Y & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & \searrow p_2 & \downarrow & & \downarrow f \\ & & Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

es un isomorfismo.

Esta definición está inspirada en la definición de espacios de recubrimiento y acciones sobre espacios topológicos estudiadas en topología algebraica básica. Al morfismo σ se le

²Cuando decimos acción nos referimos a un morfismo σ tal que para todo $\text{Spec}(A)$ -esquema T , se cumple que el morfismo inducido $\sigma_T : (G \times_{\text{Spec}(A)} Y)(T) = G(T) \times_{\text{Spec}(A)(T)} Y(T) \rightarrow Y(T)$ es una acción del grupo $G(T)$ sobre $Y(T)$.

llama la *acción* de G sobre Y . El G -torsor trivial sobre X es el torsor $G \times_{\text{Spec}(A)} X \rightarrow X$. Un morfismo entre dos G -torsores $f_i : Y_i \rightarrow X$ con $i = 1, 2$, es un morfismo de esquemas $Y_1 \rightarrow Y_2$ tal que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{g} & Y_2 \\ & \searrow f_1 & \swarrow f_2 \\ & X & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} G \times_{\text{Spec}(A)} Y_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & Y_1 & & \\ \text{id} \times g \downarrow & & \downarrow g & & \\ G \times_{\text{Spec}(A)} Y_2 & \xrightarrow{\sigma_2} & Y_2 & & \end{array}$$

son conmutativos. Un isomorfismo entre torsores es un morfismo de torsores con una inversa.

Proposición 4.17. [DeGa70, Proposition 1.4, pág. 361] *Cualquier morfismo entre dos G -torsores sobre X es un isomorfismo.*

Proposición 4.18. *Un G -torsor sobre X , $f : Y \rightarrow X$ es isomorfo al torsor trivial si y sólo si existe una sección $s : X \rightarrow Y$, tal que $f \circ s = \text{id}_X$.*

Demostración. Si $f : Y \rightarrow X$ es un torsor trivial, entonces hay un isomorfismo η tal que

$$\begin{array}{ccc} G \times_{\text{Spec}(A)} X & \xrightarrow{\eta} & Y \\ & \searrow p_2 & \swarrow f \\ & X & \end{array}$$

Hay un morfismo $i : X \rightarrow G \times_{\text{Spec}(A)} X$ tal que $p_2 \circ i = \text{id}_X$ (Ya que $X \simeq (G \times_{\text{Spec}(A)} X) \times_X X$ por 1.49). Luego si $s = \eta \circ i$ entonces $f \circ s = (f \circ \eta) \circ i = p_2 \circ i = \text{id}_X$. Recíprocamente, si existe una sección $s : X \rightarrow Y$, defina $\eta := s \circ p_2 : G \times_{\text{Spec}(A)} X \rightarrow Y$, entonces $f \circ \eta = p_2$, por lo que η es un morfismo y por lo anterior es un isomorfismo. Otra demostración se encuentra en [Esq19], o también se puede consultar en [DeGa70, Corollaire 1.5, pág. 362]. $\square$

Proposición 4.19. *Si tenemos G_i -torsores sobre X : $f_i : Y_i \rightarrow X$ para $i = 1, 2$, entonces $Y_1 \times_X Y_2 \rightarrow X$ es un $(G_1 \times G_2)$ -torsor sobre X .*

Demostración. Sean $\sigma_i : G_i \times Y_i \rightarrow Y_i$ las acciones de los respectivos torsos. Debemos construir la acción $\sigma : (G_1 \times G_2) \times (Y_1 \times_X Y_2) \rightarrow Y_1 \times_X Y_2$. Para ello considere el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 (G_1 \times G_2) \times (Y_1 \times_X Y_2) & \xrightarrow{\text{id} \times g_1} & (G_1 \times G_2) \times Y_1 & \xrightarrow{p_1 \times \text{id}_{Y_1}} & G_1 \times Y_1 \\
 \downarrow \text{id} \times g_2 & \searrow \sigma & & & \downarrow \sigma_1 \\
 (G_1 \times G_2) \times Y_2 & & Y_1 \times_X Y_2 & \xrightarrow{g_1} & Y_1 \\
 \downarrow p_2 \times \text{id}_{Y_2} & & \downarrow g_2 & & \downarrow f_1 \\
 G_1 \times Y_2 & \xrightarrow{\sigma_2} & Y_2 & \xrightarrow{f_2} & X
 \end{array}$$

El morfismo σ existe debido a la propiedad universal del producto fibrado $Y_1 \times_X Y_2$, al tomar las aplicaciones $F_i : (G_1 \times G_2) \times (Y_1 \times_X Y_2) \rightarrow Y_i$ dadas por $F_i = \sigma_i \circ (p_i \times \text{id}_{Y_i}) \circ (\text{id} \times g_i)$, para $i = 1, 2$ que cumplen $f_2 \circ F_1 = f_2 \circ F_2$. En efecto, por definición de torsos $f_i \circ \sigma_i = f_i \circ \bar{p}_i$, donde $\bar{p}_i : G_i \times Y_i \rightarrow Y_i$ es la segunda proyección, además note que

$$(p_i \times \text{id}_{Y_i}) \circ (\text{id} \times g_i) = p_i \times g_i$$

y por tanto

$$f_i \circ F_i = f_i \circ \sigma_i \circ (p_i \times g_i) = f_i \circ \bar{p}_i \circ (p_i \times g_i) = f_i \circ g_i \circ \hat{p}_2$$

donde $\hat{p}_2 : (G_1 \times G_2) \times (Y_1 \times_X Y_2) \rightarrow Y_1 \times_X Y_2$ es la segunda proyección. Luego

$$f_1 \circ F_1 = f_1 \circ g_1 \circ \hat{p}_2 = f_2 \circ g_2 \circ \hat{p}_2 = f_2 \circ F_2$$

Además tenemos que por el diagrama anterior también se comprueba directamente que σ hace el siguiente diagrama conmutar

$$\begin{array}{ccc}
 (G_1 \times G_2) \times (Y_1 \times_X Y_2) & \xrightarrow{\sigma} & Y_1 \times_X Y_2 \\
 \downarrow \hat{p}_2 & & \downarrow f \\
 Y_1 \times_X Y_2 & \xrightarrow{f} & X
 \end{array}$$

donde $f = f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$. Ahora, sean $\lambda_i : G_i \times Y_i \rightarrow Y_i \times_X Y_i$ los isomorfismos dados por la definición de ttor y sea λ el morfismo obtenido del diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 (G_1 \times G_2) \times Y_1 \times_X Y_2 & & & & \\
 \searrow \lambda & \searrow \sigma & & & \\
 (Y_1 \times_X Y_2) \times_X (Y_1 \times_X Y_2) & \xrightarrow{\quad} & Y_1 \times_X Y_2 & & \\
 \downarrow p_2 & & \downarrow f & & \\
 Y_1 \times_X Y_2 & \xrightarrow{f} & X & &
 \end{array}$$

El morfismo λ es igual al morfismo obtenido de la composición

$$\begin{array}{ccc} (G_1 \times G_2) \times (Y_1 \times_X Y_2) & \xrightarrow{\cong} & (G_1 \times Y_1) \times (G_2 \times Y_2) \\ & & \downarrow \lambda_1 \times \lambda_2 \\ & & (Y_1 \times_X Y_1) \times (Y_2 \times_X Y_2) \xrightarrow{\cong} (Y_1 \times_X Y_2) \times_X (Y_1 \times_X Y_2) \end{array}$$

ya que éste cumple la conmutatividad del diagrama anterior, los isomorfismos de los extremos se obtienen gracias a la proposición 1.49, y como λ_1, λ_2 son isomorfismos entonces obtenemos que λ es un isomorfismo. Por último debemos verificar que el morfismo $f = f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$ es fielmente plano, pero esto es consecuencia del lema 1.50. $\square$

Terminemos esta pequeña subsección con unos sencillos ejemplos de torsos.

Ejemplo 4.20. Sea k un cuerpo.

- (a) El morfismo de esquemas $\text{Spec}(L) \rightarrow \text{Spec}(k)$, para L/k una extensión de Galois finita es de hecho un G -torsor, donde G es el esquema en grupos constante asociado al grupo de Galois $\text{Gal}(L/k)$. De hecho esta es la base para considerar a los morfismos étale como torsos, tal y como se mencionará en la proposición 4.21. El requerimiento de la transitividad de la acción del esquema de grupo en un torsor de este tipo es precisamente la transitividad de la acción del grupo de Galois sobre la extensión L .
- (b) El esquema en grupo multiplicativo $\mathbb{G}_m$ actúa sobre el espacio afín

$$\mathbb{A}^n(k) = \text{Spec}(k[x_1, \dots, x_n]),$$

mediante la multiplicación entrada por entrada (desde un punto de vista funtorial). El morfismo $\varphi : \mathbb{A}^n(k) \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}(k) = \text{Proj}(k[x_0, x_1, \dots, x_n])$ que envía $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ en $(a_0 : a_1 : \dots : a_{n-1})$ es un $\mathbb{G}_m$ -torsor.³

- (c) Como vimos en el capítulo 2, el funtor $\mu_n : k - \text{Alg} \rightarrow \mathbf{Grupos}$ dado por $\mu_n(R) = \{r \in R^\times : r^n = 1\}$ está representado por la k -álgebra (étale) $k[\mu_n] = k[x]/(x^n - 1)$. Consideremos el caso donde k es un cuerpo cuya característica es prima relativa con n . Si $a \in k^\times$ es tal que $\sqrt[n]{a} \notin k$ entonces $\text{Spec}(k(\sqrt[n]{a}))$ es un μ_n -torsor (donde vemos a μ_n como $\text{Spec}(k[\mu_n])$ en este caso). La acción $\text{Spec}(k[\mu_n]) \times_{\text{Spec}(k)} \text{Spec}(k(\sqrt[n]{a})) \rightarrow \text{Spec}(k(\sqrt[n]{a}))$ viene dada por la multiplicación por raíces de la unidad. Explícitamente

³Por simplicidad no vamos a definir lo que es un esquema proyectivo Proj , sin embargo puede interpretarlo como el espacio proyectivo (con la topología de Zariski).

esto es el morfismo de $k(\sqrt[n]{a}) \rightarrow k(\sqrt[n]{a}) \otimes_k k[\mu_n]$ dado por $\sqrt[n]{a} \rightarrow \sqrt[n]{a} \otimes \zeta$, donde ζ es una raíz n -ésima (primitiva) de la unidad en $\mu_n[k]$. Cuando $\zeta \in k$ entonces $k(\sqrt[n]{a})$ se convierte en una extensión de Galois de k (por la teoría de Kummer, conocida en teoría de Galois clásica) y su grupo de Galois es isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. De acuerdo a [Wa79, Capítulo 18], todos los μ_n -torsores sobre $\text{Spec}(k)$ son de esta forma, hecho que generaliza el teorema clásico en la teoría de Kummer que caracteriza las extensiones cíclicas de grado n sobre un cuerpo k que contiene a sus raíces n -ésimas de la unidad.

4.3. Esquema Fundamental en grupos de Nori

Hay una conexión entre cubrimientos étale finitos de un esquema y los torsores, dada por la siguiente proposición [Ver proposición 5.3.16 de [Szo9], para una demostración].

Proposición 4.21. *Sea S un esquema conexo y G un esquema en grupo finito étale sobre S [es decir $G \rightarrow S$ es un morfismo finito étale]. Si G es un esquema afín en grupos constante $G = S^\Gamma$, entonces un G -torsor sobre S es lo mismo que un cubrimiento étale finito de Galois con grupo de automorfismos Γ .*

De esta manera vemos que el grupo fundamental algebraico de Grothendieck logra clasificar ciertos tipos de torsores, los que están dados por grupos constantes. En 1976, Nori construyó un objeto que clasifica un espectro más amplio de torsores. Su construcción involucra el uso de categorías tannakianas y haces esencialmente finitos. En esta sección procederemos a estudiar el tratamiento de Nori para su grupo fundamental.

Aquí X será un esquema completo, conexo, reducido con un morfismo $j : X \rightarrow \text{Spec}(k)$. Para empezar veamos una propiedad que cumplen los haces estructurales cuando tenemos un torsor sobre X .

Lema 4.22. *Si $f : Y \rightarrow X$ es un G -torsor, con G un esquema en grupos finito, entonces el fibrado vectorial $\mathcal{E} := f_* \mathcal{O}_Y$ es trivializado por el torsor f , es decir $f^* \mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_Y^{\oplus \text{rg } \mathcal{E}}$. Además, se cumple que*

$$\mathcal{E}^{\otimes 2} \simeq \mathcal{E}^{\oplus n},$$

donde n es el orden de G . Además el rango de $\mathcal{E}$ es igual a n .

Demostración. El isomorfismo $Y \times_X Y \simeq Y \times_{\text{Spec}(k)} G \simeq G_X \times_X Y$, donde $G_X = G \times_{\text{Spec}(k)} X$, induce un isomorfismo de haces de $\mathcal{O}_X$ -módulos:

$$f_* \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} f_* \mathcal{O}_Y \simeq p_* \mathcal{O}_{G_X} \otimes_{\mathcal{O}_X} f_* \mathcal{O}_Y,$$

donde $p : G_X \rightarrow X$ es la aplicación del producto fibrado ⁴. Note que el lado izquierdo del isomorfismo anterior es $\mathcal{E}^{\otimes 2}$. Para demostrar la fórmula deseada, basta probar que $p_* \mathcal{O}_{G_X} \simeq \mathcal{O}_X^{\oplus n}$ y así el lado derecho es isomorfo a $\mathcal{E}^{\oplus n}$. Note que como $\mathcal{O}_{\text{Spec}(k)}$ -módulos se tiene $h_* \mathcal{O}_G \simeq \mathcal{O}_{\text{Spec}(k)}^{\oplus n}$, donde $h : G \rightarrow \text{Spec}(k)$ es la aplicación que hace de G un k -esquema. Consideramos el diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc} G_X & \xrightarrow{p} & X \\ q \downarrow & & \downarrow j \\ G & \xrightarrow{h} & \text{Spec}(k). \end{array}$$

En éste el morfismo h es plano, por lo que podemos aplicar la proposición 1.63 para concluir que $p_* q^* = j^* h_*$ y por tanto

$$p_* \mathcal{O}_{G_X} \simeq p_* q^* \mathcal{O}_G \simeq j^* h_* \mathcal{O}_G \simeq j^* \mathcal{O}_{\text{Spec}(k)}^{\oplus n} \simeq \mathcal{O}_X^{\oplus n}.$$

Ahora probamos que $\mathcal{E}$ sea trivializado por f . Con el diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc} G \times_{\text{Spec}(k)} Y & \xrightarrow{\sigma} & Y \\ p_2 \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{f} & X, \end{array}$$

dado por la definición de torsor, se obtiene (mediante proposición 1.63) que $f^* f_* \mathcal{O}_Y \simeq (p_2)_* \sigma^* \mathcal{O}_Y \simeq (p_2)_* \mathcal{O}_{G \times_{\text{Spec}(k)} Y}$. Ahora podemos seguir un argumento similar al anterior, si escribimos $G_Y := G \times_{\text{Spec}(k)} Y$, entonces tenemos el diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc} G_Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\ q \downarrow & & \downarrow j \circ f \\ G & \xrightarrow{h} & \text{Spec}(k). \end{array}$$

En éste podemos igualmente aplicar la proposición 1.63 para concluir

$$(p_2)_* \mathcal{O}_{G_Y} \simeq (p_2)_* q^* \mathcal{O}_G \simeq (j \circ f)^* h_* \mathcal{O}_G \simeq f^* j^* \mathcal{O}_{\text{Spec}(k)}^{\oplus n} \simeq \mathcal{O}_Y^{\oplus n},$$

y por tanto $f^* f_* \mathcal{O}_Y \simeq \mathcal{O}_Y^{\oplus n}$, que es la fórmula que deseamos. El hecho que $f_* \mathcal{O}_Y$ es localmente libre se deduce de ésta fórmula y de la proposición 1.62, ya que f es fielmente plano. $\square$

⁴Hemos usado que en un producto fibrado $g : Y \times_X Z \rightarrow X$ para $q : Y \rightarrow X$ y $t : Z \rightarrow X$, se cumple $g_*(\mathcal{O}_{Y \times_X Z}) \simeq q_* \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} t_* \mathcal{O}_Z$.

En realidad el hecho que k sea un cuerpo era irrelevante para el resultado anterior, puede ser un anillo conmutativo. Esta propiedad de $f_*\mathcal{O}_Y$ es sólo un caso especial de una definición más general introducida por André Weil.

Definición 4.23. Si $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es un polinomio con coeficientes enteros no negativos, y $\mathcal{F}$ es un haz de $\mathcal{O}_X$ -módulos, definimos

$$f(\mathcal{F}) := \bigoplus_{i=0}^n (\mathcal{F})^{\otimes a_i},$$

donde $\mathcal{F}^{\otimes 0} := \mathcal{O}_X$ y $\mathcal{F}^{\oplus 0} = 0$.

Un haz localmente libre $\mathcal{F}$ se dice ser Weil-finito (o sólo finito) si existen dos polinomios $f \neq g$ con coeficientes enteros no negativos, tales que $f(\mathcal{F}) \simeq g(\mathcal{F})$.

Por el ejemplo anterior tenemos que $f_*\mathcal{O}_Y$ es un haz finito. Nori demostró el siguiente resultado (ver Lema 3.2 de [Nori76]).

Proposición 4.24. Sean V_1, V_2 dos haces localmente libres sobre X .

- (a) Si V_1, V_2 son finitos entonces $V_1 \oplus V_2, V_1 \otimes V_2, V_1^\vee$ también son finitos.
- (b) $V_1 \oplus V_2$ es finito implica que V_1 es finito.
- (c) Un haz invertible $\mathcal{L}$ es finito si y sólo si existe un entero $m > 0$ tal que $\mathcal{L}^{\otimes m} \simeq \mathcal{O}_X$.

Sea $\text{Fin}(X)$ la categoría de haces de $\mathcal{O}_X$ -módulos localmente libres y finitos, cuyos morfismos son los morfismos de haces. Por la proposición anterior, vemos que esta categoría es tensorial, rígida y conmutativa, con objeto unidad dado por $\mathcal{O}_X$.

De hecho, es posible construir un funtor fibra $\omega : \text{Fin}(X) \rightarrow \text{Vect}_k$ si se cuenta con un punto k -racional $x : \text{Spec}(k) \rightarrow X$. La imagen de x es un punto, al que llamamos x también. Sea $\mathcal{E} \in \text{Obj}(\text{Fin}(X))$. Si $U = \text{Spec}(A) \subset X$ es un abierto afín que contiene a x , por la proposición 1.56 tenemos que $\mathcal{E}|_U \simeq \tilde{E}$, donde E es un A -álgebra finitamente generada. Por la observación dada después de dicha proposición se tiene que $x^*\mathcal{E} \simeq \widetilde{E \otimes_k A}$, y $E \otimes_k A$ es un k -espacio vectorial de dimensión finita, el cual se puede demostrar que no depende del abierto afín seleccionado. El morfismo ω está dado por

$$\omega : \mathcal{E} \mapsto E \otimes_k A.$$

El problema de la categoría $\text{Fin}(X)$ es que no necesariamente es abeliana. Para solucionar este inconveniente Nori reintrodujo desde una nueva óptica el concepto de haces semi

estables (un concepto presente en la teoría para el momento de su investigación). Antes de estudiarlos debemos estudiar un poco de teoría sobre divisores en un esquema.

Definición 4.25 (Divisores de Weil). Sobre una curva X , un divisor de Weil es una suma formal

$$D = \sum n_i P_i,$$

donde los P_i son puntos de X y los n_i son números enteros. El grado de un divisor D es

$$\deg(D) = \sum n_i.$$

El grupo de divisores de Weil se denota $\text{div}(X)$.

Definición 4.26 (Divisores de Cartier). Sea X un esquema. Para cada abierto afín $U = \text{Spec}(A) \subset X$, sea S formado por los elementos de A que no son divisores de cero, y sea $K(U)$ la localización de A por el sistema multiplicativo S . Llamamos $K(U)$ el anillo cociente total de A . A medida que U varía, los anillos $K(U)$ forman un prehaz, a cuyo haz asociado de anillos $\mathcal{K}$ le llamaremos el haz de anillos cociente totales de $\mathcal{O}_X$. Denotamos $\mathcal{K}^*$ el haz de elementos invertibles en el haz de anillos $\mathcal{K}$, y similarmente $\mathcal{O}_X^*$ es el haz de elementos invertibles en $\mathcal{O}_X$.

Un divisor de Cartier en un esquema X es una sección global del haz $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}_X^*$, es decir es un elemento de $(\mathcal{K}^*/\mathcal{O}_X^*)(X)$. Una forma de describir un divisor de Cartier es mediante un cubrimiento $\{U_i\}$ de X y para cada i , un elemento $f_i \in \mathcal{K}^*(U_i)$, tal que para todo i, j $f_i/f_j \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$. Si un divisor de Cartier D está representado de esa manera por $\{(U_i, f_i)\}$, definimos el haz $\mathcal{L}(D)$ de $\mathcal{O}_X$ -módulos como el grupo generado por f_i^{-1} en cada U_i . Este haz es un haz invertible.

De hecho ambos tipos de divisores están relacionados entre sí y con los haces de $\mathcal{O}_X$ -módulos invertibles. En la siguiente proposición condensamos los resultados de las proposiciones 6.11, 6.13 y 6.15 de [Har77] y las presentamos en un caso particular.

Proposición 4.27. *Sea X una curva integral propia y normal sobre un cuerpo k . Existe un isomorfismo entre el grupo de divisores de Weil $\text{Div}(X)$ y el grupo de divisores de Cartier $(\mathcal{K}^*/\mathcal{O}_X^*)(X)$. Además, en este caso, la asignación $D \mapsto \mathcal{L}(D)$ es una biyección entre los divisores de Cartier (bajo equivalencia lineal)⁵ y los haces de $\mathcal{O}_X$ -módulos invertibles.*

⁵El grupo de clases de equivalencia de divisores de Cartier se denota $\text{CaCl}(X)$ y el grupo de haces invertibles es lo que se conoce como el grupo de Picard de X , denotado por $\text{Pic}(X)$.

Ahora, sabiendo esta teoría, regresamos al tratamiento sobre los haces finitos sobre un esquema X .

Definición 4.28. Sea X una curva integral propia y normal sobre un cuerpo y $\mathcal{E}$ un haz localmente libre sobre X de rango r . El determinante $\det(\mathcal{E})$, que es por definición el r -ésimo producto exterior de $\mathcal{E}$, es un haz invertible, por lo que, gracias a la proposición anterior, corresponde a un único divisor de Weil D sobre X , el grado d de D , se llama el grado de $\mathcal{E}$, y el cociente $\mu(\mathcal{E}) := d/r$ se llama la pendiente de $\mathcal{E}$. Para haces localmente libres sobre C se tiene la fórmula

$$\mu(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{F}) = \mu(\mathcal{E}) + \mu(\mathcal{F}). \quad (4.1)$$

Una demostración de este hecho utiliza la teoría de las clases de Chern, que es un tema que se sale de nuestro estudio particular.

Se dice que $\mathcal{E}$ es semi-estable si $\mu(\mathcal{E}') \leq \mu(\mathcal{E})$ para todo sub-haz localmente libre $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$.

Los haces semi-estables están relacionados con los haces finitos, sobre una curva, debido al siguiente resultado. Una demostración se puede encontrar en la proposición 6.7.8 de [Szo9], o también en la proposición 3.4 de [Nori76].

Proposición 4.29. *Un haz, $\mathcal{E}$, de $\mathcal{O}_C$ -módulos localmente libre y finito sobre una curva propia, normal e integral C , es semi-estable de pendiente 0.*

Con ésto podemos definir los haces semi-estables que consideró Nori, para un esquema en general, acá usaremos la proposición 1.48.

Definición 4.30. Sobre X un esquema como las hipótesis al inicio de esta sección, un haz de $\mathcal{O}_X$ -módulos $\mathcal{E}$ se dice ser semi-estable de pendiente 0, si para todos los subesquemas cerrados integrales $C \subset X$ de dimensión 1, con normalización $\tilde{C} \rightarrow C$, el haz de $\mathcal{O}_{\tilde{C}}$ -módulos $\psi^*\mathcal{E}$ es semi-estable de pendiente 0 sobre la curva $\tilde{C}$, donde ψ es la composición

$$\psi : \tilde{C} \rightarrow C \rightarrow X.$$

La importancia que tiene este tipo de haces viene dada por la siguiente proposición, la prueba utiliza herramientas más avanzadas, para consultarla el lector puede referirse a la proposición 6.7.10 de [Szo9] o al corolario 3.5 de [Nori76].

Proposición 4.31. *Sea X un esquema que cumple las hipótesis del inicio de ésta sección.*

- (a) *La subcategoría plena $SS(X)$ de la categoría de haces localmente libres sobre X ($\text{Vect}(X)$), formada por los haces semi-estables de pendiente 0 sobre X , es una categoría abeliana.*
- (b) *Todo haz localmente libre que es finito, es semi-estable de pendiente 0.*

Lo que tenemos hasta ahora se puede resumir en el siguiente diagrama.

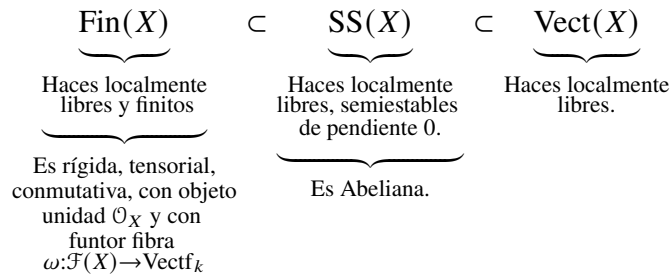


Figura 4.1. Inclusiones de las subcategorías plenas de haces finitos, haces semi estables en la categoría de haces localmente libres.

La categoría $\text{Fin}(X)$ no es abeliana necesariamente, pero es tensorial y rígida, y además se encuentra contenida en una categoría abeliana $SS(X)$. La idea de Nori fue entonces crear una categoría intermedia que pudiera tener todas las características deseadas para ser una categoría tannakiana. Ésta corresponde a lo que se conoce como los haces esencialmente finitos.

Definición 4.32. Sea $\text{EF}(X)$ la subcategoría plena de $\text{Vect}(X)$ cuyos objetos vienen dados por

$$\begin{aligned}
 \text{Obj}(\text{EF}(X)) = \{ & W \in \text{Obj}(SS(X)) : \exists P \in \text{Obj}(\text{Fin}(X)), \text{ y } V_1, V_2 \in \text{Obj}(SS(X)) \\
 & \text{tales que } V_1 \subset V_2 \subset P \text{ y } W \simeq V_2/V_1 \}.
 \end{aligned}$$

Estos haces se conocen como los haces esencialmente finitos sobre X .

Después de todo este trabajo, hemos llegado finalmente a una categoría tannakiana, como lo enuncia el siguiente hecho. Esta es la proposición 3.7 de [Nori76], también presentada como la proposición 6.7.11 de [Szo9].

Proposición 4.33. *Asuma, además de las hipótesis iniciales, que X tiene un punto k -racional $x : \text{Spec}(k) \rightarrow X$. Entonces la subcategoría plena $\text{EF}(X)$ de haces esencialmente*

finitos sobre X , junto con el producto tensorial de haces, y el funtor $\omega : \mathcal{E} \rightarrow x^* \mathcal{E}$ descrito anteriormente, es una categoría tannakiana neutral sobre k .

Demostración. Por construcción, la categoría $\text{EF}(X)$ es abeliana. Veamos que es estable tomando productos tensoriales. Sean $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ dos haces esencialmente finitos, y tome $\mathcal{F}'_i, \mathcal{F}''_i$ haces localmente libres y finitos tales que $\mathcal{E}_i \simeq \mathcal{F}'_i / \mathcal{F}''_i$ para $i = 1, 2$, vemos que $\mathcal{E}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_2$ es isomorfo a un cociente de $\mathcal{F}'_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}'_2$, y por lo tanto es un subcociente de $\mathcal{F}'_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}''_2$, el cual es finito por la proposición 4.24. Tenemos que demostrar que $\mathcal{E}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_2$ es semiestable de pendiente 0. Para ello considere una curva propia normal e integral en X , $\pi : \tilde{C} \rightarrow X$. Los $\pi^* \mathcal{E}_i$ son semiestables de pendiente 0, ya que son isomorfos a los cocientes $\pi^* \mathcal{F}'_i / \pi^* \mathcal{F}''_i$, los cuales son semiestables de pendiente 0. El resultado se sigue entonces del hecho que $\pi^*(\mathcal{E}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_2) \simeq \pi^* \mathcal{E}_1 \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{C}}} \pi^* \mathcal{E}_2$ y aplicando la formula 4.1. Para mostrar que la estructura tensorial en $\text{EF}(X)$ es rígida, observamos que el dual de un haz esencialmente finito es esencialmente finito también, gracias a un argumento similar al del párrafo anterior. Finalmente, el funtor $\omega : \mathcal{E} \mapsto s^* \mathcal{E}$ es fiel exacto, tensorial y k -lineal, con valores en la categoría de k -espacios vectoriales finito dimensionales (Recuerde que estaba definido para cualquier haz quasi-coherente). $\square$

Observación. También se cumple lo siguiente sobre haces esencialmente finitos. si $f : Y \rightarrow X$ es un morfismo y $V \in \text{EF}(X)$, entonces $f^* V \in \text{EF}(Y)$, en efecto: basta probarlo para haces semi-estables de pendiente 0, si $\pi : \tilde{C} \rightarrow Y$ es una curva propia integral y normal, $\pi^*(f^* V) = (f \circ \pi)^* V$, y como V es semiestable de pendiente 0, se sigue que $(f \circ \pi)^* V$ también, pues $f \circ \pi : \tilde{C} \rightarrow X$ es una curva de este tipo en X .

Con esta categoría podemos definir el esquema fundamental en grupos para X .

Definición 4.34. Sea X un esquema sobre k con las hipótesis iniciales y con un punto k -racional $x : \text{Spec}(k) \rightarrow X$. El esquema fundamental en grupos de X con punto base x es el grupo fundamental tannakiano de la categoría $(\text{EF}(X), \omega)$, y lo denotamos por $\pi_1^N(X, x)$.

Teniendo en cuenta la construcción de éste objeto, vamos ahora a describir dos de sus propiedades algebraicas más importantes.

Veremos por qué $\pi_1^N(X, x)$ clasifica los torsores sobre X , y por ello se llama un esquema fundamental en grupos. Nos basaremos en el tratamiento dado por [Nori76].

Definición 4.35. Para un subconjunto S de $\text{Obj}(\text{EF}(X))$, sea $S^\vee = \{V^\vee : v \in S\}$, sea $S_1 := S \cup S^\vee$ y $S_2 = \{V_1 \otimes \cdots \otimes V_m : V_i \in S\}$, sea

$$\text{EF}(X, S) = \left\{ W \in \text{Obj}(\text{SS}(X)) : \exists P \in S_2, \text{ y } V_1, V_2 \in \text{Obj}(\text{SS}(X)) \right. \\ \left. \text{tales que } V_1 \subset V_2 \subset P \text{ y } W \simeq V_2/V_1 \right\}.$$

Esta es la subcategoría plena generada por el conjunto S . De hecho en [Nori76], se hace la observación que $\text{EF}(X, S)$ es igual a $\langle W \rangle$ (usando la notación de [Szo9], que vimos en el capítulo 3), donde W es la suma directa de todos los miembros de S y de sus duales. En el capítulo 3 vimos que éstas subcategorías son tannakianas y que tienen asociado un grupo fundamental tannakiano. Por tanto, para la subcategoría tannakiana $(\text{EF}(X, S), \omega)$ existe un esquema afín en grupos asociado, al que llamaremos $\pi_1^N(X, S, x)$. La siguiente proposición se sigue directamente de las demostraciones que presentamos en el capítulo 3 para las subcategorías de categorías tannakianas.

Lema 4.36. *Si S es una colección finita de haces esencialmente finitos, entonces $\pi_1^N(X, S, x)$ es un esquema en grupos finito.*

Con la benefacción de la teoría de categorías tannakianas que estudiamos en el capítulo 3, observamos que $\pi_1^N(X, x)$ no es otra cosa más que el límite inverso ⁶ de los esquemas en grupos finitos $\pi_1^N(X, \{V\}, x)$ a medida que V recorre todos los objetos de $\text{EF}(X)$. Por ello tenemos lo siguiente.

Proposición 4.37. *El esquema en grupos $\pi_1^N(X, x)$ es un límite inverso de k -esquemas en grupos finitos.*

A continuación estudiamos más de cerca la relación del esquema fundamental $\pi_1^N(X, x)$ y los torsores sobre X . La categoría $\text{Qcoh}(X)$ es la categoría de haces quasi-coherentes de $\mathcal{O}_X$ -módulos.

Definición 4.38. Sea G un esquema afín en grupos (finito o no) sobre k . Recuerde que $\text{Rep}(G)$ es la categoría de representaciones finito dimensionales sobre G y $\text{Rep}'(G)$ es la categoría de todas las representaciones sobre G (finito dimensionales o no). Suponga que se cuenta con un funtor $F : \text{Rep}(G) \rightarrow \text{Qcoh}(X)$ que cumple las siguientes condiciones.

A. F es k -lineal, tensorial y exacto.

⁶El límite inverso de una familia dirigida de esquemas afines en grupos, es el esquema afín en grupos representado por el límite directo de las álgebras de Hopf que representan a cada esquema afín en grupos de la familia dada.

B. $F(k) = \mathcal{O}_X$ (donde k se ve como un k -comódulo trivial)

C. Si $\text{rg}(V) = n$ entonces $\text{rg}(F(V)) = n$.

Entonces existe un G -torsor $f: Y \rightarrow X$ asociado a F , al que llamaremos $Y(F)$, que se puede construir de la siguiente manera. El primer paso que se realiza en [Nori76] es extender el funtor F a un funtor $\overline{F}$ definido sobre la categoría $\text{Rep}'(G)$. De acuerdo a [Nori76, Lemma 2.1] existe un funtor $\overline{F}: \text{Rep}'(G) \rightarrow \text{Qcoh}(X)$ que cumple las condiciones A. B. y C. y que además $\overline{F}|_{\text{Rep}(G)} = F$ ⁷. Se considera esta extensión de dicho funtor porque, como veremos enseguida, necesitamos tomar la imagen bajo F de la representación regular de G , la cual usualmente no es finita (si G no es un esquema en grupos finito).

En el tratamiento de Nori se menciona lo siguiente (aunque por lo visto se omite una demostración): si $A = k[G]$ y G' denota la representación trivial de G dada por (A, ρ) donde $\rho: A \rightarrow A \otimes_k A$ es $\rho(a) = a \otimes 1$, entonces $\mathcal{A} := \overline{F}(G')$ es un haz de $\mathcal{O}_X$ -álgebras que cumple $\text{Spec}(\mathcal{A}) = G_X = G \times_k X$. (Recuerde proposición 1.57). Ahora, llamaremos por G , esperando no confundir al lector, a la representación regular de G , dada por (A, Δ) donde $\Delta: A \otimes_{\text{Spec}(k)} A \rightarrow A$ es la comultiplicación del álgebra de Hopf A . Entonces obtenemos que $\overline{F}(G)$ es un haz de $\mathcal{O}_X$ -módulos, pero, gracias a la existencia de la comultiplicación y el hecho que $\overline{F}$ es tensorial, se tiene que $\overline{F}(G)$ es un haz quasi-coherente de $\mathcal{O}_X$ -álgebras. Gracias a la proposición 1.57, esto define un morfismo afín $f: Y \rightarrow X$ tal que $f_* \mathcal{O}_Y \simeq \overline{F}(A)$, dado por $Y := \text{Spec}(\overline{F}(A))$. Nori demostró (ver [Nori76, Lemma 2.3]) que $f: Y \rightarrow X$ es un G -torsor sobre X . En efecto, si consideramos los morfismos

$$\varphi: G \times G' \rightarrow G, \quad \text{que es la multiplicación de } G \text{ y}$$

$$\psi: G \times G' \rightarrow G \times G, \quad \text{dado por } \psi(x, y) = (x, \varphi(x, y)), \text{ usando el lema de Yoneda,}$$

entonces mediante el funtor F obtenemos los correspondientes morfismos⁸

$$\Phi: Y \times_X G_X \rightarrow Y$$

$$\Psi: Y \times_X G_X \rightarrow Y \times_X Y,$$

notando que $Y \times_X G_X = Y \times_X (X \times_{\text{Spec}(k)} G) = (Y \times_X X) \times_{\text{Spec}(k)} G = Y \times_{\text{Spec}(k)} G$, y el hecho que ψ es un isomorfismo y que por tanto Ψ también. Además como φ define una

⁷El funtor $\overline{F}$ en una representación (posiblemente infinito dimensional) V de G se define como el límite directo de los $F(W)$, donde W recorre los subcomódulos de V que son finito dimensionales e invariantes bajo la acción de G sobre V , sabemos que sobre un cuerpo k , un comódulo V es igual al límite directo de sus comódulos finito dimensionales.

⁸En [Nori76, Lemma 2.4] se demuestra que al aplicar $\overline{F}$ y luego obtener los X -esquemas asociados, mediante la proposición 1.57, se preservan los productos fibrados.

acción de G' en G , entonces Φ define una acción de G_X en Y . Por tanto obtenemos los requisitos necesarios para asegurar que $Y \rightarrow X$ es un G -torsor.

Recíprocamente, si $f: Y \rightarrow X$ es un G -torsor sobre X , entonces se puede construir un funtor asociado de $\text{Rep}(G) \rightarrow \text{Qcoh}(X)$ al que llamaremos $F(Y)$, que cumple A, B y C. Sea $G \rightarrow \text{GL}_V$ una representación, es decir V es un $k[G]$ -comódulo. Considere el haz de $\mathcal{O}_{\text{Spec}(k)}$ -módulos $\tilde{V}$, y sea $p: X \rightarrow \text{Spec}(k)$ el morfismo que hace de X un k -esquema. A partir de V queremos crear un G -haz.

Dada una acción $\sigma: G \times_{\text{Spec}(k)} Y \rightarrow Y$, un haz $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_Y$ -módulos se llama un G -haz (o un haz equivariante) si posee un isomorfismo de haces de $\mathcal{O}_{G \times_X Y}$ -módulos

$$\theta: \sigma^* \mathcal{F} \simeq (p_2)^* \mathcal{F},$$

que cumpla la condición

$$p_{23}^* \theta \circ (\text{id}_G \times \sigma)^* \theta = (m \times \text{id}_Y)^* \theta,$$

donde $m: G \times G \rightarrow G$ es la multiplicación y p_{23} es la proyección en la segunda y tercera coordenadas, $p_{23}: G \times G \times_X Y \rightarrow G \times_X Y$, vea para esta definición [GW10, Sección 14.21]. Equivalentemente, siguiendo el tratamiento de [Nori76], un G -haz $\mathcal{F}$ es uno sobre el cual se especifica una acción de G .

Note que el haz $\tilde{V}$ es trivializado por p^* , pues $V \simeq k^{\oplus n}$ como k -módulo y por tanto $\tilde{V} \simeq \mathcal{O}_{\text{Spec}(k)}^{\oplus n}$. Resulta que el haz $V_Y := \mathcal{O}_Y^{\oplus n} = f^* p^* \tilde{V}$ es un G -haz. Naturalmente este es el haz asociado a $V \otimes_k \mathcal{O}_Y$, siguiendo el argumento de [Nori76], basta que presentemos una acción de G sobre $V \otimes_k \mathcal{O}_Y$. La acción $\sigma: G \times_{\text{Spec}(k)} Y \rightarrow Y$, nos brinda la acción deseada. Si R es un k -álgebra, para $g \in G(R)$ obtenemos un morfismo

$$\varphi(g): Y_R \rightarrow Y_R, \quad \text{que usando el Lema de Yoneda está dado por}$$

$$y \mapsto g \cdot y, \quad \text{mediante la acción } \sigma,$$

el cual a su vez induce un morfismo de haces

$$\rho(g): \mathcal{O}_{Y_R} \rightarrow \mathcal{O}_{Y_R},$$

donde Y_R denota el pullback $Y \times_{\text{Spec}(k)} \text{Spec}(R)$. La acción de G sobre $V \otimes_k \mathcal{O}_Y$ se obtiene al construir una acción de $G(R)$ sobre cada $(V \otimes_k R) \otimes_R \mathcal{O}_{Y_R}(U_R)$, donde U es un abierto cualquiera de Y , R es un k -álgebra y U_R denota el pullback de U sobre R . Para ello es suficiente verificarlo para un elemento de la forma $(v \otimes r) \otimes f$, donde $f \in \mathcal{O}_{Y_R}(U_R)$, $v \in V$, $r \in R$. Sabemos que $G(R)$ actúa sobre $V \otimes_k R$, porque tenemos una acción $G \times V \rightarrow V$,

porque V es una representación de G (recuerde la acción dada en la ecuación 2.1). Si $g \in G(R)$ especificamos la acción

$$\begin{aligned} G(R) \times ((V \otimes_k R) \otimes_R \mathcal{O}_{Y_R}(U_R)) &\rightarrow ((V \otimes_k R) \otimes_R \mathcal{O}_{Y_R}(U_R)) \\ g \cdot [(v \otimes r) \otimes f] &:= (g \cdot (v \otimes r)) \otimes [\rho(g)(U_R)](f), \end{aligned}$$

donde $g \cdot (v \otimes r)$ es la acción de $G(R)$ sobre $V \otimes_k R$ y recordamos que $\rho(g)(U_R)$ es un morfismo de $\mathcal{O}_{Y_R}$ en sí mismo. Esto concluye, de acuerdo a [Nori76] que V_Y es un G -haz. Si usamos la definición equivalente de GW, basta notar los isomorfismos

$$\begin{aligned} \sigma^* V_Y &= \sigma^* f^* p^* \tilde{V} \\ &= (f \circ \sigma)^* p^* \tilde{V} \\ &= (f \circ p_2)^* p^* \tilde{V} \\ &= (p_2)^* f^* p^* \tilde{V} \\ &= (p_2)^* V_Y, \end{aligned}$$

donde utilizamos la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times_{\text{Spec}(k)} Y & \xrightarrow{\sigma} & Y \\ p_2 \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{f} & X. \end{array}$$

La aplicación $\mathcal{F} \mapsto f^* \mathcal{F}$ da un isomorfismo entre $\text{Qcoh}(X)$ y los G -haces de $\mathcal{O}_Y$ -módulos, gracias a [GW10, Theorem 14.85]. El funtor $F(Y)$ en V vale el haz $F(Y)(V)$ que cumple $f^*(F(Y)(V)) \simeq V_Y$ (vea [Nori76, Lemma 2.6]).

Una importante observación que podemos hacer acá es que el haz $F(Y)(V)$ es trivializado por f , debido a la fórmula $f^*(F(Y)(V)) \simeq V_Y = \mathcal{O}_Y^{\oplus n}$. De esta forma, la imagen del funtor $F(Y)$ consiste de haces trivializados por el torsor f .

La relación anterior entre torsores y funtores $\text{Rep}(G) \rightarrow \text{Qcoh}(X)$ en realidad es una biyección. La siguiente es la proposición 2.9 de [Nori76].

Proposición 4.39. *Hay una correspondencia biyectiva*

$$\{G - \text{torsores sobre } X\} \leftrightarrow \{\text{Funtores } F : \text{Rep}(G) \rightarrow \text{Qcoh}(X) \text{ que cumplen } A, B \text{ y } C.\}.$$

Además

- (a) Si $\phi : Z \rightarrow X$ es un morfismo y asuma que $F : \text{Rep}(G) \rightarrow \text{Qcoh}(X)$ es un funtor que cumple A, B y C , entonces $\phi^* \circ F : \text{Rep}(G) \rightarrow \text{Qcoh}(Z)$ también cumple A, B y C y se tiene que $Y(\phi^* \circ F) = \phi^*(Y(F))$.
- (b) Sea $X = \text{Spec}(k)$ y $F : \text{Rep}(G) \rightarrow \text{Mod}(k)$ el funtor olvidadizo, entonces $Y(F) = G$.
- (c) Sea $\varphi : H \rightarrow G$ un morfismo de esquemas afines en grupos. Sea Y un H -torsor sobre X , y Y' el cociente de $P \times G$ por H (que es un G -torsor sobre X). Sea $R_\varphi : \text{Rep}(G) \rightarrow \text{Rep}(H)$ el funtor inducido por φ . Entonces $F(Y) \circ R_\varphi = F(Y')$.

De hecho, hay una relación entre el funtor construido a partir de un G -torsor, y los haces esencialmente finitos, dada por la proposición 3.8 de [Nori76]. También se puede consultar una demostración en la proposición 6.11 de [Bres14].

Proposición 4.40. *Sea G un esquema afín en grupos y finito, y $f : Y \rightarrow X$ un G -torsor. Entonces la imagen del funtor $F(Y) : \text{Rep}(G) \rightarrow \text{Qcoh}(X)$ está contenida en $\text{EF}(X)$.⁹*

Lo importante acá es que a partir de una colección de haces esencialmente finitos, podemos recuperar un torsor sobre X . Veamos cierta notación. Si $S \subset \text{Obj}(\text{EF}(X))$, es un conjunto finito, y $G_S := \pi_1^N(X, S, x)$ es el esquema fundamental en grupos asociado a la subcategoría $\text{EF}(X, S)$, sabemos que hay un funtor

$$G_S : \text{EF}(X, S) \rightarrow \text{Rep}(\pi_1^N(X, S, x)),$$

que es una equivalencia de categorías. Su inversa F_S puede verse como un funtor

$$F_S : \text{Rep}(\pi_1^N(X, S, x)) \rightarrow \text{Qcoh}(X),$$

y por la proposición 4.39, tiene asociado un único $\pi_1^N(X, S, x)$ -torsor $f_S : Y_S \rightarrow X$. Por la biyección de la proposición 4.39, $F(Y_S)$ es precisamente el funtor F_S , cuya imagen $(\text{EF}(X, S))$ contiene a S , con esto hemos probado el siguiente resultado.

Proposición 4.41. *[Nori76, Proposition 3.10] Sea S cualquier colección finita de haces esencialmente finitos sobre X . Existe un G -torsor $f : Y \rightarrow X$, con G un esquema afín en grupos (finito), tal que la imagen $F(Y) : \text{Rep}(G) \rightarrow \text{Qcoh}(X)$, contiene a la colección dada S .*

⁹De hecho la imagen sería $\text{EF}(X, \{f_* \mathcal{O}_Y\})$.

En realidad la proposición anterior también se puede comprobar para cuando S es una colección cualquiera, en cuyo caso el esquema G asociado no es necesariamente finito. Además, para el torsor $f_S : Y_S \rightarrow X$, se puede construir un punto k -racional x_S de Y_S que cumple $f_S \circ x_S = x$, en efecto, según Nori el funtor $x^* \circ F_S : \text{Rep}(G) \rightarrow \text{Mod}(k)$ coincide con el funtor olvidadizo. Sabemos por la biyección de la proposición 4.39 sabemos que el $\pi_1^N(X, S, x)$ -torsor Y_S cumple $F_S = F(Y_S)$. Por la proposición 4.39a) los funtores x^*F_S y $F(x^*Y_S)$ coinciden, y por la proposición 4.39b) esto quiere decir que hay un isomorfismo $G \simeq Y(F(x^*Y_S)) \simeq F(x^*Y_S)$, que es un isomorfismo de G -espacios. Según Nori esto es equivalente a especificar un punto k -racional x_S de Y_S que cumple lo deseado.

Para $S = \text{Obj}(\text{EF}(X))$, el torsor $f_S : Y_S \rightarrow X$ que se obtiene al aplicar la proposición 4.39 al funtor $F_S : \text{Rep}(\pi_1^N(X, x)) \rightarrow \text{EF}(X) \subset \text{Qcoh}(X)$, debe ser uno cuya imagen contenga todo $\text{EF}(X)$, gracias al resultado anterior. Escribiremos Y_S, G_S, F_S, x_S como $\bar{X}, \pi_1^N(X, x), F, \bar{x}$ respectivamente, en este caso.

Definición 4.42. El $\pi_1^N(X, x)$ -torsor $\bar{X}$, se llama el cubrimiento universal de X .

La siguiente proposición muestra la clasificación dada por el objeto $\pi_1^N(X, x)$ con respecto a los torsos que cubren X , y es el principal resultado que caracteriza al esquema fundamental en grupos, que recibe ese nombre pues esta propiedad nos dice que se comporta, estructuralmente, como lo hace el grupo fundamental en la teoría clásica de la topología algebraica.

Proposición 4.43. Sea (Y, G, u) una tripleta, con $f : Y \rightarrow X$ un G -torsor y $u : \text{Spec}(k) \rightarrow Y$ un punto k -racional de Y tal que $f \circ u = x$ y G es un esquema afín en grupos finito. Entonces existe un único morfismo $\rho : \pi_1^N(X, x) \rightarrow G$, tal que

- a. Existe un morfismo $\bar{X} \rightarrow Y$ inducido por el morfismo ρ , que conmuta con las acciones de $\pi_1^N(X, x)$ y G .
- b. La imagen de $\bar{x}$ en Y bajo el morfismo anterior es u .

En consecuencia, hay una correspondencia biyectiva entre las tripletas de esta forma y los morfismos $\rho : \pi_1^N(X, x) \rightarrow G$.

Demostración. Dado (Y, G, u) , donde $f : Y \rightarrow X$ es un G -torsor, seleccione el haz localmente libre y finito $f_*\mathcal{O}_Y$, y considere la categoría $\text{EF}(X, \{f_*\mathcal{O}_Y\})$, la cual es tannakiana y es equivalente a $\text{Rep}(G)$. Componiendo los funtores

$$\text{Rep}(G) \xrightarrow{\cong} \text{EF}(X, \{f_*\mathcal{O}_Y\}) \xrightarrow{\subset} \text{EF}(X) \xrightarrow{\cong} \text{Rep}(\pi_1^N(X, x))$$

obtenemos un funtor $\text{Rep}(G) \rightarrow \text{Rep}(\pi_1^N(X, x))$ que debe estar inducido por un morfismo $\rho : \pi_1^N(X, x) \rightarrow G$. De acuerdo a Nori, la proposición 4.39c) implica que ρ induce un morfismo de $\overline{X}$ en Y . Recíprocamente, dado un morfismo $\rho : \pi_1^N(X, x) \rightarrow G$, este genera un funtor tensorial y k -lineal $F : \text{Rep}(G) \rightarrow \text{EF}(X) \subset \text{Qcoh}(X)$, al que, por la proposición 4.39, se le puede asignar un G -torsor $f : Y \rightarrow X$, con un punto k -racional u . En el Teorema 6.7.16 de [Szog] se demuestra que estos procesos son inversos uno del otro, con lo que se concluye la correspondencia deseada. $\square$

Observación. Cuando $S = \{f_*\mathcal{O}_Y\}$ para $f : Y \rightarrow X$ un G -torsor, con G un esquema en grupos finito, entonces la subcategoría $\text{EF}(X, \{f_*\mathcal{O}_Y\})$ cumple que

$$\text{Obj}(\text{EF}(X, \{f_*\mathcal{O}_Y\})) = \{V \in \text{Vect}(X) : f^*V \simeq \mathcal{O}_Y^{\text{rg}(V)}\}.$$

Hay una inclusión que es sencilla de observar, arriba hemos observado que el funtor $F(Y) : \text{Rep}(G) \rightarrow \text{Vect}(X)$ asociado al G -torsor f , tiene por imagen a $\text{Obj}(\text{EF}(X, \{f_*\mathcal{O}_Y\}))$, sin embargo también habíamos concluido que su imagen está formada por haces trivializados por f , y por tanto los haces en la categoría $\text{Obj}(\text{EF}(X, \{f_*\mathcal{O}_Y\}))$ son trivializados por f . Para la otra inclusión, en [Nori76, Proposition 3.7] se demuestra que si V es un sub-objeto de un haz finito y su restricción a cada curva (normal, integral y propia) en X tiene grado cero entonces V es esencialmente finito. Ahora, considere $V \in \text{Vect}(X)$, tal que $f^*V \simeq \mathcal{O}_Y^{\oplus v}$, donde $v = \text{rg}(V)$. El isomorfismo $f^*V \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_Y^{\oplus v}$ induce un morfismo

$$f_*f^*V \xrightarrow{\simeq} f_*\mathcal{O}_Y^{\oplus v} = (f_*\mathcal{O}_Y)^{\oplus v} = \mathcal{E}^{\oplus v},$$

y usando la inmersión natural $V \hookrightarrow f_*f^*V$ tenemos que V es un sub-objeto $V \hookrightarrow \mathcal{E}^{\oplus v}$. Sea ahora $j : C \rightarrow X$ una curva integral normal y propia en X . Considere el pullback Y_C sobre C del morfismo $f : Y \rightarrow X$, de manera que tengamos un diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc} Y_C & \longrightarrow & Y \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ C & \xrightarrow{j} & X. \end{array}$$

En este caso Y_C es una variedad algebraica de dimensión 1, por lo que podemos encontrar una componente conexa C' de Y_C que domina en C , es decir, tal que $g|_{C'} : C' \rightarrow C$ es un morfismo sobreyectivo. Si fuera necesario podemos tomar el esquema reducido de C' y

luego su normalización para asegurarnos un pullback

$$\begin{array}{ccccc}
 C'' & \dashrightarrow & C' & \dashrightarrow & Y_C \longrightarrow Y \\
 & \searrow \alpha & \downarrow g & & \downarrow \\
 & & C & \xrightarrow{j} & X,
 \end{array}$$

en donde C'' sea una curva irreducible, propia, normal e integral, esto implica que por [Liu06, Corollary 3.10, pág. 137] el morfismo α es plano, y al ser sobreyectivo, es fielmente plano. Consideremos el morfismo $\psi : C'' \rightarrow Y$, observemos que si V es trivializado por f entonces ciertamente tendremos $\psi^* f^* V \simeq \mathcal{O}_{C''}^{\oplus v}$, es decir $\alpha^*(j^* V) \simeq \mathcal{O}_{C''}^v$. El haz $\mathcal{O}_{C''}$ tiene grado cero en la curva C'' y también sus sumas directas, por lo que $\alpha^*(j^* V)$ tiene grado cero. Como α es fielmente plano tenemos, por [HL97, Lemma 3.2.1, pág. 63] (o también ver en [AE09, Lemma 3.25]) que $j^* V$ tiene grado cero, que es lo que deseabamos probar.

Finalmente enunciamos algunas propiedades de los haces esencialmente finitos que utilizaremos en el siguiente capítulo.

Proposición 4.44. *Si X es un esquema conexo completo y reducido sobre un cuerpo k , con un punto k -racional $x \in X(k)$, y $f : Y \rightarrow X$ es un G -torsor finito sobre X , puntuado sobre x , entonces son equivalentes*

- (a) *El morfismo natural $\pi_1^N(X, x) \rightarrow G$ es fielmente plano.*
- (b) *$\mathcal{O}_Y(Y) = k$.*
- (c) *El funtor $F(Y) : \text{Rep}(G) \rightarrow \text{Vect}(X)$ es plenamente fiel.*

Demostración. Esto es [Nori82, Proposition 3, pág. 87]. □

Definición 4.45. Un G -torsor finito $f : Y \rightarrow X$ que cumpla alguna de las condiciones anteriores se llama un torsor Nori-reducido, o un torsor de Galois.

La siguiente proposición es el lema 2.2 del artículo [Zhang13].

Proposición 4.46. *Si X es un esquema reducido conexo propio sobre un cuerpo k tal que $\mathcal{O}_X(X) = k$, con un punto k -racional $x \in X(k)$, entonces para todo haz esencialmente finito V en X , el morfismo canónico $V(X) \otimes_k \mathcal{O}_X \rightarrow V$, es una inmersión de $V(X) \otimes_k \mathcal{O}_X$ en el subhaz trivial maximal de V .*

Observación. El haz $V(X) \otimes_k \mathcal{O}_X$, viene dado por

$$U \mapsto V(X) \otimes_k \mathcal{O}_X(U),$$

del cual hay un morfismo de haces en $V(U)$ [ya que este es una $V(X)$ -álgebra]. Si V es un fibrado esencialmente finito de rango v tal que sus secciones globales son isomorfas a $k^{\oplus v}$, esto implica que $V \simeq \mathcal{O}_X^{\oplus v}$. En efecto, como $V(X) \simeq k^{\oplus v}$ entonces $V(X) \otimes_k \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_X^{\otimes v}$ [Si $\mathcal{O}_X(X) = k$, lo cual se cumple bajo nuestras hipótesis], luego hay una inmersión $\mathcal{O}_X^{\oplus v} \rightarrow V$, el cociente de dicha inmersión es esencialmente finito también [esto ya que la categoría de haces esencialmente finitos es abeliana] y es un haz de rango 0 [por aditividad del rango en sucesiones exactas], de manera que necesariamente este cociente debe ser el haz cero y por tanto $V \simeq \mathcal{O}_X^{\oplus v}$. En el capítulo 5 haremos uso de esta observación.

Más adelante el siguiente resultado nos será útil también, aquí presentamos un corolario del principal teorema obtenido en [ToZh17]. En dicho artículo el resultado está formulado más generalmente en términos de la teoría de stacks, que se sale de nuestros objetivos, sin embargo presentamos aquí una versión simplificada.

Proposición 4.47. *Sean X es un k -esquema propio, conexo, normal y reducido, y $V \in \text{Vect}(X)$. Si existe un morfismo finito $g: T \rightarrow X$ tal que V es trivializado por g , es decir $g^*V \simeq \mathcal{O}_T^{\oplus \text{rg } V}$, entonces V es esencialmente finito.*

4.4. Construcción profinita del esquema fundamental de Nori

En [Nori82], se establece otra construcción del esquema fundamental en grupos. Esta nueva construcción es una construcción profinita. Una idea muy intuitiva es la de tomar los límites inversos del conjunto de torsores sobre X ; sin embargo para lograr esto se necesita que este conjunto sea dirigido de alguna forma. La proposición 4.19 nos sugiere que una forma de dar un orden a la familia de torsores sobre X es mediante los productos fibrados. En esta sección incluiremos algunos detalles de esta segunda construcción. Para un tratamiento mucho más completo el lector se puede referir a [Nori82] y [Bres14]. Nuevamente X es un esquema sobre $\text{Spec}(k)$ dotado de un punto k -racional $x: \text{Spec}(k) \rightarrow X$.

Consideramos la categoría $\mathcal{C}$, cuyos objetos son tripletes (Y, G, y) donde Y es un G -torsor sobre X , con G un k -esquema en grupos afín finito (es decir, $G = \text{Spec}(A)$, donde A es una k -álgebra finita), y $y: \text{Spec}(k) \rightarrow Y$, tal que $f \circ y = x$, donde $f: Y \rightarrow X$ es el morfismo fielmente plano en la definición de torsor. Un morfismo en la categoría $\mathcal{C}$ entre dos objetos

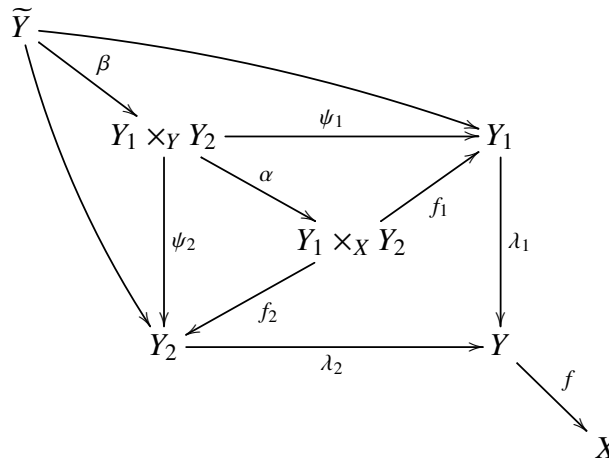
$(Y, G, y), (Y', G', y')$ es un par de k -morfismos de esquemas (f, g) , con $f: Y \rightarrow Y'$ y $g: G \rightarrow G'$ tales que los siguientes diagramas conmutan.

$$\begin{array}{ccc} G \times Y & \xrightarrow{\sigma} & Y \\ g \times f \downarrow & & \downarrow f \\ G' \times Y' & \xrightarrow{\sigma'} & Y' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(k) & \xrightarrow{y} & Y \\ = \downarrow & & \downarrow f \\ \mathrm{Spec}(k) & \xrightarrow{y'} & Y' \end{array}$$

La categoría $\mathcal{C}'$ será la categoría con tripletes (Y, G, y) como en $\mathcal{C}$, sólo que cada G es un esquema afín en grupos profinito (es decir, $G = \mathrm{Spec}(A)$ donde A es el límite directo de una familia de k -álgebras finitas), los morfismos se definen igual que en $\mathcal{C}$ y de hecho $\mathcal{C}$ es una subcategoría plena de $\mathcal{C}'$. Un esquema fundamental en grupos para (X, x) es un objeto de $\mathcal{C}'$, denotado $(\tilde{Y}, \pi^N(X, x), \tilde{x})$, tal que para todo (Y, G, y) en $\mathcal{C}$ existe un único morfismo de $(\tilde{Y}, \pi^N(X, x), \tilde{x})$ en (Y, G, y) . Este objeto, cuando existe, coincide con el cubrimiento universal detallado en la sección anterior. Sin embargo la construcción que damos en la presente sección se puede aplicar en una cantidad mayor de casos. El primer teorema de Nori sobre la existencia del esquema en grupo fundamental es el siguiente.

Teorema 4.48. [Nori82, Proposition 1, Chapter II, pág. 85] (X, x) tiene un esquema en grupo fundamental si y sólo si para todo par de morfismos $(\lambda_i, \rho_i): (Y_i, G_i, y_i) \rightarrow (Y, G, y)$ en $\mathcal{C}$ entonces $(Y_1 \times_Y Y_2, G_1 \times_G G_2, y_1 \times y_2)$ es un objeto de $\mathcal{C}$.

Para demostrar este teorema necesitaremos algunos lemas de utilidad. A lo largo de la prueba utilizaremos el siguiente diagrama:



Y además denotaremos $Z := Y_1 \times_Y Y_2, T := Y_1 \times_X Y_2, H := G_1 \times_G G_2$. El primer resultado a usar es el siguiente.

Lema 4.49. [Liu06, Proposition 3.9, pág. 101] Con las notaciones anteriores Z es un subesquema cerrado de T , o sea α es una inmersión cerrada.

La siguiente construcción será utilizada en nuestra prueba. Para una referencia, se puede consultar el capítulo 2, sección 3 de [Har77].

Proposición 4.50. Sea $f: Z \rightarrow X$ un morfismo de esquemas, entonces existe un único subesquema cerrado $g: Y \rightarrow X$ tal que f se factoriza a través de Y , es decir existe una función $f': Z \rightarrow Y$ tal que $g \circ f' = f$ y además si Y' es otro subesquema cerrado de X a través del cual f se factoriza, entonces existe g'' tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xrightarrow{f} & X \\
 & \searrow f'' \quad \nearrow g' & \\
 & Y' & \\
 & \searrow f' \quad \nearrow g & \\
 & Y &
 \end{array}$$

(Note: In the original image, there is a dashed arrow labeled g'' from Y' to Y .)

Cuando X es reducido, este subesquema consiste de la estructura reducida inducida sobre la clausura de $f(Z)$ en X .

El subesquema cerrado de la proposición anterior se llama el *esquema imagen* del morfismo f , y se denotará por $\text{im}(f)$. Cuando f es una inmersión cerrada cuasicompacta entonces $\text{im}(f)$ se llamará la clausura esquemática de X en Y . El siguiente resultado general se puede encontrar en [DeGro62, 3.4.3.1].

Lema 4.51. Si X es un esquema localmente noetheriano y $Z \rightarrow X$ un esquema localmente de tipo finito y quasifinito y $H \rightarrow X$ un esquema afín en grupos sobre Z . Suponga que el morfismo natural $Z \times_T H \rightarrow Z \times_X Z$ es una inmersión cerrada. Entonces el haz $(Z/H)_{\text{fpqc}}$ está representado por un esquema Z/H . Además el morfismo canónico $Z \rightarrow Z/H$ es fielmente plano y el morfismo canónico $Z \times_X Z \rightarrow Z \times_{Z/H} Z$ es un isomorfismo, por lo que $Z \rightarrow Z/H$ es un H -torsor.

En nuestro caso en particular, quizá el lema más importante que utilizaremos es el siguiente, el cual se deriva del resultado anterior.

Lema 4.52. [Nori82, Lemma 1, Chapter II, pág. 85] Con las notaciones anteriores, es decir X un k -esquema con un punto k -racional $x: \text{Spec}(k) \rightarrow X$, existe un subesquema

cerrado C de X tal que Z es un H -torsor sobre C , es decir, existe un diagrama

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\quad} & X \\ & \searrow & \nearrow \\ & C & \end{array}$$

tal que $r : Z \rightarrow C$ es un H -torsor.

Demostración. (Del Teorema 4.48) Suponga que X tiene a $(\tilde{Y}, \pi_1^N(X, x), \tilde{x})$ como un esquema fundamental en grupos y sean $(Y_i, G_i, y_i) \rightarrow (Y, G, y)$ dos morfismos en $\mathcal{C}$. Sea $q_i = \lambda_i \circ f_i : T \rightarrow Y$ para $i = 1, 2$. Usando el Lema de Yoneda, existe un único $z : T \rightarrow G$ tal que $q_1 = q_2 \cdot z$, esto es para todo $t \in T$ existe un único $z(t) \in G$ tal que $q_1(t) = \sigma(z(t), q_2(t))$ [esto se obtiene usando el hecho que en cada grupo Hom , el morfismo σ es una acción transitiva de grupos]. Si e representa la identidad de G - ya que G es un esquema en grupos- entonces $Y_1 \times_Y Y_2 = Z$ es igual a $z^{-1}(\{e\})$, en efecto, si $s \in Z$ bastaría ver que $q_1(\alpha(s)) = q_2(\alpha(s))$, donde recordamos que α es el morfismo natural de $Y_1 \times_Y Y_2$ en $Y_1 \times_X Y_2$. Observe que $q_i(\alpha(s)) = \lambda_i \circ f_i \circ \alpha(s) = \lambda_i \circ \psi_i$, y $\lambda_1 \circ \psi_1 = \lambda_2 \circ \psi_2$ porque el cuadrado grande es cartesiano.

Como uno de los requisitos para la definición de torsor vamos a probar que hay un isomorfismo $Z \times H \rightarrow Z \times_X Z$. Considere el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T \times G_1 \times G_2 & \longrightarrow & T \times_X T \\ \downarrow z \times 1_{G_1} \times 1_{G_2} & & \downarrow z \times z \\ G \times G_1 \times G_2 & \xrightarrow{h} & G \times G \end{array} \quad (4.2)$$

Donde la flecha horizontal superior se ve inducida (Lema de Yoneda) por las aplicaciones $(p, g) \mapsto (p, pg)$ para $p \in \text{Hom}(S, T)$ y $g \in \text{Hom}(S, G_1 \times G_2)$ para S un k -esquema [Note que usamos que $G_1 \times G_2$ actúa sobre T , debido a la proposición 4.19]. La flecha horizontal inferior se ve inducida por $(g, g_1, g_2) \mapsto (g, \rho_2(g_2)^{-1} g \rho_1(g_1))$, para $g_i \in \text{Hom}(S, G_i)$ para $i = 1, 2$ y $g \in \text{Hom}(S, G)$, con S un k -esquema.

Verifiquemos ahora que (4.2) es conmutativo. Sea (t, g_1, g_2) un elemento en $T \times G_1 \times G_2$ (más bien en $\text{Hom}(S, T \times G_1 \times G_2)$ para un k -esquema S fijo, vamos a prescindir de esta formalidad, el argumento funciona debido al Lema de Yoneda). Por el camino superior derecho tenemos que

$$(t, g_1, g_2) \mapsto (t, t(g_1, g_2)) \mapsto (z(t), z(t(g_1, g_2))).$$

Siguiendo la notación de Nori estamos escribiendo las acciones por la derecha. Por el camino inferior izquierdo tenemos que

$$(t, g_1, g_2) \mapsto (z(t), g_1, g_2) \mapsto (z(t), \rho_2(g_2)^{-1} z(t) \rho_1(g_1)),$$

por lo que debemos probar que

$$\rho_2(g_2)^{-1} z(t) \rho_1(g_1) = z(t(g_1, g_2)).$$

Usaremos el punto $\cdot$ para denotar las acciones respectivas en cada caso. Escribamos $t = (a, b)$ donde $a \in Y_1, b \in Y_2$. Sabemos, debido a la construcción de z , que

$$q_1((a, b) \cdot (g_1, g_2)) = q_2((a, b) \cdot (g_1, g_2)) \cdot z((a, b), (g_1, g_2)). \quad (4.3)$$

La acción de $G_1 \times G_2$ sobre $Y_1 \times_X Y_2$ es

$$(t_1, t_2) \cdot (g_1, g_2) = (t_1 \cdot g_1, t_2 \cdot g_2),$$

y es posible obtener esta acción a partir de la acción construida categóricamente en la proposición 4.17. Entonces

$$q_i((a, b) \cdot (g_1, g_2)) = q_i(a \cdot g_1, b \cdot g_2) = \lambda_i \circ f_i(a \cdot g_1, b \cdot g_2).$$

Como f_i es la i -proyección (viendo al producto fibrado en su interpretación como conjunto), entonces tenemos que

$$q_1((a, b) \cdot (g_1, g_2)) = \lambda_1(a \cdot g_1)$$

$$q_2((a, b) \cdot (g_1, g_2)) = \lambda_2(b \cdot g_2).$$

Recordemos que para $i = 1, 2$ el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Y_i \times G_i & \xrightarrow{\sigma_i} & Y_i \\ \lambda_i \times \rho_i \downarrow & & \downarrow \lambda_i \\ Y \times G & \xrightarrow{\sigma} & Q, \end{array}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \lambda_1(a \cdot g_1) &= \lambda_1(\sigma_1(a, g_1)) \\ &= \sigma(\lambda_1 \times \rho_1)(a, g_1) \\ &= \sigma(\lambda_1(a), \rho_1(g_1)) \\ &= \lambda_1(a) \cdot \rho_1(g_1) \end{aligned}$$

y análogamente

$$\lambda_1(a \cdot g_1) = \lambda_2(b) \cdot \rho_2(g_2).$$

También tenemos que $q_1(t) = q_1(a, b) = \lambda_1(f_1(a, b)) = \lambda_1(a)$, y similarmente $q_2(t) = \lambda_2(b)$. Por definición $z(t)$ es el único elemento de G que cumple que $q_1(t) = q_2(t) \cdot z(t)$, o sea que $\lambda_1(a) = \lambda_2(b) \cdot z(t)$. Con los cálculos anteriores la ecuación 4.3, se convierte en

$$\lambda_1(a) \cdot \rho_1(g_1) = (\lambda_2(b) \cdot \rho_2(g_2)) \cdot (z(t \cdot (g_1, g_2))),$$

es decir,

$$\lambda_1(a) = \lambda_2(b) \cdot (\rho_2(g_2) \cdot z(t \cdot (g_1, g_2)) \cdot \rho_1(g_1)^{-1}).$$

Lo último debe ser igual a $z(t)$, por la unicidad del elemento $z(t)$, de allí se obtiene la igualdad deseada.

Ahora, la primera flecha de 4.2 es en realidad un isomorfismo, porque T es un $G_1 \times G_2$ -torsor, debido a la proposición 4.19. Note que $h^{-1}(e \times e) = e \times H$, en efecto,

$$\begin{aligned} (g, g_1, g_2) \in h^{-1}(e \times e) &\Leftrightarrow h(g, g_1, g_2) = (e, e) \\ &\Leftrightarrow (g, \rho_2(g_2)^{-1} g \rho_1(g_1)) = (e, e) \\ &\Leftrightarrow g = e \text{ y } \rho_2(g_2) = \rho_1(g_1) \\ &\Leftrightarrow g = e \text{ y } (g_1, g_2) \in H = G_1 \times_G G_2. \end{aligned}$$

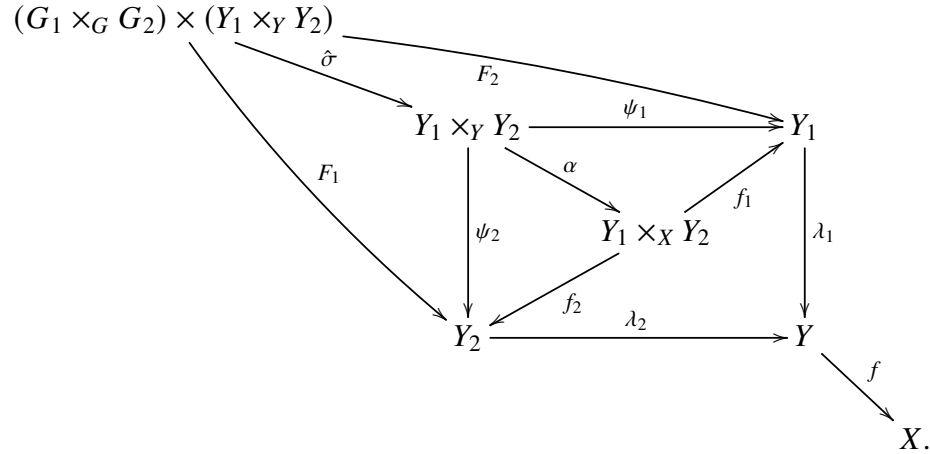
Entonces la restricción de la primera flecha de 4.2 lleva $Z \times H$ isomórficamente en $Z \times_X Z$. Esto ya que si (a, b, g_1, g_2) , entonces este elemento es enviado a (e, e) mediante la composición de h y la flecha vertical de la izquierda en 4.2, tomando inversa de la flecha vertical de la derecha su imagen bajo el morfismo horizontal superior debe estar en $Z \times_X Z$, o sea que la restricción del morfismo horizontal superior al subesquema $Z \times H$ cae en $Z \times_X Z$. De ahí tenemos un isomorfismo $Z \times H \rightarrow Z \times_X Z$, y más aún, está dado por

$$(a, s) \mapsto (a, a \cdot s)$$

Todo esto nos dice que el esquema Z , subesquema (cerrado) de T , es estable bajo la acción de $G = G_1 \times G_2$ sobre T . Muy informalmente, el subesquema cerrado Y del lema 4.52, debería ser un objeto como Z/H , o por lo menos un objeto que funcione funtorialmente como un cociente de esa naturaleza.

La acción $\hat{\sigma} : H \times Z \rightarrow Z$, que se requiere para formar el torsor viene de tomar la restricción

de la acción $\tilde{\sigma} : (G_1 \times_G G_2) \times T \rightarrow T$, aunque se puede construir categóricamente mediante un método similar al de la proposición 4.19, al considerar el diagrama



donde las aplicaciones F_1, F_2 vienen construidas de la siguiente manera

$$F_i = \sigma_i \circ (r_i \times \text{id}_{Y_i}) \circ (\text{id}_H \times \psi_i)$$

para $i = 1, 2$, con r_i la proyección $r_i : H = G_1 \times_G G_2 \rightarrow G_i$. Mediante unos sencillos argumentos de conmutatividad de diagramas, se puede ver que F_1, F_2 satisfacen la conmutatividad deseada para construir el morfismo $\hat{\sigma}$, usando la propiedad del producto fibrado $Y_1 \times_Y Y_2$. Tampoco es difícil corroborar la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} H \times Z & \xrightarrow{\hat{\sigma}} & Z \\ p_2 \downarrow & & \downarrow \pi\alpha \\ Z & \xrightarrow{\pi\alpha} & X, \end{array}$$

donde $\pi := f \circ \lambda_2 \circ f_2 = f \circ \lambda_1 \circ f_1 : Z = Y_1 \times_Y Y_2 \rightarrow X$, para $f : Y \rightarrow X$, la aplicación del torsor Y sobre X .

Finalmente, debemos ver que el morfismo $\pi\alpha : Z \rightarrow X$ es fielmente plano, aquí es donde entra en juego el lema 4.52 y el uso del esquema imagen. Ahora consideramos la siguiente situación

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{\beta} & Y_1 \times_Y Y_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{im}(\alpha\beta) & \xrightarrow{\subset} & \text{im}(\alpha) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & Y_1 \times_X Y_2. \end{array}$$

El morfismo punteado existe debido a la propiedad universal del esquema imagen $\text{im}(\alpha\beta)$. De esta manera tenemos una inmersión cerrada

$$\text{im}(\alpha\beta) \hookrightarrow \text{im}(\alpha)$$

que da lugar a una sucesión de inmersiones cerradas

$$\text{im}(\alpha\beta) \hookrightarrow \text{im}(\pi\alpha) \hookrightarrow X$$

Como suponemos que $\tilde{Y}$ está en la categoría $\mathcal{C}$, entonces $\pi\alpha\beta : \tilde{Y} \rightarrow X$ es un torsor, y por tanto se cumple que $\text{im}(\pi\alpha\beta) = X$, ya que el morfismo $\pi\alpha\beta$ es sobreyectivo, característica que tienen los morfismos de torsores. Por tanto, debido a las inmersiones antes mencionadas debemos tener que $\text{im}(\pi\alpha) = X$. Ahora, por el Lema 4.52, y la propiedad universal del esquema imagen $\text{im}(\pi\alpha)$ tenemos la existencia de una inmersión $\text{im}(\pi\alpha) \rightarrow C$ que hace el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{\pi\alpha} & X \\ & \searrow & \nearrow \\ & C & \\ & \uparrow & \\ & \text{im}(\pi\alpha) & \end{array}$$

conmutar. Como $\text{im}(\pi\alpha) = X$ cuando $\tilde{Y}$ existe, entonces se debe tener que $C = X$, y así concluimos que $\pi\alpha$ es fielmente plano, pues es un morfismo de un torsor.

Ahora nos encargamos del recíproco, suponemos que la categoría $\mathcal{C}$ es cerrada bajo productos fibrados. Sea $\text{Obj}(\mathcal{C}) = \{(Y_i, G_i, y_i)\}$. Para cada esquema afín en grupos G_i sea $A_i = k[G_i]$, el álgebra de Hopf que lo representa. El objeto $F = (X, \{\text{Spec}(k)\}, x) = (X, G_0, x)$ es un objeto final en la categoría $\mathcal{C}$, es decir siempre existe un morfismo $(Y, G, y) \rightarrow F$ en la categoría $\mathcal{C}$, para cualquier objeto (Y, G, y) . Ahora, si $(Y_{i_j}, G_{i_j}, y_{i_j})$, $j = 1, 2$, son dos objetos de $\mathcal{C}$, entonces hay morfismos $(Y_{i_j}, G_{i_j}, y_{i_j}) \rightarrow F$, y por tanto, por la hipótesis dada el triplete $(Y_{i_1} \times_X Y_{i_2}, G_{i_1} \times_{G_0} G_{i_2}, y_{i_1} \times y_{i_2})$ es un objeto de $\mathcal{C}$.

Queremos ver que el sistema $\{G_i\}$ es un sistema cofiltrado de esquemas afines en grupos, por lo que el sistema de álgebras de Hopf $\{A_i\}$ (que sería un sistema filtrado) admitiría un límite directo. Para esto debemos verificar dos cosas, de acuerdo a la observación 1.1. Primero que para G_1, G_2 existe un tercer objeto esquema en grupos G_3 con flechas $G_3 \rightarrow G_i$ para $i = 1, 2$ y segundo que para G y H , dos esquemas en grupos en la colección, y dos morfismos $f_i : G \rightarrow H$, existe otro esquema en grupos de la colección M y un morfismo

$u : M \rightarrow G$ tal que $f_1 \circ u = f_2 \circ u$. La primera condición es lo que demostramos en el párrafo anterior, ahora nos dedicamos a verificar la segunda condición.

Construya el morfismo $(f_1, f_2) = f_1 \times f_2$ de la definición de producto fibrado mediante el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 G & & & & \\
 & \searrow^{f_1 \times f_2} & & \searrow^{f_2} & \\
 & H \times_{\text{Spec}(k)} H & \xrightarrow{p_1} & H & \\
 & \downarrow p_2 & & \downarrow & \\
 & H & \longrightarrow & \text{Spec}(k), &
 \end{array}$$

(Note: In the original image, there is an additional arrow from G to H labeled f_1 .)

y considere el morfismo diagonal $\Delta : H \rightarrow H \times_k H$. Ahora obtenga M como el producto fibrado de los morfismos Δ y $f_1 \times f_2$, y $u : M \rightarrow G$ la proyección del fibrado M sobre G , es decir se considera el diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{u} & G \\
 d \downarrow & & \downarrow f_1 \times f_2 \\
 H & \xrightarrow{\Delta} & H \times_{\text{Spec}(k)} H.
 \end{array}$$

Entonces tenemos que $f_1 \circ u = f_2 \circ u$, en efecto, ya que

$$f_1 \circ u = p_1 \circ (f_1 \times f_2) \circ u = p_1 \circ \Delta \circ u = p_2 \circ \Delta \circ u = p_2 \circ (f_1 \times f_2) \circ u = f_2 \circ u,$$

donde hemos utilizado la propiedad $p_1 \circ \Delta = p_2 \circ \Delta$ que se deriva de la definición de Δ . Por tanto el sistema $\{G_i\}$ es cofiltrado y por tanto podemos construir su límite proyectivo o inverso. Definimos $\pi_1^N(X, x)$ como el esquema afín en grupos representado por el álgebra de Hopf

$$A = k[\pi_1^N(X, x)] := \varinjlim A_i$$

Ahora, considere la colección $\{(f_i)_* \mathcal{O}_{Y_i}\}$, donde $f_i : Y_i \rightarrow X$ es el morfismo de cada torsor Y_i en $\mathcal{C}$. La condición sobre el producto fibrado nos dice que este es un sistema filtrado de $\mathcal{O}_X$ -álgebras quasi-coherentes. Consideremos la $\mathcal{O}_X$ -álgebra

$$\mathcal{A} := \varinjlim (f_i)_* \mathcal{O}_{Y_i}.$$

Este límite se puede construir (ver [Bres14, Proposition 2.52]). Gracias a la proposición 1.57, existe un morfismo afín $f : \tilde{Y} \rightarrow X$ tal que $f_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}} \simeq \mathcal{O}_X$. Bajo estas condiciones, existe un morfismo $\tilde{x} : \text{Spec}(k) \rightarrow \tilde{Y}$, en efecto, el conjunto de morfismos

$$(f_i)_*(y_i)_* : \mathcal{O}_{\text{Spec}(k)} \rightarrow (f_i)_* \mathcal{O}_{Q_i}$$

induce, por definición de límite directo, un morfismo $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec}(k)}$, que a su vez induce el morfismo deseado $\text{Spec}(k) \rightarrow \widetilde{Y}$. Ahora consideramos el triplete $(\widetilde{Y}, \pi_1^N(X, x), \widetilde{x})$. Estructuralmente es sencillo ver que cumple las propiedades deseadas. Lo que resta es ver que $\widetilde{Y}$ es un $\pi_1^N(X, x)$ -torsor sobre X , pero esto se deduce de pasar al límite las acciones de grupos inducidas por cada torsor en $\mathcal{C}$, para más detalles, ver [Bres14, Proposition 4.5]. $\square$

El resultado anterior entonces nos da una condición necesaria y suficiente para la existencia del esquema fundamental en grupos de X . La proposición siguiente nos da un caso afirmativo para la existencia de dicho objeto.

Proposición 4.53. *Si X es reducido y conexo, entonces X tiene un esquema fundamental en grupos.*

La idea detrás de la prueba de la proposición anterior es demostrar que el subesquema cerrado Y del lema 4.52 coincide con X , y de esta forma tendríamos inmediatamente la preservación de los productos finitos en nuestra categoría. Los detalles se pueden encontrar en [Bres14, Theorem 4.8] o en [Nori82, Proposition 2, pág. 85].

Ejemplo 4.54. Recuerde que en el ejemplo 4.9 vimos el cálculo del grupo fundamental algebraico de una variedad abeliana A , y notamos que este grupo se puede ver como el límite inverso de los núcleos de las multiplicaciones sobre el grupo subyacente a A . De hecho, un tratamiento completamente análogo surge para el esquema en grupo fundamental $\pi_1^N(A, 0)$. En el artículo [Nori83], se demuestra que

$$\pi_1^N(A, 0) \simeq \varprojlim_n A_n.$$

Donde A_n es el esquema en grupos finito asociado al núcleo de la multiplicación por n de A en sí mismo. (Es decir ver a los K_n del ejemplo 4.9, como esquemas en grupo). De hecho la prueba de Nori utiliza fuertemente el resultado de Serre y Lang para el grupo fundamental étale de una variedad abeliana.

4.5. Esquema fundamental en grupos para esquemas de Dedekind

En esta sección vamos a examinar una construcción para el esquema fundamental en grupos de un S -esquema X , siendo S un esquema de Dedekind. (Recuerde que nuestro tratamiento hasta el momento ha sido únicamente para esquemas sobre cuerpos). Esta

construcción se encuentra en el artículo [AEG15] y sigue un método similar al de la construcción de la sección anterior, y de hecho utiliza varios resultados de ese tratamiento.

En adelante S es un esquema de Dedekind, es decir un esquema localmente noetheriano, irreducible, normal y de dimensión 0 ó 1 (aunque el caso que nos interesa es en dimensión 1, el caso de dimensión 0 ya lo discutimos en las secciones anteriores porque corresponde al espectro de un cuerpo), $\eta = \text{Spec}(K)$ su punto genérico, X es un S -esquema separado, localmente de tipo finito y fielmente plano y x_0 un punto S -racional de X , es decir un punto en $X(S)$.

Definición 4.55. Sea S un esquema de Dedekind, $G \rightarrow S$ un S -esquema afín en grupos, plano y quasi-finito (resp. finito) de tipo finito y $H \subset G$ un sub-esquema en grupos cerrado, plano sobre S . Sea $X \rightarrow S$ un S -esquema separado, localmente de tipo finito y fielmente plano y $Y \rightarrow X$ un torsor bajo G . Sean $T \rightarrow X$ y $Y \rightarrow X$ respectivamente un H -torsor y un G -torsor. Decimos que $T \rightarrow X$ es un H -sub-torsor del G -torsor $Y \rightarrow X$, si existe un diagrama conmutativo $H \subset G$ -equivariante

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{i} & Y \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X. \end{array}$$

Los sub-torsores de un torsor se pueden clasificar de una manera más sencilla [Ver lemme 2.5 de [AEG15]].

Lema 4.56. *Bajo las hipótesis de la definición 4.55, existe una correspondencia biunívoca, estable bajo cambio de base, entre secciones s de Y/H sobre X y H -sub-torsores $T \rightarrow X$ del G -torsor $Y \rightarrow X$. Esta correspondencia está dada por el diagrama cartesiano*

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{s} & Y/H \end{array}$$

El problema que se plantea en [AEG15] con respecto a las reducciones en esquema estructural en grupos de un torsor es el siguiente.

Considere un esquema de Dedekind S , un S -esquema $X \rightarrow S$ separado, fielmente plano y localmente de tipo finito, y un esquema afín en grupos $G \rightarrow S$, plano. Dado un abierto denso $U \subset X$, se denota S' por la imagen de U bajo el morfismo fielmente plano $X \rightarrow S$ (S' es entonces un abierto que contiene el punto genérico η de S). Sea $H' \subset G_{S'}$ un sub-esquema en grupos, plano sobre S' . Sea $Y \rightarrow X$ un G -torsor y $Y_U \rightarrow U$ su restricción en

U . Suponga que $Y_U \rightarrow U$ admite un H' -sub-torsor $Z' \rightarrow U$ (que corresponde a una sección $s' : U \rightarrow Y_U/H'$), ¿Será cierto que el torsor $Y \rightarrow X$ admite un H -sub-torsor $Z \rightarrow X$ para un subesquema en grupos cerrado $H \subset G$, plano sobre S , tal que su restricción a U sea precisamente $Z' \rightarrow U$? Gracias al lema 4.56, esto equivale a encontrar una sección $s : X \rightarrow Y/H$ que hace que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y_U/H' & \longrightarrow & Y/H \\ \uparrow s' & & \uparrow s \\ U & \longrightarrow & X \end{array}$$

conmutar. La siguiente figura aclara el problema planteado.

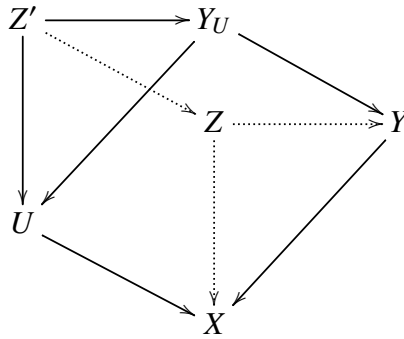


Figura 4.2. Reducción a un sub-torsor.

Responder esta interrogante es crucial para la construcción del esquema fundamental en grupos, ya que veremos que permite trabajar con la teoría de Nori que ya se tiene disponible. En [AEG15] se brinda una respuesta afirmativa a este problema, si se asumen varias hipótesis sobre el esquema X . Exhibimos ahora los resultados que se establecen en dicho artículo.

Proposición 4.57 (proposition 3.1 de [AEG15]). *Suponga que para todo punto $s \in S$, X_s es reducido y que G es un S -esquema en grupos finito y plano. Sea $Y \rightarrow X$ un G -torsor, $H' \subset G_\eta$ un sub-esquema afín en grupos cerrado. Suponga que $Y_\eta \rightarrow X_\eta$ admite un H' -sub-torsor $Z \rightarrow X_\eta$, donde $Z \subset Y_\eta$. Entonces el G -torsor $Y \rightarrow X$ admite un $\overline{H'}$ -sub-torsor $\overline{Z} \subset Y$, donde $\overline{Z}$ (resp. $\overline{H'}$) denota la clausura esquemática de Z en Y (resp. de H' en G).*

Proposición 4.58 (proposition 3.3 de [AEG15]). *Sea $f : X \rightarrow S$ un S -esquema fielmente plano de tipo finito e integral. Sea U un abierto denso de X , $S' = f(U) \subset S$, y supongamos*

que X es normal en todos los puntos fuera de U . Sea G un S -esquema en grupos finito y fielmente plano y $Y \rightarrow X$ un G -torsor. Si la restricción a U de $Y \rightarrow X$ admite un H' -sub-torsor $T \subset Y_U$, donde $H' \subset G_{S'}$ es un sub-esquema en grupos cerrado fielmente plano sobre S' , entonces el G -torsor $Y \rightarrow X$ admite un $\overline{H'_\eta}$ -sub-torsor $\overline{T}_\eta \subseteq Y$, donde $\overline{T}_\eta$ (resp. $\overline{H'_\eta}$) denota la clausura esquemática de T_η (resp. H'_η) en Y (resp. en G).

Proposición 4.59 (proposition 3.4 de [AEG15]). Sea $f: X \rightarrow S$ un S -esquema fielmente plano de tipo finito e integral. Sea U un abierto denso de X , $S' = f(U) \subset S$, y supongamos que para todo punto $z \in S$, la fibra X_z es integral y normal. Sea G un S -esquema afín en grupos quasi-finito y plano y $Y \rightarrow X$ un G -torsor. Si la restricción a U de $Y \rightarrow X$ admite un H' -sub-torsor $T \subset Y_U$, donde $H' \subset G_{S'}$ es un sub-esquema en grupos cerrado quasi-finito y fielmente plano sobre S' , entonces el G -torsor $Y \rightarrow X$ admite un $\overline{H'_\eta}$ -sub-torsor $\overline{T}_\eta \subseteq Y$, donde $\overline{T}_\eta$ (resp. $\overline{H'_\eta}$) denota la clausura esquemática de T_η (resp. H'_η) en Y (resp. en G), si una de las dos condiciones siguientes se verifica:

- (1) $S = S'$;
- (2) Para todo punto cerrado $s \in S$, la restricción a $\text{Spec } \mathcal{O}_{S,s}$ de la composición $T_\eta \rightarrow Y_\eta \rightarrow Y$ no es una inmersión cerrada.

Observación. Note que hay una distinción entre el caso G esquema en grupos finito y el caso cuando G es quasi-finito. Esta situación será tratada por [AEG15] haciendo una diferenciación entre la clasificación de los torsores en el caso finito y en el caso quasi-finito, resultando en la construcción de un esquema fundamental en grupos (para el caso finito) y un esquema fundamental en grupos quasi-finito (evidentemente, para el caso quasi-finito).

A partir de los resultados anteriores, podemos establecer proposiciones relacionadas a nuestro caso particular.

Proposición 4.60 (proposition 3.6 de [AEG15]). Con las hipótesis de la proposición 4.59, supongamos que X tiene un punto S -racional $x \in X(S)$ y que Y tiene a $y \in Y_x(S)$, y $y_{S'} \in T(S')$. Entonces $Y \rightarrow X$ admite un $\overline{H'_\eta}$ -sub-torsor $\overline{T}_\eta \rightarrow X$, puntuado en y , cuya restricción a U es isomorfa a $T \rightarrow U$.

Corolario 4.61 (corollaire 3.7 de [AEG15]). Los resultados precedentes – proposiciones 4.58 y 4.60 – siguen siendo válidos si se reemplaza el abierto U por la fibra genérica X_η .

En resumen se tiene lo siguiente. Consideramos las siguientes hipótesis:

- (A) $X \rightarrow S$ es separado, fielmente plano, localmente de tipo finito y para todo punto $s \in S$ la fibra X_s es reducida.
- (B) $X \rightarrow S$ es separado, fielmente plano, localmente de tipo finito, integral y normal.
- (C) $X \rightarrow S$ es localmente de tipo finito, separado, fielmente plano, y para todo punto $s \in S$, X_s es integral y normal.

Suponemos que $X \rightarrow S$ satisface (A) o (B) (resp. (C)). Sea $G \rightarrow S$ un esquema en grupos plano y finito (resp. afín y quasi-finito) y $Y \rightarrow X$ un G -torsor. Si la fibra genérica $Y_\eta \rightarrow X_\eta$ admite un H' -sub-torsor $Z' \subset Y_\eta$, donde $H' \subset G_\eta$ es un sub-esquema en grupos cerrado, entonces la clausura esquemática $\overline{H'}$ de H' en G , es un sub-esquema en grupos cerrado, plano y finito (resp. afín y quasi-finito), y la clausura esquemática $\overline{Z'} \subset Y$ es un $\overline{H'}$ -sub-torsor del G -torsor $Y \rightarrow X$.

Ahora, procedemos con una construcción profinita muy similar a la que presentamos en la sección anterior.

Si $X \rightarrow S$ es un morfismo fielmente plano y $x \in X(S)$, definimos la categoría $\mathcal{P}(X)$ (resp. $\mathcal{Qf}(X)$) de torsores bajo la acción de un esquema en grupos finito (resp. quasi-finito) y plano, puntuados sobre x . Cada objeto es un triplete (Y, G, y) , donde G es un S -esquema en grupos finito (resp. quasi-finito) y plano, $Y \rightarrow X$ es un G -torsor y $y \in Y_x(S)$ ¹⁰. Un morfismo de tripletes $\varphi : (Y, G, y) \rightarrow (Z, H, z)$ está constituido por un morfismo de esquemas en grupos $G \rightarrow H$ y un morfismo de X -esquemas puntuados $Y \rightarrow Z$, tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G \times Y & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ H \times Z & \longrightarrow & Z \end{array}$$

Presentaremos la prueba del teorema siguiente, ya que nos ilustra la conexión de esta construcción con la de Nori. En términos muy concretos, un conjunto que indexa elementos de una categoría, se llama cofiltrado, si dentro de dicha familia de elementos existen los productos fibrados (todo diagrama de 3 vértices se puede cerrar para formar un diagrama cartesiano).

Teorema 4.62 (théorème 4.2 de [AEG15]). *Sea X un esquema conexo, localmente de tipo finito y fielmente plano sobre S . Sea $x \in X(S)$ un punto.*

¹⁰Nota: el símbolo $Y_x(S)$ se refiere a los puntos S -racionales de Y que están sobre x .

- (1) Si una de las condiciones (A) o (B) se satisface, la categoría $\mathcal{P}(X)$ es cofiltrada; además en $\mathcal{P}(X)$ los productos fibrados existen;
- (2) si la condición (C) se satisface, la categoría $\mathcal{Q}f(X)$ es cofiltrada; además en $\mathcal{Q}f(X)$ los productos fibrados existen;
- (3) bajo la hipótesis (C), el funtor natural $\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{Q}f(X)$ es plenamente fiel y conmuta con los productos fibrados finitos.

Demostración. Presentamos aquí la prueba asumiendo la hipótesis (A); bajo la hipótesis (B) la prueba es similar a la luz de los resultados de la sección (3) de [AEG15]. Ya que $\mathcal{P}(X)$ tiene un objeto final (a saber $(X, \{1\}_S, x)$) y los productos fibrados sobre X existen en $\mathcal{P}(X)$, es suficiente de demostrar que para todos tres objetos cualesquiera $(Y_i, G_i, y_i), i = 0, 1, 2$ de $\mathcal{P}(X)$ y dos morfismos $\varphi_i : (Y_i, G_i, y_i) \rightarrow (Y_0, G_0, y_0), i = 1, 2$ existe un cuarto objeto (Y_3, G_3, y_3) y dos morfismos $\psi_i : (Y_3, G_3, y_3) \rightarrow (Y_i, G_i, y_i), i = 1, 2$, que cierran el cuadrado. Sean X_η y $(Y_{i,\eta}, G_{i,\eta}, y_{i,\eta}), i = 0, 1, 2$, las fibras genéricas de X y de (Y_i, G_i, y_i) respectivamente. El esquema X_η es conexo, reducido y tiene un punto racional. Gracias a las proposiciones 4.48 y 4.53, $Y_{1,\eta} \times_{Y_{0,\eta}} Y_{2,\eta}$ es un $G_{1,\eta} \times_{G_{0,\eta}} G_{2,\eta}$ -torsor sobre X_η (con el punto $y_{1,\eta} \times_{y_{0,\eta}} y_{2,\eta}$). Siguiendo la proposición 4.57, construimos un G_3 -torsor $Y_3 \subset Y_1 \times_X Y_2$ tomando la clausura del $G_{1,\eta} \times_{G_{0,\eta}} G_{2,\eta}$ -torsor $Y_{1,\eta} \times_{Y_{0,\eta}} Y_{2,\eta}$ en el $G_1 \times_S G_2$ -torsor $Y_1 \times_X Y_2$. Las restricciones ψ_i a Y_3 de las proyecciones $Y_1 \times_X Y_2 \rightarrow Y_i, i = 1, 2$, verifican $\varphi_1 \circ \psi_1 = \varphi_2 \circ \psi_2$, por funtorialidad de la clausura esquemática. Finalmente, el punto y_3 es, claramente, la adherencia de $y_{1,\eta} \times_{y_{0,\eta}} y_{2,\eta}$ en Y_3 . Está claro que el objeto (Y_3, G_3, y_3) es el producto fibrado de (Y_1, G_1, y_1) y (Y_2, G_2, y_2) sobre (Y_0, G_0, y_0) en la categoría $\mathcal{P}(X)$. La prueba del punto (2) en el caso quasi-finito es similar, utiliza la proposición 4.60. Finalmente, el último aserto (3) proviene de la caracterización funtorial de la clausura esquemática. $\square$

Utilizando el mismo argumento que en la prueba del teorema 4.48, a partir del teorema anterior se deduce la existencia de un triplete $(\widehat{X}, \pi_1(X, x), \hat{x})$ (resp. $(\widehat{X}^{\text{qf}}, \pi_1(X, x)^{\text{qf}}, \hat{x}^{\text{qf}})$) que es límite de objetos de $\mathcal{P}(X)$ (resp. $\mathcal{Q}f(X)$), plano sobre S , con la propiedad universal siguiente: para toda tripleta (P, G, X) objeto de $\mathcal{P}(X)$ ¹¹ (resp. de $\mathcal{Q}f(X)$), existe un único morfismo $(\widehat{X}, \pi_1(X, x), \hat{x}) \rightarrow (P, G, x)$ en $Pro - \mathcal{P}(X)$ (resp. $(\widehat{X}^{\text{qf}}, \pi_1(X, x)^{\text{qf}}, \hat{x}^{\text{qf}}) \rightarrow (P, G, x)$). Los objetos de $\mathcal{P}(X)$ (resp. $\mathcal{Q}f(X)$) están en correspondencia biyectiva con los S -morfismos $\pi_1(X, x) \rightarrow G$ (resp. $\pi_1(X, x)^{\text{qf}} \rightarrow G$).

¹¹En realidad esto funciona para todo objeto de la categoría $Pro - \mathcal{P}(X)$ (resp. $Pro - \mathcal{Q}f(X)$), que es la categoría formada por límites de sistemas dirigidos en $\mathcal{P}(X)$ (resp. $\mathcal{Q}f(X)$), sin embargo queremos hacer énfasis en nuestros objetos originales. Note que el triplete universal $(\widehat{X}, \pi_1(X, x), \hat{x})$ (resp. $(\widehat{X}^{\text{qf}}, \pi_1(X, x)^{\text{qf}}, \hat{x}^{\text{qf}})$) es un objeto de $Pro - \mathcal{P}(X)$ (resp. $Pro - \mathcal{Q}f(X)$).

Observación. La correspondencia anterior se puede demostrar utilizando el producto contraído. Para $G \rightarrow S$ es un esquema en grupos finito (resp. quasi-finito) y plano, el torsor correspondiente a un morfismo $\varphi : \pi_1(X, x) \rightarrow G$ (resp. $\pi_1(X, x)^{\text{qf}} \rightarrow G$) es el producto contraído $\widehat{X} \wedge^{\pi_1(X, x)} G$ (resp. $\widehat{X}^{\text{qf}} \wedge^{\pi_1(X, x)^{\text{qf}}} G$) a través de φ . Para consultar la teoría detrás de esta definición se puede referir a [Esq19], Lema 1.36.

Definición 4.63 (définition 4.3). Sea X un esquema conexo localmente noetheriano de tipo finito y fielmente plano sobre S .

- (1) Supongamos que una de las dos condiciones (A) o (B) se satisface. Entonces el triplete $(\widehat{X}, \pi_1(X, x), \hat{x})$ se llama el triplete universal de $Pro - \mathcal{P}(X)$, el S -esquema en grupos $\pi_1(X, x)$ se llama el esquema fundamental en grupos de X en el punto x y $\widehat{X} \rightarrow X$ se llama el $\pi_1(X, x)$ -torsor universal.
- (2) Supongamos que la condición (C) se satisface. Entonces el triplete $(\widehat{X}^{\text{qf}}, \pi_1(X, x)^{\text{qf}}, \hat{x}^{\text{qf}})$ se llama el triplete universal de $Pro - \mathcal{Q}f(X)$, el S -esquema en grupos $\pi_1(X, x)^{\text{qf}}$ se llama el esquema fundamental en grupos quasi-finito de X en el punto x y $\widehat{X}^{\text{qf}} \rightarrow X$ se llama el $\pi_1(X, x)^{\text{qf}}$ -torsor universal.

Claramente, los objetos que se acaban de construir son límites proyectivos de torsores punteados (Y, G, y) sobre X . Sin embargo, para construirlos en realidad sólo hace falta tomar una familia más pequeña de torsores. Aquí es donde se introduce la idea de un torsor quasi-Galois.

Definición 4.64. Un morfismo de esquemas $f : Z \rightarrow Y$ se llama un morfismo esquemáticamente dominante, de acuerdo a [EGAIV.3, Définition 11.10.2], si el correspondiente morfismo $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_Z$, es inyectivo. Una tripleta (Y, G, y) en la categoría $Pro - \mathcal{P}(X)$ se llamará galoisiana o de Galois (respectivamente quasi-galoisiana o quasi-Galois) si para toda otra tripleta (Y', G', y') , y cualquier morfismo $\varphi = (\alpha, \beta) : (Y', G', y') \rightarrow (Y, G, y)$, el morfismo β es fielmente plano (respectivamente esquemáticamente dominante).

Note que si $S = \text{Spec}(k)$, para k un cuerpo como en la teoría de Nori, entonces esta definición concuerda con la que hemos dado de torsores de Galois o Nori-reducidos en la proposición 4.44. De hecho, en [A10] se demuestra un resultado similar a dicha proposición, sobre los torsores quasi-galoisianos.

Proposición 4.65. [A10, Corollary 2.1, pág. 5] Sea S un esquema de Dedekind. Una tripleta (Y, G, y) es quasi-galoisiana si y sólo si el morfismo $\rho : \pi_1(X, x) \rightarrow G$ naturalmente asociado a esta tripleta es un morfismo esquemáticamente dominante.

En realidad, sobre un cuerpo k no hay distinción entre un torsor quasi-galoisiano y uno galoisiano, ya que sobre un cuerpo un morfismo esquemáticamente dominante es lo mismo que un morfismo fielmente plano. Esto se encuentra demostrado en el capítulo 14 de [Wa79], específicamente lo que se prueba es que si $A \subset B$ son dos álgebras de Hopf, entonces B es un A -álgebra fielmente plana. Note que un morfismo esquemáticamente dominante $G \rightarrow H$ se traduce en una inclusión de álgebras de Hopf $k[H] \rightarrow k[G]$, que entonces es un morfismo fielmente plano. Recíprocamente es sencillo ver que un morfismo fielmente plano entre dos k -álgebras debe ser una inclusión.

La importancia de dichos torsores es que a partir de ellos se puede construir el esquema fundamental en grupos, como nos dice el siguiente resultado.

Proposición 4.66. *[AEG15, corollaire 5.4, pág. 13] El triplete universal $(\widehat{X}, \pi_1(X, x), \hat{x})$ es el límite proyectivo de los torsores finitos puntados quasi-galoisianos.*

Capítulo 5

Parte prima a p del esquema fundamental en grupos

Como lo mencionamos en la introducción, nuestro objetivo es estudiar el comportamiento del esquema fundamental en grupos bajo el cambio de base. Con inspiración en la teoría de Grothendieck, el propósito de esta sección es demostrar el siguiente teorema:

Teorema 5.1. *Sean R un anillo de valuación discreta completo con cuerpo residual k algebraicamente cerrado, X un R -esquema propio, suave, con fibras geométricamente conexas, reducido y conexo, que cumple las hipótesis (A) o (B) de la sección 4.5, y x un morfismo en $X(R)$, y además asuma que $p = \text{char}(k) > 0$, entonces hay un isomorfismo*

$$\pi_1^N(X_\eta, x_\eta)^{(p')} \simeq \pi_1(X, x)_\eta^{(p')}.$$

Para ello utilizaremos varias herramientas de la teoría que hemos visto hasta ahora. La primera observación que haremos consiste de la siguiente proposición, la cual se deriva directamente de los resultados de Grothendieck. Denotamos en adelante $X_K := X_\eta$ y en general el subíndice A indica el pullback de un esquema (o un morfismo) sobre el anillo A .

Proposición 5.2. *Asumiendo las hipótesis del teorema anterior se tiene que para todo G -torsor de Galois finito y étale $f: Y \rightarrow X_K$ con $\text{mcd}(p, |G|) = 1$, existe una extensión finita y separable K' de K y un H -torsor $h: Z \rightarrow X_{R'} = X'$, que extiende el torsor $Y' = Y_{K'} \rightarrow X_{K'}$, para algún R' -esquema en grupos H , donde R' es la clausura integral de R en K' , $X' := X_{R'}$ y $Y' = Y \times_{\text{Spec}(K)} \text{Spec}(K')$. Esto está ilustrado por el siguiente diagrama.*

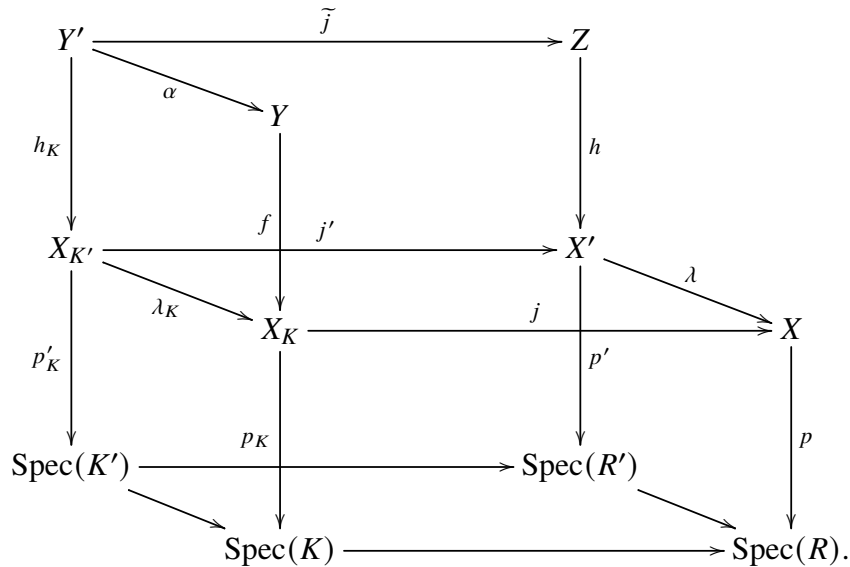


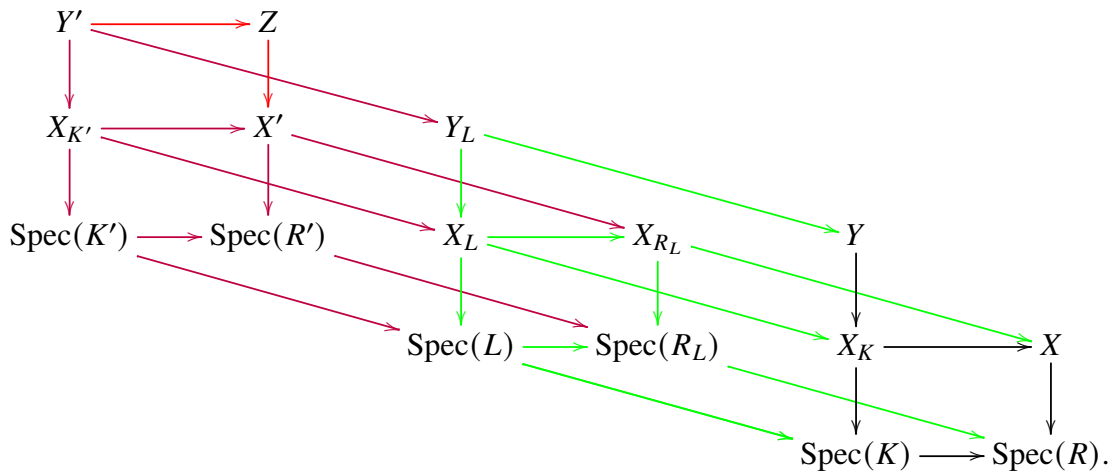
Figura 5.1. Modelo de un torsor bajo una extensión finita de K .

Demostración. Dividiremos el siguiente bosquejo de prueba en dos pasos.

Paso 1: Como G es un esquema afín en grupos étale, entonces $G = \text{Spec}(A)$ donde A es un K -álgebra étale, por el teorema 2.22, $A \otimes_K \bar{K} \simeq \bar{K} \otimes \cdots \otimes \bar{K}$, y esto implica que $G_{\bar{K}} = \text{Spec}(A \otimes_K \bar{K})$ es un esquema afín en grupos constante, por tanto debe existir una extensión finita L de K tal que G_L es un esquema afín en grupos constante. De hecho la extensión L/K es separable debido al teorema 2.22.5. Gracias a la proposición 4.21, tenemos que $f_L : Y_L \rightarrow X_L$ es un cubrimiento finito étale de Galois. Con ello hemos conseguido una extensión finita de K en la que nuestro torsor original se transforma en un cubrimiento finito étale de Galois. Esto se encuentra demostrado también en [Szo9, Proposition 5.3.16, p. 172], y de hecho en esta referencia la extensión construida es separable.

Paso 2: Sea R_L la clausura integral de R en L . Como R es completo, entonces tenemos que R_L es un anillo de valuación discreta completo, gracias a [Ser68, II, §2 Proposition 3]. Como mencionamos en la prueba del teorema 4.14 en el capítulo 4, la fibra especial de X_{R_L} es isomorfa a X_k , y aquí daremos la justificación. Como R_L es una R -módulo finito, entonces el cuerpo residual de R_L es una extensión finita del cuerpo residual de R , que es k , pero como asumimos que k es algebraicamente cerrado, entonces el cuerpo residual de R_L es k mismo, y esto implica el isomorfismo de fibras especiales. En particular obtenemos que las fibras geométricas de X_{R_L} son conexas, y por tanto podemos aplicar el teorema 4.14 al esquema X_{R_L} . Más específicamente podemos aplicar la observación 4.1 al cubrimiento

$f_L : Y_L \rightarrow X_L$, de donde podemos concluir que existe una extensión finita de Galois K' de L [y por tanto una extensión finita y de Galois de K], tal que $Y_{K'} \rightarrow X_{K'}$ se extiende a un cubrimiento finito étale de Galois $Z \rightarrow X'$, donde R' es la clausura integral de R_L en K' y $X' = X_{R_L} \times_{\text{Spec}(R_L)} \text{Spec}(R')$. El cubrimiento $Z \rightarrow X'$ también es un torsor para un esquema afín en grupos constante, debido a la proposición 4.2.1. Como vimos en la observación 4.1, Z es el pullback $\overline{Y}_L \times_{\text{Spec}(R_L)} \text{Spec}(R')$ donde $\overline{Y}_L$ es la normalización de X_{R_L} en Y_L . Ambos pasos se encuentran resumidos en el siguiente diagrama



En el cual hemos denotado con flechas verdes el primer paso y con flechas color púrpura el segundo paso. Al final la extensión separable K'/K nos da el resultado deseado. $\square$

Observación. La prueba de la proposición anterior nos dice cuál es el esquema en grupos H . Note que en la extensión K' , el esquema G se convierte en un esquema en grupos constante $(K')^\Gamma$, para algún grupo finito Γ , en este caso se tiene que H es el esquema en grupos constante $(R')^\Gamma$ sobre R' ; es decir, en la extensión deseada se preserva el mismo grupo finito.

Note que las hipótesis X reducido y conexo implican que X_K es reducido y conexo, por lo que existe el objeto $\pi_1^N(X_K, x_K)$, las hipótesis A. o B. de la sección anterior aseguran la existencia de $\pi_1(X, x)$, y las hipótesis X propio, suave y con fibras geoméricamente conexas nos permitirán aplicar los resultados de Grothendieck para el siguiente resultado.

En adelante utilizaremos las notaciones de la figura 5.1, fijaremos un R -esquema X con un punto $x \in X(R)$ y un G -torsor $f : Y \rightarrow X_K$ con las hipótesis de la proposición anterior, es decir un G -torsor finito étale Nori-reducido (de Galois) de acuerdo a la definición 4.45, con $\text{mcd}(p, |G|) = 1$ y puntuado sobre x_K , es decir, con un morfismo $y : \text{Spec}(K) \rightarrow Y$ tal

que $f \circ y = x_K$. Sobre un anillo A , el haz estructural $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ sobre $\text{Spec}(A)$ se denotará simplemente por $\mathcal{O}_A$.

Para lograr nuestro cometido en esta sección utilizaremos fuertemente las propiedades de las categorías y retículos tannakianos que hemos discutido en el capítulo 3. Para iniciar, demostramos el siguiente teorema, que será de suma importancia en este trabajo.

Teorema 5.3. *Si $\mathcal{T}$ es la categoría cuyos objetos son los fibrados vectoriales $V \in \text{Vect}(X)$ que son trivializados por $\lambda \circ h$, es decir que $(\lambda \circ h)^*V \simeq \mathcal{O}_Z^{\oplus \text{rg}(V)}$, y cuyos morfismos son los morfismos entre haces de módulos, entonces $\mathcal{T}$ es un retículo tannakiano neutral sobre R .*

En lo que sigue llamaremos $\varphi := \lambda \circ h$ y además utilizaremos letras minúsculas para denotar el rango de un fibrado vectorial sobre un espacio localmente anillado X , por ejemplo si $V \in \text{Vect}(X)$, pondremos $v := \text{rg}(V)$. La prueba del teorema 5.3 conlleva verificar varios requisitos por lo que la dividiremos en varias proposiciones.

Proposición 5.4. *La categoría $\mathcal{T}$ del teorema 5.3 es aditiva, tensorial, R -lineal y rígida.*

Demostración. Las hipótesis sobre el R -esquema X aseguran que $\mathcal{O}_X(X) = R$, de manera que si $U \subseteq X$ es un abierto de X , las aplicaciones restricción $\rho_{XU} : R = \mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ hacen de cada $\mathcal{O}_X(U)$ un R -módulo, y por tanto si $\mathcal{F}$ es un haz de $\mathcal{O}_X$ -módulos sobre X , entonces $\mathcal{F}(U)$ es un R -módulo para todo abierto U de X . Debido a esto cada morfismo $f : V \rightarrow W$ entre haces de $\mathcal{O}_X$ -módulos es una colección de homomorfismos R -lineales $f_U : V(U) \rightarrow W(U)$ que son compatibles con la acción de R en intersecciones de abiertos. Esto hace de cada $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(V, W)$ un R -módulo, por lo que $\mathcal{T}$ es R -aditiva. Note que el objeto unidad es el haz $\mathcal{O}_X$, que cumple que su anillo de endomorfismos $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ es isomorfo naturalmente a R . El producto tensorial entre haces de módulos hace de $\mathcal{T}$ una categoría tensorial. Por la proposición 1.61, el dual $V^\vee$ para $V \in \text{Obj}(\mathcal{T})$ también es un fibrado vectorial sobre X . Para verificar que $V^\vee$ también está en $\text{Obj}(\mathcal{T})$ basta utilizar el isomorfismo

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_Z}(\varphi^*V, \mathcal{O}_Z) \simeq \varphi^*(\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(V, \mathcal{O}_X)),$$

el cual es consecuencia de la proposición 1.61. Esto hace que $\mathcal{T}$ sea una categoría rígida. $\square$

Ahora, nos enfocamos en el aspecto de los núcleos e imágenes en la categoría $\mathcal{T}$, primero presentamos un lema técnico.

Lema 5.5. Si $\delta : T \rightarrow \text{Spec}(R)$ es un morfismo fielmente plano, que posee una sección $t : \text{Spec}(R) \rightarrow T$, y tal que $\mathcal{O}_T(T) = R$, con R un dominio de ideales principales, entonces el funtor δ^* es plenamente fiel y exacto sobre los $\mathcal{O}_R$ -módulos libres.

Demostración. Al ser t una sección de δ , entonces tenemos que $\delta \circ t = \text{id}_R$. Primero demostramos que δ^* es fiel. Debemos mostrar que la aplicación

$$\delta^* : \text{Hom}_{\mathcal{O}_R}(\mathcal{O}_R^{\oplus v}, \mathcal{O}_R^{\oplus w}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{O}_T^{\oplus v}, \mathcal{O}_T^{\oplus w})$$

es inyectiva. Sea $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_R}(\mathcal{O}_R^{\oplus v}, \mathcal{O}_R^{\oplus w})$ tal que $\delta^*(\alpha) = 0$. Para el morfismo α hay una sucesión asociada

$$\mathcal{O}_R^{\oplus v} \xrightarrow{q} \mathcal{O}_R^{\oplus s} \xrightarrow{j} \mathcal{O}_R^{\oplus w}$$

donde q es sobreyectivo y j es inyectivo, ésta se obtiene al considerar la imagen del morfismo α que debe ser un $\mathcal{O}_R$ -módulo libre de rango $s \leq w$ (en la observación que sigue explicamos por qué). Al ser δ^* fielmente plano, tenemos que el funtor δ^* es exacto (esto es casi por definición), por lo tanto al aplicar δ^* a la sucesión anterior obtenemos la sucesión

$$\mathcal{O}_T^{\oplus v} \xrightarrow{\delta^*(q)} \mathcal{O}_T^{\oplus s} \xrightarrow{\delta^*(j)} \mathcal{O}_T^{\oplus w},$$

que también procede de obtener la imagen de $\delta^*(\alpha)$. Sin embargo $\delta^*(\alpha) = 0$ implica que $s = 0$ al analizar la segunda sucesión, y por lo tanto $\alpha = 0$. Así δ^* es inyectivo, y el funtor δ^* es fiel.

Ahora veamos que δ^* es pleno. Para esto probamos que el funtor t^* es plenamente fiel sobre los $\mathcal{O}_T$ -módulos libres. Sea $m \in \text{Hom}(\mathcal{O}_R^{\oplus v}, \mathcal{O}_R^{\oplus w})$, note que $t^*\delta^*m = (\text{id}_R)^*m = m$, y por tanto

$$t^* : \text{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{O}_T^{\oplus v}, \mathcal{O}_T^{\oplus w}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_R}(\mathcal{O}_R^{\oplus v}, \mathcal{O}_R^{\oplus w}) \quad (5.1)$$

es sobreyectivo. El primer módulo es un $\mathcal{O}_T(T)$ -módulo libre de rango vw y el segundo es un R -módulo libre de rango vw también. Como $\mathcal{O}_T(T) = R$ entonces t^* se convierte en un R -endomorfismo de $R^{\oplus vw}$ en sí mismo, gracias a [Vas68, Proposition 1.2, pág. 506] tenemos que t^* es en realidad un isomorfismo. De esta manera obtenemos que el funtor t^* es plenamente fiel sobre los $\mathcal{O}_T$ -módulos libres.

Ahora, sea $h : \mathcal{O}_T^{\oplus r} \rightarrow \mathcal{O}_T^{\oplus s}$ un morfismo de $\mathcal{O}_T$ -haces libres. Como t es una sección de δ , entonces $t^*\delta^*t^*h = (\text{id}_R)^*t^*h = t^*h$, y como t^* es fiel, esto implica que $\delta^*t^*h = h$, y así tenemos que δ^* es pleno. Como mencionamos antes, el hecho que δ^* es exacto se sigue de que δ es fielmente plano. $\square$

Observación. El lema anterior implica que para todo morfismo $\epsilon : \mathcal{O}_T^{\oplus r} \rightarrow \mathcal{O}_T^{\oplus s}$ existe un único morfismo $g : \mathcal{O}_R^{\oplus r} \rightarrow \mathcal{O}_R^{\oplus s}$ tal que $\epsilon = \delta^* g$, y además $\text{Nuc}(\delta^* g) = \delta^* \text{Nuc}(g)$ y $\text{im}(\delta^* g) = \delta^* \text{im}(g)$. En particular, se tiene que ambos el núcleo y la imagen de un morfismo de $\mathcal{O}_T$ -módulos libres son $\mathcal{O}_T$ -módulos libres también, y esto se sigue del hecho que $\text{Nuc}(g)$ e $\text{im}(g)$ son $\mathcal{O}_R$ -módulos libres; ésto último es una propiedad conocida que poseen los submódulos de módulos libres sobre dominios de ideales principales (y en particular anillos de valuación discreta): si R es un dominio de ideales principales y H es un submódulo de un R -módulo libre F , entonces H es libre y $\text{rg}(H) \leq \text{rg}(F)$, una demostración de esto se puede consultar en [Roto2, Theorem 9.8, pág 650].

Proposición 5.6. *La categoría $\mathcal{T}$ del teorema 5.3 tiene núcleos e imágenes.*

Demostración. Sean $V, W \in \text{Obj}(\mathcal{T})$ y $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{T}}(V, W)$. Todo morfismo de haces de $\mathcal{O}_X$ -módulos tiene un haz núcleo y un haz imagen que son haces de $\mathcal{O}_X$ -módulos también (Vea capítulo 1 para la construcción del haz núcleo y el haz imagen). Lo que deseamos probar es que ambos núcleo e imagen de ϕ son objetos de $\mathcal{T}$. El morfismo $\phi : V \rightarrow W$ genera un morfismo $\varphi^* \phi : \varphi^* V \rightarrow \varphi^* W$, y como V, W son objetos de $\mathcal{T}$, esto es un morfismo entre los haces libres $\varphi^* \phi : \mathcal{O}_Z^{\oplus v} \rightarrow \mathcal{O}_Z^{\oplus w}$.

Como asumimos que nuestro G -torsor $f : Y \rightarrow X_K$ es de Galois (o Nori-reducido) por la proposición 4.44 tenemos que $\mathcal{O}_Y(Y) = K$, esto implica, gracias a la proposición 1.62b., que $\mathcal{O}_{Y'}(Y') = K'$. Ahora, debido a la planitud de $\tilde{j}$ tenemos una inmersión $\mathcal{O}_Z(Z) \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}(Y') = K'$, como $\mathcal{O}_Z(Z)$ es finito (y por tanto integral) sobre R' necesariamente debemos tener $\mathcal{O}_Z(Z) = R'$ [ya que R' es la clausura integral de R en K'].

Para aplicar el lema 5.5, buscamos una sección del morfismo $p' \circ h : Z \rightarrow \text{Spec}(R')$. Note que por ser R completo, R' es un anillo de valuación discreta al igual que R , para esto se puede ver [Ser68, II, §2 Proposition 3]. Note que tenemos el punto $x : \text{Spec}(R) \rightarrow X$ tal que $p \circ x = \text{id}_R$, y el punto $y : \text{Spec}(K) \rightarrow Y$ tal que $f \circ y = x_K$, de aquí es sencillo demostrar que $(p_K \circ f) \circ y = \text{id}_K$ y por tanto $(p'_K \circ h_K) \circ y_{K'} = \text{id}_{K'}$, es decir $y_{K'}$ es una sección de $(p'_K \circ h_K)$. Lo que deseamos hacer es extender esa sección hasta R' . Es sencillo comprobar que se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Spec}(K') & \xrightarrow{y_{K'}} & Y' & \xrightarrow{\tilde{j}} & Z \\
 \downarrow i & & \searrow t & & \downarrow p' \circ h \\
 \text{Spec}(R') & \xrightarrow{\text{id}_R} & & & \text{Spec}(R').
 \end{array}$$

Donde i es el morfismo natural obtenido de la inclusión $R' \subseteq K' = \text{Frac}(R')$. Como el morfismo $p' \circ h$ es propio, gracias a [Har77, Theorem 4.7, p. 101] (Criterio Evaluativo de Propiedad) se tiene que existe un único morfismo $t : \text{Spec}(R') \rightarrow Z$ que hace todo el diagrama conmutar, y en particular, es una sección para $p' \circ h$.

La discusión de los párrafos anteriores y el lema 5.5 implican que el morfismo $\varphi^* \phi$ viene de un morfismo de $\mathcal{O}_{R'}$ -módulos libres, es decir, existe $g : \mathcal{O}_{R'}^{\oplus v} \rightarrow \mathcal{O}_{R'}^{\oplus w}$ tal que $\varphi^* \phi = (p' \circ h)^* g$. Tenemos que g es un morfismo entre R' -módulos libres, y por tanto tiene núcleo e imagen libres, como mencionamos en la observación 5. Gracias al lema 5.5 y el hecho que $p' \circ h$ es fielmente plano, $\text{im}((p' \circ h)^* g) = (p' \circ h)^* \text{im}(g)$ y $\text{Nuc}((p' \circ h)^* g) = (p' \circ h)^* \text{Nuc}(g)$, y por lo tanto son $\mathcal{O}_Z$ -módulos libres, es decir $\text{im}(\varphi^* \phi)$ y $\text{Nuc}(\varphi^* \phi)$ son $\mathcal{O}_Z$ -módulos libres, en particular son localmente libres. Como φ es fielmente plano, el funtor φ^* es exacto, por lo que tenemos los isomorfismos

$$\text{im}(\varphi^* \phi) \simeq \varphi^* \text{im}(\phi) \text{ y } \text{Nuc}(\varphi^* \phi) \simeq \varphi^* \text{Nuc}(\phi),$$

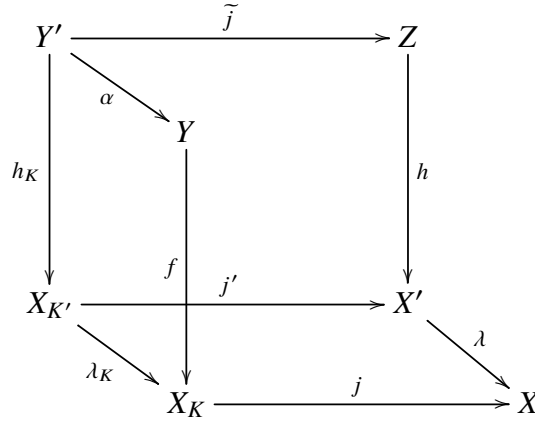
y con esto, la proposición 1.62a. nos dice entonces que $\text{im}(\phi)$ y $\text{Nuc}(\phi)$ son $\mathcal{O}_X$ -módulos localmente libres. Resta ver que $\text{im}(\phi)$ y $\text{Nuc}(\phi)$ son trivializados por φ , pero esto se sigue de que φ y $p' \circ h$ son fielmente planos y el lema 5.5. En efecto, $\varphi^* \text{im}(\phi) = \text{im}(\varphi^* \phi) = \text{im}((p' \circ h)^* g) = (p' \circ h)^* \text{im}(g) \simeq (p' \circ h)^* \mathcal{O}_R^{\oplus t}$, para algún t , por lo que $\varphi^* \text{im}(\phi) \simeq \mathcal{O}_Z^{\oplus t}$, y como $\text{im}(\phi)$ es localmente libre se tiene que $t = \text{rg}(\text{im}(\phi))$. Análogamente se trata el núcleo de ϕ . $\square$

Observación. De las propiedades anteriores podemos concluir que un morfismo de $\mathcal{O}_Z$ -módulos libres tiene imagen y núcleos libres, esto se deduce de aplicar el lema 5.5 y la observación 5 con $T = Z$ y $\delta = p' \circ h$.

Proposición 5.7. *La categoría $\mathcal{T}_K$, categoría de extensión de escalares de $\mathcal{T}$, es abeliana.*

Esta proposición es un poco más elaborada de demostrar, y para la prueba necesitamos varios resultados auxiliares. Primero, introducimos una nueva categoría $\mathcal{T}_2$ cuyos objetos son los fibrados vectoriales $V \in \text{Vect}(X_K)$ tales que $(\lambda_K \circ h_K)^* V \simeq \mathcal{O}_{Y'}^{\oplus v}$, es decir los fibrados vectoriales sobre X_K trivializados por $\lambda_K \circ h_K$, todo esto siguiendo las notaciones

del diagrama



que es parte de la figura 5.1.

Lema 5.8. Si $\mathcal{T}_3$ es la categoría cuyos objetos son los fibrados vectoriales $V \in \text{Vect}(X_K)$ que son trivializados por el torsor f , es decir que $f^*V \simeq \mathcal{O}_Y^{\oplus v}$, entonces

$$\text{Obj}(\mathcal{T}_2) = \text{Obj}(\mathcal{T}_3),$$

y como en ambas categorías los morfismos son los mismos entonces $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_3$.

Demostración. Sea $V \in \text{Obj}(\mathcal{T}_3)$, entonces $f^*V \simeq \mathcal{O}_Y^{\oplus v}$, así que

$$(\lambda_K \circ h_K)^*V = h_K^* \lambda_K^*V = \alpha^* f^*V \simeq \alpha^* \mathcal{O}_Y^{\oplus v} = \mathcal{O}_{Y'}^{\oplus v},$$

por lo que $V \in \text{Obj}(\mathcal{T}_2)$. Ahora, sea $V \in \text{Obj}(\mathcal{T}_2)$, es decir $(\lambda_K \circ h_K)^*V \simeq \mathcal{O}_{Y'}^{\oplus v}$.

Gracias a la proposición 1.62c. existe un isomorfismo

$$f^*V(Y) \otimes_K K' \simeq \alpha^* f^*V(Y').$$

Puesto que $\alpha^* f^*V \simeq (\lambda_K \circ h_K)^*V \simeq \mathcal{O}_{Y'}^{\oplus v}$, el isomorfismo anterior implica que $f^*V(Y) \simeq K^{\oplus v}$. De esta manera contamos con lo siguiente.

- (a) f^*V es un fibrado de rango v .
- (b) $f^*V(Y) \simeq K^{\oplus v}$.
- (c) $f^*V \in \text{Obj}(\text{EF}(Y))$. [Esto ya que $V \in \text{Obj}(\text{EF}(X_K))$ debido a la proposición 4.47 y por tanto su pullback f^*V también es esencialmente finito, como argumentamos en la observación 4.3 del capítulo 4.].

Acudiendo a la proposición 4.46 y a la observación hecha después de ésta, tenemos que $f^*V \simeq \mathcal{O}_Y^{\oplus v}$. $\square$

Observación. La categoría $\mathcal{T}_3$ es importante debido a la teoría de Nori. Gracias a la observación 4.3, la categoría $\mathcal{T}_3$ es la subcategoría plena de la categoría de haces esencialmente finitos sobre X , generada por el fibrado $f_*\mathcal{O}_Y$, es decir la categoría $\text{EF}(X_K, \{f_*\mathcal{O}_Y\})$, en la sección 4.3 hemos observado que dicha categoría es abeliana.

Cuatro resultados más serán de nuestra ayuda para demostrar la proposición 5.7. Los presentamos a continuación.

Lema 5.9. *Sea $D := h_*\mathcal{O}_Z$ entonces $\lambda_*D \in \text{Obj}(\mathcal{T}_K)$.*

Demostración. Considere el torsor $h : Z \rightarrow X'$, este es un torsor con un esquema en grupos constante $H = (R')^\Gamma$ como lo notamos en la observación 5. De acuerdo con la proposición 4.21, obtenemos que $h : Z \rightarrow X'$ es un cubrimiento étale finito de Galois para X' , con grupo de automorfismos Γ . En la prueba de la proposición 5.2 observamos que existe un isomorfismo de fibras especiales $(X')_s \simeq X_s$, y por tanto hay un isomorfismo de grupos fundamentales étale $\pi_1(X, \bar{x}) \simeq \pi_1(X', \bar{x}')^1$, debido al teorema 4.13. Gracias a la observación 4.1 y el hecho que X, X' y Z son conexos, este isomorfismo implica que existe un cubrimiento étale finito (conexo) de Galois $\bar{h} : T \rightarrow X$ cuya fibra sobre R' coincide con $h : Z \rightarrow X'$. Gracias a esto el cuadrado superior en el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & T \\
 h \downarrow & & \downarrow \bar{h} \\
 X' & \xrightarrow{\lambda} & X \\
 p' \downarrow & & \downarrow p \\
 \text{Spec}(R') & \xrightarrow{\beta} & \text{Spec}(R).
 \end{array}$$

es cartesiano. Como el cuadrado inferior es cartesiano entonces el cuadrado grande del diagrama anterior también lo es. Por [Ser68, II, §2 Proposition 3], tenemos que R' es un R -módulo libre de rango $n = [K' : K]$, por lo que como $\mathcal{O}_R$ -módulos tenemos un

¹El punto geométrico $\bar{x} : \text{Spec}(\bar{K}) \rightarrow X$ viene inducido por el punto $x : \text{Spec}(R) \rightarrow X$ y el morfismo $\text{Spec}(\bar{K}) \rightarrow \text{Spec}(R)$, donde $\bar{K}$ es una clausura algebraica de K . Este induce a su vez el punto $x' : \text{Spec}(R) \rightarrow X'$, a partir del cual se puede construir el punto geométrico $\bar{x}' : \text{Spec}(\bar{K}) \rightarrow X'$, utilizando el morfismo $\text{Spec}(K') \rightarrow \text{Spec}(R')$ y el hecho que $\bar{K}$ también es una clausura algebraica de K' por ser K'/K una extensión finita de cuerpos. Es claro que se cumple $\lambda \circ \bar{x}' = \bar{x}$, como lo solicita la observación 4.1.

isomorfismo $\beta_* \mathcal{O}_{R'} \simeq \mathcal{O}_R^{\oplus n}$. Utilizando la proposición 1.63, con el cuadrado cartesiano grande del diagrama anterior entonces tenemos que

$$\bar{\lambda}_* \mathcal{O}_Z = \bar{\lambda}_* h^* (p')^* \mathcal{O}_{R'} \simeq \bar{h}^* p^* \beta_* \mathcal{O}_{R'} \simeq \bar{h}^* p^* \mathcal{O}_R^{\oplus n} \simeq \mathcal{O}_T^{\oplus n}.$$

Recordamos ahora que como $h : Z \rightarrow X'$ es un torsor, entonces $h^* h_* \mathcal{O}_Z \simeq \mathcal{O}_Z^{\oplus g}$, donde $g = |H| = |G|$, gracias al lema 4.22, escrito de otra forma esto es $h^* D \simeq \mathcal{O}_Z^{\oplus g}$. De esta forma, otra vez utilizando que λ nos da un cambio de base fielmente plano y la proposición 1.63, obtenemos que

$$\bar{h}^* \lambda_* D \simeq \bar{\lambda}_* h^* D \simeq \bar{\lambda}_* \mathcal{O}_Z^{\oplus g} \simeq \mathcal{O}_T^{\oplus gn},$$

donde utilizamos nuestros argumentos anteriores en el último isomorfismo. Aplicando $\bar{\lambda}^*$ a lo anterior tenemos que

$$\bar{\lambda}^* \bar{h}^* \lambda_* D \simeq \mathcal{O}_Z^{\oplus gn},$$

pero $\bar{\lambda}^* \bar{h}^* = (\bar{h} \circ \bar{\lambda})^* = (h \circ \lambda)^* = \varphi^*$, es decir tenemos que $\varphi^* \lambda_* D \simeq \mathcal{O}_Z^{\oplus gn}$. Debido a que R' es un R -módulo de rango n , el rango de un fibrado sobre X' se multiplica por n al pasar a su imagen directa sobre X , y esto se puede deducir localmente, usando el hecho que λ es un morfismo afín. Por el lema 4.22, g es el rango del fibrado D sobre X' . Por estas razones tenemos que $ng = \text{rg}(\lambda_* D)$ y así se concluye que $\lambda_* D \in \text{Obj}(\mathcal{T}_K)$. $\square$

La siguiente proposición es bastante útil cuando se trabaja en esquemas de dimensión 1 y sus fibras genéricas. Sólo en este caso no utilizaremos las notaciones de la figura 5.1, sino las notaciones de [EGAIV.2].

Proposición 5.10. [EGAIV.2, Proposition 2.8.1] *Sea Y un esquema localmente noetheriano, regular, irreducible y de dimensión 1 con punto genérico η , $f : X \rightarrow Y$ un morfismo de esquemas, X_η la fibra en el punto genérico, $i : X_\eta \rightarrow X$ el morfismo canónico. Sean $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -módulo quasi-coherente, $\mathcal{F}_\eta := i^* \mathcal{F}$, $\mathcal{G}'$ un $\mathcal{O}_{X_\eta}$ -módulo cociente de $\mathcal{F}_\eta$ y $\bar{\mathcal{G}}'$ el $\mathcal{O}_X$ -módulo imagen de $\mathcal{F}$ obtenido mediante la composición*

$$\mathcal{F} \rightarrow i_* i^* \mathcal{F} \rightarrow i_* \mathcal{G}'$$

Entonces $\bar{\mathcal{G}}'$ es un $\mathcal{O}_X$ -módulo cociente de $\mathcal{F}$, que es quasi-coherente y f -plano tal que $i^(\bar{\mathcal{G}}') = \mathcal{G}'$ y además es el único $\mathcal{O}_X$ -módulo cociente de $\mathcal{F}$ con estas propiedades.*

Regresando a las notaciones de nuestra prueba, el siguiente resultado nos asegura que el cociente de la proposición anterior es localmente plano en nuestro caso.

Lema 5.11. *Sea $V \in \text{Obj}(\mathcal{T}_K)$, $V_K := j^*V$ y $Q \in \text{Obj}(\mathcal{T}_2)$ que es cociente de V_K (por tanto hay un morfismo sobreyectivo $u : V_K \rightarrow Q$). Entonces el único cociente Q' de V que cumple que $j^*Q' \simeq Q$ y que Q' es R -plano, es localmente libre.*

Demostración. El cociente $u' : V \rightarrow Q'$ que cumple esas condiciones existe, y es único, debido a la proposición 5.10. Notemos que el cociente $u : V_K \rightarrow Q$ nos genera a su vez el cociente

$$h_K^* \lambda_K^* u : h_K^* \lambda_K^* V_K \rightarrow h_K^* \lambda_K^* Q.$$

Como $V \in \text{Obj}(\mathcal{T}_K)$ entonces $(\lambda \circ h)^*V \simeq \mathcal{O}_Z^{\oplus v}$, y es sencillo ver que esto implica que $(\lambda_K \circ h_K)^*V_K \simeq \mathcal{O}_{Y'}^{\oplus v}$, al perseguir el diagrama de la figura 5.1. Por ser Q un objeto de $\mathcal{T}_2$ tenemos que $h_K^* \lambda_K^* Q \simeq \mathcal{O}_{Y'}^{\oplus s}$ para algún s . Si α es el isomorfismo $\mathcal{O}_{Y'}^{\oplus v} \rightarrow h_K^* \lambda_K^* V_K$, sea

$$m := [(h_K^* \lambda_K^* u)] \circ \alpha : \mathcal{O}_{Y'}^{\oplus v} \rightarrow h_K^* \lambda_K^* Q \simeq \mathcal{O}_{Y'}^{\oplus s}.$$

Como tenemos que $\mathcal{O}_{Y'}(Y') = K'$ y que hay una sección de $p'_K \circ h_K$ (recuerde que verificamos antes que $(p'_K \circ h_K) \circ y_{K'} = \text{id}_{K'}$) por el lema 5.5 existe $\phi : \mathcal{O}_{K'}^{\oplus v} \rightarrow \mathcal{O}_{K'}^{\oplus s}$ tal que $m = h_K^* (p'_K)^* \phi$. Ahora, el cociente $u' : V \rightarrow Q'$ nos brinda el cociente

$$\mathcal{O}_Z^{\oplus v} = h^* \lambda^* V \rightarrow h^* \lambda^* Q'. \quad (5.2)$$

Y al tomar la fibra genérica $\tilde{j}$ de éste, obtenemos un cociente

$$\tilde{j}^*(h^* \lambda^* V) \rightarrow \tilde{j}^*(h^* \lambda^* Q').$$

Note que $\tilde{j}^*(h^* \lambda^* V) \simeq \mathcal{O}_{Y'}^{\oplus v}$ -ya que $V \in \text{Obj}(\mathcal{T}_K)$ - y por su parte

$$\begin{aligned} \tilde{j}^*(h^* \lambda^* Q') &\simeq h_K^* \lambda_K^* j^* Q' \\ &\simeq h_K^* \lambda_K^* Q \\ &\simeq \mathcal{O}_{Y'}^{\oplus s}, \end{aligned}$$

ya que $j^*Q' \simeq Q$ y por definición Q se ve trivializado por $h_K^* \lambda_K^*$. Sin embargo, el cociente $\mathcal{O}_Z^{\oplus s}$ de $\mathcal{O}_Z^{\oplus v} = h^* \lambda^* V$ también cumple que al aplicarle $\tilde{j}^*$ es isomorfo a $\mathcal{O}_{Y'}^{\oplus s}$, así que la unicidad de la proposición anterior aplicada al morfismo 5.2 nos da que $h^* \lambda^* Q' \simeq \mathcal{O}_Z^{\oplus s}$, por lo que $\varphi^* Q'$ es libre, en particular es localmente libre, y por la proposición 1.62 obtenemos que Q' es localmente libre. $\square$

Además de que hemos probado que el cociente Q' es localmente libre, de la demostración dada se concluye la fórmula $h^* \lambda^* Q' \simeq \mathcal{O}_Z^{\oplus s}$, que implica que el cociente Q' es un objeto de $\mathcal{T}_K$.

Lema 5.12. Si $V \in \text{Obj}(\mathcal{T}_K)$ tal que hay una inmersión $W \rightarrow V_K$, con $W \in \text{Obj}(\mathcal{T}_2)$, entonces existe una inmersión $W' \rightarrow V$ para un $W' \in \text{Obj}(\mathcal{T}_K)$ que cumple $j^*W' \simeq W$.

Demostración. Considere el cociente $u : V_K \rightarrow Q$ de la inmersión dada. Note que como $\mathcal{T}_2$ es abeliana, entonces el cociente Q pertenece a la categoría $\mathcal{T}_2$. Por el lema 5.11 existe un cociente $u' : V \rightarrow Q'$ tal que $j^*Q' \simeq Q$, Q' es localmente libre y además $Q' \in \text{Obj}(\mathcal{T}_K)$. Si $W' = \text{Nuc}(u')$, al aplicar φ^* a la sucesión exacta

$$W' \hookrightarrow V \xrightarrow{u'} Q',$$

obtenemos la sucesión exacta

$$\varphi^*W' \hookrightarrow \varphi^*V \simeq \mathcal{O}_Z^{\oplus v} \xrightarrow{\varphi^*u'} \varphi^*Q' \simeq \mathcal{O}_Z^{\oplus q'},$$

en la que $\varphi^*W' \simeq \text{Nuc}(\varphi^*u')$, debido a la exactitud de φ^* . Como hemos mencionado antes, núcleos de morfismos entre $\mathcal{O}_Z$ -módulos libres son libres también, de esta forma W' es trivializado por φ , de donde se sigue inmediatamente que W' es localmente libre (aplicando 1.62 con φ) y que $W' \in \text{Obj}(\mathcal{T}_K)$. $\square$

Prueba de la proposición 5.7. Consideremos el funtor $F : \mathcal{T}_K \rightarrow \mathcal{T}_2$ que en objetos viene dado por

$$F(V) := j^*V,$$

para $V \in \text{Obj}(\mathcal{T}_K) = \text{Obj}(\mathcal{T})$. Y naturalmente dado en morfismos por $g \otimes 1 \mapsto j^*g$. Vamos a demostrar que este funtor es una equivalencia de categorías, y por el lema 5.8 y la observación 5 tendremos que $\mathcal{T}_K$ es abeliana.

1. F es plenamente fiel. Note que

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}_K}(V, W) := \text{Hom}_{\mathcal{T}}(V, W) \otimes_R K \simeq \text{Hom}_{\mathcal{T}_2}(j^*V, j^*W),$$

donde hemos usado la definición de morfismos en $\mathcal{T}_K$ y la proposición 1.61 junto con el hecho que j es plano. Esto nos dice claramente que F es plenamente fiel.

2. F es esencialmente sobreyectivo. En aras del lema 5.8 y la observación 5, primero vamos a demostrar que F es esencialmente sobreyectivo en $B := f_*\mathcal{O}_Y$, ya que $\mathcal{T}_2 (= \mathcal{T}_3)$ está generada por este objeto. Observamos que $h_K^*\lambda_K^*B = \alpha^*f^*B$, pero anteriormente vimos que cuando f es un torsor, el fibrado B es trivializado por f . Luego $f^*B \simeq \mathcal{O}_Y^{\oplus b}$, y así $h_K^*\lambda_K^*B \simeq \mathcal{O}_{Y'}^{\oplus b}$. Utilizamos la misma notación de antes: $D = h_*\mathcal{O}_Z$. Aertamos ahora que $(j')^*D \simeq \lambda_K^*B$. En efecto, observamos que

$$(j')^*D = (j')^*h_*\mathcal{O}_Z \simeq (h_K)_*j'^*\mathcal{O}_Z \simeq (h_K)_*\mathcal{O}_{Y'},$$

y por su parte

$$\lambda_K^* B = \lambda_K^* f_* \mathcal{O}_Y \simeq (h_K)_* (\alpha^* \mathcal{O}_Y) \simeq (h_K)_* \mathcal{O}_{Y'}.$$

donde hemos utilizado la proposición 1.63.

Note ahora que $(\lambda_K)_* \lambda_K^* B \simeq (\lambda_K)_* (j')^* D$, debido al aserto, y por la proposición 1.63 esto último es isomorfo a $j^* \lambda_* D$. La inclusión canónica

$$B \rightarrow (\lambda_K)_* \lambda_K^* B$$

es entonces una inclusión

$$B \rightarrow j^* \lambda_* D.$$

Por el Lema 5.9, $V = \lambda_* D \in \text{Obj}(\mathcal{T}_K)$, y por tanto tenemos la inmersión $B \rightarrow V_K$, con $B \in \text{Obj}(\mathcal{T}_2)$. Aplicando el lema 5.12, existe $W' \in \text{Obj}(\mathcal{T}_K)$ tal que $j^* W' \simeq B$, con lo que hemos probado la sobreyectividad esencial en el objeto B .

Para probar la sobreyectividad esencial en todo $\text{Obj}(\mathcal{T}_2)$, usamos los lemas 5.11 y 5.12. Sabemos que F es esencialmente sobreyectivo en B , y gracias a [Har80, Proposition 1.8]², tenemos que para un objeto V de $\mathcal{T}_K$ se cumple que $j^*(V^\vee) \simeq (j^* V)^\vee$, por lo que F es esencialmente sobreyectivo en $B^\vee$ también. Inmediatamente tenemos F esencialmente sobreyectivo en sumas directas y productos tensoriales de B y $B^\vee$. Lo que resta es probar que es esencialmente sobreyectivo en subcocientes. Note que estamos usando que $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_3$ es generada por el objeto B .

Suponga ahora que un objeto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{T}_2$ es isomorfo a $j^* V$ para un V un objeto de $\mathcal{T}_K$. Sea $\mathcal{G}$ un subcociente de $\mathcal{F}$, esto quiere decir que hay una inmersión $\mathcal{G} \rightarrow Q$, donde Q es un cociente de $\mathcal{F}$, es decir hay un epimorfismo $\mathcal{F} \rightarrow Q$, donde Q es un objeto de la categoría $\mathcal{T}_2$, ya que esta misma es abeliana y $\mathcal{F}$ está en $\mathcal{T}_2$. Por el lema 5.11, se tiene que F es esencialmente sobreyectivo en Q , y finalmente al aplicar el lema 5.12 tenemos que F es esencialmente sobreyectivo en $\mathcal{G}$. Así hemos probado que F es una equivalencia de categorías y que $\mathcal{T}_K$ es una categoría abeliana. $\square$

Proposición 5.13 (Construcción del funtor fibra para la categoría $\mathcal{T}$). *Hay un funtor tensorial R -lineal aditivo*

$$\omega : \mathcal{T} \rightarrow \text{Mod}(R)$$

tal que

²En realidad el resultado de dicha proposición no es exactamente lo que deseamos, pues se trata de haces estables reflexivos, sin embargo en la demostración de esta proposición se comprueba la fórmula que mencionamos.

★ ω es fiel y preserva núcleos e imágenes.

★ ω restringido a $\mathcal{T}^{\text{triv}}$ es plenamente fiel.

Demostración. La construcción del funtor ω es parecida a la construcción del funtor análogo para la categoría de haces esencialmente finitos en esquemas sobre un cuerpo, necesitaremos acá un punto R -racional del esquema X , así que fijemos $x \in X(R)$. En síntesis, el funtor ω es simplemente

$$V \mapsto x^*V \in \text{Mod}(R).$$

Se puede comprobar que el siguiente diagrama de funtores

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{\omega} & \text{Mod}(R) \\ j^* \downarrow & & \downarrow -\otimes_R K \\ \text{EF}(X_K) & \xrightarrow{x_K^*} & \text{Vectf}_K \end{array}$$

es conmutativo. En efecto, $x_K^* j^* = (j \circ x_K)^* = (x \circ i)^* = x^* i^*$ donde $i : \text{Spec}(K) \rightarrow \text{Spec}(R)$ es la aplicación inducida por la inclusión $R \subset K$. Claramente la aplicación $i^* : \text{Mod}(R) \rightarrow \text{Mod}(K)$ es sencillamente el mapeo $-\otimes_R K$. Se sigue que $\omega = x^*$ es fiel, ya que j^* , $-\otimes_R K$ y x_K^* son fieles. (Recuerde que x_K^* es el funtor fibra de $\text{EF}(X_K)$ el cual es fiel).

Ahora veamos que ω preserva núcleos e imágenes. Recuerde que ω es simplemente el funtor x^* , si x' denota el pullback de x sobre R' entonces tenemos que $\lambda \circ x' = x \circ \delta$, donde $\delta : \text{Spec}(R') \rightarrow \text{Spec}(R)$, que es un morfismo fielmente plano, pues, como hemos mencionado antes, R' es un R -módulo libre. Primero demostraremos que $(\lambda \circ x')^*$ preserva núcleos e imágenes, luego, como δ es fielmente plano, se seguirá que x^* también cumple dicha propiedad. En efecto si $u : V \rightarrow W$ es un morfismo en $\mathcal{T}$, consideramos su factorización imagen

$$V \twoheadrightarrow \text{im}(u) \hookrightarrow W,$$

si ésta es preservada por $(x \circ \delta)^* = \delta^* x^*$ entonces tenemos una sucesión exacta

$$\delta^* x^* V \twoheadrightarrow \delta^* x^* \text{im}(u) \hookrightarrow \delta^* x^* W,$$

y el hecho que δ sea fielmente plano implica entonces la factorización

$$x^* V \twoheadrightarrow x^* \text{im}(u) \hookrightarrow x^* W,$$

y por tanto x^* preserva la imagen de u . Un argumento similar se puede hacer con el núcleo de u . Entonces procedemos a mostrar que $(x \circ \delta)^* = (\lambda \circ x')^*$ preserva imágenes y núcleos. Recordemos que anteriormente demostramos la existencia de una sección $t : \text{Spec}(R') \rightarrow Z$ del morfismo $p' \circ h$. Aquí se cumple $x' = h \circ t$, por lo que tenemos $(x')^* = t^*h^*$, y así $(\lambda \circ x')^* = (x')^*\lambda^* = t^*h^*\lambda^* = t^*(\lambda \circ h)^* = t^*\varphi^*$. Sea $u : V \rightarrow W$ un morfismo de objetos en $\mathcal{T}$, y nuevamente considere su factorización imagen

$$V \twoheadrightarrow \text{im}(u) \hookrightarrow W.$$

Al ser φ plano, entonces esta factorización se preserva mediante φ^* y tenemos

$$\varphi^*V \twoheadrightarrow \text{im}(\varphi^*u) \hookrightarrow \varphi^*W,$$

en la cual hemos usado la exactitud de φ para sustituir $\varphi^*\text{im}(u)$ por $\text{im}(\varphi^*u)$. Como V, W son entonces φ^*V y φ^*W son $\mathcal{O}_Z$ -módulos libres y, como hemos mencionado arriba, la imagen del morfismo φ^*u entre $\mathcal{O}_Z$ -módulos libres es libre también (como $\mathcal{O}_Z$ -módulo). Por tanto la sucesión anterior es una de haces libres dada por

$$\mathcal{O}_Z^{\oplus v} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_Z^{\oplus s} \hookrightarrow \mathcal{O}_Z^{\oplus w},$$

la cual se mantiene bajo t^* , al convertirse en la sucesión

$$\mathcal{O}_{R'}^{\oplus v} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{R'}^{\oplus s} \hookrightarrow \mathcal{O}_{R'}^{\oplus w},$$

porque probamos anteriormente que t^* es plenamente fiel en los $\mathcal{O}_Z$ -módulos libres. En fin lo que tenemos es que el funtor $t^*\varphi^*$ preserva factorizaciones de imágenes y, probado análogamente, de núcleos.

Ahora debemos probar que ω es plenamente fiel restringido a $\mathcal{T}^{\text{triv}}$. Note que el objeto unidad de $\mathcal{T}$ es, claramente, el haz $\mathcal{O}_X$, entonces los objetos triviales de $\mathcal{T}$ son los haces $V \in \text{Obj}(\mathcal{T})$ con un monomorfismo $V \rightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Como x^* es una sección del morfismo $p : X \rightarrow \text{Spec}(R)$ y $\mathcal{O}_X(X) = R$ entonces gracias al argumento hecho en la prueba del lema 5.5, vea la fórmula 5.1 por ejemplo, tenemos que x^* es plenamente fiel en los $\mathcal{O}_X$ -módulos libres. Ahora probamos que los objetos triviales de $\mathcal{T}$ son en realidad los $\mathcal{O}_X$ -módulos libres, y con ello tenemos el resultado deseado.

En efecto, sea $V \in \text{Obj}(\mathcal{T})$ con un monomorfismo $V \rightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el funtor j , y utilizando su exactitud, tenemos un monomorfismo $V_K \rightarrow \mathcal{O}_{X_K}^{\oplus n}$. Sin embargo, anteriormente hemos mostrado que $V_K \in \text{Obj}(\text{EF}(X_K))$, es decir es un haz esencialmente finito sobre X_K . En la categoría $\text{EF}(X_K)$, subobjetos de haces libres son

libres también, ya que $\text{EF}(X_K)$ es una categoría abeliana, de esta manera tenemos que $V_K \simeq \mathcal{O}_{X_K}^{\oplus v}$. Sea $j_s : X_s \rightarrow X$ el pullback sobre la fibra especial de X , y $\varphi_s : Z_s \rightarrow X_s$ el pullback de $\varphi : Z \rightarrow X$ bajo la fibra especial de X , también denote $V_s := j_s^* V$. Reduciendo el monomorfismo podemos suponer que $n = v$. Observe que $\varphi_s^* V_s \simeq \mathcal{O}_{Z_s}^{\oplus v}$; esto se deduce sencillamente de perseguir el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Z & \xleftarrow{\quad} & Z_s \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_s \\ X & \xleftarrow{j_s} & X_s \end{array}$$

y usar el hecho que V es trivializado por φ . Debido a la proposición 4.47, obtenemos entonces que $V_s \in \text{Obj}(\text{EF}(X_s))$. Por el teorema de semi-continuidad (ver [Har77, Theorem 12.8, pág. 288]) tenemos que

$$\dim_k(V_s(X_s)) \geq \dim_K(V_K(X_K)) = v.$$

No obstante, como V_s es un haz esencialmente finito la proposición 4.46 nos dice que no es posible que $\dim_k(V_s(X_s)) > v$, ya que el haz libre maximal inmerso en V_s es de dimensión v . De esta forma tenemos que $\dim_k(V_s(X_s)) = v$, y por esta misma proposición tenemos $V_s \simeq \mathcal{O}_{X_s}^{\oplus v}$. La igualdad

$$\dim_k(V_s(X_s)) = \dim_K(V_K(X_K)) = v$$

implica, con la benefacción del Teorema de Grauert - [Har77, Corollary 12.9, pág. 288]- que $p_* V \in \text{Vect}(\text{Spec}(R))$, es decir que $p_* V$ es localmente libre sobre $\text{Spec}(R)$, o en otras palabras, que es un R -módulo libre. Notemos que $(p_K)_* V_K \simeq (p_K)_* \mathcal{O}_{X_K}^{\oplus v} \simeq ((p_K)_* \mathcal{O}_{X_K})^{\oplus v} \simeq \mathcal{O}_K^{\oplus v}$ (Usamos la proposición 1.63 en el último isomorfismo), y por tanto $p_* V$ es un R -módulo libre cuya fibra genérica $(p_* V)_K = (p_K)_* V_K$ es un K -módulo libre de rango v , necesariamente esto implica que $p_* V \simeq \mathcal{O}_R^{\oplus v}$.

Aplicando p^* a ambos lados del isomorfismo anterior tenemos que $p^* p_* V \simeq \mathcal{O}_X^{\oplus v}$. Sabemos que hay un morfismo $p^*(p_* V) \rightarrow V$, ya que p_* y p^* son funtores adjuntos, y de esta manera tenemos un morfismo

$$\rho : \mathcal{O}_X^{\oplus v} \rightarrow V$$

entre $\mathcal{O}_X$ -módulos del mismo rango. Utilizando el resultado de [Vas68] localmente, si probamos que ρ es un morfismo sobreyectivo entonces tendríamos automáticamente que es un isomorfismo y por tanto $V \simeq \mathcal{O}_X^{\oplus v}$, que es lo que deseábamos probar.

Note que la fibra genérica del morfismo ρ corresponde al morfismo

$$\rho_K : \mathcal{O}_{X_K}^{\oplus v} \rightarrow V_K,$$

el cual ya sabemos que es un isomorfismo. Por otro lado, nuevamente el teorema de Grauert³ nos dice que la fibra especial del morfismo ρ es el morfismo natural

$$(p_s)^*(p_s)_*V_s \rightarrow V_s,$$

el cual se conoce que es un isomorfismo cuando V_s es un haz libre sobre X_s , lo cual ya hemos demostrado que es cierto. Así ambas fibras del morfismo ρ son morfismos sobreyectivos. Si toma un punto cualquiera P de X , éste se encuentra o en la fibra genérica X_K o en la fibra especial X_s de X , y por tanto el morfismo en tallos ρ_P es o una restricción del morfismo ρ_K o una restricción de ρ_s , ambos sobreyectivos. Esto nos dice que para todo punto $P \in X$ el morfismo en tallos ρ_P es sobreyectivo, y finalmente, esto implica que ρ es sobreyectivo gracias a [Har77, Proposition 1.1, pág. 63], con lo que hemos finalizado la prueba de esta proposición. $\square$

Con todo este argumento logramos probar entonces el teorema 5.3, es decir que nuestra categoría propuesta $(\mathcal{T}, \omega)$ es un retículo tannakiano. Lo que haremos a continuación es construir un $\hat{G}$ -torsor $f_1 : Y_1 \rightarrow X$ asociado a nuestro retículo tannakiano.

Como lo vimos en el teorema 3.35 tenemos que $\hat{G} = \text{Aut}_R^{\otimes}(\omega)$, que es un R -esquema en grupos, brinda una equivalencia de categorías entre $\mathcal{T}$ y $\text{Rep}^0(\hat{G})$ dada por ω . Tomando extensión de escalares obtenemos que ω_K da una equivalencia de categorías entre $\mathcal{T}_K$ y $(\text{Rep}^0(\hat{G}))_K$. Como demostramos en este capítulo, hay una equivalencia de categorías entre $\mathcal{T}_K$ y $\text{EF}(X_K, \{f_*\mathcal{O}_Y\})$, la cual es a su vez equivalente a $\text{Rep}(G)$, debido a la teoría de Nori. En la sección 3.2 vimos la equivalencia $(\text{Rep}^0(\hat{G}))_K \equiv \text{Rep}(\hat{G}_K)$, así que juntando todo esto lo que tenemos es una equivalencia de categorías entre $\text{Rep}(\hat{G}_K)$ y $\text{Rep}(G)$ lo que implica un isomorfismo $\hat{G}_K \simeq G$. De esta manera obtenemos que el esquema en grupos asociado a nuestra categoría $(\mathcal{T}, \omega)$ tiene como fibra genérica a G (el K -esquema en grupos que actúa sobre nuestro torsor original).

Ahora procedemos a construir el torsor deseado. Para esto nos inspiramos en el método dado en [Nori76], el cual estudiamos en la sección 4.3. Observemos la existencia del funtor

³En general la imagen directa no conmuta con el cambio de base, sin embargo, Grauert dice que si la dimensión de $V_y(X_y)$ para todo punto $y \in \text{Spec}(R)$ es constante entonces sí podemos asumir dicha conmutatividad. Se invita al lector a consultar dicha referencia, la cual por simplicidad no hemos incluido acá.

F dado por

$$F : \text{Rep}^0(\hat{G}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{T} \longrightarrow \text{Vect}(X). \quad (5.3)$$

Aplicaremos ahora un análisis similar al de la definición 4.38, sin embargo con algunas diferencias, por ejemplo en esta definición todo se construye sobre un cuerpo, aquí estamos sobre un anillo de valuación discreta, y por tanto esto amerita algunos cambios. En dicha definición Nori considera el caso general cuando G es un esquema en grupos sobre un cuerpo k , sea finito o no. En nuestro caso sólo nos enfocaremos en el estudio de esquemas en grupos finitos, sobre el anillo de valuación discreta R . Además, como se puede observar en la definición de F , ahora sólo trabajaremos sobre representaciones finitas y proyectivas sobre $\hat{G}$.

Es evidente que este funtor cumple con las hipótesis de la definición 4.38. Aquí no tendremos la necesidad de extender nuestro funtor, ya que vamos a verificar que la representación trivial es un objeto de $\text{Rep}^0(\hat{G})$ y luego entonces comprobaremos que F envía la representación trivial $\hat{G}'$ en el haz de $\mathcal{O}_X$ -módulos cuyo espectro es $\hat{G}_X := \hat{G} \times_{\text{Spec}(R)} X$.

Recordemos que la representación trivial viene dada por $(\hat{A}, \hat{\rho})$, donde $\hat{A} = R[\hat{G}]$ es el álgebra de Hopf que representa al esquema en grupos $\hat{G}$ y $\hat{\rho} : \hat{A} \rightarrow \hat{A} \otimes_R \hat{A}$ está dado por $\hat{a} \mapsto \hat{a} \otimes 1$. Para comprobar que esta representación es en efecto un objeto de $\text{Rep}^0(\hat{G})$, demostraremos que $\hat{G}$ es un R -esquema en grupos finito. La equivalencia $\mathcal{T} \cong \text{Rep}^0(\hat{G})$ asegura, gracias a la teoría de [DuHai18], una equivalencia $\mathcal{T}_{R'} \cong \text{Rep}^0(\hat{G}_{R'})$. Si $\mathcal{H}$ es la categoría cuyos objetos son los fibrados sobre X' trivializados por el torsor h , entonces podemos considerar el funtor $\lambda^* : \mathcal{T}_{R'} \rightarrow \mathcal{H}$, que es fiel, puesto que λ es fielmente plano. En [AE18, Lemma 2.11] se demuestra una equivalencia de categorías $\mathcal{H} \cong \text{Rep}^0(H)$ (recuerde que $h : Z \rightarrow X'$ es un H -torsor), por lo que al usar ambas equivalencias tenemos un morfismo $\text{Rep}^0(\hat{G}_{R'}) \rightarrow \text{Rep}^0(H)$, el cual de manera contravariante induce un morfismo de esquemas en grupos $H \rightarrow \hat{G}_{R'}$, cuya fibra genérica $H_{K'} \rightarrow (\hat{G}_{R'})_{K'}$ es un isomorfismo, ya que

$$H_{K'} \simeq G_{K'} = (\hat{G}_K)_{K'} = (\hat{G}_{R'})_{K'},$$

donde usamos la proposición 5.2 para obtener el primer isomorfismo. El morfismo $H \rightarrow \hat{G}_{R'}$, con fibra genérica un isomorfismo, se traduce en una inmersión $R'[\hat{G}_{R'}] \rightarrow R'[H]$. En efecto, sean $A := R'[\hat{G}_{R'}]$ y $B := R'[H]$, entonces lo que tenemos es un morfismo de R' -módulos $\phi : A \rightarrow B$ tal que $\phi \otimes_{R'} \text{id}_{K'} : A \otimes_{R'} K' \rightarrow B \otimes_{R'} K'$ es un isomorfismo ⁴. Considere la factorización imagen de ϕ , dada por

$$A \twoheadrightarrow I \hookrightarrow B. \quad (5.4)$$

⁴Un morfismo de este tipo es llamado un morfismo modelo.

Al tensorizar la sucesión (5.4) por K obtenemos la sucesión

$$A \otimes_{R'} K' \longrightarrow I \otimes_{R'} K' \hookrightarrow B \otimes_{R'} K',$$

ya que K' es R' -plano. Ahora, note que A y B son R' -módulos planos, e incluso tenemos que B es un R' -módulo libre y por tanto es libre de R' -torsión. Al ser I un submódulo de B esto implica que I también es libre de R' -torsión y por tanto I es R' -plano, ya que R' es un dominio de ideales principales. Al ser $\phi \otimes_{R'} \text{id}_{K'}$ un isomorfismo, esto implica que $I \otimes_{R'} K' \simeq A \otimes_{R'} K'$, por lo que I es un cociente R' -plano de A cuya fibra genérica es isomorfa a la fibra genérica de A , pero A también es un cociente R' -plano de A que cumple esta propiedad, luego, la unicidad de la proposición 5.10 nos garantiza que $I \simeq A$, por lo que tenemos que $\phi : A \rightarrow B$ es inyectivo.

Continuando con nuestra demostración, el esquema en grupos H es, como sabemos, un esquema en grupos finito (incluso es el esquema en grupos asociado a un grupo finito), por lo que $R'[H]$ es un R' -álgebra finita, por la inclusión anterior tenemos que lo mismo sucede para $R'[\hat{G}_{R'}]$, ya que R' es un anillo Noetheriano ⁵ y por tanto $\hat{G}_{R'}$ es un esquema en grupos finito, y esto implica que $\hat{G}$ también es un esquema en grupos finito, puesto que, como hemos mencionado antes, R' es un R -módulo libre de rango finito.

Una vez que sabemos que $\hat{G}$ es finito, sea $\nu : \hat{G}_X \rightarrow X$ la proyección en el producto fibrado. Tal y como vimos en la prueba del lema 4.22, tenemos que $\nu_* \mathcal{O}_{\hat{G}_X} \simeq \mathcal{O}_X^{\oplus g}$, donde $g = |\hat{G}|$ es el orden de dicho esquema en grupos. Note que tenemos el siguiente diagrama conmutativo de funtores

$$\begin{array}{ccc} \text{Rep}^0(\hat{G}) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{T} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Rep}(G) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{T}_K \equiv \text{EF}(X, \{f_* \mathcal{O}_Y\}), \end{array}$$

donde las flechas verticales corresponden a tomar extensiones de escalares sobre K . La representación trivial $\hat{G}'$ es enviada por la flecha vertical izquierda en la representación trivial G' , ésta a su vez es enviada en el haz $\mathcal{O}_{X_K}^{\oplus g} = \mu_* \mathcal{O}_{G_{X_K}}$, donde $\mu : G_{X_K} \rightarrow X_K$ es el haz del producto fibrado sobre X . Note que usamos que $\hat{G}$ es finito, por lo que $g = |\hat{G}| = |\hat{G}_K| = |G|$. Si V es el haz al cual es enviada $\hat{G}'$, entonces al perseguir el diagrama anterior tenemos que V es enviado en $\mathcal{O}_{X_K}^{\oplus g}$ mediante la flecha vertical derecha. Esto implica que V es un subobjeto de $\mathcal{O}_X^{\oplus g}$. Sin embargo, anteriormente hemos demostrado

⁵Si $M \rightarrow N$ es una inmersión de A -módulos para A un anillo Noetheriano, y N es un A -módulo finito entonces M también es un módulo finito.

que como V es un objeto de $\mathcal{T}$ esto implica que V es un haz libre, y como la flecha vertical preserva rangos, tenemos que $V \simeq \mathcal{O}_X^{\oplus g}$, es decir $\hat{G}'$ es enviado, bajo F , en $\nu_*\mathcal{O}_{\hat{G}_X}$. Así tenemos que la representación trivial de $\hat{G}$ pertenece a $\text{Rep}^0(\hat{G})$ y que el funtor F la envía en $\nu_*\mathcal{O}_{\hat{G}_X}$.

Con esta información, de manera análoga al procedimiento ideado por Nori y que discutimos en la definición 4.38, podemos construir un $\hat{G}$ -torsor $f_1 : Y_1 \rightarrow X$. Note, sin embargo, que en nuestro caso hay una simplificación importante: no es necesario extender el funtor dado a una categoría más grande que $\text{Rep}^0(\hat{G})$, puesto que hemos probado que $R[\hat{G}]$ es en realidad un R -comódulo finito, y por tanto las representaciones trivial y regular de $\hat{G}$ se encuentran en $\text{Rep}^0(\hat{G})$. Siguiendo con nuestra construcción, recuerde que $Y_1 = \text{Spec}(F(\hat{A}, \Delta))$, donde $\hat{A}$ es el R -álgebra que representa a $\hat{G}$ y $(\hat{A}, \Delta)$ es la representación regular.

Proposición 5.14. *La fibra genérica del $\hat{G}$ -torsor $f_1 : Y_1 \rightarrow X$ coincide con el G -torsor $f : Y \rightarrow X_K$, y por tanto hemos encontrado una extensión de nuestro torsor original sobre X_K .*

Demostración. Debemos mostrar que $(Y_1)_K \simeq Y$ y que $(f_1)_K = f$. Sea $\hat{A} = R[\hat{G}]$, es el R -álgebra que representa a $\hat{G}$. Si F es el funtor de (5.3), primero probaremos que

$$\text{Spec}(F(\hat{A}, \Delta)_K) \simeq (\text{Spec}(F(\hat{A}, \Delta)))_K = (Y_1)_K. \quad (5.5)$$

Note que esto implica que $(Y_1)_K \simeq Y$, por que al tomar la extensión de escalares del funtor (5.3), obtenemos el funtor

$$F_K : \text{Rep}^0(\hat{G})_K \xrightarrow{\cong} \mathcal{T}_K \longrightarrow \text{Vect}(X)_K,$$

el cual, al usar las equivalencias $\text{Rep}^0(\hat{G})_K \equiv \text{Rep}_f(\hat{G}_K)$, $\mathcal{T}_K \equiv \text{EF}(X_K, \{f_*\mathcal{O}_Y\})$ (mediante el funtor j^*) y el isomorfismo $\hat{G}_K \simeq G$, se trata del funtor

$$\tilde{F} : \text{Rep}(G) \xrightarrow{\cong} \text{EF}(X_K, \{f_*\mathcal{O}_Y\}) \longrightarrow \text{Vect}(X_K),$$

que envía a la representación regular $(\hat{A}_K, \Delta_K)$ en $\tilde{F}(\hat{A}_K, \Delta_K) = j^*F(\hat{A}, \Delta) = (F(\hat{A}, \Delta))_K$. El funtor $\tilde{F}$ coincide con el funtor que da la equivalencia de categorías entre $\text{Rep}(G)$ y $\text{EF}(X_K, \{f_*\mathcal{O}_Y\})$ (es decir el funtor x_K^*) y por tanto se debe tener que su torsor asociado es necesariamente $f : Y \rightarrow X_K$, gracias a la correspondencia dada por la proposición 4.39, esto a su vez nos implica que $\text{Spec}(\tilde{F}(\hat{A}_K, \Delta_K)) = Y$, y por tanto $\text{Spec}((F(\hat{A}, \Delta))_K) = Y$; entonces la ecuación (5.5) nos provee con el resultado deseado.

Debemos ahora demostrar que las acciones de torsores son compatibles con el pullback dado, esto para asegurar que en efecto Y_1 es un modelo, como torsor, de Y . Tal y como en la definición 4.38, las aplicaciones

$$\begin{aligned}\varphi : \hat{G} \times \hat{G}' &\rightarrow \hat{G} \\ \psi : \hat{G} \times \hat{G}' &\rightarrow \hat{G} \times \hat{G},\end{aligned}$$

inducen, mediante el funtor F , los morfismos

$$\begin{aligned}\Phi : Y_1 \times_X \hat{G}_X &\rightarrow Y_1 \\ \Psi : Y_1 \times_X \hat{G}_X &\rightarrow Y_1 \times_X Y_1,\end{aligned}$$

al tomar la fibra genérica de dichas aplicaciones, es decir aplicar j^* , se obtienen los correspondientes morfismos dados por el funtor $\tilde{F}$, el cual coincide con el funtor asociado al torsor f , por lo que hemos mencionado arriba. Es decir, las fibras genéricas de Φ y Ψ consisten en las aplicaciones

$$\begin{aligned}\Phi_K : Y \times_{X_K} G_{X_K} &\rightarrow Y \\ \Psi_K : Y \times_{X_K} G_{X_K} &\rightarrow Y \times_{X_K} Y,\end{aligned}$$

con lo que hemos comprobado que las acciones del $\hat{G}$ -torsor $f_1 : Y_1 \rightarrow X$ tienen por fibra genérica a las acciones del G -torsor $f : Y \rightarrow X$. Con el procedimiento dado por Nori se puede construir un punto y_1 el cual cumple claramente que su fibra genérica coincide con el punto y sobre Y . En fin, se ha encontrado un modelo del torsor original. En otras palabras, la tripleta $(Y_1, \hat{G}, y_1)$ tiene por fibra genérica a (Y, G, y) .

La ecuación (5.5) se sigue de la propiedad universal del espectro de un haz de álgebras. En general, si $f : Z \rightarrow X$ un morfismo cualquiera y $\mathcal{A}$ un haz de $\mathcal{O}_X$ -álgebras quasi-coherente. Recuerde que por proposición 1.57 existe un morfismo afín $\beta : \text{Spec}(\mathcal{A}) \rightarrow X$ tal que $\beta_* \mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathcal{A})} \simeq \mathcal{A}$. En este caso se cumple $\text{Spec}(\mathcal{A}) \times_X Z \simeq \text{Spec}(f^* \mathcal{A})$. Una demostración se puede encontrar en [Stack15, Lemma 27.4.6]. ⁶ $\square$

⁶La propiedad universal del espectro de un haz de álgebras es la siguiente: para cualquier morfismo $\pi : Y \rightarrow X$ con un morfismo $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_Y$ existe un único morfismo $f : Y \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{A})$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad f \quad} & \text{Spec}(\mathcal{A}) \\ \pi \searrow & & \swarrow \beta \\ & X & \end{array}$$

Finalmente, nos dedicamos a probar el Teorema 5.1. En realidad este es un argumento un tanto directo, que utiliza el resultado de la proposición anterior. En adelante, dado que no se espera ninguna confusión, tanto el esquema fundamental en grupos de Nori como el de Antei-Emsalem-Gasbarri será denotado con el símbolo π_1 . En primer lugar veamos porqué existe un morfismo $\varphi : \pi_1(X_K, x_K) \rightarrow \pi_1(X, x)_K$. Trabajaremos con las categorías $\mathcal{P}(X)$ de la sección 4.5 y $\mathcal{C} = \mathcal{P}(X_K)$ de la sección 4.4.

El siguiente es un lema técnico que nos será de ayuda más adelante.

Lema 5.15. [A10, Lemma 2.6, pág. 7] Sea S un esquema de Dedekind. Sean $(G_i, \gamma_{ij})_{i \in I}$ un sistema inverso S -esquemas en grupos, $G = \varprojlim_{i \in I} G_i$ y $\rho_i : G \rightarrow G_i$ los morfismos canónicos. Sea $J \subset I$ un conjunto cofiltrado y $G' = \varprojlim_{j \in J} G_j$. Si para todo $i \in I$ existe un morfismo $\gamma_i : G' \rightarrow G_i$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & G' \\ \rho_i \downarrow & \swarrow \gamma_i & \\ G_i & & \end{array}$$

es conmutativo, entonces φ es una inmersión cerrada. Más aun si cada ρ_i es esquemáticamente dominante entonces φ es un isomorfismo. ⁷

Recordemos que el esquema fundamental en grupos sobre un esquema de Dedekind es el límite proyectivo de los S -esquemas en grupos finitos y planos, los cuales se denotarán por la familia $\{G_i\}_{i \in I}$, es decir

$$\pi_1(X, x) = \varprojlim_{i \in I} G_i,$$

además hay una familia de morfismos canónicos

$$\rho_i : \pi_1(X, x) \rightarrow G_i.$$

Como vimos en la proposición 4.66 sólo basta tomar el límite proyectivo de los torsores quasi-galoisianos. Denotamos entonces por $J \subset I$ al conjunto de todos los $i \in I$ tales que

es conmutativo, donde α es la composición

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\simeq} \beta_* \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathcal{A}} \longrightarrow \beta_* f_* \mathcal{O}_Y = \pi_* \mathcal{O}_Y,$$

esto de acuerdo a [Vak18, 17.1, pág. 447]. La prueba del resultado que deseamos se trata entonces de un argumento- muy común- con propiedades universales. Por simplicidad no la presentaremos acá.

⁷Si $J \subset I$ es un conjunto cofiltrado, se puede construir, utilizando la propiedad universal de límites, un morfismo $\varphi : G \rightarrow G'$, ya que G es un objeto dotado de los morfismos en la definición de límite proyectivo para los objetos G_j indexados por J .

$\rho_i : \pi_1(X, x) \rightarrow G_i$ es un morfismo esquemáticamente dominante, es decir el conjunto que indexa los torsos quasi-galoisianos.

Ahora construimos el morfismo φ que relaciona el esquema $\pi_1(X_K, x_K)$ con la fibra genérica $\pi_1(X, x)_K$. Los límites directos de álgebras conmutan con el cambio de base ([Mat80, Appendix A, Theorem A.1]) por lo que lo mismo sucede para los límites inversos de esquemas en grupos afines, y por tanto

$$\pi_1(X, x)_K \simeq \varprojlim_{j \in J} G_{j,K},$$

donde los morfismos canónicos son $\rho_{j,K} : \pi_1(X, x)_K \rightarrow G_{j,K}$, las fibras genéricas de los morfismos canónicos de $\pi_1(X, x)$. Como $j : X_K \rightarrow X$ es plano, si ρ_j es esquemáticamente dominante entonces $\rho_{j,K}$ también. Si consideramos el conjunto $J' = J/\simeq$ donde, para $j_1, j_2 \in J$ hacemos que $j_1 \simeq j_2$ si y sólo si $\rho_{j_1,K} \simeq \rho_{j_2,K}$ entonces es claro, por propiedades de límites, que

$$\pi_1(X, x)_K \simeq \varprojlim_{j \in J'} G_{j,K}. \quad (5.6)$$

Denotamos ahora por M al conjunto que indexa los objetos (dominantes) de $\mathcal{P}(X_K)$, y $\{F_m\}$ los K -esquemas en grupos asociados. Entonces tenemos que

$$\pi_1(X_K, x_K) \simeq \varprojlim_{m \in M} F_m. \quad (5.7)$$

Lema 5.16. [A10, Lemma 2.7, pág. 8] J' es cofiltrado y existe una aplicación inyectiva $J' \hookrightarrow M$.

Demostración. En términos concretos, podemos verificar si un conjunto es cofiltrado viendo si posee productos fibrados. Consideremos dos torsos puntuados $(Y_{j_i,K}, G_{i,K}, y_{j_i,K})$ para $i = 1, 2$, con morfismos sobre un torsor $(Y_K, G_{j,K}, y_K)$ sobre X_K , con $j_1, j_2, j \in J'$, ahora, sabemos (por la construcción dada en la sección 4.5, hecha en [AEG15]) que J es filtrado por lo que existe una tripleta (Y', G', y') sobre X que hace el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (Y', G', y') & \longrightarrow & (Y_{j_1}, G_{j_1}, y_{j_1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Y_{j_2}, G_{j_2}, y_{j_2}) & \longrightarrow & (Y, G, y), \end{array}$$

ser cartesiano. La fibra genérica del diagrama anterior nos da el diagrama en J' deseado. $\square$

Básicamente, lo que nos dice el lema es que hay una inclusión de conjuntos cofiltrados

$$\{G_{j,K}\}_{j \in J'} \subset \{F_m\}_{m \in M}.$$

De esta inclusión podemos concluir, utilizando propiedades universales de límites y las ecuaciones (5.6) y (5.7), que existe un morfismo

$$\varphi : \pi_1(X_K, x_K) \rightarrow \pi_1(X, x)_K.$$

El tratamiento anterior se traduce en un morfismo de partes primas a p :

$$\varphi^{(p')} : \pi_1(X_K, x_K)^{(p')} \rightarrow \pi_1(X, x)_K^{(p')}. \quad (5.8)$$

En efecto, debido a que

$$\pi_1(X, x) \simeq \varprojlim_{j \in J} G_j,$$

entonces se tiene que (por definición de parte prima a p)

$$\pi_1(X, x)^{(p')} \simeq \varprojlim_{j \in J^{(p')}} G_j,$$

donde $J^{(p')} = \{j \in J : \text{mcd}(|G_j|, p) = 1\}$ y los morfismos canónicos siguen siendo los ρ_j anteriores. Por tanto, al tomar el cambio de base en el límite se tiene

$$\pi_1(X, x)_K^{(p')} \simeq \varprojlim_{j \in J^{(p')}} G_{j,K}.$$

Si $(J^{(p')})'$ se obtiene de $J^{(p')}$ con la relación de equivalencia análoga a la de J' entonces obtenemos que

$$\pi_1(X, x)_K^{(p')} \simeq \varprojlim_{j \in (J^{(p')})'} G_{j,K}, \quad (5.9)$$

y utilizando el procedimiento análogo al del último lema, se obtiene que $(J^{(p')})'$ es cofiltrado y que hay una aplicación inyectiva

$$(J^{(p')})' \hookrightarrow M^{(p')},$$

donde $M^{(p')} = \{m \in M : \text{mcd}(|F_m|, p) = 1\}$. En palabras más sencillas lo que obtenemos es una inclusión de conjuntos cofiltrados

$$\{G_{j,K}\}_{j \in (J^{(p')})'} \subset \{F_m\}_{m \in M^{(p')}}. \quad (5.10)$$

Por definición de partes primas a p , contamos con que

$$\pi_1(X_K, x_K)^{(p')} \simeq \varprojlim_{m \in M^{(p')}} F_m, \quad (5.11)$$

y, finalmente, de la inclusión (5.10), de las fórmulas (5.9) y (5.11), y de propiedades universales de límites, se concluye la existencia del morfismo (5.8).

Notamos también que si aplicamos la proposición 4.66 sobre X_K , y consideramos su parte prima a p , tenemos que $\pi_1(X_K, x_K)^{(p')}$ es isomorfo al límite proyectivo de los esquemas en grupos G asociados a torsores Nori-reducidos (Y, G, y) con $\text{mcd}(|G|, p) = 1$. Ahora presentamos un resultado importante de [AEG15] sobre el morfismo φ .

Teorema 5.17. [AEG15, Proposition 5.5, pág. 13] *Si se cumplen las hipótesis (A) o (B) entonces el morfismo $\varphi : \pi_1(X_K, x_K) \rightarrow \pi_1(X, x)_K$ es fielmente plano.*

Con una prueba completamente análoga (reemplazando las familias de torsores por la familia que forma la parte prima a p) se puede demostrar que el morfismo (5.8) es fielmente plano también. Quizá el resultado más importante para nuestros efectos es el siguiente corolario, el cual también se deduce del lema 5.15.

Corolario 5.18. [A10, Corollary 3.1, pág. 12] *Cualquier tripleta galoisiana sobre X_K puede ser extendida a una tripleta (quasi-galoisiana) sobre X si y sólo si $\varphi : \pi_1(X_K, x_K) \rightarrow \pi_1(X, x)_K$ es un isomorfismo.*

Veamos cómo funciona la implicación que nos interesa del corolario anterior. Si una tripleta (Y, G, y) se puede extender a una tripleta sobre X dada por (Y', G', y') , esto implica que existe un morfismo $\rho' : \pi_1(X, x) \rightarrow G'$ cuya fibra genérica $\rho'_K : \pi_1(X, x) \rightarrow G'_K \simeq G$ hace el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(X_K, x_K) & \xrightarrow{\varphi} & \pi_1(X, x)_K & \longrightarrow & \pi_1(X, x) \\ & \searrow \rho & \downarrow \rho'_K & & \downarrow \rho' \\ & & G & \longrightarrow & G' \end{array}$$

conmutar. Ahora, si toda tripleta galoisiana (Y, G, y) se puede extender, entonces, por lo anterior, para todo morfismo $\rho_i : \pi_1(X_K, x_K) \rightarrow G_i$ de K -esquemas en grupos, existe un morfismo $\gamma_i : \pi_1(X, x)_K \rightarrow G_i$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_K, x_K) & \xrightarrow{\varphi} & \pi_1(X, x)_K \\ & \searrow \rho_i & \downarrow \gamma_i \\ & & G_i \end{array}$$

es conmutativo. Por la proposición 4.66, $\pi_1(X_K, x_K)$ es el límite proyectivo de los K -esquemas en grupos G_i donde ρ_i es esquemáticamente dominante. Finalmente, gracias al lema 5.15 obtenemos que φ es un isomorfismo.

El tratamiento para las partes primas a p es completamente análogo al anterior. Si una tripleta (Y, G, y) galoisiana sobre X_K , con $\text{mcd}(|G|, p) = 1$ se puede extender a una tripleta (Y', G', y') sobre X , entonces observamos que $|G'| = |G'_K| = |G|$, por lo que $\text{mcd}(|G'|, p) = 1$, es decir la tripleta (Y', G', y') también cumple la condición de primalidad, además existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(X_K, x_K)^{(p')} & \xrightarrow{\varphi^{(p')}} & \pi_1(X, x)_K^{(p')} & \longrightarrow & \pi_1(X, x)^{(p')} \\ & \searrow \rho & \downarrow \rho'_K & & \downarrow \rho' \\ & & G & \longrightarrow & G'. \end{array}$$

Si esto sucede para toda tripleta galoisiana (Y, G, y) entonces se puede aplicar el lema 5.15 otra vez y concluir que $\varphi^{(p')}$ es un isomorfismo. Aquí usamos que $\pi_1(X_K, x_K)$ es el límite proyectivo de las tripletas galoisianas (torsores Nori-reducidos o de Galois) (Y, G, y) con $\text{mcd}(|G|, p) = 1$, para aplicar el lema 5.15. En fin, con todo esto hemos demostrado lo siguiente.

Proposición 5.19. *El morfismo $\varphi^{(p')} : \pi_1(X_K, x_K)^{(p')} \rightarrow \pi_1(X, x)_K^{(p')}$ es un isomorfismo si todo torsor de Galois (Y, G, y) sobre X_K con $\text{mcd}(|G|, p) = 1$ se puede extender a un torsor (quasi-Galois) sobre X .⁸*

Observación. En la proposición 5.14 hemos conseguido un modelo para nuestro torsor de Galois inicial, y con esto entonces concluimos la prueba del teorema 5.1. Además, notamos que la extensión $f_1 : Y_1 \rightarrow X$ es un $\hat{G}$ -torsor quasi-galoisiano, en efecto, si (T, M, t) es una tripleta cualquiera en $Pro - \mathcal{P}(X)$ con un morfismo $(\alpha, \beta) : (T, M, t) \rightarrow (Y_1, \hat{G}, y_1)$, entonces sabemos que $\beta : M \rightarrow \hat{G}$ es esquemáticamente dominante, pero este se traduce en un morfismo $M_K \rightarrow \hat{G}_K = G$ que es fielmente plano, pues el torsor (Y, G, y) es galoisiano, lo cual implica que contamos con una inclusión de álgebras de Hopf: $K[M_K] \rightarrow K[G]$, la que se encuentra como flecha vertical del diagrama

$$\begin{array}{ccc} R[M] & \hookrightarrow & K[M_K] \\ \uparrow & & \uparrow \\ R[\hat{G}] & \hookrightarrow & K[G]. \end{array}$$

⁸Tal y como en el caso con φ , la otra dirección también es cierta, sin embargo no la necesitamos para nuestros efectos y puede ser un poco más larga, por lo que omitimos esta parte del resultado.

Persiguiendo el diagrama obtenemos la inclusión de álgebras $R[\hat{G}] \rightarrow R[M]$, lo que implica que $M \rightarrow G$ es esquemáticamente dominante, y así obtenemos que $(Y_1, \hat{G}, y_1)$ es quasi-galoisiano.

Bibliografía

- [AE09] ANTEI M., EMSALEM M., Galois closure of essentially finite morphisms. *Journal of Pure and Applied Algebra* **215** (2009), 2567–2585.
- [AEG15] ANTEI M., GASBARRI C., EMSALEM M., Sur l’existence du schéma en groupes fondamental. arXiv:1504.05082v4 [math.AG], 2015.
- [A10] ANTEI M., Comparison between the fundamental group scheme of a relative scheme and that of its generic fiber. *Journal de théorie des nombres de Bordeaux* **22** (2010), 537–555.
- [AE18] ANTEI M., EMSALEM M., Models of torsors and the fundamental group scheme. *Nagoya Mathematical Journal* **230** (2018), 18–34.
- [Bres14] BRESCIANI G., Nori’s fundamental group scheme. Tesi di Laurea Magistrale, Università di Pisa. (Asesor: Prof. Angelo Vistoli), 2014.
- [Del90] DELIGNE, P., Catégories tannakiennes. en: *The Grothendieck Festschrift II*, P. Cartier et al, eds. Progress in Mathematics **87**, Birkhäuser, Boston, 1990; pp. 111–195.
- [DeGa70] DEMAZURE M., GABRIEL P., *Groupes Algébriques*. North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [DeGro62] DEMAZURE M., GROTHENDIECK A., Schémas en groupes. I: Propriétés générales des schémas en groupes. *Séminaire de Géométrie Algébrique* du Bois Marie, 1962/64 (SGA 3). Lecture Notes in Mathematics **151**, Springer, Berlin, 1970.
- [DuHai18] DUONG N. D., HAI P. H., Tannakian duality over Dedekind rings and applications. *Mathematische Zeitschrift* **288** (2018), 1103–1142.
- [EGNO09] ETINGOF P., GELAKI S., NIKSHYCH D. Y OSTRIK V., *Tensor categories* (2009) Disponible en <http://www-math.mit.edu/~etingof/tenscat.pdf>
- [Esq19] ESQUIVEL ARAYA J. A., Esquemas en grupos y torsores. Tesis de Maestría Académica en Matemática, Universidad de Costa Rica, 2019.
- [Ful95] FULTON W., *Algebraic Topology: A First Course*. Springer, New York, 1995.

- [GW10] GÖRTZ U., WEDHORN T., *Algebraic Geometry I: Schemes*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2010.
- [SGA1] GROTHENDIECK A., *Revêtements étales et groupe fondamental*. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–61 (SGA 1); Lecture Notes in Mathematics **224**, Springer, Berlin, 1971.
- [EGAIV.2] GROTHENDIECK A., *Éléments de Géométrie Algébrique: IV. Étude locale de schémas et de morphismes de schémas, Seconde partie*. Publications Mathématiques de l’IHÉS **24**, 1965.
- [EGAIV.3] GROTHENDIECK A., *Éléments de Géométrie Algébrique: IV. Étude locale de schémas et de morphismes de schémas, Troisième partie*. Publications Mathématiques de l’IHÉS **28**, 1966.
- [EGAIV.4] GROTHENDIECK A., *Éléments de Géométrie Algébrique: IV. Étude locale de schémas et de morphismes de schémas, Quatrième partie*. Publications Mathématiques de l’IHÉS **32**, 1967.
- [Har77] HARTSHORNE R., *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer, New York, 1977.
- [Har80] HARTSHORNE R., Stable reflexive sheaves. *Mathematische Annalen* **254** (1980), 121–176.
- [HL97] HUYBRECHTS D., LEHN M., *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves*, second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [Liu06] LIU Q., *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*. Oxford Graduate Texts in Mathematics **6**, Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [Mat80] MATSUMURA H., *Commutative Ring Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [Nori76] NORI M., *On the representations of the fundamental group*. *Compositio Mathematica* **33** (1976), 29–41.
- [Nori82] NORI M., *The fundamental group scheme* Proceedings of the Indian Academy of Sciences: Mathematical Sciences **91** (1982), 73–122.

- [Nori83] NORI M., *The Fundamental Group-Scheme of an Abelian Variety*. Math. Ann. **263** (1983), 263–266.
- [Roto2] ROTMAN J., *Advanced Modern Algebra*, second edition. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [Saa72] SAAVEDRA RIVANO N., *Catégories Tannakiennes*. Lecture Notes in Mathematics **265**, Springer, Berlin, 1972.
- [Ser68] SERRE J. P., *Corps Locaux*, Actualités scientifiques et industrielles **1296**, Hermann, Paris, 1968.
- [Stack15] AUTORES DEL PROYECTO STACK, *Stack Project*, disponible en:
<http://stacks.math.columbia.edu> (2012–20).
- [Szo9] SZAMUELY T., *Galois Groups and Fundamental Groups*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics **117**, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [ToZh17] TONINI F., ZHANG L., Essentially finite vector bundles on normal pseudo-proper algebraic stacks, arXiv:1702.03751v1 [math.AG], 2017.
- [Vas68] VASCONCELOS W., On finitely generated flat modules, *Transactions of the American Mathematical Society* **138** (1969), 505–512.
- [Vak18] VAKIL R., The Rising Sea. Foundations of Algebraic Geometry. Notas de curso disponibles en:
<http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/FOAGnov1817public.pdf>
- [Wa79] WATERHOUSE W., *Introduction to Affine Group Schemes*. Springer, New York, 1979.
- [Wedo4] WEDHORN T., *On Tannakian duality over valuation rings*. Journal of Algebra. **282** (2004), 575–609.
- [Zhang13] ZHANG L., *The homotopy sequence of Nori's fundamental group*. Journal of Algebra **393** (2013), 79–91.