

# MA-702: VARIABLE COMPLEJA

Joseph C. Várilly

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

I Ciclo lectivo del 2022

## Introducción

El análisis matemático se reparte, por una larga tradición, en dos grandes subdivisiones, denominadas *variable real* y *variable compleja*. Aunque tienen varios aspectos en común (continuidad y diferenciabilidad, series de potencias, convergencia uniforme sobre partes compactas) las propiedades de las funciones reales y complejas exhiben marcadas diferencias que hace necesario separar su tratamiento. Para mencionar solo una diferencia notable, muchas funciones diferenciables de una variable real no son dos veces diferenciables; en cambio, una función diferenciable de una variable compleja es necesariamente suave (indefinidamente diferenciable).

Históricamente, los trabajos de Cauchy sobre funciones complejas,<sup>1</sup> a partir de 1825, enfocaron las integrales de línea de las funciones complejas diferenciables (llamadas funciones *holomorfas*). Unas décadas más tarde, Weierstraß analizó las funciones *analíticas* de una variable compleja,<sup>2</sup> que son aquellas que admiten desarrollos locales en series de potencias convergentes. Resulta que las funciones analíticas complejas son holomorfas, y viceversa. Las interacciones entre estos dos puntos de vista forman un *leitmotif* de la teoría.

Hoy en día, la teoría de “variable compleja” comprende varias subdisciplinas, cada una con su propio interés y estilo: las aplicaciones conformes, el análisis asintótico, las funciones elípticas, etc. Además, hay muchas interacciones con la teoría de “variable real”: por ejemplo, las funciones armónicas o las series e integrales de Fourier. Aquí se pretende ofrecer un curso “clásico”, abarcando un temario básico que abre las puertas a todo lo demás.

---

<sup>1</sup>Augustin-Louis Cauchy, *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*, sometido a la Académie des Sciences de Paris el 28 de febrero de 1825.

<sup>2</sup>Karl Weierstraß, “Theorie der Abel’schen Funktionen”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 52 (1856), 285–380.

## Programa de materias

### 1 Funciones en el plano complejo

El cuerpo  $\mathbb{C}$  de los números complejos, conjugados complejos y módulos. Forma polar de un número complejo. La esfera de Riemann  $\mathbb{C}_\infty$ . Series de potencias, sus discos de convergencia, ejemplos de funciones analíticas. Derivada de una función compleja, las ecuaciones de Cauchy y Riemann. Funciones racionales, transformaciones lineales fraccionales de  $\mathbb{C}_\infty$ .

### 2 El teorema de Cauchy y las funciones holomorfas

Integrales de línea en  $\mathbb{C}$ . Los teoremas de Goursat y de Cauchy. La fórmula integral de Cauchy, las desigualdades de Cauchy, la serie de Taylor de una función holomorfa. El teorema de Liouville y sus consecuencias, el teorema de la aplicación abierta, el principio del (módulo) máximo. Clasificación de singularidades, conteo de ceros y polos, el principio del argumento, el teorema de Rouché. Funciones meromorfas y sus series de Laurent.

### 3 Integrales y series por métodos complejos

El teorema del residuo y las integrales de contorno. Cálculo de integrales definidas. Integrales de valor principal, sumación de series. Productorias infinitas, factorización de Weierstraß de una función entera. La función gamma y su continuación meromorfa. La función zeta de Riemann.

### 4 Funciones armónicas

Funciones holomorfas y funciones armónicas. La propiedad del valor medio de funciones armónicas, el principio del máximo, núcleos de Poisson. Inversión y la transformada de Kelvin. Polinomios armónicos y armónicos esféricos.

## Bibliografía

El curso seguirá, en buena medida, los libros de Ahlfors, Simon y Stein & Shakarchi, mencionados a continuación. He aquí una lista de libros de mucha utilidad para los temas del curso. En la página del curso, se colocará semanalmente un juego de apuntes detallados.

- 1 M. J. Ablowitz & A. S. Fokas, *Complex Variables: Introduction and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- 2 L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3ª edición. McGraw-Hill, New York, 1979.

- 3 S. Axler, P. Bourdon & W. Ramey, *Harmonic Function Theory*, Springer, New York, 2001.
- 4 J. Bak & D. J. Newman, *Complex Analysis*. Springer, Berlin, 1997.
- 5 H. P. Cartan, *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables*. Dover, Mineola, NY, 1995.
- 6 P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*, tomo 1. Wiley, New York, 1986.
- 7 G. A. Jones & D. Singerman, *Complex Functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- 8 K. Kodaira, *Complex Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- 9 A. I. Markushevich, *Teoría de las funciones analíticas*. Mir, Moscú, 1978.
- 10 W. Rudin, *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1966.
- 11 B. Simon, *Basic Complex Analysis, A Comprehensive Course in Analysis*, tomo 2A. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- 12 M. R. Spiegel, *Teoría y problemas de variable compleja*. McGraw-Hill Latinoamericana, México, DF, 1971.
- 13 E. M. Stein & R. Shakarchi, *Complex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

# Índice general

Introducción	I
<b>I Funciones en el Plano Complejo</b>	<b>I-I</b>
1.1. El cuerpo complejo $\mathbb{C}$	I-I
1.2. Series de potencias	I-8
1.3. Las ecuaciones de Cauchy y Riemann	I-21
1.4. Algunas funciones holomorfas	I-24
1.5. Ejercicios sobre funciones de una variable compleja	I-32
<b>2 El Teorema de Cauchy y las Funciones Holomorfas</b>	<b>2-I</b>
2.1. Integrales de línea en $\mathbb{C}$	2-I
2.2. El teorema de Cauchy	2-7
2.3. La fórmula integral de Cauchy	2-14
2.4. Ceros de una función holomorfa	2-20
2.5. Representación por series de Laurent	2-28
2.6. Funciones meromorfas	2-38
2.7. Ejercicios sobre el teorema y las fórmulas de Cauchy	2-44
<b>3 Integrales y Series por Métodos Complejos</b>	<b>3-I</b>
3.1. Las integrales de contorno	3-I
3.2. Convergencia uniforme sobre compactos	3-16
3.3. Productos infinitos	3-24
3.4. La función gamma de Euler	3-30
3.5. La función zeta de Riemann	3-40
3.6. Ejercicios sobre integrales y series complejas	3-44
<b>4 Funciones armónicas</b>	<b>4-I</b>
4.1. Funciones armónicas en el plano complejo	4-I
4.2. Funciones armónicas en $\mathbb{R}^n$ , $n \geq 2$	4-6
4.3. Armónicos esféricos	4-13
4.4. Ejercicios sobre funciones armónicas	4-20

## I Funciones en el Plano Complejo

*The theory of functions of a complex variable aims at extending calculus to the complex domain. Both differentiation and integration acquire new depth and significance; at the same time the range of applicability becomes radically restricted. Indeed, only the analytic or holomorphic functions can be freely differentiated and integrated.*

— Lars Ahlfors

### I.1. El cuerpo complejo $\mathbb{C}$

Los números complejos forman un cuerpo<sup>1</sup> que incluye el cuerpo  $\mathbb{R}$  de los números reales pero también admite una solución de la ecuación  $z^2 = -1$ . De hecho, admite dos soluciones distintas de esta ecuación cuadrática, ya que  $(-z)^2 = z^2$ . Estas soluciones se denotan por  $i$  y  $-i$ , porque antiguamente se consideró “imaginario” una cantidad de cuadrado negativo, en contraste con los números de cuadrado positivo o cero, apodados “reales”.

Las propiedades de los números reales y la convergencia de sucesiones y series en  $\mathbb{R}$  se asumen conocidas. Siguiendo a Euler, se define un **número complejo** como una expresión

$$z = x + iy, \quad \text{con } x, y \in \mathbb{R}.$$

Los números reales  $x, y$  se llaman la *parte real* y la *parte imaginaria* de  $z$ , respectivamente. A veces se emplean las notaciones  $x =: \Re z, y =: \Im z$ . Las operaciones aritméticas de *suma* y *producto* de números complejos se definen así:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &:= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ z_1 z_2 &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned} \tag{I.1}$$

La ley del producto en (I.1) viene de tomar  $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$  como polinomios reales en una “incógnita”  $i$ , seguido por una reducción por la regla  $i^2 = -1$ :

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= x_1 x_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) + i^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

No es difícil comprobar que estas operaciones son conmutativas y asociativas; y que cumplen la ley distributiva:  $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ . Entonces  $\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$  es un anillo conmutativo.

---

<sup>1</sup>El término viene del alemán *Körper*, traducido como *corps* en francés, *cuero* en español, *corp* en rumano, etc., aunque en inglés se dice *field*. Nunca debe usarse la traducción secundaria “campo”, reservada para campos vectoriales, campos magnéticos, etc.

El *cero* de  $\mathbb{C}$  es  $0 + i0$ , en adelante denotado por  $0$  simplemente. Fíjese que  $z_1 z_2 = 0$  si y solo si  $x_1 x_2 = y_1 y_2$  y a la vez  $x_1 y_2 = -x_2 y_1$ ; estas ecuaciones se cumplen si y solo si  $x_1 = y_1 = 0$  o bien  $x_2 = y_2 = 0$ . En resumen:  $z_1 z_2 = 0$  implica que  $z_1 = 0$  o bien  $z_2 = 0$ . Esto dice que  $\mathbb{C}$  es un anillo *entero* (no posee divisores de cero).

La identidad multiplicativa de  $\mathbb{C}$  es  $1 + i0$ , en adelante denotado por  $1$  simplemente. Se suele abreviar  $x + i0 = x$ , de tal manera que  $\mathbb{R}$  se considera parte de  $\mathbb{C}$ .

[[ Un procedimiento equivalente a lo anterior es el de definir  $\mathbb{C}$  como el cociente del anillo de polinomios  $\mathbb{R}[X]$  por el ideal principal  $(X^2 + 1)$ , en donde el elemento  $i$  se identifica con la coclase  $X + (X^2 + 1)$ . ]]

► El anillo  $\mathbb{C}$  tiene una tercera operación (unaria), la **conjugación compleja**  $z \mapsto \bar{z}$ ,

$$z = x + iy \implies \bar{z} := x - iy.$$

Las siguientes propiedades de la conjugación compleja son inmediatas:

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z w} = \bar{z} \bar{w}.$$

Obsérvese que el producto  $z \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$  es real y *no negativo*, de modo que  $z \bar{z} = 0$  en  $\mathbb{R}$  si y solo si  $z = 0$  en  $\mathbb{C}$ .

En consecuencia, cada  $z \neq 0$  en  $\mathbb{C}$  tiene un inverso multiplicativo  $1/z$ , dada por

$$\frac{1}{z} := \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Resumiendo: en el anillo conmutativo entero  $\mathbb{C}$ , cada elemento no nulo posee un inverso; en fin,  $\mathbb{C}$  es un *cuerpo*.

► El **valor absoluto**, o el **módulo**, de  $z \in \mathbb{C}$  es el número real no negativo

$$|z| := \sqrt{z \bar{z}}.$$

Obsérvese que  $|\bar{z}| = |z|$  y que  $|-z| = |z|$ . Además, se ve que  $|zw| = \sqrt{z w \bar{z} \bar{w}} = |z| |w|$ .

Al tomar raíces cuadradas en las inecuaciones  $x^2 \leq x^2 + y^2$ ,  $y^2 \leq x^2 + y^2$ , se obtiene

$$-|z| \leq \Re z \leq |z|, \quad -|z| \leq \Im z \leq |z|, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

**Lema I.I.** *El módulo de números complejos cumple la **desigualdad triangular**:*

$$|z + w| \leq |z| + |w|, \quad \text{para todo } z, w \in \mathbb{C}. \quad (\text{I.2})$$

*Demostración.* Es cuestión de comparar los cuadrados de ambos lados:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2. \quad \square \end{aligned}$$

► La biyección  $x + iy \leftrightarrow (x, y)$  entre  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{R}^2$  sugiere que los números complejos pueden representarse por los puntos de un plano. Esta biyección es  $\mathbb{R}$ -lineal (tanto  $\mathbb{C}$  como  $\mathbb{R}^2$  son espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$ ) pero habría que interpretar la multiplicación compleja como una operación geométrica sobre el plano. El topógrafo danés Wessel observó en 1797 que la multiplicación por  $i$ , es decir,

$$z \mapsto iz, \quad \text{o equivalentemente,} \quad x + iy \mapsto -y + ix,$$

efectúa una rotación del plano por un ángulo recto (en el sentido antihorario).<sup>2</sup>

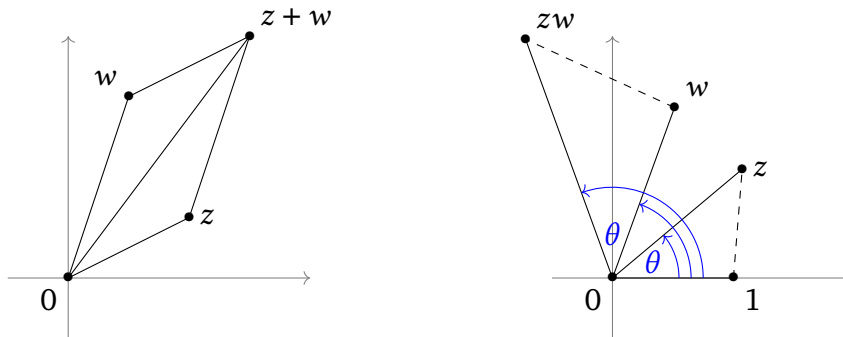


Figura 1.1: Suma y producto de dos números complejos

La representación de la **suma**  $z+w$  en el plano complejo es idéntica a la representación de la suma de dos vectores en  $\mathbb{R}^2$ . Si  $z, w \in \mathbb{C}$ , el punto  $z + w$  en el plano se coloca para que el segmento  $[0, z + w]$  sea la diagonal del paralelogramo<sup>3</sup> cuyos lados adyacentes son los segmentos  $[0, z]$  y  $[0, w]$ : véase la Figura 1.1. (Este dibujo colapsa en los casos excepcionales  $z = 0$ ;  $w = 0$ ; y  $z = tw$  con  $t$  real.)

<sup>2</sup>Caspar Wessel presentó su reporte *Om directionens analytiske betegning* (Sobre la representación analítica de la dirección) ante la Real Academia Danés de Ciencias, el 10 de marzo de 1797. Unos años después, en 1806, Jean-Robert Argand publicó privadamente en París su ensayo *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, con la misma idea, dando así el nombre *plano de Argand* a la representación geométrica de  $\mathbb{C}$ .

<sup>3</sup>La notación  $[a, b]$  aquí denota el *segmento de recta* cuyos extremos son los vectores  $a$  y  $b$ . En el plano complejo, por ejemplo, esto significa que  $[z, w] := \{ (1 - t)z + tw : t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1 \}$ .

Para representar el **producto**  $zw$  en el plano, conviene recordar las **coordenadas polares** en  $\mathbb{R}^2$ :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta,$$

que permiten expresar un número complejo  $z = x + iy$  en la forma

$$\boxed{z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)}. \quad (1.3)$$

Obsérvese que  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$  es la distancia del origen 0 al punto  $z$  en el plano.

Si  $w = u + iv = s(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$  es otro número complejo, entonces

$$\begin{aligned} zw &= rs(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \\ &= rs((\cos \theta \cos \varphi - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi) + i(\operatorname{sen} \theta \cos \varphi + \cos \theta \operatorname{sen} \varphi)) \\ &= rs(\cos(\theta + \varphi) + i \operatorname{sen}(\theta + \varphi)). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Como  $rs = |z| |w| = |zw|$ , este cálculo muestra que el ángulo polar que corresponde al producto  $zw$  es la *suma*  $\theta + \varphi$  de los ángulos correspondientes a los factores  $z$  y  $w$  —aunque se permite sumar o restar un múltiplo de  $2\pi$  a cada ángulo.

El **argumento** del número complejo no cero  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \neq 0$  es la cantidad  $\arg z := (\theta \bmod 2\pi) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . A veces es preferible tomar el *valor principal* del argumento, escrito  $\operatorname{Arg} z \in \mathbb{R}$ , que cumple  $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$ . El argumento de 0 no se define.

En vista de (1.3), cada  $z \neq 0$  en  $\mathbb{C}$  queda determinado por el par  $(|z|, \arg z)$ ; el producto en  $\mathbb{C}^\times \equiv \mathbb{C} \setminus \{0\}$  cumple las reglas:

$$|zw| = |z| |w|, \quad \arg(zw) = \arg z + \arg w.$$

Obsérvese también que  $|\bar{z}| = |z|$  pero  $\arg \bar{z} = -\arg z$ . Para cada  $z \in \mathbb{C}^\times$  fijo, la multiplicación  $w \mapsto zw$  combina una *dilatación* del plano por un factor de escala  $|z|$  con una *rotación* del plano por un ángulo  $\arg z$ ; estas dos transformaciones dejan fijo el origen 0. Los triángulos  $01z$  y  $0w(wz)$  son semejantes. Véase la Figura 1.1.

La transformación  $z \mapsto \bar{z}$  también tiene una interpretación geométrica: se trata de la *reflexión* del plano que deja fija la recta  $\mathbb{R}$ .

► Las fórmulas de adición para senos y cosenos, exhibidas en el cálculo (1.4), muestran que la función  $\theta \mapsto \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$  cumple la ley de exponentes; esto justifica parcialmente la notación, introducida por Euler:

$$\boxed{e^{i\theta} := \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta}, \quad \text{así que } \underline{z = re^{i\theta}}. \quad (1.5)$$

El cálculo (1.4) se simplifica en:  $zw = re^{i\theta} se^{i\varphi} = rs e^{i(\theta+\varphi)}$ .

Por inducción sobre  $n \in \mathbb{N}$ , se obtiene  $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ . En la notación trigonométrica, esta es la **fórmula de de Moivre**:<sup>4</sup>

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}. \quad (1.6)$$

El caso  $n = 0$  es trivial; el caso  $n = -1$  viene de la identidad  $\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta \equiv 1$ ; los demás casos siguen por inducción.

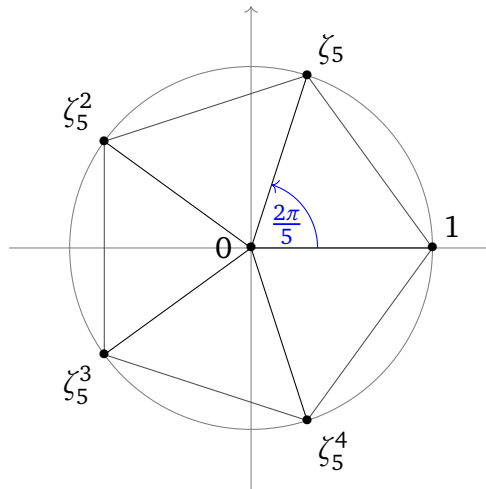


Figura 1.2: las cinco raíces de 1, de orden 5

Si  $n \in \mathbb{N}$  es un entero positivo,<sup>5</sup> considérese el siguiente número complejo,

$$\zeta_n := e^{2\pi i/n} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}.$$

La fórmula (1.6) implica que  $\zeta_n^n = e^{2\pi i} = 1$ . De hecho, para  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ , se obtiene

$$(\zeta_n^k)^n = (e^{2k\pi i/n})^n = \cos 2k\pi + i \operatorname{sen} 2k\pi = 1,$$

de modo que la ecuación  $z^n = 1$  admite  $n$  soluciones distintas  $z = 1, \zeta_n, \zeta_n^2, \dots, \zeta_n^{n-1}$ . Para ver que estas **raíces  $n$ -ésimas de 1** son distintas, basta observar que los  $\zeta_n^k$  forman los vértices de un polígono regular de  $n$  lados inscrito en el círculo de radio 1 centrado en el origen (Figura 1.2).

► La ecuación de una **recta** en  $\mathbb{R}^2$  es  $ax + by + c = 0$ , donde  $a, b, c \in \mathbb{R}$  con  $a^2 + b^2 \neq 0$ . Al sustituir  $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ,  $y = \frac{i}{2}(\bar{z} - z)$ , y al tomar  $\lambda := \frac{1}{2}(a + ib) \in \mathbb{C}^\times$ , la ecuación de la recta toma la forma

$$\bar{\lambda} z + \lambda \bar{z} + c = 0, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{C}^\times, c \in \mathbb{R}.$$

<sup>4</sup>Esta fórmula fue demostrada en 1722 por Abraham de Moivre, para  $n$  un entero positivo.

<sup>5</sup>En este curso se usa el *convenio francés* de tomar 0 como número natural:  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

La ecuación de un **círculo** con centro  $\alpha = a + ib$  y radio  $k$  es  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k^2$ , esto es,  $|z - \alpha|^2 = k^2$ , o simplemente:

$$|z - \alpha| = k.$$

Obsérvese que la cantidad  $|z - w|$  es la distancia entre los dos puntos  $z, w$  en el plano complejo. Por lo tanto, la desigualdad  $|z - \alpha| < k$  representa la región *interior* del círculo  $|z - \alpha| = k$ ; y la desigualdad  $|z - \alpha| > k$  representa la región *exterior* al círculo.

**La esfera de Riemann**

A veces conviene agregar un elemento extrínseco al plano complejo para representar el “recíproco de cero”. Para tener una idea visual de tal elemento, considérese el plano complejo  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  como el subespacio real  $\{(x, y, 0) : x + iy \in \mathbb{C}\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . La esfera unitaria

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

tiene “polo norte”  $N = (0, 0, 1)$  y “polo sur”  $S = (0, 0, -1)$  fuera del plano  $\mathbb{C}$ : Figura 1.3.

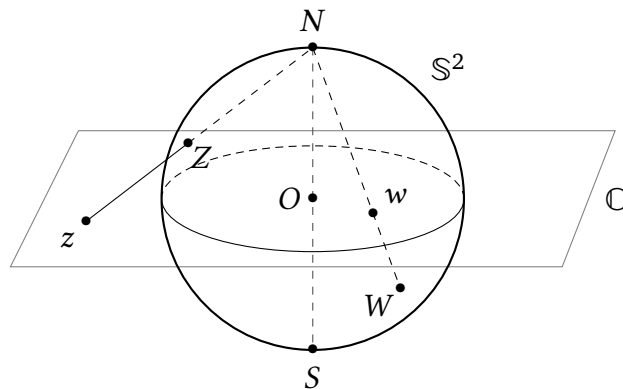


Figura 1.3: La proyección estereográfica

Si  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , la semirrecta  $\overrightarrow{Nz}$  corta la esfera  $\mathbb{S}^2$  en  $N$  y en otro punto  $Z = (x_1, x_2, x_3)$ . Inversamente, si  $Z \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ , la semirrecta  $\overrightarrow{NZ}$  no es horizontal y por ende corta el plano  $\mathbb{C}$  en un solo punto  $z$ . La correspondencia  $z \leftrightarrow Z$  entre  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  se llama la **proyección estereográfica**.

Como  $N, Z$  y  $z$  son puntos colineales, la comparación de coordenadas entre los segmentos  $[N, z]$  y  $[N, Z]$  muestra que

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{x_2} = \frac{1}{1 - x_3}.$$

Entonces la proyección  $Z \mapsto z$  viene dada por

$$z = x + iy = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

Inversamente, la relación  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  implica

$$x^2 + y^2 + 1 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + (1 - x_3)^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{2 - 2x_3}{(1 - x_3)^2} = \frac{2}{1 - x_3},$$

así que la correspondencia  $z \mapsto Z$  viene dada por

$$x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Estas fórmulas se escriben como funciones de  $z$  de la siguiente manera:

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{i(\bar{z} - z)}{|z|^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}. \quad (\text{I.7})$$

Obsérvese que  $Z = z$  si y solo si  $z \in \mathbb{C} \cap \mathbb{S}^2$ , si y solo si  $x_3 = 0$ , si y solo si  $|z| = 1$ .

El interior  $|z| < 1$  del círculo unitario corresponde con el “hemisferio sur”  $x_3 < 0$ , mientras el exterior  $|z| > 1$  de dicho círculo corresponde con el “hemisferio norte”  $x_3 > 0$  (excluyendo el polo norte  $N$ ).

**Definición 1.2.** El **plano complejo extendido** es el conjunto  $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \uplus \{\infty\}$  (unión disjunta). La biyección  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} : z \mapsto Z$  se extiende a una biyección  $\mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{S}^2$  al hacer corresponder el elemento  $\infty \in \mathbb{C}_\infty$  con el polo norte  $N \in \mathbb{S}^2$ . En coordenadas,  $\infty \leftrightarrow (0, 0, 1)$  se obtiene al dejar  $|z| \rightarrow +\infty$  en las fórmulas (I.7).

Si  $R > 0$  y  $z \in \mathbb{C}$ , nótese que

$$|z| > R \iff |z|^2 + 1 > R^2 + 1 \iff x_3 > \frac{R^2 - 1}{R^2 + 1} = 1 - \frac{2}{R^2 + 1},$$

Entonces la parte  $\{\infty\} \uplus \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$  de  $\mathbb{C}_\infty$  corresponde con la capa esférica abierta  $x_3 > 1 - 2/(R^2 + 1)$  de  $\mathbb{S}^2$ . Estas capas esféricas forman un sistema de vecindarios básicos del polo norte  $N$ . Al declarar que estas partes son los *vecindarios básicos del punto*  $\infty \in \mathbb{C}_\infty$ , el conjunto  $\mathbb{C}_\infty$  resulta ser un espacio topológico homeomorfo a la esfera  $\mathbb{S}^2$ : esta es la *compactificación de un punto* del plano complejo.<sup>6</sup> Con esta estructura, el plano extendido  $\mathbb{C}_\infty$  se llama la **esfera de Riemann**.  $\diamond$

<sup>6</sup>Si  $X$  es un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff, su **compactificación de un punto** es el espacio compacto (y de Hausdorff)  $X^+ := X \uplus \{\infty\}$ , en donde los vecindarios básicos de  $\infty$  son los conjuntos de la forma  $\{\infty\} \uplus (X \setminus K)$  donde  $K$  es una parte compacta de  $X$ .

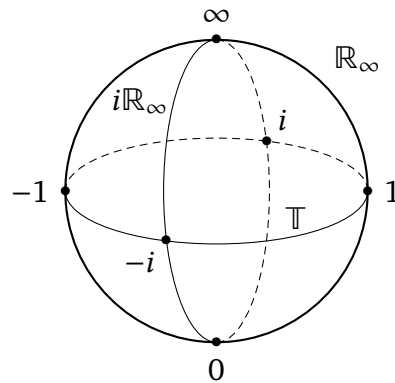


Figura 1.4: Tres círculos ortogonales en la esfera de Riemann

Si  $\overleftrightarrow{zw}$  es una recta en  $\mathbb{C}$ , su imagen en  $\mathbb{S}^2$  bajo proyección estereográfica es la intersección de  $\mathbb{S}^2$  con el plano  $Nzw$ : este es un círculo que pasa por el punto  $N$ . Por otro lado, es posible comprobar que la imagen de un círculo en  $\mathbb{C}$  es otro círculo sobre  $\mathbb{S}^2$ , el cual esta vez no pasa por  $N$ . Entonces un **círculo en  $\mathbb{C}_\infty$**  puede definirse como (a) un círculo ordinario en  $\mathbb{C}$ ; o bien (b) una recta en  $\mathbb{C}$  con el punto  $\infty$  agregado.

La aritmética del cuerpo  $\mathbb{C}$  se extiende parcialmente a  $\mathbb{C}_\infty$ , bajo los convenios

$$z + \infty = \infty, \quad z \cdot \infty = \infty, \quad z/0 = \infty, \quad z/\infty = 0 \quad \text{para todo } z \neq 0.$$

También se puede declarar  $0 + \infty = \infty$  y además  $0/\infty = 0$ . Sin embargo, otras expresiones tales como  $0/0$  y  $\infty + \infty$  permanecen indefinidas.

## 1.2. Series de potencias

Las funciones complejas más sencillas son los *polinomios*  $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ . Luego habrá que considerar las llamadas funciones “elementales”, tales como las funciones trigonométricas y las funciones exponencial y logarítmica; y después, las funciones obtenidas como primitivas de aquellas.<sup>7</sup> Buena parte de estas funciones poseen desarrollos en series cuyas sumas parciales son polinomios. En esta sección se estudia una clase de dichas series y sus propiedades de convergencia.

Los teoremas acerca de convergencia de sucesiones y series con argumentos en la recta real se trasladan sin cambios al plano complejo; la única diferencia notable es la naturaleza del *valor absoluto*: la cantidad no negativa  $|x| := \sqrt{x^2}$  para  $x \in \mathbb{R}$  queda reemplazada por  $|x + iy| := \sqrt{x^2 + y^2}$ . Por ejemplo, una sucesión  $\{z_n\}$  en  $\mathbb{C}$  es *convergente* con límite  $c \in \mathbb{C}$  si, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N \implies |z_n - c| < \varepsilon$ .

<sup>7</sup>Una **primitiva** de una función es otra función cuya derivada coincide con la primera.

Una serie converge en  $\mathbb{C}$  si la sucesión de sus sumas parciales converge en  $\mathbb{C}$ . Una función  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ , definida en una parte  $E \subseteq \mathbb{C}$ , es *continua en  $c \in E$*  si, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que  $z \in E, |z - c| < \delta \implies |f(z) - f(c)| < \varepsilon$ . Una función  $g: E \rightarrow \mathbb{C}$  es *continua en  $E$*  si  $g$  es continua en  $c$  para todo  $c \in E$ . Etcétera.<sup>8</sup>

**Definición 1.3.** Sea  $E \subseteq \mathbb{C}$  una parte cualquiera del plano complejo. Una sucesión de funciones  $\{f_n: E \rightarrow \mathbb{C}\}$  **converge uniformemente** en  $E$  si para cada  $z \in E$ , hay un elemento  $f(z) \in \mathbb{C}$  que cumple la siguiente propiedad: para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N \implies |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$  para todo  $z \in E$ . (Lo importante es que  $N$  depende sólo de  $\varepsilon$  pero no del punto  $z \in E$ .)

La función  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$  así definida es el *límite* de la sucesión de funciones  $\{f_n\}$ ; se escribe:  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $E$ .  $\diamond$

**Lema 1.4.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f_n: E \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua en  $E \subseteq \mathbb{C}$ . Si  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $E$ , la función límite  $f$  es también continua en  $E$ .

*Demostración.* El “argumento de  $\varepsilon/3$ ”, bien conocido en el caso real, funciona de igual manera en el plano complejo. Sea dado  $\varepsilon > 0$ . Tómesese  $N \in \mathbb{N}$ , de acuerdo con la Definición 1.3, tal que  $n \geq N \implies |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/3$  para todo  $z \in E$ .

Si  $c \in E$ , la continuidad de  $f_N$  muestra que hay  $\delta > 0$  tal que  $z \in E, |z - c| < \delta \implies |f_N(z) - f_N(c)| < \varepsilon/3$ . Para  $z \in E$  con  $|z - c| < \delta$ , entonces, vale

$$|f(z) - f(c)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(c)| + |f_N(c) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Nótese el uso de la desigualdad triangular para el valor absoluto. Se ha mostrado que  $f$  es continua en  $c$ , para todo  $c \in E$ .  $\square$

La convergencia uniforme de funciones se demuestra, en muchos casos particulares, mediante el uso del siguiente **criterio mayorizante de Weierstraß**.

**Lema 1.5 (Weierstraß).** Si un juego de funciones  $g_k: E \rightarrow \mathbb{C}$ , para  $k \in \mathbb{N}$ , cumple unas estimaciones  $|g_k(z)| \leq M_k$  para todo  $z \in E$ ; y si la serie numérica  $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$  converge, entonces la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(z)$  converge absoluta y uniformemente en  $E$ .

*Demostración.* Sean  $s_n(z) := \sum_{k=0}^n g_k(z)$ , para  $n \in \mathbb{N}$ , las sumas parciales de la serie. Si  $n > m$  en  $\mathbb{N}$  y  $z \in E$ , entonces

$$|s_n(z) - s_m(z)| = \left| \sum_{k=m+1}^n g_k(z) \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |g_k(z)| \leq \sum_{k=m+1}^n M_k \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} M_k. \quad (1.8)$$

La convergencia de la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$  implica que el lado derecho es pequeño: dado  $\varepsilon > 0$ , hay  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que  $m \geq N \implies \sum_{k>m} M_k < \varepsilon$ .

<sup>8</sup>Como convenio, las letras  $z, w$  denotarán elementos variables de  $\mathbb{C}$ ;  $c$  denotará una constante en  $\mathbb{C}$ .

Entonces, para cada  $z \in E$ , las sumas parciales  $s_n(z)$  forman una sucesión de Cauchy:  $n > m \geq N \implies |s_n(z) - s_m(z)| < \varepsilon$ . Por la completitud<sup>9</sup> de  $\mathbb{C}$ , existe un límite

$$s(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} g_k(z)$$

para cada  $z \in E$  (por separado). Al dejar  $n \rightarrow \infty$ , se obtiene

$$m \geq N \implies |s(z) - s_m(z)| \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } z \in E.$$

Ahora bien, como  $N = N(\varepsilon)$  no depende de  $z$ , esto dice que  $s_m \rightarrow s$  uniformemente en  $E$ ; es decir, la sumatoria  $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$  converge uniformemente a la suma  $s$ .

En vista de la estimación (1.8), los mismos considerandos son aplicables a la serie de valores absolutos  $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k(z)|$ ; la convergencia de la serie es también absoluta.  $\square$

**Definición 1.6.** Una serie de funciones complejas de la forma

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n, \tag{1.9}$$

con  $c \in \mathbb{C}$  y  $a_n \in \mathbb{C}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se llama una **serie de potencias** centrado en  $c$ , con *coeficientes*  $a_n$ .

Es evidente que  $f(c) = a_0 + 0 + 0 + \dots = a_0$ , así que la serie converge al menos en el punto  $z = c$ . Para  $z \neq c$ , la convergencia o divergencia de la serie depende de la naturaleza de los coeficientes. Conviene usar la notación (1.9) en todo caso; si no hay evidencias de convergencia, esta expresión es una **serie de potencias formal**.  $\diamond$

Una serie de potencias formal no es más que una sucesión de coeficientes  $\{a_n\}$  y un parámetro  $c$ , escritos de una manera que sugiere sus reglas de suma y multiplicación. Para manipular tales series formales algebraicamente, se puede usar una *incógnita*  $t$  en lugar de  $(z - c)$ . Con las operaciones aritméticas:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) + \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) t^n, \\ \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j+k=n} a_j b_k \right) t^n, \end{aligned} \tag{1.10}$$

las series de potencias formales forman un *anillo conmutativo entero*  $\mathbb{C}[[t]]$ , que incluye los *polinomios*  $\mathbb{C}[t]$  como subanillo.

<sup>9</sup>El plano complejo  $\mathbb{C}$  es completo porque la recta real  $\mathbb{R}$  es completo, al notar que  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  como espacios métricos.

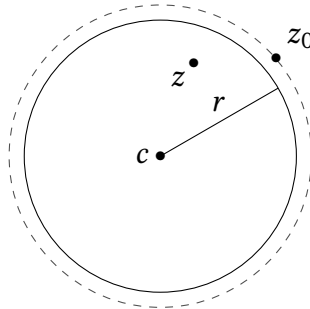


Figura 1.5: Ámbito de convergencia de una serie de potencias

*Notación.* Se designarán los discos circulares en  $\mathbb{C}$  así:

$$D(c; r) := \{ z \in \mathbb{C} : |z - c| < r \},$$

$$\overline{D}(c; r) := \{ z \in \mathbb{C} : |z - c| \leq r \}. \tag{I.11}$$

Aquí,  $D(c; r)$  es el **disco abierto** con centro  $c$  y radio  $r$ ;  $\overline{D}(c; r)$  es el **disco cerrado** con el mismo centro y radio.<sup>10</sup> Nótese que  $D(c; r) \subset \overline{D}(c; r) \subset D(c; s)$  toda vez que  $0 < r < s$ .

**Lema 1.7.** Si la serie de potencias (1.9) converge para algún  $z_0 \neq c$ , entonces esta serie también converge en el disco abierto  $\{ z \in \mathbb{C} : |z - c| < |z_0 - c| \}$ ; además, la convergencia es uniforme en cualquier disco cerrado  $\overline{D}(c; r)$  con  $0 < r < |z_0 - c|$ .

*Demostración.* La convergencia de la serie en  $z = z_0$  implica que  $a_n(z_0 - c)^n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces hay algún  $M > 0$  tal que  $|a_n(z_0 - c)^n| < M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Luego,

$$|a_n(z - c)^n| = |a_n(z_0 - c)^n| \left| \frac{(z - c)^n}{(z_0 - c)^n} \right| < M \left| \frac{z - c}{z_0 - c} \right|^n \text{ para todo } n.$$

Si  $|z - c| \leq r$  con  $r < |z_0 - c|$ , sea  $t := r/|z_0 - c| < 1$ . Entonces  $|a_n(z - c)^n| < M t^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . La convergencia de la serie geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} M t^n = M/(1 - t)$  y el Lema 1.5 implican que la serie de potencias (1.9) converge absoluta y uniformemente en el disco cerrado  $\{ z \in \mathbb{C} : |z - c| \leq r \}$ .

La unión de los discos cerrados  $\overline{D}(c; r)$ , para todo  $r$  con  $0 < r < |z_0 - c|$ , es el disco abierto  $\{ z \in \mathbb{C} : |z - c| < |z_0 - c| \}$ . Por tanto, la serie de potencias converge en este disco abierto, aunque su convergencia allí no sea necesariamente uniforme. (Véase el Ejercicio 1.13.) □

<sup>10</sup>Con frecuencia se usa el término *círculo* para denotar un disco cerrado circular, y *circunferencia* para referirse a su curva de borde. En estos apuntes, el vocablo **círculo** denotará únicamente la curva frontera de un disco circular. De igual manera, la palabra *elipse* denotará el perímetro (o la circunferencia!) de un disco elíptico.

**Proposición 1.8.** *La convergencia de una serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$  obedece exactamente una de estas tres posibilidades:*

- (a) *la serie converge para  $z = c$  solamente;*
- (b) *la serie converge para todo  $z \in \mathbb{C}$ ;*
- (c) *existe un número  $R$ , con  $0 < R < \infty$ , tal que la serie converge para  $|z - c| < R$  y diverge para  $|z - c| > R$ .*

En el tercer caso,  $R$  se llama el **radio de convergencia** de la serie de potencias.

*Demostración.* Si la serie no cumple las posibilidades (a) ni (b), existen  $z_0, z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$  tales que la serie converge en  $z = z_0$  pero diverge en  $z = z_1$ . Del Lema 1.7 queda claro que  $|z_1 - c| \geq |z_0 - c|$ .

El conjunto de radios  $S := \{r > 0 : \text{la serie converge para } |z - c| < r\}$  contiene  $|z_0 - c|$ , por el Lema 1.7, de modo que  $S \neq \emptyset$ . El mismo lema muestra que  $r \leq |z_1 - c|$  para todo  $r \in S$ , así que  $|z_1 - c|$  es una cota superior para  $S$ . Al definir  $R := \sup S$ , se obtiene

$$0 < |z_0 - c| \leq R \leq |z_1 - c| < \infty.$$

Si  $|z_2 - c| < R$ , entonces hay  $r \in S$  con  $|z_2 - c| < r < R$  y la serie converge para  $z = z_2$ . Por otro lado, si  $|z_3 - c| > R$ , entonces la serie diverge para  $z = z_3$ ; porque, de lo contrario, convergiría en el disco  $|z - c| < |z_3 - c|$ , por el Lema 1.7, lo cual implicaría  $|z_3 - c| \in S$ , contrario a la hipótesis de que  $|z_3 - c| > \sup S$ .  $\square$

[[ A veces se colocan  $R := 0$  en el caso (a) y  $R := \infty$  en el caso (b) de la Proposición 1.8 anterior. Estos dos “valores impropios” de  $R$  permiten hablar del radio de convergencia de una serie de potencias cualquiera. ]]

**Lema 1.9** (Hadamard). *El radio de convergencia  $R$  de la serie de potencias (1.9) está dado por la fórmula:*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}. \quad (1.12)$$

*Demostración.* Denótese por  $1/R'$  el lado derecho de (1.12). Hay que comprobar  $R = R'$ .

Es útil recordar que el *límite superior* de una sucesión real  $\{x_n\}$ , denotado por

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{k \rightarrow \infty} (\sup\{x_n : n \geq k\}),$$

satisface uno de (a):  $L = +\infty$  si  $\{x_n\}$  no está acotada superiormente; o bien (b): si  $\{x_n\}$  tiene cota superior, entonces para cada  $\varepsilon > 0$ , vale  $x_n < L + \varepsilon$  para todo  $n \geq N(\varepsilon)$  mientras  $x_m > L - \varepsilon$  para un juego infinito de valores de  $m$ .

Si  $|z - c| < r < R'$ , entonces  $1/r > 1/R'$ , es decir,  $\limsup_n |a_n|^{1/n} < 1/r$ . En ese caso, hay  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N \implies |a_n| < 1/r^n$ . En consecuencia,

$$\sum_{n \geq N} |a_n(z - c)^n| \leq \sum_{n \geq N} \frac{|z - c|^n}{r^n} = \frac{|z - c|^N}{r^N} \frac{r}{r - |z - c|} < \infty,$$

así la serie de potencias converge (absolutamente) en  $z$ , lo cual implica que  $|z - c| \leq R$ . Se ha comprobado que  $R' \leq R$ .

En cambio, si  $|z - c| > s > R'$ , entonces  $1/s < 1/R'$ , así que  $|a_m| > 1/s^m$  para  $m \in S$ , donde  $S$  es una *parte infinita* de  $\mathbb{N}$ . En este caso, vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z - c)^n| \geq \sum_{m \in S} |a_m(z - c)^m| \geq \sum_{m \in S} \frac{|z - c|^m}{s^m} \geq \sum_{m \in S} 1 = \infty,$$

así que la serie de potencias no converge absolutamente en  $z$ . Esto conlleva  $|z - c| \geq R$ . Se ha comprobado que  $R' \geq R$ .  $\square$

### Funciones analíticas

Una *función analítica* es una función representable por series de potencias en un vecindario de cada punto de su dominio. Eso significa, entre otras cosas, que el dominio de la función debe ser abierto.

**Definición 1.10.** Cabe recordar que una parte  $U$  de  $\mathbb{C}$  [respectivamente, de  $\mathbb{R}$ ] es un *conjunto abierto*, o simplemente un **abierto**, si  $U$  es una unión de discos abiertos [resp., de intervalos abiertos]. Dicho de otro modo:  $U$  es un abierto si para cada  $c \in U$ , hay una radio  $r > 0$  tal que  $|z - c| < r \implies z \in U$ .

Un abierto  $U \subset \mathbb{C}$  es *disconexo* si hay dos abiertos disjuntos y no vacíos,  $V$  y  $W$ , tales que  $U = V \uplus W$  (unión disjunta). Por el contrario, el abierto  $U$  es **conexo** si no es desconexo. En particular, si  $A \subseteq U$  es a la vez abierto y cerrado en  $U$ , entonces o bien  $A = \emptyset$  o bien  $A = U$ .

Una **región** de  $\mathbb{C}$  es un *conjunto abierto y conexo*  $U \subseteq \mathbb{C}$ . Desde luego, un disco abierto  $D(c; r)$  es una región.

Un abierto  $U \subseteq \mathbb{C}$  es **conexo por caminos** si, para cada par de puntos  $z \neq w$  en  $U$ , hay una función continua  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  tal que  $\gamma(a) = z$ ,  $\gamma(b) = w$ . Un resultado de topología garantiza que un abierto de  $\mathbb{C}$  es conexo si y sólo si es conexo por caminos. Entonces toda región  $U$  de  $\mathbb{C}$  es conexo por caminos.  $\diamond$

Salvo que se indique explícitamente lo contrario, el dominio  $U$  de toda función analítica considerada en este curso será una *región* de  $\mathbb{C}$ .

**Definición 1.11.** Si la serie de potencias

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

tiene radio de convergencia  $R > 0$ , la suma de la serie define una **función analítica**  $f: D(c; R) \rightarrow \mathbb{C}$  en su disco abierto de convergencia.<sup>11</sup> En el caso  $R = \infty$ , dicese que  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una **función analítica entera**, o simplemente una *función entera*.

Si  $U \subseteq \mathbb{C}$  es una región, una función  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  es una **función analítica en  $U$**  si para cada  $c \in U$  hay un radio  $r > 0$  tal que  $D(c; r) \subseteq U$ , tal que  $f$  coincide con la suma de una serie de potencias centrado en  $c$  y convergente en  $D(c; r)$ .  $\diamond$

[[ Esta definición de función analítica es aplicable también para funciones definidas en abiertos de la recta real  $\mathbb{R}$ . Si  $V \subseteq \mathbb{R}$  es abierto, una función  $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ , o bien  $g: V \rightarrow \mathbb{C}$  es *analítica en  $V$*  si para cada  $c \in V$ ,  $g$  coincide con la suma de una serie de potencias convergente en el intervalo  $(c - r, c + r)$  para algún  $r > 0$  (que puede depender de  $c$ ). Para distinguir los casos, se refiere a  $g$  como una *función analítica real*. ]]

Cualquier **polinomio**  $p(z) := a_0 + a_1z + \dots + a_mz^m$  es una función analítica entera, de oficio. El mayor índice  $n$  tal que  $a_n \neq 0$  es el *grado* del polinomio  $p$ . A continuación se ofrecen algunos ejemplos con series de potencias no terminantes.

**Ejemplo 1.12.** La **función exponencial** se define como la suma de la serie de potencias

$$\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{1.13}$$

La convergencia absoluta de esta serie es una consecuencia del *criterio de la razón* para series reales positivas, porque para cada  $z \in \mathbb{C}$ , se ve que

$$\frac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

El Lema 1.7 garantiza que exp es una función analítica entera. El producto de dos valores de esta serie es

$$\begin{aligned} (\exp z)(\exp w) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k! l!} z^k w^l = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z + w)^n = \exp(z + w) \end{aligned}$$

<sup>11</sup>La definición es incompleta, porque falta mostrar que esta  $f$  admite *otras expansiones convergentes*  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$  para otros  $z_0 \neq c$  en  $D(c; R)$ . Esta seguirá de la Proposición 1.20, más abajo.

con el uso del teorema binomial. (El cambio del orden de sumación se justifica por la convergencia absoluta de ambos lados.) Se deduce que esta función entera obedece la regla multiplicativa:

$$\exp(z + w) = (\exp z)(\exp w) \quad \text{para todo } z, w \in \mathbb{C}. \quad (1.14)$$

El número positivo

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

entonces satisface  $\exp(m) = e^m$  para  $m \in \mathbb{Z}$ . Si  $n \in \mathbb{N}$  con  $n > 0$ , entonces  $(\exp(1/n))^n = \exp(1) = e$  y por ende  $\exp(1/n) = e^{1/n}$ . Luego  $\exp(q) = \exp(m/n) = (e^{1/n})^m = e^q$  para  $q = m/n \in \mathbb{Q}$ . Esto motiva la notación:

$$e^z := \exp z \quad \text{para cualquier } z \in \mathbb{C}.$$

Con esta notación, la “ley de exponentes” (1.14) se escribe como  $e^{z+w} = e^z e^w$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.13.** Las funciones trigonométricas **coseno** y **seno** se definen mediante las dos series de potencias

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \text{sen } z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Nuevamente, el criterio de la razón demuestra la convergencia absoluta de las dos series para todo  $z \in \mathbb{C}$ ; tanto el coseno como el seno es una función entera.

Es evidente que

$$\cos z + i \text{sen } z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m} z^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m+1} z^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} = \exp(iz).$$

En particular, la fórmula (1.5), que dice que  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \text{sen } \theta$ , para  $\theta \in \mathbb{R}$  queda demostrada *a posteriori*; más aun, dicha fórmula ahora es válida para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

Las funciones trigonométricas también pueden expresarse en términos de la función exponencial, así:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \text{sen } z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad \diamond$$

**Ejemplo 1.14.** La serie geométrica

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

tiene radio de convergencia  $R = 1$ .

En efecto, como  $a_n = 1$  para todo  $n$ , la fórmula de Hadamard (1.12) implica que  $1/R = 1$ . La función racional  $1/(1 - z)$  es entonces analítica en el disco unitario  $D(0; 1)$  y posee una singularidad evidente en  $z = 1$  donde la serie diverge.

La fracción  $1/(1 - z)$  no parece ser singular para  $|z| > 1$ , pero en esta región no podría representarse por la misma serie. En el disco  $D(2; 1)$ , por ejemplo, habría que expresar esta fracción como una función de  $(z - 2)$ :

$$\frac{1}{1 - z} = \frac{-1}{1 + (z - 2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z - 2)^n.$$

Esta nueva serie de potencias también tiene radio de convergencia  $R = 1$  y luego converge para  $|z - 2| < 1$ . La misma función racional  $1/(1 - z)$  es analítica en los dos discos abiertos  $D(0; 1)$  y  $D(2; 1)$ , aunque los dos desarrollos en series de potencias son diferentes.

Se puede comprobar así que  $z \mapsto 1/(1 - z)$  es analítica en el dominio  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.15. La serie logarítmica**

$$\log(1 + z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \tag{1.15}$$

también tiene radio de convergencia  $R = 1$ . De hecho, obsérvese que la serie converge para  $z = +1$  (por el criterio de Leibniz para una serie real alternante) pero diverge en  $z = -1$  (la serie armónica); se deduce que  $R \geq 1$  y  $R \leq 1$ , respectivamente, así que  $R = 1$ . La fórmula de Hadamard (1.12) entonces produce el corolario interesante:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1. \tag{1.16}$$

[De hecho, la fórmula (1.12) implica que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ ; pero como la sucesión  $\{n^{1/n}\}$  es decreciente para  $n \geq 3$ , el límite existe y coincide con el límite superior.]

La misma serie de potencias define la siguiente función analítica en el disco  $D(1; 1)$ ,

$$\log z := - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - z)^n}{n}.$$

Del análisis real, se sabe que para  $z > 0$  real, esta serie coincide con la serie de Taylor de la función inversa de la exponencial. Sin embargo, las fórmulas conocidas para el logaritmo no son fácilmente deducibles de esta serie de potencias.  $\diamond$

► Una propiedad importante de una serie de potencias es su *diferenciabilidad término por término*, dentro de su disco de convergencia.

**Proposición 1.16.** Para cualquier serie de potencias con radio de convergencia  $R > 0$ ,

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n,$$

sea  $f'(z)$  la siguiente serie de potencias:

$$\boxed{f'(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - c)^{n-1}} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} (z - c)^m. \quad (1.17)$$

Entonces la serie  $f'(z)$  tiene el mismo radio de convergencia  $R$ .

Además, dentro del disco abierto  $D(c; R)$  la siguiente relación es válida:

$$\boxed{f'(z) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}}. \quad (1.18)$$

La función analítica  $f'$  definida por (1.17) se llama la **derivada** de  $f$ .

*Demostración.* Como  $n^{1/n} \rightarrow 1$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , en vista de (1.16), la fórmula de Hadamard muestra que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |n a_n|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R},$$

donde  $R$  es el radio de convergencia de la serie  $f(z)$ . Esta igualdad es válida en casos  $0 < R < \infty$  y también cuando  $R = \infty$ . Entonces la serie de potencias (1.17) tiene el mismo ámbito de convergencia, sea este el disco abierto  $D(c; R)$ ; o bien el plano  $\mathbb{C}$ .

Para comprobar la relación (1.18), tómesese  $z_0 \in D(c; R)$  y elíjase  $r$  tal que  $|z_0 - c| < r < R$ . Sea  $w \neq 0$  en  $\mathbb{C}$  tal que  $|(z_0 + w) - c| < r$ . Para  $N \in \mathbb{N}$ , las serie de potencias  $f(z)$  escinde en una suma parcial  $s_N$  y una cola  $t_N$ , así:

$$f(z) \equiv s_N(z) + t_N(z) := \sum_{n=0}^N a_n (z - c)^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n (z - c)^n.$$

Sea  $s'_N(z) := \sum_{n=1}^N n a_n (z - c)^{n-1}$  la suma parcial correspondiente de la derivada  $f'$ . Entonces

$$\begin{aligned} & \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} - f'(z_0) \\ &= \left( \frac{s_N(z_0 + w) - s_N(z_0)}{w} - s'_N(z_0) \right) + (s'_N(z_0) - f'(z_0)) + \left( \frac{t_N(z_0 + w) - t_N(z_0)}{w} \right). \end{aligned}$$

La fórmula binomial finita

$$z^n - w^n = (z - w)(z^{n-1} + z^{n-2}w + \dots + zw^{n-2} + w^{n-1})$$

y las condiciones  $|(z_0 + w) - c| < r$ ,  $|z_0 - c| < r$  muestran que

$$\left| \frac{t_N(z_0 + w) - t_N(z_0)}{w} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left| \frac{(z_0 + w - c)^n - (z_0 - c)^n}{w} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| nr^{n-1}.$$

El lado derecho de esta desigualdad es la cola de una serie positiva convergente, ya que la serie de potencias  $f'(z)$  converge *absolutamente* en el disco cerrado  $\overline{D}(c; r)$ . Entonces esta cola tiende a 0 cuando  $N \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, dado  $\varepsilon > 0$ , hay  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$N \geq N_1 \implies \left| \frac{t_N(z_0 + w) - t_N(z_0)}{w} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

La convergencia de la serie  $f'(z_0)$  dice que  $s'_N(z_0) \rightarrow f'(z_0)$  cuando  $N \rightarrow \infty$ ; luego, hay  $N_2 \in \mathbb{N}$  tal que

$$N \geq N_2 \implies |s'_N(z_0) - f'(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tómese  $N \in \mathbb{N}$  fijo, con  $N \geq \max\{N_1, N_2\}$ . La prueba tradicional para verificar la derivada de un polinomio muestra que hay  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |w| < \delta \implies \left| \frac{s_N(z_0 + w) - s_N(z_0)}{w} - s'_N(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces, dado  $\varepsilon > 0$  hay  $\delta > 0$  con  $\delta < r - |z_0 - c|$  (condición suficiente para que  $|w| < \delta$  implique  $|z_0 + w| < r$ ) tal que

$$0 < |w| < \delta \implies \left| \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} - f'(z_0) \right| < \varepsilon. \tag{1.19}$$

Se ha comprobado la existencia y el valor del límite (1.18) para  $z = z_0$ . Como  $z_0$  es un punto cualquiera de  $D(c; R)$ , la relación (1.18) es válida en este disco abierto – o bien en todo  $\mathbb{C}$ , en el caso  $R = \infty$ . □

**Proposición 1.17.** *Una serie de potencias  $f(z)$ , con radio de convergencia  $R > 0$ , es indefinidamente diferenciable (o suave) en su disco de convergencia. Las derivadas sucesivas  $f'(z)$ ,  $f''(z)$ ,  $f'''(z)$ , etcétera, se obtienen por diferenciación término por término de la serie de potencias original.*

*Demostración.* La prueba de la Proposición 1.16 muestra que la derivada de la serie de potencias  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - c)^n$  es la serie de potencias  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - c)^{n-1}$ , obtenido por diferenciación término por término de  $f(z)$ . Además, la serie derivada posee el mismo radio de convergencia  $R$ .

Considérese, entonces, la serie de potencias (1.17) para  $f'(z)$ . El mismo argumento muestra que esta serie es también diferenciable, con derivada

$$f''(z) := \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n (z-c)^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2} (z-c)^m.$$

Además, la serie para  $f''(z)$  converge también en  $D(c; R)$ ; así que  $f$  es dos veces diferenciable en este disco abierto. La existencia de derivadas superiores sigue por inducción.  $\square$

En conclusión: *una función analítica es suave*. (Las mismas pruebas, con pequeños ajustes de terminología, muestran que una función analítica de una variable *real* es también suave en un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ ). Sin embargo, aunque hay muchas funciones suaves reales que no son analíticas, se verá más adelante que una función diferenciable de una variable compleja es siempre suave y analítica también.

► Amén de ser suaves, las funciones analíticas tienen otra propiedad de gran importancia: tienen **ceros aislados**. Específicamente, una serie de potencias  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-c)^n$  con  $a_0 = 0$ , cumple  $f(c) = 0$  (esto es, el punto  $c$  es un **cero** de la función  $f$ ), y hay un disco abierto  $D(c; R)$  en el cual *no hay otro cero* de esa función  $f$ . Este es el resultado de la proposición siguiente.

**Proposición 1.18.** *Si la serie de potencias  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$  tiene radio de convergencia  $R > 0$ , y si al menos un coeficiente  $a_k$  no es cero, hay un número  $r$  con  $0 < r < R$  tal que  $f(z) \neq 0$  para  $0 < |z-c| < r$ .*

*Demostración.* Sea  $k \in \mathbb{N}$  el menor índice tal que  $a_k \neq 0$ ; entonces

$$f(z) := \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-c)^n = (z-c)^k \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k} (z-c)^m =: (z-c)^k \underline{g(z)}.$$

El radio de convergencia de la serie de potencias  $g(z)$  es igual a  $R$ , porque las series de  $f(z)$  y  $g(z)$  convergen para los mismos valores de  $z$ . Luego  $|g(z)|$  es una función *continua* en el disco  $D(c; R)$ , con  $|g(c)| = |a_k| > 0$ . Por tanto, hay un radio  $r$  con  $0 < r < R$  tal que  $|g(z)| > 0$  para  $z \in D(c; r)$ . Entonces  $f(z) = (z-c)^k g(z) \neq 0$  para  $z \in D(c; r) \setminus \{c\}$ .  $\square$

**Corolario 1.19.** *La serie de potencias centrada en  $c$  que representa una función analítica en un disco abierto  $D(c; R)$  es única.*

*Demostración.* Si  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n$  es una función analítica representada por dos series de potencias – ambas centradas en  $c$  – en un disco  $D(c; R)$ , entonces la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) (z-c)^n$  converge en  $D(c; R)$  y es idénticamente nula. La Proposición 1.18 implica (por su contrapositiva) que  $a_n = b_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Sea  $f$  una función analítica definida por una serie de potencias (1.9), centrada en  $c$  y con radio de convergencia  $R > 0$ . Si  $k \in \mathbb{N}$ , la Proposición 1.17 dice que  $f$  es  $k$  veces diferenciable, con  $k$ -ésima derivada

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (z-c)^{n-k}.$$

Al evaluar esta serie en  $z = c$ , se obtiene  $f^{(k)}(c) = k! a_k$ . Los coeficientes de la serie de potencias original quedan determinadas por las derivadas superiores de  $f$  en  $z = c$ :

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}. \tag{1.20}$$

Así, se puede reexpresar la función analítica  $f$  mediante una **serie de Taylor**:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (z-c)^n \tag{1.21}$$

que converge, con suma igual a  $f(z)$ , en el disco abierto  $D(c; R)$ .

► Los resultados anteriores sobre funciones analíticas usan series de potencias referidas a un solo centro  $c$ . Afortunadamente, la serie de potencias (1.9) define una función que admite otras expansiones convergentes en cada punto de su disco de convergencia.

**Proposición 1.20.** *Sea  $f$  la función definida por la serie de potencias  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$  con radio de convergencia  $R > 0$ . Entonces, si  $z_0 \in D(c; R)$ ,  $f$  posee una serie de potencias convergente centrada en  $z_0$ , con radio de convergencia no menor que  $R - |z_0 - c|$ .*

*Demostración.* Por la unicidad de una serie de potencias convergente, del Corolario 1.19, se trata de comparar dos series de Taylor, con la ayuda del teorema binomial:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (z - z_0 + z_0 - c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (z - z_0)^k (z_0 - c)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m+k)}(c)}{m!} (z_0 - c)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k. \end{aligned}$$

La serie con índice de sumación  $m$  es la serie de Taylor de  $f^{(k)}(z)$  centrada en  $c$  y evaluada en  $z_0$ ; al ser  $z_0 \in D(c; R)$ , esta serie de Taylor converge a  $f^{(k)}(z_0)$ .

Para justificar el intercambio de las sumaciones, en vista de que

$$\left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (z - z_0)^k (z_0 - c)^{n-k} \right| \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |z - z_0|^k |z_0 - c|^{n-k} = (|z - z_0| + |z_0 - c|)^n,$$

es suficiente que  $|z - z_0| + |z_0 - c| < R$  para que la primera suma doble converja absolutamente. Esto está garantizada si  $|z - z_0| < r := R - |z_0 - c|$ . (Véase la Figura 1.6.)  $\square$

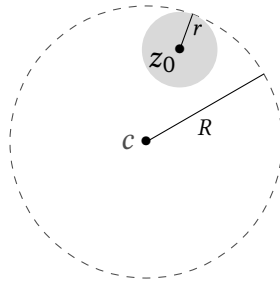


Figura 1.6: Una serie de potencias convergente es analítica

### 1.3. Las ecuaciones de Cauchy y Riemann

La fórmula (1.18) en el enunciado de la Proposición 1.16 motiva la definición de una *función diferenciable* en  $\mathbb{C}$ . A primera vista, la formulación de ese concepto es exactamente paralela al caso de funciones de una variable real.

**Definición 1.21.** Sea  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  una función definida en una región  $U \subseteq \mathbb{C}$ ; sean  $z_0 \in U$  y  $r > 0$  tales que  $D(z_0; r) \subseteq U$ . Si el límite  $c := \lim_{w \rightarrow 0} (f(z_0 + w) - f(z_0))/w$  existe, se dice que  $f$  es **diferenciable en  $z_0$** , con **derivada**  $f'(z_0) = c$ . La existencia del límite significa que, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta$  con  $0 < \delta \leq r$  tal que la relación (1.19) es válida.

Si ese límite  $f'(z_0)$  existe para cada  $z_0 \in U$ , se dice que  $f$  es **diferenciable en  $U$** .

Si  $f$  es diferenciable en  $U$ , es fácil comprobar que  $\lim_{w \rightarrow 0} (f(z + w) - f(z)) = 0$ ; o sea,  $\lim_{w \rightarrow 0} f(z + w) = f(z)$ , para todo  $z \in U$ . Esto muestra que una función diferenciable en  $U$  es también *continua en  $U$* .

Si  $f$  es diferenciable en  $U$ , la fórmula (1.18) define una nueva función  $f': U \rightarrow \mathbb{C}$ , llamada la **derivada de  $f$** . Si esta  $f'$  es continua en  $U$ , la función  $f$  es *continuamente diferenciable* en  $U$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.22.** La función  $z \mapsto \bar{z}$  no es diferenciable en punto alguno de  $\mathbb{C}$ ; y por consiguiente, esta función tampoco es analítica.

Escríbese  $g(z) := \bar{z}$ . Se debe mostrar que, para cualquier  $z_0 \in \mathbb{C}$ , el límite

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{g(z_0 + w) - g(z_0)}{w} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{(\bar{z}_0 + \bar{w}) - \bar{z}_0}{w} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\bar{w}}{w}$$

no existe.

Al expresar  $w =: s e^{i\varphi}$  en forma polar, con  $s > 0$ ; se ve que  $\bar{w} = s e^{-i\varphi}$ . Luego, el límite putativo para obtener  $g'(z_0)$  sería

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{\bar{w}}{w} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{s e^{-i\varphi}}{s e^{i\varphi}} = \lim_{w \rightarrow 0} e^{-2i\varphi}.$$

Se busca, entonces, un número  $c \in \mathbb{C}$  tal que, para cualquier  $\varepsilon > 0$  dado, se cumpla  $|e^{-2i\varphi} - c|$  toda vez que  $|w| < \delta(\varepsilon)$ , es decir, toda vez que  $s < \delta(\varepsilon)$ . Aquí, sin embargo,  $e^{-2i\varphi}$  es un número complejo arbitrario sujeto únicamente a la relación  $|e^{-2i\varphi}| = 1$ ; ninguna condición sobre  $s$  resuelve esa ambigüedad. Es decir, no hay candidato  $c$  alguno para la derivada de  $g$  en  $z_0$ .  $\diamond$

El ejemplo anterior pone de manifiesto que la *diferenciabilidad compleja* de una función  $f(z)$  no coincide con la *diferenciabilidad real* de la función de dos variables reales  $F(x, y) := f(x + iy)$ . Conviene precisar esta diferencia entre los dos conceptos.<sup>12</sup>

*Notación.* Si  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$  es una función definida en  $E \subseteq \mathbb{C}$ , se escribe

$$f(z) \equiv \underline{f(x + iy)} =: u(x, y) + i v(x, y) = \Re f(x, y) + \Im f(x, y), \quad (\text{I.22})$$

donde  $\Re f \equiv u: E \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\Im f \equiv v: E \rightarrow \mathbb{R}$  son, respectivamente, la **parte real** y la **parte imaginaria** de la función compleja  $f$ .

**Proposición 1.23.** *Si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  es una función diferenciable en una región  $U \subseteq \mathbb{C}$ , sus partes real e imaginaria,  $u$  y  $v$ , son funciones diferenciables reales, cuyas derivadas parciales cumplen las ecuaciones de Cauchy y Riemann:*

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.} \quad (\text{I.23})$$

*Inversamente, si  $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones diferenciables cuyas derivadas parciales cumplen (I.23), entonces  $f(x + iy) := u(x, y) + i v(x, y)$  define una diferenciable en  $U$ .*

*Demostración.* Si  $f$  es diferenciable en  $z_0 \in U$ , con derivada  $f'(z_0) = a + ib \in \mathbb{C}$ , entonces se verifica

$$f(z_0 + w) - f(z_0) = f'(z_0) w + o(w),$$

donde  $o(w)$  denota<sup>13</sup> alguna función de  $w$  tal que  $o(w)/w \rightarrow 0$  cuando  $w \rightarrow 0$ . Al tomar  $w =: h + ik$  con  $h, k$  reales, se obtiene

$$f(z_0 + w) - f(z_0) = (a + ib)(h + ik) + o(w). \quad (\text{I.24a})$$

<sup>12</sup>La noción de *continuidad* es la misma en  $\mathbb{C}$  y en  $\mathbb{R}^2$ , pues sus topologías métricas coinciden: un abierto no vacío tanto en  $\mathbb{C}$  como en  $\mathbb{R}^2$  es una unión de discos abiertos  $D(c; r)$  con  $r > 0$ .

<sup>13</sup>Cuando se emplea esta **notación de Landau**, el término  $o(w)$  denota *cualquier* función que cumple la condición mencionada; en el transcurso de un cálculo pueden emplearse varias instancias de tales funciones, pero todos reciben la misma designación  $o(w)$ .

Las partes real e imaginaria de esta igualdad son

$$\begin{aligned} u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) &= ah - bk + o(\sqrt{h^2 + k^2}), \\ v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) &= bh + ak + o(\sqrt{h^2 + k^2}). \end{aligned} \quad (1.24b)$$

Se concluye que las funciones  $u$  y  $v$  son diferenciables en el punto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Al considerar los dos casos  $k = 0$  y  $h = 0$  por separado, las derivadas parciales de  $u$  y  $v$  cumplen:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) = a, \quad v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0) = b.$$

Entonces las ecuaciones son válidas en  $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ .

Inversamente, si  $u$  y  $v$  son diferenciables en  $(x_0, y_0)$  y si sus derivadas parciales cumplen (1.23) en ese punto, esto significa que existen  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que las condiciones de diferenciabilidad (1.24b) estén satisfechos. Con la notación  $f := u + iv$ , se obtiene (1.24a), que dice que  $f$  es diferenciable en  $z_0 = x_0 + iy_0$ , con derivada  $a + ib$  en ese punto.  $\square$

Cabe recordar que la diferenciabilidad de una función real  $u$  no sigue de la existencia de sus derivadas parciales  $u_x, u_y$  en cada punto  $(x_0, y_0)$  de su dominio, porque eso no garantiza una estimación del tipo (1.24b). Sin embargo, si  $u_x, u_y$  existen y son continuas en el dominio de  $u$ , entonces  $u$  sí es diferenciable en cada punto, sin necesidad de verificar la estimación. En tal caso, se dice que  $u$  es *continuamente diferenciable* (o bien *de clase  $C^1$* ). Ahora, si tanto  $u$  como  $v$  son continuamente diferenciables en una región  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  y además cumplen (1.23) en  $U$ , entonces  $f$  es diferenciable en  $U$  y su derivada  $f'$  es continua.

**Definición 1.24.** Una función  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ , definida en una región  $U \subseteq \mathbb{C}$ , es una **función holomorfa** en  $U$  si  $f'(z)$  existe para todo  $z \in U$ . (Así, para funciones complejas de una variable compleja, los términos *diferenciable* y *holomorfo* son sinónimos.)

Es una consecuencia del teorema de Cauchy y Goursat, que se verá en el próximo capítulo, que la derivada  $f'(z)$  es continua (y diferenciable). En el ínterin, se agregará la hipótesis de la continuidad de la derivada cuando sea oportuna.  $\diamond$

► La conjugación compleja no es holomorfa, ya que no es diferenciable. Es evidente que la función  $z \mapsto \bar{z}$  incumple las ecuaciones de Cauchy y Riemann (1.23), puesto que  $u(x, y) = x$ ,  $v(x, y) = -y$  en este caso. De hecho, para este ejemplo se verifican las relaciones  $u_x = -v_y$ ,  $v_x = u_y$  entre las derivadas parciales, en contraste con (1.23). Esto motiva la siguiente notación.

*Notación.* Sea  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  una función compleja tales que  $u, v$  son continuamente diferenciables en una región  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ . (No se pide que satisfagan las ecuaciones de Cauchy y Riemann.) Escribáse

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (1.25a)$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (1.25b)$$

El caso  $f(z) = z = x + iy$  cumple  $\partial f / \partial z = 1$ ,  $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ ; mientras  $g(z) = \bar{z} = x - iy$  cumple  $\partial g / \partial z = 0$ ,  $\partial g / \partial \bar{z} = 1$ ; así se explica la elección de los signos en las fórmulas encajadas.

Obsérvese que, con esta notación, las ecuaciones de Cauchy y Riemann se combinan en una sola ecuación:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0,$$

sin mención explícita de la partes real e imaginaria.

Al notar que  $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ,  $y = \frac{i}{2}(\bar{z} - z)$ , queda claro que cualquier función  $F(x, y)$  también puede escribirse como una función  $G(z, \bar{z})$ . Algo que distingue las series de potencias ya vistas es la ausencia de la variable  $\bar{z}$ . Dicha ausencia implica que cada uno de los términos  $a_n(z - c)^n$  cumple las ecuaciones de Cauchy y Riemann; como la suma de la serie de potencias es diferenciable término por término (en el sentido real), estas ecuaciones también están satisfechas por esa suma.

## 1.4. Algunas funciones holomorfas

**Ejemplo 1.25.** Los ejemplos más obvias de funciones son los **polinomios**

$$\boxed{p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n.}$$

El mayor índice  $n$  tal que  $a_n \neq 0$  es el **grado** de este polinomio.

Como series de potencias terminantes, los polinomios son funciones analíticas enteras, e *ipso facto* son funciones holomorfas en todo el plano  $\mathbb{C}$ . Un resultado básico, cuya demostración aparecerá más adelante, es el llamado *teorema fundamental del álgebra*: que un polinomio no constante  $p$  tiene al menos una raíz  $\alpha_1 \in \mathbb{C}$  tal que  $p(\alpha_1) = 0$ .

El algoritmo de “división larga” de polinomios produce un (único) polinomio  $p_1(z)$ , de grado  $n - 1$ , tal que<sup>14</sup>

$$p(z) = (z - \alpha_1) p_1(z).$$

<sup>14</sup>Esta observación algebraica se conoce como el *teorema del factor*. Un polinomio constante no nulo tiene grado 0; el grado del polinomio constante 0 no se define.

Si este cociente  $p_1(z)$  tampoco es constante (es decir, si  $n \geq 2$ ), entonces el polinomio  $p_1$  posee una raíz  $\alpha_2$ ; y en consecuencia,  $p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)p_2(z)$ . Al repetir el argumento  $n$  veces, se obtiene la *factorización* (única) de  $p$ ,

$$p(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n), \tag{1.26}$$

donde las raíces  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  no necesariamente son distintas.

Dícese que  $\alpha \in \mathbb{C}$  es un **cero** de una función  $f$  si  $f(\alpha) = 0$ . Los ceros de un polinomio  $p$  son sus raíces, listados sin repetición. El *orden* de un cero  $\alpha$  es el número de veces (al menos 1) que el factor  $(z - \alpha)$  aparece en el producto (1.26). Dícese que  $\alpha$  es un **cero simple** si su orden es 1; en cuyo caso,  $p(z) = (z - \alpha)p_1(z)$  donde  $p_1(\alpha) \neq 0$ . Por derivación, se obtiene  $p'(z) = p_1(z) + (z - \alpha)p_1'(z)$ , así que  $p'(\alpha) = p_1(\alpha) \neq 0$ . En cambio, si  $\beta$  es un cero de orden 2 o mayor, entonces  $p(z) = (z - \beta)^2 p_2(z)$  y luego  $p'(\beta) = 0$ . En breve:  $\alpha$  es un cero simple de  $p$  si y solo si  $p(\alpha) = 0$  con  $p'(\alpha) \neq 0$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.26.** El cociente de dos polinomios es una **función racional**,

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} := \frac{a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n}{b_0 + b_1z + \cdots + b_mz^m} \tag{1.27}$$

donde se supone, sin perder generalidad, que los polinomios  $p$  y  $q$  no poseen un factor común  $(z - \alpha)$ ; y por lo tanto, no tienen ceros en común. Los ceros de  $f$  son los ceros del numerador  $p$ . Los ceros del denominador  $q$  se llaman **polos** de la función racional  $f$ ; el orden de un polo  $\beta$  de  $f$  es su orden como cero de  $q$ .

En primera instancia, se puede excluir los polos del dominio de  $f$ . En el resto del plano  $\mathbb{C}$ , la función racional  $f(z)$  es continuamente diferenciable, con derivada

$$f'(z) = \frac{p'(z)q(z) - p(z)q'(z)}{q(z)^2},$$

la cual es otra función racional. Si  $\beta$  es un polo de  $f$  de orden  $k$ , entonces  $(z - \beta)^{k-1}$  divide el numerador del lado derecho mientras  $(z - \beta)^{2k}$  divide  $q(z)^2$ : luego,  $\beta$  es un polo de  $f'$  de orden  $k + 1$ .

En un polo  $\beta$  de  $f$ , vale  $q(\beta) = 0$  mientras  $p(\beta) \neq 0$ . Entonces tiene sentido definir  $f(\beta) := \infty$ . Al hacerlo (y al incluir los polos ahora en el dominio de  $f$ ), se está considerando  $f$  como una función  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ . Pero ya es apropiado *extender el dominio de  $f$  a toda la esfera de Riemann*, al colocar

$$f(\infty) := g(0), \quad \text{donde } g(z) \equiv f(1/z).$$

Dícese que  $f$  tiene un *cero en  $\infty$* , de orden  $k$ , si  $g$  tiene un cero en 0 de orden  $k$ ; y que  $f$  tiene un *polo en  $\infty$* , de orden  $l$ , si  $g$  tiene un polo en 0 de orden  $l$ . (En particular, un polinomio  $p$  de grado  $n$  tiene un polo de orden  $n$  en  $\infty$ .)  $\diamond$

**Lema 1.27.** Una función racional  $f(z) = p(z)/q(z)$  se extiende a una función continua  $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ , de manera que la función extendida tiene igual número de ceros y de polos (contados con multiplicidad).<sup>15</sup>

*Demostración.* Al hacer el cambio  $z \mapsto 1/z$  en (1.27), se obtiene

$$g(z) = f(1/z) = z^{m-n} \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}.$$

Si  $m > n$ ,  $g(z)$  tiene un cero de orden  $m - n$  en 0 (porque  $a_n/b_m \neq 0$ ), así que  $f$  tiene un cero de orden  $m - n$  en  $\infty$ , amén de  $n$  ceros finitos (los ceros de  $p$ ) y  $m$  polos finitos (los ceros de  $q$ ), contados con multiplicidad.

Si  $m < n$ ,  $g(z)$  tiene un polo de orden  $n - m$  en 0, así que  $f$  tiene un polo de orden  $n - m$  en  $\infty$ , amén de sus  $n$  ceros finitos y  $m$  polos finitos, contados con multiplicidad.

Si  $m = n$ , entonces  $f(\infty) = g(0) = a_n/b_m \in \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}_\infty \setminus \{0, \infty\}$ , así que  $f$  no tiene cero ni polo en  $\infty$ . Contando con multiplicidad,  $f$  tiene  $m = n$  polos finitos y  $n$  ceros finitos.

En los tres casos, el número total de polos y de ceros es  $\max\{m, n\}$ .

La continuidad de  $f$  en  $z_0$  es evidente si  $z_0$  no es un polo y si  $z_0 \neq \infty$ . Para estos casos excepcionales, se debe recordar que un vecindario básico de  $\infty$  en  $\mathbb{C}_\infty$  es un abierto de la forma  $\{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ . Basta notar, entonces, que  $|f(z)| \rightarrow \infty$  cuando  $z$  tiende a un cero de  $q(z)$ ; y que  $f(z) \rightarrow g(0)$  cuando  $1/z \rightarrow 0$ .  $\square$

**Definición 1.28.** El **orden** de una función racional es el número de sus ceros, o equivalentemente el número de sus polos, *contados con multiplicidad*, en el plano extendido  $\mathbb{C}_\infty$ .

Una función racional de orden 1 es una **transformación lineal fraccional**<sup>16</sup>

$$s(z) := \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con} \quad ad - bc \neq 0. \quad (1.28)$$

Nótese que  $s(0) = b/d$  mientras  $s(\infty) = a/c$ .  $\diamond$

Entre estas transformaciones, aparecen:

- $\diamond$  las **traslaciones** del plano  $\mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z + b$  (obsérvese que  $\infty \mapsto \infty$ );
- $\diamond$  las **rotaciones con dilatación** alrededor del origen,  $z \mapsto az$  (fíjese que  $0 \mapsto 0$ );
- $\diamond$  la **inversión**  $z \mapsto 1/z$  (nótese que  $0 \leftrightarrow \infty$ ).

<sup>15</sup>Es decir: un cero o polo de orden  $k$  se cuenta  $k$  veces.

<sup>16</sup>Esta terminología es tradicional; pero cabe notar que esta función *no es lineal* en el sentido de los espacios vectoriales, salvo si  $b = c = 0$ .

Es fácil comprobar que la composición de dos transformaciones lineales fraccionales es otra de la misma clase; y que cualquier transformación lineal fraccional es una composición de estos tres tipos básicos. Obsérvese que la transformación

$$t(w) := \frac{dw - b}{-cw + a}$$

es una *función inversa* de (1.28), porque

$$w = s(z) \iff z = t(w).$$

Cabe notar que  $t(b/d) = 0$  y que  $t(a/c) = (ad - bc)/0 = \infty$ ; mientras  $t(0) = -b/a$ ,  $s(-b/a) = 0$ ; y que  $t(\infty) = -d/c$ ,  $s(-d/c) = \infty$ . Entonces  $s: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  es una biyección. (Como  $s$  y  $t$  son funciones inversas continuas, cada fracción lineal establece un homeomorfismo de la esfera de Riemann  $\mathbb{C}_\infty$  en sí mismo.)

La condición  $ad - bc \neq 0$  advierte que la parametrización de  $s(z)$  tiene cierta redundancia: al eliminar un factor común, se podría exigir que  $ad - bc = 1$ . Entonces la totalidad de fracciones lineales depende de *tres* parámetros complejos. Para determinar una fracción lineal, debería ser suficiente precisar sus valores en tres puntos distintos de  $\mathbb{C}_\infty$ .

**Ejemplo 1.29.** Si  $z_2, z_3, z_4$  son tres puntos distintos de  $\mathbb{C}_\infty$ , hay una única transformación lineal fraccional  $s$  tal que  $s(z_2) = 1$ ,  $s(z_3) = 0$ ,  $s(z_4) = \infty$ .

De la fórmula (1.28) se ve que si  $s(0) = 0$ , entonces  $b = 0$ ; si  $s(\infty) = \infty$ , entonces  $c = 0$ ; y si  $s(1) = 1$ , entonces  $a + b = c + d$ . Por lo tanto,

$$\left. \begin{array}{l} s(0) = 0 \\ s(1) = 1 \\ s(\infty) = \infty \end{array} \right\} \implies s(z) \equiv z.$$

Ahora si  $r, t$  son dos transformaciones lineales fraccionales tales que  $r(1) = t(1)$ ,  $r(0) = t(0)$  y  $r(\infty) = t(\infty)$ , entonces la función compuesta  $t^{-1} \circ r$  deja fijos los tres puntos  $1, 0$  e  $\infty$ , así que  $t^{-1} \circ r$  es la identidad; es decir,  $t(z) = r(z)$  para todo  $z \in \mathbb{C}_\infty$ . Esto establece la *unicidad* de la fracción  $s$  que lleva  $(z_2, z_3, z_4)$  en  $(0, 1, \infty)$ .

La *existencia* de  $s$  está dada por esta fórmula explícita:

$$s(z) := \frac{z - z_3}{z - z_4} \bigg/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}.$$

(El cociente a la derecha del *solidus* es una constante.)

◇

*Notación.* La **razón doble** de cuatro puntos distintos  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$  es la expresión:

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] := \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \bigg/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}. \quad (1.29)$$

La fórmula anterior entonces se escribe como  $s(z) := [z, z_2; z_3, z_4]$ , pues es evidente que  $s(z_2) = 1, s(z_3) = 0, s(z_4) = \infty$ .

► La *serie logarítmica* del Ejemplo 1.15 extiende a números complejos el logaritmo de números reales positivos, porque se sabe que  $x \mapsto \exp x = e^x$  es una biyección de  $\mathbb{R}$  en  $(0, \infty)$  y se define  $\log r$ , para  $0 < r < \infty$ , como la función inversa de exp. Es decir,  $\log(\exp x) = x$  y  $\exp(\log r) = r$  para  $x \in \mathbb{R}, r > 0$ .

Sin embargo, en el plano complejo  $\mathbb{C}$ , la serie exponencial (1.13) *no es uno a uno*. Del Ejemplo 1.13 se sabe que  $\exp(iz) = \cos z + i \sen z$ , o bien:  $\exp z = \cos(iz) - i \sen(iz)$ . Por lo tanto,  $\exp(2k\pi i) = \cos(2k\pi) + i \sen(2k\pi) = 1$ , así que

$$\exp(z + 2k\pi i) = \exp z \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Se puede ensayar la definición

$$\underline{\log z} = \log(re^{i\theta+2k\pi i}) = \log r + i(\theta + 2k\pi) = \log |z| + i \arg z,$$

que es insatisfactoria pues ‘arg’ toma valores en  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . Es mejor buscar un *inverso local* para exp. Nótese que  $|e^z| = e^{r \cos \theta} > 0$ , de modo que  $e^z \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ ; y que la derivada de exp es  $\exp'(z) \equiv \exp z$  por la fórmula (1.17). Entonces el teorema de la función inversa<sup>17</sup> implica que la función holomorfa  $z \mapsto w = \exp z$  tiene una función inversa holomorfa  $g$ , definida en un vecindario abierto de un valor  $w_0 = \exp z_0$ , tal que  $g'(w) = 1/\exp z \equiv 1/w$  en ese vecindario.

► Es razonable esperar que una función *analítica* tenga un inverso local *analítico*. Se requiere obtener la serie de potencias que representa la composición de dos funciones analíticas (cuyos términos constantes son ceros. El resultado (1.31) que sigue se conoce como la *fórmula de Faà di Bruno*.<sup>18</sup>

**Proposición 1.30** (Faà di Bruno). *Si  $f, g$  son dos series de potencias centradas en 0, tales que  $f(0) = 0$  y  $g(0) = 0$ ; y si  $h(z) \equiv f(g(z))$ , con sus series escritos en el formato*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k, \quad g(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{b_l}{l!} z^l, \quad h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n, \quad (1.30)$$

<sup>17</sup>Es un ejercicio comprobar que el teorema de la función inversa, conocido para el caso de uno o dos variables reales, es aplicable también a funciones diferenciables complejas.

<sup>18</sup>Esta fórmula fue desarrollada por el matemático italiano Francesco Faà di Bruno en dos artículos en 1855 y 1857, aunque tiene antecedentes históricos más antiguos.

entonces la serie compuesta  $h(z)$  tiene los siguientes coeficientes:

$$\frac{c_n}{n!} = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda_1! \cdots \lambda_n!} \frac{b_1^{\lambda_1} \cdots b_n^{\lambda_n}}{(1!)^{\lambda_1} (2!)^{\lambda_2} \cdots (n!)^{\lambda_n}} \quad (I.31a)$$

donde en la segunda sumatoria los  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n$  satisfacen las condiciones

$$\underline{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n = n} \quad \text{y} \quad \underline{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = k}. \quad (I.31b)$$

*Demostración.* Al sustituir la serie  $g(z)$  en el argumento de la serie  $f$ , se obtiene

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \left( \sum_{l=1}^{\infty} \frac{b_l}{l!} z^l \right)^k.$$

Para calcular el  $n$ -ésimo coeficiente  $c_n$  de la serie compuesta, sólo es necesario considerar los términos hasta  $k = n$  en la primera sumatoria, porque los demás términos contienen potencias de  $z$  mayores que  $n$ . Del producto de Cauchy de series, se obtiene:

$$\frac{c_n}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k!} \sum_{l_i \geq 1, l_1 + \cdots + l_k = n} \frac{b_{l_1} \cdots b_{l_k}}{l_1! \cdots l_k!}.$$

De entre estos  $l_i$ , si hay  $\lambda_1$  copias de 1,  $\lambda_2$  copias de 2,  $\dots$ ,  $\lambda_n$  copias de  $n$ ; entonces se puede reorganizar la suma  $l_1 + \cdots + l_k = n$  en la forma (I.31b).

El número de maneras de formar la suma  $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = k$  con enteros positivos es<sup>19</sup>  $k!/\lambda_1! \cdots \lambda_n!$ . Habida cuenta de estas multiplicidades, se puede sumar sobre los  $\lambda_j$  en vez de los  $l_i$  en la expresión anterior para  $c_n$ ; y se llega a la expansión (I.31a).  $\square$

La expansión (I.31) no toma en cuenta la convergencia (o divergencia) de las series de potencias involucradas; la sumatoria (I.31a) es finita. Sin embargo, se puede establecer que una composición de dos funciones analíticas es analítica por el argumento siguiente.<sup>20</sup>

**Lema I.3I.** Si  $w \in \mathbb{C}$ , la suma finita siguiente es válida:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{\lambda} \frac{k!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_n!} w^k = w(1+w)^{n-1} \quad (I.32)$$

donde los  $\lambda_i$  cumplen las condiciones (I.31b).

<sup>19</sup>Este es el ejercicio combinatorio de repartir el conjunto  $\{1, 2, \dots, k\}$  en una **partición** de  $n$  partes de cardinalidades  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  – admitiendo algunas partes vacías con  $\lambda_j = 0$ .

<sup>20</sup>Este argumento también es aplicable a *funciones analíticas reales*. Véase el capítulo I del libro: Steven G. Krantz and Harold R. Parks, *A Primer of Real Analytic Functions*, Birkhäuser, Boston, 2002.

*Demostración.* Considérese las dos series geométricas, convergentes para  $|z| < 1$ :

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{z}{1-z}, \quad g(z) = \sum_{l=1}^{\infty} wz^l = \frac{wz}{1-z}.$$

Como  $f(0) = g(0) = 0$ , la fórmula de Faà di Bruno es aplicable, con  $a_k = k!$  y  $b_l = l! w$ . Entonces  $(b_l)^{\lambda_l} / (l!)^{\lambda_l} = w^{\lambda_l}$  y la suma (1.31a) se simplifica en

$$\frac{c_n}{n!} = \sum_{k=1}^n k! \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda_1! \cdots \lambda_n!} w^{\lambda_1} \cdots w^{\lambda_n} = \sum_{k=1}^n \sum_{\lambda} \frac{k!}{\lambda_1! \cdots \lambda_n!} w^k.$$

Por otro lado, la composición

$$\begin{aligned} f(g(z)) &= \frac{g(z)}{1-g(z)} = \frac{wz/(1-z)}{(1-z-wz)/(1-z)} = \frac{wz}{1-z-wz} \\ &= wz \sum_{m=0}^{\infty} (z+wz)^m = \sum_{n=1}^{\infty} w(1+w)^{n-1} z^n \end{aligned}$$

muestra que  $f(g(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$  si y solo si  $c_n/n! = w(1+w)^{n-1}$  para  $n \geq 1$ . Los dos lados de (1.32) coinciden pues ambos son iguales a  $c_n/n!$ .  $\square$

**Proposición 1.32.** *La composición de dos funciones analíticas es analítica.*

*Demostración.* En vista de la Proposición 1.20, es suficiente mostrar que la composición de dos series de potencias  $f$  y  $g$  con radios de convergencia positivas también tiene radio de convergencia positiva. Si  $g(z)$  converge para  $|z - z_0| < R_1$  y  $f(w)$  converge para  $|w - w_0| < R_2$  con  $w_0 = g(z_0)$ , se puede suponer sin perder generalidad que  $z_0 = w_0 = 0$  y que  $f(0) = 0$ , así que las series de potencias para  $f, g$  y  $h := f \circ g$  tienen la forma (1.30).

La demostración del Lema 1.7 muestran que las series de Taylor de  $f$  y  $g$  en 0 tienen radios de convergencia positivos si y solo si hay constantes  $A, B, C, D > 0$  tales que

$$\frac{|a_i|}{i!} = \frac{|f^{(i)}(0)|}{i!} \leq \frac{A}{B^i} \quad \text{y} \quad \frac{|b_j|}{j!} = \frac{|g^{(j)}(0)|}{j!} \leq \frac{C}{D^j} \quad \text{para todo } i, j \in \mathbb{N}.$$

Ahora se puede estimar la suma (1.31a) por

$$\begin{aligned} \frac{|c_n|}{n!} &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_n!} \frac{A k!}{B^k} \left(\frac{C}{D}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{C}{D^2}\right)^{\lambda_2} \cdots \left(\frac{C}{D^n}\right)^{\lambda_n} \\ &= \frac{A}{D^n} \sum_{k=1}^n \sum_{\lambda} \frac{k!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_n!} \left(\frac{C}{B}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{C}{B}\right)^{\lambda_2} \cdots \left(\frac{C}{B}\right)^{\lambda_n} \end{aligned}$$

porque las condiciones (1.31b) muestran que  $D^{\lambda_1} D^{2\lambda_2} \cdots D^{n\lambda_n} = D^n$  y  $B^k = B^{\lambda_1} B^{\lambda_2} \cdots B^{\lambda_n}$ .

Ahora la fórmula (1.32) del Lema 1.31, junto con  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = k$ , simplifica el lado derecho:

$$\frac{|c_n|}{n!} \leq \frac{A}{D^n} \frac{C}{B} \left(1 + \frac{C}{B}\right)^{n-1} = \frac{AC(B+C)^{n-1}}{B^n D^n} = \frac{AC}{B+C} \left/ \left(\frac{BD}{B+C}\right)^n \right.$$

Entonces la serie  $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$  tiene radio de convergencia positiva, por el Lema 1.7 de nuevo. □

► Supóngase ahora que  $L(z)$  es una función *analítica* definida en un disco abierto  $D(1; r)$  centrado en  $1 = \exp(0)$  tal que  $\exp(L(z)) = z$  en un vecindario de 1. El teorema de la función inversa (para funciones diferenciables) muestra que

$$L'(z) = \frac{1}{\exp(L(z))} = \frac{1}{z} \quad \text{cerca de } z = 1.$$

Por inducción, se obtiene las derivadas superiores:

$$L^{(n)}(z) = (-1)^{n-1} (n-1)! z^{-n}, \quad L^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} (n-1)! \quad \text{para } n \geq 1.$$

Como también  $L(1) = 0$ , la serie de Taylor de  $L$  en  $z = 1$  es

$$L(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n; \quad \text{y por ende } L(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$$

Comparando esta serie con la de la ecuación (1.15), se da cuenta de que  $L(z) \equiv \log z$ , y esta serie de Taylor efectivamente converge para  $|z-1| < 1$ .

En resumen: la función analítica  $\exp$  posee un inverso local analítico  $\log$  en el disco  $D(1; 1)$ . Este logaritmo local coincide, en ese disco abierto, con la función holomorfa  $\underline{\text{Log}}$ , definida por

$$\underline{\text{Log}} z = \text{Log}(re^{i\theta}) := \underline{\log r + i\theta} \quad \text{para } r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi. \quad (1.33)$$

Esta función  $\underline{\text{Log}}$  (a veces llamada *la rama principal del logaritmo*) tiene como dominio la región  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ : el plano complejo con la semirrecta real negativa  $\mathbb{R}_- := (-\infty, 0]$  removida. Obviamente, este dominio incluye el disco abierto  $D(1; 1)$ ; se dice que la función  $\underline{\text{Log}}$  es una **continuación** de la función analítica definida por la serie de potencias (1.15) a un dominio mayor. (En lo sucesivo, se escribirá  $\underline{\log z}$  como sinónimo de  $\underline{\text{Log}} z$  para  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ .)

### 1.5. Ejercicios sobre funciones de una variable compleja

**Ejercicio 1.1.** (a) Expresar  $\sin 3\theta$ ,  $\cos 3\theta$ ,  $\sin 4\theta$ ,  $\cos 4\theta$ ,  $\sin 5\theta$ ,  $\cos 5\theta$  en términos de  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$ .

(b) Verificar la suma finita:  $1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{ni\theta} = e^{\frac{1}{2}ni\theta} \frac{\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)}$ .

(c) Simplificar las sumas finitas:

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta.$$

**Ejercicio 1.2.** Expresar, en la forma  $a + ib$  con  $a, b$  reales:

(a) la fracción  $\frac{1 - 2i}{3 + 4i}$ ;

(b) las dos raíces cuadradas  $\sqrt{-8 + 6i}$  [notar que el símbolo  $\sqrt{\phantom{x}}$  es ambiguo, en  $\mathbb{C}$ ];

(c) el número complejo  $(1 - i\sqrt{3})^{49}$ , expandido;

(d) las seis soluciones distintas de la ecuación  $z^6 = 1$ .

**Ejercicio 1.3.** Verificar la llamada *ley del paralelogramo*: si  $z, w \in \mathbb{C}$ , entonces

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

En términos del paralelogramo con vértices  $0, z, z + w, w$ , ¿qué dice esta fórmula?

**Ejercicio 1.4.** Identificar las partes del plano  $\mathbb{C}$  representadas por las siguientes ecuaciones y desigualdades:

$$\frac{1}{z} = \bar{z}, \quad \left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 1, \quad |z-i| + |z-1| = 2;$$

$$|z-i| < 1, \quad |z-2| > |z-3|, \quad \Im z > \Re z.$$

En cada caso, dibujar la curva o región del plano correspondiente.

**Ejercicio 1.5.** (a) Demostrar que dos rectas en el plano complejo

$$\bar{a}z + a\bar{z} + p = 0 \quad \text{y} \quad \bar{b}z + b\bar{z} + q = 0, \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{C}; \quad p, q \in \mathbb{R};$$

son paralelas o iguales si y solo si  $a = sb$  para algún  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; en cambio, son perpendiculares si y solo si  $a = itb$  para algún  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

(b) Mostrar que la ecuación de la recta que pasa por dos puntos distintos  $a, c \in \mathbb{C}$  es

$$(\bar{a} - \bar{c})(z - a) - (a - c)(\bar{z} - \bar{a}) = 0.$$

**Ejercicio 1.6.** Si  $a, c \in \mathbb{C}$  y si  $k > 0$ , demostrar que la ecuación

$$|z - a| = k |z - c|$$

representa un *círculo* en el plano complejo si  $k \neq 1$ , pero representa una *recta* si  $k = 1$ . En el primer caso, calcular el radio del círculo y hallar los extremos del diámetro que, al prolongarse en línea recta, pasa por los puntos  $a$  y  $c$ .

**Ejercicio 1.7.** Si  $|z| < 1$  y  $|w| < 1$ , comprobar que  $\left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| < 1$ .

**Ejercicio 1.8.** Si  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  son tres puntos distintos, tales que  $|z_1| = |z_2| = |z_3|$  y  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ , demostrar que ellos son los vértices de un triángulo equilátero.

**Ejercicio 1.9.** Sean  $z_1, z_2, z_3$  tres puntos distintos y no colineales del plano  $\mathbb{C}$ .

- Hallar la ecuación de la recta que biseca perpendicularmente al segmento  $[z_1, z_2]$ . (Esta recta se llama la **mediatriz** del segmento  $[z_1, z_2]$ ).
- Encontrar el **circuncentro** del triángulo con vértices  $z_1, z_2, z_3$ : esta es la intersección de las tres mediatrices de los lados (las cuales son tres rectas concurrentes, como la prueba indicará).
- Una **altura** del triángulo es una recta que pasa por un vértice, perpendicular al lado opuesto. Las tres alturas son concurrentes en el **ortocentro** del triángulo. En el caso de que el circuncentro resulta ser el origen 0, verificar que el ortocentro es el punto  $z_1 + z_2 + z_3$ .

**Ejercicio 1.10.** Si  $z, w \in \mathbb{C}$ , sean  $Z, W$  los puntos correspondientes (bajo la proyección estereográfica) en la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2$ .

- Mostrar que  $Z$  y  $W$  son antípodas uno del otro (es decir, que el segmento  $[Z, W]$  es un diámetro de  $\mathbb{S}^2$ ) si y solo si  $z\bar{w} = -1$ .
- Si  $w = 1/z$ , hallar la relación correspondiente entre las coordenadas cartesianas de  $Z$  y  $W$ . Concluir que la transformación  $z \mapsto 1/z$  del plano extendido  $\mathbb{C}_\infty$  corresponde con una *mediavuelta* (rotación por un ángulo  $\pi$ ) de  $\mathbb{S}^2$  alrededor de uno de sus diámetros. (¿Cuál es ese diámetro?).

(c) Comprobar que la distancia euclidiana entre  $Z$  y  $W$  es igual a

$$d(z, w) := \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}}.$$

**Ejercicio 1.11.** Determinar el radio de convergencia  $R$  para cada una de las siguientes series de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^n \quad \text{si } |q| < 1.$$

**Ejercicio 1.12.** Determinar el radio de convergencia  $R$  para cada una de las siguientes series de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2^n}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{2^k} + 3^{k+1} z^{2^{k+1}}.$$

**Ejercicio 1.13.** Verificar que la convergencia de la serie geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  no es uniforme en todo el disco abierto  $D(0; 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

**Ejercicio 1.14.** Demostrar que el radio de convergencia  $R$  de la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$  obedece la fórmula  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$  toda vez que este límite existe.

**Ejercicio 1.15.** Comprobar que las siguientes tres series de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

tienen el mismo radio de convergencia  $R = 1$ . En el círculo unitario  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , demostrar que una de estas series diverge para todo  $z \in \mathbb{T}$ ; otra converge para todo  $z \in \mathbb{T}$ ; y la tercera diverge en un solo punto de  $\mathbb{T}$ .

[[ Indicación: en el tercer caso, estimar  $(1 - z) \sum_{k=m+1}^n a_k z^k$  con  $|z| = 1$ . ]]

**Ejercicio 1.16.** Identificar el conjunto de todos los  $z \in \mathbb{C}$  para los cuales esta serie converge:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z}{1+z} \right)^n.$$

**Ejercicio 1.17.** Si  $z = x + iy$  con  $x, y \in \mathbb{R}$ , comprobar que  $|e^z| = e^x$ . En seguida, hallar todas las soluciones de la ecuación  $e^z = 1$ .

**Ejercicio 1.18.** Defínase  $\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$  y  $\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

(a) Hallar las series de potencias (centrados en 0) que representan estas dos funciones; y expresarlos en términos de  $\cos iz$  y  $\sin iz$ .

(b) Demostrar las siguientes identidades, válidas para todo  $z, w \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned}\sinh(z + w) &= \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w, \\ \cosh(z + w) &= \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w;\end{aligned}$$

(c) Demostrar las siguientes identidades, válidas para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}\sin(x + iy) &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \\ |\cos(x + iy)|^2 &= \sinh^2 y + \cos^2 x = \cosh^2 y - \sin^2 x.\end{aligned}$$

**Ejercicio 1.19.** Si las dos series de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad \text{y} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - c)^n$$

son convergentes en el disco abierto  $D(c; r)$ , demostrar que la serie de potencias:<sup>21</sup>

$$h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - c)^n, \quad \text{donde} \quad c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N},$$

es también convergente para  $z \in D(c; r)$ . Concluir que  $h(z) = f(z)g(z)$  para  $|z - c| < r$ .

**Ejercicio 1.20.** Obtener la serie de potencias, centrado en 0, de la función

$$h(z) = \frac{e^z}{1 - z}$$

al multiplicar las series de potencias de  $e^z$  y  $(1 - z)^{-1}$ .

Demostrar que la serie de potencias así obtenida tiene radio de convergencia  $R = 1$ .

[[ Indicación: usar el Ejercicio 1.19 anterior. ]]

<sup>21</sup>Cuando dos series  $\sum_{n \geq 0} s_n$  y  $\sum_{n \geq 0} t_n$ , en  $\mathbb{R}$  o en  $\mathbb{C}$ , son *absolutamente* convergentes, se sabe que el **producto de Cauchy**  $\sum_{n \geq 0} (\sum_{k+l=n} s_k t_l)$  es también absolutamente convergente; y que su suma es el producto de las dos primeras sumas.

**Ejercicio 1.21.** Una función  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ , definida en un vecindario abierto  $U$  de  $z_0 \in \mathbb{C}$ , es **diferenciable en  $z_0$**  si y solo si existe  $f'(z_0) \in \mathbb{C}$  y  $\delta > 0$  tales que

$$\boxed{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) = o(z - z_0)} \quad \text{para } |z - z_0| < \delta, \quad (1.34)$$

donde  $o(h)/h \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$  (notación de Landau). A partir de esta definición de diferenciabilidad, verificar las reglas usuales de derivación:

$$\begin{aligned} (\lambda f)'(z_0) &= \lambda f'(z_0) \quad \text{si } \lambda \in \mathbb{C}, \\ (f + g)'(z_0) &= f'(z_0) + g'(z_0), \\ (fg)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0), \\ (1/f)'(z_0) &= -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2} \quad \text{si } f(z_0) \neq 0. \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.22.** Si  $f$  es una función diferenciable en  $z_0$ , y si  $g$  es una función diferenciable en  $w_0 = f(z_0)$ , demostrar que  $g \circ f: z \mapsto g(f(z))$  es diferenciable en  $z_0$ . Usar la definición de diferenciabilidad del Ejercicio 1.21 para comprobar la **regla de la cadena**:

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0).$$

**Ejercicio 1.23.** Si la serie de potencias  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$  tiene radio de convergencia  $R > 0$ , demostrar que la serie de potencias de su **primitiva**:

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-c)^{n+1}$$

también tiene radio de convergencia  $R$ ; y que  $F'(z) \equiv f(z)$ .

**Ejercicio 1.24.** Si  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  donde  $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones diferenciables reales, sea  $F(x, y) := (u(x, y), v(x, y))$ , así que  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  es diferenciable. Comprobar que el jacobiano de  $F$  tiene la forma

$$JF(x, y) \equiv \begin{vmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial f / \partial z & \partial f / \partial \bar{z} \\ \partial \bar{f} / \partial z & \partial \bar{f} / \partial \bar{z} \end{vmatrix}.$$

Verificar que las ecuaciones de Cauchy y Riemann son equivalentes a  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0$ . Concluir que  $f$  es holomorfa en  $z_0 \in U$  si y solo si su jacobiano cumple

$$JF(x_0, y_0) = |f'(z_0)|^2.$$

**Ejercicio 1.25.** La **doble conjugada** de una función compleja  $f$  es

$$g(z) := \overline{f(\bar{z})}.$$

Si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en una región  $U \subseteq \mathbb{C}$  y si  $V = \{\bar{z} : z \in U\}$ , comprobar que  $g$  es holomorfa en  $V$ . Si  $f$  es analítica en un disco  $D(c; R)$ , mostrar que  $g$  es analítica en el disco  $D(\bar{c}; R)$  y hallar la correspondencia entre las series de potencias de  $f$  y  $g$ .

**Ejercicio 1.26.** Demostrar que las transformaciones lineales fraccionales (1.28) forman un grupo bajo composición de funciones,<sup>22</sup> al calcular  $s_1 \circ s_2(z)$  donde

$$s_1(z) := \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}, \quad s_2(z) := \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}.$$

Concluir que hay una única transformación lineal fraccional que lleva un triple ordenado de puntos distintos  $(z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}_\infty^3$  en otro triple ordenado dado  $(w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{C}_\infty^3$ .

**Ejercicio 1.27.** Hallar la (única!) transformación lineal fraccional  $s$  que cumple

$$s(-1) = 1, \quad s(0) = i, \quad s(1) = -1.$$

Describir las imágenes de las curvas  $s(C_k) \subset \mathbb{C}_\infty$  en los siguientes casos:

- (a)  $C_1 = \mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  es la recta real extendida;
- (b)  $C_2 = i\mathbb{R}_\infty = i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  es la recta imaginaria extendida;
- (c)  $C_3 = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  es el círculo unitario;
- (d)  $C_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{1}{2}\}$  es otro círculo centrado en 0.

**Ejercicio 1.28.** Hallar todas las transformaciones lineales fraccionales que dejan invariante el círculo unitario  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , aunque posiblemente permutan sus puntos.

**Ejercicio 1.29.** Una **rotación** de la esfera unitaria  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  deja fijos dos puntos antipodales de la esfera (por donde pasa el eje de la rotación) y lleva cada par de antípodas en un par de antípodas. Obtener la forma general de la transformación lineal fraccional (una aplicación biyectiva sobre  $\mathbb{C}_\infty$ ) que corresponde con una rotación de  $\mathbb{S}^2$  bajo proyección estereográfica. [Indicación: usar el Ejercicio 1.10.]

<sup>22</sup>Este grupo se denota comúnmente por  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ .

**Ejercicio 1.30.** Demostrar que una transformación lineal fraccional  $z \mapsto s(z)$  conserva la razón doble de cuatro puntos distintos:

$$[s(z_1), s(z_2); s(z_3), s(z_4)] = [z_1, z_2; z_3, z_4].$$

[[ Indicación: considerar la transformación  $t(z) := [z, z_2; z_3, z_4]$ . ]]

**Ejercicio 1.31.** Mostrar que  $n \log\left(1 + \frac{z}{n}\right) \rightarrow z$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y deducir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

## 2 El Teorema de Cauchy y las Funciones Holomorfas

*Because of the legendary, voluminous nature of his publications, Cauchy often lost track of results he had obtained. [...] In complex function theory, he had provided a powerful tool for analysts with the so-called Cauchy integral theorem; yet he attached far more significance to his “calculus of residues”.*

— Carl Benjamin Boyer

El análisis complejo, como materia distinguible del análisis real, comienza con una observación fundamental: la integral indefinida de una función holomorfa es independiente del camino de integración, toda vez que la región encerrada por dos caminos no contenga una singularidad de dicha función. La primera demostración fue publicada por Cauchy<sup>1</sup> en 1825 y hoy en día se designa como el *Teorema de Cauchy*.

Sin embargo, ya en 1811, Gauss escribió en una carta al astrónomo Friedrich Bessel,<sup>2</sup> refiriéndose a una función  $f(z)$  de argumento complejo, *¿qué debe pensarse de  $\int f(z) dz$  para  $z = a + ib$ ?* Después de discutir la ambigüedad de formular la integral como suma de pequeños incrementos en  $z$ , enunció su conjetura de que la integral resultante no sería ambigua si el integrando no se vuelve infinito en la región entre dos curvas que representan las transiciones en  $z$ . Alegó tener una prueba, no muy difícil, de este fenómeno, que publicaría oportunamente. Sin embargo, no lo hizo hasta 1832.

Lo que tanto Gauss como Cauchy vieron con claridad era la necesidad de precisar bien el concepto de la integral de una función en el plano complejo. Es oportuno, entonces, comenzar con una discusión de las integrales de línea en el plano complejo.

### 2.1. Integrales de línea en $\mathbb{C}$

Para definir integrales en el plano  $\mathbb{C}$ , primero se debe considerar los posibles dominios de integración. En contraste con el caso de la recta real, en donde “la integral de una función de  $s$  a  $t$ ” tiene lugar en el intervalo real  $[s, t]$ , hay una gran variedad de caminos de integración entre dos puntos  $z, w \in \mathbb{C}$ .

**Definición 2.1.** Una **curva parametrizada** es una función continua  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Esta parametrización es **regular** si la derivada  $\gamma'(t)$  existe y es continua en  $[a, b]$ , con  $\gamma'(t) \neq 0$

---

<sup>1</sup>Augustin-Louis Cauchy, *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires*, Paris, 1825.

<sup>2</sup>Citado por Saunders MacLane, “Foundations of Complex Analysis”, p. 31, en *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*, Dirk J. Struik, ed., Harvard University Press, Cambridge, MA, 1969.

para  $a \leq t \leq b$ . En los extremos, se sobreentiende que las derivadas son unilaterales:

$$\gamma'(a+) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{\gamma(a+h) - \gamma(a)}{h}, \quad \gamma'(b-) := \lim_{h \uparrow 0} \frac{\gamma(b+h) - \gamma(b)}{h}.$$

Más generalmente, una parametrización es **regular por trozos** si hay una partición finita  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  del intervalo  $[a, b]$ , tal que  $t \mapsto \gamma(t)$  es regular en cada subintervalo  $[t_i, t_{i+1}]$ .

Se supondrá, de ahora en adelante, que  $\gamma$  es regular por trozos.<sup>3</sup> ◇

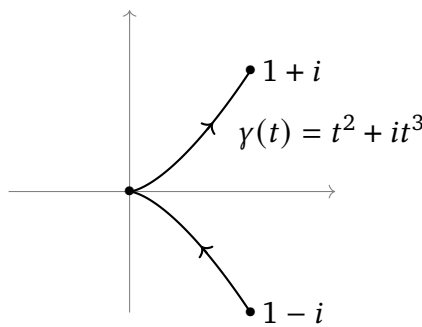


Figura 2.1: Una curva parametrizada no regular

**Ejemplo 2.2.** Considérese la curva parametrizada  $\gamma(t) := t^2 + it^3$  para  $-1 \leq t \leq 1$ . Es claro que  $\gamma'(t) = 2t + 3it^2$  es continua en el intervalo  $[-1, 1]$ . Esta parametrización no es regular porque  $\gamma'(0) = 0$ . Geométricamente, la falta de regularidad en  $t = 0$  se manifiesta como una *cúspide* en la curva, en el origen  $0 \in \mathbb{C}$ . Véase la Figura 2.1. ◇

**Definición 2.3.** Dos parametrizaciones regulares  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\tilde{\gamma}: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  se consideran *equivalentes* si hay una biyección de clase  $C^1$ ,  $s \mapsto t(s) : [c, d] \rightarrow [a, b]$ , con  $t'(s) > 0$  para todo  $s$  – por ende  $s \mapsto t(s)$  es estrictamente creciente – tal que

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)) \quad \text{para } c \leq s \leq d. \tag{2.1}$$

La función inversa  $t \mapsto s(t)$  es también de clase  $C^1$ , con  $s'(t) = 1/t'(s(t)) > 0$ , así que esta relación en efecto es simétrica. Su transitividad sigue fácilmente de la regla de la cadena. Un **contorno** regular se define como una clase de equivalencia de parametrizaciones regulares. De manera similar se define un *contorno regular por trozos*.

El punto  $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(c)$  es el **punto inicial** de este contorno, mientras  $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(d)$  es el **punto final** del contorno; ellos no dependen de la parametrización particular. ◇

<sup>3</sup>Todos los resultados aquí expuestos siguen válidos si la curva  $\gamma$  sólo es **rectificable**, esto es, de longitud finita. Esto ocurre si y solo si la función continua  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  tiene *variación acotada*. Cada curva regular por trozos es rectificable.

**Ejemplo 2.4.** Dada un contorno regular  $C$  con una parametrización regular  $t \mapsto \gamma(t)$  para  $a \leq t \leq b$ , considérese la curva parametrizada determinada por

$$\hat{\gamma}(s) := \gamma(a + b - s), \quad \text{para } a \leq s \leq b. \tag{2.2}$$

Aquí  $t(s) := a + b - s$  cumple  $t'(s) \equiv -1 < 0$ , así que las curvas parametrizadas  $\gamma$  y  $\hat{\gamma}$  no son equivalentes. La parametrización  $s \mapsto \hat{\gamma}(s)$  recorre los mismos puntos que  $t \mapsto \gamma(t)$ , pero en el orden reverso: es claro que  $\hat{\gamma}(a) = \gamma(b)$  y  $\hat{\gamma}(b) = \gamma(a)$ . La clase de equivalencia de  $s \mapsto \hat{\gamma}(s)$  se denota por  $-C$ : esto es el **contorno opuesto** de  $C$ .  $\diamond$

**Definición 2.5.** Un **contorno cerrado** es un contorno  $C$  cuyos puntos inicial y final coinciden:  $\gamma(a) = \gamma(b)$  para cualquier parametrización  $\gamma$  de  $C$ . Para que este contorno sea regular en el punto  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , la parametrización debe obedecer  $\gamma'(a+) = \gamma'(b-)$ .

Una **contorno simple** es un contorno  $C$  (regular por trozos) cuyas parametrizaciones  $\gamma$  cumplen  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$  si  $t_1 \neq t_2$  en  $[a, b]$ , con la posible excepción del caso  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . En ese caso excepcional,  $C$  es un **contorno cerrado simple**.

La **traza** de un contorno  $C$  es el conjunto de los puntos  $\{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$  en  $\mathbb{C}$  – el cual es obviamente independiente de la parametrización. Es evidente que los contornos  $C$  y  $-C$  tienen la misma traza, pero el *sentido del recorrido* las distingue.  $\diamond$

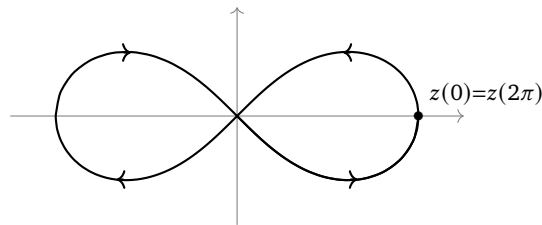


Figura 2.2: La lemniscata: una curva cerrada pero no simple

**Ejemplo 2.6.** Una **lemniscata** es una curva plana (el nombre significa *cinta*) que obedece una ecuación polar de la forma  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ , con  $a > 0$  constante. Su traza no tiene puntos en los sectores  $\pi/4 < \theta < 3\pi/4$  y  $-3\pi/4 < \theta < -\pi/4$ , donde  $\cos 2\theta < 0$ . Una posible parametrización de la lemniscata es  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ , donde

$$x(t) := \frac{a\sqrt{2} \cos t}{1 + \sin^2 t}, \quad y(t) := \frac{a\sqrt{2} \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Esta es una curva cerrada, ya que  $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = a\sqrt{2}$ . Sin embargo, esta curva no es simple, porque  $\gamma(\pi/2) = \gamma(3\pi/2) = 0$ . El recorrido de la curva dada por esta parametrización está ilustrada en la Figura 2.2.  $\diamond$

**Ejemplo 2.7.** La curva  $C$  parametrizada por

$$z(t) := c + re^{it}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2\pi,$$

es el círculo con centro  $c$  y radio  $r$ , recorrido una vez contrario a reloj. Esta es un contorno cerrado simple. El contorno opuesto  $-C$  se puede parametrizar por  $t \mapsto c + re^{-it}$ ; esta curva es el mismo círculo recorrido una vez a favor de reloj.

La parametrización  $t \mapsto c + re^{it}$ , para  $0 \leq t \leq 4\pi$ , es equivalente a  $s \mapsto c + re^{2is}$ , para  $0 \leq s \leq 2\pi$ . Se trata del mismo círculo, recorrido ahora dos veces consecutivas contrario a reloj. Este contorno recibe el nombre  $2C$ ; es cerrado pero no es simple.

En general, si  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ , se denota por  $nC$  el contorno cerrado parametrizado por  $t \mapsto c + re^{nit}$ , para  $0 \leq t \leq 2\pi$ ; así se recorre el círculo  $n$  veces, con el convenio de que un recorrido “negativo” obra en el sentido opuesto de un recorrido “positivo”. Del mismo modo, cualquier contorno cerrado puede ser recorrido  $n$  veces, si  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .  $\diamond$

**Lema 2.8.** Sea  $C$  un contorno en  $\mathbb{C}$ , parametrizada por  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  regular por trozos. Si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  es una función continua cuyo dominio incluye la traza de  $C$ , la integral<sup>4</sup>

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \tag{2.3}$$

no depende de la parametrización de  $C$ .

*Demostración.* Si  $f(z) \equiv u(z) + iv(z)$  expresa las partes real e imaginaria de la función  $f$ , y si  $\gamma(t) \equiv x(t) + iy(t)$ , la integral (2.3) significa

$$\begin{aligned} & \int_a^b (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t)))(x'(t) + iy'(t)) dt \\ & := \int_a^b (u(\gamma(t))x'(t) - v(\gamma(t))y'(t)) dt + i \int_a^b (u(\gamma(t))y'(t) + v(\gamma(t))x'(t)) dt, \end{aligned}$$

donde las dos integrales al lado derecho son integrales de Riemann de funciones reales continuas. (La continuidad por trozos de  $f$  y de  $\gamma'$  garantiza la existencia de estas integrales de Riemann.)

Sea  $s \mapsto \tilde{\gamma}(s)$  otra parametrización de  $C$ , que cumple (2.1). Entonces, por la reglas de cambio de variable y de la cadena para funciones reales, se obtiene

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_c^d f(\gamma(t(s))) \gamma'(t(s)) t'(s) ds = \int_c^d f(\tilde{\gamma}(s)) \tilde{\gamma}'(s) ds.$$

El lado derecho es la expresión análoga a (2.3) en la nueva parametrización.  $\square$

<sup>4</sup>Si la curva  $\gamma$  solo es rectificable (es decir, de variación acotada) sería necesario reemplazar la integral en (2.3) por una integral de Stieltjes  $\int_a^b f(\gamma(t)) d\gamma(t)$ ; hecho eso, la conclusión sigue valida.

**Definición 2.9.** Sea  $f$  una función continua, definida sobre la traza de un contorno  $C$ . La **integral de línea** de  $f$  sobre  $C$  es la cantidad

$$\int_C f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \quad (2.4)$$

Al lado derecho,  $t \mapsto \gamma(t)$  es una parametrización (regular por trozos) cualquiera de  $C$ . También se emplea la notación

$$\oint_C f(z) dz \equiv \int_C f(z) dz$$

cuando  $C$  es un contorno *cerrado*. ◇

**Ejemplo 2.10.** Vale la pena calcular la integral  $\int_C \bar{z} dz$ , para algunas curvas en  $\mathbb{C}$ .

(a) Si  $C$  es el segmento de recta desde 0 a  $1 + i$ , tómesese  $\gamma(t) := t + it$ ; entonces

$$\int_C \bar{z} dz = \int_0^1 (t - it)(1 + i) dt = \int_0^1 2t dt = 1.$$

(b) Si  $C$  es el segmento  $[0, 1]$  seguido por el segmento  $[1, 1 + i]$ , parametrizado por  $x \mapsto x$  y luego  $y \mapsto 1 + iy$ , entonces

$$\int_C \bar{z} dz = \int_0^1 x dx + \int_0^1 (1 - iy)i dy = \frac{1}{2} + (i + \frac{1}{2}) = 1 + i.$$

(c) Si  $C$  es el segmento  $[0, i]$  seguido por el segmento  $[i, 1 + i]$ , parametrizado por  $y \mapsto iy$  y luego  $x \mapsto x + i$ , entonces

$$\int_C \bar{z} dz = \int_0^1 (-iy)i dy + \int_0^1 (x - i) dx = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} - i) = 1 - i.$$

Estos son tres casos de una misma función continua (¡pero no holomorfa!) sobre tres curvas regulares por trozos con los mismos puntos inicial y final. Esto pone en evidencia que, en general, una integral de línea *depende del camino* recorrido entre sus extremos. ◇

En el mismo espíritu, tómesese por  $C$  el círculo unitario  $\mathbb{T}$  recorrido una vez contrario a reloj, parametrizado por  $\theta \mapsto e^{i\theta}$ . Entonces

$$\oint_C \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} (ie^{i\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i.$$

Una integral independiente del camino tendría integral 0 sobre un contorno cerrado; pero eso no ocurre en este caso.

► Es fácil verificar que la integral de línea (2.4) tiene las propiedades conocidas de integrales de línea de varias variables reales. Concretamente:

- (a) La integral  $\int_C f(z) dz$  es lineal en  $f$  (para  $C$  fijo).
- (b) La reversión del recorrido  $C \mapsto -C$  cambia el signo de la integral:

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz. \tag{2.5}$$

- (c) Si  $\ell(C) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$  denota la *longitud* del contorno  $C$  (que no depende de la parametrización), entonces

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \ell(C) \sup_{z \in C} |f(z)|, \tag{2.6}$$

si el dominio de  $f$  incluye la traza de  $C$ .

**Proposición 2.11.** *Sea  $U \subseteq \mathbb{C}$  una región y sea  $F: U \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa cuya derivada  $F' = f$  es continua.<sup>5</sup> Si  $C$  es un contorno cuya traza está incluida en  $U$ , con punto inicial  $z_0$  y punto final  $z_1$ , entonces*

$$\int_C f(z) dz = F(z_1) - F(z_0), \tag{2.7}$$

así que esta integral “no depende del camino”.

*Demostración.* Sea  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  una parametrización regular de  $C$ , con  $\gamma(a) = z_0$  y  $\gamma(b) = z_1$ . Entonces la igualdad (2.7) se reduce a

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),$$

como consecuencia de la regla de la cadena y el *teorema fundamental del cálculo* para funciones diferenciables reales (con valores en  $\mathbb{R}^2$ ). □

Esa independencia de camino proporciona un caso fácil del teorema de Cauchy.

**Corolario 2.12.** *Si el contorno cerrado  $C$  está incluida en una región  $U \subseteq \mathbb{C}$ ; y si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  es una función continua que es la derivada de una función  $F$  holomorfa en  $U$ , entonces*

$$\oint_C f(z) dz = 0. \tag{□}$$

---

<sup>5</sup>Se verá más adelante, como consecuencia del teorema de Cauchy, que la derivada de una función holomorfa es continua, de oficio. Por ahora, se toma esa propiedad como una hipótesis extra.

**Corolario 2.13.** Si  $C$  es un contorno cerrado cualquiera en  $\mathbb{C}$ , entonces

$$\oint_C z^m dz = 0 \quad \text{para cada } m \in \mathbb{N}.$$

*Demostración.* Basta notar que  $z^m = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{m+1} z^{m+1} \right)$  para cada  $m = 0, 1, 2, \dots$   $\square$

El siguiente resultado es el análogo de una conocida propiedad de funciones diferenciables de una variable real; en ese contexto es deducido directamente del teorema de valor medio.

**Lema 2.14.** Si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa en una región  $U \subseteq \mathbb{C}$ , tal que  $f'(z) = 0$  para todo  $z \in U$ , entonces  $f$  es una función constante.

*Demostración.* Tómese  $c \in U$  y sea  $r > 0$  tal que  $D(c; r) \subseteq U$ . Si  $z \in U$ , defínase  $\gamma(t) := (1-t)c + tz$  para  $t \in [0, 1]$ . Esta  $\gamma$  parametriza el segmento  $[c, z] \subset U$ . Entonces  $f(z) - f(c) = \int_{[c, z]} 0 dz = 0$  por la Proposición 2.11. En consecuencia,  $f(z) = f(c)$  para todo  $z \in D(c; r)$ .

Si  $z_0 \in U$ , defínase  $A := \{z \in U : f(z) = f(z_0)\}$ . Por el párrafo anterior,  $A$  es una parte abierta de  $U$ . La continuidad de  $f$  muestra que  $A$  es una parte cerrada de  $U$ . Como la región  $U$  es conexa y  $z_0 \in A$ , se deduce que  $A = U$ . Esto dice que  $f(z) = f(z_0)$  para todo  $z \in U$ .  $\square$

## 2.2. El teorema de Cauchy

El referido teorema dice que la integral de una función holomorfa  $f$ , definida en una región  $U \subseteq \mathbb{C}$ , sobre un contorno cerrado simple  $C \subset U$ , se anula:

$$\oint_C f(z) dz = 0. \quad (2.8)$$

Si  $f$  posee una primitiva  $F$ , también holomorfa, esto es consecuencia del Corolario 2.12. Si la derivada  $f'$  de la función holomorfa  $f$  es continua, es posible comprobar la nulidad de la integral al adaptar la conocida demostración del teorema de Green en el plano  $\mathbb{R}^2$ . Resulta, sin embargo, que la hipótesis de la continuidad de  $f'$  no es indispensable.

Antes de abordar una demostración de (2.8), vale la pena notar que esa igualdad es válida para una función analítica  $f$  definida en un disco abierto  $D(c; R)$ , porque en ese caso  $f$  admite una primitiva  $F$  (por el Ejercicio 1.23) definida en el mismo  $D(c; R)$ ; como cada función analítica es holomorfa, el Corolario 2.12 es aplicable. Pero para mostrar que toda función holomorfa es analítica, se debe usar un corolario del teorema de Cauchy.

La demostración original de Cauchy (para un contorno rectangular) fue mejorada por Édouard Goursat y adaptada por Alfred Pringsheim (para triángulos).

**El teorema de Goursat**

*Notación.* Si  $z, w, t$  son tres puntos distintos de  $\mathbb{C}$ ,  $\Delta \overrightarrow{zwt}$  denotará el **triángulo orientado** con vértices  $z, w, t$ , recorridos en ese orden. Este es el contorno poligonal cerrado formado por los tres segmentos de  $z$  a  $w$ ; de  $w$  a  $t$ ; y luego de  $t$  a  $z$ . (Es evidente que  $\Delta \overrightarrow{zwt} = \Delta \overrightarrow{wtz} = \Delta \overrightarrow{tzw}$ .) Este contorno encierra la *placa triangular*  $[z, w, t] \equiv E(\Delta \overrightarrow{zwt})$ , la cual es la envoltura convexa<sup>6</sup> de los vértices  $z, w, t$ .

El *perímetro* del triángulo orientado  $\Delta \overrightarrow{zwt}$  es la suma de las longitudes de sus lados:

$$\ell(\Delta \overrightarrow{zwt}) = |z - w| + |w - t| + |t - z|.$$

El argumento de Goursat y Pringsheim se basa en la estimación siguiente para una integral sobre un contorno triangular.

**Lema 2.15.** *Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa definida en una región  $U$  de  $\mathbb{C}$ . Si  $c \in U$  y si  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $D(c; \delta) \subseteq U$  y para todo triángulo orientado  $T$  con vértices en  $D(c; \delta)$ , se cumple la estimación:*

$$\left| \oint_T f(z) dz \right| \leq \varepsilon \ell(T) \sup_{z \in T} |z - c|. \tag{2.9}$$

*Demostración.* La diferenciabilidad de  $f$  en  $c$  dice que existe  $\delta > 0$  tal que  $D(c; \delta) \subseteq U$  y además se satisface la estimación:

$$|z - c| < \delta \implies |f(z) - f(c) - f'(c)(z - c)| < \varepsilon |z - c|.$$

La función  $z \mapsto f(c) + f'(c)(z - c)$  es un polinomio de primer grado; el Corolario 2.13 muestra que

$$\oint_T (f(c) + f'(c)(z - c)) dz = 0.$$

(Cada punto de  $T$  queda en  $D(c; \delta)$  porque este disco abierto es convexo.) Entonces:

$$\begin{aligned} \left| \oint_T f(z) dz \right| &= \left| \oint_T (f(z) - f(c) - f'(c)(z - c)) dz \right| \\ &\leq \ell(T) \sup_{z \in T} |f(z) - f(c) - f'(c)(z - c)| \\ &\leq \varepsilon \ell(T) \sup_{z \in T} |z - c|. \end{aligned} \quad \square$$

<sup>6</sup>La **envoltura convexa**  $[v_1, v_2, v_3]$  de tres vectores  $v_1, v_2, v_3$  en un espacio vectorial real es el conjunto convexo  $\{rv_1 + sv_2 + tv_3 : r, s, t \geq 0; r + s + t = 1\}$ . Si  $v_2 = v_3$ , esta envoltura se reduce al segmento  $[v_1, v_2]$ . Aquí se usa la terminología *placa triangular* para denotar el interior de un triángulo, junto con su borde; Se reserva la palabra *triángulo* para el borde (orientado) de esa placa triangular.

En un triángulo  $T = \triangle \overrightarrow{zwt}$ , las tres medias paralelas  $[\frac{1}{2}(z+w), \frac{1}{2}(w+t)]$ , etcétera, dividen la placa triangular  $[z, w, t]$  en cuatro placas triangulares congruentes: véase la Figura 2.3. Los cuatro triángulos así formados tienen perímetro  $\frac{1}{2}\ell(T)$ , y cada una de sus áreas es  $\frac{1}{4}$  del área de  $T$ .

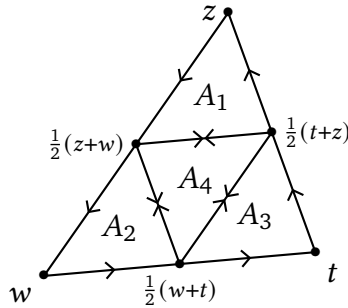


Figura 2.3: Cuadrisección del interior de un triángulo

**Teorema 2.16** (Goursat y Pringsheim). *Sea  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en una región  $U$  que incluye la placa triangular  $[z, w, t]$  cuyo borde orientado es el triángulo  $T = \triangle \overrightarrow{zwt}$ . Entonces la integral de  $f$  en el contorno cerrado  $T$  se anula:*

$$\oint_T f(z) dz = 0. \tag{2.10}$$

*Demostración.* Sean  $T_{(1)}, T_{(2)}, T_{(3)}, T_{(4)}$  los cuatro triángulos congruentes formados por los lados y las medias paralelas del triángulo  $T$ . Denótese por  $A_1, A_2, A_3, A_4$  las áreas respectivas de las placas  $E(T_{(i)})$ . (Véase la Figura 2.3).

En la suma de las integrales de línea  $\int_{T_{(i)}} f(z) dz$ , las medias paralelas se repiten con orientaciones opuestas y sus contribuciones se cancelan, por (2.5). Entonces

$$\oint_T f(z) dz = \oint_{T_{(1)}} f(z) dz + \oint_{T_{(2)}} f(z) dz + \oint_{T_{(3)}} f(z) dz + \oint_{T_{(4)}} f(z) dz. \tag{2.11}$$

Sea  $M := |\oint_T f(z) dz|$  y escríbase  $T_0 := T$ . Entonces la desigualdad triangular establece que *al menos uno* de los cuatro triángulos  $T_{(1)}, T_{(2)}, T_{(3)}, T_{(4)}$ , que se puede llamar  $T_1$ , cumple:

$$\ell(T_1) = \frac{\ell(T)}{2} \quad \text{y} \quad \left| \oint_{T_1} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4}.$$

Ahora se procede por inducción: se subdivide el triángulo  $T_1$  por sus propias medias paralelas; entonces  $\oint_{T_1} f(z) dz$  es la suma de cuatro partes por el análogo de la fórmula (2.11), así que al menos uno de estos cuatro, denotado por  $T_2$ , cumple

$$\ell(T_2) = \frac{\ell(T)}{2^2} \quad \text{y} \quad \left| \oint_{T_2} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^2}.$$

En el  $n$ -ésimo paso, se obtiene un triángulo  $T_n$  tal que

$$\ell(T_n) = \frac{\ell(T)}{2^n} \quad \text{y} \quad \left| \oint_{T_n} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^n}.$$

Las placas triangulares  $E(T_n)$  están encajadas:  $E(T_0) \supset E(T_1) \supset E(T_2) \supset \dots \supset E(T_n) \supset \dots$  y sus diámetros<sup>7</sup> tienden a 0: es obvio que  $\text{diam } E(T_n)$  es la longitud del lado más largo de  $T_n$  y por ende  $\text{diam } E(T_n) = 2^{-n} \text{diam } E(T)$ . Como el conjunto  $E(T)$  es compacto, la intersección  $\bigcap_n E(T_n)$  no es vacía y tiene diámetro 0: o sea, esta intersección es un solo punto  $\{c\}$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , tómesese  $\delta > 0$  tal que  $D(c; \delta) \subset U$ . Como  $c \in E(T_n)$  para cada  $n$ , entonces hay  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N \implies \text{diam } E(T_n) < \delta$ , lo cual conlleva  $E(T_n) \subset D(c; \delta)$ . Sin perder generalidad, se puede redefinir  $\delta$  y  $N$  de modo que se cumple las condiciones del Lema 2.15 – aquí es donde se usa la hipótesis de ser  $f$  holomorfa en  $U$  – y de (2.9) se deduce que:

$$\left| \oint_{T_n} f(z) dz \right| \leq \varepsilon \ell(T_n) \sup_{z \in T_n} |z - c| \leq \varepsilon \ell(T_n) \text{diam } E(T_n).$$

Por lo tanto, se obtiene, para  $n \geq N$ :

$$M \leq 4^n \left| \oint_{T_n} f(z) dz \right| \leq \varepsilon \cdot 2^n \ell(T_n) \cdot 2^n \text{diam } E(T_n) = \varepsilon \ell(T) \text{diam } E(T).$$

Entonces  $M \leq \varepsilon \ell(T) \text{diam } E(T)$  para todo  $\varepsilon > 0$ , así que  $M = 0$ . La igualdad (2.10) sigue de inmediato.  $\square$

El Teorema 2.16 es un caso particular del teorema de Cauchy. Debido al proceso de subdivisión repetida de triángulos (ésta fue la contribución de Goursat), no es necesario suponer que  $f$  es *continuamente* diferenciable, sino solamente *diferenciable* en cada punto  $c$  de su dominio.

### El teorema de Cauchy en una región estelar

**Definición 2.17.** Una región  $U \subseteq \mathbb{C}$  tiene *forma estelar* si hay un punto  $c \in U$  tal que para todo  $z \in U$ , la región  $U$  incluye el segmento  $[c, z] = \{ (1-t)c + tz : 0 \leq t \leq 1 \}$ .  $\diamond$

Es claro que una región convexa tiene forma estelar: en tal caso, se puede tomar cualquier  $c \in U$  como el punto de mira. Por otro, el plano cortado  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  es una región de forma estelar no convexa: tómesese  $c = 1$  como punto de mira.

[[ Si  $z = c$  en la Definición 2.17, el “segmento” es trivialmente un punto,  $[c, c] = \{c\}$ . ]]

<sup>7</sup>Si  $E \subseteq \mathbb{C}$ , su **diámetro** es  $\text{diam } E := \sup\{|z_1 - z_2| : z_1, z_2 \in E\}$ .

**Proposición 2.18.** Sea  $U \subseteq \mathbb{C}$  una región de forma estelar. Si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa y si  $C \subset U$  es un contorno cerrado (regular por trozos), entonces hay una función holomorfa  $F: U \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $F'(z) = f(z)$  para  $z \in U$ .

*Demostración.* Tómese  $c \in U$  tal que  $[c, z] \subset U$  para todo  $z \in U$ . Defínase

$$F(z) := \int_{[c, z]} f(w) dw.$$

Si  $z \in U$  y si  $\varepsilon > 0$ , entonces hay  $\delta > 0$  – que depende de  $z$ , obviamente – tal que  $D(z; \delta) \subset U$  y  $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$  para  $w \in D(z; \delta)$ , porque  $f$  es continua en  $U$ .

Si ahora  $z' \in D(z; \delta)$ , entonces  $[z, z'] \subset D(z; \delta)$  porque un disco abierto es convexo. El segmento desde  $c$  a cada punto  $(1-t)z + tz'$  de  $[z, z']$  también está incluido en  $U$ ; la unión de estos segmentos es la placa triangular  $[c, z, z']$ , y por ende  $[c, z, z'] \subset U$ .

Si  $T = \overrightarrow{czz'}$ , el Teorema 2.16 muestra que  $\oint_T f(w) dw = 0$ . Entonces

$$F(z') - F(z) = \int_{[z, z']} f(w) dw = f(z)(z' - z) + \int_{[z, z']} (f(w) - f(z)) dw,$$

Por lo tanto, se cumple la desigualdad

$$|F(z') - F(z) - f(z)(z' - z)| \leq \left| \int_{[z, z']} (f(w) - f(z)) dw \right| \leq \varepsilon |z' - z|$$

toda vez que  $|z' - z| < \delta$ . Se ha mostrado que  $F$  es diferenciable en  $z$  con  $F'(z) = f(z)$ . Como eso es válido para todo  $z \in U$ ,  $F$  es holomorfa en  $U$  y es una primitiva de  $f$  en esa región.  $\square$

**Corolario 2.19.** Sea  $U \subseteq \mathbb{C}$  una región de forma estelar. Si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa, entonces

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

para cualquier contorno cerrado (regular por trozos)  $C$  cuya traza queda en  $U$ .

*Demostración.* Usando la Proposición 2.18 anterior, este resultado sigue de inmediato del Corolario 2.12.  $\square$

### Regiones simplemente conexas

Es necesario ampliar la clase de regiones  $U \subseteq \mathbb{C}$  que satisfacen la conclusión del Corolario 2.19. Al examinar la demostración de la Proposición 2.18, se puede notar que la propiedad esencial de la región  $U$  es que contiene todos los puntos del triángulo  $T \subset U$ . Esta propiedad topológica es la *conectividad simple* de la región estelar.

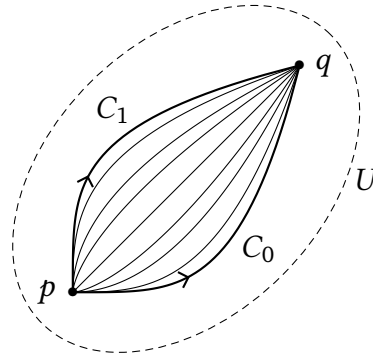


Figura 2.4: Una homotopía entre dos curvas en una región  $U$

**Definición 2.20.** Si  $U \subseteq \mathbb{C}$  es una región, dos curvas  $C_0$  y  $C_1$  con trazas en  $U$ , con los mismos puntos inicial y final  $p, q \in U$ , son **homotópicas** en  $U$  si hay una familia continua de curvas  $\{C_s : 0 \leq s \leq 1\}$ , con trazas en la región  $U$ , intercaladas entre  $C_0$  y  $C_1$ .

Más precisamente: si  $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow U$ ,  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow U$  son dos parametrizaciones continuas con  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = p$ ;  $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = q$ ; entonces existe una función continua  $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$  tal que  $\Gamma(0, t) \equiv \gamma_0(t)$ ,  $\Gamma(1, t) \equiv \gamma_1(t)$  para  $0 \leq t \leq 1$ . Al colocar  $\gamma_s(t) := \Gamma(s, t)$ , la función  $\gamma_s : [0, 1] \rightarrow U$  parametriza una curva continua  $C_s$  con traza en  $U$ , para  $0 \leq s \leq 1$ .

La región  $U$  es **simplemente conexa** si dos curvas cualesquiera entre puntos distintos de  $U$  son homotópicas en  $U$ . (Véase la Figura 2.4.)  $\diamond$

*Observación.* Por definición, la homotopía  $\Gamma$  entre  $C_0$  y  $C_1$  solo debe ser una función continua de dos variables reales. Sin embargo, si las curvas  $C_0$  y  $C_1$  son diferenciables, se puede modificar  $\Gamma$  en otra función diferenciable de dos variables; y si  $C_0$  y  $C_1$  son contornos regulares por trozos, también es posible modificar  $\Gamma$  para que todos los contornos intermedios  $C_s$  sean regulares por trozos; en adelante, se asumirá esa última condición.<sup>8</sup>

**Ejemplo 2.21.** El plano complejo  $\mathbb{C}$  es simplemente conexo. Un disco abierto  $D(c; r)$  es simplemente conexo. El interior de un triángulo  $T$  es simplemente conexo.

Cualquier región estelar es simplemente conexa (porque es contractible a uno de sus puntos de mira). En particular, la región  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  es simplemente conexa.

Por otro lado, el *plano perforado*  $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ; el *disco perforado*  $D(c; r) \setminus \{c\}$ ; y el **anillo** abierto

$$A(c; r, s) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - c| < s\}, \quad \text{con } 0 < r < s;$$

son regiones del plano que *no son simplemente conexas*.  $\diamond$

<sup>8</sup>Véase, por ejemplo, la subsección 13.14 del libro de Rudin, o la subsección 2.6 del libro de Simon.

**Lema 2.22.** Si  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa en una región  $U$ , y si  $C_0$  y  $C_1$  son dos contornos homotópicos en  $U$  (regulares por trozos) entre dos puntos  $p, q \in U$ , entonces

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz.$$

*Demostración.* Por la Definición 2.20, hay una homotopía de contornos  $\{C_s : 0 \leq s \leq 1\}$  desde  $p$  a  $q$  dentro de  $U$ ; y se puede suponer que cada  $C_s$  está parametrizado por una función  $\gamma_s : [0, 1] \rightarrow U$  que es regular por trozos. Considere la función

$$I(s) := \int_{C_s} f(z) dz, \quad \text{para } s \in [0, 1].$$

Se requiere mostrar que esta función es constante. Tómese  $s_0 \in [0, 1]$ . Por ser  $U$  abierto, existe  $\delta > 0$  tal que los discos  $D(\gamma_{s_0}(t), \delta) \subset U$  cubren  $C_{s_0}$ . Como  $C_{s_0}$  es compacto en  $U$ , hay un número finito de estos discos  $U_1, \dots, U_n$  y una partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  de  $[0, 1]$  tal que  $\gamma_{s_0}([t_{i-1}, t_i]) \subset U_j$  para cada  $j$ .

Como  $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$  es (uniformemente) continua, hay  $\varepsilon > 0$  tal que

$$|s - s_0| \leq \varepsilon, t \in [t_{i-1}, t_i] \implies \gamma_s(t) \in U_i.$$

Tómese  $s_1$  tal que  $|s_1 - s_0| < \varepsilon$ . Entonces, dentro del disco  $U_i$ , se puede construir un contorno cerrado  $R_i$  como una cadena de cuatro curvas: de  $\gamma_{s_0}(t_{i-1})$  a  $\gamma_{s_0}(t_i)$  sobre  $C_{s_0}$ ; sigue con el segmento  $[\gamma_{s_0}(t_i), \gamma_{s_1}(t_i)]$ ; luego de  $\gamma_{s_1}(t_i)$  a  $\gamma_{s_1}(t_{i-1})$  sobre  $-C_{s_1}$ ; y cierra con el segmento  $[\gamma_{s_1}(t_{i-1}), \gamma_{s_0}(t_{i-1})]$ .

Cada  $R_i$  es un contorno cerrado dentro del disco  $U_i$  (el cual es una región estelar). El Corolario 2.19 muestra que  $\oint_{R_i} f(z) dz = 0$ . Al sumar estas integrales nulas, las contribuciones de los segmentos cancelan en pares y se obtiene

$$0 = \sum_{i=1}^n \oint_{R_i} f(z) dz = \int_{C_{s_0}} f(z) dz - \int_{C_{s_1}} f(z) dz.$$

Resulta, entonces, que  $|s_1 - s_0| < \varepsilon \implies I(s_1) = I(s_0)$ ; es decir que  $s \mapsto I(s)$  es localmente constante. El paso final es tomar una partición del intervalo compacto  $[0, 1]$  en subintervalos de longitud menor que  $\varepsilon$ , para concluir que  $I(0) = I(1)$ .  $\square$

**Proposición 2.23.** Sea  $U \subseteq \mathbb{C}$  una región simplemente conexa. Si  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  es una función diferenciable, entonces hay una primitiva  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $F'(z) \equiv f(z)$  en  $U$ .

En particular, vale  $\oint_C f(z) dz = 0$  para cualquier curva cerrada  $C$  con traza en  $U$ .

*Demostración.* Tómesese un punto  $c \in U$  y defínase, para cada  $z \in U$ ,

$$F(z) := \int_C f(w) dw$$

donde  $C$  es un contorno regular por trozos desde  $c$  a  $z$ . El Lema 2.22 anterior muestra que esta integral no depende del contorno  $C$  – aunque sí de sus extremos  $c$  y  $z$  – porque dos contornos cualesquiera desde  $c$  a  $z$  son homotópicos en  $U$ .

Se demuestra que  $F$  es una primitiva de  $f$  al adaptar la demostración de la Proposición 2.18. Dado  $\varepsilon > 0$ , hay  $\delta > 0$  con  $D(z; \delta) \subset U$  y  $|f(z') - f(z)| < \varepsilon$  para  $z' \in D(z; \delta)$ . Sea  $C'$  el contorno desde  $c$  a  $z'$  que sigue  $C$  con el segmento  $[z, z']$ . De ahí se obtiene

$$F(z') - F(z) = \int_{[z, z']} f(w) dw$$

y luego se deduce que  $|z' - z| < \delta$  implica

$$|F(z') - F(z) - f(z)(z' - z)| \leq \varepsilon |z' - z|.$$

Esto muestra que  $F$  es holomorfa en  $U$ , con  $F'(z) \equiv f(z)$ . □

### 2.3. La fórmula integral de Cauchy

**Teorema 2.24.** *Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa cuyo dominio incluye el disco cerrado  $\overline{D}(c; r)$ , y sea  $C$  la curva circular  $\theta \mapsto c + re^{i\theta}$  con  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  (la cual recorre el borde del disco una vez contrario a reloj). Entonces la siguiente **fórmula de Cauchy** es válida:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw \quad \text{para cada } z \in D(c; r). \tag{2.12}$$

*Demostración.* Tómesese  $z =: c + se^{i\alpha} \in D$ , con  $0 < s < r$ ; si  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(r - s)$ , entonces  $\overline{D}(z; \varepsilon) \subset D(c; r)$ . Sea  $C_\varepsilon$  el círculo  $\phi \mapsto z + \varepsilon e^{i\phi}$  de borde de  $\overline{D}(z; \varepsilon)$  (recorrido una vez contrario a reloj). Con  $p := z + se^{i\alpha} \in C_\varepsilon$ ,  $q := c + re^{i\alpha} \in C$ , el segmento  $[p, q]$  une un punto en cada círculo. Dado  $\delta$  suficientemente pequeño con  $0 < \delta < \varepsilon$ , hay dos segmentos paralelos a  $[p, q]$ , separados por un pasillo de anchura  $\delta$ , con extremos en  $C_\varepsilon$  y  $C$  respectivamente, formando así una curva cerrada  $\Gamma_\varepsilon$  (véase la Figura 2.5).

Esta curva cerrada  $\Gamma_\varepsilon$  consta de cuatro trozos suaves: un arco largo de  $C$ , seguido por un segmento paralelo a  $[q, p]$ , seguido de un arco largo del círculo  $-C_\varepsilon$  recorrido a favor de reloj, seguido por el otro segmento paralelo a  $[p, q]$ . Su región interior  $I(\Gamma_\varepsilon)$

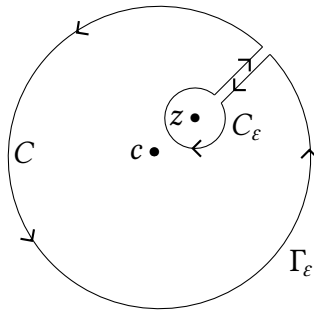


Figura 2.5: Curva de tipo cerradura  $\Gamma_\epsilon$

es contractible y excluye el punto  $z$ . La unión  $U_\delta := \bigcup \{ D(w; \frac{1}{3}\delta) : w \in I(\Gamma_\epsilon) \}$  es una región contractible que incluye la traza de  $\Gamma_\epsilon$ .

Como  $z \notin U_\delta$ , la función  $g(w) := f(w)/(w - z)$  es diferenciable en  $U_\delta$ . La Proposición 2.23 entonces implica que

$$\oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(w)}{w - z} dw = 0.$$

Al parametrizar los cuatro trozos mencionados de  $\Gamma_\epsilon$ , se obtiene cuatro integrales de línea con suma igual a 0. Al dejar  $\delta \rightarrow 0$  en cada una de estas integrales, resulta

$$\oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw + \int_{[q,p]} \frac{f(w)}{w - z} dw - \oint_{C_\epsilon} \frac{f(w)}{w - z} dw + \int_{[p,q]} \frac{f(w)}{w - z} dw = 0.$$

Las dos integrales sobre los segmentos  $[p, q]$  y  $[q, p]$  (curvas opuestas) se cancelan, de modo que

$$\oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw = \oint_{C_\epsilon} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

El integrando en estos dos integrales tiene la forma

$$\frac{f(w)}{w - z} = \frac{f(w) - f(z)}{w - z} + \frac{f(z)}{w - z},$$

donde el primer término a la derecha es de la forma  $f'(z) + o(w - z)$ ; su integral sobre  $C_\epsilon$  tiendo a 0 cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , y por ende  $w \rightarrow z$  si  $w \in C_\epsilon$ . Por lo tanto,

$$\oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw = \oint_{C_\epsilon} \frac{f(z)}{w - z} dw = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(z)}{\epsilon e^{i\phi}} i\epsilon e^{i\phi} d\phi = 2\pi i f(z),$$

lo cual establece la fórmula (2.12). □

**Teorema 2.25.** Si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa en una región  $U \subset \mathbb{C}$ , entonces su derivada  $f': U \rightarrow \mathbb{C}$  es continua en  $U$ . Además, si  $C$  es un círculo de borde de  $\overline{D}(c; r) \subset U$ , entonces vale

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \quad \text{para } z \in D(c; r). \quad (2.13)$$

*Demostración.* Dado  $z \in D(c; r)$  con  $\overline{D}(c; r) \subset U$ , tómesese  $t \in \mathbb{C}$  con  $|t| < \delta < d(z, C)$ , de modo que  $z + t \in D(c; r)$  también.<sup>9</sup> El Teorema 2.24 implica que

$$\begin{aligned} \frac{f(z+t) - f(z)}{t} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{t} \left( \frac{1}{w-z-t} - \frac{1}{w-z} \right) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z-t)(w-z)} dw. \end{aligned}$$

Al dejar  $t \rightarrow 0$ , el lado izquierdo converge a  $f'(z)$ ; mientras el integrando al lado derecho está mayorizado por

$$\frac{1}{d(z, C)(d(z, C) - \delta)} \sup_{w \in C} |f(w)|.$$

Eso permite tomar el límite  $t \rightarrow 0$  bajo el signo integral; y se obtiene la fórmula (2.13). Ahora, el integrando al lado derecho de (2.13) es obviamente continuo en  $z$  toda vez que  $z \in D(c; r)$ . Esto establece la continuidad de  $z \mapsto f'(z)$  para  $z \in D(c; r)$ , y por ende para todo  $z \in U$  también.  $\square$

El Teorema 2.25 muestra que una función holomorfa no es solamente diferenciable (por definición) sino también *continuamente* diferenciable. El siguiente resultado establece que los términos **holomorfo** y **suave** son sinónimos, cuando se trata de funciones de una variable compleja. Además, proporciona una fórmula utilísima para las derivadas superiores de la función holomorfa.

**Teorema 2.26** (La fórmula integral de Cauchy). Una función holomorfa  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  en una región  $U \subset \mathbb{C}$  es indefinidamente diferenciable en  $U$ . Además, si  $C$  es el círculo de borde de  $\overline{D}(c; r) \subset U$ , entonces para cada  $n \in \mathbb{N}$  la derivada superior  $f^{(n)}$  obedece la fórmula:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \quad \text{para } z \in D(c; r). \quad (2.14)$$

*Demostración.* Los casos  $n = 0$  y  $n = 1$  de esta fórmula ya han sido demostrados en los Teoremas 2.24 y 2.25.

<sup>9</sup>Aquí  $d(z, C) := \inf\{|w-z| : w \in C\}$  denota la **distancia** del punto  $z$  al círculo  $C$ .

Los demás casos siguen por inducción sobre  $n$ . Supóngase que  $f$  es  $(n - 1)$  veces diferenciable y que obedece (2.14) con  $n - 1$  en lugar de  $n$ . Entonces

$$\frac{f^{(n-1)}(z+t) - f^{(n-1)}(z)}{t} = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{t} \left( \frac{1}{(w-z-t)^n} - \frac{1}{(w-z)^n} \right) dw$$

para  $z \in D$  y  $|t| < \delta < d(z, C)$ , usando las notaciones de la demostración anterior. Al escribir  $u := 1/(w - z - t)$  y  $v := 1/(w - z)$ , la fórmula

$$u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1})$$

muestra que

$$\frac{f^{(n-1)}(z+t) - f^{(n-1)}(z)}{t} = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z-t)(w-z)} \left( \sum_{k=0}^{n-1} u^k v^{n-1-k} \right) dw.$$

Al dejar  $t \rightarrow 0$  con  $|t| < \delta$ , cada  $u^k v^{n-1-k}$  tiende a  $v^{n-1} = 1/(w - z)^{n-1}$  y el integrando al lado derecho permanece acotado (garantizando la convergencia de la integral), de modo que el lado izquierdo converge a  $f^{(n)}(z)$  y la integral converge al lado derecho de (2.14).  $\square$

**Corolario 2.27** (Estimaciones de Cauchy). *Si  $f$  es una función holomorfa en una región que incluye un disco cerrado  $\bar{D}(c; r)$ , y si  $|f(z)| \leq M$  para  $|z - c| = r$ , entonces se cumplen las siguientes desigualdades, para cada  $n \in \mathbb{N}$ :*

$$\boxed{|f^{(n)}(c)| \leq \frac{n! M}{r^n}.} \tag{2.15}$$

*Demostración.* Aplíquese la fórmula integral (2.14) en el círculo  $C = \{ w : |w - c| = r \}$ :

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(c)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}} dw \right| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(c + re^{i\theta})}{r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} ire^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(c + re^{i\theta})|}{r^{n+1}} r d\theta \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{M}{r^n} d\theta = \frac{n!}{2\pi} \frac{2\pi M}{r^n}. \end{aligned} \quad \square$$

**Teorema 2.28.** *Si  $f$  es una función holomorfa en un abierto que incluye un disco cerrado  $\bar{D}(c; r)$ , entonces  $f$  es analítica en el disco abierto  $D(c; r)$ , porque allí coincide con la suma de su **serie de Taylor**:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (z - c)^n \quad \text{para } |z - c| < r. \tag{2.16}$$

*Demostración.* Si  $|z - c| < r$ , las estimaciones de Cauchy (2.15) implican que la serie de potencias al lado derecho de (2.16) converge, por comparación con la serie geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} M (|z - c|/r)^n$ . Así, esta serie de potencias tiene radio de convergencia  $R \geq r$ .

Si  $C$  es el círculo  $\{ w : |w - c| = r \}$ , la fórmula de Cauchy (2.12) muestra que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw \quad \text{para } |z - c| < r.$$

Ahora bien, para  $0 < |z - c| < r$ , la identidad

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - c) - (z - c)} = \frac{1}{w - c} \left/ \left( 1 - \frac{z - c}{w - c} \right) \right.$$

permite desarrollar el último integrando en una serie geométrica. Para cada  $z \in D(c; r)$  fijo, se obtiene

$$\frac{1}{w - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - c)^n}{(w - c)^{n+1}}.$$

La desigualdad  $|z - c| < r = |w - c|$ , con  $z$  fijo, muestra que esta serie converge absoluta y uniformemente para  $w \in C$ . Entonces se puede intercambiar la suma con la integral en la expansión

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w) (z - c)^n}{(w - c)^{n+1}} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - c)^{n+1}} dw \right) (z - c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (z - c)^n \end{aligned}$$

al aplicar la fórmula integral de Cauchy (2.14) para cada  $n \in \mathbb{N}$ . □

En consecuencia, los términos **holomorfa** y **analítica** son también sinónimos para funciones de una variable compleja, con la siguiente advertencia: la *serie de Taylor* (2.16) representa la función holomorfa  $f(z)$  en un disco circular solamente, mientras que el dominio de  $f$  podría ser una región cualquiera. Así, por ejemplo, la función  $z \mapsto 1/(1 - z)$  es holomorfa y por ende analítica en cualquier disco  $D$  de centro  $c \neq 1$  y de radio  $|c - 1|$ , pero las diversas series de potencias que representan  $1/(1 - z)$  en el abierto  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  dependen del disco elegido.

► Una de las consecuencias más importantes de la fórmula de Cauchy es la siguiente *propiedad de rigidez* de las funciones enteras. Una función holomorfa se llama *entera* si su dominio es todo  $\mathbb{C}$ . Entre otras cosas, el Teorema 2.28 muestra que una función holomorfa entera posee una serie de Taylor con cualquier centro y radio de convergencia infinito; es decir, coincide con una función *analítica entera* en el sentido de la Definición 1.11. En adelante, se usará el término **función entera**, simplemente.

**Teorema 2.29** (Liouville). *Si  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función entera acotada, entonces  $f$  es una función constante.*

*Demostración.* Sea  $M := \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$ , finito por hipótesis. Dado cualquier  $z \in \mathbb{C}$ , sea  $C$  el círculo  $\{w \in \mathbb{C} : |w| = r\}$  para algún  $r > |z|$ . Entonces la fórmula integral de Cauchy implica que

$$f(z) - f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left( \frac{f(w)}{w-z} - \frac{f(w)}{w} \right) dw = \frac{z}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w(w-z)} dw.$$

Por lo tanto,

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{|z|}{2\pi} 2\pi r \sup_{w \in C} \frac{|f(w)|}{|w||w-z|} \leq \frac{Mr|z|}{r(r-|z|)} = \frac{M|z|}{r-|z|}.$$

Para cada  $z$  fijo, el lado derecho tiende a 0 cuando  $r \rightarrow \infty$  y por tanto  $f(z) = f(0)$ . Luego  $f$  es una función constante.  $\square$

► Una de las aplicaciones más famosas del teorema de Liouville es una prueba corta del llamado “teorema fundamental del álgebra”.

**Proposición 2.30** (Teorema Fundamental del Algebra). *Cualquier polinomio no constante en  $\mathbb{C}[X]$  tiene un cero en  $\mathbb{C}$ .*

*Demostración.* Sea  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  un polinomio no constante, que necesariamente tiene grado positivo  $n > 0$ , con  $a_n \neq 0$ . Supóngase, para luego demostrar lo contrario, que  $p(z) \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Entonces la función  $f(z) := 1/p(z)$  es una función entera.

Tómese  $r > 0$  suficientemente grande tal que  $\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| r^k \leq \frac{1}{2} |a_n| r^n$ . Entonces  $|p(z)| \geq \frac{1}{2} |a_n| r^n$  para  $|z| = r$ . En consecuencia,  $|p(z)| \rightarrow \infty$  cuando  $|z| \rightarrow \infty$ ; y por ende,  $f(z) \rightarrow 0$  cuando  $|z| \rightarrow \infty$ . Luego  $f$  debe ser acotada: si  $|f(z)| \leq 1$  para  $|z| > s$ , y si  $M := \sup\{|f(z)| : |z| \leq s\}$ , entonces  $|f(z)| \leq \max\{1, M\}$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

El Teorema 2.29 muestra que  $f(z) \equiv f(0)$  es una constante no nula:  $f(0) \neq 0$ . Pero eso contradice la convergencia  $f(z) \rightarrow 0$  cuando  $|z| \rightarrow \infty$ . Por tanto, hay al menos un  $z_1 \in \mathbb{C}$  tal que  $p(z_1) = 0$ .  $\square$

**Corolario 2.31.** *Un polinomio de grado  $n > 0$  tiene exactamente  $n$  raíces en  $\mathbb{C}$  (no necesariamente distintas).*

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ : si  $p$  es un polinomio de grado  $n > 0$ , entonces  $p$  no es constante (un polinomio constante no nulo tiene grado 0), así que hay  $z_1 \in \mathbb{C}$  con  $p(z_1) = 0$ . Entonces  $p(z) = (z - z_1) q(z)$  donde  $q$  es un polinomio de grado  $n - 1$ . Por la hipótesis inductiva, hay  $z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  tal que  $q(z) = a_n (z - z_2) \dots (z - z_n)$ . Luego

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n). \quad \square$$

► Hay una especie de teorema inverso al teorema de Cauchy, que en ciertas circunstancias resulta útil para comprobar la holomorphicidad de una función compleja.

**Teorema 2.32** (Morera). *Si  $U$  es una región de  $\mathbb{C}$  y si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  es una función continua tal que  $\oint_C f(z) dz = 0$  para todo contorno cerrado en  $U$ , entonces  $f$  es holomorfa en  $U$ .*

*Demostración.* Basta mostrar que  $f$  posee una primitiva en  $U$ . Tómese  $c \in U$  fijo; para  $z \in U$ , sean  $C_z$  y  $C'_z$  dos curvas (suaves por trozos) desde  $c$  a  $z$  dentro de la región  $U$ . Sea  $C := C_z - C'_z$  el contorno cerrado obtenido al recorrer  $C_z$  seguido por  $-C'_z$ . Entonces

$$\int_{C_z} f(w) dw - \int_{C'_z} f(w) dw = \oint_C f(w) dw = 0$$

por hipótesis. Por lo tanto, la función continua

$$F(z) := \int_c^z f(w) dw \equiv \int_{C_z} f(w) dw$$

está bien definida, es decir, no depende de la curva particular  $C_z$  (cuya traza está incluida en  $U$ ) sino solamente de sus extremos inicial  $c$  y final  $z$ .

Como  $U$  es un conjunto abierto, hay  $\delta > 0$  tal que  $D(z; \delta) \subseteq U$ . Entonces, para  $|t| < \delta$ , sea  $C_{z+t}$  la curva  $C_z$  seguido por el segmento  $[z, z+t]$ . Luego

$$\frac{F(z+t) - F(z)}{t} = \frac{1}{t} \int_{[z, z+t]} f(w) dw = \int_0^1 f(z+st) ds \rightarrow f(z) \quad \text{cuando } t \rightarrow 0.$$

(Se puede tomar el límite bajo el signo integral porque la función continua  $s \mapsto f(z+st) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  es *uniformemente continua* sobre el intervalo compacto  $[0, 1]$  de  $\mathbb{R}$ .)

Luego  $F$  es holomorfa en  $U$  con  $F'(z) \equiv f(z)$ . El Teorema 2.26 demuestra que su derivada  $f = F'$  es también holomorfa en  $U$ .  $\square$

## 2.4. Ceros de una función holomorfa

Como toda función holomorfa es analítica (y viceversa), *una función holomorfa tiene ceros aislados*: esto repite el resultado de la Proposición 1.18 para las series de potencias.

**Proposición 2.33.** *Si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa definida en una región  $U \subseteq \mathbb{C}$  y si  $f(c) = 0$  para algún  $c \in U$ , entonces o bien  $f(z) = 0$  para todo  $z \in U$ ; o bien hay  $\delta > 0$  tal que  $D(c; \delta) \subseteq U$  y  $f(z) \neq 0$  para  $0 < |z - c| < \delta$ .*

*Demostración.* Como  $U$  es un conjunto abierto y  $c \in U$ , hay un radio  $r > 0$  tal que  $\overline{D}(c; r) \subseteq U$ ; por el Teorema 2.28,  $f$  posee una serie de Taylor convergente en  $D(c; r)$ .

La Proposición 1.18 entonces implica que hay  $\delta$  con  $0 < \delta \leq r$  tal que  $f(z) \neq 0$  para  $0 < |z - c| < \delta$ ; o bien, de lo contrario, que  $f(z) \equiv f(c) = 0$  para  $z \in D(c; r)$ .

En el segundo caso, la serie de Taylor de  $f$  centrada en  $c$  se anula, así que  $f^{(n)}(z) \equiv 0$  en  $D(c; r)$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Defínase  $V := \{z \in U : f^{(n)}(z) = 0 \text{ para cada } n\}$ . Como cada  $f^{(n)}$  es una función continua,  $V$  es una parte cerrada de  $U$ .<sup>10</sup> Por otro lado, si  $w \in V$ , entonces  $w \in U$  y la serie de Taylor de  $f$  centrada en  $w$  se anula en algún disco abierto  $D(w; r_w) \subseteq U$ ; lo cual implica que  $V$  es una parte abierta de  $U$ . Como  $U$  es conexa y  $V \neq \emptyset$  puesto que  $c \in V$ , se concluye que  $V = U$ ; en otras palabras, que  $f$  es constante en toda la región  $U$ .  $\square$

El siguiente corolario se conoce a veces como el **principio de los ceros aislados**.

**Corolario 2.34.** Si  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en una región  $U$  y si  $f(z_n) = 0$  para una sucesión  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con un punto de acumulación  $w \in U$ , entonces  $f(z) \equiv 0$  para  $z \in U$ .

*Demostración.* Decir que  $w$  es un punto de acumulación de  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  significa que hay una subsucesión  $\{z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  con un número infinito de entradas distintas tal que  $z_{n_k} \rightarrow w$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Entonces  $f(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_{n_k}) = 0$  por la continuidad de  $f$ , así que  $w$  es un cero no aislado de  $f$ . Se deduce que  $f$  es idénticamente nula.  $\square$

**Definición 2.35.** El **orden** (o la *multiplicidad*) de un cero  $c$  de una función holomorfa  $f$ , definida en una región  $U$  con  $c \in U$ ,  $f(c) = 0$ , es el (único) entero positivo  $m \in \mathbb{N}^*$  tal que

$$f(z) = (z - c)^m g(z) \quad \text{con } g(c) \neq 0, \quad (2.17)$$

para alguna función holomorfa  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ . La existencia de esa función  $g$  en un disco  $D(c; r)$  fue notado en la demostración de la Proposición 1.18; se puede redefinir  $g$  en toda la región  $U$  al poner

$$g(z) := \begin{cases} f(z)/(z - c)^m & \text{para } z \neq c, \\ f^{(m)}(c)/m! & \text{para } z = c. \end{cases} \quad \diamond$$

En una parte abierta acotada  $A \subset U$  (cuya clausura  $\bar{A}$  es compacta), solo hay una cantidad finita de ceros (aislados) de una función holomorfa no nula  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . El *número de ceros* en  $A$  es la suma (finita) de esos órdenes; en otras palabras, *se cuenta cada cero con su multiplicidad*. Si los ceros  $c_1, \dots, c_k$  de  $f$  en  $A$  tienen órdenes respectivos  $m_1, \dots, m_k$ , el número de ceros de  $f$  en  $A$  es

$$N_A(f) := m_1 + m_2 + \dots + m_k.$$

La siguiente fórmula permite expresar ese número por una integral de contorno.

<sup>10</sup>Decir que  $V$  es una parte cerrada de  $U$  es afirmar que hay un conjunto cerrado  $B \subseteq \mathbb{C}$  tal que  $V = B \cap U$ .

**Proposición 2.36** (Principio del argumento, versión 1). *Sea  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en una región  $U$  que incluye un disco cerrado  $\overline{D}(c; r)$  y supóngase que  $f$  no se anula en el círculo  $C = \{z : |z - c| = r\}$ . El número total de ceros de  $f$  en el disco abierto  $D(c; r)$  está dado por*

$$N_{D(c;r)}(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-c|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \tag{2.18}$$

*Demostración.* Sean  $c_1, \dots, c_k$  los ceros de  $f$  en  $D(c; r)$ , con órdenes  $m_1, \dots, m_k$ . Al repetir la fórmula (2.17)  $k$  veces, se puede escribir

$$f(z) = (z - c_1)^{m_1} \cdots (z - c_k)^{m_k} g(z)$$

donde  $g: U \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfo y no se anula ni en  $D(c; r)$  ni en su frontera  $C$ . Así, hay  $r' > r$  tal que  $g$  es holomorfa sin ceros en el disco abierto  $D(c; r')$ .

Al aplicar la regla de Leibniz para derivar el lado derecho, se obtiene

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \sum_{j=1}^k \frac{m_j}{z - c_j}$$

La integral de esta expresión en el círculo  $C$  es

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \oint_C \frac{g'(z)}{g(z)} dz + \sum_{j=1}^k \oint_C \frac{m_j}{z - c_j} dz = 0 + \sum_{j=1}^k 2\pi i m_j = 2\pi i N_{D(c;r)}(f)$$

porque el cociente  $g'(z)/g(z)$  es holomorfo en  $D(c; r')$ . □

**Teorema 2.37** (Rouché). *Sean  $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$  dos funciones holomorfas en un región  $U$  y supóngase que<sup>11</sup>*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad \text{para todo } z \in C. \tag{2.19}$$

*Entonces ni  $f$  ni  $g$  se anula en el círculo  $C$ , y tienen igual número de ceros en el disco abierto:*

$$N_{D(c;r)}(f) = N_{D(c;r)}(g).$$

*Demostración.* Para  $0 \leq t \leq 1$ , defínase  $f_t(z) := (1-t)f(z) + tg(z)$ . Si fuera  $f_t(w) = 0$  para algún  $w \in C$ , entonces  $f(w) = t(f(w) - g(w))$  y también  $g(w) = (1-t)(g(w) - f(w))$ . Pero entonces sería

$$|f(w)| + |g(w)| = (t + (1-t))|f(w) - g(w)| = |f(w) - g(w)|,$$

contrario a hipótesis. Se deduce que  $f_t(z) \neq 0$  para todo  $z \in C$  y todo  $t \in [0, 1]$ .

<sup>11</sup>La desigualdad triangular garantiza que  $|f(z) - g(z)| \leq |f(z)| + |g(z)|$ . Pero aquí se pide desigualdad estricta.

La función

$$N_{D(c;r)}(f_t) := \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'_t(z)}{f_t(z)}$$

es continua en  $t$ , por ser el integrando es continua en  $t$  y uniformemente continua en  $z \in C$ . Pero esta función toma valores en  $\mathbb{N}$ , así que debe ser *constante*; y por ende,  $N_{D(c;r)}(f_0) = N_{D(c;r)}(f_1)$ .  $\square$

El siguiente corolario es la forma tradicional del “teorema de Rouché”.

**Corolario 2.38** (Rouché). Sean  $g, h: U \rightarrow \mathbb{C}$  dos funciones holomorfas en un región  $U$  y supóngase que

$$|g(z)| > |h(z)| \quad \text{para todo } z \in C.$$

Entonces

$$N_{D(c;r)}(g) = N_{D(c;r)}(g + h).$$

*Demostración.* Sea  $f(z) := g(z) + h(z)$ . La hipótesis del corolario implica que

$$|f(z) - g(z)| = |h(z)| < |g(z)| \leq |f(z)| + |g(z)| \quad \text{para } z \in C,$$

así que el Teorema 2.37 implica que  $N_{D(c;r)}(g + h) = N_{D(c;r)}(g)$ .  $\square$

**Ejemplo 2.39.** ¿Dónde están las raíces del polinomio  $p(z) = z^8 + 4z^2 + 1$ ?

Como  $p(-z) \equiv p(z)$ , las raíces ocurren en pares  $\{\alpha_i, -\alpha_i\}$ . En el círculo  $|z| = 1.3$ , se puede observar que  $|z^8| = (1.3)^8 > 8.15$  mientras  $|4z^2 + 1| \leq 4|z|^2 + 1 \leq 7.76$ , así que  $p(z)$  tiene el mismo número de ceros —contados con multiplicidad— en el disco  $|z| < 1.3$  que  $g(z) := z^8$ , es decir, 8 ceros en total. Como  $p(z)$  tiene grado 8, no hay otros ceros fuera del disco  $|z| \leq 1.3$ .

Por otro lado, en el círculo  $|z| = 1$ , vale  $|4z^2| = 4$  mientras  $|z^8 + 1| < |z|^8 + 1 = 2$ . Mejor aun, para  $|z| = 1.2$ , vale  $|4z^2| = 5.76$  pero  $|z^8 + 1| < |z|^8 + 1 = (1.2)^8 + 1 < 5.3$ , así que  $p(z)$  tiene el mismo número de ceros en el disco  $|z| < 1.2$  que  $g(z) := 4z^2$ , esto es, solamente 2 ceros. Conclusión: hay dos ceros  $\pm\alpha_1$  en el disco  $|z| < 1.2$  y otros seis ceros  $\pm\alpha_2, \pm\alpha_3, \pm\alpha_4$  en el anillo  $1.2 < |z| < 1.3$ .  $\diamond$

► Una consecuencia muy notable de estos teoremas de Rouché es que una función holomorfa no constante  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  es una **aplicación abierta**: es decir, lleva partes abiertas de su dominio en partes abiertas de  $\mathbb{C}$ ; en particular, su imagen  $f(U)$  es una parte abierta de  $\mathbb{C}$ .

**Teorema 2.40.** Sea  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa no constante, cuyo dominio es una región  $U \subseteq \mathbb{C}$ . Entonces la imagen  $f(U)$  es una parte abierta de  $\mathbb{C}$ .

*Demostración.* Un conjunto abierto es un vecindario de cada uno de sus puntos. Basta mostrar, entonces, para cada  $c \in U$  con  $w_0 := f(c) \in f(U)$ , que  $f(U)$  incluye un vecindario del punto  $w_0$ .

Como  $f$  no es una función constante, la función  $g(z) := \overline{f(z)} - w_0$  no es idénticamente nula en  $U$ . Por la Proposición 2.33, hay  $r > 0$  tal que  $\overline{D}(c; r) \subset U$  y  $g(z) \neq 0$  para  $0 < |z - c| \leq r$ . En el círculo  $|z - c| = r$ , la función continua  $z \mapsto |g(z)|$  alcanza un mínimo positivo,

$$s := \inf\{|g(z)| : |z - c| = r\} > 0.$$

Para cualquier  $w \in D(w_0; s)$ , la función constante  $h(z) := w_0 - w$  cumple

$$|g(z)| \geq s > |w - w_0| = |h(z)| \quad \text{toda vez que } |z - c| = r.$$

El Corolario 2.38 entonces muestra que  $N_{D(c; r)}(g) = N_{D(c; r)}(g + h)$ . Fíjese que

$$(g + h)(z) = (f(z) - w_0) + (w_0 - w) = f(z) - w.$$

En el centro del disco abierto  $D(c; r)$ , vale  $g(c) = f(c) - w_0 = 0$ . Entonces hay al menos un  $z_0 \in D(c; r)$  tal que  $f(z_0) - w = 0$ , es decir,  $f(z_0) = w$ .

Se ha comprobado que

$$w \in D(w_0; s) \implies w = f(z_0) \in f(D(c; r)) \subseteq f(U);$$

lo cual dice que  $f(U) \supseteq D(w_0; s)$ , y por ende  $f(U)$  es un vecindario de  $w_0$ . □

Si  $V \subset U$  es una parte abierta, y si  $w_0 \in f(V)$ , la misma demostración comprueba que  $f(V)$  es un conjunto abierto. Esto dice que una función holomorfa no constante envía abiertos en abiertos; esta es la definición de una *aplicación abierta*.

► Una consecuencia inmediata del Teorema 2.40 de la aplicación abierta es el siguiente **principio del módulo máximo**. (A veces se le llama el *principio del máximo*, simplemente.)

**Teorema 2.41.** Si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa no constante definida en una región  $U \subseteq \mathbb{C}$ , entonces su módulo  $z \mapsto |f(z)|$  no alcanza un máximo local en  $U$ .

*Demostración.* Si, por el contrario, la función  $z \mapsto |f(z)|$  sí tuviera un máximo local en un punto  $c \in U$ , habría un radio  $r > 0$  con  $D(c; r) \subseteq U$  tal que

$$|f(c)| \geq |f(z)| \quad \text{para } |z - c| < r.$$

La función  $f$  no se anula en  $D(c; r)$ , pues eso implicaría que  $f(z) = 0$  para todo  $z \in U$ , por la Proposición 2.33; por lo tanto,  $|f(c)| > 0$ .

Sea  $w_0 := f(c) \in f(U)$ , notando que  $w_0 \neq 0$ . La desigualdad anterior se escribe así:

$$f(D(c; r)) \subset \overline{D}(0; |f(c)|) = \overline{D}(0; |w_0|).$$

En particular, el conjunto  $f(D(c; r))$  no contendría  $(1 + \varepsilon)w_0$  para  $\varepsilon > 0$  alguno, y por tanto  $f(D(c; r))$  no sería un vecindario de  $w_0$ , en contra del Teorema 2.40. Se concluye que ningún  $c \in U$  puede ser un máximo local de la función  $z \mapsto |f(z)|$ .  $\square$

**Corolario 2.42.** Si  $U$  es una región acotada en  $\mathbb{C}$ , y por ende su clausura  $\overline{U}$  es compacta, el máximo del módulo de una función continua definida en  $\overline{U}$  y holomorfa en  $U$  se alcanza en la frontera  $\partial U = \overline{U} \setminus U$ :

$$\sup\{|f(z)| : z \in \overline{U}\} = \sup\{|f(w)| : w \in \partial U\}.$$

*Demostración.* El resultado es evidente si  $f$  es una función constante. En todo caso, hay un punto  $c \in \overline{U}$  en donde la función continua no negativa  $z \mapsto |f(z)|$  alcanza su máximo, ya que  $\overline{U}$  es compacta. Luego,  $|f(c)| \geq |f(z)|$  para todo  $z \in \overline{U}$ . Si  $f$  no es constante, el Teorema 2.41 dice que  $c \notin U$ , así que  $c \in \partial U$  necesariamente.  $\square$

► Es necesario extender el teorema de Cauchy y las fórmulas integrales al caso en donde la integral de línea  $\oint_C$  se calcula sobre un contorno cerrado  $C$  que no necesariamente es simple. La traza de un contorno cerrado  $C$  (suave por trozos, como siempre) es una parte compacta del plano complejo  $\mathbb{C}$  y su complemento  $\mathbb{C} \setminus C$  es un abierto, en general desconexo: este complemento es una unión de componentes conexas.<sup>12</sup> En el plano extendido  $\mathbb{C}_\infty$ , el complemento  $\mathbb{C}_\infty \setminus C$  es también una unión disjunta de componentes; exactamente una de estas contiene el punto  $\infty$ . Luego, en  $\mathbb{C} \setminus C$  hay exactamente una componente no acotada; las otras componentes son acotadas.

**Lema 2.43.** Si  $C$  es una curva cerrada, suave por trozos, que no pasa por  $z$ , el valor de la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dw}{w - z}$$

es un número entero.

*Demostración.* Sea  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una parametrización (regular por trozos) del contorno  $C$ , con  $\gamma(b) = \gamma(a)$ . Defínase una función continua  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$g(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds.$$

<sup>12</sup>Un abierto  $U \subseteq \mathbb{C}$  es una unión disjunta de partes conexas maximales, que son sus **componentes**. Cada componente  $V$  es un abierto (porque el espacio topológico  $\mathbb{C}$  es localmente conexo) y es maximal: si  $V \subseteq W \subseteq U$  con  $W$  conexo, entonces  $U = W$ . El número de componentes de  $U$  podría ser infinito, pero es numerable.

Entonces  $g$  es diferenciable en  $[a, b]$ , excepto en un número finito de valores de  $t$ , con derivada

$$g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}.$$

La función continua

$$h(t) := e^{-g(t)}(\gamma(t) - z)$$

tiene derivada  $h'(t) \equiv 0$  para  $a \leq t \leq b$ . Luego  $h$  es una función *constante*. (Se aplica el teorema de valor medio para funciones reales a  $\Re h$  y a  $\Im h$ .) Nótese que  $g(a) = 0$ , así que  $h(b) = h(a) = \gamma(a) - z \neq 0$  – pues el contorno  $C$  no pasa por  $z$  – y por lo tanto

$$e^{g(b)} = \frac{\gamma(b) - z}{h(b)} = \frac{\gamma(a) - z}{h(a)} = 1.$$

Esto implica que  $g(b) = 2\pi in$  para algún  $n \in \mathbb{Z}$ ; luego,

$$n = \frac{g(b)}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dw}{w - z}. \quad \square$$

**Definición 2.44.** Si  $C$  es un contorno cerrado (suave por trozos) en  $\mathbb{C}$ , y si  $z \notin C$ , el número entero

$$n(C, z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dw}{w - z} \tag{2.20}$$

es el **índice** del punto  $z$  con respecto al contorno cerrado  $C$ . Este  $n(C, z)$  también se llama el **número de vueltas** de  $C$  alrededor del punto  $z$ .  $\diamond$

**Ejemplo 2.45.** La parametrización  $\gamma_m: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\gamma_m(\theta) := e^{im\theta}$  describe:

- (a) el círculo unitario  $|z| = 1$ , recorrido  $m$  veces contrario a reloj, si  $m > 0$ ;
- (b) el círculo unitario  $|z| = 1$ , recorrido  $|m|$  veces a favor de reloj, si  $m < 0$ .

En los dos casos,

$$n(C, 0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dw}{w} = \int_0^{2\pi} \frac{im e^{im\theta} d\theta}{e^{im\theta}} = \frac{2\pi im}{2\pi i} = m.$$

Se puede decir informalmente que el círculo da  $m$  vueltas alrededor del origen  $0$ , contando los giros a favor de reloj con signo negativo.  $\diamond$

**Lema 2.46.** Si  $C$  es un contorno cerrado en  $\mathbb{C}$ , el índice  $z \mapsto n(C, z)$  es constante en cada componente conexa de  $\mathbb{C} \setminus C$ . El índice vale  $0$  en la componente no acotada.

*Demostración.* La función  $g(z) \equiv n(C, z)$  es *continua*, como evidencia la integral al lado derecho de (2.20), y a la vez toma valores en  $\mathbb{Z}$ . Entonces la preimagen  $g^{-1}(m) \equiv g^{-1}(\{m\}) = g^{-1}((m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}))$  es a la vez cerrada y abierta de  $\mathbb{C} \setminus C$ . Cada conjunto  $g^{-1}(m)$  no vacío es una unión de componentes conexas de  $\mathbb{C} \setminus C$ .

La traza de  $C$  es compacta en  $\mathbb{C}$ , así que es acotada: hay un radio  $r > 0$  tal que  $C \subset \overline{D}(0; r)$ . Si  $|z| > r$ , entonces la función  $w \mapsto 1/(w - z)$  es holomorfa en un abierto que incluye  $\overline{D}(0; r)$ . Entonces vale  $\oint_C (w - z)^{-1} dw = 0$  y por ende  $n(C, z) = 0$ . Puesto que  $g(z) = 0$  para  $|z| > r$ : el valor constante de  $g$  en la componente no acotada es 0.  $\square$

**Definición 2.47.** Sea  $U$  una región de  $\mathbb{C}$  y sea  $f: U \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa, donde  $c \in U$  es un punto en donde  $f(c)$  no está definido *a priori*. Si el límite  $\lim_{z \rightarrow c} f(z)$  existe, se dice que  $f$  posee una **singularidad removible** en  $c$ .  $\diamond$

El siguiente resultado explica cómo remover esa singularidad.

**Lema 2.48** (Riemann). Sea  $c \in U$  (donde  $U$  es una región de  $\mathbb{C}$ ) y sea  $f: U \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa y acotada. Si  $\lim_{z \rightarrow c} f(z)$  existe, la extensión  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  definida por la fórmula  $f(c) := \lim_{z \rightarrow c} f(z)$  define una función holomorfa en todo  $U$ .

*Demostración.* Basta comprobar la existencia de la derivada  $f'(c)$  en el punto  $c$ .

Defínase una función  $g: U \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$g(z) := \begin{cases} (z - c)^2 f(z) & \text{si } z \neq c, \\ 0 & \text{si } z = c. \end{cases}$$

Es claro que  $g$  es continua en  $U$  y holomorfa en  $U \setminus \{c\}$ . Como  $f$  es acotada en  $U \setminus \{c\}$ , el siguiente límite existe:

$$\lim_{z \rightarrow c} \frac{g(z) - g(c)}{z - c} = \lim_{z \rightarrow c} (z - c) f(z) = 0,$$

así que  $g$  es diferenciable en  $U$  con  $g'(c) = 0$ .

Tómese  $r > 0$  tal que  $D(c; r) \subseteq U$ . La función  $g$  es analítica en  $D(c; r)$ , con

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^{(n)}(c)}{n!} (z - c)^n$$

al notar que  $g(c) = 0$ ,  $g'(c) = 0$ . Defínase una función analítica  $h: D(c; r) \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$h(z) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^{(n)}(c)}{n!} (z - c)^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g^{(m+2)}(c)}{(m+2)!} (z - c)^m.$$

Desde luego, vale  $g(z) \equiv (z - c)^2 h(z)$ , así que  $h(z) = f(z)$  para  $0 < |z - c| < r$ . Como  $h$  es continua en  $c$ , vale  $h(c) = \lim_{z \rightarrow c} h(z) = f(c)$ . Entonces  $h(z) = f(z)$  para  $|z - c| < r$ , así que  $f$  es diferenciable en  $c$  con  $f'(c) = h'(c)$ .  $\square$

El lema anterior permite dar una versión más general de la fórmula integral de Cauchy, al usar curvas cerradas pero no necesariamente simples.

**Proposición 2.49.** Si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en una región  $U$  y si  $C$  es un contorno cerrado con traza en  $U$ , entonces vale

$$n(C, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw \tag{2.21}$$

para cada  $z \in U \setminus C$ .

*Demostración.* Si  $z \in U \setminus C$ , hay una la función holomorfa  $g: U \setminus \{z\} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$g(w) := \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

Por el Lema 2.48, esta función se extiende a una función holomorfa  $g: D \rightarrow \mathbb{C}$  al colocar  $g(z) := f'(z)$ . El Corolario 2.19 ahora muestra que

$$\oint_C \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \oint_C g(w) dw = 0,$$

así que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{w - z} dw = n(C, z) f(z). \quad \square$$

## 2.5. Representación por series de Laurent

Los resultados de las secciones anteriores dan mucha información sobre las funciones holomorfas en discos abiertos, o más generalmente en regiones simplemente conexas. Por ejemplo, en un disco abierto una función holomorfa es analítica y está representada allí por su serie de Taylor. En regiones no simplemente conexas, la situación es otra: por ejemplo, en un disco perforado  $D(c; r) \setminus \{c\}$  la función  $f(z) = 1/(z - c)$  es holomorfa pero no puede representarse por una serie de potencias centrada en  $c$ .

Un *anillo* entre dos círculos concéntricos es una región no simplemente conexa en la cual la fórmula de Cauchy admite una generalización de importancia considerable. (El círculo interno puede tener radio 0, y de esa manera un disco perforado es un caso particular de un anillo).

*Notación.* Si  $c \in \mathbb{C}$  y si  $0 \leq R < S$ , la región

$$\underline{A(c; R, S)} := \{ z \in \mathbb{C} : R < |z - c| < S \}$$

es el **anillo** abierto con centro  $c$  y radios  $R$  y  $S$ .

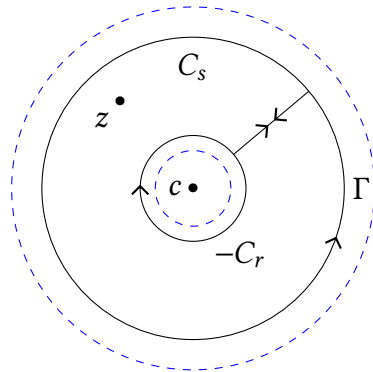


Figura 2.6: Contorno de dos círculos en un anillo

**Proposición 2.50.** Si  $f : A(c; R, S) \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa y si  $z \in A(c; R, S)$ , entonces vale

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_s} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w - z} dw \tag{2.22}$$

toda vez que  $R < r < |z - c| < s < S$ , donde  $C_r, C_s$  denotan círculos respectivos  $|z - c| = r$  y  $|z - c| = s$ , recorridos una vez contrario a reloj.

*Demostración.* Para algún ángulo fijo  $\theta$ , sea  $\Gamma$  el contorno cerrado formado por estos cuatro trozos sucesivos (Figura 2.6): un recorrido positivo del círculo  $C_s$  con punto inicial y final  $c + se^{i\theta}$ ; el segmento radial  $[c + se^{i\theta}, c + re^{i\theta}]$ ; un recorrido negativo del círculo  $C_r$  con punto inicial y final  $c + re^{i\theta}$ ; y el segmento radial  $[c + re^{i\theta}, c + se^{i\theta}]$ .

La demostración del Teorema 2.24 muestra que la integral de una función holomorfa  $g$  sobre  $\Gamma$  puede calcularse como el límite uniforme de integrales sobre contornos simples cerrados  $\Gamma_\delta$  obtenidos de  $\Gamma$  al abrir un pasillo delgado de anchura  $\delta$  alrededor del segmento  $[c + re^{i\theta}, c + se^{i\theta}]$ . Del teorema de Cauchy se concluye que

$$0 = \oint_{\Gamma} g(w) dw = \oint_{C_s} g(w) dw + \oint_{-C_r} g(w) dw = \oint_{C_s} g(w) dw - \oint_{C_r} g(w) dw, \tag{2.23}$$

porque las integrales sobre los segmentos  $[c + se^{i\theta}, c + re^{i\theta}]$  y  $[c + re^{i\theta}, c + se^{i\theta}]$  se cancelan.

Para un punto  $z$  entre  $C_r$  y  $C_s$ , defínase una función holomorfa  $g : A(c; R, S) \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$g(w) := \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \quad \text{para } w \neq z; \quad g(z) := f'(z).$$

La igualdad (2.23) se transforma en

$$\oint_{C_s} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \oint_{C_r} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw.$$

Al trasladar los términos con  $f(z)$  a un lado, se obtiene

$$f(z) \oint_{C_s} \frac{dw}{w-z} - f(z) \oint_{C_r} \frac{dw}{w-z} = \oint_{C_s} \frac{f(w)}{w-z} dw - \oint_{C_r} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Ahora bien, como  $n(C_s, z) = +1$  por ser  $|z - c| < s$  pero  $n(C_r, z) = 0$  ya que  $|z - c| > r$ , el lado izquierdo se simplifica en  $2\pi i f(z)$ . La fórmula (2.22) sigue, al dividir por  $2\pi i$ .  $\square$

La primera integral en (2.22) representa una función holomorfa, no solamente en el anillo  $A(c; R, S)$ , sino en todo el disco abierto  $D(c; S)$ . En primer lugar, obsérvese que la integral  $\oint_{C_s} f(w)/(w - z) dw$  no depende de  $s$  toda vez que  $|z - c| < s < S$ , al aplicar la fórmula (2.23) con  $g(w) := f(w)/(w - z)$  para dos valores del radio  $s$ . Luego, al expandir  $1/(w - z)$  en serie geométrica alrededor de  $c$  como en la demostración del Teorema 2.28, se obtiene una serie de potencias

$$f_+(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad \text{donde} \quad a_n := \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_s} \frac{f(w)}{(w - c)^{n+1}} dw.$$

Esta serie es analítica en el disco  $D(c; s)$  para cada  $s < S$ , así que su radio de convergencia es mayor o igual que  $S$ .

Por otro lado, la segunda integral en (2.22) no depende de  $r$ , para  $R < r < |z - c|$ . Hay una expansión en serie geométrica

$$-\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(z-c) - (w-c)} = \frac{1}{z-c} \left/ \left(1 - \frac{w-c}{z-c}\right)\right. = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(w-c)^{k-1}}{(z-c)^k}$$

que es convergente toda vez que

$$\left| \frac{w-c}{z-c} \right| = \frac{r}{|z-c|} < 1.$$

Se deduce que la función

$$f_-(z) := \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z - c)^{-k} \quad \text{donde} \quad b_k := -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} f(w) (w - c)^{k-1} dw$$

representa una función holomorfa (por ser suma de una serie diferenciable término por término) en la región  $|z - c| > r$  para cualquier  $r > R$ . De hecho, al hacer el cambio de variable  $\zeta := c + (z - c)^{-1}$ , esta sumatoria es una serie de potencias en la variable  $(\zeta - c)$ , cuyo radio de convergencia es al menos  $1/R$ ; lo cual justifica la diferenciación término por término cuando  $|z - c| > R$ . Esta serie de potencias tiene término constante 0; al evaluarla en  $\zeta = c$ , se obtiene  $f_-(\infty) = 0$ .

Por construcción, las igualdades

$$f_+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_s} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad f_-(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

son válidas toda vez que  $R < r < |z - c| < s < S$ .

**Corolario 2.51.** Si  $0 \leq R < S$ , una función holomorfa  $f: A(c; R, S) \rightarrow \mathbb{C}$  puede expresarse de manera única como una suma

$$f(z) = f_+(z) + f_-(z) \quad \text{para } R < |z - c| < S,$$

donde  $f_+$  es una función holomorfa en el disco abierto  $D(c; S)$  y  $f_-$  es una función holomorfa en  $\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{D}(c; R)$  con  $f_-(\infty) = 0$ .

*Demostración.* Sólo falta comprobar la unicidad. Si  $f = g_+ + g_-$  en  $A(c; R, S)$ , donde  $g_+$  es holomorfa en  $D(c; S)$  y  $g_-$  es una función holomorfa en  $\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{D}(c; R)$  con  $g_-(\infty) = 0$ , entonces se puede definir una función entera  $h$  al colocar

$$h(z) := \begin{cases} f_+(z) - g_+(z) & \text{para } |z - c| < S, \\ g_-(z) - f_-(z) & \text{para } |z - c| > R, \end{cases}$$

porque  $f = f_+ + f_- = g_+ + g_-$  implica  $f_+ - g_+ = g_- - f_-$  en  $A(c; R, S)$ . La condición  $h(\infty) = g_-(\infty) - f_-(\infty) = 0$  dice que  $h(z) \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow \infty$  en  $\mathbb{C}$ , así que la función entera  $h$  está acotada. Por el Teorema 2.29 (de Liouville),  $h$  es constante, así que  $h(z) \equiv 0$ . En consecuencia,  $f_+ = g_+$  en  $D(c; S)$  y además  $f_- = g_-$  fuera de  $\overline{D}(c; R)$ .  $\square$

Al colocar  $a_{-n} := b_n$  en la serie que representa  $f_-$ , se obtiene un desarrollo de la función holomorfa  $f$  en una serie de potencias positivas y negativas.

**Definición 2.52.** Si  $f: A(c; R, S) \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa en un anillo centrado en  $c$ , tiene un desarrollo en **serie de Laurent**:<sup>13</sup>

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad \text{para } R < |z - c| < S, \tag{2.24}$$

cuyos coeficientes están dados por

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - c)^{n+1}} dw \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}, \tag{2.25}$$

donde  $C$  es cualquier círculo  $|w - c| = t$  con  $R < t < S$ , recorrido una vez contrario a reloj.  $\diamond$

<sup>13</sup>Pierre Alphonse Laurent obtuvo este desarrollo en 1843, pero su ensayo *Mémoire sur le calcul des variations* que lo contiene no fue publicado y sólo sobrevive una reseña hecha por Cauchy.

Como la serie de Laurent es la suma de una serie de potencias  $f_+$  en la variable  $(z - c)$  y otra serie de potencias  $f_-$  en la variable  $(z - c)^{-1}$ , se ve que la convergencia de (2.24) es *absoluta* en  $A(c; R, S)$ . Además, si  $R < r < s < S$ , la serie de Laurent *converge uniformemente en el anillo cerrado*  $\bar{A}(c; r, s) := \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z - c| \leq s\}$ . En efecto, la serie de potencias  $f_+$  converge uniformemente para  $|z - c| \leq s$  y la serie  $f_-$  converge uniformemente para  $|z - c| \geq r$ . Esta  $f_-$  se llama la **parte principal** de la serie de Laurent.

**Ejemplo 2.53.** Considérese la función

$$f(z) := \frac{1}{z - 2} + \frac{1}{z - 3}.$$

Esta función es holomorfa en la región  $\mathbb{C} \setminus \{2, 3\}$  y además es analítica en el disco abierto  $D(0; 2)$ . En el anillo  $A(0; 2, 3)$ ,  $f$  queda representada por una serie de Laurent  $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ . Para calcular esta serie, obsérvese que  $1/(z - 3)$  puede ser desarrollada en una serie geométrica

$$\frac{1}{z - 3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1 - z/3} = -\frac{1}{3} - \frac{z}{3^2} - \frac{z^2}{3^3} - \frac{z^3}{3^4} - \dots$$

mientras  $1/(z - 2)$  admite otro desarrollo en serie geométrica con potencias negativas de  $z$ :

$$\frac{1}{z - 2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - 2/z} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + \frac{2^3}{z^4} + \dots$$

La suma de estas dos series da la serie de Laurent para  $f(z)$ , en vista de la unicidad en el Corolario 2.51:

$$f(z) = \dots + 4z^{-3} + 2z^{-2} + z^{-1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}z^2 - \frac{1}{27}z^3 - \dots$$

En el anillo  $A(0; 3, \infty) = \{z : |z| > 3\}$ , la función  $f(z)$  queda representada por otra serie de Laurent,

$$f(z) = 2z^{-1} + 5z^{-2} + 13z^{-3} + 35z^{-4} + \dots$$

obtenida al combinar dos series geométricas, para  $\frac{1}{z - 2}$  y  $\frac{1}{z - 3}$  respectivamente.  $\diamond$

► Un anillo  $A(c; 0, S)$ , cuyo radio inferior es 0, es un *disco perforado*  $D(c; S) \setminus \{c\}$ . Si  $f: U \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa en una región  $U$  salvo posiblemente en  $c$ , entonces hay un radio  $S > 0$  tal que  $D(c; S) \subseteq U$ . En particular,  $f$  es holomorfa en el disco perforado  $D(c; S) \setminus \{c\}$  y posee una representación allí por una serie de Laurent. El punto  $c$  se llama una **singularidad aislada** de la función  $f$ ; la naturaleza de esta singularidad depende de la parte principal  $f_-$ .

**Proposición 2.54** (Riemann). *Sea  $U$  una región de  $\mathbb{C}$ , sea  $c \in U$  y sea  $f: U \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa. Si  $f$  está acotada en  $D(c; R) \setminus \{c\}$  para algún  $R > 0$ , entonces  $\lim_{z \rightarrow c} f(z)$  existe; y al colocar  $f(c) := \lim_{z \rightarrow c} f(z)$ , la función  $f$  se extiende a una función holomorfa  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ . En tal caso, se dice que  $c$  es una **singularidad removible** de  $f$ .*

*Demostración.* La holomorficidad de la función extendida viene del Lema 2.48. En contraste con ese lema, aquí no se supone *a priori* que  $\lim_{z \rightarrow c} f(z)$  existe.

La fórmula (2.25) para los coeficientes de la serie de Laurent implica una estimación

$$|a_n| \leq \frac{M_t}{t^n}, \quad \text{con } M_t := \sup\{|f(z)| : |z - c| = t\} \quad \text{para } 0 < t < R,$$

por la demostración del Corolario 2.27, aunque ahora se puede tomar  $n \in \mathbb{Z}$ .

Si  $M := \sup\{|f(z)| : 0 < |z - c| < R\} < \infty$ , entonces  $M_t \leq M$  para cada  $t$ , así que  $|a_n| \leq Mt^{-n}$  para  $n \in \mathbb{Z}$  y  $0 < t < R$ . Si  $n < 0$ , entonces  $t^{-n} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow 0$ ; se concluye que  $a_n = 0$  para  $n < 0$ . Entonces la parte principal  $f_-$  de la serie de Laurent es nula y dicha serie es una serie de potencias convergente  $f(z) \equiv f_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$  para  $0 < |z - c| < R$ . En particular,  $f(z) \rightarrow a_0$  cuando  $z \rightarrow c$ .  $\square$

**Ejemplo 2.55.** La función  $f(z) := (\text{sen } z)/z$  está definida en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Al dividir la serie de Taylor de  $\text{sen } z$  (en el origen) por  $z$ , se ve que la serie de Laurent de  $f(z)$  alrededor de 0 es una serie de potencias convergente en todo  $\mathbb{C}$ :

$$\frac{\text{sen } z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots + \frac{z^{2m}}{(2m+1)!} + \cdots$$

y la singularidad en el origen es removible, al tomar  $f(0) := 1$ . Como corolario, se obtiene  $\lim_{z \rightarrow 0} (\text{sen } z)/z = 1$ .  $\diamond$

**Definición 2.56.** Si  $f: U \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa y si  $M_t := \sup\{|f(z)| : |z - c| = t\}$  toda vez que  $D(c; t) \subseteq U$ , entonces ocurre exactamente una de tres posibilidades:

- (a) La función  $t \mapsto M_t$  es acotada cuando  $t \rightarrow 0$ ; por la Proposición 2.54, la singularidad de  $f$  en  $c$  es *removible*.
- (b) La función  $t \mapsto M_t$  no es acotada, pero existe  $m \in \mathbb{N}^*$  tal que  $t \mapsto t^m M_t$  sí es acotada cuando  $t \rightarrow 0$ . En este caso, los coeficientes de la serie de Laurent cumplen  $|a_n| \leq Mt^{-m-n}$  para alguna constante  $M$ ; luego, vale  $a_n = 0$  para  $n < -m$ . Si  $m = \min\{k \in \mathbb{N} : a_{-k} \neq 0\}$ , entonces la parte principal de la serie de Laurent es un “polinomio”  $f_-(z) = a_{-1}(z - c)^{-1} + \cdots + a_{-m}(z - c)^{-m}$ ; y el límite  $a_{-m} = \lim_{z \rightarrow c} (z - c)^m f(z)$  existe. En tal caso, la singularidad de  $f$  en  $c$  se llama un **polo de orden  $m$** .

- (c) Si  $t \mapsto t^m M_t$  no es acotada cuando  $t \rightarrow 0$ , para  $m \in \mathbb{N}^*$  alguna, entonces se dice que  $f$  posee una **singularidad esencial** en  $c$ . La serie de Laurent correspondiente tiene infinitos coeficientes  $a_n \neq 0$  con  $n < 0$ .

Si  $f$  es analítica en  $c$ ; o si tiene una singularidad removible; o bien si tiene un polo en  $c$ , se dice que  $f$  es **meromorfa** en la región  $U$ .<sup>14</sup>  $\diamond$

**Ejemplo 2.57.** La función  $f(z) := e^{1/z}$  tiene una singularidad esencial en 0, porque es obvio que en  $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  admite el desarrollo:

$$e^{1/z} = 1 + z^{-1} + \frac{z^{-2}}{2} + \cdots + \frac{z^{-n}}{n!} + \cdots$$

En cambio, una *función racional*  $f(z) = p(z)/q(z)$ , donde  $p, q$  son polinomios sin factor común, tiene un polo de orden  $k$  en  $c$  toda vez que  $q$  tiene una cero de orden  $k$  en  $c$ , en cuyo caso  $q(z) = (z - c)^k q_k(z)$  con  $q_k(c) \neq 0$ ,  $p(c) \neq 0$ , lo cual implica que  $(z - c)^k f(z) \rightarrow p(c)/q_k(c) \neq 0$  cuando  $z \rightarrow c$ . La definición de polos y sus órdenes es entonces consistente con la discusión en la Sección 1.4 para funciones racionales.  $\diamond$

Cabe notar que una función holomorfa en una región  $U \setminus \{c\}$  puede tener una singularidad *no aislada* en  $c$ . Un ejemplo sería la función  $g(z) := \text{ctg}(1/z)$ , con  $c = 0$ .

► Si  $c$  es un polo de  $f$ , entonces  $|f(z)| \rightarrow \infty$  cuando  $z \rightarrow c$  pues  $|a_{-m}(z - c)^{-m}| \rightarrow \infty$ ; luego,  $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = \infty$  en  $\mathbb{C}_\infty$ . En cambio, si  $f$  tiene una singularidad esencial en  $c$ , el límite  $\lim_{z \rightarrow c} f(z)$  no existe, ni siquiera en  $\mathbb{C}_\infty$ . El siguiente resultado sorprendente muestra que la imagen bajo  $f$  de cualquier vecindario perforado de  $c$  es densa en el plano complejo.<sup>15</sup>

**Teorema 2.58** (Casorati y Weierstrass). *Si una función holomorfa  $f: U \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{C}$  tiene una singularidad esencial en  $c$ , entonces, para todo  $w \in \mathbb{C}$  y cada  $\varepsilon > 0$  y  $\delta > 0$ , hay un punto  $z \in U$  tal que*

$$0 < |z - c| < \delta \quad \text{y a la vez} \quad |f(z) - w| < \varepsilon.$$

*Demostración.* Si así no fuera, habría un punto  $w_0 \in \mathbb{C}$  y  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  tales que

$$0 < |z - c| < \delta \implies |f(z) - w_0| \geq \varepsilon.$$

Considérese la función

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w_0} \quad \text{para} \quad z \in U \setminus \{c\}.$$

<sup>14</sup>El prefijo mero- viene del griego *méros* que significa “una porción”.

<sup>15</sup>Hay un resultado más fino, el llamada *Gran Teorema de Picard*, que muestra que esa imagen omite a lo sumo un punto de  $\mathbb{C}$ .

Entonces  $g$  sería holomorfa en  $D(c; \delta) \setminus \{c\}$  porque  $f(z) \neq w_0$  en este disco perforado. Además,  $|g(z)| \leq 1/\varepsilon$  allí; la Proposición 2.54 muestra que  $g$  tendría una singularidad removible en  $c$ .

Sea  $w_1 := \lim_{z \rightarrow c} g(z)$ . Si fuera  $w_1 \neq 0$ , entonces  $f(z) \rightarrow w_0 + 1/w_1$  cuando  $z \rightarrow c$ , así que la singularidad de  $f$  en  $c$  sería removible, en vez de esencial.

Si fuera  $w_1 = 0$ , entonces, por la Proposición 1.18,  $g(z) \equiv (z - c)^m h(z)$  para algún  $m \in \mathbb{N}^*$ , con  $h$  analítica en  $D(0; \delta)$  y  $h(c) \neq 0$ . Entonces sería

$$f(z) = (z - c)^{-m} \frac{1}{h(z)} + w_0 \quad \text{para } 0 < |z - c| < \delta,$$

así que  $f$  tendría un polo de orden  $m$  en  $c$ , en vez de una singularidad esencial. □

### Residuos de una función de variable compleja

En un vecindario de una singularidad aislada de  $f(z)$ , se puede efectuar un desarrollo de Laurent; el primer coeficiente de su parte principal merece un nombre especial.

**Definición 2.59.** Si  $f$  es una función holomorfa en un disco perforado  $D(c; R) \setminus \{c\}$ , el **residuo** de  $f$  en el punto  $c$  es el coeficiente  $a_{-1}$  de la serie de Laurent de  $f$  centrado en  $c$ :

$$\boxed{\text{Res}_{z=c} f(z) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz.} \tag{2.26}$$

El contorno cerrado  $C$  en esta integral puede ser un círculo de radio  $r$ , con  $0 < r < R$  (recorrido una vez contrario a reloj); o más generalmente, cualquier contorno cerrado con traza en  $D(c; R) \setminus \{c\}$  tal que  $n(C, c) = 1$ . ◇

**Lema 2.60.** Si  $C$  es el círculo  $\{z : |z - c| = r\}$  con  $r > 0$  y si  $m \in \mathbb{Z}$ , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{(z - c)^m} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1, \\ 0 & \text{si } m \neq 1. \end{cases}$$

*Demostración.* Al parametrizar  $C$  por  $\theta \mapsto c + re^{i\theta}$ , es fácil evaluar la integral:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{(z - c)^m} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ire^{i\theta} d\theta}{r^m e^{im\theta}} = \frac{1}{2\pi r^{m-1}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(m-1)\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi r^{m-1}} \int_0^{\pi} \cos((m-1)\theta) d\theta = \delta_{m-1,0} = \delta_{m,1}. \end{aligned}$$

En el cálculo, se usó  $e^{-i(m-1)\theta} = \cos((m-1)\theta) - i \sin((m-1)\theta)$ ; las funciones de variable real cos y sen son, respectivamente, par e impar: el segundo tipo tiene integral nula en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . □

Para curvas cerradas más generales que no pasan por  $c$ , el lema anterior admite la generalización siguiente.

**Lema 2.61.** Si  $C$  es una curva cerrada suave que no pasa por el punto  $c \in \mathbb{C}$  y si  $m \in \mathbb{Z}$ , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{(z-c)^m} = \begin{cases} n(C, c) & \text{si } m = 1, \\ 0 & \text{si } m \neq 1. \end{cases}$$

*Demostración.* El caso  $m = 1$  es el Lema 2.43, ya mostrado. En el caso  $m \neq 1$ , la función  $f(z) := (z-c)^{-m}$  admite una primitiva  $F(z) := (z-c)^{1-m}/(1-m)$  en  $\mathbb{C} \setminus \{c\}$ , así que  $\oint_C (z-c)^{-m} dz = 0$  por el Corolario 2.12.  $\square$

El siguiente resultado se conoce como el **teorema de los residuos**.

**Teorema 2.62.** Sea  $U \subseteq \mathbb{C}$  una región simplemente conexa y sea  $f$  una función holomorfa en  $U$  salvo por un número finito de singularidades aisladas  $c_1, \dots, c_m \in U$ . Si  $C$  es una curva cerrada con traza en  $U$  que no pasa por los puntos  $c_k$ , entonces

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m n(C, c_k) \operatorname{Res}_{z=c_k} f(z). \tag{2.27}$$

*Demostración.* Sea  $h_k$  la parte principal de la serie de Laurent de  $f$  centrada en  $c_k$ ; la función  $h_k$  es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{c_k\}$  y la función  $f - h_k$  tiene una singularidad removible en  $c_k$ . Por tanto, la función

$$g(z) := f(z) - h_1(z) - h_2(z) - \dots - h_m(z),$$

definido en  $U \setminus \{c_1, \dots, c_m\}$ , se extiende a una función holomorfa en  $U$ . El teorema de Cauchy en  $U$  garantiza que  $\oint_C g(z) dz = 0$ , así que

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^m \oint_C h_k(z) dz.$$

Por otro lado, la serie de Laurent  $h_k(z) := \sum_{n \geq 1} a_{-n}(z-c_k)^{-n}$  converge uniformemente en cualquier anillo cerrado  $\bar{A}(c_k; r, s) = \{z : r \leq |z-c_k| \leq s\}$  con  $0 < r < s$ . Como la traza de  $C$  es un conjunto compacto y  $c_k \notin C$ , es posible hallar  $r, s$  tales que  $C \subset \bar{A}(c_k; r, s)$ . Por ende, esta serie de Laurent converge uniformemente en  $C$ ; luego,

$$\oint_C h_k(z) dz = \oint_C \sum_{n \geq 1} a_{-n}(z-c_k)^{-n} dz = \sum_{n \geq 1} a_{-n} \oint_C (z-c_k)^{-n} dz = 2\pi i a_{-1} n(C, c_k),$$

por el Lema 2.61. (Si la singularidad de  $f$  en  $c_k$  es un polo, esta sumatoria  $\sum_{n \geq 1}$  es finita y la convergencia uniforme en  $C$  es supererogatoria.)  $\square$

En muchas ocasiones se aplica la fórmula (2.27) a integrales sobre un contorno cerrado *simple*  $C$ . En tal caso, el complemento  $\mathbb{C} \setminus C$  tiene solo dos componentes conexos;<sup>16</sup> en la componente no acotada, vale  $n(C, z) \equiv 0$ ; y en la componente acotada, vale  $n(C, z) \equiv \pm 1$ . El caso  $n(C, z) \equiv +1$  corresponde a un recorrido de  $C$  “en el sentido positivo” (es decir, contrario a reloj); el caso  $n(C, z) \equiv -1$  ocurre cuando se recorre  $C$  “en el sentido negativo” (esto es, a favor a reloj). Al componente acotado se le llama entonces el *interior*  $I(C)$  del contorno cerrado *simple*  $C$ .

► Es útil tener algunas recetas para calcular residuos rápidamente. Los tres fórmulas que siguen cumplen ese propósito.

**Lema 2.63.** Si la función de variable compleja  $f$  tiene un polo simple en un punto  $c$ , su residuo en  $c$  está dado por

$$\boxed{\operatorname{Res}_{z=c} f(z) = \lim_{z \rightarrow c} (z - c)f(z).} \quad (2.28)$$

*Demostración.* La función  $f$  tiene un polo simple en  $c$  si y solo si

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - c} + g(z),$$

donde  $g$  es holomorfa en un vecindario de  $c$ . Como  $\lim_{z \rightarrow c} (z - c)g(z) = 0$ , se obtiene  $\lim_{z \rightarrow c} (z - c)f(z) = a_{-1}$ .

De hecho, la existencia de un polo *simple* en  $c$  es equivalente a la existencia del límite  $\lim_{z \rightarrow c} (z - c)f(z)$ , con un valor no igual a 0.  $\square$

**Corolario 2.64.** Si dos funciones  $g$  y  $h$  son holomorfas cerca de  $c$  con  $g(c) \neq 0$  y si  $c$  es un cero simple de  $h$ , entonces

$$\boxed{\operatorname{Res}_{z=c} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(c)}{h'(c)}.} \quad (2.29)$$

*Demostración.* La hipótesis dice que  $h(z) = (z - c)h_1(z)$  con  $h_1(c) \neq 0$ , lo cual implica que  $h'(z) = h_1(z) + (z - c)h_1'(z)$  y en particular  $h'(c) = h_1(c)$ . Como  $g(c) \neq 0$ , el cociente  $g(z)/h(z)$  tiene un polo simple en  $z = c$ . Del Lema 2.63 se sigue que

$$\operatorname{Res}_{z=c} \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow c} (z - c) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow c} \frac{(z - c)g(z)}{h(z)} = \frac{g(c)}{h_1(c)} = \frac{g(c)}{h'(c)}. \quad \square$$

<sup>16</sup>Esta afirmación, para curvas suaves por trozos, es un caso particular de una proposición topológica nada trivial. El **teorema de curvas de Jordan** dice que cualquier curva cerrada *simple* que es la imagen de una función *continua*  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  reparte su complemento en exactamente dos componentes conexas, una acotada y la otra no acotada.

**Lema 2.65.** Si la función de variable compleja  $f$  tiene un polo de orden  $m > 1$  en  $c$ , su residuo en  $c$  está dado por

$$\boxed{\operatorname{Res}_{z=c} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(c)}, \quad \text{donde } \underline{g(z) := (z-c)^m f(z)}. \quad (2.30)$$

*Demostración.* La hipótesis dice que la función  $g(z) := (z-c)^m f(z)$  tiene una singularidad removible en  $c$ , con  $g(c) \neq 0$ . Si la serie de Laurent de  $f$  es

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-c)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-c)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-c} + a_0 + a_1(z-c) + \cdots$$

entonces la serie de Taylor de  $g$  es

$$g(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-c) + \cdots + a_{-1}(z-c)^{m-1} + a_0(z-c)^m + \cdots$$

y para extraer el coeficiente  $a_{-1}$  se deriva  $(m-1)$  veces:  $g^{(m-1)}(c) = (m-1)! a_{-1}$ .  $\square$

En el próximo capítulo, se aplicará el teorema del residuo y las fórmulas anteriores para evaluar ciertas integrales (por lo general impropias) de una variable real.

## 2.6. Funciones meromorfas

Una función *meromorfa*  $f$  de una variable compleja no tiene singularidades aisladas: posee un conjunto (tal vez vacío) de *polos* y en el complemento de los polos  $f$  es holomorfa. En un vecindario de un polo  $c$  de orden  $m$ , el desarrollo de Laurent de  $f$  muestra que se puede escribir

$$f(z) = (z-c)^{-m} h(z), \quad \text{con } h(c) \neq 0, \quad (2.31)$$

donde  $h$  es holomorfa en algún disco abierto  $D(c; \delta)$ . Por lo tanto, no hay otros polos de  $f$  en la región  $0 < |z-c| < \delta$ ; al igual que sus ceros, *los polos de una función meromorfa son aislados*.

Se ha observado (en la discusión previa al Teorema 2.58) que si  $c$  es un polo de  $f$ , entonces  $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = \infty$  en  $\mathbb{C}_\infty$ . Entonces una función meromorfa, definida en una región  $U$  que contiene sus polos, puede ser considerado como una función  $f: U \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ .

La sustitución  $\zeta - c := (z-c)^{-1}$  convierte la serie de Laurent (2.24) de  $f$  centrado en  $c$  en otra serie de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n \longleftrightarrow g(\zeta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m} (\zeta-c)^m.$$

De esta manera,  $z = \infty$  corresponde a  $\zeta = c$ . Se dice que  $f$  tiene una *singularidad en  $\infty$*  (removible, polo o esencial) si  $g$  tiene una singularidad de la misma clase en  $\zeta = c$ .

Ahora se puede extender la Proposición 2.36 (el “principio del argumento”, que cuenta el número de ceros de una función holomorfa en un disco abierto) a funciones meromorfas. La nueva versión también toma en cuenta el número de polos rodeados por un contorno cerrado, no necesariamente simple.

**Teorema 2.66** (Principio del argumento, versión 2). *Sea  $f: U \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  una función meromorfa en una región  $U$  simplemente conexa; que tiene ceros  $c_j \in U$  con órdenes respectivos  $m_j$ , y polos  $p_k \in U$  con órdenes respectivos  $n_k$ . Si  $C$  es un contorno cerrado (suave por trozos) con traza en  $U$  que no pasa por cero o polo alguno, la siguiente fórmula es válida:*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_j n(C, c_j) m_j - \sum_k n(C, p_k) n_k. \quad (2.32)$$

*Demostración.* Si  $z \in U$  pertenece al “exterior” del contorno  $C$  (esto es, la componente conexa no acotada de  $\mathbb{C} \setminus C$ ), entonces  $n(C, z) = 0$  por el Lema 2.46, así que tales puntos no contribuyen al lado derecho de (2.32). El complemento de esa componente no acotado es un conjunto compacto; como los ceros y polos de  $f$  son aislados, solo hay un número finito de cada tipo en el “interior”  $I(C)$ , la unión de las componentes acotadas de  $\mathbb{C} \setminus C$ .

Sean  $c_1, \dots, c_r$  los ceros de  $f$  en  $I(C)$ , con órdenes  $m_1, \dots, m_r$ ; y sean  $p_1, \dots, p_s$  los polos de  $f$  en  $I(C)$ , con órdenes  $n_1, \dots, n_s$ . Al combinar las fórmulas (2.17) y (2.31), se puede expresar la función  $f$ , en una región abierta  $V$  tal que  $C \cup I(C) \subset V \subseteq U$ , de esta manera:

$$f(z) = (z - c_1)^{m_1} \cdots (z - c_r)^{m_r} (z - p_1)^{-n_1} \cdots (z - p_s)^{-n_s} g(z)$$

donde  $g: V \rightarrow \mathbb{C}^\times$  es una función holomorfa sin ceros.

Al aplicar la regla de Leibniz para derivar el lado derecho, se obtiene

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \sum_{j=1}^r \frac{m_j}{z - c_j} - \sum_{k=1}^s \frac{n_k}{z - p_k}.$$

Esta expresión dice que los polos de la función  $f'/f$  en la región  $V$  son precisamente los ceros y los polos de  $f$  en  $I(C)$ . Además, cada uno de estos polos de  $f'/f$  es un polo simple.

Los residuos de  $f'/f$  en estos polos simples vienen directamente de la fórmula (2.28):

$$\operatorname{Res}_{z=c_j} \frac{f'(z)}{f(z)} = m_j, \quad \operatorname{Res}_{z=p_k} \frac{f'(z)}{f(z)} = -n_k.$$

La función  $g'/g$  es holomorfa en  $V$ ; por el teorema de Cauchy,  $\int_C g'(z)/g(z) dz = 0$ . Por lo tanto, el cálculo del lado izquierdo de (2.32) sigue inmediatamente de la fórmula (2.27) del teorema de los residuos.  $\square$

**Corolario 2.67.** Sea  $f: U \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  una función meromorfa no constante, definida en una región  $U \subseteq \mathbb{C}$ . Sea  $C$  un contorno cerrado simple, recorrido una vez en el sentido positivo, tal que  $C \cup I(C) \subset U$ , que no atraviesa los ceros ni los polos de  $f$ . Si los ceros en  $I(C)$  tienen órdenes respectivos  $m_j$  y los polos en  $I(C)$  tienen órdenes respectivos  $n_k$ , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_j m_j - \sum_k n_k. \quad (2.33)$$

El lado derecho es el número total de ceros menos el número total de polos interiores a  $C$ , contados con multiplicidad.  $\square$

**Ejemplo 2.68.** Sea  $f(z) = p(z)/q(z)$  una función racional. Sus ceros son las raíces  $c_j$  del polinomio  $p$  y sus polos son las raíces  $p_k$  del polinomio  $q$ . Entonces hay una constante  $a \neq 0$  tal que

$$f(z) = a (z - c_1)^{m_1} \dots (z - c_r)^{m_r} (z - p_1)^{-n_1} \dots (z - p_s)^{-n_s} \quad (2.34)$$

donde los grados respectivos de  $p$  y  $q$  son  $m = m_1 + \dots + m_r$  y  $n = n_1 + \dots + n_r$ . Fíjese que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_1}{z - c_1} + \dots + \frac{m_r}{z - c_r} - \frac{n_1}{z - p_1} - \dots - \frac{n_s}{z - p_s}.$$

Si  $C$  es un círculo de radio suficientemente grande que encierra todos los  $c_j$  y los  $p_k$ , entonces por el Corolario 2.67, o bien por un cálculo directo con la fórmula integral de Cauchy, se obtiene

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m - n.$$

Se debe considerar también el cero o polo de  $f$  en  $\infty$ . Si  $m = n$ , entonces  $f(\infty) = a \neq 0$  [al tomar el límite  $\lim_{z \rightarrow \infty} p(z)/q(z) = a$ ] y no hay cero ni polo en  $\infty$ .

Escríbase  $g(z) := f(1/z)$ ; es evidente de (2.34) que si  $m < n$ , entonces  $f$  tiene un cero en  $\infty$  (es decir,  $g$  tiene un cero en 0) de orden  $n - m$ ; pero si  $m > n$ ,  $f$  tiene un polo en  $\infty$  (es decir,  $g$  tiene un polo en 0) de orden  $m - n$ . De este modo se recupera el resultado del Lema 1.27: la suma algebraica del número de ceros y polos de una función racional es cero, cuando se incluye en la cuenta el posible cero o polo en  $\infty$ .  $\diamond$

Vale la pena, entonces, extender el concepto de función meromorfa a toda la esfera de Riemann. Una función  $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  da lugar a otra función  $g: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  definido por  $g(z) := f(1/z)$ , bajo el convenio de que  $1/0 := \infty$  y  $1/\infty := 0$ . Si  $f$  es holomorfa en el exterior de un disco cerrado  $z \in \mathbb{C} : |z| > R$ , entonces  $g$  es holomorfa en el disco perforado  $D(0; 1/R) \setminus \{0\}$ ; el comportamiento de  $f$  en  $\infty$  corresponde al comportamiento de  $g$  en 0. Por definición, la singularidad de  $f$  en  $\infty$  es removable, esencial, o un polo si la singularidad de  $g$  en 0 es removable, esencial, o un polo, respectivamente.

En el caso de un polo, *el orden del polo de  $f$  en  $\infty$*  es el orden del polo de  $g$  en 0. Si la singularidad de  $f$  en  $\infty$  es removible, se define  $f(\infty) := g(0)$  y se dice que  $f$  es *holomorfa en  $\infty$* . Una función  $f$  que es meromorfa en el plano complejo  $\mathbb{C}$  y que es holomorfa en  $\infty$  o bien tiene un polo en  $\infty$  es, por definición, *meromorfa en  $\mathbb{C}_\infty$* .

**Lema 2.69.** *Una función  $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  es meromorfa en todo  $\mathbb{C}_\infty$  si y solo si  $f$  es una función racional.*

*Demostración.* Del Ejemplo 2.68 se ve que una función racional  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  se extiende a  $\mathbb{C}_\infty$  al definir  $f(\infty) := g(0) \in \mathbb{C}$  si  $g(z) = f(1/z)$  es holomorfa en 0, o bien  $f(\infty) := \infty$  si  $g$  tiene un polo en 0. Por lo tanto, la función extendida  $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  es meromorfa en  $\mathbb{C}_\infty$ .

Por otro lado, dada una función meromorfa  $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ , su singularidad (removible o polo) en  $\infty$  es aislada porque  $f$  es holomorfa en  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$  para algún  $R > 0$ . Esto sucede porque  $g(z) = f(1/z)$  es holomorfa en  $0 < |z| < 1/R$ . Los otros polos de  $f$  son también aislados en el conjunto compacto  $\overline{D}(0; R)$ . Esto dice que  $f$  solo tiene una cantidad finita de polos en  $\mathbb{C}$ , denotables por  $\{p_1, \dots, p_s\}$ .

Para  $k = 1, \dots, s$ , hay una serie de Laurent de  $f$  cerca del polo  $p_k$  de la forma

$$f(z) = f_{k,+}(z) + f_{k,-}(z) = f_{k,+}(z) + \sum_{m=1}^{n_k} a_{-m,k}(z - p_k)^{-m}.$$

La parte principal  $f_{k,-}$  es un polinomio en  $(z - p_k)^{-1}$  y como tal está definido en todo  $\mathbb{C}$ , con valores en  $\mathbb{C}_\infty$ .

Si  $f$  tiene un polo en  $\infty$  de orden  $N$ , la serie de Laurent de  $g$  cerca de 0 es

$$f(1/z) = g(z) = g_+(z) + g_-(z) = g_+(z) + \sum_{m=1}^N b_{-m} z^{-m},$$

o equivalentemente,  $f(1/z) = g_+(1/z) + \sum_{m=1}^N b_{-m} z^m$ , donde  $g_+(1/z)$  es holomorfa en  $\infty$  y la parte principal de  $f$  en  $\infty$  es un polinomio ordinario, definido en todo  $\mathbb{C}$ .

Considérese la función  $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  obtenida al restar de  $f$  estas partes principales:

$$h(z) := f(z) - g_-(1/z) - \sum_{k=1}^s f_{k,-}(z).$$

Esta es una *función holomorfa entera* en  $\mathbb{C}$  porque tiene singularidades removibles en  $\{p_1, \dots, p_s\}$ . Como cada  $f_{k,-}(z) \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow \infty$ , se ve que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} (f(z) - g_-(1/z)) = g_+(0),$$

así que la función  $h$  es acotada en una región  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$  y también acotada (por su continuidad) en el complemento  $\overline{D}(0; R)$ .

En fin,  $h$  es una función entera acotada. Por el Teorema 2.29 de Liouville,  $h$  es una función *constante*. En resumen:

$$f(z) = h(0) + \sum_{m=1}^N b_{-m} z^m + \sum_{k=1}^s f_{k,-}(z),$$

la cual es una función racional. □

**Corolario 2.70.** *Una función racional queda determinada, hasta un múltiplo constante, por las posiciones y los órdenes de sus ceros y sus polos.*

*Demostración.* Si  $g$  y  $h$  son dos funciones racionales con los mismos ceros y polos, con los mismos órdenes respectivos (incluyendo el posible cero o polo en  $\infty$ ), entonces ellas definen dos funciones meromorfas en  $\mathbb{C}_\infty$ . El cociente  $f(z) := g(z)/h(z)$  es una función meromorfa  $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  que no toma los valores 0 ni  $\infty$ . Por lo tanto,  $f|_{\mathbb{C}}$  es una función holomorfa en  $\mathbb{C}$  que además es holomorfa en  $\infty$  y por ende es acotada. Luego  $g(z)/h(z) \equiv a$  para alguna constante  $a \in \mathbb{C}^\times$ . □

► Una consecuencia del principio del argumento (es su versión original) es el Teorema 2.37 de Rouché, que tiene como consecuencia el principio del módulo máximo, Teorema 2.41. Ese teorema puede proporcionar información sobre funciones holomorfas que cumplen condiciones adicionales. Un ejemplo clásico de este fenómeno es el célebre **Lema de Schwarz**, a continuación.

*Notación.* El *disco unitario abierto* juega un papel notable en la teoría de una variable compleja. Conviene introducir la notación

$$\mathbb{D} := D(0; 1) = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}.$$

**Lema 2.71** (Schwarz). *Si  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa tal que  $f(0) = 0$  y  $|f(z)| \leq 1$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ , entonces*

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{para } |z| < 1; \quad \text{y} \quad |f'(0)| \leq 1. \tag{2.35}$$

*Además, si cualquiera de las desigualdades en (2.35) se cumple con igualdad, entonces  $f$  es una rotación:  $f(z) \equiv e^{i\theta} z$  para algún  $\theta \in \mathbb{R}$ .*

*Demostración.* La hipótesis  $f(0) = 0$  implica que  $f(z) \equiv z g(z)$  donde  $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  es también holomorfa. Esto dice que  $g(z) := f(z)/z$  tiene una singularidad removible en 0.

Si  $0 < r < 1$ , la hipótesis  $|f(z)| \leq 1$  implica que

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r} \quad \text{para } |z| = r.$$

El Corolario 2.42 muestra que  $|g(z)| \leq 1/r$  en el disco  $D(0; r)$  también. Al dejar  $r \uparrow 1$ ,  $\sup\{|g(z)| : |z| \leq r\}$  crece y la cota  $1/r$  decrece, y por lo tanto

$$\sup\{|g(z)| : |z| < 1\} \leq \inf\{1/r : 0 < r < 1\} = 1.$$

Esto establece que  $|f(z)| \leq |z|$  cuando  $|z| < 1$ .

También, al notar que

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = g(0),$$

se obtiene  $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$ .

Si ahora  $|f(z_0)| = |z_0|$  para algún  $z_0 \in \mathbb{D}$ , entonces  $|g(z_0)| = 1$  y por tanto la función  $z \mapsto |g(z)|$  alcanza un máximo local en  $z_0$ . El Teorema 2.41 entonces dice que  $g$  es una función constante, necesariamente de módulo 1: lo cual implica que  $g(z) \equiv e^{i\theta}$  para algún  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Del mismo modo, si  $|f'(0)| = 1$ , entonces  $|g(0)| = 1$  y  $|g|$  alcanza un máximo local en 0; de nuevo,  $g$  es una constante  $e^{i\theta}$ .  $\square$

El Lema 2.71 implica que una función holomorfa  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  que cumple  $f(0) = 0$ , y que no es una rotación  $z \mapsto e^{i\theta}z$ , debe cumplir  $|f(z)| < |z|$  para  $z \in \mathbb{D}$ . Esto sucede, evidentemente, en el caso de las potencias  $f(z) := z^n$ , con  $n \in \mathbb{N}^*$ .

► La hipótesis  $f(0) = 0$  puede ser modificada, con el uso de las transformaciones lineales fraccionales:

$$s_c(z) := \frac{c - z}{1 - \bar{c}z}, \quad \text{con } \underline{c \in \mathbb{D}}. \tag{2.36}$$

Es claro que  $s_c(0) = c$ ,  $s(c) = 0$  y que el único polo de  $s_c$  es  $1/\bar{c}$ , con  $|1/\bar{c}| > 1$ . Luego  $s_c$  es holomorfa en el disco abierto  $\mathbb{D}$ . Además, en su frontera  $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ , se ve que

$$s_c(e^{i\theta}) = \frac{c - e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}\bar{c}} = -e^{-i\theta} \frac{c - e^{i\theta}}{\bar{c} - e^{-i\theta}}$$

donde la fracción al lado derecho es de la forma  $w/\bar{w} \in \mathbb{T}$ . Entonces  $|s_c(e^{i\theta})| = 1$ . El Teorema 2.41 implica que  $|s_c(z)| < 1$  para  $|z| < 1$ , es decir, que  $\underline{s_c(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}}$ .

La transformación lineal fraccional inversa de  $s_c$  viene de

$$\begin{aligned} w = \frac{c - z}{1 - \bar{c}z} &\implies w - \bar{c}zw = c - z \\ &\implies z - \bar{c}zw = c - w \implies z = \frac{c - w}{1 - \bar{c}w} \end{aligned}$$

y se ve que  $s_c$  coincide con su propia función inversa (!) Por lo tanto,  $s_c$  es una *biyección holomorfa* de  $\mathbb{D}$  en  $\mathbb{D}$ . (Se dice que  $s_c: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  es *biholomorfa*.)

**Proposición 2.72.** Si  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  es biholomorfa, entonces  $f(z) \equiv e^{i\theta} s_c(z)$  para algún  $\theta \in \mathbb{R}$  y algún  $c \in \mathbb{D}$ .

*Demostración.* Hay un único  $c \in \mathbb{D}$  con  $f(c) = 0$ . Colóquese  $h(z) := f(s_c(z))$ ; entonces  $h(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$  y  $h(0) = 0$ . El Lema 2.71 de Schwarz muestra que  $|h(z)| \leq |z|$  para  $z \in \mathbb{D}$ .

La biyección compuesta  $h = f \circ s_c: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  es holomorfa, y su función inversa  $g = s_c \circ f^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  es también holomorfa. Es claro que  $g(0) = 0$ . Luego, el Lema de Schwarz muestra que  $|g(w)| \leq |w|$  para  $w \in \mathbb{D}$ . Al tomar  $w = h(z)$ , de modo que  $|z| \leq |h(z)|$ , se deduce que  $|h(z)| = |z|$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ . Del Lema 2.71 de nuevo, existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que  $h(z) \equiv e^{i\theta} z$ .

Ahora  $f = h \circ s_c$  porque  $s_c$  es su propio inverso. Luego,  $f(z) \equiv e^{i\theta} s_c(z)$ . □

## 2.7. Ejercicios sobre el teorema y las fórmulas de Cauchy

**Ejercicio 2.1.** Si  $C$  es el círculo  $|z| = 1$ , recorrido una vez contrario a reloj, evaluar directamente las integrales

$$I_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^m dz$$

para todo  $m \in \mathbb{Z}$ . [Indicación: para  $m = -2, -3, \dots$  se puede usar  $1/z = \bar{z}$  en  $C$ .]

**Ejercicio 2.2.** Si  $c = a + ib \neq 0$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ , evaluar la integral  $\int_{[0,c]} e^z dz$ . En seguida, calcular las integrales reales *sin integrar por partes*:

$$\int_0^1 e^{at} \cos bt dt \quad \text{y} \quad \int_0^1 e^{at} \sen bt dt.$$

**Ejercicio 2.3.** Si  $0 < r < R$ , hallar la integral de línea sobre el círculo  $|z| = r$  de la función racional

$$\frac{R+z}{(R-z)z} = \frac{1}{z} + \frac{2}{R-z}.$$

Deducir la fórmula integral:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{R^2 - 2Rr \cos \theta + r^2} = \frac{1}{R^2 - r^2}.$$

**Ejercicio 2.4.** [Teorema de Green]

(a) Sean  $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones continuamente diferenciables en una región  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  que incluye el rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Demostrar que

$$\oint_{\partial R} u(x, y) dx + v(x, y) dy = \iint_R \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy dx.$$

donde  $\partial R$  es el borde de  $R$  (recorrido una vez en sentido contrario a reloj).

- (b) Si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa cuya derivada  $f'$  es continua,<sup>17</sup> usar la parte (a) para dar una demostración alternativa del teorema de Cauchy para el rectángulo  $R$ :

$$\oint_{\partial R} f(z) dz = 0.$$

[[ Indicación: Si  $f = u + iv$ , observar que  $\oint_{\partial R} f(z) dz = \oint_{\partial R} (u + iv)(dx + i dy)$ . ]]

**Ejercicio 2.5.** [Lema de Leibniz]

- (a) Si  $R \subset U \subset \mathbb{R}^2$  como en el Ejercicio 2.4 anterior, y si  $g: U \rightarrow \mathbb{C}$  es una función continuamente diferenciable, defínase

$$h(t) := \int_a^b g(s, t) ds.$$

Demostrar que  $h$  es continuamente diferenciable en un vecindario de  $[c, d]$  y que

$$h'(t) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(s, t) ds.$$

- (b) Usar la parte (a) para comprobar que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - z} ds = 1 \quad \text{cuando } |z| < 1.$$

[[ Indicación: Tómese  $g(s, t) := e^{is}/(e^{is} - tz)$ . ]]

En los Ejercicios 2.6 a 2.12,  $\oint_C$  denota la integral sobre un círculo  $C$ , recorrido una vez contrario a reloj.

**Ejercicio 2.6.** Si  $C$  es el círculo  $|z| = 1$ , evaluar las integrales

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\operatorname{sen}^6 z}{(z - \pi/6)} dz \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\operatorname{sen}^6 z}{(z - \pi/6)^3} dz.$$

**Ejercicio 2.7.** Si  $C$  es el círculo  $|z| = 3$  y si  $t > 0$ , calcular las integrales:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{tz}}{(z+1)^4} dz \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{tz}}{(z^2+1)^2} dz.$$

**Ejercicio 2.8.** Si  $t > 0$  y si  $C$  es el círculo  $|z+1| = r$  para algún  $r > 0$ , comprobar que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z e^{tz}}{(z+1)^3} dz = (t - \frac{1}{2}t^2) e^{-t}.$$

<sup>17</sup>Este hipótesis (la continuidad de la derivada) es redundante, en vista del Teorema 2.25.

**Ejercicio 2.9.** Si  $a > 0$  y si  $C$  es el círculo  $|z| = r$  para algún  $r > a$ , calcular las integrales

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z}{z^2 + a^2} dz \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z e^z}{(z - a)^3} dz.$$

**Ejercicio 2.10.** Si  $C$  es el círculo  $|z| = 1$ , calcular las integrales

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen} z}{z} dz, \quad \oint_C \frac{1}{(2z - 1)^3} dz, \quad \oint_C e^{z^2} \left( \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} \right) dz.$$

**Ejercicio 2.11.** Si  $C$  es el círculo  $|z| = 1$  y si  $n \in \mathbb{N}$ , evaluar la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \left( z + \frac{1}{z} \right)^{2n} \frac{dz}{z}$$

y de ahí deducir la fórmula integral:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}.$$

**Ejercicio 2.12.** Si  $r > 0$  con  $r \neq 1$ , calcular la integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$$

a partir de la integral  $\oint_C \frac{dz}{(z - r)(z - r^{-1})}$  sobre el círculo  $|z| = 1$ .

**Ejercicio 2.13** (Teorema del valor medio). Si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa cuyo dominio incluye el disco cerrado  $\overline{D}(c; r)$ , demostrar que

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(c + r e^{i\theta}) d\theta$$

como consecuencia de la fórmula integral de Cauchy. Además, obtener expresiones similares para las derivadas  $f^{(n)}(c)$  como integrales sobre  $\theta \in [-\pi, \pi]$ .

**Ejercicio 2.14.** Si  $f$  es una función holomorfa entera y si  $s, t \in \mathbb{C}$ , calcular

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - s)(w - t)} dw$$

sobre un círculo  $|z| = R$  con  $R > \max\{|s|, |t|\}$ . Si  $f$  es una función entera acotada, estimar el límite cuando  $R \rightarrow \infty$  de esta integral, para obtener así una demostración alternativa del teorema de Liouville.

**Ejercicio 2.15.** Si  $f$  es una función holomorfa entera tal que

$$|f(z)| \leq a + b|z|^m \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}$$

para algunas constantes positivas  $a, b, m > 0$ , demostrar que  $f$  es un polinomio.

**Ejercicio 2.16** (Polinomio interpolativo de Lagrange). Sea

$$p(z) = (z - c_0)(z - c_1) \cdots (z - c_n)$$

el polinomio mónico con  $n + 1$  raíces distintas  $c_0, c_1, \dots, c_n$  en el disco abierto  $D(c; r)$ . Si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa en una región  $U$  que incluye  $\overline{D}(c; r)$ , demostrar que la integral

$$q(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-c|=r} \frac{f(w)}{p(w)} \frac{p(w) - p(z)}{w - z} dw$$

es un *polinomio* de grado  $\leq n$  tal que  $q(c_j) = f(c_j)$  para  $j = 0, 1, \dots, n$ .

[[ Indicación: expresar  $(p(w) - p(z))/(w - z)$  como un polinomio en la variable  $z$  con coeficientes en  $\mathbb{C}[w]$ . ]]

**Ejercicio 2.17.** Hallar el número de ceros (a) en el disco  $|z| < 1$ ; y (b) en el anillo  $1 < |z| < 2$ , para cada uno de los siguientes polinomios:

$$2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8; \quad z^7 - 5z^4 + z^2 - 2; \quad z^4 - 7z + 9.$$

**Ejercicio 2.18.** (a) Demostrar que todos los ceros del polinomio  $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$  quedan en el anillo  $1 < |z| < 2$ .

(b) Refinar esa conclusión al mostrar que tres ceros están en el anillo  $1.1 < |z| < 1.2$  y los otros cuatro en el anillo  $1.2 < |z| < 1.7$ .

**Ejercicio 2.19.** Usar el teorema de Rouché para dar una demostración alternativa del *teorema fundamental del álgebra*: si  $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$  es un polinomio de grado  $n > 0$ , entonces  $p$  tiene exactamente  $n$  ceros en  $\mathbb{C}$ , contados con multiplicidad.

**Ejercicio 2.20.** Sea  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa no constante en una región  $U$ .

(a) Si  $z_0 \in U$  es un *mínimo local* de la función  $z \mapsto |f(z)|$ , demostrar que  $f(z_0) = 0$ .

(b) Demostrar que un punto  $c \in U$  es un *punto de ensilladura* de la función real  $h(x, y) := |f(x + iy)|$ , para  $x + iy \in U$ , si y solo si  $f'(c) = 0$  y  $f(c) \neq 0$ .

[[ Indicación: usar las ecuaciones de Cauchy y Riemann. ]]

**Ejercicio 2.21.** Obtener series de Laurent que representan la función

$$f(z) = \frac{z}{(z-2)(z+i)}$$

en las regiones: (a)  $|z| < 1$ ; (b)  $1 < |z| < 2$ ; (c)  $|z| > 2$ ; (d)  $0 < |z-2| < \sqrt{5}$ .

**Ejercicio 2.22.** Los números de Bernoulli  $B_n \in \mathbb{Q}$  se definen como los coeficientes de la serie de Taylor

$$\frac{z}{e^z - 1} =: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

Comprobar que  $B_0 = 1$  y que para cada  $n \in \mathbb{N}^*$  se cumple la relación:

$$\binom{n+1}{0} B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \cdots + \binom{n+1}{n} B_n = 0.$$

Calcular  $B_1, \dots, B_6$ . Mostrar también que  $B_{2m+1} = 0$  para  $m \geq 1$ .

[[ Indicación: para la última igualdad, verificar primero que  $\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{e^{-z} - 1} = -z$ . ]]

**Ejercicio 2.23.** Comprobar que la serie de Laurent que representa la función cotangente  $\text{ctg } z$  en el disco perforado  $0 < |z| < \pi$  es:

$$\text{ctg } z = z^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$$

donde los  $B_{2n}$  son los números de Bernoulli de subíndice par.

**Ejercicio 2.24.** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones holomorfas en un anillo  $A(c; R, S)$ , con los respectivos desarrollos de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n, \quad g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-c)^n.$$

Si  $C_t$  es el círculo  $|z-c| = t$ , donde  $R < t < S$ , defínase

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_t} \frac{f(w)g(w)}{(w-c)^{n+1}} dw \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Comprobar que las series para  $f(z)$  y  $g(z)$  convergen uniformemente para  $z \in C_t$ . Concluir que las series numéricas  $c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j} b_j$  convergen para cada  $n$ ; y que la serie de Laurent para el producto  $fg$  en  $R < |z-c| < S$  es dada por

$$f(z)g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-c)^n.$$

**Ejercicio 2.25.** Calcular el orden del cero en  $z = 0$  de cada una de estas funciones:

$$\operatorname{sen} z - \operatorname{sen} z \cos^2 z; \quad 6 \operatorname{sen}(z^3) + z^3(z^6 - 6); \quad e^{\operatorname{tg} z} - e^{\operatorname{sen} z}.$$

**Ejercicio 2.26.** Obtener la parte principal de la serie de Laurent en 0 de la función

$$f(z) = \frac{z + 1}{z \operatorname{sen} z}$$

y de ahí comprobar que  $f$  tiene un polo doble en 0.

**Ejercicio 2.27.** Hallar todas las singularidades de la función

$$\operatorname{tg} z := \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{cos} z}$$

en el plano complejo  $\mathbb{C}$ ; y comprobar que cada una es un polo simple.

**Ejercicio 2.28.** Para  $w \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ , la fórmula

$$\exp\left(\frac{1}{2}w\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) =: \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(w) z^n,$$

define las **funciones de Bessel**  $w \mapsto J_n(w)$  como los coeficientes de la serie de Laurent de  $\exp\left(\frac{1}{2}w(z - z^{-1})\right)$  en el plano perforado  $\mathbb{C}^\times = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \infty\}$ . Usar el Ejercicio 2.24 para hallar el desarrollo de cada  $J_n(w)$  en potencias de  $w$ . Deducir que estas  $J_n$  son funciones analíticas enteras.

Comprobar que  $J_{-n}(w) = (-1)^n J_n(w)$ . Además, obtener las fórmulas integrales:

$$J_n(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(w \operatorname{sen} \theta - n\theta)} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(w \operatorname{sen} \theta - n\theta) d\theta.$$

**Ejercicio 2.29.** Demostrar la siguiente generalización del principio del argumento. Si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  es una función meromorfa no constante en una región  $U$  y si  $h: U \rightarrow \mathbb{C}$  es otra función holomorfa en  $U$ ; si  $C$  es una curva cerrada simple con  $C \cup I(C) \subset U$  que no atraviesa los ceros ni los polos de  $f$ ; y si  $c_j, p_k$  denotan los ceros y polos de  $f$  en  $I(C)$ , con órdenes respectivos  $m_j, n_k$ ; entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} h(z) dz = \sum_j m_j h(c_j) - \sum_k n_k h(p_k).$$

**Ejercicio 2.30.** Si  $U$  y  $V$  son dos regiones de  $\mathbb{C}$ ; si  $f: U \rightarrow V$  es una biyección holomorfa, con función inversa holomorfa  $g: V \rightarrow U$ ; y si  $C$  es una curva simple cerrada con  $C \cup I(C) \subset U$ , demostrar que

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z f'(z)}{f(z) - w} dz \quad \text{para todo } w \in f(I(C)).$$

[[ Indicación: Usar el Ejercicio 2.29 con  $h(z) \equiv z$ . ]]

**Ejercicio 2.31.** Si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa en una región acotada  $U \subset \mathbb{C}$ , y si  $V$  es una subregión con  $\bar{V} \subset U$  tal que  $z \mapsto |f(z)|$  es constante en la frontera  $\bar{V} \setminus V$ , demostrar que  $f(c) = 0$  para algún  $c \in V$ . [Indicación: si esa constante es 0, usar el Corolario 2.34; y si no, considerar la función  $g(z) := 1/f(z)$ .]

**Ejercicio 2.32.** Si  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  es una función holomorfa tal que  $f(p) = p$  y  $f(q) = q$  para  $p \neq q$  en  $\mathbb{D}$ , demostrar que  $f(z) \equiv z$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .

**Ejercicio 2.33.** (a) Si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en una región tal que  $\bar{D}(0; R) \subset U$  y si  $f(0) = 0$ , sea  $A_R := \sup\{\Re f(z) : |z| = R\}$ . Demostrar la **desigualdad de Caratheodory**:

$$|f(z)| \leq \frac{2A_R|z|}{R - |z|} \quad \text{cuando } |z| < R.$$

[Indicación: aplicar el lema de Schwarz a la función  $g(z) := f(z)/(2A_R - f(z))$ .]

(b) Si  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función entera tal que  $z \mapsto \Re f(z)$  es acotada superiormente, demostrar que  $f$  es constante.

### 3 Integrales y Series por Métodos Complejos

*The presiding genius of Leonhard Euler created the language and the style in which mathematics has developed ever since. [...] Euler's ideas are simple enough to be accessible, and deep enough to give a feeling for the beauty of real mathematics.*

— Freeman Dyson

Las fórmulas integrales de Cauchy y los desarrollos de Taylor y Laurent, vistos en los dos capítulos anteriores, forman la base teórica de las funciones holomorfas y meromorfas de una variable compleja. En este capítulo se propone ver diversas aplicaciones y extensiones de esa teoría básica. En primer lugar, es hora de considerar cómo dicha teoría permite evaluar integrales de una variable *real*, como consecuencia del Teorema 2.62 del residuo. Luego se abordará la convergencia de series de funciones holomorfas (más allá de las series de potencias) y una versión multiplicativa de tales series. Dos ejemplos particulares de funciones complejas merecen estudios detallados: la llamada función gamma de Euler y la función zeta de Riemann.

#### 3.1. Las integrales de contorno

En esta sección, se evaluarán ciertas integrales de funciones que son holomorfas en determinadas regiones, aparte de un número finito de singularidades aisladas.

**Ejemplo 3.1.** Si  $a > 1$ , hallar la integral<sup>1</sup>

$$I_a := \int_0^\pi \frac{d\theta}{a + \cos \theta}.$$

Fíjese que el caso  $a = 1$  daría una integral impropia divergente:

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{d\theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sec^2\left(\frac{1}{2}\theta\right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \sec^2 \phi d\phi = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = +\infty.$$

En cambio, si  $a > 1$ , el integrando es continuo en  $[0, \pi]$ .

En el círculo  $|z| = 1$ , vale  $\cos \theta = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ . La segunda opción  $\frac{1}{2}(z + z^{-1})$  es preferible, por ser esta la restricción al círculo  $\mathbb{T}$  de una función meromorfa.

<sup>1</sup>En esta sección, la letra  $I$  denotará una integral que se desea evaluar. Se usará  $I_a$  para una integral que depende de un parámetro  $a \in \mathbb{R}$ .

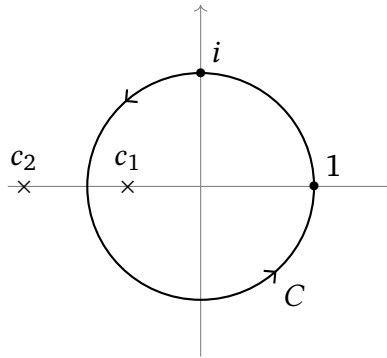


Figura 3.1: Contorno con un polo adentro y otro afuera

Al parametrizar el círculo por  $z = e^{i\theta}$ , de modo que  $dz = ie^{i\theta} d\theta$ , se obtiene

$$I_a = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{e^{i\theta} + 2a + e^{-i\theta}} = \frac{1}{i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{2i\theta} + 2ae^{i\theta} + 1} = \frac{1}{i} \oint_C \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}.$$

La función  $z^2 + 2az + 1$  tiene dos ceros, en  $z = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ . Estos son los polos (simples) del integrando  $f(z) := 1/(z^2 + 2az + 1)$ . Fíjese que  $c_1 := -a + \sqrt{a^2 - 1}$  queda dentro de  $C$  pero que  $c_2 := -a - \sqrt{a^2 - 1}$  es externo a  $C$ : véase la Figura 3.1. Como  $n(C, c_2) = 0$ , el residuo en  $c_2$  no contribuye a la integral.

El residuo de  $f(z)$  en  $c_1$  se calcula con el Corolario 2.64:

$$\text{Res}_{z=c_1} \left( \frac{1}{z^2 + 2az + 1} \right) = \frac{1}{2c_1 + 2a} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}}.$$

El teorema del residuo entonces permite evaluar la integral:

$$I_a = \frac{1}{i} \oint_C \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = 2\pi \text{Res}_{z=c_1} \left( \frac{1}{z^2 + 2az + 1} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \quad \diamond$$

**Ejemplo 3.2.** Evaluar la integral de Riemann impropia

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Esta integral puede evaluarse fácilmente al notar que la función  $F(x) := \text{arc tg } x$  es una primitiva de  $f(x) := 1/(1+x^2)$ , así que  $I = \text{arc tg}(+\infty) - \text{arc tg}(-\infty) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$ . Sin embargo, vale la pena evaluarla con el teorema de los residuos.

La función meromorfa

$$f(z) := \frac{1}{1 + z^2}$$

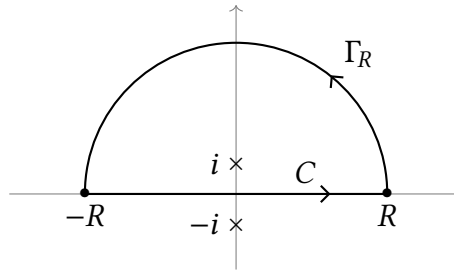


Figura 3.2: Contorno semicircular con diámetro largo

coincide con el integrando en la recta real  $\mathbb{R}$ , así que habría que elegir el contorno  $C$  como una curva cerrada (simple) que reemplace al eje  $x$ . Tómese  $C := [-R, R] + \Gamma_R$  para algún  $R > 0$ , es decir, un intervalo de la recta real seguido por el semicírculo  $\Gamma_R := \{ Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi \}$ ; véase la Figura 3.2.

Los polos de  $f$  son los dos puntos  $\pm i$ , donde  $i \in I(C)$  si  $R > 1$ ; pero  $-i$  queda fuera del contorno  $C$ . Ahora

$$\oint_C \frac{dz}{1+z^2} = \int_{[-R,R]} \frac{dz}{1+z^2} + \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta} d\theta}{1+R^2e^{2i\theta}}.$$

La primera integral a la derecha es positivo y tiende a  $I$  cuando  $R \rightarrow +\infty$ . Habría que asegurar que la segunda integral sobre  $\Gamma_R$  sea despreciable cuando  $R \rightarrow +\infty$ . Como  $|1 + R^2e^{2i\theta}| = |R^2 + e^{-2i\theta}| \geq R^2 - 1$  para  $R > 1$ , se obtiene

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} \right| \leq \pi \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} \frac{R}{|1+R^2e^{2i\theta}|} \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty.$$

Por otro lado, la integral sobre  $C$  es independiente del radio  $R$ , toda vez que  $R > 1$ :

$$\oint_C \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \left( \frac{1}{1+z^2} \right) = 2\pi i \left( \frac{1}{2i} \right) = \pi.$$

[[ Se ha empleado la fórmula (2.29). ]] En conclusión,

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2} = \oint_C \frac{dz}{1+z^2} = \pi. \quad \diamond$$

**Ejemplo 3.3.** El mismo contorno  $C$  de la Figura 3.2 sirve para integrar sobre  $\mathbb{R}$  ciertas funciones racionales  $f(x) = p(x)/q(x)$  toda vez que  $\operatorname{gr} q \geq 2 + \operatorname{gr} p$ . (Esta condición es necesaria para poder obtener una integral convergente.) Por ejemplo, para evaluar

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 1}, \quad \text{se toma } f(z) := \frac{z^2}{z^4 + 1}.$$

Al estimar su integral sobre el semicírculo  $\Gamma_R$ , se obtiene

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{z^2 dz}{z^4 + 1} \right| \leq \pi \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} \frac{R^3}{|R^4 e^{4i\theta} + 1|} \leq \frac{\pi R^3}{R^4 - 1} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty.$$

En este caso, los polos (simples) de  $f(z)$  son los ceros (simples) de  $z^4 + 1$ . Para  $R > 1$ , los dos polos  $e^{\pi i/4}$  y  $e^{3\pi i/4}$  quedan dentro de  $C$  y los otros dos polos  $e^{-\pi i/4}$  y  $e^{-3\pi i/4}$  son externos. Entonces, por (2.29):

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^2 dx}{x^4 + 1} = \oint_C \frac{z^2 dz}{z^4 + 1} \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=e^{\pi i/4}} \left( \frac{z^2}{z^4 + 1} \right) + 2\pi i \operatorname{Res}_{z=e^{3\pi i/4}} \left( \frac{z^2}{z^4 + 1} \right) = 2\pi i \left( \frac{i}{4e^{3\pi i/4}} + \frac{-i}{4e^{9\pi i/4}} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} (-e^{-3\pi i/4} + e^{-9\pi i/4}) = \frac{\pi}{2} (e^{\pi i/4} + e^{-\pi i/4}) = \pi \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Más generalmente, si  $p(z) = a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0$ ,  $q(z) = b_n z^n + \dots + b_1 z + b_0$ , la estimación de la integral de  $f(z) = p(z)/q(z)$  sobre  $\Gamma_R$  se obtiene de

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{p(z) dz}{q(z)} \right| \leq \pi \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} \frac{R |p(Re^{i\theta})|}{|q(Re^{i\theta})|} \sim \frac{\pi |a_m| R^{m+1}}{|b_n| R^n} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty$$

todo vez que  $n > m + 1$ , es decir,  $n \geq m + 2$ . ◇

**Ejemplo 3.4.** Si  $0 < a < 1$ , hallar la integral

$$I_a := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x}.$$

Aquí se puede tomar  $f(z) := e^{az}/(1 + e^z)$ . Esta función tiene polos donde  $e^z = -1$ , es decir, en los puntos  $z = (2m + 1)\pi i$ , para  $m \in \mathbb{Z}$ ; todos estos polos son simples. Como hay una infinidad de polos en el eje imaginario, en  $\{\pm\pi i, \pm 3\pi i, \pm 5\pi i, \dots\}$ , el contorno semicircular de la Figura 3.2 no es recomendable.

Sea  $C$  el borde del rectángulo con vértices consecutivos  $-R, R, R + 2\pi i, -R + 2\pi i$ . Entonces  $C$  es un contorno cerrado, suave por trozos, que encierra el polo  $\pi i$  de  $f(z)$  pero ningún otro polo: véase la Figura 3.3. El residuo en este polo simple viene de la fórmula (2.28):

$$\operatorname{Res}_{z=\pi i} \left( \frac{e^{az}}{1 + e^z} \right) = \lim_{z \rightarrow \pi i} (z - \pi i) \frac{e^{az}}{1 + e^z} = e^{a\pi i} \lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{z - \pi i}{e^z - e^{\pi i}} = e^{a\pi i} \frac{1}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i},$$

al evaluar la derivada de  $e^z$  en  $z = \pi i$ .

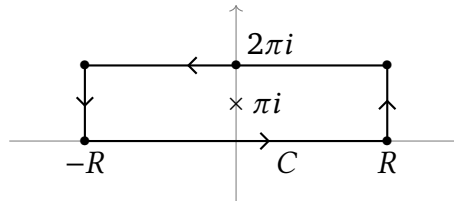


Figura 3.3: Contorno rectangular que encierra un solo polo

Por lo tanto,

$$\oint_C \frac{e^{az}}{1 + e^z} dz = -2\pi i e^{a\pi i}.$$

La integral deseada es el límite, cuando  $R \rightarrow +\infty$ , de la integral de  $f$  sobre el segmento  $[-R, R]$ . (Esta integral impropia existe y es finita porque  $a < 1$ ). Se debería mostrar que las integrales sobre los otros segmentos de  $C$  son despreciables para  $R$  grande. Pero resulta que eso no es cierto: en el segmento  $[R + 2\pi i, -R + 2\pi i]$  se ve que

$$\int_{[R+2\pi i, -R+2\pi i]} \frac{e^{az}}{1 + e^z} dz = \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1 + e^x} dx = -e^{2a\pi i} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx.$$

Este segmento contribuye un monto de  $-e^{2a\pi i} I_a$  a la integral sobre  $C$ , cuando  $R \rightarrow +\infty$ .

No obstante, las integrales sobre los lados verticales pueden estimarse por

$$\left| \int_{[R, R+2\pi i]} \frac{e^{az}}{1 + e^z} dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{a(R+it)}}{1 + e^{R+it}} \right| dt \leq M e^{-(1-a)R} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty,$$

para alguna constante  $M > 0$ , ya que  $a < 1$ . Una estimación similar muestra que la integral sobre  $[-R + 2\pi i, -R]$  tiende a 0 cuando  $R \rightarrow +\infty$ .

En consecuencia,

$$I_a - e^{2a\pi i} I_a = \oint_C \frac{e^{az}}{1 + e^z} dz = -2\pi i e^{a\pi i},$$

y por lo tanto, vale

$$I_a = -2\pi i \frac{e^{a\pi i}}{1 - e^{2a\pi i}} = \frac{2\pi i}{e^{a\pi i} - e^{-a\pi i}} = \boxed{\frac{\pi}{\text{sen } \pi a}}. \quad \diamond$$

► En los tres ejemplos anteriores, ciertas integrales impropias de Riemann fueron calculadas usando la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx. \quad (3.1)$$

Esta relación ciertamente es válida *si se sabe de antemano que la integral impropia existe*. Si  $f$  es una función continua sobre  $\mathbb{R}$ , la integral impropia se define por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx + \lim_{S \rightarrow \infty} \int_{-S}^0 f(x) dx, \quad (3.2)$$

donde los parámetros  $R$  y  $S$  son independientes. Es claro que se puede tomar  $S = R$ , como caso particular para evaluar la integral impropia, si los dos límites existen. Sin embargo, es posible que el límite al lado derecho de (3.1) existe – y coincide con el resultado de un cálculo de una integral de contorno – *aunque la integral impropia no existe* (es decir, uno de dos límites en (3.2) es divergente).

**Definición 3.5.** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua; entonces la integral de Riemann  $\int_a^b f(x) dx$  existe para cada subintervalo compacto  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Si el límite al lado derecho de (3.1) existe, este límite se llama el **valor principal** (de Cauchy) de la integral de  $f$  sobre  $\mathbb{R}$ :

$$\boxed{\text{P} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx.} \quad (3.3)$$

Si la integral impropia de Riemann  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  también existe, coincide con su valor principal.<sup>2</sup>

Si  $a < t < b$  y si  $g: [a, b] \setminus \{t\} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función continua, la integral de Riemann impropia

$$\int_a^b g(x) dx := \lim_{h \downarrow 0} \int_a^{t-h} g(x) dx + \lim_{k \downarrow 0} \int_{t+k}^b g(x) dx$$

existe si y solo si los dos límites a la derecha existen. El **valor principal** de esta integral es el siguiente límite, si existe:

$$\text{P} \int_a^b g(x) dx := \lim_{h \downarrow 0} \left( \int_a^{t-h} g(x) dx + \int_{t+h}^b g(x) dx \right). \quad (3.4)$$

Por ejemplo, la integral impropia  $\int_{-1}^1 x^{-1} dx$  no existe, pero

$$\text{P} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{h \downarrow 0} (\log h - \log h) = 0. \quad \diamond$$

► Antes de abordar el siguiente ejemplo, conviene mencionar un importante *Lema de Jordan*.

<sup>2</sup>El valor principal de una integral está señalado con la letra ‘P’ antes del signo integral. No hay un acuerdo universal sobre esta notación: otros autores usan ‘VP’ o ‘vp’, o a veces ‘PV’ o ‘pv’ (dependiente del idioma).

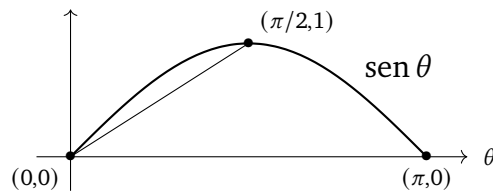


Figura 3.4: Concavidad del seno en el intervalo  $[0, \pi]$

**Lema 3.6** (Jordan). Si  $\Gamma_R$  es el semicírculo  $\{Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$ , y si  $h$  es una función continua en  $\{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0, |z| \geq R_0\}$  tal que  $\sup\{|h(z)| : z \in \Gamma_R\} \rightarrow 0$  cuando  $R \rightarrow \infty$ , entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} e^{itz} h(z) dz = 0, \quad \text{para cada } t > 0.$$

*Demostración.* Al escribir  $M_R = \sup\{|h(z)| : z \in \Gamma_R\}$ , se obtiene

$$\left| \int_{\Gamma_R} e^{itz} h(z) dz \right| \leq \int_0^\pi |e^{itR(\cos\theta + i\sin\theta)} h(Re^{i\theta})| R d\theta \leq \int_0^\pi e^{-tR\sin\theta} M_R R d\theta.$$

Como  $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ , la integral a la derecha es igual a

$$2 \int_0^{\pi/2} e^{-tR\sin\theta} M_R R d\theta.$$

La concavidad de la función seno en  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , debido a que  $(\sin \theta)'' = -\sin \theta \leq 0$ , implica que el segmento desde  $(0, 0)$  a  $(\frac{\pi}{2}, 1)$  queda por debajo del grafo del seno (Figura 3.4). En consecuencia,

$$\sin \theta \geq \frac{\theta}{\pi/2} = \frac{2\theta}{\pi} \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\left| \int_{\Gamma_R} e^{itz} h(z) dz \right| \leq 2RM_R \int_0^{\pi/2} e^{-2tR\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi M_R}{t} (1 - e^{-tR}) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty,$$

porque  $M_R \rightarrow 0$  por hipótesis. □

**Lema 3.7.** Sea  $f$  una función meromorfa en  $D(c; r)$  con un único polo simple en  $c$ , cuyo residuo es  $a_{-1}$ . Si  $\Gamma_\varepsilon = \{c + \varepsilon e^{i\theta} : \varphi \leq \theta \leq \psi\}$  es un arco de círculo centrado en  $c$ , entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z) dz = ia_{-1}(\psi - \varphi).$$

*Demostración.* Como el polo de  $f$  en  $c$  es simple, hay una función holomorfa  $g$  en  $D(c; r)$  tal que  $f(z) \equiv a_{-1}(z - c)^{-1} + g(z)$ . Si  $M := \sup\{|g(z)| : |z - c| \leq r/2\}$ , entonces para  $0 < \varepsilon \leq r/2$  resulta que

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} g(z) dz \right| \leq M\varepsilon(\psi - \varphi),$$

lo cual es despreciable cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Al parametrizar la curva por el ángulo  $\theta$ , también se obtiene

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{a_{-1}}{z - c} dz = \int_\varphi^\psi \frac{ia_{-1}\varepsilon e^{i\theta} d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}} = ia_{-1}(\psi - \varphi). \quad \square$$

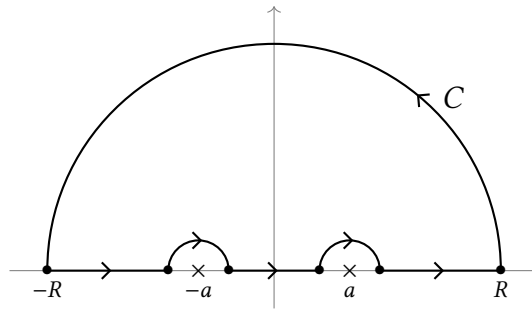


Figura 3.5: Contorno semicircular con dos desviaciones

**Ejemplo 3.8.** Si  $a > 0$ , hallar el valor principal de Cauchy de la integral

$$\text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{a^2 - x^2}.$$

Esta integral impropia converge en  $\pm\infty$ , porque  $\int_R^\infty x^{-2} dx = 1/R \rightarrow 0$  cuando  $R \rightarrow +\infty$ . Sin embargo, el integrando es singular en  $x = \pm a$ ; el valor principal es del tipo (3.4) tanto en  $c_1 = a$  como en  $c_2 = -a$ .

La función  $\cos x/(a^2 - x^2)$  es la parte real, cuando  $x \in \mathbb{R}$ , de la función

$$f(z) := \frac{e^{iz}}{a^2 - z^2},$$

que es meromorfa en  $\mathbb{C}$ , con polos simples en  $z = a$  y  $z = -a$ . Del Corolario 2.64 sigue

$$\text{Res}_{z=a} \frac{e^{iz}}{a^2 - z^2} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{e^{iz}}{-a - z} = -\frac{e^{ia}}{2a}, \quad \text{Res}_{z=-a} \frac{e^{iz}}{a^2 - z^2} = \lim_{z \rightarrow -a} \frac{e^{iz}}{a - z} = \frac{e^{-ia}}{2a}.$$

Sin embargo, el contorno  $[-R, R] + \Gamma_R$  de la Figura 3.2 atraviesa los polos si  $R > a$ ; es preferible evitar esa circunstancia. Lo que corresponde es modificar ese contorno, al

rodear cada polo por un semicírculo de radio pequeño  $\varepsilon$  – recorridos a favor de reloj – para así obtener el contorno  $C$  de la Figura 3.5, que deja los polos en su región exterior. Como  $n(C, a) = n(C, -a) = 0$ , los residuos no contribuyen a la integral, así que

$$\oint_C \frac{e^{iz} dz}{a^2 - z^2} = 0. \tag{3.5}$$

Ahora bien: se debe calcular la contribución de cada semicírculo a esta integral nula. En primer lugar, al tomar  $h(z) := 1/(a^2 - z^2)$  en el Lema 3.6 de Jordan, donde  $M_R \leq 1/(R^2 - a^2) \rightarrow 0$  cuando  $R \rightarrow +\infty$ , se obtiene

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz} dz}{a^2 - z^2} = 0.$$

Las integrales de los semicírculos pequeños alrededor de los polos dan  $(-\pi i)$  veces el residuo en cada caso, por el Lema 3.7, habida cuenta del recorrido *a favor de reloj* en cada caso. Sus contribuciones a la integral (3.5), al dejar  $\varepsilon \rightarrow 0$ , son

$$-\frac{e^{ia}}{2a} (-\pi i) + \frac{e^{-ia}}{2a} (-\pi i) = -\frac{\pi \operatorname{sen} a}{a}.$$

Al restar estos términos de la integral de contorno (3.5), queda el valor principal de la integral sobre  $\mathbb{R}$ :

$$\frac{\pi \operatorname{sen} a}{a} = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \downarrow 0}} \left( \int_{-R}^{-a-\varepsilon} \frac{e^{ix} dx}{a^2 - x^2} + \int_{-a+\varepsilon}^{a-\varepsilon} \frac{e^{ix} dx}{a^2 - x^2} + \int_{a+\varepsilon}^R \frac{e^{ix} dx}{a^2 - x^2} \right) = \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{a^2 - x^2}.$$

Al tomar la parte real de esa expresión, se concluye con

$$\text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{a^2 - x^2} = \frac{\pi \operatorname{sen} a}{a}. \quad \diamond$$

**Ejemplo 3.9.** Comprobar la evaluación de esta integral de Riemann impropia:

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.} \tag{3.6}$$

Como la función real  $x \mapsto (\operatorname{sen} x)/x$  es *par*, bastaría comprobar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi$$

y luego dividir por 2. Sin embargo, no es evidente que estas integrales impropias convergen. De hecho, la función  $(\operatorname{sen} x)/x$  *no es integrable sobre  $\mathbb{R}$  en el sentido de Lebesgue*,

porque la integral de su valor absoluto  $\int_0^\infty x^{-1} |\operatorname{sen} x| dx$  *diverge*. (Este ejemplo indica que la integral de Riemann no queda desplazada por la de Lebesgue.)

De nuevo, para poder aplicar el Lema de Jordan sobre  $\Gamma_R$ , es preferible reemplazar  $(\operatorname{sen} x)/x$  por  $e^{ix}/x$ , para después tomar las partes imaginarias. Sin embargo, la función

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{\cos z}{z} + i \frac{\operatorname{sen} z}{z}$$

tiene un polo (simple) en 0. Como en el ejemplo anterior, se podría usar un contorno semicircular con una desviación cerca del polo en 0. Una alternativa mejor es usar la función

$$f(z) := \frac{e^{iz} - 1}{z}$$

con una singularidad removible en 0 —fíjese que su parte imaginaria en  $\mathbb{R}$  es también  $(\operatorname{sen} x)/x$ . Ya se puede usar el contorno  $C = [-R, R] + \Gamma_R$  de la Figura 3.2. Como  $f(z)$  es holomorfa en el interior de  $C$ , su integral se anula:

$$0 = \oint_C \frac{e^{iz} - 1}{z} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ix} - 1}{x} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz.$$

Entonces

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix} - 1}{x} dx = \int_{\Gamma_R} \frac{1 - e^{iz}}{z} dz = \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z} - \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz} dz}{z}.$$

La primera integral a la derecha vale  $\pi i$  por cálculo directo; la segunda es despreciable para  $R$  grande, por el Lema de Jordan. De hecho, es posible hacer una estimación más explícita:

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz} dz}{z} \right| \leq \int_0^\pi e^{-R \operatorname{sen} \theta} d\theta \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R}) < \frac{\pi}{R}.$$

De ahí se obtiene la desigualdad

$$\left| \int_{-R}^R \frac{e^{ix} - 1}{x} dx - \pi i \right| < \frac{\pi}{R}.$$

En vista de que  $|\Im z| \leq |z|$ , se deduce que

$$\left| \int_{-R}^R \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx - \pi \right| < \frac{\pi}{R} \quad \text{y también} \quad \left| \int_0^R \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2R}.$$

Al dejar  $R \rightarrow +\infty$ , se obtiene *la existencia de esta integral impropia* de Riemann, junto con su valor  $\pi/2$  que aparece en (3.6).  $\diamond$

**Funciones holomorfas ramificadas**

En la sección 1.4, se definió la “rama principal del logaritmo” como la función holomorfa  $\text{Log}: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$  dada por (1.33):

$$\text{Log}(re^{i\theta}) := \log r + i\theta$$

al tomar  $r > 0, -\pi < \theta < \pi$  para  $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ . De igual manera, se ha definido el *valor principal del argumento* como  $\text{Arg}(re^{i\theta}) := \theta$ , con  $-\pi < \theta < \pi$ , en ese mismo dominio. Se puede generalizar ese esquema, para poder incluir el eje real negativo en ciertos casos, del modo siguiente.

**Definición 3.10.** Después de elegir un ángulo fijo  $\varphi$ , se considera el **plano cortado**  $\mathbb{C} \setminus e^{i\varphi}\mathbb{R}_+$ , el cual es una *región estelar* a partir del punto de mira  $z_0 = -e^{i\varphi}$ ; véase la Figura 3.6. Se determina un *valor del argumento* y una **rama del logaritmo** en esa región al tomar

$$\arg(re^{i\theta}) := \theta \quad \text{y} \quad \log(re^{i\theta}) := \log r + i\theta \quad \text{para} \quad \underline{\varphi < \theta < \varphi + 2\pi}.$$

(Para cada  $k \in \mathbb{Z}^\times$ , la sustitución  $\varphi \mapsto \varphi + 2k\pi$  define otras ramas del logaritmo con el mismo plano cortado por dominio.) ◇

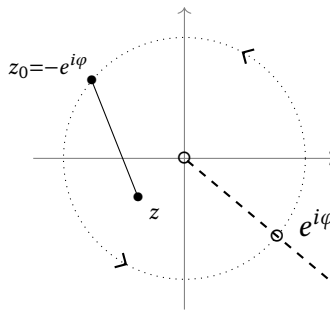


Figura 3.6: Plano cortado a lo largo de una semirrecta:  $\varphi < \theta < \varphi + 2\pi$

Es importante señalar que la propiedad homomórfica del logaritmo real debe modificarse, para una rama específica del logaritmo, en la fórmula

$$\log(zw) = \log z + \log w + 2k\pi i \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Otra manera equivalente de definir (una rama de) el logaritmo es declararla como una *primitiva de la función*  $1/z$ . Para hacer eso, es necesario tomar como dominio una *región simplemente conexa*  $U$  que no contenga el origen 0. (El plano cortado  $\mathbb{C} \setminus e^{i\varphi}\mathbb{R}_+$  cumple esos requisitos.)

Se elige un punto  $z_0 \in U$  y se define

$$L(z) := \int_{z_0}^z \frac{dw}{w} + \log |z_0| + i \arg z_0, \quad (3.7)$$

donde  $\arg z_0$  denota aquí cualquier ángulo  $\theta_0$  tal que  $e^{i\theta_0} = z_0/|z_0|$ ; cabe recordar que  $\int_{z_0}^z$  denota la integral de línea sobre cualquier contorno  $C$  en  $U$  de  $z_0$  a  $z$  (por ejemplo, el segmento  $[z_0, z]$  en una región estelar).

La función  $g(z) := z^{-1} \exp(L(z))$  tiene derivada

$$g'(z) = -z^{-2} \exp(L(z)) + z^{-1} L'(z) \exp(L(z)) = (-z^{-2} + z^{-2}) \exp(L(z)) \equiv 0,$$

así que  $g(z) \equiv g(z_0) = 1$ , pues  $U$  es conexo. Entonces la función holomorfa  $L: U \rightarrow \mathbb{C}$  satisface  $\exp(L(z)) \equiv z$  y por ende es una función inversa de la exponencial en la región  $U$ . En otras palabras,  $\log z := L(z)$  es una rama del logaritmo con dominio  $U$ , simplemente conexo. (La ambigüedad del ángulo  $\theta$ , hasta sumandos de  $2k\pi$ , indica que hay varias maneras de elegir la rama: todos difieren por múltiplos constantes de  $2\pi i$ .) La fórmula (3.7) hace evidente que *cada rama del logaritmo es holomorfa en su dominio*.

**Definición 3.11.** Si  $a \in \mathbb{C}$  y si  $U \subset \mathbb{C}^\times$  es una región simplemente conexa – en particular, si  $U$  es cualquier plano cortado – elijase una rama del logaritmo en  $U$ . La rama correspondiente de la **potencia**  $z \mapsto z^a$  se define en  $U$  por

$$z^a := \exp(a \log z). \quad (3.8)$$

Por ejemplo,<sup>3</sup> en el plano cortado  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  se puede definir  $z^{1/2} := \exp(\frac{1}{2} \text{Log } z)$ , de tal manera que  $(re^{i\theta})^{1/2} = \sqrt{r} e^{i\theta/2}$ . Sin embargo, al elegir otra rama del logaritmo  $\log z := \text{Log } z + 2\pi i$ , la fórmula correspondiente sería  $(re^{i\theta})^{1/2} = -\sqrt{r} e^{i\theta/2}$ . En resumen, la ambigüedad en la definición

$$(re^{i\theta})^{1/2} = \pm \sqrt{r} e^{i\theta/2}$$

es inherente en la elección de la rama del logaritmo: *la raíz cuadrada posee dos ramas*. En general, si  $n \in \mathbb{N}^*$ , la raíz  $n$ -ésima  $z \mapsto z^{1/n}$  posee  $n$  ramas distintas, que difieren entre sí por factores multiplicativos de  $e^{2k\pi i/n}$ .  $\diamond$

► El logaritmo y las potencias no enteras conducen a nuevas clases de integrales de contorno, en las cuales los contornos  $C$  están trazados en planos cortados, amén de evitar los polos del integrando.

<sup>3</sup>En esta discusión,  $\sqrt{r}$  denota la raíz cuadrada positiva de  $r > 0$  real.

**Ejemplo 3.12.** Evaluar la integral de Riemann impropia

$$I := \int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx.$$

Esta integral impropia converge en el extremo superior ya que el integrando es  $O(x^{-4} \log x) = o(x^{-4+\epsilon})$  para  $\epsilon > 0$ . La convergencia en  $x = 0$  es menos evidente, pero saldrá del cálculo subsiguiente.

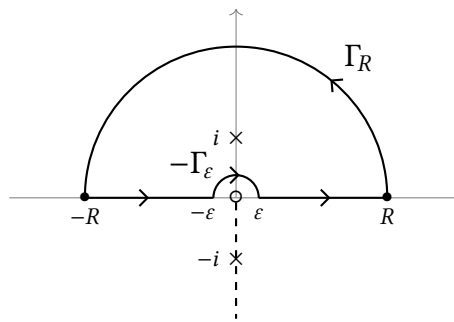


Figura 3.7: Contorno semicircular en un plano cortado

El contorno  $C$  será una modificación del contorno  $[-R, R] + \Gamma_R$  de la Figura 3.2. Para evitar la indefinición del logaritmo en  $z = 0$ , se debe seguir (en el sentido negativo) un pequeño semicírculo  $\Gamma_\epsilon$  centrado en 0. Luego se corta el plano a lo largo de la recta  $e^{-i\pi/2} \mathbb{R}_+$  (Figura 3.7) y se usa la rama del logaritmo dada por

$$\log(re^{i\theta}) := \log r + i\theta, \quad \text{con} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}.$$

Obsérvese que  $\log 1 = 0$ ,  $\log i = \pi i/2$ ,  $\log(-1) = \pi i$  para esa rama.

La integral de la función

$$f(z) := \frac{\log z}{(1+z^2)^2}$$

en el contorno cerrado  $C := [-R, -\epsilon] + (-\Gamma_\epsilon) + [\epsilon, R] + \Gamma_R$  vale  $2\pi i$  veces el residuo en el único polo de  $f$  dentro de  $C$ , el cual es un polo doble en  $i$ . Para calcular este residuo, se usa la fórmula (2.30) con  $m = 2$ :

$$g(z) := (z-i)^2 f(z) = \frac{\log z}{(z+i)^2},$$

$$\text{Res}_{z=i} f(z) = g'(i) = \left[ \frac{1}{z(z+i)^2} - \frac{2 \log z}{(z+i)^3} \right]_{z=i} = \frac{1}{-4i} - \frac{\pi i}{-8i} = \frac{i}{4} + \frac{\pi}{8}.$$

Como ya es habitual, se muestra que la integral sobre el semicírculo  $\Gamma_R$  es despreciable para  $R$  grande:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} \frac{\log z}{(1+z^2)^2} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{\log R + i\theta}{(1+R^2 e^{2i\theta})^2} iR e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi \frac{R \log R + R\theta}{(R^2 - 1)^2} d\theta \\ &= \frac{\pi R \log R + \frac{1}{2}\pi^2 R}{(R^2 - 1)^2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Un cálculo similar, usando el límite conocido  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \log \varepsilon = 0$ , muestra que la integral sobre el semicírculo pequeño también es despreciable para  $\varepsilon$  pequeño:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\log z}{(1+z^2)^2} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{\log \varepsilon + i\theta}{(1+\varepsilon^2 e^{2i\theta})^2} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi \frac{\varepsilon \log \varepsilon + \varepsilon\theta}{(1-\varepsilon^2)^2} d\theta \\ &= \frac{\pi \varepsilon \log \varepsilon + \frac{1}{2}\pi^2 \varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \downarrow 0. \end{aligned}$$

La integral sobre el contorno  $C$  – la cual no depende de  $\varepsilon$  ni de  $R$  – entonces se reduce a dos integrales sobre semirrectas:

$$\oint_C \frac{\log z}{(1+z^2)^2} dz = \int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx + \int_{-\infty}^0 \frac{\log u}{(1+u^2)^2} du.$$

La primera integral a la derecha es la integral deseada  $I$ . Para la segunda, se coloca  $u = -x$  y se usa  $\log(-x) = \log x + \pi i$  para la rama del logaritmo en uso, así que

$$\oint_C \frac{\log z}{(1+z^2)^2} dz = 2 \int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx + \int_0^\infty \frac{\pi i}{(1+x^2)^2} dx.$$

Por otro lado, el teorema del residuo muestra que

$$\oint_C \frac{\log z}{(1+z^2)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} i.$$

Al comparar las partes reales e imaginarias de las dos expresiones anteriores, se obtiene la integral deseada y otra integral también, de feria:

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{\pi}{4}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = +\frac{\pi}{4}. \quad \diamond$$

**Ejemplo 3.13.** Calcular las integrales

$$I_a := \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx \quad \text{para } 0 < a < 1.$$

La condición  $a < 1$  es necesaria para la convergencia de esta integral impropia en el extremo superior; y la condición  $a > 0$  garantiza su convergencia en  $x = 0$ .

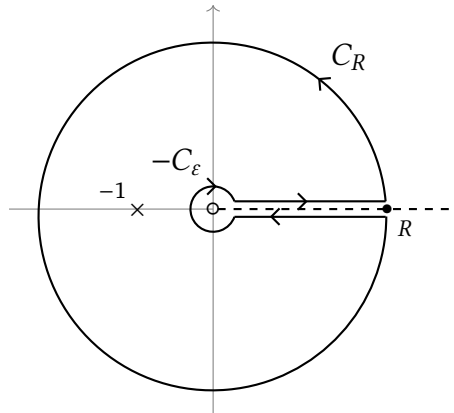


Figura 3.8: Contorno de cerradura en un plano cortado

Después de elegir un corte apropiado del plano para definir una rama de  $z^{a-1}$ , la función  $f(z) := z^{a-1}/(1+z)$  tendrá un polo simple en  $z = -1$ . Un corte a lo largo de  $\mathbb{R}_-$  pasaría a través del residuo, y por lo tanto ese corte no es aconsejable. Resulta mejor cortar a lo largo de la semirrecta  $\mathbb{R}_+$  y mover el intervalo real  $[\varepsilon, R]$  arriba y abajo del corte para obtener la “cerradura” ilustrada en la Figura 3.8.

Este contorno simple cerrado es

$$C := [\varepsilon' + i\delta, R' + i\delta] + C_R + [R' - i\delta, \varepsilon' - i\delta] - C_\varepsilon,$$

donde  $C_R$  es el arco grande del círculo  $|z| = R$ , desde  $R' + i\delta$  hasta  $R' - i\delta$ , girando contrario a reloj; y  $-C_\varepsilon$  es el arco grande del círculo  $|z| = \varepsilon$ , desde  $\varepsilon' - i\delta$  a  $\varepsilon' + i\delta$ , recorrido a favor de reloj. Aquí  $R > 1$  y  $0 < \delta < \varepsilon$ ; se ha tomado  $R' := \sqrt{R^2 - \delta^2}$  y  $\varepsilon' := \sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2}$  para cerrar el contorno  $C$ .

La integral de línea  $\oint_C f(z) dz$  depende solamente del residuo en el polo  $-1$ ; luego se puede dejar  $\delta \downarrow 0$  antes de calcular las integrales sobre cada trozo.

Para definir la potencia  $z^{a-1} := \exp((a-1)\log z)$ , tómesese la rama del logaritmo  $\log(re^{i\theta}) := \log r + i\theta$  con  $0 < \theta < 2\pi$  en el plano cortado  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ . El residuo en  $z = -1$  se calcula fácilmente, habida cuenta de que ahora  $\log(-1) = \pi i$ :

$$\operatorname{Res}_{z=-1} \frac{z^{a-1}}{1+z} = \lim_{z \rightarrow -1} z^{a-1} = \exp((a-1)\log(-1)) = e^{\pi i(a-1)} = -e^{i\pi a}.$$

Si  $x > 0$ , entonces  $x + i\delta$ ,  $x - i\delta$  quedan en lados opuestos del corte; y se aproximan

$$\begin{aligned} \log(x + i\delta) &\doteq \log x + i\delta, \\ \log(x - i\delta) &\doteq \log x + i(2\pi - \delta). \end{aligned}$$

Por eso,  $(x + i\delta)^{a-1} \rightarrow x^{a-1}$  pero  $(x - i\delta)^{a-1} \rightarrow x^{a-1} e^{2\pi i(a-1)}$  cuando  $\delta \downarrow 0$ . Ese es el efecto de cortar el plano en  $\mathbb{R}_+$ .

Para estimar las integrales sobre los arcos circulares, ya se puede dejar  $\delta \downarrow 0$ ; así, se cierran los círculos  $C_R$  y  $-C_\varepsilon$ . Como  $a < 1$ , se ve que

$$\begin{aligned} \left| \oint_{C_R} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz \right| &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{(a-1)(\log R+i\theta)}}{1+Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} \frac{R^{a-1}}{R-1} R d\theta = \frac{2\pi R^a}{R-1} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

De modo similar, debido a que  $a > 0$ , se obtiene

$$\left| \int_{C_\varepsilon} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz \right| \leq \frac{2\pi\varepsilon^a}{1-\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \downarrow 0.$$

Luego, al dejar  $\varepsilon \downarrow 0$  y  $R \rightarrow \infty$ , se obtiene

$$\oint_C \frac{z^{a-1}}{1+z} dz = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx + \int_\infty^0 \frac{x^{a-1} e^{2\pi i(a-1)}}{1+x} dx = (1 - e^{2\pi i(a-1)}) \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx.$$

El teorema del residuo implica que

$$\oint_C \frac{z^{a-1}}{1+z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1} \frac{z^{a-1}}{1+z} = -2\pi i e^{i\pi a}.$$

En conclusión, se obtiene

$$I_a = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{-2\pi i e^{i\pi a}}{1 - e^{2\pi i(a-1)}} = \frac{-2\pi i e^{i\pi a}}{1 - e^{2i\pi a}} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi a}. \quad (3.9)$$

Fíjese que este es el mismo valor de la integral del Ejemplo 3.4. Por una buena razón: esas integrales coinciden,

$$I_a = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{au} du}{1+e^u}$$

por el cambio de variable  $x = e^u$ . ◇

### 3.2. Convergencia uniforme sobre compactos

Una propiedad importante de las funciones holomorfas es su estabilidad bajo ciertos procesos de sumación o multiplicación infinita. Conviene recordar que un límite uniforme de funciones continuas es continuo (Lema 1.4). Pero la convergencia de funciones definidas en una región *abierta* no suele ser uniforme en todo el dominio. Un concepto intermedio entre las convergencias puntual y uniforme, es la convergencia *uniforme sobre las partes compactas del dominio*.

Antes de aplicar esa noción a las funciones holomorfas, conviene notar un aspecto útil de la topología del plano complejo. Si  $E \subseteq \mathbb{C}$ , denótese por  $E^\circ$  el **interior** topológico de  $E$ , y por  $\bar{E}$  la **clausura** de  $E$ .

**Lema 3.14.** Si  $V \subseteq \mathbb{C}$  es un abierto no vacío en el plano complejo, hay partes compactas  $K_n \subset V$  para cada  $n \in \mathbb{N}^*$  tales que  $K_n \subset K_{n+1}^\circ$  para cada  $n$ ; y además  $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n$ .

*Demostración.* Se usa la notación  $d(z, E) := \inf\{|z-u| : u \in E\}$  para designar la distancia desde un punto  $z \in \mathbb{C}$  y una parte  $E \subseteq \mathbb{C}$ . La desigualdad triangular implica que

$$|d(z, E) - d(w, E)| \leq |z - w|, \quad \text{para todo } z, w \in \mathbb{C}.$$

Esto dice que la función  $z \mapsto d(z, E)$  es continua. Dado el abierto  $V \subseteq \mathbb{C}$ , defínase

$$V_n := D(0; n) \cap \{z \in V : d(z, \mathbb{C} \setminus V) > 1/n\},$$

$$K_n := \overline{D}(0; n) \cap \{z \in V : d(z, \mathbb{C} \setminus V) \geq 1/n\}.$$

Cada  $V_n$  es abierto en  $\mathbb{C}$ ; y cada  $K_n$  es un compacto, por estar acotado y cerrado en  $\mathbb{C}$ . Es claro que  $K_n \subset V_{n+1} \subset K_{n+1}$ , lo cual implica que  $K_n \subset K_{n+1}^\circ$ . Además, como  $V \neq \emptyset$ , hay algún  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $V_m \neq \emptyset$ ; por tanto,  $K_n \neq \emptyset$  para  $n > m$ .

La coincidencia de la unión creciente  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n$  con  $V$  sigue de las definiciones. Es obvio que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n \subseteq V$ . También, si  $z \in V$ , hay  $m \in \mathbb{N}^*$  tal que  $|z| \leq m$  y a la vez  $D(z; \frac{1}{m}) \subseteq V$ , por lo que vale  $d(z, \mathbb{C} \setminus V) \geq 1/m$ ; y por ende  $z \in K_m$ .  $\square$

También es evidente que  $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} V_n$ , una unión creciente de abiertos. Si  $K \subset V$  es una parte compacta cualquiera, entonces los  $V_n$  forman un cubrimiento abierto de  $K$ . Luego, hay algún  $m$  tal que  $K \subset V_m \subset K_m$ . En resumen: toda parte compacta de  $V$  está incluida en algún  $K_m$ .

**Definición 3.15.** Sea  $V \subseteq \mathbb{C}$  un abierto no vacío. Denótese por  $C(V)$  el espacio vectorial de todas las funciones continuas  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ . Una sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset C(V)$  **converge uniformemente sobre compactos** a una función límite  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ , si  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  para  $z \in V$  y si esta convergencia es uniforme sobre cualquier compacto  $K \subset V$ .

En vista del Lema 3.14, este ocurre si y solo si  $f_n \rightarrow f$  uniformemente sobre cada  $K_m$ . Por el Lema 1.4, la restricción  $f|_{K_m}$  es continua; como  $V = \bigcup_m K_m$ , la función límite  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  es continua en todo punto de  $V$ , así que  $f \in C(V)$ .

Las seminormas

$$p_m(f) := \sup_{z \in K_m} |f(z)|$$

definen una topología sobre  $C(V)$ , como sigue. Nótese primero que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente sobre  $K_m$  si y solo si  $p_m(f_n - f) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces  $f_n \rightarrow f$  uniformemente sobre compactos de  $V$  si y solo si  $p_m(f_n - f) \rightarrow 0$  para cada  $m \in \mathbb{N}^*$  (por separado). Ahora, la fórmula

$$\rho_V(f_n, f) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{p_m(f_n - f)}{1 + p_m(f_n - f)}$$

define una **métrica**  $\rho_V$  sobre  $C(V)$ ; la convergencia uniforme sobre compactos es equivalente a la convergencia en esta métrica. No es difícil comprobar que este espacio métrico es *completo* (sus sucesiones de Cauchy son convergentes).<sup>4</sup>  $\diamond$

**Lema 3.16.** Si  $V \subseteq \mathbb{C}$  es un abierto, si  $f \in C(V)$  es el límite uniforme sobre compactos de una sucesión  $\{f_n\}$  en  $C(V)$ , entonces para cualquier contorno  $C$  (suave por trozos) con traza en  $V$ , la integral de  $f$  sobre  $C$  está dada por

$$\int_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n(z) dz.$$

*Demostración.* La traza de  $C$  es una parte compacta de  $V$ . La hipótesis de que  $f_n \rightarrow f$  en  $C(V)$  implica que  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  uniformemente para  $z \in C$ . Sea dada  $\varepsilon > 0$ ; entonces hay  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq N \implies |f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{\ell(C)} \quad \text{para todo } z \in C.$$

En consecuencia,

$$n \geq N \implies \left| \int_C f_n(z) dz - \int_C f(z) dz \right| = \left| \int_C (f_n(z) - f(z)) dz \right| \leq \ell(C) \frac{\varepsilon}{\ell(C)} = \varepsilon. \quad \square$$

**Teorema 3.17** (Weierstrass). Sea  $U$  una región de  $\mathbb{C}$  y sea  $\{f_n: U \rightarrow \mathbb{C} : n \in \mathbb{N}\}$  una sucesión de funciones holomorfas en  $U$ . Si  $f_n \rightarrow f$  en  $C(U)$  con convergencia uniforme sobre compactos, la función límite  $f$  es también holomorfa en  $U$ . Además,  $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$  uniformemente sobre compactos de  $U$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Para mostrar que  $f$  es holomorfa en  $U$ , basta verificar que  $f$  es holomorfa en cada disco abierto  $D(c; s) \subseteq U$ . Sea  $C$  un contorno cerrado cualquiera con traza en  $D(c; s)$ . El teorema de Cauchy muestra que  $\oint_C f_n(z) dz = 0$  para cada  $n$ . Del Lema 3.16 se concluye que

$$\oint_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \oint_C f_n(z) dz = 0.$$

Como esta integral es nula para cualquier  $C$ , el Teorema 2.32 de Morera implica que  $f$  es holomorfa en  $D(c; s)$ .

La convergencia de las derivadas superiores se demuestra por inducción sobre  $k$ . Basta entonces comprobar que  $f'_n \rightarrow f'$  uniformemente sobre compactos en  $U$ . Tómese  $r$  con  $0 < r < s$ , así que  $\overline{D}(c; r) \subset U$ ; sea  $C_r$  el círculo de borde de este disco cerrado, recorrido una vez contrario a reloj.

---

<sup>4</sup>El espacio vectorial topológico  $C(V)$  es un ejemplo de un **espacio de Fréchet**: este es un espacio vectorial metrizable y completo, cuya métrica está dada por una familia numerable de seminormas. Sin embargo,  $C(V)$  no es un espacio de Banach: la métrica  $\rho_V$  no proviene de una sola norma.

Para cada  $z \in D(c; r)$ , se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{C_r} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw = f'(z),$$

de la fórmula integral de Cauchy (Teorema 2.25) y del Lema 3.16.

Esta convergencia  $f'_n \rightarrow f'$  es puntual en  $D(c; r)$ . Resulta, además, que es uniforme sobre  $\overline{D}(c; t)$  si  $0 < t < r$ . Para ver eso, fíjese que  $|w-z| \geq r-t$  para  $z \in \overline{D}(c; t)$ ,  $w \in C_r$ . Dado  $\delta > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N \implies |f_n(w) - f(w)| \leq \delta$  para  $w \in C_r$ ; esto conlleva el estimado:

$$n \geq N \implies \left| \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^2} \right| \leq \frac{\delta}{(r-t)^2}.$$

Esto a su vez muestra que

$$n \geq N \implies |f'_n(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{C_r} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^2} dw \right| \leq \frac{\delta r}{(r-t)^2},$$

y por lo tanto  $f'_n \rightarrow f'$  uniformemente sobre  $\overline{D}(c; t)$ , toda vez que  $0 < t < r$ ; o sea,  $f'_n \rightarrow f'$  uniformemente sobre compactos en  $D(c; r)$ .

Cualquier compacto  $K \subset U$  se puede cubrir con un número finito de tales discos abiertos; luego  $f'_n \rightarrow f'$  uniformemente sobre compactos en  $U$ .  $\square$

**Corolario 3.18.** Si una serie de funciones holomorfas en una región  $U$ ,

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} h_n(z) \quad \text{para } z \in U,$$

converge uniformemente sobre compactos, la suma  $f$  es una función holomorfa en  $U$ , y la serie puede derivarse término por término. Es decir, si  $k \in \mathbb{N}$ , entonces

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(k)}(z) \quad \text{si } z \in U,$$

y esta nueva serie también converge uniformemente sobre compactos.  $\square$

**Ejemplo 3.19.** La fórmula clásica para la función exponencial:

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^n \tag{3.10}$$

es válida para todo  $z \in \mathbb{C}$ , con convergencia uniforme sobre compactos.

Para comprobar esa afirmación, basta verificar la convergencia en el disco cerrado  $\overline{D}(0; R)$  para cualquier  $R > 0$ . Considérese el polinomio  $f_n(z) := (1 + z/n)^n$  para  $n$  fijo:

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \cdot n \cdots n} \frac{z^k}{k!} \\ &= 1 + z + \sum_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{z^k}{k!}. \end{aligned}$$

Al usar repetidamente la identidad  $(1 - a)(1 - b) > 1 - a - b$  para  $a, b > 0$ , se obtiene, para  $|z| \leq R$ :

$$\begin{aligned} \left| e^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| &\leq \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{k-1}{n}\right) \frac{|z|^k}{k!} + \sum_{k>n} \frac{|z|^k}{k!} \\ &\leq \frac{1}{2n} \sum_{k=2}^n \frac{R^k}{(k-2)!} + \sum_{k>n} \frac{R^k}{k!} = \frac{R^2}{2n} \sum_{m=0}^{n-2} \frac{R^m}{m!} + \sum_{k>n} \frac{R^k}{k!} \\ &< \frac{R^2 e^R}{2n} + \sum_{k>n} \frac{R^k}{k!} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

con convergencia obviamente uniforme en  $|z| \leq R$ . [ En la segunda línea, se ha usado la sumatoria  $1 + 2 + \cdots + (k - 1) = \frac{1}{2}k(k - 1)$ . ]

El Teorema 3.17 confirma que la función  $z \mapsto e^z$  es entera y que coincide con su propia derivada:

$$\frac{d}{dz}(e^z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dz} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \bigg/ \left(1 + \frac{z}{n}\right) = e^z. \quad \diamond$$

**Ejemplo 3.20.** La serie

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \tag{3.11}$$

converge si  $\Re z > 1$ , porque si  $z = x + iy$ , entonces

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = |n^{-z}| = |e^{-z \log n}| = e^{-x \log n} = \frac{1}{n^x}$$

y la serie positiva  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^x$  converge si  $x > 1$ . Además, si  $s > 1$ , en el semiplano cerrado  $\Re z \geq s$  se obtiene el estimado  $|n^{-z}| \leq n^{-s}$ . Al aplicar el criterio mayorizante de Weierstrass (el Lema 1.5) a la serie (3.11) con  $M_n := n^{-s}$ , se deduce que la convergencia de esa serie es uniforme en el semiplano  $\Re z \geq s$ .

Si ahora  $K$  es un compacto en el semiplano abierto  $\Re z > 1$ , entonces existe algún  $s_0 > 1$  tal que  $K \subset \{z : \Re z \geq s_0\}$ . (En efecto, los semiplanos  $\{z : \Re z > \frac{1}{2}(1+s)\}$  forman un cubrimiento abierto de  $K$ .) Entonces la convergencia de la serie (3.11) es uniforme sobre  $K$ . El Teorema 3.17 muestra que la función  $\zeta$  es holomorfa en el semiplano abierto  $\Re z > 1$ . Esta es la **función zeta de Riemann**.<sup>5</sup>  $\diamond$

► El teorema de Weierstrass también justifica la formación de funciones holomorfas mediante integrales sobre una variable auxiliar.

**Proposición 3.21.** Sea  $U$  una región de  $\mathbb{C}$  y sea  $[a, b]$  un intervalo compacto en  $\mathbb{R}$ . Si  $g: U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es una función continua tal que  $z \mapsto g(z, t)$  es holomorfa en  $U$  para cada  $t \in [a, b]$ , entonces la función  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$f(z) := \int_a^b g(z, t) dt \quad (3.12)$$

es holomorfa en  $U$ .

*Demostración.* Para cada  $n \in \mathbb{N}^*$  y  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , sea  $t_n(k) := a + k(b-a)/n$ , así que  $\{t_n(0), t_n(1), \dots, t_n(n)\}$  es una partición del intervalo  $[a, b]$  con espaciado uniforme. Sea  $f_n(z)$  la suma de Riemann definida por

$$f_n(z) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(z, t_n(k)).$$

Para cada  $z \in U$ , la continuidad de  $t \mapsto g(z, t)$  muestra que estas sumas de Riemann convergen a la integral (3.12). Por lo tanto, hay convergencia puntual  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Para comprobar que  $f$  es holomorfa en  $U$ , basta mostrar que esta convergencia es uniforme sobre compactos de  $U$ .

Si  $K \subset U$  es compacto, entonces  $K \times [a, b]$  es compacto en  $U \times [a, b]$ . La función  $g$  es continua en sus dos variables y por ende es *uniformemente continua* en  $K \times [a, b]$ . En consecuencia, dado  $\varepsilon > 0$  hay  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que

$$|s - t| < \delta \implies \sup_{z \in K} |g(z, s) - g(z, t)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

<sup>5</sup>La función zeta de Riemann resulta ser una función *meromorfa en todo*  $\mathbb{C}$ , con un polo en  $z = 1$ . En consecuencia, la fórmula (3.11) es solamente una definición parcial de  $\zeta(z)$ , a la derecha de ese polo. Más adelante, se completará su definición en el resto del plano complejo.

Ahora, si  $n > (b - a)/\delta$  y si  $z \in K$ , se cumple

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f(z)| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{t_n(k-1)}^{t_n(k)} (g(z, t_n(k)) - g(z, t)) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_n(k-1)}^{t_n(k)} |g(z, t_n(k)) - g(z, t)| dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} \frac{b-a}{n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como  $\delta$  no depende de  $z \in K$ , se concluye que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente sobre  $K$ . Ahora el Teorema 3.17 muestra que  $f$  es holomorfa en  $U$ .  $\square$

► Ya es posible formar funciones holomorfas o meromorfas como sumas de series que no necesariamente son series de potencias. El ejemplo siguiente es una serie estudiado por Euler, de una manera que hoy en día se estima no rigurosa, por posteriormente se justificó mediante el teorema de Weierstrass.

**Ejemplo 3.22.** Considérese la función  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  definida por la serie

$$f(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

La serie al lado derecho parece ser una función meromorfa con polos en  $\mathbb{Z}$ . Para comprobar que efectivamente es así, se debe investigar su convergencia.

Tómese  $R > 0$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$  tales que  $N > 2R$ . Entonces la suma parcial

$$s_N(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^N \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right)$$

es una función meromorfa con polos simples en  $\{-N, \dots, N-1, N\}$ . Sus residuos son

$$\operatorname{Res}_{z=\pm n} s_N(z) = \operatorname{Res}_{z=\pm n} \frac{1}{z \mp n} = 1, \quad \text{si } n \neq 0; \quad \operatorname{Res}_{z=0} s_N(z) = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z} = 1.$$

Los términos de la cola de la serie:

$$t_N(z) := \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

son funciones holomorfas en el disco abierto  $D(0; R)$ . Si  $|z| < R$  y  $n > N > 2R$ , entonces

$$\left| \frac{2z}{z^2 - n^2} \right| \leq \frac{2R}{n^2 - R^2} = \frac{1}{n^2} \frac{2R}{1 - (R/n)^2} < \frac{1}{n^2} \frac{2R}{3/4} = \frac{8R}{3n^2}.$$

Por lo tanto, la serie para  $t_n(z)$  converge uniformemente en el disco cerrado  $D(0; r)$  cuando  $0 < r < R$ , por el criterio mayorizante de Weierstrass (Lema 1.5). Luego  $t_N$  es una función holomorfa en  $D(0; R)$ , por el Teorema 3.17. La serie original  $f(z) = s_N(z) + t_N(z)$  entonces es meromorfa en cualquier disco abierto  $|z| < R$ . Por tanto,  $f$  es meromorfa en todo  $\mathbb{C}$ , con un polo simple en cada  $n \in \mathbb{Z}$  y residuo igual a 1 en cada  $n$ .

La función  $g(z) := \pi \operatorname{ctg} \pi z$  es otra función meromorfa con polos simples en cada  $n \in \mathbb{Z}$ . Además, como

$$\operatorname{Res}_{z=n} \pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{\pi \cos \pi z}{(\operatorname{sen} \pi z)'} \Big|_{z=n} = \frac{\pi \cos \pi z}{\pi \cos \pi z} \Big|_{z=n} = 1,$$

la diferencia  $f(z) - g(z)$  es una función entera. Esta función es *periódica* con período 1, porque  $f(z + 1) \equiv f(z)$  y  $g(z + 1) \equiv f(z)$ . Es posible comprobar, después de escribir  $z = x + iy$ , que  $|f(y) - g(y)|$  es acotado cuando  $|y| \rightarrow \infty$ , con cota uniforme para  $|y| \geq 1$ . De ahí se deduce que esta función entera es acotada en todo  $\mathbb{C}$ ; y por el teorema de Liouville, es una constante. Pero es evidente que  $f - g$  es una *función impar*:  $f(-z) - g(-z) \equiv g(z) - f(z)$ , y en consecuencia la constante es nula:  $f(z) - g(z) \equiv f(0) - g(0) = 0$ . En conclusión, se obtiene:

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \tag{3.13}$$

con convergencia uniforme sobre compactos en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ . ◇

**Lema 3.23.** Si para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f_k$  es una función holomorfa en el disco abierto  $D(c; R)$ , con serie de Taylor  $f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} (z - c)^n$ ; y si la serie

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$$

converge uniformemente sobre compactos en  $D(c; R)$ , entonces la serie de Taylor de  $f$  centrado en  $c$  está dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - c)^n, \quad \text{con} \quad c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn}.$$

*Demostración.* Por el Teorema 3.17,  $f$  es holomorfa en el disco abierto  $D(c; R)$ . La serie de Taylor de  $f$  tiene radio de convergencia al menos  $R$  por el Teorema 2.28 (una función holomorfa es localmente analítica).

Además, el Teorema 3.17 muestra que cada derivada superior cumple  $f^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(n)}$  uniformemente sobre compactos; luego,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k^{(n)}(c)}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn}. \quad \square$$

**Ejemplo 3.24.** Considérese la función definida por

$$f(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{1-z^k} \quad \text{para } |z| < 1.$$

Es claro que el término  $z^k/(1-z^k)$  es holomorfo en el disco  $|z| < 1$ . Se debe comprobar convergencia uniforme sobre cada disco cerrado  $\overline{D}(0; r)$  cuando  $0 < r < 1$ . Ahora, como  $|1-z^k| \geq 1-r^k$  para  $|z| \leq r$ , se obtiene

$$\left| \frac{z^k}{1-z^k} \right| \leq \frac{r^k}{1-r^k} \leq \frac{r^k}{1-r} \quad \text{cuando } |z| \leq r,$$

y la serie geométrica  $\sum_{k=1}^{\infty} r^k/(1-r) = r/(1-r)^2$  converge ya que  $r < 1$ , se obtiene la convergencia uniforme deseada del Lema 1.5.

La serie de Taylor de  $f$ , centrado en 0, se obtiene del Lema 3.23. Al notar que

$$\frac{z^k}{1-z^k} = z^k + z^{2k} + z^{3k} + \dots$$

es una serie geométrica, se obtiene  $a_{kn} = 0$  o 1 en cada caso; y  $a_{kn} = 1$  si y solo si  $n = mk$  para algún  $m \in \mathbb{N}^*$ . Es decir,  $a_{kn} = 1$  si y solo si  $k$  es un divisor de  $n$ . Por lo tanto,<sup>6</sup>

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) z^n = z + 2z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 2z^5 + 4z^6 + \dots$$

donde  $\tau(n)$  es el número de divisores de  $n$ , incluyendo los divisores 1 y  $n$ . ◇

### 3.3. Productos infinitos

**Definición 3.25.** Si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de números complejos, el **producto infinito** de los términos  $(1+a_n)$  es evidentemente nulo si  $a_n = -1$  para algún  $n$ . De lo contrario, el **producto parcial**

$$p_n := \prod_{k=1}^n (1+a_k) = (1+a_1)(1+a_2) \dots (1+a_n)$$

pertenece a  $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Si  $p_n \rightarrow p \in \mathbb{C}^\times$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , se dice que el producto **converge** a  $p$ ,

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1+a_n) = p.$$

(3.14)

<sup>6</sup>La fórmula  $f(z) = \sum_{n \geq 1} \tau(n)z^n$  también dice que  $f$  es la **función generatriz** de la sucesión  $\{\tau(n)\}$ . La otra fórmula  $f(z) = \sum_{k \geq 1} z^k/(1-z^k)$  permite aplicar la teoría de funciones analíticas al estudio de los divisores de enteros. Este es un ítem de la llamada *teoría analítica de números*.

En cualquier otro caso, el producto infinito es *divergente*:

- ◇ si  $p_n \rightarrow \infty$  en  $\mathbb{C}_\infty$ , se dice que el producto *diverge al infinito*;
- ◇ si  $p_n \rightarrow 0$  en  $\mathbb{C}_\infty$ , se dice que el producto *diverge a 0*;
- ◇ si la sucesión  $\{p_n\}$  no tiene límite en  $\mathbb{C}_\infty$ , el producto también *diverge*.

En el caso de que  $a_m = -1$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ , entonces  $p_n = 0$  para  $n \geq m$ ; luego el producto *se anula* de manera trivial. ◇

Si  $p_n \rightarrow p$  en  $\mathbb{C}^\times$ , entonces  $1 + a_n = p_n/p_{n-1} \rightarrow p/p = 1$  y por ende  $a_n \rightarrow 0$ . La condición  $a_n \rightarrow 0$  es *necesaria* para la convergencia (3.14) del producto infinito.

Si  $a_n \rightarrow 0$ , entonces hay  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\Re(1 + a_n) > 0$  para  $n \geq N$ . Entonces la rama principal del logaritmo es aplicable para evaluar  $\text{Log}(1 + a_n) \in \mathbb{C}$  para  $n \geq N$ ; entonces se puede formar la serie  $\sum_{n=N}^\infty \text{Log}(1 + a_n)$  para luego investigar su convergencia.

**Lema 3.26.** Si  $a_n \neq -1$  para todo  $n$ , el producto  $\prod_{n=0}^\infty (1 + a_n)$  converge si y solo si la serie  $\sum_{n=0}^\infty \text{Log}(1 + a_n)$  converge.

*Demostración.* Sin perder generalidad, se puede suponer que  $\Re(1 + a_n) > 0$  para todo  $n$ . Si  $s_n := \sum_{k=0}^n \text{Log}(1 + a_k)$ , entonces  $\exp s_n = \prod_{k=0}^n (1 + a_k) = p_n$ . Si la serie converge:  $s_n \rightarrow s \in \mathbb{C}$ , entonces  $p_n = \exp s_n \rightarrow \exp s \in \mathbb{C}^\times$ , así que el producto converge.

Por otro lado, si el producto converge, entonces hay  $p \in \mathbb{C}^\times$  tal que  $p_n \rightarrow p$ . Entonces  $|p_n| \rightarrow |p| \in (0, \infty)$ , por lo tanto  $\log |p_n| \rightarrow \log |p| \in \mathbb{R}$ . Además,  $\arg p_n \rightarrow \arg p$  en  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . Si  $\text{Arg } p \neq \pi$ , entonces  $|\text{Arg } p_n - \text{Arg } p| < \frac{1}{2}|\text{Arg } p \mp \pi|$  para  $n$  suficientemente grande, así que  $\text{Arg } p_n \rightarrow \text{Arg } p$  también. En consecuencia,  $\text{Log } p_n \rightarrow \text{Log } p \in \mathbb{C}$ , es decir, la serie converge. (En el caso excepcional  $\text{Arg } p = \pi$ , como  $-p_n \rightarrow -p$  se obtiene  $\text{Log } p_n - \pi \rightarrow \text{Log } p - \pi$ ; y de nuevo, la serie converge.) □

**Definición 3.27.** Un producto infinito  $\prod_{n=0}^\infty (1 + a_n)$  **converge absolutamente** si el producto de términos positivos  $\prod_{n=0}^\infty (1 + |a_n|)$  converge. ◇

**Proposición 3.28.** Un producto absolutamente convergente es convergente. Además, el producto  $\prod_{n=0}^\infty (1 + a_n)$  converge absolutamente si y solo si la serie  $\sum_{n=0}^\infty |a_n|$  converge.

*Demostración.* Escribáse  $u_n := |a_n| \geq 0$ . Si el producto  $\prod_{n=0}^\infty (1 + u_n)$  converge, entonces la serie  $\sum_{n=0}^\infty \log(1 + u_n)$  converge también, por el Lema 3.26. La desigualdad  $1 + x \leq e^x$ , válida para todo  $x \in \mathbb{R}$ , implica que

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n \leq \prod_{k=0}^n (1 + u_k) \leq \exp(u_0 + u_1 + \cdots + u_n).$$

Entonces  $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$  converge absolutamente – esto es,  $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n)$  converge – si y solo si la serie positiva  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  converge.

Supóngase, entonces, que la serie positiva  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  es convergente. Hay  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n| \leq \frac{1}{2}$  para  $n \geq N$ . De la serie de Taylor (1.15) de  $\text{Log}(1 + z)$  se obtiene, para  $n \geq N$ :

$$|\text{Log}(1 + a_n)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} a_n^k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_n|^k}{k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_n|^k = \frac{|a_n|}{1 - |a_n|} \leq 2|a_n|. \quad (3.15)$$

Luego la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \text{Log}(1 + a_n)$  converge absolutamente; y del Lema 3.26 se deduce la convergencia de  $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$ .  $\square$

Hay una versión del criterio mayorizante de Weierstrass para la convergencia absoluta y uniforme de un producto infinito de funciones. El siguiente resultado se adapta al caso de factores holomorfos.

**Proposición 3.29.** *Sea  $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$  una sucesión de funciones holomorfas definidas en una región  $U$  de  $\mathbb{C}$ . Si, para cada compacto  $K \subset U$ , existen  $N_K \in \mathbb{N}$  y constantes  $M_{K,n} > 0$  para  $n \geq N_K$ , tales que*

$$\sum_{n=N_k}^{\infty} M_{K,n} < \infty \quad \text{y} \quad |g_n(z)| \leq M_{K,n} \quad \text{para} \quad z \in K,$$

entonces el producto

$$f(z) := \prod_{n=0}^{\infty} (1 + g_n(z)) \quad (3.16)$$

converge uniformemente sobre compactos a una función holomorfa  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Los ceros de  $f$  (si no es idénticamente nula) son aquellos  $z \in U$  tales que  $g_m(z) = -1$  para un número finito de índices  $m$ .

*Demostración.* En primer lugar, supóngase que  $g_n(z) \neq -1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z \in U$ . Si  $K \subset U$  es compacto, la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} |g_n(z)|$  converge absoluta y uniformemente en  $K$ , por el Lema 1.5 (el criterio- $M$  de Weierstrass). Luego  $\sum_{n=0}^{\infty} \text{Log}(1 + g_n(z))$  también converge absolutamente en  $K$ . Como  $|g_n(z)| \leq \frac{1}{2}$  implica  $|\text{Log}(1 + g_n(z))| \leq 2|g_n(z)|$ , en vista de (3.15), la convergencia de la segunda serie es también uniforme en  $K$ .

Entonces el productorio

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + g_n(z)) = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \text{Log}(1 + g_n(z))\right)$$

converge, uniformemente sobre compactos en  $U$ , a una función  $f: U \rightarrow \mathbb{C}^\times$  que no se anula en  $U$ . Como los productos parciales son holomorfas, el producto  $f$  es también holomorfa, por el Teorema 3.17.

En el caso general, para cada  $z_0 \in U$  hay  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $g_m(z_0) \neq -1$  para  $m > M$ , por la condición necesaria  $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(z_0) = 0$ . Si  $\{z \in U : g_m(z) = -1 \text{ para algún } m\}$  tiene un punto de acumulación, estos  $z$  son ceros de  $f$  y el Corolario 2.34 muestra que  $f(z) \equiv 0$  en  $U$ . En el caso contrario, los ceros de  $f$  son aislados y ocurren en los  $z \in U$  para los cuales hay un número finito (al menos uno) de factores en el producto (3.16) tales que  $1 + g_m(z) = 0$ .  $\square$

**Ejemplo 3.30.** Evaluar el producto infinito

$$P := \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Obsérvese que el productorio comienza con  $n = 2$  porque  $(1 - 1/n^2)$  sería 0 para  $n = 1$ , y eso anularía el producto.

Antes de evaluar  $P$ , es necesario *comprobar la convergencia* del producto. De hecho, con  $a_n := -1/n^2$ , el producto converge *absolutamente*, en vista de la Proposición 3.28, porque

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

Ahora  $P = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ , donde el producto parcial  $p_n$  está dado por

$$p_n := \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n} = \frac{n+1}{2n},$$

por cancelación telescópica de factores. Al final,  $P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$ .  $\diamond$

**Ejemplo 3.31.** Euler notó que la función  $(\sin \pi z)/\pi z$  se anula en todo  $n \in \mathbb{Z}$ , salvo en  $n = 0$  donde vale 1. Propuso una “factorización infinita” de esta función en factores de primer grado de tipo  $(1 - z/n)$ . Sin embargo,  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x/n)$  diverge para  $x < 0$ , ya que la serie armónica  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$  diverge. Para obtener un producto convergente, hay que combinar los factores  $(1 - z/n)$  y  $(1 + z/n)$ , como paso previo:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) =: f(z). \tag{3.17}$$

Para verificar (3.17), se debe asegurar que el lado derecho  $f(z)$  es un producto convergente, para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Sea  $R > 0$  con  $R \notin \mathbb{N}$ . En el disco abierto  $D(0; R)$ ,

los términos iniciales se anulan en  $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm[R]$ , respectivamente. Si  $n > R$ , entonces  $|z^2/n^2| < R^2/n^2$  y la serie  $\sum_{n>R} R^2/n^2$  converge. Luego, la Proposición 3.29 – con  $K := \overline{D}(0; R)$  para  $R > 0$  – muestra que el producto  $f(z)$  converge a una *función holomorfa entera*.

Los ceros de esta función entera son los ceros de los factores individuales: en efecto, cada  $n \in \mathbb{Z}$  es un cero simple. Estos son los ceros simples de  $z \mapsto \text{sen } \pi z$  también.

Para identificar la serie  $f(z)$ , se puede usar *derivación logarítmica*; esto es, se forma el cociente  $f'(z)/f(z)$ , una función meromorfa cuyos polos son los ceros de  $f$ . Si  $g, h$  son dos funciones holomorfas, nótese que

$$\frac{(gh)'(z)}{(gh)(z)} = \frac{g'(z)h(z) + g(z)h'(z)}{g(z)h(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

La derivada logarítmica del producto finito  $\prod_{k=1}^n g_k(z)$  es la suma finita  $\sum_{k=1}^n g'_k(z)/g_k(z)$ . Luego

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}. \tag{3.18}$$

Esta expresión se justifica al dejar  $n \rightarrow \infty$  en los productos parciales de  $f(z)$ , exhibidos en (3.17), y en las sumas parciales de (3.18). Si  $K \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  es un compacto, los denominadores están acotados por debajo:  $|z| \geq C_0 > 0$  y  $|z^2 - n^2| \geq C_n > 0$  para  $z \in K$ , así que la serie (3.18) converge uniformemente sobre compactos en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  y representa una función holomorfa allí. En breve, esta serie es un función *meromorfa* en  $\mathbb{C}$  con polos simples en  $\mathbb{Z}$ .

Ahora bien: en el Ejemplo 3.22 esta misma serie representa la función meromorfa  $\pi \text{ctg } \pi z$ . Al escribir  $\underline{g(z)} := \text{sen } \pi z$ , es inmediato que

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \pi \text{ctg } \pi z = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

De la identidad (la “regla del cociente”):

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{f(z)}{g(z)} \right) = \frac{f(z)}{g(z)} \left( \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \right) \equiv 0$$

se concluye que  $g(z) \equiv c f(z)$  para alguna constante  $c$ . Por lo tanto, vale

$$\frac{\text{sen } \pi z}{\pi z} \equiv c \frac{f(z)}{\pi z} = c \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2} \right).$$

Al evaluar los dos lados en  $z = 0$ , se obtiene  $c = 1$ . Se ha comprobado la fórmula (3.17), que representa  $\text{sen } \pi z$  como un producto convergente de polinomios.  $\diamond$

► La utilidad de los productos infinitos es evidente del ejemplo anterior: ofrece una manera de crear funciones holomorfas *con un conjunto de ceros previamente establecido*. Sin embargo, se debe avanzar con cautela, en vista del ejemplo siguiente.

**Ejemplo 3.32.** Si se desea obtener una función entera con ceros simples en los enteros positivos,  $n \in \mathbb{N}^*$ , conviene examinar el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right). \tag{3.19}$$

Sin embargo, esta expresión es sólo formal, porque este producto no converge absolutamente:  $\sum_{n \geq 1} |z|/n = |z| \sum_{n \geq 1} 1/n$  es un múltiplo de la serie armónica. Se verá en breve que este producto tampoco converge condicionalmente.

Otra opción sería ablandar cada término  $(1 - z/n)$  con un factor que no introduce ceros nuevos, pero “regulariza” la serie de Taylor de  $\text{Log}(1 - z/n)$ , al definir

$$g(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n}. \tag{3.20}$$

Para obtener su convergencia, en vista del Lema 3.26, hay que considerar el logaritmo de cada término. Para  $|w| < 1$ , la serie de Taylor del logaritmo (rama principal) da

$$\text{Log}((1 - w)e^w) = w + \text{Log}(1 - w) = -\frac{w^2}{2} - \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} - \dots$$

y para  $|w| < \frac{1}{2}$  se obtiene el estimado

$$\begin{aligned} |\text{Log}((1 - w)e^w)| &= |w|^2 \left| \frac{1}{2} + \frac{w}{3} + \frac{w^2}{4} + \dots \right| \leq |w|^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{|w|}{2} + \frac{|w^2|}{2} + \dots \right) \\ &\leq |w|^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) = |w|^2. \end{aligned}$$

Entonces, si  $|z| \leq R$  y  $n > 2R$ , las desigualdades

$$\left| \text{Log} \left( \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} \right) \right| \leq \frac{|z|^2}{n^2} \leq \frac{R^2}{n^2}$$

y la Proposición 3.29, con  $M_{K,n} = R^2/n^2$  para  $K = \overline{D}(0; R)$  y  $N_K > 2R$ , muestra que el producto (3.20) converge absoluta y uniformemente sobre compactos a una función entera  $g(z)$ , cuyos ceros son precisamente los  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Es evidente que cada  $n$  es un cero simple, porque en  $D(n; 1)$  se puede escribir

$$g(z) = \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} \prod_{k \neq n} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{z/k}$$

y el producto a la derecha no se anula (porque converge en  $\mathbb{C}^\times$ ) para  $|z - n| < 1$ .

Ahora se puede reconsiderar la convergencia de la expresión (3.19), al escribir sus productos parciales como

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{z/k} e^{-z/k} = e^{-H_n z} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{z/k} =: e^{-H_n z} p_n(z),$$

donde

$$H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \quad (3.21)$$

es la *suma armónica finita*. Como  $H_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , aunque hay convergencia  $p_n(z) \rightarrow g(z)$ , se ve que el producto (3.19) *diverge a 0 para  $\Re z > 0$  y diverge a  $\infty$  para  $\Re z < 0$* .  $\diamond$

Para obtener una función entera  $f(z)$  cuyos ceros coinciden con una sucesión dada  $\{c_n\}$ , es necesario es que esta sucesión no tenga punto de acumulación alguna: de lo contrario,  $f$  debe ser idénticamente nula, según el Corolario 2.34. Entonces es obligatorio que  $|c_n| \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Un producto de factores tales como  $(1 - z/c_n) e^{z/c_n}$  no siempre es suficiente para obtener la convergencia del producto; pero se puede ensayar con factores más complicados, tales como  $(1 - z/c_n) e^{z/c_n + z^2/2c_n^2}$ , para cancelar otros términos en la expansión de  $\text{Log}(1 - z/c_n)$ . Hay un teorema de Weierstrass, que aquí se omite,<sup>7</sup> que establece una fórmula general para fabricar una función entera cuyo juego de ceros coincide con  $\{c_n\}$ , toda vez que  $|c_n| \rightarrow \infty$ .

### 3.4. La función gamma de Euler

Un problema general de *interpolación* es la búsqueda de una función  $f$ , dada por una fórmula explícita, que toma valores preasignados  $w_n$  en determinados puntos  $z_n$ ; se debe entonces hallar  $f$  tal que  $f(z_n) = w_n$  para todo  $n$ . Si los  $z_n$  forman un conjunto finito,  $f$  podría ser un polinomio; como por ejemplo, el polinomio interpolante de Lagrange.

Euler consideró el problema de hallar una función cuyos valores en números enteros son los *factoriales*:  $0! = 1! = 1$ ,  $2! = 2$ ,  $3! = 6$ ,  $4! = 24$ , etc. Como  $n \mapsto n!$  crece más rápidamente que  $e^n$ , el problema exige una solución sofisticada. A continuación, se estudiarán tres fórmulas que contribuyen a resolverlo; su definición detallada, sus propiedades y sus interrelaciones forman el temario de esta sección.

<sup>7</sup>Véase, por ejemplo, la Sección 9.4 del libro de Simon.

**Definición 3.33.** Para  $\Re z > 0$ , defínase dos funciones:

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \tag{3.22a}$$

$$F(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n)}, \tag{3.22b}$$

Para todo  $z \in \mathbb{C}$ , defínase la función:

$$G(z) := z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}, \tag{3.23}$$

donde la constante  $\gamma > 0$  está determinada por la condición  $G(1) = 1$ . ◇

En adelante, se comprobará que  $\Gamma(z) = F(z) = 1/G(z)$ , para  $\Re z > 0$ . Sin embargo, conviene examinar estas funciones por separado, antes de demostrar su coincidencia.

**Proposición 3.34.** La integral (3.22a) define una función holomorfa  $\Gamma(z)$  en el semiplano derecho  $\mathbb{C}_> := \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$ .

*Demostración.* Escribese  $z = x + iy$  con  $x > 0$ . Tómesese  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $t^{x-1} \leq e^{t/2}$  para  $t \geq n$ ; entonces, la estimación

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \right| &\leq \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{1/n} t^{x-1} e^{-t} dt + \int_{1/n}^n t^{x-1} e^{-t} dt + \int_n^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\ &\leq \int_0^{1/n} t^{x-1} dt + \int_{1/n}^n t^{x-1} e^{-t} dt + \int_n^\infty e^{-t/2} dt \end{aligned}$$

muestra que la integral impropia  $\Gamma(z)$  converge, para cada  $z \in \mathbb{C}_>$ .

Para  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$ , defínase la función

$$h_n(z) := \int_{1/n}^n t^{z-1} e^{-t} dt,$$

la cual es holomorfa en  $\mathbb{C}_>$  por la Proposición 3.21. Es necesario verificar que  $h_n \rightarrow \Gamma$  uniformemente sobre compactos en  $\mathbb{C}_>$ ; basta mostrar convergencia uniforme en cada franja vertical cerrada  $a \leq x \leq b$ , si  $0 < a < b < \infty$ .

En efecto, si  $z = x + iy$  con  $x \in [a, b]$ , entonces

$$\begin{aligned} |h_n(z) - \Gamma(z)| &= \left| \int_0^{1/n} t^{z-1} e^{-t} dt + \int_n^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \right| \\ &\leq \int_0^{1/n} t^{x-1} e^{-t} dt + \int_n^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \\ &\leq \int_0^{1/n} t^{a-1} e^{-t} dt + \int_n^\infty t^{b-1} e^{-t} dt \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

porque  $t^{x-1} \leq t^{a-1}$  para  $x \geq a$  cuando  $0 < t \leq 1$ . Las integrales al lado derecho no dependen de  $x$ , así que la convergencia  $h_n \rightarrow \Gamma$  es uniforme en la franja  $a \leq x \leq b$ . El Teorema 3.17 ahora muestra que  $\Gamma$  es holomorfa en  $\mathbb{C}_>$ .  $\square$

**Lema 3.35.** Si  $\Re z > 0$ , entonces

$$\boxed{\Gamma(z + 1) = z \Gamma(z)}. \tag{3.24}$$

En consecuencia, vale  $\Gamma(n + 1) = n!$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Con una integración por partes, se obtiene, para  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} h_n(z + 1) &= \int_{1/n}^n t^z e^{-t} dt = \left[ -t^z e^{-t} \right]_{t=1/n}^{t=n} + \int_{1/n}^n z t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= (n^{-z} e^{-1/n} - n^z e^{-n}) + z h_n(z), \end{aligned}$$

y al dejar  $n \rightarrow \infty$ , se obtiene  $\Gamma(z + 1) = z \Gamma(z)$ .

Nótese que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1,$$

luego  $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(3) = 2 \Gamma(2) = 2$ , etc.; la fórmula  $\Gamma(n + 1) = n!$  sigue por inducción sobre  $n$ .  $\square$

► La fórmula (3.24) permite extender  $\Gamma$  del semiplano derecho  $\mathbb{C}_>$  a todo el plano  $\mathbb{C}$ , porque la función

$$\Gamma_1(z) := \frac{\Gamma(z + 1)}{z}$$

está definido para  $\Re z > -1$ , excepto en  $z = 0$ ; y (3.24) dice que  $\Gamma_1(z) \equiv \Gamma(z)$  para  $\Re z > 0$ . La función  $\Gamma_1$  es meromorfa en el semiplano  $\Re z > -1$  y tiene un polo simple en 0, con residuo

$$\operatorname{Res}_{z=0} \Gamma_1(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \Gamma_1(z) = \Gamma(1) = 1.$$

En una segunda iteración de este proceso, se define

$$\Gamma_2(z) := \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} \quad \text{para } \Re z > -2,$$

con  $z \notin \{0, -1\}$ . Esta función  $\Gamma_2$  es meromorfa en el semiplano  $\Re z > -2$ , coincide con  $\Gamma$  para  $\Re z > 0$ , y tiene polos simples en 0 y  $-1$ , con residuos

$$\operatorname{Res}_{z=0} \Gamma_2(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \Gamma_2(z) = \Gamma(2) = 1, \quad \operatorname{Res}_{z=-1} \Gamma_2(z) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \Gamma_2(z) = -\Gamma(1) = -1.$$

Ahora, dado cualquier  $m \in \mathbb{N}^*$ , defínase

$$\Gamma_m(z) := \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)\dots(z+m-1)} \quad \text{para } \Re z > -m. \quad (3.25)$$

Esta es una **continuación meromorfa** de  $\Gamma(z)$  al semiplano  $\Re(z) > -m$ , con polos simples en  $\{0, -1, -2, \dots, -m+1\}$ . El residuo en  $z = -k$ , para  $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ , está dado por

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=-k} \Gamma_m(z) &= \lim_{z \rightarrow -k} (z+k) \Gamma_m(z) = \lim_{z \rightarrow -k} \frac{(z+k) \Gamma(z+m)}{z(z+1)\dots(z+m-1)} \\ &= \frac{(m-k-1)!}{(-k)(-k+1)\dots(-1)(1)\dots(m-k-1)} = \frac{1}{(-k)(-k+1)\dots(-1)} \\ &= \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Obsérvese que este residuo no depende de  $m$ .

**Definición 3.36.** La **función gamma** de Euler  $\Gamma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  es la función meromorfa definida así: si  $\Re z > 0$ ,  $\Gamma(z)$  es la integral (3.22a); luego, si  $z \notin -\mathbb{N} = \{0, -1, -2, \dots\}$ , se define  $\Gamma(z) := \Gamma_m(z)$  para cualquier  $m > -\Re z$ . De esta manera,  $\Gamma$  es una función holomorfa en la región  $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ . Al poner  $\Gamma(-k) := \infty$  para  $-k \in -\mathbb{N}$ , se obtiene una función meromorfa en  $\mathbb{C}$ , donde el residuo en el polo  $-k$  es  $(-1)^k/k!$  para  $k \in \mathbb{N}$ .  $\diamond$

► Ahora conviene considerar el producto infinito (3.23).

**Lema 3.37.** La función  $G(z)$  dada por la fórmula (3.23) define una función entera con ceros simples en  $-\mathbb{N}$ .

*Demostración.* Obsérvese que  $G(z) = z e^{\gamma z} g(-z)$  donde  $g(z)$  es el producto infinito (3.20) del Ejemplo 3.32. Esto demuestra que  $G$  es una función entera, con ceros simples en  $\{-1, -2, -3, \dots\}$  y otro cero simple en 0 debido al factor  $z e^{\gamma z}$ .  $\square$

**Lema 3.38.** La constante positiva  $\gamma$  en la fórmula (3.23) está dada por

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right). \quad (3.26)$$

*Demostración.* Las sumas parciales (3.21) de la serie armónica son

$$H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \int_1^{n+1} \varphi(t) dt,$$

donde  $\varphi$  es la función escalonada definida por  $\varphi(t) := 1/k$  para  $k \leq t < k+1$ .

Por otro lado, como  $\log(n+1) = \int_1^{n+1} (1/t) dt$ , la siguiente estimación es válida para cada  $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned} 0 < H_n - \log(n+1) &= \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{t} \right) dt, \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+s} \right) ds = \sum_{k=1}^n \int_0^1 \frac{s}{k(k+s)} ds \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_0^1 \frac{1}{k^2} ds = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $n \mapsto H_n - \log(n+1)$  es una sucesión creciente acotada de números positivos, la cual converge a un límite

$$c := \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{s}{k(k+s)} ds.$$

Además, como  $\log(n+1) - \log n = \log(1 + 1/n) \rightarrow \log 1 = 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , se ve que

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n - \log(n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n - \log n.$$

El producto parcial  $p_n(z)$  de  $G(z)$ , evaluado en  $z = 1$ , es

$$p_n(1) = e^\gamma \prod_{k=1}^n \left( \frac{k+1}{k} \right) e^{-1/k} = (n+1) e^{\gamma - H_n} = \exp(\gamma - H_n + \log(n+1)).$$

La condición  $G(1) = 1$  entonces implica que  $e^{\gamma - c} = 1$ . Como  $\gamma > 0$  por hipótesis, esto conlleva  $\gamma - c = 0$ , o bien  $\gamma = c = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \log n)$ .  $\square$

**Lema 3.39.** La función meromorfa dada por

$$\frac{1}{G(z)} = \frac{1}{z} e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}$$

tiene polos simples en cada  $-k \in -\mathbb{N}$  y coincide con el límite  $F(z)$  de (3.22b) para  $z \notin -\mathbb{N}$ .

*Demostración.* Los polos (simples) de  $1/G(z)$  son los ceros (simples) de  $G(z)$ , es decir, los enteros no positivos.

Si  $p_n(z)$  denota un producto parcial de  $G(z)$ , entonces

$$\frac{1}{G(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p_n(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^n \frac{k e^{z/k}}{z+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^{-\gamma z} e^{H_n z}}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

Como  $e^{-\gamma z + H_n z} = n^z e^{(H_n - \log n - \gamma)z}$  para cada  $n \in \mathbb{N}^*$ , se obtiene

$$\frac{1}{G(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} = F(z),$$

y de feria, la convergencia de este límite queda establecida para  $z \notin -\mathbb{N}$ . Se ha comprobado que la fórmula (3.22b) define  $F$  como función meromorfa en  $\mathbb{C}$ , con polos simples en  $-\mathbb{N}$  solamente. En particular,  $F$  es holomorfa en el semiplano derecho  $\mathbb{C}_{>}$ .  $\square$

**Lema 3.40.** Si  $z \notin -\mathbb{N}$ , entonces  $F(z+1) = zF(z)$ ; además,  $F(1) = 1$ .

*Demostración.* Es fácil evaluar

$$F(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Si  $z \notin -\mathbb{N}$ , entonces

$$\begin{aligned} F(z+1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{z+1}}{(z+1)\dots(z+n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{nz}{z+n+1} \right) \left( \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} \right) = zF(z). \end{aligned} \quad \square$$

**Proposición 3.41.** Vale  $F(z) = \Gamma(z)$  para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ .

*Demostración.* Basta comprobar que  $F(x) = \Gamma(x)$  para cada  $x \in \mathbb{R}$  con  $0 < x \leq 1$ ; porque entonces la función holomorfa  $F - \Gamma$ , definida en la región  $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ , se anula en el intervalo real  $(0, 1]$  y por tanto es idénticamente cero, por el Corolario 2.34.

Basta mostrar, entonces, que

$$\frac{\Gamma(x) x(x+1) \dots (x+n)}{n! n^x} \rightarrow 1 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \quad \text{para } 0 < x \leq 1.$$

En vista del Lema 3.35, es equivalente mostrar que

$$\frac{\Gamma(x+n+1)}{n! n^x} \rightarrow 1 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \quad \text{para } 0 < x \leq 1.$$

Tómese  $x \in (0, 1]$ . So  $0 \leq t \leq n$ , entonces  $t^x \leq n^x$  y  $t^{x-1} \geq n^{x-1}$ . En cambio, si  $t \geq n$ , entonces  $t^x \geq n^x$  y  $t^{x-1} \leq n^{x-1}$ . Estas desigualdades conducen a dos estimaciones:

$$\begin{aligned} \Gamma(x+n+1) &= \int_0^\infty t^{x+n} e^{-t} dt \\ &\leq n^x \int_0^n t^n e^{-t} dt + n^{x-1} \int_n^\infty t^{n+1} e^{-t} dt \\ &= n^x \int_0^\infty t^n e^{-t} dt + n^{n+x} e^{-n} + n^{x-1} \int_n^\infty t^n e^{-t} dt, \\ \Gamma(x+n+1) &= \int_0^\infty t^{x+n} e^{-t} dt \\ &\geq n^{x-1} \int_0^n t^{n+1} e^{-t} dt + n^x \int_n^\infty t^n e^{-t} dt \\ &= n^{x-1} \int_0^n t^n e^{-t} dt - n^{n+x} e^{-n} + n^x \int_0^\infty t^n e^{-t} dt. \end{aligned}$$

En los dos casos, se ha aplicado una integración por partes a los integrandos  $t^{n+1}e^{-t}$ .

Al lado derecho en cada caso, el coeficiente de  $n^x$  es  $\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = \Gamma(n+1) = n!$ , mientras que los coeficientes de  $n^{x-1}$  son menores que  $n!$ ; al dividir por  $n! n^x$ , se obtiene

$$1 + \frac{a_n}{n} - \frac{n^n e^{-n}}{n!} \leq \frac{\Gamma(x+n+1)}{n! n^x} \leq 1 + \frac{b_n}{n} + \frac{n^n e^{-n}}{n!}$$

donde  $0 < a_n < 1$  y  $0 < b_n < 1$ . En consecuencia, como  $a_n/n \rightarrow 0$  y  $b_n/n \rightarrow 0$ , sólo hay que comprobar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n e^{-n}}{n!} = 0, \quad \text{o bien} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^n}{n^n} = \infty. \quad (3.27)$$

Si se omiten los primeros  $n$  términos en serie de Taylor para  $e^n$ , se obtiene

$$e^n \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{n+k}}{(n+k)!} = \frac{n^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k n!}{(n+k)!} = \frac{n^n}{n!} \left( 1 + \frac{n}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} + \dots \right),$$

y la suma entre paréntesis diverge cuando  $n \rightarrow \infty$ . Esto comprueba el límite (3.27), mostrando que  $\Gamma(x) = F(x)$  para  $x \in (0, 1]$  y de rebote  $\Gamma(z) = F(z)$  para  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ .  $\square$

► Una propiedad muy importante de la función gamma es la siguiente ecuación funcional, la llamada **fórmula de reflexión** de la función gamma.

**Proposición 3.42.** *Se verifica la siguiente igualdad, para todo  $z \in \mathbb{C}$ :*

$$\Gamma(z) \Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}. \quad (3.28)$$

*Demostración.* Los dos lados de (3.28) son funciones meromorfas en  $\mathbb{C}$ , con polos simples en cada  $n \in \mathbb{Z}$ . Es necesario verificar esta relación para  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ; para tal efecto, basta mostrar que  $\Gamma(x) \Gamma(1 - x) = \pi/\operatorname{sen} \pi x$  para  $x \in \mathbb{R}$  con  $0 < x < 1$ .

Si  $0 < x < 1$ , el factor  $\Gamma(1 - x)$  está dada por

$$\Gamma(1 - x) = \int_0^\infty t^{-x} e^{-t} dt = s \int_0^\infty (us)^{-x} e^{-us} du,$$

al hacer la sustitución  $t =: us$  en la primera integral. Luego,

$$\begin{aligned} \Gamma(x) \Gamma(1 - x) &= \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s} \Gamma(1 - x) ds = \int_0^\infty \int_0^\infty u^{-x} e^{-(1+u)s} du ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty u^{-x} e^{-(1+u)s} ds du = \int_0^\infty \frac{u^{-x}}{1+u} du. \end{aligned}$$

(Se deja como ejercicio justificar el cambio del orden de integración.)

Ahora conviene recordar – del Ejemplo 3.13, fórmula (3.9) – que

$$\int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{1+u} du = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi a} \quad \text{para } 0 < a < 1.$$

Al tomar  $a := 1 - x$ , este resultado demuestra que

$$\Gamma(x) \Gamma(1 - x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi(1 - x)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi x}.$$

[[ Una demostración alternativa emplea productos infinitos. De la identidad (3.24) que implica  $\Gamma(1 - z) = -z \Gamma(-z)$ , y las fórmulas

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}, \quad \frac{1}{\Gamma(-z)} = -z e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n},$$

se obtiene, por cancelación de los factores exponenciales en los productos, la relación:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \frac{1}{\Gamma(1 - z)} = -\frac{1}{z} \frac{1}{\Gamma(z)} \frac{1}{\Gamma(-z)} = z \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \pi z.$$

La última igualdad es una consecuencia del resultado del Ejemplo 3.31. ]]

□

Otro resultado clásico es la **fórmula de duplicación** de Legendre.

**Proposición 3.43.** Para todo  $z \in \mathbb{C}$ , vale:

$$\Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z). \quad (3.29)$$

*Demostración.* Los dos lados de esta ecuación son funciones meromorfas con polos simples en  $-\frac{1}{2}\mathbb{N} = \{-n/2 : n \in \mathbb{N}\}$ . Se debe verificar que coinciden para  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\frac{1}{2}\mathbb{N})$ .

De la fórmula (3.22b) para  $\Gamma(z)$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 n^{2z+\frac{1}{2}} 2^{2n+2}}{(2z)(2z+1) \dots (2z+2n+1)} \\ &= C_z \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! (2n+1)^{2z}}{(2z)(2z+1) \dots (2z+2n+1)} = C_z \Gamma(2z), \end{aligned}$$

donde

$$C_z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n+2} \sqrt{n}}{(2n+1)!} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2z} = 2^{-2z} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n+2} \sqrt{n}}{(2n+1)!}. \quad (3.30)$$

El último límite a la derecha se deduce del producto  $\sin \pi z = \pi z \prod_{n \geq 1} (1 - z^2/n^2)$  al tomar  $z = \frac{1}{2}$ :

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)(2n)}$$

lo cual es equivalente a la **fórmula de Wallis**:<sup>8</sup>

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \times \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \times \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \times \dots$$

Al reorganizar los términos de este producto, se obtiene

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)]^2}{[3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)]^2} (2n+1),$$

así que

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n) \sqrt{2n+1}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n n!)^2 \sqrt{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Al sustituir esta expresión en (3.30), se obtiene el coeficiente al lado derecho de (3.29):

$$C_z = 2^{-2z} (2\sqrt{2}) \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 2^{1-2z} \sqrt{\pi}. \quad \square$$

<sup>8</sup>John Wallis, matemático de Oxford, propuso esta fórmula en 1665 como una conjetura, a partir una interpolación entre áreas debajo de curvas polinomiales. Quiso calcular el área del cuadrante debajo de la curva  $y = (1 - x^2)^{1/2}$  pero no disponía del teorema binomial.

Una propiedad más de la función gamma es su **convexidad logarítmica**.

**Definición 3.44.** Una función  $h: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , definido en un intervalo abierto  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ , es **convexa** si

$$h(tx + (1 - t)y) \leq th(x) + (1 - t)h(y), \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1,$$

toda vez que  $x, y \in (a, b)$ . Si  $h$  es dos veces diferenciable con  $h''(x) > 0$  para  $x \in (a, b)$ , entonces  $h$  es convexa.

Otra función con valores positivos  $g: (a, b) \rightarrow (0, \infty)$  se dice **logarítmicamente convexa** si  $\log g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa. Es decir, si  $x, y \in (a, b)$ ,

$$g(tx + (1 - t)y) \leq g(x)^t g(y)^{1-t}. \quad \diamond$$

**Lema 3.45.** La función gamma es logarítmicamente convexa en  $(0, \infty)$ :

$$\boxed{\Gamma(tx + (1 - t)y) \leq \Gamma(x)^t \Gamma(y)^{1-t}} \quad \text{para } x > 0, y > 0, 0 \leq t \leq 1. \quad (3.31)$$

*Demostración.* Es evidente de fórmula integral (3.22a) que  $\Gamma(x) > 0$  para  $0 < x < \infty$ . La derivada logarítmica de  $\Gamma(x)$  se obtiene directamente del producto infinito (3.23) que define su función inversa:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{G(x)} = e^{-\gamma x} \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{x+n} \right) e^{x/n}.$$

Por lo tanto, vale

$$\frac{d}{dx} (\log \Gamma(x)) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} \right).$$

La derivada de la expresión anterior es una suma convergente positiva, para  $x > 0$ :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}.$$

Esto dice que la segunda derivada de  $\log \Gamma(x)$  es positiva, para  $x > 0$ , lo cual establece la convexidad de  $\log \Gamma(x)$ . □

Un teorema de Bohr y Mollerup establece lo siguiente: si  $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  es una función continua tal que  $f(x+1) \equiv x f(x)$  y si  $f$  es logarítmica convexa, entonces  $f(x) = f(1) \Gamma(x)$  para todo  $x > 0$ . En otras palabras, las propiedades (3.24) y (3.31) y el valor  $\Gamma(1) = 1$  determinan la función gamma con unicidad.

### 3.5. La función zeta de Riemann

Una función muy importante en la teoría de números es la *función zeta*, definida inicialmente como una serie cuyos términos son potencias, todos con el mismo exponente, de los enteros positivos. Si  $x$  es real, con  $x > 1$ , la serie positiva  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$  es convergente, por comparación con la integral  $\int_1^{\infty} t^{-x} dt = 1/(x - 1)$ .

**Lema 3.46.** *La serie*

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}, \quad \text{para } \Re z > 1, \quad (3.32)$$

define una función holomorfa en el semiplano  $\Re z > 1$ .

*Demostración.* Basta demostrar, en vista del Corolario 3.18, que la serie converge uniformemente en el semiplano cerrado  $\Re z \geq a$ , para cada  $a > 1$ .

Como  $x \geq a \implies |n^{-z}| = |e^{-z \log n}| = e^{-x \log n} = n^{-x} \leq n^{-a}$  si  $n \in \mathbb{N}^*$ ; y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}$  converge, el Lema 1.5 demuestra la convergencia uniforme para  $\Re z \geq a$ .  $\square$

Euler logró relacionar la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$  con el producto infinito

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-z}} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - p_k^{-z})^{-1} \quad (3.33)$$

que converge (como se verá en seguida) para  $\Re z > 1$ ; donde  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ , y en general  $\{p_k : k \in \mathbb{N}^*\}$  es la lista de los **números primos** en  $\mathbb{N}$ .

**Proposición 3.47.** *La fórmula (3.33) de Euler define una función holomorfa en  $\Re z > 1$ , que además coincide la suma de la serie (3.32).*

*Demostración.* Para  $x > 1$ , la serie positiva  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k^{-x}$  es una suma de algunos de los términos de la serie (3.32), así que esta serie también converge, con  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k^{-x} < \zeta(x)$ .

Como  $|p_k^{-z}| = p_k^{-x}$ , el producto infinito  $f(z) := \prod_{k=1}^{\infty} (1 - p_k^{-z})$  converge absoluta y uniformemente en un semiplano  $\Re z \geq a$ , si  $a > 1$ . Es obvio que ningún factor del producto se anula, porque

$$|p_k^{-z}| = p_k^{-x} = e^{-x \log p_k} < 1 \quad \text{para } x > 1.$$

Luego el producto  $f(z)$  converge en  $\mathbb{C}^\times$ ; y su recíproco

$$\frac{1}{f(z)} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - p_k^{-z})^{-1}$$

converge también a un límite en  $\mathbb{C}^\times$ , uniformemente sobre compactos en  $\Re z > 1$ . Para verificar que  $1/f(z) = \zeta(z)$  en este semiplano, basta mostrar igualdad para  $z = x > 1$ .

Para  $x > 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , sea  $q_n(x)$  el producto parcial

$$q_n(x) := \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - p_k^{-x}} = \prod_{k=1}^n (1 + p_k^{-x} + p_k^{-2x} + p_k^{-3x} + \dots).$$

Al multiplicar estos  $n$  factores, se obtiene la serie positiva  $1 + \sum p_1^{-r_1 x} p_2^{-r_2 x} \dots p_n^{-r_n x}$  donde se suma sobre los índices  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}^*$ . Por la propiedad de *factorización única* en  $\mathbb{N}^*$ , los términos de esta serie son distintos; todos son de la forma  $m^{-x}$  para algunos  $m \in \mathbb{N}$ ; y los términos  $\{1, 2^{-x}, 3^{-x}, \dots, n^{-x}\}$  aparecen en la suma. Esto da dos desigualdades:

$$\sum_{m=1}^n m^{-x} \leq q_n(x) \leq \sum_{m=1}^{\infty} m^{-x} = \zeta(x).$$

Al dejar  $n \rightarrow \infty$ , se obtiene  $1/f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n(x) = \zeta(x)$  cuando  $x > 1$ .  $\square$

**Corolario 3.48.** La función  $\zeta$  dada por (3.32) no se anula en el semiplano  $\Re z > 1$ .  $\boxminus$

Al igual que la función gamma, la función zeta posee una continuación meromorfa a todo el plano complejo. Si  $x$  es real, con  $x > 1$ , fíjese que la función  $t \mapsto t^{-x}$  es decreciente para  $t > 1$ , así que

$$\int_n^{n+1} t^{-x} dt \leq n^{-x} \leq \int_{n-1}^n t^{-x} dt \quad \text{para } n \geq 2.$$

Al sumar estas desigualdades y al notar que  $t^{1-x} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , se obtiene

$$\frac{1}{x-1} = \int_1^{\infty} t^{-x} dt \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^{\infty} t^{-x} dt = \frac{x}{x-1} \quad \text{para } x > 1.$$

Entonces  $\zeta(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \downarrow 1$ . La continuación meromorfa de la función  $\zeta$  entonces debe tener un polo en 1.

**Lema 3.49.** Para  $\Re z > 1$ , la siguiente igualdad es válida:

$$\zeta(z) \Gamma(z) = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt. \quad (3.34)$$

*Demostración.* Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , el cambio de variable  $u = nt$  muestra que

$$\int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-nt} dt = n^{-z} \int_0^{\infty} u^{z-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(z)}{n^z} \quad \text{para } \Re z > 0.$$

Entonces, para  $\Re z > 1$ , vale

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-nt} dt \right).$$

Para obtener la fórmula (3.34), bastaría cambiar la suma con la integral en la última ecuación. A continuación, se justificará este intercambio.

Considérese la suma parcial

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^{-z} &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty t^{z-1} \left( \sum_{k=1}^n e^{-kt} \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt - \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1} e^{-nt}}{e^t - 1} dt \end{aligned}$$

porque

$$\sum_{k=1}^n e^{-kt} = \frac{e^{-t} - e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}} = \frac{1 - e^{-nt}}{e^t - 1}.$$

Estas integrales impropias convergen en  $t = 0$ , porque  $x > 1$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , tómesese  $\delta > 0$  tal que

$$\int_0^\delta \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt < \frac{\varepsilon}{2}; \quad \text{y sea } C_\delta := \int_\delta^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt.$$

Ahora tómesese  $N \in \mathbb{N}^*$  tal que  $C_\delta e^{-N\delta} < \varepsilon/2$ . Entonces, para  $n \geq N$ , vale

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty \frac{t^{z-1} e^{-nt}}{e^t - 1} dt \right| &\leq \int_0^\delta \frac{t^{x-1} e^{-nt}}{e^t - 1} dt + \int_\delta^\infty \frac{t^{x-1} e^{-nt}}{e^t - 1} dt \\ &\leq \int_0^\delta \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt + e^{-n\delta} \int_\delta^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada  $z$  con  $\Re z > 1$ , se concluye que

$$\int_0^\infty \frac{t^{z-1} e^{-nt}}{e^t - 1} dt \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

En consecuencia, la igualdad (3.34) es válida en el semiplano  $\Re z > 1$ . □

**Proposición 3.50.** *La función  $\zeta$  se extiende a una función meromorfa en todo  $\mathbb{C}$ , con un único polo simple en 1.*

*Demostración.* La fórmula (3.34) permite escribir el producto  $\zeta(z) \Gamma(z)$  en la forma

$$\zeta(z) \Gamma(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt + \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt =: g(z) + h(z),$$

donde la segunda integral define una función entera,

$$h(z) := \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt.$$

En efecto, este límite es uniforme en cada semiplano cerrado  $\Re z \geq b$  con  $b \in \mathbb{R}$ ; y las integrales  $\int_1^n t^{z-1} dt / (e^t - 1)$  definen funciones enteras de  $z$ , por la Proposición 3.2I.

Para analizar la otra integral  $g(z)$ , conviene recordar la serie de Taylor

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} t^{2m}$$

donde los  $B_{2m}$  son los números de Bernoulli. Esta serie de potencias tiene radio de convergencia  $2\pi$ , porque  $e^t - 1 \neq 0$  para  $0 < |t| < 2\pi$ . En consecuencia, vale

$$\frac{t^{z-1}}{e^t - 1} = t^{z-2} - \frac{t^{z-1}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} t^{z+2m-2}.$$

Al integrar término por término, se obtiene la fórmula

$$g(z) := \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2z} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} \frac{1}{z+2m-1}. \quad (3.35)$$

Por convergencia uniforme sobre compactos en discos  $|z| < R$ , es fácil verificar que  $g(z)$  es una función meromorfa en  $\mathbb{C}$ , con polos simples en  $1, 0, -1, -3, -5, \dots$

La continuación de  $\zeta$  al plano complejo está dada por

$$\zeta(z) := \frac{g(z)}{\Gamma(z)} + \frac{h(z)}{\Gamma(z)}.$$

Por el Lema 3.37, la función  $1/\Gamma(z)$  es entera, con ceros simples en  $0, -1, -2, -3, \dots$  así que el segundo sumando es entero; el primer sumando tiene singularidades removibles en  $0, -1, -3, -5, \dots$  y un polo en  $1$ , con residuo

$$\text{Res}_{z=1} \zeta(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)g(z)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma(1)} = 1.$$

Además,  $\zeta(z)$  tiene *ceros simples* en  $z = -2, -4, -6, \dots$  los cuales se llaman los *ceros triviales* de la función zeta.  $\square$

► La función zeta obedece una ecuación funcional que conduce a una *propiedad de reflexión*. Defínase la función (meromorfa) auxiliar

$$\xi(z) := \frac{z(z-1)}{2} \pi^{-z/2} \Gamma(z/2) \zeta(z). \quad (3.36)$$

Obsérvese que  $\xi$  es holomorfa en el semiplano  $\Re z > 1$ , y tiene posibles singularidades en  $0$  y  $1$ . Pero  $(z-1)\zeta(z)$  es una función entera, y  $\frac{1}{2}z\Gamma(\frac{1}{2}z) = \Gamma(\frac{1}{2}z+1)$  es holomorfa en la región  $\Re z > -2$ , así que estas singularidades son removibles. Además,  $z \mapsto \Gamma(\frac{1}{2}z)$  tiene polos simples en  $-2, -4, -6, \dots$  en donde  $\zeta$  tiene ceros simples. En conclusión: la función  $\xi$  definido por (3.36) es una *función entera*.

**Proposición 3.51** (Riemann). *La función  $\zeta$  obedece la identidad:  $\zeta(z) \equiv \zeta(1-z)$ .*  $\square$

Para la demostración de esta Proposición, véase, por ejemplo, la Sección 4.3 del libro de Ahlfors.<sup>9</sup> No será demostrada aquí; pero es justo mencionar algunos corolarios. En primer lugar, usando las fórmulas de reflexión (3.28) y de duplicación (3.29), se puede transformar la igualdad anterior en la **ecuación funcional** para la función zeta:

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{2} \Gamma(1-z) \zeta(1-z). \quad (3.37)$$

En particular, los únicos ceros de  $\zeta$  en el semiplano  $\Re z < 0$  son los ceros triviales  $-2, -4, -6, \dots$  ya mencionados. La función  $\zeta$  tiene una infinitud de otros ceros en la franja vertical  $0 < \Re z < 1$ . (En 1896, Hadamard mostró que no hay ceros en la recta  $\Re z = 1$ ). La **conjetura de Riemann** dice que todos estos *ceros no triviales* quedan sobre la recta  $\Re z = \frac{1}{2}$ . Hay un premio de \$1 000 000, ofrecido por el Clay Mathematical Institute, para la confirmación o refutación de esta conjetura.<sup>10</sup>

**Lema 3.52.** *Vale  $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ .*

*Demostración.* Es cuestión de evaluar la función  $\zeta$  en 0 y en 1:

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} (z-1) \pi^{-z/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}z + 1\right) \zeta(z) = -\zeta(0), \\ \zeta(1) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{2} z \pi^{-z/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}z\right) (z-1) \zeta(z) = \frac{1}{2} \pi^{-1/2} \pi^{1/2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La igualdad  $\zeta(0) = -\zeta(1)$  dice que  $-\zeta(0) = \frac{1}{2}$ .  $\square$

Cabe mencionar otra fórmula útil para la función zeta:

$$\zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log(2\pi).$$

Para una demostración, véase la Sección 1.3 del libro: George E. Andrews, Richard Askey y Ranjan Roy, *Special Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

### 3.6. Ejercicios sobre integrales y series complejas

En los ejercicios que siguen, evaluar las integrales propuestas mediante la integración de alguna función de variable compleja sobre un contorno apropiado.

<sup>9</sup>Otra demostración, usando integrales de contorno, se puede encontrar en el Apéndice E del libro: Julian Havil, *Gamma: exploring Euler's constant*, Princeton University Press, 2003.

<sup>10</sup>El matemático Tom Apostol describió algunos aspectos de la conjetura en un poema notorio: *Where are the zeros of zeta of s?*

**Ejercicio 3.1.** Si  $-1 < a < 1$ , demostrar la identidad:

$$I_a := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

Hallar la relación entre  $I_a$  e  $I_{1/a}$ . ¿Sería posible evaluar  $I_{1/a}$  con el mismo contorno?

**Ejercicio 3.2.** Calcular las integrales:

$$I_1 := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 \theta d\theta}{5 + 3 \sin \theta}, \quad I_2 := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2\theta d\theta}{5 - 3 \cos \theta}.$$

**Ejercicio 3.3.** Comprobar la identidad:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta} = 2\pi\sqrt{2}.$$

**Ejercicio 3.4.** Si  $C$  es el círculo  $|z| = 2$ , recorrido una vez contrario a reloj, calcular las integrales:

$$I_1 := \oint_C \frac{z+2}{z(z+1)} dz, \quad I_2 := \oint_C \frac{3z+1}{z(z-1)^3} dz.$$

**Ejercicio 3.5.** Si  $C$  es el círculo  $|z| = 1$ , recorrido una vez contrario a reloj, calcular las integrales:<sup>11</sup>

$$I_1 := \oint_C z e^{1/z} dz, \quad I_2 := \oint_C \frac{\cosh(1/z)}{z} dz,$$

donde  $\cosh w := \frac{1}{2}(e^w + e^{-w})$ .

**Ejercicio 3.6.** Calcular las integrales impropias:

$$I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 3) dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}, \quad I_2 := \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 6x^2 + 8}.$$

**Ejercicio 3.7.** Calcular las integrales impropias:

$$I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}, \quad I_2 := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}, \quad I_3 := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^6 + 1}.$$

**Ejercicio 3.8.** Si  $a > 0$ , demostrar la identidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a e^a}.$$

<sup>11</sup>Aunque las singularidades en  $z = 0$  son esenciales, el método de residuos es aplicable.

**Ejercicio 3.9.** Calcular las integrales:

$$I_1 := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2 + \operatorname{sen}^2 \theta}, \quad I_2 := \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{x^4 + x^2 + 1}.$$

**Ejercicio 3.10.** Si  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$  y  $t > 0$ , evaluar la integral:

$$I := \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos tx}{(x+b)^2 + a^2} dx.$$

**Ejercicio 3.11.** Usar el lema de Jordan para calcular la integral:

$$I := \int_{-\infty}^\infty \frac{2x \operatorname{sen} sx \cos tx}{x^2 + a^2} dx,$$

donde  $a > 0$  y  $s, t \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 3.12.** Si  $a > 0$ , emplear un contorno rectangular para demostrar que

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-(x+ia)^2} dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx.$$

Esta integral impropia vale  $\sqrt{\pi}$ . Deducir que

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cos 2ax dx = \sqrt{\pi} e^{-a^2}.$$

**Ejercicio 3.13.** Para  $n \in \mathbb{N}$ , demostrar la siguiente identidad:

$$I_n := \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}.$$

[[ Indicación: se recomienda *no usar inducción* sobre  $n$ . ]]

**Ejercicio 3.14.** Calcular los valores principales de los siguientes integrales:

$$I_1 := \text{P} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(2-x)(x^2+4)}, \quad I_2 := \text{P} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^3+4x+5}.$$

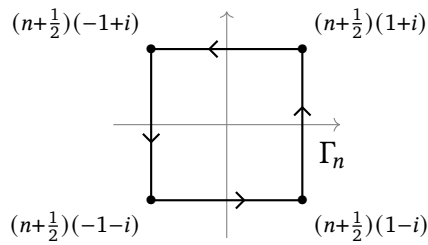
**Ejercicio 3.15.** (a) Si  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , comprobar la sumatoria

$$\sum_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi a}$$

mediante el cálculo de la integral de contorno

$$I_n := \oint_{\Gamma_n} \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi z}{(z+a)^2} dz$$

sobre el borde  $\Gamma_n$  del cuadrado con vértices  $(n + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$ , dibujado enseguida.



[[ Indicación: comprobar que  $|\operatorname{ctg} \pi z| < 2$  para  $z \in \Gamma_n$ . ]]

(b) Deducir las siguientes fórmulas de Euler:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Ejercicio 3.16.** Mediante la integral de contorno

$$I_{n,k} := \oint_{\Gamma_n} \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi z}{z^{2k}} dz$$

en el mismo contorno  $\Gamma_n$  del Ejercicio 3.15, donde  $k = 1, 2, 3, \dots$ , junto con el resultado del Ejercicio 2.22, demostrar la fórmula general

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{2(-4)^{k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} B_{2k}$$

donde los  $B_{2k}$  son los números de Bernoulli del Ejercicio 2.21. Verificar los casos particulares:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

**Ejercicio 3.17.** Si  $C$  es una curva simple cerrada con  $C \cup I(C) \subset U$ , una región de  $\mathbb{C}$ ; y si  $\{f_n: U \rightarrow \mathbb{C} : n \in \mathbb{N}\}$  es una sucesión de funciones holomorfas que converge uniformemente sobre compactos a una función  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  que no se anula sobre  $C$ , demostrar que para  $n$  suficientemente grande, las funciones  $f_n$  tienen el mismo número de ceros (contados con multiplicidad) en la región interior  $I(C)$ .

[[ Indicación: usar el teorema de Rouché con  $g := f_n - f$ . ]]

**Ejercicio 3.18.** En la situación del Ejercicio 3.17 anterior, demostrar que cada cero  $c$  de la función límite  $f$  es un límite  $c_k \rightarrow c$  de los ceros de alguna subsucesión de las funciones  $\{f_n\}$ : esto es,  $f(c) = 0 \implies c = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k$  con  $f_{n_k}(c_k) = 0$ .

**Ejercicio 3.19** (Teorema de Hurwitz). Si  $\{f_n: U \rightarrow \mathbb{C}^\times : n \in \mathbb{N}\}$  es una sucesión de funciones holomorfas que no se anulan en una región  $U$ ; y si  $f_n \rightarrow f$  uniformemente sobre compactos en  $U$ , entonces o bien la función límite  $f$  no se anula en  $U$ , o bien  $f$  es idénticamente nula. [[ Indicación: usar el Ejercicio 3.18 anterior. ]]

**Ejercicio 3.20.** Si  $0 < r < 1$ , demostrar que el polinomio

$$p_n(z) := 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$$

no tiene raíces en el disco abierto  $D(0; r)$ , para  $n$  suficientemente grande.

[[ Indicación: usar el teorema de Hurwitz. ]]

**Ejercicio 3.21.** Demostrar la convergencia absoluta de los siguientes productos; y en cada caso, evaluar el producto:

$$P_1 := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right); \quad P_2 := \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right); \quad P_3 := \prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}.$$

[[ Indicación:  $n^2 + n + 1 = (n+1)^2 - (n+1) + 1$ . ]]

**Ejercicio 3.22.** Averiguar los dominios de convergencia de los siguientes productos:

$$f(z) := \prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^n); \quad g(z) := \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{z^n}{n!}\right).$$

**Ejercicio 3.23.** Demostrar que el producto infinito

$$h(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^4}{n^4}\right)$$

define una función entera con ceros en  $\pm n$  y en  $\pm in$  para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Ejercicio 3.24.** Si una función entera  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  no se anula en  $\mathbb{C}$ , demostrar que hay otra función entera  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$f(z) = e^{g(z)} \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

[[ Indicación: demostrar que  $f'(z)/f(z)$  tiene una primitiva entera. ]]

**Ejercicio 3.25.** Sea  $\{u_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-1\} : n \in \mathbb{N}\}$  una familia de funciones holomorfas enteras tales que  $1 + u_n(z) \neq 0$  para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ; y si además, el producto infinito  $f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z))$  converge uniformemente sobre compactos, demostrar que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u'_n(z)}{1 + u_n(z)},$$

con convergencia uniforme de la serie sobre compactos de  $\mathbb{C}$ .

**Ejercicio 3.26.** La derivada logarítmica  $\underline{\psi}(z) := \Gamma'(z)/\Gamma(z)$  se llama la **función digamma**.

(a) Demostrar la siguiente identidad para la función digamma:

$$\psi(z) - \psi(1) := \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = - \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{z+k} - \frac{1}{k+1} \right) \quad \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}).$$

(b) Deducir que  $\underline{\Gamma}'(1) = -\gamma$ .

(c) Comprobar que  $\psi(z+n) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{z+n-1} + \psi(z)$  para  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(d) Mostrar que  $\psi(z) - \psi(1-z) = -\pi \operatorname{ctg} \pi z$  para  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ .

**Ejercicio 3.27.** (a) Demostrar que  $\underline{\Gamma}(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ; y luego evaluar  $\Gamma(n + \frac{1}{2})$  para  $n \in \mathbb{N}$ .

(b) Usar la sustitución  $t = u^2$  para calcular la integral gaussiana:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

**Ejercicio 3.28.** Comprobar que  $\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\bar{z})$  para  $z \notin (-\mathbb{N})$ . Concluir que

$$|\Gamma(\frac{1}{2} + iy)| = \sqrt{\frac{2\pi}{e^{\pi y} + e^{-\pi y}}} \quad \text{para } y \in \mathbb{R}.$$

**Ejercicio 3.29.** La **función beta** de Euler, de dos variables reales, se define por

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \text{para } x > 0, y > 0.$$

(a) Expresar  $\Gamma(x) \Gamma(y)$  como una integral doble. Con un cambio de variable apropiado, demostrar que

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{3.38}$$

(b) Usar esta fórmula (3.38) para comprobar de nuevo que  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

(c) Deducir que  $B(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}) = \pi \binom{2n}{n} / 2^{4n}$ .

**Ejercicio 3.30.** Comprobar las siguientes identidades, válidas para  $0 < x < 1$ :

$$\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{-x} dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = 2 \int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} \theta)^{2x-1} d\theta = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi x}.$$

[[ Indicación: usar el Ejercicio 3.29 anterior. ]]

**Ejercicio 3.31.** Usar la fórmula (3.38) para expresar la función beta como un producto infinito:

$$B(x, y) = \frac{x+y}{xy} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (x+y)/n}{(1+x/n)(1+y/n)}.$$

Este producto infinito permite extender la función beta a una función meromorfa  $B(z, w)$  de dos variables complejas. ¿Dónde están los polos de la función  $z \mapsto B(z, w)$ ?

**Ejercicio 3.32.** Demostrar esta relación de recurrencia para la función beta:

$$B(x, y+1) = \frac{y}{x+y} B(x, y)$$

directamente de su definición. [Indicación: integración por partes.]

**Ejercicio 3.33.** Usando la fórmula de Euler (3.33) para la función zeta, demostrar que la suma de los recíprocos de los números primos diverge:  $\sum_{k \geq 1} 1/p_k = \infty$ . Concluir que hay una infinitud de números primos en  $\mathbb{N}$ .

**Ejercicio 3.34.** Demostrar que las siguientes identidades son válidas:

$$\zeta(z)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^z} \quad \text{para } \Re z > 1;$$

$$\zeta(z) \zeta(z-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^z} \quad \text{para } \Re z > 2;$$

donde  $\tau(n)$  es el número de divisores de  $n$ ,  $\sigma(n)$  es la suma de los divisores de  $n$ ; por ejemplo,  $\tau(12) = 6$ ,  $\sigma(12) = 28$ . [Indicación: usar la fórmula de Euler.]

**Ejercicio 3.35.** Comprobar la siguiente identidad para la  $\Re z > 1$ :

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z},$$

donde la **función de Möbius**  $\mu: \mathbb{N}^* \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  se define como sigue. Si  $n$  es divisible por  $p^2$  para algún primo  $p$ , entonces  $\mu(n) = 0$ ; si  $n$  posee exactamente  $k$  factores primos que son distintos, entonces  $\mu(n) = (-1)^k$ ; y además,  $\mu(1) := 1$ .

**Ejercicio 3.36.** Usar la igualdad  $\int_1^{\infty} t^{-x} dt = 1/(x-1)$  para comprobar que

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left( \zeta(z) - \frac{1}{z-1} \right) = \gamma.$$

**Ejercicio 3.37.** (a) Si  $f$  y  $g$  son funciones meromorfas, ambas con un polo simple en  $c$  con residuos respectivos  $a_{-1}$  y  $b_{-1}$ , demostrar que  $\lim_{z \rightarrow c} f(z)/g(z) = a_{-1}/b_{-1}$ .

(b) Mediante un estudio de la función  $\zeta(z) \Gamma(z)$  cerca de los números enteros negativos, comprobar que:<sup>12</sup>

$$\zeta(1 - 2m) = -\frac{B_{2m}}{2m}.$$

(c) Usar la ecuación funcional (3.37) para la función zeta para deducir los valores:

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1} 2^{2m-1} B_{2m}}{(2m)!} \pi^{2m}.$$

[[ Comparar con el resultado del Ejercicio 3.16. ]]

---

<sup>12</sup>En particular, valen  $\zeta(-1) = -1/12$ ,  $\zeta(-3) = 1/120$ ,  $\zeta(-5) = -1/252$ .

## 4 Funciones armónicas

*Harmonic functions (solutions of Laplace's equation) are intimately connected to analytic functions, since the real part of an analytic function is harmonic and any harmonic function is (locally) the real part of an analytic function. Thus, on a Riemann surface, complex analysis merges almost imperceptibly with potential theory (which is the study of harmonic functions).*

— Alan F. Beardon

Las funciones suaves de variables reales difieren sustancialmente de las funciones holomorfas de una variable compleja: las propiedades peculiares de éstas no tiene muchos paralelos en el cálculo diferencial real. Pero hay una excepción parcial a esa regla: la clase de funciones *armónicas* con dominios en  $\mathbb{R}^n$  (para  $n \geq 2$ ) comparten algunas aspectos de las funciones holomorfas de una variable compleja. En el caso  $n = 2$ , resulta que las partes real e imaginaria de una función holomorfa son armónicas, y eso es responsable en parte por las características que tales funciones exhiben.

### 4.1. Funciones armónicas en el plano complejo

El punto de partida para el estudio de funciones armónicas son las ecuaciones de Cauchy y Riemann (1.23):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.23')$$

que establece relaciones entre las derivadas parciales de primer orden de dos funciones  $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas en una región  $U$  del plano  $\mathbb{R}^2$ , si ellas forman las partes real e imaginaria de una función holomorfa

$$f(x + iy) := u(x, y) + i v(x, y).$$

Como la función holomorfa  $f$  es suave, su parte real  $u := \Re f$  y su parte imaginaria  $v := \Im f$  son (en particular) continuamente diferenciables hasta segundo orden. Entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Las derivadas parciales mixtas coinciden en  $U$ , de tal manera que  $v_{yx} = v_{xy}$  y además  $u_{xy} = u_{yx}$ . Como consecuencia inmediata,  $u$  y  $v$  cumplen una misma ecuación diferencial de segundo orden:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.} \quad (4.1)$$

La ecuación (4.1) es la **ecuación de Laplace** (en dos variables). Resulta conveniente introducir esta ecuación en  $n \geq 2$  variables, aunque cuando  $n > 2$  se pierde la relación con funciones holomorfas.

**Definición 4.1.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  una región (esto es, una parte abierta y conexa) del espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 2$ . El **Laplaciano** en  $n$  variables cartesianas es el operador diferencial de segundo orden:

$$\underline{\Delta} := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}. \quad (4.2)$$

Una función  $u: U \rightarrow \mathbb{R}$  que es dos veces continuamente diferenciable – a veces se escribe  $u \in C^2(U, \mathbb{R})$  – que cumple la ecuación de Laplace:

$$\boxed{\Delta u(x) = 0} \quad \text{para todo } x \in U \quad (4.3)$$

se llama una **función armónica** en  $U$ .

Si  $u$  es armónico en un abierto  $V$  tal que  $\bar{U} \subset V$ , se dice que  $u$  es *armónica en  $\bar{U}$* .  $\diamond$

En el caso  $n = 2$ , las partes real e imaginaria  $u, v$  de una función holomorfa  $f = u + iv$  son armónicas en una región en donde  $f$  está definida. Sin embargo, no toda función armónica de dos variables es la parte real de una función holomorfa en todo su dominio, como muestra el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 4.2.** En coordenadas polares de  $\mathbb{C}^\times = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , el Laplaciano toma la forma:

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Es evidente que

$$\underline{u(r, \theta) := \log r} \quad \text{cumple} \quad \Delta u = 0.$$

En el dominio  $\mathbb{C}^\times$  [o en un disco perforado  $D(0; R) \setminus \{0\}$ ] la función  $\log r$  está definida y armónica, pero no hay función holomorfa en esos dominios (que no son simplemente conexos) tal que  $\Re f(z) = \log |z|$ .

Cada rama del logaritmo  $\log_\alpha(z) := \log |z| + i\theta$  está definida en un plano cortado  $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$ , así que  $\log r$  sí es *localmente* expresable como la parte real de una función holomorfa en un vecindario de cualquier punto de  $\mathbb{C}^\times$ .  $\diamond$

► La característica sobresaliente de una función armónica es su **propiedad del valor medio**, que se verifica a continuación.

**Teorema 4.3.** Sea  $u: U \rightarrow \mathbb{R}$  una función armónica definida en una región  $U \subseteq \mathbb{C}$ . Si  $c \in U$  y si  $R \leq d(c, \mathbb{C} \setminus U)$ , de modo que  $D(c; R) \subseteq U$ , entonces para  $0 < r < R$  se verifica la igualdad:

$$u(c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(c + re^{i\theta}) d\theta. \tag{4.4}$$

*Demostración.* Sea  $g(r, \theta) := u(c + re^{i\theta})$ . Nótese que  $g$  y  $\frac{\partial g}{\partial \theta}$  son funciones periódicas de  $\theta$ , con período  $2\pi$ . Escribese

$$h(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(c + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r, \theta) d\theta.$$

Entonces  $g$  y  $h$  son funciones de clase  $C^2$  para  $0 < r < R$ , tales que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r h'(r)) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial g}{\partial r} (r, \theta) \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \Delta u(c + re^{i\theta}) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \right) d\theta = 0 - \frac{1}{2\pi r^2} \left[ \frac{\partial g}{\partial \theta} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Entonces  $r h'(r) = a$ ; y de ahí  $h(r) = a \log r + b$ , para algunas constantes  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Como  $\log r \rightarrow -\infty$  pero  $h(r) \rightarrow u(c)$  cuando  $r \downarrow 0$ , porque  $u$  es continua en  $c$ , se ve que  $a = 0$  y  $b = u(c)$ . Esto dice que  $h(r)$  es una función constante de valor  $u(c)$ , comprobando la afirmación (4.4).  $\square$

Una consecuencia inmediata de la propiedad del valor medio es un **principio del máximo** para funciones armónicas de dos variables. En contraste con el Teorema 2.4I, no hace falta tomar el valor absoluto.

**Teorema 4.4.** Si  $u: U \rightarrow \mathbb{R}$  es una función armónica, definida en una región  $U \subseteq \mathbb{C}$ , que posee un máximo local (o bien un mínimo local) en  $U$ . Entonces  $u$  es una función constante.

*Demostración.* Si  $u$  posee un máximo local en un punto  $c \in U$ , tómese  $\delta > 0$  tal que  $D(c; \delta) \subset U$  y  $u(c) \geq u(z)$  para  $z \in D(c; \delta)$ . Si hubiera  $c + re^{i\theta} \in D(c; \delta)$  tal que  $u(c + re^{i\theta}) < u(c)$ , entonces la continuidad del integrando de (4.4) en  $\theta$  implicaría un valor de la integral menor que  $u(c)$ . Como eso no sucede, se deduce que  $u(c + re^{i\theta}) = u(c)$  para  $0 \leq r < \delta$  y  $\theta$  cualquiera; en otras palabras, que  $u$  es constante en  $D(c; \delta)$ .

Se ha mostrado que  $\{z \in U : u(z) = u(c)\}$  es abierto en  $U$ , y también es cerrado por la continuidad de  $u$ . Como  $U$  es conexo, se sigue que  $u$  es constante en  $U$ .

Si  $u$  posee un mínimo local, se aplica este argumento a la función armónica  $-u$ .  $\square$

**Corolario 4.5.** Si  $u: K \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en un compacto  $K \subset \mathbb{C}$  y si  $u$  es armónica en el interior de  $K$ , entonces  $u$  alcanza su máximo y mínimo en la frontera  $\partial K$ .  $\square$

El principio del máximo también implica que una función real, continua en un compacto  $K \subset \mathbb{C}$  y armónica en su interior, está determinada unívocamente para sus valores en la frontera. De hecho, si  $u, v$  son dos funciones de esa especie tales que  $u(z) = v(z)$  para  $z \in \partial K$ , entonces  $u - v$  es una función continua en  $K$ , armónica en el interior e igual a 0 en  $\partial K$ . El Corolario 4.5 implica que  $u - v \equiv 0$  en  $K$ .

► Otra cosa es obtener los valores de  $u$  en el interior a partir de sus valores en la frontera. En el caso  $K = \overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ , si se supone que  $u$  es armónica en  $\overline{\mathbb{D}}$  (Definición 4.1), hay una fórmula explícita que calcula sus valores internos.

**Definición 4.6.** Si  $z \in \mathbb{D}$ ,  $e^{i\phi} \in \mathbb{T}$ , la función

$$\underline{C}(z, e^{i\phi}) := \frac{e^{i\phi} + z}{e^{i\phi} - z} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\phi} z^n$$

se llama el **núcleo de Schwarz**.

Si  $re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ ,  $e^{i\phi} \in \mathbb{T}$ , la función

$$P_r(\theta, \phi) := \Re C(re^{i\theta}, e^{i\phi}) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\phi - \theta) + r^2} \tag{4.5}$$

se llama el **núcleo de Poisson**. ◇

**Proposición 4.7.** Sea  $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua que es holomorfa en el disco unitario abierto  $\mathbb{D}$ . Si  $f(z) \equiv u(z) + iv(z)$  donde  $u = \Re f$ ,  $v = \Im f$ , entonces:

$$f(z) = iv(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\phi} + z}{e^{i\phi} - z} u(e^{i\phi}) d\phi \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}. \tag{4.6}$$

*Demostración.* La serie de Taylor de  $f$  en 0 es  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  para algunos  $a_n \in \mathbb{C}$ , dadas por la fórmula integral de Cauchy (2.14):

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\phi}) r^{-n} e^{-in\phi} d\phi,$$

para cualquier  $r$  con  $0 < r < 1$ , porque  $\overline{D}(0; r) \subset \mathbb{D}$ . Como  $f$  es (uniformemente) continua en  $\overline{\mathbb{D}}$ , se ve puede tomar el límite  $r \uparrow 1$  debajo del signo integral:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\phi}) e^{-in\phi} d\phi. \tag{4.7}$$

Como  $f$  es holomorfa en  $\mathbb{D}$ , el teorema de Cauchy muestra que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r} f(w) w^{n-1} dw = 0 \quad \text{para } n \in \mathbb{N}^*, 0 < r < 1.$$

Al dejar  $r \uparrow 1$ , se obtiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\phi}) e^{+in\phi} d\phi = 0 \quad \text{para } n \in \mathbb{N}^*.$$

El conjugado complejo de esta igualdad es:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{i\phi})} e^{-in\phi} d\phi = 0 \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

la cual se puede sumar a (4.7), para  $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\phi}) e^{-in\phi} d\phi.$$

En cambio, si  $n = 0$ , se usa (4.7) directamente, aplicando la propiedad de valor medio (4.4) a la función armónica  $v = \Im f$ :

$$a_n = i v(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\phi}) d\phi.$$

Ahora se puede reconstruir la serie de Taylor para  $f$  (cuyo radio de convergencia es al menos 1) así:

$$\begin{aligned} f(z) &= i v(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\phi} z^n \right] u(e^{i\phi}) d\phi \\ &= i v(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(z, e^{i\phi}) u(e^{i\phi}) d\phi. \end{aligned} \quad \square$$

**Corolario 4.8** (Integral de Poisson). Si  $u: \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua que es armónica en  $\mathbb{D}$ , entonces:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta, \phi) u(e^{i\phi}) d\phi \quad (4.8)$$

para todo  $z \in \mathbb{D}$ , al tomar la parte real de (4.6). □

En este Corolario 4.8, se ha dado por un hecho que una función armónica en el disco unitario  $\mathbb{D}$  es la parte real de una función holomorfa  $f$ . El (contra)Ejemplo 4.2 a esta propiedad es factible sólo porque en ese caso el dominio  $\mathbb{C}^\times$  no es simplemente conexo. En los ejercicios se verá que  $u =: \Re f$  está bien definida en el disco  $\mathbb{D}$ . De hecho, la fórmula (4.6) muestra que  $f$  está determinada unívocamente por  $u$ , hasta una constante imaginaria  $i v(0)$ .

Nótese también que la integral de Poisson (4.8) muestra cómo  $u|_{\mathbb{D}}$  está determinado por los valores  $u(e^{i\phi})$  en la frontera  $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ .

### 4.2. Funciones armónicas en $\mathbb{R}^n$ , $n \geq 2$

La ecuación de Laplace (4.3) se puede plantear en  $n$  variables reales, para  $n \geq 2$ , usando el Laplaciano (4.2) en  $n$  variables (cartesianas). De ahora en adelante se usará ese Laplaciano en  $\mathbb{R}^n$  con  $n = 2, 3, \dots$  (el caso  $n = 1$  no interesa).

► En lo que sigue,  $\Omega$  denotará una región acotada de  $\mathbb{R}^n$  cuya frontera  $\partial\Omega$  es suave (es decir, es una subvariedad de  $\mathbb{R}^n$  de dimensión  $n - 1$ ). Esto significa que el vector normal unitario  $\mathbf{n}$  (orientado hacia afuera) es bien definida en el borde  $\partial\Omega$ . Si  $u$  es de clase  $C^1$  en un vecindario abierto de  $\overline{\Omega}$ , la derivada direccional  $\partial u / \partial \mathbf{n} := \mathbf{n} \cdot \nabla u$  es una función continua sobre  $\partial\Omega$ .

Se dice que una función  $u$  es **armónica en  $\overline{\Omega}$**  si  $u$  está definida y de clase  $C^2$  en un vecindario abierto  $W$  de  $\overline{\Omega}$ , y si  $\Delta u = 0$  en  $W$ .

**Ejemplo 4.9.** En  $\mathbb{R}^n$ , se puede usar un sistema de *coordenadas esféricas*  $(r, \omega)$ , donde  $r^2 := \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  y  $\omega = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$  es un juego de parámetros angulares de la esfera unitaria  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Con esta notación, el Laplaciano en  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  toma la forma:

$$\Delta = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} D_S \tag{4.9}$$

donde  $D_S$  es un operador diferencial de segundo orden en las coordenadas angulares.

Si  $n \geq 3$ , es evidente que

$$u(r, \omega) := \frac{1}{r^{n-2}} = \|x\|^{2-n} \quad \text{cumple} \quad \Delta u = 0. \tag{4.10}$$

Esta función armónica es *radial* (depende sólo de  $r$ ) y es obviamente singular en 0.  $\diamond$

**Lema 4.10.** Si  $u, v$  son dos funciones de clase  $C^2$  definidas en un vecindario abierto  $W$  de  $\overline{\Omega}$ , se verifica la **identidad de Green**:

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dV = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS. \tag{4.11}$$

Aquí  $dV = dx_1 dx_2 \dots dx_n$  es la forma de volumen sobre  $\mathbb{R}^n$  y  $dS$  denota la forma de “área”  $(n - 1)$ -dimensional.<sup>1</sup>

*Demostración.* Este es un corolario del *teorema de la divergencia* para un campo vectorial  $\mathbf{w}: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{w}) dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS.$$

<sup>1</sup>Más precisamente:  $dV$  es la medida de Lebesgue de  $\mathbb{R}^n$ , y la inclusión de la subvariedad  $\partial\Omega \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  induce la medida  $dS$  (el “área superficial”) sobre el borde de  $\Omega$ .

Tómese  $\mathbf{w} := u \nabla v - v \nabla u$ ; es claro que  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ . Por otro lado,

$$\operatorname{div} \mathbf{w} := \nabla \cdot \mathbf{w} = (\nabla u \cdot \nabla v + u \nabla \cdot \nabla v) - (\nabla v \cdot \nabla u + v \nabla \cdot \nabla u) = u \Delta v - v \Delta u. \quad \square$$

*Notación.* La bola abierta con centro  $a \in \mathbb{R}^n$  y radio  $r > 0$  se denota por

$$B(a; r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}.$$

Su clausura es la bola cerrada  $\bar{B}(a; r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$ .

Las bolas unitarias abierta y cerrada y la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^n$  se denotan por:

$$\mathbb{B}^n := B(0; 1), \quad \bar{\mathbb{B}}^n := \bar{B}(0; 1), \quad \mathbb{S}^{n-1} = \partial \mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$$

La medida total de  $\mathbb{B}^n$  y de  $\mathbb{S}^{n-1}$  están dadas por:

$$\operatorname{Vol}(\mathbb{B}^n) = \frac{\Omega_n}{n} \quad \text{y} \quad \operatorname{Area}(\mathbb{S}^{n-1}) = \Omega_n; \quad \text{donde} \quad \Omega_n := \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Con esta notación, se puede plantear la propiedad de valor medio de funciones armónicas en bolas cerradas.

**Proposición 4.11.** Si  $u$  es una función armónica en una bola cerrada  $\bar{B}(a; r)$ , entonces

$$u(a) = \frac{1}{\Omega_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(a + r\omega) d\sigma(\omega) \quad (4.12)$$

donde  $\sigma = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^k dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \cdots \wedge dx^n$  es la “forma de área” sobre  $\mathbb{S}^{n-1}$  (la cual es invariante bajo rotaciones).

*Demostración.* Para  $n = 2$ ,  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{T}$  es el círculo unitario, con medida total  $\Omega_2 = 2\pi$  y 1-forma  $d\theta$ , en cuyo caso la fórmula (4.4) es un caso particular de (4.12).

Para  $n \geq 3$ , se puede asumir, sin perder generalidad, que  $\bar{B}(a; r) = \bar{\mathbb{B}}$ , con  $a = 0$  y  $r = 1$ . Tómese  $\varepsilon$  con  $0 < \varepsilon < 1$  y sea

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < \|x\| < 1\}.$$

Su frontera  $\partial\Omega$  es la unión de dos esferas concéntricas  $\mathbb{S}^{n-1}$  y  $\varepsilon \mathbb{S}^{n-1}$ , con orientaciones opuestas.

Se puede aplicar la identidad de Green en  $\Omega$  al tomar  $v(x) := \|x\|^{2-n}$ , la función armónica del Ejemplo 4.9. La derivada normal  $\partial/\partial \mathbf{n}$  se reduce a  $\partial/\partial r$  en la esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ ; o bien a  $-\varepsilon^{1-n} \partial/\partial r$  (con  $\mathbf{n}$  apuntando hacia adentro) en la esfera  $\varepsilon \mathbb{S}^{n-1}$ . Entonces la relación (4.11) se simplifica en:

$$0 = (2-n) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u dS - (2-n)\varepsilon^{1-n} \int_{\varepsilon \mathbb{S}^{n-1}} u dS - \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS - \varepsilon^{2-n} \int_{\varepsilon \mathbb{S}^{n-1}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS.$$

Otra aplicación de la identidad de Green con  $v(x) \equiv 1$  muestra que  $\int_{\partial\Omega} \partial u / \partial \mathbf{n} \, dS = 0$ ; por lo tanto, el tercer y cuarto términos al lado derecho se anulan. Como  $dS = d\sigma(\omega)$  sobre  $S^{n-1}$  pero  $dS = \varepsilon^{n-1} d\sigma(\omega)$  sobre  $\varepsilon S^{n-1}$ , la igualdad anterior se reduce a:

$$\int_{S^{n-1}} u(\omega) \, d\sigma(\omega) = \int_{S^{n-1}} u(\varepsilon\omega) \, d\sigma(\omega).$$

Al dejar  $\varepsilon \downarrow 0$  el lado derecho tiende a  $u(0) \int_{S^{n-1}} d\sigma(\omega) = \Omega_n u(0)$ , al usar la continuidad de  $u$  en 0. □

**Corolario 4.12.** *Los ceros de una función armónica con valores en  $\mathbb{R}$  no son aislados.*

*Demostración.* Sea  $a \in \Omega$  con  $u(a) = 0$  y tómesese  $r > 0$  tal que  $\overline{B}(a; r) \subset \Omega$ . El lado derecho de la fórmula (4.12) es el promedio de los valores de  $u$  en la esfera  $\partial B(a; r)$ , el cual es 0 por esa misma fórmula.

Entonces o bien  $u(x) \equiv 0$  para  $\|x - a\| = r$ , o bien  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  toma valores positivos y negativos en la esfera  $\partial B(a; r)$ . Esa esfera es conexa y  $u$  es continua; por lo tanto, hay al menos un punto  $y \in \partial B(a; r)$  tal que  $u(y) = 0$ .

Se ha mostrado que cualquier vecindario de  $a$ , que incluye una bola abierta  $B(a; \varepsilon)$ , contiene un punto  $y$  con  $\|y - a\| = r < \varepsilon$  tal que  $u(y) = 0$ . Entonces el cero de  $u$  en  $a$  no es aislado. □

Este fenómeno marca un contraste con las funciones holomorfas. Por ejemplo, la función holomorfa  $f(z) := z^2$  tiene un cero aislado en  $z = 0$  en  $\mathbb{C}$ ; pero su parte real  $u(x, y) := x^2 - y^2$  se anula a lo largo del par de rectas  $y = \pm x$  en  $\mathbb{R}^2$ .

► El *principio del máximo* también es válido para funciones armónicas en  $\mathbb{R}^n$ , a partir de la propiedad del valor medio. La demostración del Teorema 4.4 es aplicable al caso  $n \geq 3$ , *mutatis mutandis*, al reemplazar la fórmula (4.4) por (4.12).

En particular, una función armónica en  $\overline{\Omega}$ , o bien una función continua en  $\overline{\Omega}$  que es armónica en  $\Omega$ , alcanza sus valores máximo y mínimo en la frontera  $\partial\Omega$ . (Cabe recordar que se supone que  $\Omega$  es acotado y por ende  $\overline{\Omega}$  es compacto.)

### El núcleo de Poisson para una bola en $\mathbb{R}^n$

La integral de Poisson (4.8) para funciones armónicas de dos variables en el disco unitario  $\mathbb{D}$  (que son continuas en  $\overline{\mathbb{D}}$ ) admite una generalización en dimensiones  $n \geq 2$ . Se trata de obtener todos los valores  $u(x)$  en la bola unitaria abierta  $x \in \mathbb{B}^n$  como promedios ponderados de los valores  $u(\omega)$  en su frontera,  $\omega \in S^{n-1}$ . Ese promedio ponderado viene de una función  $P(x, \omega)$ , llamado *núcleo de Poisson*, definido como sigue.

**Definición 4.13.** El núcleo de Poisson para la bola unitaria  $\mathbb{B}^n$ , para  $n \geq 2$ , es la función  $P: \mathbb{B}^n \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$P(x, \omega) := \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - \omega\|^n}. \tag{4.13}$$

Cabe notar que la función  $P(re^{i\theta}, e^{i\phi}) := P_r(\theta, \phi)$  de la fórmula (4.5) es el caso  $n = 2$  del lado derecho:

$$|re^{i\theta} - e^{i\phi}|^2 = (r \cos \theta - \cos \phi)^2 + (r \sin \theta - \sin \phi)^2 = 1 - 2r \cos(\phi - \theta) + r^2. \quad \diamond$$

**Teorema 4.14.** Si  $u$  es una función armónica en  $\bar{\mathbb{B}}^n$  y si  $x \in \mathbb{B}^n$ , entonces se cumple

$$u(x) = \frac{1}{\Omega_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} P(x, \omega) u(\omega) d\sigma(\omega). \tag{4.14}$$

Antes de demostrar este teorema, es prudente mostrar unos lemas coadyuvantes.

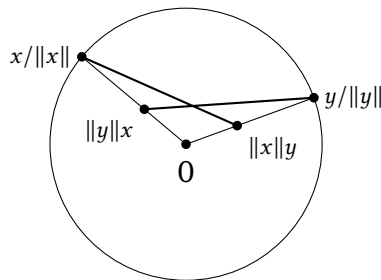


Figura 4.1: La fórmula de simetría, para  $x, y \in \mathbb{B}$

**Lema 4.15.** Si  $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , esta fórmula de simetría es válida:

$$\left\| \frac{y}{\|y\|} - \|y\| x \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \|x\| y \right\|. \tag{4.15}$$

*Demostración.* Al multiplicar los dos lados de (4.15) por  $\|x\| \|y\|$ , se obtiene una fórmula equivalente:

$$\|x\| \|y - \|y\|^2 x\| = \|y\| \|x - \|x\|^2 y\|$$

Como  $\|x\|^2 = x \cdot x$ , el cuadrado de cualquiera de los dos lados es:

$$\|x\|^2 \|y\|^2 - 2\|x\|^2 \|y\|^2 (x \cdot y) + \|x\|^4 \|y\|^4. \quad \square$$

**Lema 4.16.** Si  $a \in \mathbb{R}^n$ , la función  $u_a(x) := \|x - a\|^{2-n}$  es armónica en  $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ .

*Demostración.* El Laplaciano  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^n$  conmuta con la traslación  $x \mapsto x - a$  por un vector fijo, así que se puede emplear coordenadas esféricas centradas en  $a$ ,  $x =: a + r\eta$ . En tal sistema de coordenadas,  $u_a(x) = 1/r^{n-2}$  coincide con la función radial (4.10), y por ende  $\Delta u_a = 0$ ; se debe excluir del dominio de  $\Delta$  el punto donde  $r = 0$ , es decir  $x = a$ .  $\square$

Si  $x \in \overline{\mathbb{B}^n}$ ,  $x \neq 0$ , entonces  $\|x\| < 1$  y por lo tanto  $x^* := x/\|x\|$  cumple  $\|x^*\| > 1$ , así que  $x^* \notin \overline{\mathbb{B}^n}$ . La función  $u_x(y) := \|y - x\|^{2-n}$  es armónica para  $y \neq x$ . Si  $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ , es decir si  $\|y\| = 1$ , la fórmula de simetría (4.15) muestra que

$$\|y - x\|^{2-n} = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \|x\| y \right\|^{2-n} = \|x\|^{2-n} \|y - x^*\|^{2-n} =: w_x(y). \quad (4.16)$$

La función  $w_x(y)$  al lado derecho es armónica para  $y$  en todo  $\overline{\mathbb{B}^n}$ , pero sólo coincide con  $u_x(y)$  cuando  $\|y\| = 1$ .

En todo caso, la función  $v(y) := \|y - x\|^{2-n} - w_x(y)$  es armónica en  $\overline{\mathbb{B}^n} \setminus \{x\}$  y se anula en la esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

*Demostración del Teorema 4.14.* Tómesese  $\varepsilon > 0$  tal que  $\overline{B}(x; \varepsilon) \subset \mathbb{B}$ , y sea  $\Omega := \mathbb{B}^n \setminus \overline{B}(x; \varepsilon)$ . Denótese  $S_\varepsilon := \{y : \|y - x\| = \varepsilon\}$ . Ahora se puede aplicar la identidad de Green (4.11) a la función armónica  $u$  del enunciado y la función  $v$  anterior; de ahí resulta

$$0 = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left( u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS + (n-2)\Omega_n u(x) - \int_{S_\varepsilon} \left( u \frac{\partial w_x}{\partial \mathbf{n}} - w_x \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS,$$

porque en la esfera  $S_\varepsilon$  el integrando  $u \partial u_x / \partial \mathbf{n} = (n-2)\varepsilon^{1-n} u(y)$  tiene el valor medio  $(n-2)\Omega_n u(x)$ . El integrando del tercer término es una función acotada en  $\mathbb{B}$  y por lo tanto su integral sobre  $S_\varepsilon$  tiende a 0 cuando  $\varepsilon \downarrow 0$ . Esto implica que

$$u(x) = -\frac{1}{(n-2)\Omega_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(\omega) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(\omega) d\sigma(\omega).$$

Entonces la fórmula (4.14) se cumple, con  $P(x, \omega) := -\frac{1}{(n-2)} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(\omega)$ .

Para calcular esta derivada normal, se expresa  $y =: r\omega$  en coordenadas esféricas, en cuyo caso  $\partial/\partial \mathbf{n}$  coincide con la derivada radial  $\partial/\partial r$  en puntos de  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Se calcula

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial r} \|r\omega - x\|^{2-n} \right|_{r=1} &= \left. \frac{\partial}{\partial r} \left( (r^2 - 2r\omega \cdot x + x \cdot x)^{(2-n)/2} \right) \right|_{r=1} \\ &= \frac{1}{2}(2-n) \|r\omega - x\|^{-n} (2r - 2\omega \cdot x) \Big|_{r=1} = -(n-2) \frac{1 - \omega \cdot x}{\|\omega - x\|^n}. \end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial w_x}{\partial \mathbf{n}}(r\omega) \right|_{r=1} &= \|x\|^{2-n} \left. \frac{\partial}{\partial r} \|r\omega - x^*\|^{2-n} \right|_{r=1} = -(n-2) \|x\|^{2-n} \frac{1 - \omega \cdot x^*}{\|\omega - x^*\|^n} \\ &= -(n-2) \frac{\|x\|^2(1 - \omega \cdot x^*)}{\|x\|^n \|\omega - x^*\|^n} = -(n-2) \frac{\|x\|^2 - \omega \cdot x}{\|\omega - x\|^n}. \end{aligned}$$

En el denominador de la última igualdad, se ha usado la relación (4.16) con  $y = \omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ . De las últimas dos expresiones, se obtiene de inmediato

$$-\frac{1}{(n-2)} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(\omega) = \frac{1 - \omega \cdot x}{\|\omega - x\|^n} - \frac{\|x\|^2 - \omega \cdot x}{\|\omega - x\|^n} = \frac{1 - \|x\|^2}{\|\omega - x\|^n}.$$

Se ha verificado que el núcleo de Poisson (4.13) coincide con el núcleo  $P(x, \omega)$  en la fórmula (4.14) para el promedio ponderado de  $u$ .  $\square$

Si se escribe  $x = r\eta \in \mathbb{B}$  en coordenadas esféricas, el núcleo de Poisson toma la forma

$$\underline{P_r(\eta, \omega)} := P(r\eta, \omega) = \frac{1 - r^2}{\|\omega - r\eta\|^n} = \frac{1 - r^2}{(1 - 2r\eta \cdot \omega + r^2)^{n/2}}$$

para  $r < 1$ ,  $\eta, \omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Esta fórmula generaliza (4.5) para  $n \geq 2$ .

► La fórmula (4.14) permite resolver el *problema de Dirichlet* para la bola unitaria  $\mathbb{B}^n$ : dada una función continua  $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  definida en el borde de  $\mathbb{B}^n$ , será posible extender  $f$  a una función definida en todo  $\overline{\mathbb{B}^n}$  que es armónica en el interior? Para plantear ese problema, se introduce la *integral de Poisson*, para  $x \in \mathbb{B}^n$ :

$$\underline{\mathcal{P}f(x)} := \frac{1}{\Omega_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} P(x, \omega) f(\omega) d\sigma(\omega). \quad (4.17)$$

Es necesario comprobar que  $\mathcal{P}f$  es armónica en  $\mathbb{B}$  y que  $\mathcal{P}f(r\eta) \rightarrow f(\eta)$  cuando  $r \uparrow 1$ .

**Proposición 4.17.** *El núcleo de Poisson satisface las siguientes propiedades.*

- (a)  $P(x, \omega) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{B}^n$ ,  $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ .
- (b) La función  $x \mapsto P(x, \omega)$  es armónica en  $\mathbb{R}^n \setminus \{\omega\}$ .
- (c)  $(1/\Omega_n) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} P(x, \omega) d\sigma(\omega) = 1$  para todo  $x \in \mathbb{B}^n$ .
- (d) Si  $\eta \in \mathbb{S}^{n-1}$  y  $\delta > 0$ , entonces  $\int_{\|\omega - \eta\| > \delta} P(x, \omega) d\sigma(\omega) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \eta$ .

*Demostración.* La propiedad (a) es evidente de la fórmula (4.13). La normalización (c) sigue inmediatamente de la propiedad (4.14) al tomar  $u(\omega) \equiv 1$ .

Para comprobar el límite (d), nótese que  $1 - \|x\|^2 \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \eta$  y el denominador  $\|\omega - r\eta\|^n > (\delta/2)^n$  para  $1 - r$  pequeño.

Falta verificar (b): que  $P(x, \omega)$  es armónica en la variable  $x$ . Sea  $u(x) := 1 - \|x\|^2$  y  $v(x) := \|x - \omega\|^{-n}$  para  $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$  fijo. Ni  $u$  ni  $v$  es armónica, pero se puede comprobar que  $\Delta P(x, \omega) = \Delta(uv) = 0$  al usar la regla del producto:

$$\Delta(uv) = u \Delta v + 2 \nabla u \cdot \nabla v + v \Delta u. \quad (4.18)$$

Tómese  $y := x - \omega$ . Entonces

$$\begin{aligned} \nabla u(x) &= \nabla(1 - x \cdot x) = -2x, \\ \nabla v(x) &= \nabla((y \cdot y)^{-n/2}) = -\frac{n}{2} (y \cdot y)^{-(n-2)/2} (2y) = -n \|x - \omega\|^{-n-2} (x - \omega). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \nabla \cdot \nabla u(x) = -2 \nabla \cdot x = -2n, \\ \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) &= 2n \|x - \omega\|^{-n-2} (\|x\|^2 - \omega \cdot x) \\ \Delta v(x) &= \nabla \cdot \nabla v(x) = n(n+2) \|x - \omega\|^{-n-4} \|x - \omega\|^2 - n^2 \|x - \omega\|^{-n-2} \\ &= 2n \|x - \omega\|^{-n-2}. \end{aligned}$$

De ahí se calcula, para  $x \neq \omega$ :

$$\|x - \omega\|^{n+2} \Delta(uv)(x) = 2n(1 - \|x\|^2) + 4n(\|x\|^2 - \omega \cdot x) - 2n(\|x\|^2 - 2\omega \cdot x + 1) = 0. \quad \square$$

**Teorema 4.18.** Sea  $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Defínase  $u: \overline{\mathbb{B}^n} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\begin{aligned} u(\omega) &:= f(\omega) \quad \text{para } \omega \in \mathbb{S}^{n-1}, \\ u(x) &:= \mathcal{P}f(x) \quad \text{para } x \in \mathbb{B}. \end{aligned}$$

Entonces  $u$  es continua en  $\overline{\mathbb{B}^n}$  y es armónica en  $\mathbb{B}^n$ .

*Demostración.* Para comprobar que  $\Delta(\mathcal{P}f)(x) \equiv 0$  para  $x \in \mathbb{B}$ , basta derivar (respecto de  $x$ ) bajo el signo integral en (4.17), pues  $x \mapsto P(x, \omega)$  es armónica toda vez que  $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ .

Para mostrar la continuidad de  $u$  en un punto  $\eta \in \mathbb{S}^{n-1}$ , sea  $\varepsilon > 0$  y tómese  $\delta > 0$  tal que  $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $\|\omega - \eta\| < \delta \implies |f(\omega) - f(\eta)| < \varepsilon/2$ . Sea  $M := \sup\{|f(\omega)| : \omega \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ .

Usando la positividad de  $P(x, \omega)$  y la propiedad (c) de la Proposición 4.17, se obtiene

$$\begin{aligned} \Omega_n |u(x) - u(\eta)| &= \left| \int_{\mathbb{S}^{n-1}} P(x, \omega) (f(\omega) - f(\eta)) d\sigma(\omega) \right| \\ &\leq \int_{\|\omega - \eta\| \leq \delta} P(x, \omega) |f(\omega) - f(\eta)| d\sigma(\omega) \\ &\quad + \int_{\|\omega - \eta\| > \delta} P(x, \omega) |f(\omega) - f(\eta)| d\sigma(\omega) \\ &\leq \frac{\varepsilon \Omega_n}{2} + 2M \int_{\|\omega - \eta\| > \delta} P(x, \omega) d\sigma(\omega). \end{aligned}$$

Por la propiedad (c) de la Proposición 4.17, se puede redefinir  $\delta$  tal que además la integral al lado derecho es  $\leq \varepsilon \Omega_n / 4M$ . Entonces  $x \in \mathbb{B}^n$ ,  $\|x - \eta\| < \delta \implies |u(x) - u(\eta)| \leq \varepsilon$ ; se concluye que  $u$  es continua en todo  $\overline{\mathbb{B}^n}$ .  $\square$

**Corolario 4.19.** Si  $u: \overline{\mathbb{B}^n} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y si  $u$  es armónica en  $\mathbb{B}^n$ , entonces la propiedad del valor medio (4.14) es válida para todo  $x \in \mathbb{B}$ .

La distinción entre este corolario y el Teorema 4.14 es que aquí no se supone que es posible extender  $u$  a un vecindario abierto  $W$  de  $\overline{\mathbb{B}^n}$  como función armónica.

*Demostración.* El Teorema 4.18 muestra que  $u = \mathcal{P}[u|_{\mathbb{S}^{n-1}}]$  en  $\mathbb{B}^n$ . Entonces la diferencia  $u - \mathcal{P}[u|_{\mathbb{S}^{n-1}}]$  es armónica en  $\mathbb{B}^n$  y extiende por continuidad a  $\overline{\mathbb{B}^n}$ , siendo igual a 0 en la esfera frontera. Por el principio de máximo, esta diferencia es idénticamente 0 en todo  $\overline{\mathbb{B}^n}$ .  $\square$

El núcleo de Poisson  $P(x, \omega)$ , definido por (4.13), es de clase  $C^\infty$  en la variable  $x$ . Al derivada la integral de Poisson (4.14) debajo del signo integral, se deduce que cada función armónica  $u$  en la bola unitaria  $\mathbb{B}^n$  es suave (es decir, de clase  $C^\infty$ ). Más aun, una función armónica  $v$  en una región  $\Omega$  cualquiera es suave: si  $B(a; \delta) \subseteq \Omega$ , basta tomar  $u(x) := v(a + \delta x)$ .

Con más trabajo, es posible demostrar que  $v$  es una función *analítica real*.

### 4.3. Armónicos esféricos

La integral de Poisson (4.17) constituye una máquina para producir un enorme surtido de funciones armónicas (en la bola unitaria, al menos) a partir de funciones continuas en la esfera unitaria. Entonces es razonable preguntar si algunas de esas funciones son *polinomios* en  $n$  variables. Desde luego, un polinomio  $p(x)$  que cumple  $\Delta p(x) = 0$  en la bola unitaria también cumple esa ecuación en todo  $\mathbb{R}^n$ . Tales polinomios están determinadas por su restricción a la esfera unitaria  $\mathbb{S}^{n-1}$ , por el Teorema 4.18. Esas restricciones se denominan **armónicos esféricos** en  $n$  variables (cartesianas).

Una función constante  $p(x) \equiv C$  (un polinomio de grado 0, si  $C \neq 0$ ) es obviamente armónico. Además, un polinomio de primer grado,

$$p(x) := a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

obviamente cumple  $\Delta p(x) \equiv 0$ . A partir de grado 2, la búsqueda de polinomios armónicos es menos trivial. En esta sección, se considerará polinomios *con coeficientes y valores en  $\mathbb{C}$* .

**Definición 4.20.** Un polinomio  $p$  es **homogéneo de grado  $m$**  si  $p(tx) = t^m p(x)$  para  $t \in \mathbb{R}$ .

Tales polinomios homogéneos son combinaciones lineales de monomios  $x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$  con  $k_1 + \cdots + k_n = m$ ; ellos forman un espacio vectorial real  $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ .

Los polinomios homogéneos de grado  $m$  que son armónicos forman un subespacio  $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ . De hecho,

$$\Delta: \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$$

es una aplicación lineal, y este subespacio es  $\ker \Delta$ . ◇

**Lema 4.21.** Si  $p(x)$  es un polinomio de grado  $m$  (no necesariamente homogéneo), entonces

$$\mathcal{P}[p|_{\mathbb{S}^{n-1}}](x) \equiv (1 - \|x\|^2) q(x) + p(x), \quad (4.19)$$

para algún polinomio  $q$  de grado  $\leq m - 2$ .

*Demostración.* Si  $m = 0$  ó  $1$ , entonces  $p$  es armónico y por ende  $\mathcal{P}[p|_{\mathbb{S}^{n-1}}] = p$ ; al tomar  $q(x) \equiv 0$ , la igualdad (4.19) se cumple trivialmente.<sup>2</sup>

Supóngase, entonces, que  $m \geq 2$ . Como  $1 - \|x\|^2 = 0$  para  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ , el lado derecho de (4.19) coincide con  $p(x)$  sobre  $\mathbb{S}^{n-1}$ , cualquiera que fuera  $q$ . Como la función  $\mathcal{P}[p|_{\mathbb{S}^{n-1}}]$  es armónica, es suficiente encontrar un polinomio  $q$  de grado  $\leq m - 2$  tal que el lado derecho esté en  $\ker \Delta$ .

Sea  $V$  el espacio vectorial real de polinomios de grado  $\leq m - 2$ . Se busca un elemento  $q \in V$  tal que

$$\Delta((1 - \|x\|^2) q) = -\Delta p.$$

Sea  $T: V \rightarrow V$  el operador lineal dado por  $T(q) := \Delta((1 - \|x\|^2) q)$ . Entonces  $T(q) = 0$  si y solo si el polinomio  $(1 - \|x\|^2) q$  es armónico; como esta función se anula sobre  $\mathbb{S}^{n-1}$ , es idénticamente nula para  $\|x\| \leq 1$  y por ende – como es un polinomio – para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . En otras palabras,  $T(q) = 0$  implica  $q = 0$  en  $W$ .

El operador lineal  $T: V \rightarrow V$  entonces es inyectiva. Como  $\dim W$  es finita,  $T$  es también sobreyectiva (por el teorema de rango y nulidad). La ecuación  $T(q) = -\Delta p$  entonces tiene una solución (única!) en  $V$ , que era la que se deseaba. □

<sup>2</sup>Es convencional asignar el grado  $-\infty$  al polinomio nulo.

**Corolario 4.22.** *Un polinomio no nulo de la forma  $\|x\|^2 p(x)$  no es armónico.*

*Demostración.* Como  $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ , si  $p$  es de grado  $m$ , entonces  $h(x) := \|x\|^2 p(x)$  tiene grado  $m + 2$ . Ahora  $\|x\|^2 p(x) = p(x)$  para  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ , es decir,  $h|_{\mathbb{S}^{n-1}} = p|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ . Entonces  $\mathcal{P}[p|_{\mathbb{S}^{n-1}}] = \mathcal{P}[h|_{\mathbb{S}^{n-1}}]$ . Si  $h$  fuera armónico, de modo que  $\mathcal{P}[h|_{\mathbb{S}^{n-1}}] = h$ , entonces  $\mathcal{P}[p|_{\mathbb{S}^{n-1}}]$  sería un polinomio de grado  $m + 2$ . Pero eso es incompatible con la fórmula (4.19), cuyo lado derecho tiene grado  $m$ .  $\square$

Un polinomio de grado  $m$  es una suma  $p = p_0 + p_1 + \cdots + p_m$  donde cada  $p_j$  es un polinomio homogéneo de grado  $j$ . (Se reconoce el polinomio nulo 0 como polinomio homogéneo de cualquier grado.) Como  $\Delta p = \sum_{j=2}^m \Delta p_j$ , entonces  $p$  es armónico si y solo si cada sumando  $p_j$  es armónico.

**Proposición 4.23.** *Para cada  $m = 2, 3, \dots$  hay una suma directa algebraica:*

$$\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \oplus \|x\|^2 \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n). \quad (4.20)$$

*Demostración.* El Corolario 4.22 muestra que la suma al lado derecho de (4.20) es directa. Es evidente que  $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$  y  $\|x\|^2 \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$  son subespacios vectoriales de  $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ .

Sea  $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ . Por el Lema 4.21, se ve que

$$p(x) = \mathcal{P}[p|_{\mathbb{S}^{n-1}}](x) + \|x\|^2 q(x) - q(x)$$

para un (único) polinomio  $q \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ . Si  $p_m$  es la parte homogénea de grado  $m$  del polinomio armónico  $\mathcal{P}[p|_{\mathbb{S}^{n-1}}]$  – que también tiene grado  $m$ , por (4.19) – y si  $q_{m-2}$  es la parte homogénea de  $q$  de grado  $m - 2$ , entonces la parte homogénea de grado  $m$  de la ecuación anterior es:

$$p(x) = p_m(x) + \|x\|^2 q_{m-2}(x).$$

Esta igualdad verifica (4.20), puesto que  $\Delta p_m = 0$ .  $\square$

**Corolario 4.24.** *Cada polinomio homogéneo  $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$  puede expresarse, de modo único, como una suma:*

$$p = p_m + \|x\|^2 p_{m-2} + \cdots + \|x\|^{2k} p_{m-2k} \quad (4.21)$$

donde  $m = 2k$  ó  $m = 2k + 1$ , con cada  $p_j \in \mathcal{H}_j(\mathbb{R}^n)$ .

*Demostración.* Esta descomposición es trivial si  $m = 0$  ó  $1$ , con  $k = 0$ , pues  $p = p_m$  es armónico.

Si  $m \geq 2$ , entonces  $p = p_m + \|x\|^2 q$  para  $p_m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$  y un único  $q \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ . A su vez,  $q = p_{m-2} + \|x\|^2 q'$  con un único  $q' \in \mathcal{P}_{m-4}(\mathbb{R}^n)$ . Al repetir este proceso  $k$  veces, se llega a la suma (4.21).  $\square$

**Corolario 4.25.** Si  $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ , el (único) polinomio armónico que coincide con  $p$  en la esfera unitaria  $\mathbb{S}^{n-1}$  es  $h := p_m + p_{m-2} + \cdots + p_{m-2k}$ .

*Demostración.* Nótese que  $p|_{\mathbb{S}^{n-1}} = h|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ . Como  $h$  es armónico, entonces  $\mathcal{P}[p|_{\mathbb{S}^{n-1}}](x) = h(x)$  para  $x \in \overline{\mathbb{B}^n}$  y por ende – las dos funciones son polinomios – para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

► Un polinomio homogéneo  $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$  está determinado por sus valores en la esfera unitaria  $\mathbb{S}^{n-1}$ , porque si  $x = r\omega$  con  $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ , entonces  $p(x) = p(r\omega) = r^m p(\omega)$ .

**Definición 4.26.** Se define un **producto escalar**<sup>3</sup> sobre los polinomios  $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$\langle q | p \rangle := \frac{1}{\Omega_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \overline{q(\omega)} p(\omega) d\sigma(\omega). \quad (4.22)$$

Dos polinomios  $p, q$  se dicen *ortogonales* si  $\langle q | p \rangle = 0$ .  $\diamond$

**Lema 4.27.** Si  $p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ ,  $q \in \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^n)$  con  $l < m$ , entonces  $\langle q | p \rangle = 0$ .

*Demostración.* El producto escalar (4.22) depende solamente de los valores de  $p$  y  $q$  en la esfera unitaria; entonces se puede reemplazar  $q = \sum_{2j \leq l} \|x\|^{2j} q_{l-2j}$  por el polinomio armónico  $\sum_{2j \leq l} q_{l-2j}$ . Por linealidad, basta mostrar que cada  $\langle q_{l-2j} | p \rangle = 0$ . Dicho de otro modo, es suficiente comprobar el lema cuando  $q \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$  con  $l < m$ .

La identidad de Green (4.11) para  $\Omega = \mathbb{B}^n$ ,  $\partial\Omega = \mathbb{S}^{n-1}$ , entonces muestra que

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left( \bar{q} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} - p \frac{\partial \bar{q}}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma = \int_{\mathbb{B}^n} (\bar{q} \Delta p - p \Delta \bar{q}) = 0.$$

Como  $\partial/\partial \mathbf{n} = \partial/\partial r$  sobre  $\mathbb{S}^{n-1}$ , vale

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}(\omega) = \frac{\partial}{\partial r} p(r\omega) \Big|_{r=1} = \frac{\partial}{\partial r} (r^m p(\omega)) \Big|_{r=1} = m p(\omega) \quad \text{para } \omega \in \mathbb{S}^{n-1},$$

y de igual manera  $\partial \bar{q} / \partial r(\omega) \Big|_{r=1} = l \bar{q}(\omega)$ . Por lo tanto,

$$(m - l) \Omega_n \langle q | p \rangle = (m - l) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \overline{q(\omega)} p(\omega) d\sigma(\omega) = 0.$$

Como  $m - l > 0$ , se sigue que  $\langle q | p \rangle = 0$ .  $\square$

**Corolario 4.28.** Con respecto al producto escalar (4.22), la suma directa (4.20) de la Proposición 4.23 es una suma directa ortogonal.

<sup>3</sup>Obsérvese que  $\langle q | p \rangle$  es lineal en la segunda variable  $p$ , pero antilineal en la primera variable  $q$ .

*Demostración.* Un polinomio en  $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$  es igual a  $p(x) + \|x\|^2 q(x)$  para  $p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ ,  $q \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$  únicos. Como  $\|x\|^2 q$  coincide con  $q$  sobre  $\mathbb{S}^{n-1}$ , estos dos sumandos son ortogonales.  $\square$

**Definición 4.29.** Un **armónico esférico** en  $n$  variables es una función  $u: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $u = p|_{\mathbb{S}^{n-1}}$  para algún polinomio armónico  $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ .  $\diamond$

Conviene usar la notación

$$\underline{\mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})} := \{ p|_{\mathbb{S}^{n-1}} : p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \}.$$

Los  $\mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})$  son espacios vectoriales (sobre  $\mathbb{C}$ ) de dimensión finita, ortogonales entre sí.

► Se denota por  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$  el espacio vectorial de todas las funciones  $f$  de cuadrado integrable sobre  $\mathbb{S}^{n-1}$ , es decir, tales que  $\|f\|_2^2 \equiv \langle f | f \rangle < \infty$ .

Este es un *espacio de Hilbert*; hay dos maneras de precisar su definición. Por un lado, se puede interpretar el producto escalar (4.22) como una integral en el sentido de Lebesgue con respecto a la medida  $\Omega_n^{-1} d\sigma$ . Hay un resultado clásico (el teorema de Riesz y Fischer) que asegura que la totalidad de funciones medibles de cuadrado integrable es completo en esta norma. La otra posibilidad es la de considerar el espacio vectorial  $C(\mathbb{S}^{n-1})$  de las funciones *continuas* sobre la esfera, dotado de la métrica  $d(f, g) := \|f - g\|_2^2$  que sólo requiere la integral de Riemann.<sup>4</sup> Luego se define  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$  como la completación de  $C(\mathbb{S}^{n-1})$  con respecto a esa métrica.

**Proposición 4.30.** *Hay una suma directa de espacios de Hilbert:*

$$L^2(\mathbb{S}^{n-1}) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1}). \quad (4.23)$$

*Demostración.* Un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es la *suma directa* de unos subespacios cerrados  $\mathcal{H}_m$  si: (i) esos  $\mathcal{H}_m$  son ortogonales entre sí (garantizado en este caso por el Corolario 4.28); y (ii) la suma directa *algebraica* de los  $\mathcal{H}_m$  es denso en  $\mathcal{H}$ .

El espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ , por su definición, incluye  $C(\mathbb{S}^{n-1})$  como subespacio denso, con respecto a la norma de Hilbert  $\|\cdot\|_2$ . Ahora,  $C(\mathbb{S}^{n-1})$  tiene su propia norma (la de convergencia uniforme),  $\|f\|_{\infty} := \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ . Si  $f, g: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}$  son continuas, entonces

$$\|f - g\|_2^2 = \frac{1}{\Omega_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |f(\omega) - g(\omega)|^2 d\sigma(\omega) \leq \frac{1}{\Omega_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|f - g\|_{\infty}^2 d\sigma(\omega) = \|f - g\|_{\infty}^2.$$

<sup>4</sup>Las integrales de Riemann y de Lebesgue de una función continua coinciden.

Por lo tanto, un subespacio denso de  $(C(\mathbb{S}^{n-1}), \|\cdot\|_\infty)$  es denso en  $(C(\mathbb{S}^{n-1}), \|\cdot\|_2)$  también, e *ipso facto* denso en  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ .

Basta, entonces, mostrar que una función continua sobre  $\mathbb{S}^{n-1}$  puede ser aproximado por una suma finita de elementos de los  $\mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})$ . El teorema de Stone y Weierstrass asegura que el álgebra  $\mathcal{A}$  de los  $p|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ , donde  $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  un polinomio, es densa en  $C(\mathbb{S}^{n-1})$ , con respecto a la norma  $\|\cdot\|_\infty$ .  $\llbracket$  Para aplicar dicho teorema, es suficiente notar que esa subálgebra  $\mathcal{A}$ : (i) separa puntos de  $\mathbb{S}^{n-1}$ ; (ii) contiene las funciones constantes; y (iii) es cerrada bajo conjugación compleja de funciones.  $\rrbracket$

Cualquier polinomio es una suma finita de polinomios homogéneos; y si  $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ , el Corolario 4.25 muestra que  $p|_{\mathbb{S}^{n-1}} \in \bigoplus_{2j \leq m} \mathcal{H}_{m-2j}(\mathbb{S}^{n-1})$ . Entonces el espacio vectorial  $\mathcal{A}$  es la suma directa algebraica de los  $\mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})$ , y por ende (4.23) es válida.  $\square$

**Ejemplo 4.31.** En el caso  $n = 2$ , una polinomio homogéneo armónico  $p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^2)$  con valores reales es la parte real  $\frac{1}{2}(f + \bar{f})$  de una función holomorfa entera  $f$ . La homogeneidad  $p(tz) = t^m p(z)$  es equivalente a la condición  $E(p) = mp$ , donde

$$E = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} = z \frac{\partial}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

es el operador diferencial de Euler. Ahora

$$E(p) = \frac{1}{2} \left( z \frac{\partial}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) (f + \bar{f}) = \frac{1}{2} z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{2} \bar{z} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \Re \left( z \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

al usar las ecuaciones de Cauchy y Riemann:  $\partial f / \partial \bar{z} = \partial \bar{f} / \partial z = 0$ . Entonces  $z \partial f / \partial z = m f$ . De la serie de Taylor de  $f$  en 0 se deduce que  $f(z) = 2c z^m$ , también homogénea, para alguna  $c \in \mathbb{C}$ . Así,  $p(z) = c z^m + \bar{c} \bar{z}^m$ . En fin, espacio vectorial complejo  $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^2)$ , de dimensión 2, tiene la base  $\{z^m, \bar{z}^m\}$ .

En el círculo unitario  $\mathbb{S}^1$ , el espacio vectorial  $\mathcal{H}_m(\mathbb{S}^1)$  tiene la base  $\{e^{im\theta}, e^{-im\theta}\}$ . (Otra base sería  $\{\cos m\theta, \sin m\theta\}$ .) La descomposición (4.23) dice que cada elemento de  $L^2(\mathbb{S}^1)$  tiene una expansión en una *serie de Fourier*<sup>5</sup>

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\theta}, \quad \text{con} \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2 = \|f\|_2^2 < \infty.$$

$\llbracket$  De ahí se ve que  $\{e^{im\theta} : m \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{S}^1)$ .  $\rrbracket$   $\diamond$

**Ejemplo 4.32.** En el caso  $n = 3$ , se sabe, por el Ejercicio 4.7 abajo y la fórmula (4.27), que

$$\dim \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^3) = \binom{l+2}{2} - \binom{l}{2} = 2l + 1.$$

<sup>5</sup>La convergencia de esta serie en la norma  $\|\cdot\|_2$  está garantizada, pero eso no asegura su convergencia puntual, la cual es un tema importante del análisis clásico.

Por restricción a la esfera  $\mathbb{S}^2$ , también vale  $\dim \mathcal{H}_l(\mathbb{S}^2) = 2l + 1$ . Se puede describir una base de estos armónicos esféricos mediante coordenadas esféricas  $\omega = (\theta, \phi) \in \mathbb{S}^2$ . El Laplaciano en  $\mathbb{R}^3$  tiene la forma

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right). \quad (4.24)$$

(Véase el Ejercicio 4.3 abajo.)

Se puede encontrar soluciones polinomiales de la ecuación  $\Delta u = 0$  por separación de variables:  $u = R(r) T(\theta) F(\phi)$ . Entonces la ecuación  $u^{-1} \Delta u = 0$  toma la forma

$$\frac{(r^2 R'(r))'}{R(r)} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{(\sin \theta T'(\theta))'}{T(\theta)} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{F''(\phi)}{F(\phi)} = 0.$$

Aquí  $R(r) = r^l$ , por homogeneidad. El primer término se reduce a  $(l r^{l+1})'/r^l = l(l+1)$ . Por lo tanto,

$$l(l+1) \sin^2 \theta + \sin \theta \frac{(\sin \theta T'(\theta))'}{T(\theta)} = -\frac{F''(\phi)}{F(\phi)}.$$

Ambos lados de esta ecuación deben ser iguales a una constante  $m^2$ , de modo que  $F''(\phi) + m^2 F(\phi) = 0$ , con soluciones particulares  $F(\phi) = e^{\pm im\phi}$ . Luego, la sustitución  $x := \cos \theta$ ,  $P(x) := T(\theta)$  convierte la ecuación anterior en

$$(1-x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P(x) = 0. \quad (4.25)$$

Al hacer otra sustitución  $P(x) =: (1-x^2)^{m/2} Q(x)$ , se obtiene

$$(1-x^2)Q''(x) - 2(m+1)xQ'(x) + (l-m)(l+m+1)Q(x) = 0.$$

Esta ecuación diferencial tiene una solución polinomial si y solo si  $l-m \in \mathbb{N}$ , con lo cual  $m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}$ .

El caso  $m = 0$  es la *ecuación de Legendre*:

$$(1-x^2)P_l''(x) - 2xP_l'(x) + l(l+1)P_l(x) = 0,$$

cuya solución polinomial es el **polinomio de Legendre** de grado  $l \in \mathbb{N}$ :

$$P_l(x) := \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l.$$

Para  $m = 0, 1, \dots, l$ , la solución de (4.25) es la *función asociada de Legendre*:

$$P_l^m(x) := (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x).$$

De este modo, cada  $T(\theta) = P_l^m(\cos \theta)$  es un polinomio en  $(\cos \theta, \sin \theta)$ . ◇

**Definición 4.33.** El espacio vectorial  $\mathcal{H}_l(\mathbb{S}^2)$ , de dimensión  $(2l + 1)$ , tiene una base  $\{Y_{lm} : m = -l, \dots, l - 1, l\}$  dada por:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) := (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (4.26)$$

para  $m \in \{0, 1, \dots, l\}$ ; y además  $Y_{l,-m}(\theta, \phi) := (-1)^m \overline{Y_{lm}(\theta, \phi)}$ .  $\diamond$

[[ Se incluye el factor  $1/\sqrt{4\pi} = \Omega_3^{-1/2}$  para que estas  $Y_{lm}$  sean ortonormales con respecto a la medida usual  $d\sigma(\theta, \phi) := \sin \theta d\theta d\phi$  de la esfera  $\mathbb{S}^2$ . ]]

En vista de la Proposición 4.30, cualquier función  $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$  tiene una expansión – convergente en la norma  $\|\cdot\|_2$  – en una serie de armónicos esféricos:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi).$$

Esto es una generalización importante de las series de Fourier.

Para más información acerca de estas armónicos esféricos y su aplicación a la teoría del momento angular, se recomienda el capítulo 3 del libro: L. C. Biedenharn y J. D. Louck, *Angular Momentum in Quantum Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

#### 4.4. Ejercicios sobre funciones armónicas

**Ejercicio 4.1.** Si  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función armónica y si  $g$  es una función holomorfa entera, mostrar que la función compuesta  $u \circ g$  es armónica.

**Ejercicio 4.2.** Comprobar la regla del producto (4.18) para dos funciones  $u, v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$ :

$$\Delta(uv) = u \Delta v + 2 \nabla u \cdot \nabla v + v \Delta u.$$

Mostrar también que  $\Delta(\|x\|^a) = a(a + n - 2) \|x\|^{a-2}$ .

**Ejercicio 4.3.** En el sistema de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  de  $\mathbb{R}^3$ , con  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$ ,  $z = r \cos \theta$ , verificar la fórmula (4.24) para el Laplaciano en 3 dimensiones:<sup>6</sup>

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right).$$

<sup>6</sup>Con esta notación,  $\theta$  es el *ángulo polar* y  $\phi$  es el *ángulo acimutal* sobre la esfera  $\mathbb{S}^2$ : en la cartografía, las curvas  $\theta = \theta_0$  son los “paralelos” (al ecuador) y las curvas  $\phi = \phi_0$  son los “meridianos”. Es de notar que los textos de cálculo en varias variables suelen usar el convenio opuesto:  $\theta \leftrightarrow \phi$ .

**Ejercicio 4.4.** La medida de la esfera unitaria  $\mathbb{S}^{n-1}$  es la integral de la siguiente  $(n-1)$ -forma diferencial en coordenadas cartesianas  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ :

$$\sigma := \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x^j dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Sea  $\Omega_n := \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sigma(\omega)$  y  $V_n := \text{Vol}(\mathbb{B}^n) := \int_{\mathbb{B}^n} dV$ .

- (a) Al notar que  $d\sigma = n dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \equiv n dV$ , usar el teorema de Stokes  $\int_{\partial\Omega} \sigma = \int_{\Omega} d\sigma$  para verificar que  $V_n = \Omega_n/n$ .
- (b) Comprobar la relación siguiente  $\llbracket$  Indicación: integración por partes  $\rrbracket$ :

$$\frac{V_n}{V_{n-1}} = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{(n-1)/2} dt.$$

Deducir los valores de las siguientes cantidades:

$$\Omega_1 = \#(\mathbb{S}^0), \quad \Omega_2 = \ell(\mathbb{S}^1), \quad \Omega_3 = \text{Area}(\mathbb{S}^2), \quad \Omega_4 = \text{Vol}(\mathbb{S}^3).$$

- (c) Demostrar por inducción las fórmulas generales para  $V_n$  y  $\Omega_n$ :

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}, \quad \Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \begin{cases} \frac{2\pi^m}{(m-1)!} & \text{si } n = 2m, \\ \frac{2^{m+1}\pi^m}{(2m-1)!!} & \text{si } n = 2m+1. \end{cases}$$

**Ejercicio 4.5.** Si  $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$  es un polinomio homogéneo de grado  $m$ , comprobar que  $x \cdot \nabla p(x) = m p(x)$ ; y demostrar que

$$\Delta(\|x\|^{2-n-2m} p) = \|x\|^{2-n-2m} \Delta p.$$

$\llbracket$  Indicación: usar el Ejercicio 4.2.  $\rrbracket$

► En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$ , se define la *inversión* en la esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$  por  $x^* := x/\|x\|^2$  si  $x \neq 0$ . Se puede extender esta operación a una biyección involutiva de  $\mathbb{R}^n \uplus \{\infty\}$  (la compactificación de un punto de  $\mathbb{R}^n$ ) al definir  $0^* := \infty$ ,  $\infty^* := 0$ . (Nótese que  $x^* = x$  si y solo si  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ .)

Si  $A \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , se escribe  $A^* := \{x^* : x \in A\}$ . La **transformada de Kelvin** de una función  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  es la función  $\mathcal{K}u : A^* \rightarrow \mathbb{R}$  dada por<sup>7</sup>

$$\mathcal{K}u(x) := \|x\|^{2-n} u(x^*).$$

Fíjese que  $\mathcal{K}[\mathcal{K}u] = u$  y que  $\mathcal{K}u(\omega) = u(\omega)$  para  $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ .

<sup>7</sup>Obsérvese que la función  $v(y)$  de la demostración del Teorema 4.14 tiene la forma  $w(x) + \mathcal{K}w(x)$  donde  $w(x) := \|y-x\|^{2-n}$ .

**Ejercicio 4.6.** (a) Si  $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ , mostrar que  $\mathcal{K}p(x) = \|x\|^{2-n-2m} p(x)$ .

(b) Si  $\Omega$  es una región de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y si  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^2$ , comprobar que<sup>8</sup>

$$\Delta(\mathcal{K}u) = \mathcal{K}[\|x\|^4 \Delta u].$$

(c) Deducir que si  $u$  es armónica en  $\Omega$ , entonces  $\mathcal{K}u$  es armónica en  $\Omega^*$ .

**Ejercicio 4.7.** El espacio vectorial  $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$  tiene como base los monomios  $x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$  con  $k_1 + \cdots + k_n = m$ . Comprobar que

$$\dim \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) = \binom{n+m-1}{n-1}.$$

En seguida, demostrar que el subespacio  $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$  de polinomios *armónicos* homogéneos de grado  $m$  tiene dimensión

$$\dim \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) = \binom{n+m-1}{n-1} - \binom{n+m-3}{n-1}. \quad (4.27)$$

---

<sup>8</sup>Por un teorema de Weierstrass, una función de clase  $C^2$  puede ser aproximada por polinomios (en la norma  $C^2$ ) sobre cualquier compacto de  $\mathbb{R}^n$ .