UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
SISTEMA DE ESTUDIOS DE POSGRADO

LAS REPRESENTACIONES METAPLÉCTICA Y DE ESPÍN DE CIERTOS GRUPOS DE SIMETRÍA: UN ESTUDIO COMPARATIVO

Tesis sometida a la consideración de la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Matemática para optar al grado y título de Maestría Académica en Matemática con énfasis en Matemática Pura

ADRIÁN JOSÉ NARANJO ALVARADO

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio, San José, Costa Rica

2021

A Luis Armando Madrigal Rojas,
mi profesor de colegio.
Él fue la persona que inició en mí la pasión
por esta bella rama del conocimiento.

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer a mis padres, José Francisco Naranjo y Ana María Alvarado, que siempre han estado ahí y me han apoyado en los mejores y peores momentos de mi vida.

Agradezco de manera muy especial a mi profesor consejero, Joseph C. Várilly. Debido a él he adquirido una enorme cantidad de conocimiento. Gracias por exigirme, por llevarme al límite, por enseñarme cosas que van más allá de la matemática, pero sobre todo, gracias por la paciencia, las horas de reunión, las llamadas de atención y la ayuda con todo lo que se podía. Ha sido un honor aprender de su persona.

A Pedro Méndez y William Ugalde, gracias por darme consejos cuando los ocupo, consejos que me ha ayudado a madurar como persona y como matemático. A Marco Antei, le agradezco la disposición y amabilidad hacía mí; dos características que lo definen.

Finalmente, quiero agradecer a mis tres mejores amigos: Daniel Arguedas Ocampo, Esteban Piedra Carvajal y Anddy Alvarado Solano, por siempre estar ahí cuando más los he necesitado y ayudarme a salir adelante en momentos difíciles de mi vida.

Esta tesis fue aceptada por la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Matemática de la Universidad de Costa Rica, como requisito parcial para optar al grado y título de Maestría Académica en Matemática con énfaisis en Matemática Pura.

Dr. Pedro Méndez Hernández

Representante de la Decana del Sistema de Estudios de Posgrado

Dr. Joseph C. Várilly Boyle

Profesor Consejero

Dr. William Ugalde Gómez

Lector

Dr. Marco Antei

Lector

Dr. José Mariano Gracia Bondía

Representante del Programa de Posgrado en Matemática con énfasis en Matemática Pura

Adrián José Naranjo Alvarado

Candidato

Índice general

Resumen

Los espacios de Fock son una construcción algebraica utilizada en mecánica cuántica para construir el espacio de estados cuánticos de un número desconocido de partículas idénticas a partir de una sola partícula, que matemáticamente se identifica con un espacio de Hilbert. En este trabajo se construyen las representaciones metapléctica y de espín (para un número finito de grados de libertad) sobre dichos espacios de Fock para tratar algunos temas de la teoría de campos cuánticos.

Se describe dos espacios de Hilbert fundamentales en la mecánica cuántica: los espacios de Fock bosónicos y fermiónicos y algunos de sus elementos de interés, denominados elementos gaussianos, así como ciertas relaciones canónicas de conmutación para dichas representaciones.

Se culmina con una introducción a las representaciones metaplécticas y de espín infinitesimales.

Abstract

Fock spaces are an algebraic construction used in quantum mechanics to construct the space of quantum states of an unknown number of identical particles from a single particle, which is mathematically identified with a Hilbert space. In this work, we construct the metaplectic and spin representations (for finitely many degrees of freedom) on these Fock spaces to deal with some topics of quantum field theory.

Two fundamental Hilbert spaces in quantum mechanics will be described: the bosonic and fermionic Fock spaces as well as some of their elements of interest, named Gaussian elements, and certain canonical commutation relations for such representations. We finish with an introduction to the infinitesimal metaplectic and spin representations.

Simbología

Arg	Argumento principal de un número complejo
$\mathcal{B}(V)$	Espacio de Fock bosónico asociado a V
β	Un sistema de Weyl
$\dot{\beta}$	Representación derivada de un sistema de Weyl
$\mathbb{C}$	Los números complejos
$\mathrm{C}\ell(V, d)$	Álgebra de Clifford real generada por V y la forma bilineal simétrica d
$\mathbb{C}\ell(V)$	Complexificación del álgebra de Clifford $\mathrm{C}\ell(V, d)$
d	Una forma $\mathbb{F}$-bilineal no degenerada y simétrica
$\mathcal{D}(V)$	Disco de Cartan y Siegel sobre V
$\mathrm{Dom}\, T$	Dominio de una aplicación lineal
$\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$	El espacio $\mathbb{F}$-vectorial de los $\mathbb{F}$-endomorfismos sobre V
$\mathbb{F}$	El cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$
$\mathbb{F}_2$	El álgebra booleana $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} := \{0, 1\}$
$\mathbb{F}^{m\times n}$	Matrices de tamaño $m \times n$ con entradas en $\mathbb{F}$
$\mathcal{F}(V)$	Espacio de Fock fermiónico asociado a V
$\mathfrak{g}$	Álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie G
$\mathrm{gen}\{C\}$	Subespacio vectorial generado por C
$\mathcal{H}$	Un espacio de Hilbert arbitrario
$i\mathbb{R}$	Los números imaginarios puros ir, con $r \in \mathbb{R}$
J	Una estructura compleja sobre V
μ	Representación de espín
$\dot{\mu}$	Representación de espín infinitesimal
ν	Representación metapléctica
$\dot{\nu}$	Representación metapléctica infinitesimal
π	Representación de un grupo de Lie
$\dot{\pi}$	Representación infinitesimal de un álgebra de Lie
P_J, P_{-J}	Proyectores ortogonales
$\mathbb{R}$	Los números reales
s	Una forma $\mathbb{F}$-bilineal no degenerada y antisimétrica
$\mathrm{Sk}(V)$	Espacio vectorial de operadores antilineales y antisimétricos sobre V
$\mathrm{SO}(V)$	Grupo ortogonal especial
$\mathfrak{so}(V)$	Álgebra de Lie asociada a $\mathrm{SO}(V)$
$\mathrm{Sp}(V)$	Grupo simpléctico
$\mathfrak{sp}(V)$	Álgebra de Lie asociada a $\mathrm{Sp}(V)$
$\mathbb{T}$	Círculo unitario en $\mathbb{C}$
V	Un espacio vectorial real de dimensión finita par
V_J	El espacio vectorial V dotado de una estructura compleja J
$V^{\mathbb{C}}$	Complexificación de V
W_J	Una polarización de $V^{\mathbb{C}}$
$\bar{z}$	Conjugado del número complejo z

Prólogo

La mecánica cuántica es la rama de la física que se encarga del estudio de las propiedades físicas de las partículas subatómicas. La teoría de la mecánica cuántica fue formulada a inicios del siglo XX, contemporánea con la teoría de la relatividad general de Einstein.

Una partícula se llama *libre* si no existe ninguna fuerza externa actuando sobre ella. En mecánica cuántica, se construyen *espacios de estados de partículas*, utilizando operadores específicos (llamados operadores de creación y aniquilación). Existe un estado sin partículas, denominado *el vacío*. Los estados de una determinada partícula corresponden a elementos $v \in V \setminus \{0\}$ de un espacio vectorial real V. Más generalmente, un espacio de los estados con $k > 0$ partículas de un mismo tipo conforman un espacio vectorial de la forma

$$V^{\otimes k} := \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{k \text{ veces}}.$$

Un estado con k partículas, esto es, un elemento del producto vectorial $V^{\otimes k}$, se puede enviar a un estado con $(k-1)$ partículas utilizando un operador de aniquilación; también se puede pasar de un estado con k a un estado con $(k+1)$ partículas utilizando un operador de creación (esto se verá en el Capítulo 3). Para 1930, las reglas básicas de la mecánica cuántica fueron desarrolladas. En ese tiempo, ya se sabía que un estado de una partícula puede ser descrito por un vector unitario ψ en un espacio de Hilbert H; por lo que un estado de dos partículas está dado por el producto tensorial $\psi_1 \otimes \psi_2 \in H \otimes H$, y así sucesivamente. Para sistemas con muchas partículas, se considera la suma directa de $H^{\otimes l}$, con $l \in \mathbb{N}$. Aquí se considera el caso $H^{\otimes 0} = H^0 \simeq \mathbb{C}$, el sector del vacío, generado por un vector $\Omega \in H^0$ de norma 1, denominado el estado del vacío.

Sin embargo, los racimos de partículas cuánticas no obedecen la distribución de Maxwell y Boltzmann (una distribución de probabilidad particular en física estadística). Esto se debe a que partículas del mismo tipo son *indistinguibles*, i.e., para ciertas partículas los vectores $\psi_1 \otimes \psi_2$ y $\psi_2 \otimes \psi_1$ representan el mismo estado del par de partículas; por ende se concluyó que es equivalente utilizar la media aritmética de ambas partículas, $\frac{1}{2}(\psi_1 \otimes \psi_2 + \psi_2 \otimes \psi_1)$.

Esto fue descubierto por el físico indio Satyendra Bose en 1924. Esto llevó a que Bose y Albert Einstein propusieron una teoría denominada la "estadística de Bose y Einstein", para partículas como mesones, por ejemplo. Dirac luego bautizó este tipo de partículas *bosones*, en honor a Bose.

Pero aún quedaba un problema: los protones y los electrones obedecen otra estadística, pues al intercambiar un par de partículas, el signo de $\psi_1 \otimes \psi_2$ cambia, por lo que Enrico

Fermi, junto con Dirac, propusieron en 1926 utilizar $\frac{1}{2}(\psi_1 \otimes \psi_2 - \psi_2 \otimes \psi_1)$ para describir ese par. Dirac llamó a este otro tipo de partículas *fermiones*, en honor a Fermi.

En 1932, el físico ruso Vladimir Aleksandrovich Fock unió estas ideas utilizando dos espacios de Hilbert compatibles con la estadística cuántica: véase [10]. Para el caso bosónico propuso el espacio $\bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{(n)}$, donde $H^{(n)}$ es un producto tensorial simétrico $S(H^{\otimes n})$. Para el caso fermiónico se considera el mismo espacio $\bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{(n)}$, con la diferencia de que ahora $H^{(n)}$ es un producto tensorial antisimétrico $\Lambda(H^{\otimes n})$. En ambos casos el sector del vacío es el espacio vectorial unidimensional $H^{(0)} := \mathbb{C}\Omega$ y el espacio de una partícula es $H^{(1)} = H$.

Uno de los espacios de Hilbert de la mecánica cuántica es el espacio $L^2(\mathbb{R})$ de las *funciones de onda* de Schrödinger. En 1960, Irving Segal propuso una "representación de ondas compleja" para bosones [25]. Poco tiempo después, Valentin Bargmann realizó un tratamiento alternativo para este espacio [3], ahora denotado como $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ y denominado *espacio de Bargmann y Segal*. Una ventaja de trabajar en el espacio de Bargmann y Segal es que este nuevo espacio de Hilbert tiene como elementos funciones enteras sobre $\mathbb{C}$, por lo que muchos cálculos se reducen a evaluar integrales gaussianas.

Una teoría cuántica necesita tanto vectores como operadores. También se requieren interacciones de una partícula con su entorno, que puede contener otras partículas de la misma especie o especies diferentes. Esto generalmente se maneja introduciendo objetos como funciones potenciales que modifican los observables relevantes; por ejemplo, a la energía cinética de un pequeño cuerpo en movimiento se puede agregar una energía potencial que describe la influencia de un cuerpo grande cercano. Sin embargo, las aproximaciones de este tipo se vuelven realmente complicadas de analizar. El primer paso sería describir los sistemas que no interactúan: esto conduce a la teoría de los *campos libres*. Los campos libres – como su nombre lo indica – son campos que no se ven afectados por fuerzas externas.

Desde el punto de vista físico, un espacio de Fock es una construcción matemática empleada en la mecánica cuántica para construir un espacio de *estados cuánticos* – que proporcionan una distribución probabilista para los resultados de cada posible medición de un sistema – de un número desconocido de partículas idénticas engendradas a partir de un espacio de Hilbert H.

Intuitivamente, un espacio de Fock también se puede ver como una suma (directa) de varios espacios de Hilbert que representan un estado de 0 partículas (el vacío), estados de 1 partícula, estados de 2 particulas, y así sucesivamente. Si las partículas idénticas son bosones, los estados de k partículas son vectores en un producto tensorial "simetrizado" de k copias de H. En el caso en el que las partículas idénticas son fermiones entonces los estados de k partículas son vectores en un producto tensorial "antisimetrizado" de k copias de H. Un elemento de un espacio de Fock es una combinación lineal de tales estados.

Una *forma simpléctica* es una forma bilineal s que es antisimétrica y no degenerada. Un *espacio vectorial simpléctico* (V, s) es un espacio vectorial real V con una forma bilineal alternante. Es importante destacar que $n = \dim_{\mathbb{R}} V$ debe ser par, $n = 2m$. Un *espacio vectorial ortogonal* (V, d) es un espacio vectorial real con una forma bilineal simétrica d. En este caso se supondrá también que $n = \dim_{\mathbb{R}} V$ es par.

Si V es un espacio vectorial real de dimensión $n = 2m$, una *estructura compleja* sobre V es un endomorfismo $\mathbb{R}$-lineal $J\colon V \to V$ tal que $J^2 = -1_V$, donde 1_V es el elemento identidad de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$, y que preserva la forma bilineal asociada a V. Es decir, $s(Jv, Ju) = s(v, u)$ o $d(Jv, Ju) = d(u, v)$, respectivamente. Usando J, un espacio vectorial simpléctico o un espacio vectorial ortogonal V se convierte en un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ (denotémoslo como V_J) cuya dimensión es $\dim_{\mathbb{C}} V_J = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} V$. En el primer caso podemos poner $d(u, v) := s(u, Jv)$ y en el segundo caso podemos poner $s(u, v) := d(Ju, v)$. Por ende, si definimos el producto escalar $\langle u \mid v\rangle_J := d(u, v) + is(u, v)$, entonces V_J equipado con este producto escalar es un espacio de Hilbert finitodimensional. Es decir, el espacio vectorial complejo V_J se dota de las dos formas bilineales, que se relacionan mediante la estructura compleja.

Partiendo de V_J, se construye otro espacio de Hilbert, llamado *espacio de Fock*, sobre el cual se construye la representación pertinente del grupo de simetría mediante unos elementos de los espacios de Fock de gran importancia: sus elementos gaussianos; ver el Capítulo 2. Los grupos de simetría de las formas bilineales se representan sobre espacios de Fock en términos de estos elementos gaussianos. Dichas representaciones son llamadas: *representación metapléctica* para un espacio simpléctico y la *representación de espín* para un espacio ortogonal, respectivamente. Además, ambos grupos poseen representaciones infinitesimales de sus álgebras de Lie.

Las similitudes entre los espacios de Fock bosónico y espacios de Fock fermiónico son bastantes; y por ende las representaciones metapléctica y de espín poseen muchas características semejantes. El propósito principal de la tesis es el de hacer notar las similitudes (y diferencias) entre las representaciones metapléctica del grupo simpléctico y de espín del grupo ortogonal especial, en el caso finitodimensional.

Este trabajo se basa en dos artículos de José Gracia-Bondía y Joseph Várilly: *The metaplectic representation and boson fields* [13] y *QED in external fields from the spin representation* [14]. En [13] se describe la representación metapléctica y en [14] se describe la representación de espín. En los dos artículos, los espacios de soluciones de ecuaciones de onda son infinitodimensionales, pero las representaciones son aplicables para espacios vectoriales finitodimensionales de dimensión par. En esta tesis, se consideran únicamente los casos de dimensión finita.

A continuación se describen brevemente los cuatro capítulos de este trabajo.

- ⋆ En el Capítulo 1 se introducen las nociones y conceptos básicos: estructuras complejas, complexificación de un espacio vectorial real, el grupo simpléctico $\mathrm{Sp}(V)$, el grupo ortogonal especial $\mathrm{SO}(V)$; así como polarizaciones y la transformada de Cayley (una generalización de la transformada de Möbius).

- ⋆ En el Capítulo 2 se estudian el espacio de Segal y Bargmann y los espacios de Fock. Se hace especial énfasis en ciertos elementos de los espacios de Fock denominados elementos gaussianos.

- ⋆ En el Capítulo 3 se estudian los sistemas de Weyl, los campos bosónicos libres, las álgebras de Clifford y los campos fermiónicos libres; para así poder obtener la representación metapléctica ν de $\mathrm{Sp}(V)$ y la representación de espín μ para $\mathrm{SO}(V)$. Utilizando propiedades de estas dos representaciones junto con las propiedades de los núcleos integrales, obtenemos las relaciones de conmutación para el caso bosónico y las relaciones de anticonmutación para el caso fermiónico. La construcción de la representación metapléctica se basa principalmente en [22] y la construcción de la representación de espín se basa parcialmente en el capítulo 12 de [21].

- ⋆ En el Capítulo 4 se estudiarán las representaciones infinitesimales $\dot{\nu}$ y $\dot{\mu}$ de μ y ν, respectivamente, para llegar a unas relaciones de conmutación en en términos de dichas representaciones infinitesimales. Con las representaciones infinitesimales se obtendrán dos relaciones de conmutación, que representan una manera de transformar un campo cuántico (libre) en otro mediante un sistema de Weyl o bien una acción (de Clifford), dependiendo de si estamos trabajando en $\mathcal{B}(V_J)$ o $\mathcal{F}(V_J)$, respectivamente.

En las conclusiones se discuten brevemente las representaciones infinitesimales $\dot{\mu}$ y $\dot{\nu}$ para espacios vectoriales V con $\dim_{\mathbb{R}} V = \infty$. La intención de este trabajo es ser la piedra angular para seguir investigando campos de simetría en el caso infinitodimensional.

Esta página se deja intencionalmente en blanco

Capítulo 1

Espacios con simetría simpléctica u ortogonal

El propósito principal de la tesis es el de hacer un estudio comparativo entre la representación metapléctica del grupo simpléctico y la representación de espín del grupo ortogonal especial.

En este capítulo discutiremos las bases necesarias para poder definir dichas representaciones. Trabajaremos con un espacio vectorial real finitodimensional V de dimensión par, $\dim_{\mathbb{R}} V = n := 2m$.

1.1. Espacios vectoriales simplécticos y ortogonales

Considere una forma bilineal f sobre V que es *no degenerada* (si $f(v, u) = 0$ para todo $u \in V$ entonces $v = \mathbf{0}$). Vamos a analizar dos casos.

Caso B V está equipado con una forma bilineal s antisimétrica.

Caso F V está dotado de una forma bilineal d que es simétrica y definida positiva (es decir, $d(v, v) > 0$ para todo $v \in V$ con $v \neq \mathbf{0}$).

Sea $J \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ tal que $J^2 = -1$. Este operador se denomina **estructura compleja lineal**. Con esto en mente, podemos definir el espacio $\mathbb{C}$-vectorial V_J como el conjunto cuyos elementos son los elementos de V, posee la misma operación de adición y se define la multiplicación escalar como

$$(a + bi)\, v := a\, v + b\, Jv. \tag{1.1}$$

Es necesario que J deje invariante la forma bilineal dada. Para el Caso B, tenemos entonces el par (V, s), donde J satisface $s(Jv, Ju) = s(v, u)$ y J cumple la condición

$s(v, Jv) > 0$ (se dice que la estructura compleja J es **positiva**); y en el Caso F tenemos el par (V, d), donde J satisface $d(Jv, Ju) = d(v, u)$. Podemos entonces poner

$$\begin{aligned} d_J(v, u) &:= s(v, Ju) \\ s_J(v, u) &:= d(Jv, u) \end{aligned} \tag{1.2}$$

para los Casos B y F, respectivamente. Fíjese que d_J es simétrica y s_J es antisimétrica. En adelante, suprimimos la dependencia explícita sobre J de la segunda forma bilineal, en ambos casos.

Entonces podemos definir en $V = (V, s, d)$:

$$\langle u \mid v\rangle := d(u, v) + is(u, v) = s(u, Jv) + is(u, v) = d(u, v) + id(Ju, v). \tag{1.3}$$

Inmediatamente se ve que

$$\begin{aligned} \langle v \mid u + \alpha w\rangle &= d(v, u + \alpha w) + is(v, u + \alpha w) \\ &= d(v, u) + \alpha d(v, w) + i[s(v, u) + \alpha s(v, w)], \end{aligned}$$

por lo que $\langle v \mid u + \alpha w\rangle = \langle v \mid u\rangle + \alpha\langle v \mid w\rangle$. Por otro lado, vea que

$$\langle u \mid v\rangle = d(u, v) + is(u, v) = d(v, u) - is(v, u) = \overline{\langle v \mid u\rangle},$$

por la antisimetría de s. Finalmente, vea que $d(v, v) > 0$ para todo $v \neq \mathbf{0}$ y s es antisimétrica, entonces $s(v, v) = -s(v, v) \implies s(v, v) = 0$ para todo $v \in V$; esto nos permite concluir que $\langle v \mid v\rangle > 0$ si $v \neq \mathbf{0}$ y $\langle v \mid v\rangle = 0$ si y solo si $v = \mathbf{0}$. Por ende, $\langle v \mid u\rangle$ es un *producto escalar complejo* sobre V_J, lo que hace que V_J sea un espacio de Hilbert complejo de dimensión finita.

Ahora bien, otra propiedad importante es la siguiente.

Proposición 1.1. *$\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2m$ si y solamente si $\dim_{\mathbb{C}}(V_J) = m$.*

Demostración. En efecto, como V y V_J poseen los mismos elementos entonces vamos a probar que V posee la base $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ sobre $\mathbb{C}$ si y solo si este espacio posee la base $\mathcal{B}' = \{b_1, b_2, \dots, b_m, Jb_1, Jb_2, \dots, Jb_m\}$ sobre $\mathbb{R}$. Para esto, sean $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ y $\gamma_k \in \mathbb{C}$, para todo $k \in \{1, \dots, m\}$.

Ad($\Rightarrow$): Note que, por la definición (1.1) de la multiplicación escalar en V_J:

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k b_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k (Jb_k) = 0 \implies \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k + i\beta_k) b_k = 0 \implies \alpha_k = \beta_k = 0.$$

Ahora bien, si $v \in V$ entonces $v = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k b_k$, donde $\gamma_k \in \mathbb{C}$. Por ende

$$v = \sum_{k=1}^{m} (\Re\gamma_k)\, b_k + \sum_{k=1}^{m} i(\Im\gamma_k)\, b_k = \sum_{k=1}^{m} (\Re\gamma_k)\, b_k + \sum_{k=1}^{m} (\Im\gamma_k)\, Jb_k.$$

Esto muestra que $\mathcal{B}'$ forma una base para V sobre $\mathbb{R}$.

Ad($\Leftarrow$): Similarmente se tiene que

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k b_k = 0 \implies \sum_{k=1}^{m} (\Re\gamma_k)\, b_k + \sum_{k=1}^{m} (\Im\gamma_k)\, Jb_k = 0 \implies \Re\gamma_k = \Im\gamma_k = 0 \implies \gamma_k = 0.$$

Si $v \in V$ entonces

$$v = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\, b_k + \sum_{k=1}^{m} \beta_k\, Jb_k \iff \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k + i\beta_k)\, b_k = v,$$

por lo que $\mathcal{B}$ es una base de V sobre $\mathbb{C}$. □

Las últimas propiedades que discutiremos en esta sección tienen que ver con endomorfismos lineales simétricos y antsimétricos. Decimos que $S \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ es $\mathbb{C}$**-lineal** si $JS = SJ$; y que es $\mathbb{C}$**-antilineal** si $JS = -SJ$.

Proposición 1.2. *Cualquier $\mathbb{R}$-endomorfismo S de V se puede expresar como la suma de un endomorfisimo lineal y un endomorfismo antilineal de V_J.*

Demostración. Note que $S = \frac{1}{2}(S - JSJ) + \frac{1}{2}(S + JSJ)$. Como

$$J \cdot \frac{S - JSJ}{2} = \frac{JS + SJ}{2} = \frac{SJ + JS}{2} = \frac{1}{2}(S - JSJ) \cdot J$$

y

$$J \cdot \frac{S + JSJ}{2} = \frac{JS - SJ}{2} = \frac{-SJ + JS}{2} = \frac{-S - JSJ}{2} \cdot J = \frac{-JSJ - S}{2} J = -\frac{S + JSJ}{2} \cdot J$$

entonces $S^+ := \frac{1}{2}(S - JSJ)$ es lineal y $S^- := \frac{1}{2}(S + JSJ)$ es antilineal y además

$$\frac{1}{2}(S - JSJ) + \frac{1}{2}(S + JSJ) = \frac{2S}{2} = S.$$

Esto muestra que $S = S^+ + S^-$. □

Proposición 1.3. *Sea S^t la transpuesta de S con respecto a la forma $\mathbb{R}$-bilineal d. Si S es lineal entonces $\langle v|S^t u\rangle = \langle Sv|u\rangle$; mientras que si S es antilineal entonces $\langle v|S^t u\rangle = \langle u|Sv\rangle$.*

Demostración. Esto son dos cálculos directos utilizando (1.3):

$$\begin{aligned}\langle v \mid S^t u\rangle &= d(v, S^t u) + id(Jv, S^t u)\\ &= d(Sv, u) + id(SJv, u)\\ &= d(Sv, u) + id(JSv, u) = \langle Sv \mid u\rangle.\end{aligned}$$

Ahora bien, si S es antilineal entonces

$$\begin{aligned}\langle v \mid S^t u\rangle &= d(v, S^t u) + id(Jv, S^t u)\\ &= d(Sv, u) + id(SJv, u)\\ &= d(Sv, u) - id(JSv, u)\\ &= d(Sv, u) - id(u, JSv)\\ &= d(Sv, u) - is(u, -Sv)\\ &= d(u, Sv) + is(u, Sv) = \langle u \mid Sv\rangle\end{aligned}$$

donde se utilizó la igualdad (1.2) para el Caso B. □

La Proposición 1.3 será de mucha importancia en la siguiente sección.

Además, se tienen las igualdades

$$J^t = J^{-1} = -J \tag{1.4}$$

por ser J ortogonal con respecto a d (en ambos casos).

Lema 1.4. *Si $v, w \in V_J$ entonces $\langle v \mid Jw\rangle = i\langle v \mid w\rangle$ y $\langle Jv \mid w\rangle = -i\langle v \mid w\rangle$.*

Demostración. Por la definición (1.3), usando las identidades (1.2),

$$\begin{aligned}\langle v \mid Jw\rangle &= d(v, Jw) + is(v, Jw)\\ &= s(v, J^2 w) + id(v, w) = -s(v, w) + id(v, w)\\ &= i[is(v, w) + d(v, w)] = i\langle v \mid w\rangle.\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}\langle Jv \mid w\rangle &= d(Jv, w) + is(Jv, w)\\ &= s(v, w) - id(v, w)\\ &= i[-is(u, v) - d(v, w)] = -i\langle v \mid w\rangle.\end{aligned}$$ □

1.2. El grupo simpléctico y el grupo ortogonal

Ahora introduciremos los grupos de simetría de estos espacios vectoriales.

(a) Para el Caso B, se define el **grupo simpléctico** como

$$\mathrm{Sp}(V) = \mathrm{Sp}(V, s) := \{\, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V) : s(gv, gu) \equiv s(v, u) \,\}. \tag{1.5}$$

(b) Para el Caso F, se define el **grupo ortogonal** como

$$\mathrm{O}(V) = \mathrm{O}(V, d) := \{\, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V) : d(gv, gu) \equiv d(v, u) \,\}. \tag{1.6}$$

(c) También se define el **grupo ortogonal especial** como el grupo $\mathrm{SO}(V) \leqslant \mathrm{O}(V)$ tal que

$$\mathrm{SO}(V) := \{\, g \in \mathrm{O}(V) : \det(g) = 1 \,\}. \tag{1.7}$$

Si dotamos a V con la estructura compleja J entonces, en ambas casos, se definen los **grupos unitarios** como $\mathrm{USp}_J(V) := \{\, g \in \mathrm{Sp}(V) : gJ = Jg \,\}$ para el Caso B; y $\mathrm{UO}_J(V) := \{\, g \in \mathrm{O}(V) : gJ = Jg \,\}$ para el Caso F.

Proposición 1.5. *En el triplete* (V, s, d) *resulta que* $\mathrm{USp}_J(V) = \mathrm{UO}_J(V)$.

Demostración. Si $u, v \in V$, sea $v' := Jv$, luego $v = -Jv'$. Vea que

$$\begin{aligned} g \in \mathrm{USp}_J(V) &\iff g \in \mathrm{Sp}(V) \text{ y } gJ = Jg \\ &\iff s(gv, gu) = s(v, u) \text{ y } gJ = Jg \\ &\iff d(Jgv, gu) = d(Jv, u) \text{ y } gJ = Jg \\ &\iff d(gJv, gu) = d(Jv, u) \text{ y } gJ = Jg \\ &\iff d(gv', gu) = d(v', u) \text{ y } gJ = Jg \\ &\iff g \in \mathrm{UO}_J(V), \end{aligned}$$

donde se utilizaron las identidades (1.2). □

Gracias al resultado de la Proposición 1.5, denotaremos el subgrupo unitario en ambos casos simplemente como $\mathrm{U}_J(V)$.

Proposición 1.6. *Si $v, u \in V$ y $g \in \mathrm{U}_J(v)$ entonces $\langle gv \mid gu\rangle = \langle v \mid u\rangle$, usando el producto escalar dado en (1.3).*

Demostración. Sean $u, v \in V$ y $g \in \mathrm{U}_J(V)$ entonces

$$\begin{aligned}\langle gv \mid gu\rangle &= d(gv, gu) + is(gv, gu)\\ &= s(gv, Jgu) + id(Jgv, gu)\\ &= d(Jgv, Jgu) + is(Jgv, Jgu)\\ &= d(gJv, gJu) + is(gJv, gJu)\\ &= d(v, u) + is(v, u) = \langle v \mid u\rangle\end{aligned}$$

porque $g \in \mathrm{Sp}(V) \cap \mathrm{O}(V)$. □

El siguiente lema será de mucha utilidad para demostrar la Proposición 1.9.

Lema 1.7. *Un elemento g de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ pertenece a $\mathrm{Sp}(V)$ si y solamente si $g^t Jg = J$.*

Demostración. Si $g \in \mathrm{Sp}(V)$ entonces $s(gv, gu) = s(v, u)$, i.e., $d(Jgv, gu) = d(Jv, u)$, para todo $u, v \in V$. Así,

$$d(gu, Jgv) = d(u, g^t Jgv) = d(u, Jv).$$

Lo anterior equivale a $d(u, g^t Jgv - Jv) = 0$, lo que implica $g^t Jgv = Jv$ para todo v porque d es no degenerado, por hipótesis; y esto equivale a $g^t Jg = J$, debido a la arbitrariedad de $v \in V$. □

Cualquier elemento g de $\mathrm{Sp}(V)$ o de $\mathrm{O}(V)$ se puede escribir (de manera única) como la suma de una parte lineal y una parte antilineal: $g := p_g + q_g$, donde

$$p_g := \tfrac{1}{2}(g - JgJ) \quad \text{y} \quad q_g := \tfrac{1}{2}(g + JgJ),$$

gracias a la Proposición 1.2. Esta descomposición es muy útil puesto que nos permitirá representar un elemento g de una manera específica que utilizaremos más adelante.

Por el momento, observe que

$$g \in \mathrm{Sp}(V) \iff g^t Jg = J \iff Jg = g^{-t}J \iff -g = Jg^{-t}J \iff g = -Jg^{-t}J,$$

por lo que

$$p_g = \tfrac{1}{2}(g + g^{-t}) \implies p_g^t = \tfrac{1}{2}(g^t + g^{-1}).$$

Similarmente,

$$q_g = \tfrac{1}{2}(g - g^{-t}) \implies q_g^t = \tfrac{1}{2}(g^t - g^{-1}).$$

Utilizaremos esto para demostrar la siguiente afirmación.

Proposición 1.8. *En el Caso B la parte lineal p_g de g satisface*

$$p_g p_g^t \geqslant \tfrac{1}{2} 1_n \quad y \quad p_g^t p_g \geqslant \tfrac{1}{2} 1_n$$

(donde $A \geqslant B$ significa que $A - B$ es semidefinida positiva) y por ende ambas $p_g^t p_g$ y $p_g p_g^t$ son operadores definidos positivos sobre el espacio de Hilbert V_J.

Demostración. Como

$$p_g^t p_g = \tfrac{1}{4}(g^t + g^{-1})(g + g^{-t}) = \tfrac{1}{4}(g^t g + g^t g^{-t} + g^{-1} g + g^{-1} g^{-t}) = \tfrac{1}{4}(2 \cdot 1_n + g^t g + (g^t g)^{-1}),$$

entonces $p_g^t p_g \geqslant \frac{1}{2} 1_n$, pues $g^t g$ es semidefinida positiva.

Análogamente se prueba que $p_g p_g^t \geqslant \frac{1}{2} 1_n$. □

Corolario 1.9. *El operador p_g es invertible en el Caso B (solamente).*

Demostración. En efecto, toda matriz definida positiva A es invertible, pues $\boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} > 0$ para todo $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, de donde $A\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ para todo $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.

Entonces $p_g^t p_g$ es invertible. Para p_g mismo, vea que

$$\det(p_g^t p_g) = \det p_g^t \det p_g = (\det p_g)^2 > 0 \implies \det p_g \neq 0,$$

y así p_g es invertible (en el Caso B). □

En el Caso F, p_g no es necesariamente invertible porque en ese caso $p_g^t p_g$ solo es semidefinido positivo.

Proposición 1.10. *Para el Caso B se tiene que*

$$p_g p_g^t - q_g q_g^t = p_g^t p_g - q_g^t q_g = 1_n, \tag{1.8a}$$

$$p_g q_g^t = q_g p_g^t, \quad p_g^t q_g = q_g^t p_g. \tag{1.8b}$$

Para el Caso F se cumplen las igualdades

$$p_g p_g^t + q_g q_g^t = p_g^t p_g + q_g^t q_g = 1_n, \tag{1.9a}$$

$$p_g q_g^t = -q_g p_g^t, \quad p_g^t q_g = -q_g^t p_g. \tag{1.9b}$$

Demostración. Vamos a probar estas identidades para los casos B y F por separado.

Caso B: Las primeras igualdades se deducen de un cálculo directo:

$$\begin{aligned} p_g p_g^t - q_g q_g^t &= \tfrac{1}{4}(2 \cdot 1 + g g^t + (g g^t)^{-1}) - \tfrac{1}{4}(-2 \cdot 1 + g g^t + (g g^t)^{-1}) \\ &= \tfrac{1}{4} \cdot 4 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Análogamente se prueba que $p_g^t p_g - q_g^t q_g = 1$.

Ahora bien, note que

$$p_{g^{-1}} = \tfrac{1}{2}(g^{-1} + g^t) = p_g^t \quad \text{y} \quad q_{g^{-1}} = \tfrac{1}{2}(g^{-1} - g^t) = -\tfrac{1}{2}(g^t - g^{-1}) = -q_g^t.$$

Como $gg^{-1} = 1$ entonces

$$1 = (p_g + q_g)(p_{g^{-1}} + q_{g^{-1}}) = (p_g + q_g)(p_g^t - q_g^t) = p_g p_g^t - p_g q_g^t + q_g p_g^t - q_g q_g^t.$$

De la parte antilineal de la igualdad anterior concluimos que

$$-p_g q_g^t + q_g p_g^t = 0 \implies p_g q_g^t = q_g p_g^t.$$

De manera similar, como $g^{-1}g = 1$ entonces

$$1 = (p_{g^{-1}} + q_{g^{-1}})(p_g + q_g) = (p_g^t - q_g^t)(p_g + q_g) = p_g^t p_g + p_g^t q_g - q_g^t p_g - q_g^t q_g,$$

y así $p_g^t q_g - q_g^t p_g = 0$ lo que implica que $p_g^t q_g = q_g^t p_g$.

Caso F: La prueba de este caso es muy similar, con la diferencia de que

$$p_{g^{-1}} = \tfrac{1}{2}(g^{-1} - Jg^{-1}J) = \tfrac{1}{2}(g^t - Jg^tJ) = p_g^t$$

y también

$$q_{g^{-1}} = \tfrac{1}{2}(g^{-1} + Jg^{-1}J) = \tfrac{1}{2}(g^t + Jg^tJ) = q_g^t. \qquad \square$$

Ahora, introduciremos la notación

$$T_g := q_g p_g^{-1}. \tag{1.10}$$

Por el Corolario 1.9 tenemos que T_g está bien definido en el Caso B, pero en el Caso F esto no siempre se cumple. Conviene entonces definir $\mathrm{SO}_*(V)$ como el conjunto de todos los elementos $g \in \mathrm{SO}(V)$ tales que p_g^{-1} existe y por ende T_g está definido.

Como q_g es antilineal y p_g es lineal (y por ende su inversa también lo es) entonces $T_g := q_g p_g^{-1}$ es antilineal al ser un producto de un operador lineal y un operador antilineal.

Lema 1.11. *Si denotamos $\widehat{T}_g := T_{g^{-1}}$, entonces $\widehat{T}_g = -p_g^{-1} T_g p_g$ (en ambos casos).*

Demostración. Primeramente vea que

$$(1 + T_g)p_g = p_g + Tp_g = p_g + q_g p_g^{-1} p_g = p_g + q_g;$$

esto es

$$(1 + T_g)p_g = g, \tag{1.11}$$

por lo que

$$\begin{aligned}1 = gg^{-1} &= (1+T_g)p_g(1+\widehat{T}_g)p_{g^{-1}}\\ &= (1+T_g)p_g(1+\widehat{T}_g)p_g^t\\ &= (p_g+T_gp_g)(p_g^t+\widehat{T}_gp_g^t)\\ &= p_gp_g^t+p_g\widehat{T}_gp_g^t+T_gp_gp_g^t+T_gp_g\widehat{T}_gp_g^t\end{aligned}$$

Debido a que los términos primero y último del miembro derecho de la igualdad anterior es lineal; de la parte antilineal de la igualdad anterior llegamos a que $p_g\widehat{T}_gp_g^t+T_gp_gp_g^t=0$, es decir, $\widehat{T}_g=-p_g^{-1}T_gp_g$ porque p_g y p_g^t son invertibles, en el Caso B; y también en el Caso F cuando T_g existe. □

Proposición 1.12. *En ambos casos* $1-T_g^2$ *es definida positiva.*

Demostración. Como $g=p_g+q_g=(1+T_g)p_g=p_g(1-\widehat{T}_g)$ entonces

$$g^{-1}=p_{g^{-1}}(1-\widehat{T}_{g^{-1}})=p_g^t(1-T_g),$$

de donde se sigue la igualdad $1=p_g^t(1-T_g^2)p_g$, lo que implica que $1-T_g^2=(p_gp_g^t)^{-1}$, que es definida positiva al ser el operador inverso de un operador definido positivo. □

Proposición 1.13. *La aplicación* T_g *es simétrica en el Caso B y es antisimétrica en el Caso F. Además,* $0<1-T_g^2\leqslant 1$ *en el Caso B mientras* $1-T_g^2\geqslant 1>0$ *en el Caso F.*

Demostración. Por definición $T_g=q_gp_g^{-1}$. Por las identidades (1.8b) y (1.9b) se sigue que $T_g^t=p_g^{-t}q_g^t=q_g^tp_g^{-1}=T_g$ en el Caso B; y $T_g^t=p_g^{-t}q_g^t=-q_gp_g^{-1}=-T_g$ en el Caso F, respectivamente.

Ahora hay que probar que T_g^2 es semidefinida negativa en el Caso F y semidefinida positiva en el Caso B.

Si M es una matriz simétrica o antisimétrica entonces

$$(M^2)^t=(M^t)^2=(\pm M)^2=M^2;$$

es decir, M^2 es una matriz simétrica. Gracias a esto, si $\boldsymbol{x}\in V$ entonces

$$d(\boldsymbol{x},M^2\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^tM^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^t(\pm M^t)M\boldsymbol{x}=\pm d(M\boldsymbol{x},M\boldsymbol{x}),$$

número que es no negativo o no positivo si M es simétrica o antisimétrica respectivamente. Se concluye que T_g^2 es semidefinida negativa en el Caso F y semidefinida positiva en el Caso B. La positividad definida $0<1-T_g^2$ (en el Caso B) viene de la Proposicón 1.12; en el Caso F es obvia. □

En el libro de Robinson y Rawnsley [22] se establece que $\mathrm{Sp}(V)$ es conexo, que $\det g = 1$ para $g \in \mathrm{Sp}(V)$ y que $\mathrm{SO}(V)$ también es conexo. Además, establece que $\mathrm{O}(V)$ posee dos componentes conexos, los cuales son los $g \in \mathrm{O}(V)$ tales que $\det g = +1$ y $\det g = -1$, respectivamente.

Proposición 1.14. *Para g y para h en* $\mathrm{Sp}(V)$ *o bien en* $\mathrm{O}(V)$*, se tiene que*

$$p_{gh} = p_g(1 - \widehat{T}_g T_h)p_h, \tag{1.12}$$

$$T_{gh} = T_g + p_g^{-t}\, T_h(1 - \widehat{T}_g T_h)^{-1} p_g^{-1}. \tag{1.13}$$

Demostración. Se sabe que

$$(1 + T_{gh})p_{gh} = gh = (1 + T_g)p_g(1 + T_h)p_h.$$

Así, en ambos casos se tiene que

$$(1 + T_{gh})p_{gh} = (1 + T_g)p_g(1 + T_h)p_h = p_g(1 - \widehat{T}_g)(1 + T_h)p_h = (p_g - p_g\widehat{T}_g)(p_h + T_h p_h),$$

por lo que

$$p_{gh} + T_{gh}p_{gh} = p_g p_h + p_g T_h p_h - p_g\widehat{T}_g p_h - p_g\widehat{T}_g T_h p_h.$$

Igualando la parte lineal y la parte antilineal en la igualdad anterior se obtiene

$$p_{gh} = p_g p_h - p_g\widehat{T}_g T_h p_h = p_g(1 - \widehat{T}_g T_h)p_h.$$

Ahora bien, en el Caso F se tiene que

$$p_g + q_g\widehat{T}_g = p_g + q_g(q_g^t p_g^{-t}) = (p_g p_g^t + q_g q_g^t)p_g^{-t} = p_g^{-t},$$

por la identidad (1.9a). Si g^{-1}, h y gh pertenecen a $\mathrm{SO}_*(V)$ entonces

$$\begin{aligned} T_{gh} &= q_{gh}p_{gh}^{-1} = (q_g + p_g T_h)(p_g + q_g T_h)^{-1} \\ &= q_g p_g^{-1} + [q_g + p_g T_h - q_g(1 - \widehat{T}_g T_h)](1 - \widehat{T}_g T_h)^{-1} p_g^{-1} \\ &= T_g + p_g^{-t} T_h(1 - \widehat{T}_g T_h)^{-1} p_g^{-1}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

La última igualdad se obtiene debido a que

$$p_g(1 - \widehat{T}_g T_h) = p_g(1 + p_g^{-1} T_g p_g T_h) = p_g + T_g p_g T_h = p_g + q_g p_g^{-1} p_g T_h = p_g + q_g T_h.$$

Para el Caso B se cumple la relación

$$p_g + q_g\widehat{T}_g = p_g - q_g(q_g^t p_g^{-t}) = (p_g p_g^t - q_g q_g^t)p_g^{-t} = p_g^{-t},$$

por la identidad (1.8a). Así, el cálculo (1.14) se repite en forma idéntica. Cabe resaltar que la prueba de la última igualdad es idéntica en ambos casos, lo que cambia es que $q_{g^{-1}} = -q_g^t$ en el Caso B, pero $q_{g^{-1}} = +q_g^t$ en el Caso F. $\square$

1.3. Polarizaciones

La forma clásica de complexificar un espacio vectorial (real) es mediante las recetas

$$V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq V \oplus iV.$$

De esto se puede notar que $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$, por lo que $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{C}} = 2n = 4m$. Para $w := v + iu \in V_{\mathbb{C}}$, con $u, v \in V$, se define $w^* := v - iu \in V_{\mathbb{C}}$. Las formas bilineales d y s se extienden de manera natural al espacio $V_{\mathbb{C}}$. Con esto en mente, se define

$$\langle\langle w_1 \mid w_2 \rangle\rangle := 2d(w_1^*, w_2) = 2s(w_1^*, Jw_2). \tag{1.15}$$

Lema 1.15. *La fórmula anterior define un producto escalar sobre $V_{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Sean $w_1 := u_1 + iv_1$, $w_2 := u_2 + iv_2$, $w_3 := u_3 + iv_3$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\langle\langle w_1 \mid w_2 + w_3 \rangle\rangle = 2d(w_1^*, w_2 + w_3) = 2[d(w_1^*, w_2) + d(w_1^*, w_3)] = \langle\langle w_1 \mid w_2 \rangle\rangle + \langle\langle w_2 \mid w_3 \rangle\rangle,$$

por la bilinealidad de la forma d. También

$$\langle\langle w_1 \mid \alpha w_2 \rangle\rangle = 2d(w_1^*, \alpha w_2) = \alpha \cdot 2d(w_1^*, w_2),$$

por lo que $\langle\langle - \mid - \rangle\rangle$ es lineal en la segunda variable.

Por otro lado, note que

$$\begin{aligned} 2d(w_1^*, w_2) &= 2d(u_1 - iv_1, u_2 + iv_2) \\ &= 2[d(u_1, u_2) + id(u_1, v_2) - id(v_1, u_2) - i^2 d(v_1, v_2)] \\ &= 2[d(u_1, u_2) + d(v_1, v_2)] + 2i[d(u_1, v_2) - d(v_1, u_2)] \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} 2d(w_2^*, w_1) &= 2d(u_2 - iv_2, u_1 + iv_1) \\ &= 2[d(u_2, u_1) + id(u_2, v_1) - id(v_2, u_1) - i^2 d(v_2, v_1)] \\ &= 2[d(u_2, u_1) + d(v_1, v_2)] + 2i[d(u_2, v_1) - d(v_2, u_1)], \end{aligned}$$

La simetría de d entonces nos dice que $\langle\langle w_1 \mid w_2 \rangle\rangle = \langle\langle w_2 \mid w_1 \rangle\rangle^*$.

Finalmente, la definitud positiva de $\langle\langle - \mid - \rangle\rangle$ sigue directamente de la definitud positiva de d. Esto concluye el resultado. □

Ahora, definamos los operadores sobre $V_{\mathbb{C}}$:

$$P_J := \tfrac{1}{2}(1 - iJ) \quad \text{y} \quad P_{-J} := \tfrac{1}{2}(1 + iJ). \tag{1.16}$$

Lema 1.16. *Los operadores P_J y P_{-J} son idempotentes y autoadjuntos. En otras palabras, ambos operadores son proyectores ortogonales.*

Demostración. Primeramente observe que

$$\begin{aligned} P_J^2 &= \tfrac{1}{4}(1 - iJ)(1 - iJ) = \tfrac{1}{4}(1 - iJ - iJ + i^2J^2) = \tfrac{1}{4}(1 - 2iJ + 1) = \tfrac{1}{2}(1 - iJ) = P_J, \\ P_{-J}^2 &= \tfrac{1}{4}(1 + iJ)(1 + iJ) = \tfrac{1}{4}(1 + iJ + iJ + i^2J^2) = \tfrac{1}{4}(1 + 2iJ + 1) = \tfrac{1}{2}(1 + iJ) = P_{-J}, \end{aligned}$$

por lo que ambos operadores son idempotentes. Ahora bien, como los operadores son idempotentes entonces solamente basta probar que sus espacios de autovectores para los autovalores 0 y 1 son ortogonales:

$$\langle\!\langle P_J u \mid (1 - P_J)v \rangle\!\rangle = \langle\!\langle P_{-J} u \mid (1 - P_{-J})v \rangle\!\rangle = 0 \quad \text{para todo} \quad u, v \in V.$$

Como $(1 - P_J)v = \frac{1}{2}(v + iJv)$ entonces

$$\begin{aligned} 2\langle\!\langle P_J u \mid (1 - P_J)v \rangle\!\rangle &= 4d((P_J u)^*, \tfrac{1}{2}(v + iJv)) \\ &= d(u, v) + d(iJu, v) + d(u, iJv) + d(iJu, iJv) \\ &= d(u, v) + d(iJu, v) + d(iJv, u) - d(u, v) \\ &= is(u, v) + is(v, u) = is(u, v) - is(u, v) = 0. \end{aligned}$$

Análogamente se prueba que $\langle\!\langle P_{-J} u \mid (1 - P_{-J})v \rangle\!\rangle = 0$. Por ende ambos operadores $P_{\pm J}$ son proyectores ortogonales. □

Lema 1.17. *Si $u, v \in V$ entonces $2d(P_J v, P_{-J} u) = \langle u \mid v \rangle$.*

Demostración. Esto es un cálculo directo:

$$\begin{aligned} 2\, d(P_J v, P_{-J} v) &:= \tfrac{1}{2} d(v - iJv, u + iJu) \\ &= \tfrac{1}{2}\big(d(v, u) + id(v, Ju) - id(Jv, u) + d(Jv, Ju)\big) \\ &= \tfrac{1}{2}\big(d(v, u) + is(u, v) - is(v, u) + d(v, u)\big) \\ &= d(u, v) + is(u, v) = \langle u \mid v \rangle. \end{aligned}$$

□

Proposición 1.18. *Los subespacios de $V_{\mathbb{C}}$ definidos por:*

$$W_J := \{\, u - iJu : u \in V \,\} \quad y \quad W_{-J} := \{\, u + iJu : u \in V \,\} = W_J^*$$

satisfacen $Jw = iw$ para $w \in W$ y $Jz^* = -iz^*$ para $z^* \in W_J^*$.

Demostración. Vea que

$$Jw = J(u - iJu) = Ju - iJ^2u = Ju + iu = -i^2(Ju + iu) = i(-iJu + u) = iw,$$

con $u \in V$. Además, como $W_{-J} = W_J^*$ entonces $(Jz)^* = (iz)^* = -iz^*$, donde $z^* \in W_{-J}$. □

Se dice que un subespacio complejo $W \leqslant V_{\mathbb{C}}$ es una **polarización de** $V_{\mathbb{C}}$ si se satisfacen las siguientes dos propiedades.

(a) W es *isotrópico* para la forma bilineal d, i.e., $d(w, z) = 0$ para todo $w, z \in W$;

(b) $W \cap W^* = \{0\}$ y $W \oplus W^* = V_{\mathbb{C}}$.

Lema 1.19. *Si W es una polarización de $V_{\mathbb{C}}$ entonces W^* también es una polarización de $V_{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Sean $w = u_1 + iv_1$, $z = u_2 + iv_2$ en $V_{\mathbb{C}}$. Debido a que

$$d(w, z) = d(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = d(u_1, u_2) + id(u_1, v_2) + id(v_1, u_2) - d(v_1, v_2),$$

que se puede escribir utilizando su parte real y su parte imaginaria:

$$d(w, z) = [d(u_1, u_2) - d(v_1, v_2)] + i[d(u_1, v_2) + d(v_1, u_2)].$$

Por otro lado,

$$d(w^*, z^*) = d(u_1 - iv_1, u_2 - iv_2) = d(u_1, u_2) - id(u_1, v_2) - id(v_1, u_2) - d(v_1, v_2),$$

lo que equivale a

$$[d(u_1, u_2) - d(v_1, v_2)] + i[d(u_1, v_2) + d(v_1, u_2)].$$

Esto nos permite concluir que

$$d(w^*, z^*) = d(w, z)^* \implies d(w^*, z^*) = 0^* = 0.$$

Si W es isotrópico para d, entonces

$$d(w^*, z^*) = d(w, z)^* = 0^* = 0,$$

y por lo tanto W^* es isotrópico para d.

Por otro lado, vea que

$$W^* \cap (W^*)^* = W^* \cap W = W \cap W^* = \{0\},$$
$$W^* \oplus (W^*)^* = W^* \oplus W = W \oplus W^* = V_{\mathbb{C}}.$$

Se concluye entonces que W^* también es una polarización de $V_{\mathbb{C}}$. □

Proposición 1.20. *Los subespacios W_J y W_{-J} son polarizaciones de $V_{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Directamente se ve que

$$d(z,w) = d(u_1 - iJu_1, u_2 - iJu_2) = d(u_1,u_2) - id(u_1,Ju_2) - id(u_2,Ju_1) - d(Ju_1,Ju_2),$$

lo que equivale a

$$d(u_1,u_2) - is(u_1,u_2) - is(u_2,u_1) - d(u_1,u_2) = 0,$$

debido a la antisimetría de s.

Por otro lado, vea que

$$w \in W_J \cap W_J^* = W_J \cap W_{-J} \iff w = u - iJu \text{ y } w = u + iJu \iff u = 0 \iff w = 0$$

y

$$z \in W_J + W_{-J} \iff z = u - iJu + v + iJv = u + v - iJ(u - v),$$

y como $u+v, u-v$ representan dos vectores cualesquiera de V, entonces $W_J \oplus W_J^* = V_{\mathbb{C}}$.

Se concluye entonces que W_J es una polarización. La igualdad $W_J^* = W_{-J}$ ya fue observada en la prueba de la Proposición 1.18. □

Para el Caso B, se dice que la polarización es **positiva** si la aplicación $(w,z) \mapsto 2is(w^*,z)$ es definida positiva para todo $z,w \in W$. Hemos probado que cualquier estructura compleja positiva J determina una polarización positiva W_J.

La proposición recíproca también es cierta: cualquier polarización positiva define una estructura compleja positiva. En efecto, si $w = u + iv \in W$ con $u,v \in V$, defínase la aplicación $J_W : u \mapsto v$ (que está bien definida por la unicidad de las dos partes $u,v \in V$ de $w \in V_{\mathbb{C}}$, por la propiedad (b) de una polarización).

Sean $w_1 = u_1 + iv_1$ y $w_2 = u_2 + iv_2$ en W. En el Caso B, de las partes real e imaginaria de $s(w_1,w_2) = 0$ se obtiene

$$s(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = s(u_1,u_2) + is(u_1,v_2) + is(u_2,v_1) - s(v_1,v_2) = 0,$$

lo que equivale a

$$s(u_1,u_2) - s(v_1,v_2) + i[s(u_1,v_2) + s(u_2,v_1)] = 0$$

i.e., $s(u_1,u_2) = s(v_1,v_2)$ y $s(u_1,v_2) = -s(u_2,v_1)$. Entonces

$$s(u_1,u_2) = s(J_W u_1, J_W u_2) \quad \text{y} \quad s(u_1, J_W u_2) = -s(J_W u_1, u_2)$$

para todo $u_1, u_2 \in V$. La primera igualdad dice que J_W es simpléctico. Combinando ambas relaciones,

$$s(J_W^2 u_1, J_W u_2) = s(J_W u_1, u_2) = -s(u_1, J_W u_2) = s(-u_1, J_W u_2)$$

para todo $u_1, J_W u_2 \in V$; por lo que $J_W^2 = -1$.

En el Caso F, de la partes real e imaginaria de $d(w_1, w_2) = 0$ se obtiene

$$d(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = d(u_1, u_2) + id(u_1, v_2) + id(u_2, v_1) - d(v_1, v_2) = 0,$$

lo que es equivalente a

$$d(u_1, u_2) - d(v_1, v_2) + i[d(u_1, v_2) + d(u_2, v_1)] = 0$$

i.e., $d(u_1, u_2) = d(v_1, v_2)$ y $d(u_1, v_2) = -d(u_2, v_1)$. Así,

$$d(u_1, u_2) = d(J_W u_1, J_W u_2) \quad \text{y} \quad d(u_1, J_W u_2) = -d(J_W u_1, u_2)$$

para todo $u_1, u_2 \in V$. La primera igualdad nos dice que J_W es ortogonal. De ambas igualdades llegamos a que

$$d(J_W^2 u_1, J_W u_2) = d(J_W u_1, u_2) = -d(u_1, J_W u_2) = d(-u_1, J_W u_2)$$

para todo $u_1, J_W u_1 \in V$; por lo tanto $J_W^2 = -1$ también en el Caso F.

Por último, los grupos de simetría $\mathrm{Sp}(V)$ y $\mathrm{O}(V)$ actúan sobre polarizaciones: definimos

$$gW := \{ gw : w \in W \},$$

para $g \in \mathrm{Sp}(V)$ o bien $g \in \mathrm{O}(V)$ respectivamente.

Proposición 1.21. *Si W es una polarización de $V_{\mathbb{C}}$ entonces gW también es una polarización de $V_{\mathbb{C}}$.*

Demostración. La isotropía proviene directamente de la definición del grupo de simetría, pues

$$d(w, z) = 0 \implies d(gw, gz) = d(w, z) = 0.$$

Además $W \cap W^* = \{0\} \implies gW \cap gW^* = \{g \cdot 0\} = \{0\}$ y también

$$gW + gW^* = gV_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{C}},$$

por lo que gW es una polarización de $V_{\mathbb{C}}$. □

Proposición 1.22. *Sobre estructuras complejas, se puede definir la acción $J \mapsto gJg^{-1}$. El resultado de dicha acción es una estructura compleja; y además $W_{gJg^{-1}} = gW_J$.*

Demostración. Primeramente vea que

$$(gJg^{-1})^2 = g^2 J^2 (g^{-1})^2 = -g^2 g^{-2} = -1,$$

por lo que esta acción es en efecto una estructura compleja.

Por otra parte, note que

$$\begin{aligned} w \in W_{gJg^{-1}} = \{ u - igJg^{-1}u : u \in V \} &\iff w = u - igJg^{-1}u \\ &\iff g^{-1}w = v - iJv \\ &\iff w = g(v - iJv) \\ &\iff w \in gW_J, \end{aligned}$$

donde $v := g^{-1}u \in V$. □

Para terminar esta sección definiremos dos funciones que serán de mucha utilidad en los Capítulos 2 y 4.

Definición 1.23. Para $A \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$, se define su **determinante compleja** como

$$\det\nolimits_{\mathbb{C}} A := \det(P_J A P_J),$$

donde $P_J := \frac{1}{2}(1 - iJ)$ como en (1.16), y la traza del miembro derecha es el determinante usual definida en la polarización W_J. ◊

En el Capítulo 2, ecuación (2.18), se hallará una fórmula para

$$\det\nolimits_{\mathbb{C}}(1 - T^2) = \det(P_J(1 - T^2)P_J).$$

Definición 1.24. Para $A \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$, se define su **traza compleja** como

$$\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}} A := \operatorname{Tr}(P_J A P_J),$$

donde $P_J := \frac{1}{2}(1 - iJ)$ como en (1.16), y la traza del miembro derecha es la traza usual definida en la polarización W_J. ◊

Si A es un operador antilineal, como $P_J A = AP_{-J}$ y $P_{-J}P_J = 0$, entonces $\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}} A = 0$. Sin embargo, la traza compleja de un conmutador de dos aplicaciones antilineales no tiene que ser nula; caso contrario si ambas aplicaciones son $\mathbb{C}$-lineales.

En [1] se observa que

$$\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}} A = \sum_{k=1}^{m} \langle e_k \mid Ae_k \rangle, \tag{1.17}$$

para A un operador $\mathbb{C}$-lineal, donde $\{ e_k : k = 1, \ldots, m \}$ es una base ortonormal de V_J.

Note que si A es $\mathbb{C}$-lineal entonces

$$A^t J = -(JA)^t = -(AJ)^t = JA^t,$$

por lo que A^t también es $\mathbb{C}$-lineal. Además, por (1.17),

$$\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}} A^t = \sum_{k=1}^{m} \langle e_k \mid A^t e_k \rangle = \sum_{k=1}^{m} \overline{\langle A^t e_k \mid e_k \rangle} = \sum_{k=1}^{m} \overline{\langle e_k \mid Ae_k \rangle} = \overline{\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(A)}.$$

El siguiente lema será de utilidad en el Capítulo 4.

Lema 1.25. *Si $S, T \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$ son antilineales y simétricos (o antisimétricos),* [1] *entonces* $\overline{\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(TS)} = \operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(ST)$.

Demostración. Primeramente note que como S y T son antilineales entonces TS y ST son $\mathbb{C}$-lineales. En efecto,

$$STJ = -SJT = JST \quad \text{y} \quad TSJ = -TJS = JTS.$$

Note que

$$\begin{aligned} \overline{\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(TS)} &= \sum_{k=1}^{m} \overline{\langle e_k \mid TSe_k \rangle} = \sum_{k=1}^{m} \overline{\langle Se_k \mid T^t e_k \rangle} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \langle T^t e_k \mid Se_k \rangle = \sum_{k=1}^{m} \langle e_k \mid S^t T^t e_k \rangle = \operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(S^t T^t) \end{aligned}$$

por la Proposición 1.3. Ahora, como ambas T y S son simétricas o antisimétricas, entonces $S^t T^t = ST$ y se sigue que $\overline{\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(TS)} = \operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(S^t T^t) = \operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(ST)$. □

[1] Si una de las aplicaciones es simétrica y la otra antisimétrica, entonces $\overline{\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(TS)} = -\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(ST)$.

1.4. Las transformadas de Cayley

Sean J una estructura compleja lineal fija (y positiva, en el Caso B). Como, en el Caso B, cada estructura compleja posee una polarización positiva $W = \{ w = u - iJu : u \in V \}$ de $V_{\mathbb{C}}$, entonces si $z_1, z_2 \in W_J$,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2^* &= u_1 - iJu_1 + u_2 + iJu_2 \\ &= (u_1 + u_2) - iJ(u_1 - u_2) =: w \in W, \end{aligned}$$

y esta descomposición es única pues $W \cap W^* = \{0\}$.

Ahora bien, como (en el Caso B) la aplicación sesquilineal $(w_1, w_2) \mapsto 2is(w_1, w_2^*)$ es definida positiva, por lo que la aplicación

$$(w_1^*, w_2^*) \mapsto 2is(w_1, w_2^*) = -2is(w_2^*, w_1)$$

es definida negativa en W^*, entonces $W \cap W_J^* = \{0\}$. Resumiremos esto como una proposición.

Proposición 1.26. *En el Caso B se tiene que $W \cap W_J^* = \{0\}$.*

Bajo estas condiciones, podemos definir la aplicación $\mathbb{R}$-lineal T_W como la composición

$$T_W : u_1 \mapsto z_1 \mapsto w \mapsto z_2^* \mapsto u_2, \tag{1.18}$$

con $z_j = u_j - iJu_j$ para $j \in \{1, 2\}$.

Las aplicaciones $u_1 \mapsto z_1$ y $z_2^* \mapsto u_2$ están bien definidas por la unicidad de la descomposición $w = z_1 + z_2^*$. También, nótese que la aplicación $\mathbb{C}$-lineal $S_W : z_1 \mapsto w \mapsto z_2^*$ satisface

$$S_W(Ju_1 + iu_1) = S_W(iz_1) = iz_2^* = -Ju_2 + iu_2 \tag{1.19}$$

porque $iw = iz_1 + iz_2^*$.

Lema 1.27. *$T_W J = -JT_W$.*

Demostración. Sean $u_1, u_2 \in V$, entonces la fórmula (1.19) muestra que

$$T_W(Ju_1) = -Ju_2 = -J(T_W u_1)$$

para todo $u_1 \in V$. (Esto muestra que T_W es un operador antilineal sobre V.) □

Esto establece que $z_1 = (1 + T_W)u_1$, y por ende

$$\begin{aligned} w &= z_1 + z_2^* = u_1 - iJu_1 + u_2 + iJu_2 \\ &= (1 + T_W)u_1 - iJ(1 - T_W)u_1 \\ &= (1 + T_W)(u_1 - iJu_1) = (1 + T_W)z_1. \end{aligned}$$

La aplicación $w \mapsto z_1$ es claramente sobreyectiva, y es inyectiva debido a la unicidad de la descomposición $w = z_1 + z_2^*$. Por ende $w \mapsto z_1$ y así $1 + T_W$ es invertible (en el Caso B).

Entonces, para las aplicaciones J_W y T_W, se tiene que

$$J_W = J(1 - T_W)(1 + T_W)^{-1} \tag{1.20a}$$

$$T_W = (J - J_W)(J + J_W)^{-1}. \tag{1.20b}$$

En otras palabras, dichas aplicaciones se relacionan mediante la **transformada de Cayley**:

$$S \mapsto (1 - S)(1 + S)^{-1},$$

siempre y cuando $1+S$ sea invertible. En el Caso B, $1+T_W$ es siempre invertible, afirmación que no siempre es cierta en el Caso F.

Proposición 1.28. *La aplicación T_W es simétrica en el Caso B pero antisimétrica en el Caso F.*

Demostración. En el Caso B tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{i}{2}\mathfrak{I}(s(w, w')) = \tfrac{i}{2}\mathfrak{I}(s(z_1 + z_2^*, z_1' + z_2'^*)) \\ &= \tfrac{i}{2}\mathfrak{I}[s(z_1, z_2'^*) - s(z_1', z_2^*)] = \tfrac{i}{2}\mathfrak{I}[s(u_1 - iJu_1, u_2' + iJu_2') - s(u_1' - iJu_1', u_2 + iJu_2)] \\ &= d(u_1, T_W u_1') - d(T_W u_1, u_1'). \end{aligned}$$

En contraste, se tiene, en el Caso F, que

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{1}{2}\mathfrak{R}(d(w, w') = \tfrac{1}{2}\mathfrak{R}(d(z_1 + z_2^*, z_1' + z_2'^*)) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathfrak{R}[d(z_1, z_2'^*) + d(z_1', z_2^*)] = \tfrac{1}{2}\mathfrak{R}[d(u_1 - iJu_1, u_2' + iJu_2') + d(u_1' - iJu_1', u_2 + iJu_2)] \\ &= d(u_1, T_W u_1') + d(T_W u_1, u_1'). \end{aligned}$$

En ambos casos $u_1, u_1' \in V$. □

Definición 1.29. Sea J una estructura compleja (positiva en el Caso B). Se definen, en $V_\mathbb{C}$, los operadores $\mathbb{C}$-lineales

$$B := \tfrac{1}{2}(1 - J_W J) \quad \text{y su operador adjunto} \quad B^\dagger := \tfrac{1}{2}(1 - JJ_W). \qquad \lozenge$$

Proposición 1.30. $\ker B = \ker B^\dagger = (W \cap W_J^*) \oplus (W^* \cap W_J)$.

Demostración. Utilizando la relación $J_W^{-1} = -J_W$ llegamos a que

$$\begin{aligned}\ker B &= \{ z \in V_\mathbb{C} : Jz = -J_W z \} \\ &= \{ z \in V_\mathbb{C} : \tfrac{1}{2}(1 - iJ)z = \tfrac{1}{2}(1 + iJ_W)z \} = \{ z \in V_\mathbb{C} : \tfrac{1}{2}(1 + iJ)z = \tfrac{1}{2}(1 - iJ_W)z \} \\ &= (W \cap W_J^*) \oplus (W^* \cap W_J),\end{aligned}$$

ya que $z = \frac{1}{2}(1 - iJ)z + \frac{1}{2}(1 + iJ)z$.

Finalmente, vea que $\ker B^\dagger = \ker(1 - JJ_W) = \{ z \in V_\mathbb{C} : J_W z = -Jz \} = \ker B$. □

Corolario 1.31. $\dim(W \cap W_J^*) = \frac{1}{2}\mathrm{nul}(B)$.

Demostración. Esto es directo de la proposición anterior:

$$\begin{aligned}\mathrm{nul}(B) = \dim(\ker B) &= \dim((W \cap W_J^*) \oplus (W^* \cap W_J)) \\ &= \dim(W \cap W_J^*) + \dim(W^* \cap W_J) \\ &= 2\dim(W \cap W_J^*) = 2\dim(W^* \cap W_J),\end{aligned}$$

debido a que la aplicación $u_1 + Ju_2 \mapsto u_1 - Ju_2$ es un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal entre $W \cap W_J^*$ y $W^* \cap W_J$. □

Esto muestra que B es invertible en el Caso B. Para el Caso F, definimos $J_W := gJg^{-1}$ y así $B = gp_g^t$ pues

$$gp_g^t = g \cdot \tfrac{1}{2}(g^{-1} - Jg^t J) = \tfrac{1}{2}(1 - gJg^{-1}J) = \tfrac{1}{2}(1 - J_W J),$$

debido a que $g^t = g^{-1}$ por ser $g \in \mathrm{O}(V)$. Teniendo esto en cuenta y utilizando el Corolario 1.31 obtenemos que $\mathrm{nul}(gp_g^t) = \mathrm{nul}p_g^t = \mathrm{nul}p_g = \frac{1}{2}\mathrm{nul}B$.

Ahora bien, la razón por la cual se introdujo la transformada de Cayley fue para obtener las dos biyecciones

$$W \leftrightarrow J_W \leftrightarrow T_W. \tag{1.21}$$

Cabe destacar que la primera biyección no depende de la estructura compleja original, caso contrario que lo que sucede con la segunda biyección.

► En los dos casos, cada uno de los objetos en (1.21) pertenece a un espacio homogéneo bajo el grupo de simetría. A continuación, identificamos estos espacios homogéneos.

Definición 1.32. De ahora en adelante:

(a) $\mathcal{W}_+(V)$ será el conjunto de todas las polarizaciones positivas de $V_{\mathbb{C}}$, en el Caso B.

(b) $\mathcal{W}(V)$ será el conjunto de *todas* las polarizaciones de $V_{\mathbb{C}}$, en el Caso F. ◊

Definición 1.33. $\mathcal{J}_+(V)$ denotará el conjunto de las estructuras complejas positivas en el Caso B, mientras que $\mathcal{J}(V)$ denotará el conjunto de todas las estructuras complejas en el Caso F. ◊

En el Caso F, el grupo $\mathrm{O}(V)$ actúa sobre $\mathcal{J}(V)$ bajo la conjugación $g(\cdot)g^{-1}$ y en $\mathcal{W}(V)$ bajo la traslación a la izquierda. Ambas acciones son transitivas (véase [13] y [14]).

El subgrupo de isotropía de J es $\{\, g \in \mathrm{O}(V) : gJg^{-1} = J \,\} = \mathrm{U}_J(V)$. Por ende $\mathcal{J}(V)$ es difeomorfo a $\mathrm{O}(V)/\mathrm{U}_J(V)$. Como $\dim_{\mathbb{R}} V = 2m$ entonces

$$\dim(\mathrm{O}(V)/\mathrm{U}_J(V)) = \dim(\mathrm{O}(2m)/\mathrm{U}(m)).$$

Recuerde que $\mathrm{O}(2m)$ tiene dos componentes conexas y $\mathrm{U}(m)$ es conexo: ver [22]. Por eso $\mathcal{J}(V)$ es una variedad compacta con dos componentes conexos; cada uno de ellos es difeomorfo a $\mathrm{SO}(2m)/\mathrm{U}(m)$, cuya dimensión es

$$\dim(\mathrm{SO}(2m)/\mathrm{U}(m)) = \dim(\mathrm{SO}(V)) - \dim(\mathrm{U}(m)) = \frac{2m(2m-1)}{2} - m^2 = m(m-1).$$

En el Caso B, en la Proposición 2.2 de [13] se utiliza la segunda biyección para llegar a que $\mathcal{J}_+(V) \approx \mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}_J(V)$, y el grupo de isotropía de $J \in \mathcal{J}_+(V)$ es nuevamente $U_J(V)$. La variedad $\mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}_J(V)$ es conexa (pues $\mathrm{Sp}(V)$ es conexo y la aplicación cociente es continua) pero no compacto.

El conjunto de todas las aplicaciones T_g coincide con el conjunto de todas las aplicaciones T_W, el cual, en el caso B, es el conjunto

$$\mathcal{D}(V) := \{\, S \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V) : SJ = -JS,\ S^t = S,\ 1 - S^2 > 0 \,\}, \tag{1.22}$$

el cual se denomina **disco de Cartan y Siegel**. Es importante destacar que $\mathcal{D}(V)$ es una región simplemente conexa [17, Thm. 8.7.1].

Finalmente, en el Caso F esta construcción depende de que $1 + T_W$ sea no singular, o bien que T_g exista. Por esto, fijamos una estructura compleja $J \in \mathcal{J}(V)$ y definimos la variedad $\mathcal{J}_*(V) := \{\, gJg^{-1} : g \in \mathrm{SO}_*(V) \,\}$. La segunda biyección nos da en este caso que

$$\mathcal{J}_*(V) \approx \mathrm{Sk}(V) := \{\, S \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V) : SJ = -JS,\ S^t = -S \,\}, \tag{1.23}$$

que es el conjunto de todos los T_g (que coincide con el conjunto de todos los T_W).

En conclusión, tenemos tres objetos importantes: W, J_W y T_W, que se relacionan mediante dos biyecciones. En el siguiente capítulo trabajaremos con espacios de Fock, que (como veremos más adelante), se clasifican en dos tipos: espacios de Fock bosónicos y fermiónicos. Los primeros son espacios de funciones; los segundos tienen la estructura de álgebras exteriores. Los elementos de un espacio de Fock que nos interesan son llamados elementos gaussianos, que están parametrizados por operadores $T \in \mathcal{D}(V)$ en el caso bosónico y operadores $T \in \mathrm{Sk}(V)$ en el caso fermiónico.

Para terminar esta sección se demostrará un lema bastante útil.

Lema 1.34. *Si $S, T \in \mathcal{D}(V)$ y $v \neq 0$ en V, entonces $\mathfrak{R}\langle v \mid (1 - TS)v\rangle > 0$.*

Demostración. Usamos el argumento de la prueba de [22, Tma. 1.9]: para todo vector $v \in V$ se tiene que

$$\begin{aligned}
2\mathfrak{R}\langle v \mid (1 - TS)v\rangle &= \langle v \mid (1 - TS)v\rangle + \langle (1 - TS)v \mid v\rangle \\
&= \langle v \mid (1 - S^2)v\rangle + \langle (1 - T^2)v \mid v\rangle + \langle v \mid (S - T)Sv\rangle - \langle T(S - T)v \mid v\rangle \\
&= \langle v \mid (1 - S^2)v\rangle + \langle (1 - T^2)v \mid v\rangle + \langle Sv \mid (S - T)v\rangle - \langle Tv \mid (S - T)v\rangle \\
&= \langle v \mid (1 - S^2)v\rangle + \langle v \mid (1 - T^2)v\rangle + \|Sv - Tv\|^2 \geqslant 0,
\end{aligned}$$

utilizando que $(S - T)$ y T son ambas antilineales y simétricas. Como $1 - S^2$ y $1 - T^2$ son definidas positivas, el lado derecho de la igualdad es cero solamente si $v = 0$. Así, el operador lineal $1 - TS$ es invertible.

Ahora bien, suponga que $\mathfrak{R}\langle v \mid (1 - TS)v\rangle = 0$. El argumento anterior establece que

$$(1 - S^2)v = (1 - T^2)v = 0 \quad \text{y} \quad Sv = Tv.$$

Pero entonces $(1 - TS)v = (1 - T^2)v = 0$. Debido a que $1 - TS$ es no singular, esto implica que $v = 0$. □

Capítulo 2

Espacios de Fock

Antes de iniciar este capítulo, se considera pertinente dar algunas definiciones básicas. Aquí $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Definición 2.1. Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times n}$; se define el **permanente** de la matriz A como[1]

$$\operatorname{per} A := \sum_{\sigma\in S_n} \prod_{k=1}^{n} a_{k,\sigma(k)},$$

donde S_n es el grupo de permutaciones del conjunto $\{ 1, 2, \ldots, n \}$. ◊

Definición 2.2. Una función $f\colon D \subseteq \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ se dice **antiholomorfa** si su función conjugada $z \mapsto \overline{f(z)}$ es holomorfa. ◊

Definición 2.3. El **espacio de Segal y Bargmann** sobre $\mathbb{C}^m$ es el espacio de Hilbert

$$\mathcal{B}(\mathbb{C}^m) := \{ f\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C} : \|f\|_{\mathcal{B}(\mathbb{C}^m)} < \infty \},$$

donde la $\|f\|_{\mathcal{B}(\mathbb{C}^m)}$ es la *norma gaussiana* dada (en el caso $m = 1$, con $z = x + iy$) por

$$\|f\|^2_{\mathcal{B}(\mathbb{C})} := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^2}\, dx\, dy.$$

y $f\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ es una función antiholomorfa. Si $f, g \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^m)$ entonces se define el producto escalar

$$\langle f \mid g\rangle := \frac{1}{\pi^m}\int_{\mathbb{C}^m} \overline{f(z)}\, g(z) e^{-z\cdot\bar{z}}\, d^m x\, d^m y.$$ ◊

Queremos que los factores de la forma π^{-m} no aparezcan explícitamente y que el argumento de la función exponencial natural tenga un factor de $\frac{1}{2}$. Así, la **medida gaussiana** que usaremos en $\mathbb{C}^m$ será

$$d\mu_m(z) := (2\pi)^{-m} e^{-\frac{1}{2}\bar{z}\cdot z}\, d^m x\, d^m y. \tag{2.1}$$

[1] Nótese la analogía de la definición del permanente y la definición del determinante: la única diferencia es que en la definición del determinante la productoria se multiplica por la paridad de la permutación.

2.1. El espacio de Fock bosónico

En esta sección vamos a considerar el par (V, s) con una estructura compleja *fija* $J \in \mathcal{J}_+(V)$, y el espacio de Hilbert (complejo) será V_J, al cual denotaremos simplemente como V.

Además, denotaremos $V^{\otimes k} := \bigotimes_{j=1}^{k} V$, el producto tensorial de k copias de V.

Definición 2.4. Si $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$ entonces se define el **producto simétrico** como

$$u_1 \vee u_2 \vee \cdots \vee u_k := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} u_{\sigma(1)} \otimes u_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(k)} \tag{2.2}$$

dokde S_k es el grupo de permutaciones de $\{1, 2, \dots, k\}$. ◊

Con la identidad (2.2) podemos entonces definir el subespacio cerrado $V^{\vee k}$ de $V^{\otimes k}$ generado por elementos de la forma $u_1 \vee u_2 \vee \cdots \vee u_k$.

Definición 2.5. Se define el **álgebra simétrica** $\mathcal{S}(V) := \bigoplus_{k=1}^{\infty} V^{\vee k}$. ◊

Debido a que $\mathcal{S}(V)$ es un suma directa *algebraica*, es necesario introducir una compleción. Se puede definir el siguiente producto escalar sobre $\mathcal{S}(V)$:

$$\langle u_1 \vee u_2 \vee \cdots \vee u_r \mid v_1 \vee v_2 \vee \cdots \vee v_s \rangle := \delta_{rs} \ \mathrm{per}[\langle u_k \mid v_l \rangle] \tag{2.3}$$

(donde[2] $\delta_{mn} = [\![m = n]\!]$ es la delta de Kronecher), tal y como se hizo en [13]. Dicho producto escalar dota a $\mathcal{S}(V)$ de una estructura de un espacio prehilbertiano.

Definición 2.6. Para realizar la compleción de $\mathcal{S}(V)$ primero declaramos la **medida gaussiana**:

$$d\mu(u) := e^{-\frac{1}{2}\langle u|u \rangle}\, du, \quad \text{y} \quad du \equiv (2\pi)^{-m}\, d\lambda(u), \tag{2.4}$$

donde λ es la medida de Lebesgue sobre $V \simeq \mathbb{R}^{2m}$. Esto reproduce la fórmula (2.1). ◊

Consideremos el espacio de Hilbert dual V^*. Por el teorema de Riesz, los elementos de V^* son aplicaciones lineales de la forma $u \mapsto \langle v \mid u \rangle$, con $v \in V$. Así, una aplicación *antilineal* de V es de la forma $v \mapsto \langle v \mid u \rangle$, donde $v \in V$. Para simplificar los cálculos que haremos más adelante, identificamos un elemento $v \in V$ con la aplicación antilineal $u \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{2}\langle u \mid v \rangle$.

[2] Aquí utilizamos *los corchetes de Iverson*: si $P(x)$ es un predicado entonces $[\![P(x)]\!] = 1$ si $P(x)$ es verdadero y $[\![P(x)]\!] = 0$ si $P(x)$ es falso.

Vamos a identificar un elemento $v_1 \vee \cdots \vee v_r \in V^{\vee r}$ con el polinomio homogéneo

$$L : u \mapsto \frac{1}{r!\sqrt{2^r}} \langle u \vee \cdots \vee u \mid v_1 \vee \cdots \vee v_r \rangle. \tag{2.5}$$

El polinomio (2.5) es antiholomorfo al ser una suma finita de productos de funciones antilineales.

Si $B = \{e_1, \ldots, e_m\}$ es una base ortonormal de V, entonces $\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ forma una familia ortonormal de $\mathcal{S}(V)$, donde $\mathcal{A} := \{\, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) : \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{N} \,\}$ y

$$\varepsilon_\alpha := \frac{1}{\sqrt{\alpha!}}\, e_1^{\vee \alpha_1} \vee \cdots \vee e_m^{\vee \alpha_m}.$$

Aquí $\alpha! := \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_m!$ es un multifactorial y $\|\varepsilon_\alpha\| = 1$.

Lema 2.7. *Si $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ entonces*

$$\int_V \overline{\varepsilon_\alpha(u)}\, \varepsilon_\beta(u)\, du = \begin{cases} 1 & si\ \alpha = \beta, \\ 0 & si\ \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Demostración. Note primero que la normalización de la medida du en (2.4) es tal que $\int_V du = 1$.

Por definición,

$$\begin{aligned} \int_V \overline{\varepsilon_\alpha(u)}\, \varepsilon_\beta(u)\, du &= \prod_{j=1}^m \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} 2^{-(\alpha_j+\beta_j)/2} \frac{\bar{u}_j^{\alpha_j} u_j^{\beta_j}}{\sqrt{\alpha_j!\,\beta_j!}} e^{-\frac{1}{2}|u_j|^2}\, d\lambda(u_j) \\ &= \prod_{j=1}^m \frac{1}{2\pi} \frac{2^{-(\alpha_j+\beta_j)/2}}{\sqrt{\alpha_j!\beta_j!}} \iint_{\mathbb{R}^2} \bar{u}_j^{\alpha_j} u_j^{\beta_j} e^{-\frac{1}{2}|u_j|^2}\, dx_j\, dy_j \end{aligned}$$

donde $x_j := \Re u_j$ y $y_j := \Im u_j$. Entonces, utilizando coordenadas polares obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &:= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (r_j \cos\theta_j - ir_j \operatorname{sen}\theta_j)^{\alpha_j} (r_j \cos\theta_j + ir_j \operatorname{sen}\theta_j)^{\beta_j} e^{-r_j^2/2} r_j\, dr_j\, d\theta_j \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r_j^{\alpha_j+\beta_j+1} e^{-i\alpha_j\theta_j} e^{i\beta_j\theta_j} e^{-r_j^2/2}\, dr_j\, d\theta_j, \end{aligned}$$

utilizando la identidad de Euler. Así

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r_j^2/2} r_j^{\alpha_j+\beta_j+1} e^{i\theta_j(\beta_j-\alpha_j)}\, dr_j\, d\theta_j.$$

- ⋆ Si $\alpha = \beta$ entonces

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r_j^2/2} r^{2\alpha_j+1}\, d\theta_j\, dr_j = 2\pi \int_0^\infty e^{-r_j^2/2} r_j^{2\alpha_j+1}\, dr_j\,.$$

Aplicando el cambio de variable $u = r_j^2/2 \implies du = r_j\, dr_j$ obtenemos que

$$\mathcal{I} = 2\pi \int_0^\infty u^{\alpha_j} e^{-u}\, du.$$

Utilizando la definición de la función Gamma obtenemos que $\mathcal{I} = 2\pi 2^{\alpha_j}\Gamma(\alpha_j + 1) = 2\pi\, 2^{\alpha_j}\, \alpha_j!$.

- ⋆ Si $\alpha \neq \beta$ entonces

$$\int_0^{2\pi} e^{i(\beta_k - \alpha_k)\theta_k}\, d\theta_k = 0,$$

pues $\beta_k - \alpha_k \neq 0$ para al menos un índice k. Por lo que

$$\int_V \overline{\varepsilon_\alpha(u)}\, \varepsilon_\beta(u)\, du = 0 \int_0^\infty e^{-r^2/2} r^{\alpha_k+\beta_k+1}\, dr_k = 0.$$

Así, la productoria es igual a cero.

Utilizando la medida gaussiana normalizada llegamos a que

$$\int_V \overline{\varepsilon_\alpha(u)}\, \varepsilon_\beta(u)\, du = \prod_{j=1}^m \frac{2\pi}{2\pi} \frac{2^{\alpha_j}\alpha_j!}{2^{\alpha_j}\alpha_j!} = [\![\beta = \alpha]\!].$$

Por ende los polinomios ε_α son ortogonales con respecto a las integrales gaussianas. □

Definición 2.8. Se define el **espacio de Fock bosónico** (también llamado *espacio de Fock simétrico*) $\mathcal{B}(V)$ como la compleción del álgebra simétrica $\mathcal{S}(V)$ dotada con el producto escalar (2.3). ◊

El espacio $\mathcal{B}(V)$ se puede identificar como el espacio de Segal y Bargmann sobre V. Como las integrales sobre V son finitas (pues V es un espacio vectorial finitodimensional) entonces $\mathcal{B}(V)$ es un conjunto de funciones antiholomorfas enteras sobre V.

La norma de $\mathcal{B}(V)$ se obtiene naturalmente definida como

$$\|F\|^2 = \langle F \mid F \rangle = \int_V |F(u)|^2 e^{-\frac{1}{2}\langle u|u\rangle}\, du. \tag{2.6}$$

Al utilizar la desigualdad de Schwarz se obtiene el siguiente resultado, debido a Bargmann [3].

Proposición 2.9. *Las aplicaciones $u \mapsto F(u)$ satisfacen la desigualdad*

$$|F(u)|^2 \leqslant \|F\|^2 e^{\frac{1}{2}\langle u|u\rangle}. \tag{2.7}$$

Proposición 2.10. *El espacio de Fock bosónico $\mathcal{B}(V)$ está conformado por todos las aplicaciones $u \mapsto F(u)$, donde $F := \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} c_\alpha\, \varepsilon_\alpha$, que satisfacen la identidad*

$$\int_V |F(u)|^2 e^{-\frac{1}{2}\langle u|u\rangle}\, du = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |c_\alpha|^2.$$

Demostración. Considere la aplicación $u \mapsto F(u) := \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} c_\alpha\, \varepsilon_\alpha(u)$. De (2.6) tenemos que $\|F\|^2 < \infty$ al menos cuando la suma al lado derecho es finita. Ahora bien, utilizando la identidad de Parseval, como

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |c_\alpha|^2 = \int_V |F(u)|^2 e^{-\frac{1}{2}\langle u|u\rangle} < \infty,$$

entonces $\sum_\alpha c_\alpha\, \varepsilon_\alpha$ es convergente en el espacio de Hilbert $\mathcal{B}(V)$.

Por otro lado, si $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones antiholomorfas que converge a F en norma, invocando la propiedad (2.7), la sucesión converge también uniformemente sobre conjuntos compactos – ver [3]. Por lo tanto, F misma es una función antiholomorfa.

Esto viene directamente del resultado análogo para funciones holomorfas (invocando el teorema de Morera) y el hecho de que $\bar{z}_n \longrightarrow \bar{z}$ para $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tal que $z_n \longrightarrow z$. □

2.2. Elementos gaussianos bosónicos

Para esta sección es necesario calcular integrales gaussianas. Recuerde que la *integral de Euler y Poisson* es

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}. \tag{2.8}$$

Lema 2.11. (a) *Si $a \in \mathbb{R}^+ := (0, +\infty)$ entonces*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2+2bt}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{b^2/a}. \tag{2.9a}$$

(b) *Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es definida positiva y si $b \in \mathbb{R}^n$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x\cdot Ax+2b\cdot x}\, d^n x = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}\, e^{b\cdot A^{-1}b}. \tag{2.9b}$$

(c) *Si $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$es una matriz simétrica cuya parte real $\Re B$ es definida positiva y si $c \in \mathbb{C}^m$, entonces*

$$\int_{\mathbb{C}^m} e^{-\bar{z}\cdot Bz+2\bar{c}\cdot z}\, d\lambda(z) = \frac{\pi^m}{\sqrt{\det B}}\, e^{c\cdot B^{-1}c}. \tag{2.9c}$$

Demostración. Ad(a): Utilizando la sustitución $s = \sqrt{a}\big(x - \frac{b}{a}\big) \mapsto ds = \sqrt{a}\, dx$ se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2+2bt}\, dt = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{b^2/a} \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2}\, ds = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{b^2/a}$$

al usar la fórmula (2.8).

Ad(b): Como A es definida positiva, entonces

$$A = P^{-1}DP,$$

donde $D := \operatorname{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ en la cual cada $\lambda_i > 0$ es un valor propio de A. Se puede suponer que P es una matriz ortogonal [9, Thm. 9.7], y entonces $A = P^t DP$ y $\det P = \pm 1$. Realizando el cambio de variable $y = Px$, obtenemos que $d^n x = d^n y$, de donde

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x\cdot Ax}\, d^n x = \int_{\mathbb{R}} e^{-y\cdot Dy}\, d^n y = \int_{\mathbb{R}} \exp\big(-\textstyle\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2\big)\, d^n y = \displaystyle\prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_j y_j^2}\, dy_j.$$

Utilizando la parte (a) y la sustitución $d = Pb$, se llega a que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x\cdot Ax+2b\cdot x}\, d^n x &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-y\cdot Dy+2Pb\cdot y}\, d^n y \\
&= \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_j y_j^2+2d_j y_j}\, dy_j = \prod_{j=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_j}}\, e^{d_j^2/\lambda_j} \\
&= \sqrt{\frac{\pi^n}{\lambda_1 \cdots \lambda_n}}\, \exp(b\cdot P^t \operatorname{diag}[1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n]Pb) \\
&= \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}\, \exp(b\cdot P^{-1}D^{-1}Pb) = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}\, e^{b\cdot A^{-1}b}.
\end{aligned}$$

Ad(c): Utilizando el isomorfismo $\mathbb{C}^m \simeq \mathbb{R}^{2m}$ y la parte (b), obtenemos, en el caso de que B es real (y por hipótesis definida positiva), que

$$\int_{\mathbb{C}^m} e^{-\bar{z}\cdot Bz+2\bar{c}\cdot z}\, d\lambda(z) = \int_{\mathbb{R}^{2m}} e^{-\bar{z}\cdot Bz+2\bar{c}\cdot z}\, d\lambda(z) = \sqrt{\frac{\pi^{2m}}{\det_{\mathbb{R}} B}}\, e^{c\cdot B^{-1}c} = \frac{\pi^m}{\det_{\mathbb{C}} B}\, e^{c\cdot B^{-1}c},$$

pues los m valores propios de B son reales positivos.

El resultado se sigue utilizando continuación analítica: la matriz B es una matriz simétrica y además $\Re B > 0$, pues el semiplano superior complejo es simplemente conexo. (ver el Apéndice A de [11]). □

Ahora se introducirán dos definiciones cuya importancia se verá más adelante.

Definición 2.12. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones continuas sobre X, con norma $\| - \|_{\mathcal{H}}$. Si $\varepsilon_x : f \mapsto f(x)$, para todo $f \in \mathcal{H}$, es la aplicación de evaluación, se dice que $\mathcal{H}$ es un **espacio de Hilbert con núcleo reproductor** si ε_x es un operador acotado en $\mathcal{H}$: esto es, si existe $M > 0$ tal que

$$|\varepsilon_x(f)| = |f(x)| \leqslant M\|f\|_{\mathcal{H}} \quad \text{para todo} \quad f \in \mathcal{H}. \qquad \Diamond$$

Definición 2.13. Se dice que una función $k\colon X \times X \to \mathbb{C}$ es **de tipo positivo** si para toda parte finita $\{x_1, \dots, x_l\} \subseteq X$ se cumple

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} \overline{c_i} c_j k(x_i, x_j) \geqslant 0 \quad \text{para todo} \quad c_1, c_2, \dots, c_l \in \mathbb{C}. \qquad \Diamond$$

La siguiente proposición se le atribuye a E. H. Moore.

Proposición 2.14. *Para cada función K de tipo positivo, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ para el cual K es un núcleo reproductor. Más aún, las aplicaciones $y \mapsto K(x, y)$ generan un subespacio denso de $\mathcal{H}$.*

Demostración. Véase [2, p. 344]. □

Bargmann encontró un núcleo reproductor para el espacio $\mathcal{B}(\mathbb{C})$, el cual es

$$K(w, z) = e^{\bar{w} \cdot z}.$$

Teniendo esto en mente, podemos generalizar esta idea para $\mathcal{B}(V)$.

Considere la función antiholomorfa $E_v(u) := e^{\frac{1}{2}\langle u|v\rangle}$. Note que

$$\|E_v\|^2 = \int_V \overline{E_v(u)}\, E_v(u)\, d\mu(u) = \int_V e^{\frac{1}{2}\langle v|u\rangle} e^{\frac{1}{2}\langle u|v\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle u|u\rangle}\, du$$

Por (1.3) se llega a que

$$\int_V e^{d(u,v)}\, e^{-\frac{1}{2}\langle u|u\rangle}\, du = \int_V e^{d(u,v)}\, e^{-\frac{1}{2}\langle u|u\rangle}\, du = (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^{2m}} e^{d(u,v)}\, e^{-\frac{1}{2}d(u,u)}\, d\lambda(u),$$

por la definición de du.

Ahora, aplicamos el inciso (b) del Lema 2.11 con $A = \frac{1}{2}\, 1_{2m}$ y $\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}v$ y llegamos a que

$$\|E_v\|^2 = (2\pi)^{-m}\pi^m 2^m e^{\frac{1}{2}d(u,u)} = e^{\frac{1}{2}\langle u|u\rangle} < \infty. \tag{2.10}$$

Si $F := \varepsilon_\alpha$ es un monomio entonces

$$\langle E_v \mid E_w \rangle = e^{\frac{1}{2}\langle v|w \rangle} \quad \text{y} \quad \langle E_v \mid F \rangle = F(v). \tag{2.11}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\langle E_v \mid E_w \rangle &:= \int_V e^{\frac{1}{2}(\langle v|u\rangle + \langle u|w\rangle - \langle u|u\rangle)}\, du \\ &= \int_V e^{\frac{1}{2}(d(v,u)+is(v,u)+d(u,w)+is(u,w)-d(u,u))}\, du\end{aligned}$$

Aplicando la simetría y la antisimetría de las formas bilineales d y s, respectivamente, se obtiene que

$$\begin{aligned}\langle E_v \mid E_w \rangle &= \int_V e^{\frac{1}{2}(d(u,v+w)+is(u,w-v)-d(u,u))} du \\ &= \int_V e^{\frac{1}{2}(d(u,v+w)+is(u,w-v))} e^{-\frac{1}{2}d(u,u)}\, du.\end{aligned}$$

Aplicando la relación (1.3) con $s(u,v) = d(Ju,u) = -d(u,Ju)$ obtenemos que la integral equivale a

$$\int_V e^{\frac{1}{2}d(u,v+w+iJw-iJv)} e^{-\frac{1}{2}d(u,u)}\, du = (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{C}^m} e^{\frac{1}{2}d(u,y)} e^{-\frac{1}{2}d(u,u)}\, d\lambda(u),$$

donde $y = v + w + iJw - iJv$. Aplicando el Lema 2.11(c) con $B = -\frac{1}{2}1_{2m}$ y $c = \frac{1}{4}\bar{y}$ se obtiene que

$$\begin{aligned}\langle E_v \mid E_w \rangle &= (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{C}^m} e^{\frac{1}{2}d(u,y)} e^{-\frac{1}{2}d(u,u)}\, d\lambda(u) \\ &= (2\pi)^{-m}(2\pi)^m e^{c\cdot B^{-1}c} = e^{2d(\frac{1}{4}\bar{y},\frac{1}{4}\bar{y})} = e^{\frac{1}{8}d(\bar{y},\bar{y})}.\end{aligned}$$

Ahora bien, note que (poniendo $\boldsymbol{a} = v + w$ y $\boldsymbol{b} = iJ(v-w) = iJv - iJw$ para simplificar un poco los cálculos):

$$d(\bar{y},\bar{y}) = d(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) + 2d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + d(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}).$$

Vamos a expandir cada sumando por aparte:

$$\begin{aligned}d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) &= d(v+w, v+w) = d(v,v) + 2d(v,w) + d(w,w); \\ d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) &= d(v+w, iJv - iJw) \\ &= id(v,Jv) - id(v,Jw) + id(w,Jv) - id(w,Jw) \\ &= is(v,v) - is(v,w) + is(w,v) - is(w,w) = 2is(w,v); \\ d(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) &= d(iJv - iJw, iJv - iJw) \\ &= d(iJv,iJv) - 2d(iJv,iJw) + d(iJw,iJw) \\ &= -d(v,v) + 2d(v,w) - d(w,w).\end{aligned}$$

Sumando las tres expresiones obtenemos que

$$d(\bar{y}, \bar{y}) = 4d(v, w) + 4is(v, w) = 4\langle v \mid w\rangle,$$

y por ende

$$\langle E_v \mid E_w\rangle = e^{\frac{1}{8}(4\langle v|w\rangle)} = e^{\frac{1}{2}\langle v|w\rangle}.$$

Ahora bien, se demuestra la segunda igualdad de (2.11) como sigue:

$$\begin{aligned}\langle E_v \mid F\rangle = \langle E_v \mid \varepsilon_\alpha\rangle &:= \int_V e^{\frac{1}{2}\langle v|u\rangle}\varepsilon_\alpha(u)\, e^{-\frac{1}{2}\langle u|u\rangle}\, du \\ &= \prod_{j=1}^m \frac{2^{-\alpha_j/2}}{2\pi\sqrt{\alpha_j!}} \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{1}{2}\bar{v}_j u_j} u_j^{\alpha_j} e^{-\frac{1}{2}|u_j|^2}\, d\Re u_j\, d\Im u_j \\ &= \prod_{j=1}^m \frac{\bar{v}_j^{\alpha_j}}{\sqrt{2^{\alpha_j}\cdot \alpha_j!}} = \varepsilon_\alpha(v) = F(v),\end{aligned}$$

análogamente a la prueba del Lema 2.7. Esto nos dice que $E_v \in \mathcal{B}(V)$. Un cálculo, dado en [13], muestra que cualquier polinomio simétrico $v_1 \vee \cdots \vee v_n$ se puede aproximar por combinaciones lineales de aplicaciones del tipo E_v. Por lo que el subespacio cerrado generado por las funciones E_v es $\mathcal{B}(V)$.

La siguiente proposición se debe a Robinson y Rawnsley [22].

Proposición 2.15. *Si A un operador acotado en $\mathcal{B}(V)$ entonces existe una función (de tipo positivo) $K_A(u, v)$ en $V^2 = V \times V$, antiholomorfa en u y holomorfa en v, tal que para todo $F \in \mathcal{B}(V)$ se cumple*

$$AF(u) = \int K_A(u, v)F(v)\, d\mu(v) \equiv \int K_A(u, v)F(v)\, e^{\frac{1}{2}\langle v|v\rangle}\, dv.$$

Demostración. Como $A \in \mathcal{L}(\mathcal{B}(V))$ es acotado entonces A posee un operador adjunto $A^\dagger \in \mathcal{L}(\mathcal{B}(V))$ tal que $\langle A^\dagger G \mid F\rangle = \langle G \mid AF\rangle$, con $F, G \in \mathcal{B}(V)$. Por ende,

$$\begin{aligned}AF(u) = \langle E_u \mid AF\rangle &= \langle A^\dagger E_u \mid F\rangle \\ &= \int_V \overline{A^\dagger E_u(v)}\, F(v)\, e^{-\frac{1}{2}\langle v|v\rangle}\, dv \\ &= \int_V \overline{\langle E_v \mid A^\dagger E_u\rangle}\, F(v)\, e^{-\frac{1}{2}\langle v|v\rangle}\, dv \\ &= \int_V \langle A^\dagger E_u \mid E_v\rangle\, F(v)\, e^{-\frac{1}{2}\langle v|v\rangle}\, dv \\ &= \int_V \langle E_u \mid AE_v\rangle\, F(v)\, e^{-\frac{1}{2}\langle v|v\rangle}\, dv.\end{aligned}$$

Al definir $K_A(u,v) := \langle E_u \mid AE_v\rangle = AE_v(u)$, entonces $K_A(u,v)$ es antiholomorfa en u. Más aún, su conjugado es

$$\overline{K_A(u,v)} = \langle AE_v \mid E_u\rangle = \langle E_v \mid A^\dagger E_u\rangle = A^\dagger E_v(u) =: K_{A^\dagger}(v,u),$$

que es antiholomorfa en v, por lo que $K_A(u,v)$ es holomorfa en v. □

A la función $K_A(u,v)$ se le denomina como el **núcleo integral** de A.

Es importante destacar la siguiente fórmula denominada *núcleo de Mehler*, introducido por Gustav Mehler [20].

$$\sum_{|\alpha|\geqslant 0} z^{|\alpha|} h_\alpha(x) h_\alpha(y) = \left(\frac{2}{1-z^2}\right)^{n/2} \exp\left(\frac{4xyz - 4\pi(x^2+y^2)(1+z^2)}{1-z^2}\right),$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < 1$ y

$$h_\alpha(t) = \frac{2^{n/4}}{\sqrt{\alpha!}} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^{|\alpha|} e^{\pi x^2} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\alpha} e^{-2\pi(x-z)^2}\bigg|_{z=0}.$$

Ver las páginas 54 y 55 de [11]. Este núcleo es una generalización de los núcleos integrales con los cuales se trabajará más adelante.

Ahora bien, si $T \in \mathcal{D}(V)$ entonces T es un operador antilineal sobre V. Nótese que la aplicación cuadrática $u \mapsto \frac{1}{4}\langle u \mid Tu\rangle$ es antiholomorfa. En efecto, si $\alpha \in \mathbb{C}$ entonces

$$u \mapsto \langle \alpha u \mid T(\alpha u)\rangle = \tfrac{1}{4}\langle \alpha u \mid \alpha T u\rangle = \frac{\bar{\alpha}^2}{4}\langle u \mid Tu\rangle.$$

Utilizando esta última expresión, podemos obtener la función antiholomorfa

$$f_T(u) := \exp\left(\tfrac{1}{4}\langle u \mid Tu\rangle\right). \tag{2.12}$$

Si $\|f_T\| < \infty$ entonces $f_T \in \mathcal{B}(V)$, i.e., f_T es un elemento gaussiano bosónico.

El objetivo ahora es calcular $\|f_T\|$, y para ello vamos a considerar el operador $T^2 \in \mathcal{D}(V)$ como un operador $\mathbb{C}$-lineal sobre V_J. Como $0 \leqslant 1 - T^2 \leqslant 1$ (por la Proposición 1.13) entonces $0 \leqslant T^2 \leqslant 1$, pues $T^2 = 1 - (1 - T^2)$. Sean λ_k^2 con $k = 1, \ldots, m$ los valores propios de T^2. Dichos valores propios satisfacen

$$0 \leqslant \lambda_k^2 < 1 \iff 0 \leqslant |\lambda_k| < 1.$$

Como estamos trabajando en un espacio de Hilbert finitodimensional entonces, si v_k es un vector propio asociado a λ_k^2, el conjunto $\{\, v_k : k = 1, \ldots, m \,\}$ es una base *ortonormal* de V_J y T^2 es diagonalizable por ser simétrica y real, y por ende autoadjunto sobre V_J.

Ahora bien, si consideramos $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ entonces T^2 es un operador simétrico sobre el espacio euclidiano V de dimensión $2m$ (nuevamente por la Proposición 1.13). Así, T^2 es diagonalizable con $\lambda_k^2 \in \mathbb{R}$. Notando que

$$T^2(Jv_k) = J(T^2 v_k) = J(\lambda_k^2 v_k) = \lambda_k^2 J v_k,$$

se concluye que $\{ Jv_k : k = 1, \ldots, m \}$ es también un conjunto de vectores propios de T^2 (asociados a λ_k^2) y como

$$d(Jv_k, v_l) = s(v_k, v_l) = \mathfrak{I}(\langle v_k \mid v_l \rangle) = 0, \tag{2.13}$$

entonces $\{v_1, \ldots, v_m\} \uplus \{Jv_1, \ldots, Jv_m\}$ es una base para $V = (V, d_J)$. Si consideramos los $\mathbb{R}$-subespacios $U_k := \mathrm{gen}\{v_k, Jv_k\}$ para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$, entonces cada U_k reduce T y se verifica

$$Tv_k = a_k v_k + b_k J v_k \implies T(Jv_k) = -J(Tv_k) = b_k v_k - a_k J v_k,$$

lo que implica

$$T^2 v_k = a_k T v_k + b_k T J v_k = (a_k^2 + b_k^2) v_k = \lambda_k^2 v_k\,. \tag{2.14}$$

de donde $a_k = \lambda_k \operatorname{sen}\theta_k$, $b_k = \lambda_k \cos\theta_k$, con $\lambda_k \in \mathbb{R}$ y $\theta_k \in [0, 2\pi)$ para todo k. Por lo tanto, una representación matricial de T sobre cada U_k corresponde a

$$\begin{bmatrix} a_k & b_k \\ b_k & -a_k \end{bmatrix} = \lambda_k \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta_k & \cos\theta_k \\ \cos\theta_k & -\operatorname{sen}\theta_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

la cual es una matriz simétrica, naturalmente.

Proposición 2.16. *Si $e_k := \cos(\frac{1}{2}\theta_k) v_k - \operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta_k) J v_k$ para cada $k = 1, 2, \ldots, m$, entonces $\{e_1, \ldots, e_m\}$ es otra base ortonormal para V_J. Más aún, se satisfacen las relaciones:*

$$T^2 e_k = \lambda_k^2 e_k, \quad T e_k = \lambda_k J e_k, \quad T J e_k = \lambda_k e_k. \tag{2.15}$$

Demostración. Sea $u_k := Jv_k$. Primeramente vea que si $c_1, \ldots, c_m$ son escalares, entonces

$$\sum_{l=1}^{m} c_l e_l = c_1 \cos(\tfrac{1}{2}\theta_k) v_k - c_1 \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\theta_k) u_k + \cdots + c_m \cos(\tfrac{1}{2}\theta_k) v_k - c_m \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\theta_k) u_k,$$

como $\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta_k), \cos(\frac{1}{2}\theta_k) \in \mathbb{R}$ entonces la independencia lineal y la generación de V_J por los e_k resulta porque $\{e_k, Je_k\}_{k=1}^m$ es una base $\mathbb{R}$-lineal de V_J.

Por otro lado, sean $k, l \in \{1, \dots, m\}$ con $k \neq l$, y si $\mu_k = \cos(\frac{1}{2}\theta_k)$ y $\xi_k = \operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta_k)$, entonces

$$\begin{aligned}\langle e_k \mid e_l \rangle &= \langle \cos(\tfrac{1}{2}\theta_k)v_k - \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\theta_k)Jv_k \mid \cos(\tfrac{1}{2}\theta_k)v_l - \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\theta_k)Jv_l \rangle \\ &= \mu_k\mu_l\langle v_k \mid v_l \rangle - \xi_k\mu_l\langle v_k \mid Jv_l \rangle - \mu_k\xi_l\langle Jv_k \mid v_l \rangle + \xi_k\xi_l\langle Jv_k \mid Jv_l \rangle \\ &= \mu_k\mu_l(0) - \xi_k\mu_l(0) - \mu_k\xi_l(0) + \xi_k\xi_l(0) = 0,\end{aligned}$$

debido a ortogonalidad de la base $\{e_k, Je_k\}_{k=1}^m$. Por último, vea que

$$\langle e_k \mid e_k \rangle = \mu_k^2\langle v_k \mid v_k \rangle - \xi_k\mu_k\langle v_k \mid Jv_k \rangle - \mu_k\xi_k\langle Jv_k \mid v_k \rangle + \xi_k^2\langle Jv_k \mid Jv_k \rangle = \mu_k^2 + \xi_k^2 = 1,$$

usando (2.13) y $s(Je_k, e_k) = 0$. Entonces $\|e_k\| = \sqrt{\langle e_k \mid e_k \rangle} = 1$.

Ahora bien, vea que

$$T^2e_k = \cos(\tfrac{1}{2}\theta_k)T^2v_k - \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\theta_k)T^2Jv_k = \big(\cos(\tfrac{1}{2}\theta_k)v_k - \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\theta_k)Jv_k\big)\lambda_k^2 = \lambda_k^2e_k.$$

También

$$\begin{aligned}Te_k &= T(\cos(\tfrac{1}{2}\theta_k)v_k - \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\theta_k)Jv_k) \\ &= \cos(\tfrac{1}{2}\theta_k)Tv_k - \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\theta_k)JTJv_k \\ &= \lambda_kJ(\cos(\tfrac{1}{2}\theta_k)v_k - \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\theta_k)Jv_k) = \lambda_kJe_k,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}TJe_k &= TJ(\cos(\tfrac{1}{2}\theta_k)v_k - \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\theta_k)Jv_k) \\ &= T(\cos(\tfrac{1}{2}\theta_k)Jv_k + \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\theta_k)v_k) \\ &= -\cos(\tfrac{1}{2}\theta_k)JTv_k + \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\theta_k)Tv_k \\ &= \lambda_k\cos(\tfrac{1}{2}\theta_k)(\cos\theta_k - J\operatorname{sen}\theta_k)v_k + \lambda_k\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\theta_k)(\operatorname{sen}\theta_k + J\cos\theta_k)v_k \\ &= \lambda_k\big(\cos(\tfrac{1}{2}\theta_k)v_k - \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\theta_k)Jv_k\big) = \lambda_ke_k.\end{aligned}$$

En todas las igualdades se invocó (2.14) y en las últimas dos también se utilizó la Proposición 1.13. □

Lo anterior nos indica que

$$T(e_k \pm Je_k) = \pm\lambda_k(e_k \pm Je_k),$$

así el operador $\mathbb{R}$-lineal T posee $n = 2m$ valores propios reales $\pm\lambda_k$ y T^2 tiene como valores propios a los λ_k^2. Por ende,

$$\det\nolimits_{\mathbb{C}}(1 - T^2) = \prod_{k=1}^m(1 - \lambda_k^2) > 0 \quad \text{y} \quad \det\nolimits_{\mathbb{R}}(1 - T^2) = \prod_{k=1}^m(1 - \lambda_k^2)^2. \tag{2.16}$$

Otra manera de describir $\det_{\mathbb{C}}(1 - T^2)$ se obtiene al ampliar $1 - T^2$ a $V_{\mathbb{C}}$.

Lema 2.17. *Como* $P_J = \frac{1}{2}(1 - iJ)$ *y* $P_{-J} = \frac{1}{2}(1 + iJ)$*, resulta que*

$$\langle\!\langle P_J v \mid P_J u \rangle\!\rangle = \langle v \mid u \rangle \quad y \quad \langle\!\langle P_{-J} v \mid P_{-J} u \rangle\!\rangle = \langle u \mid v \rangle.$$

Demostración. Por definición,

$$\begin{aligned}
\langle\!\langle P_J v \mid P_J u \rangle\!\rangle &= \langle\!\langle \tfrac{1}{2}(1 - iJ)v \mid \tfrac{1}{2}(1 - iJ)u \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \tfrac{1}{2}v - \tfrac{i}{2}Jv \mid \tfrac{1}{2}u - \tfrac{i}{2}Ju \rangle\!\rangle \\
&= \tfrac{1}{4}\langle\!\langle v \mid u \rangle\!\rangle - \tfrac{i}{4}\langle\!\langle v \mid Ju \rangle\!\rangle + \tfrac{i}{4}\langle\!\langle Jv \mid u \rangle\!\rangle + \tfrac{1}{4}\langle\!\langle Jv \mid Ju \rangle\!\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}\big(2d(v,u) - 2s(Jv,u)\big) \\
&= d(v,u) + is(v,u) = \langle v \mid u \rangle.
\end{aligned}$$

Análogamente se prueba que $\langle\!\langle P_{-J} v \mid P_{-J} u \rangle\!\rangle = \langle u \mid v \rangle$. □

Aplicando el Lema 2.17, llegamos a que

$$\det_{\mathbb{C}}(1 - T^2) = \prod_{k=1}^{m}(1 - \lambda_k^2) = \det(P_J(1 - T^2)P_J), \tag{2.17}$$

donde el miembro derecho de la igualdad anterior es el determinante (ordinario) de un operador $S \in \mathrm{End}(W_J)$.

Ahora bien, sea T un operador fijo y sea $\mathcal{B} := \{e_1, \dots, e_m\}$ una base de V que satisface las relaciones de la Proposición 2.14. Para cada $u \in V$, defínase $\alpha_k := \langle e_k \mid u \rangle \in \mathbb{C}$. Note que $\bar{\alpha}_k = \overline{\langle e_k \mid u \rangle} = \langle u \mid e_k \rangle$ y además

$$\begin{aligned}
\langle Te_k \mid u \rangle &= \langle \lambda_k J e_k \mid u \rangle = -i\lambda_k \langle e_k \mid u \rangle = -i\lambda_k \alpha_k, \\
\langle u \mid Te_k \rangle &= \overline{\langle Te_k \mid u \rangle} = +i\lambda_k \bar{\alpha}_k,
\end{aligned}$$

pues cada $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Invocando las Proposiciones 1.3 y 1.13 se llega a que $\langle Te_k | u \rangle = \langle Tu | e_k \rangle$. Por [32, Tma. 1.34(c)] obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle u \mid Tu \rangle + \langle Tu \mid u \rangle &= \sum_{k=1}^{m} \langle u \mid e_k \rangle \langle e_k \mid Tu \rangle + \langle Tu \mid e_k \rangle \langle e_k \mid u \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{m} \langle u \mid e_k \rangle \langle u \mid Te_k \rangle + \langle Te_k \mid u \rangle \langle e_k \mid u \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{m} i\lambda_k(\bar{\alpha}_k^2 - \alpha_k^2).
\end{aligned}$$

Nótese que $\bar{\alpha}_k^2 - \alpha_k^2 \in i\mathbb{R}$, por lo que $i\lambda_k(\bar{\alpha}_k^2 - \alpha_k^2) \in \mathbb{R}$ para todo $k = 1, \dots, m$.

Finalmente, utilizando la medida gaussiana $d\mu(u)$ en V, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\|f_T\|^2 &= \int_V |f_T(u)|^2 e^{-\frac{1}{2}\langle u|u\rangle}\,du \\
&= \int_V \exp\big(\tfrac{1}{4}\langle u \mid Tu\rangle + \tfrac{1}{4}\langle Tu \mid u\rangle - \tfrac{1}{2}\langle u \mid u\rangle\big)\,du \\
&= \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \exp\big(\tfrac{1}{4}i\lambda_k(\bar{\alpha}_k^2 - \alpha_k^2) - \tfrac{1}{2}\bar{\alpha}_k\alpha_k\big)\,d\lambda(\alpha_k) \\
&= \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \exp\big(\tfrac{1}{4}i\lambda_k(\bar{\alpha}_k^2 - \alpha_k^2)\big)e^{-\frac{1}{2}\bar{\alpha}_k\alpha_k}\,d\Re\alpha_k\,d\Im\alpha_k \\
&= \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x_k^2 - 2\lambda_k x_k y_k + y_k^2)}\,dx_k\,dy_k.
\end{aligned}$$

Note que el argumento de la función exponencial es la forma cuadrática

$$q(x_k, y_k) := \begin{bmatrix} x_k & y_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\lambda_k \\ -\lambda_k & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}.$$

Si $\boldsymbol{x} = \left[\begin{smallmatrix} x_k \\ y_k \end{smallmatrix}\right]$ entonces, utilizando el Lema 2.11(b) con $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -\lambda_k \\ -\lambda_k & 1 \end{smallmatrix}\right]$ y $\boldsymbol{b} = 0$, se concluye que

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x}}\,d\boldsymbol{x} = \frac{2\pi}{\sqrt{\det A}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\lambda_k^2}},$$

por lo que

$$\|f_T\|^2 = \prod_{k=1}^{m}(2\pi)^{-1}(2\pi)\frac{1}{\sqrt{1-\lambda_k^2}} = \prod_{k=1}^{m}(1-\lambda_k^2)^{-1/2} = \det{}^{-1/2}(1-T^2). \tag{2.18}$$

El siguiente objetivo es calcular $\langle f_S \mid f_T\rangle$, para $S, T \in \mathcal{D}(V)$. Como

$$\|f_T\|^2 = \langle f_T \mid f_T\rangle = \det{}^{-1/2}(1-T^2),$$

entonces se puede conjeturar que $\langle f_S | f_T\rangle = \det^{-1/2}(1-TS)$ o bien $\langle f_S | f_T\rangle = \det^{-1/2}(1-ST)$. Siguiendo [13], trabajaremos con la primera igualdad.

Sea $\{u_1, \ldots, u_m\}$ una base ortonormal de V. En dicha base el elemento (j,k) de la matriz asociada a $1 - TS$ es

$$\langle u_j \mid u_k\rangle - \langle u_j \mid TSu_k\rangle = \langle u_j \mid u_k\rangle - \langle Su_k \mid Tu_j\rangle,$$

donde la segunda igualdad se sigue de la antilinealidad de T. Por ende,

$$\det(1-TS) = \det[\langle u_j \mid u_k\rangle - \langle Su_k \mid Tu_j\rangle]. \tag{2.19}$$

Lema 2.18. *Si* $S, T \in \mathcal{D}(V)$*, entonces*

$$\det{}^{-1/2}(1 - TS) = \det{}^{-1/2}[\langle u_j \mid u_k\rangle - \langle u_j \mid TSu_k\rangle]. \tag{2.20}$$

Demostración. Lo único que falta es aplicar el recíproco a ambos miembros de la igualdad (2.19) y sacar sus raíces cuadradas. Para solventar la ambigüedad entre las dos raíces cuadradas complejas, note que para $S = T$, el operador lineal $1 - T^2$ es definido positivo. Aplicando el Lema 1.34 se concluye que ambos lados de la igualdad (2.19) pertenecen al semiplano derecho $\{ z \in \mathbb{C} : \Re z > 0 \}$. Así, la raíz cuadrada positiva del caso "diagonal" $S = T$ se extiende por continuidad *de manera única* a una raíz cuadrada bien definida, en ambos lados de (2.19). □

Por otro lado, por definición

$$\begin{aligned}\langle f_S \mid f_T\rangle &:= \int_V f_T(u)\overline{f_S(u)}e^{-\frac{1}{2}\langle u|u\rangle}\, du \\ &= \int_V \exp\big[\tfrac{1}{4}(\langle u \mid Tu\rangle + \langle Su \mid u\rangle)\big]e^{-\frac{1}{2}\langle u|u\rangle}\, du.\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz para integrales obtenemos que

$$\begin{aligned}\left|\int_V f_T(u)\,\overline{f_S(u)}\,d\mu(u)\right|^2 &\leqslant \int_V |f_T(u)|^2\,d\mu(u)\int_V |f_S(u)|^2\,d\mu(u) \\ &= \det{}^{-1/2}(1 - T^2)\,\det{}^{-1/2}(1 - S^2) < \infty\end{aligned}$$

por lo que la integral es convergente.

Finalmente, considere la expresión

$$\int_V \exp\big[\tfrac{1}{4}(\langle u \mid Tu\rangle + \langle Su \mid u\rangle)\big]e^{-\frac{1}{2}\langle u|u\rangle}\, du = \det{}^{-1/2}(1 - TS).$$

Si $T = S$ ya se sabe que la igualdad se cumple, y como $\mathcal{D}(V)$ – y por ende $\mathcal{D}(V) \times \mathcal{D}(V)$ – son simplemente conexos, entonces como las funciones son sesquiholomorfas en las variables (S, T), la igualdad en la diagonal $S = T$ se extiende por continuación analítica a todo $\mathcal{D}(V) \times \mathcal{D}(V)$. Por lo que se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 2.19. *Si* $S, T \in \mathcal{D}(V)$ *entonces sus elementos gaussianos respectivos* f_S *y* f_T *satisfacen*

$$\langle f_S \mid f_T\rangle = \det{}^{-1/2}(1 - TS). \tag{2.21}$$

2.3. El espacio de Fock fermiónico

En esta sección el se considera el par (V, d) con $J \in \mathcal{J}(V)$ una estructura compleja *fija*. Similarmente al espacio de Fock bosónico, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.20. Si $u_1, u_2, \ldots, u_k \in V$, se define su **producto alternante** como

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_k := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma u_{\sigma(1)} \otimes u_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(k)} \tag{2.22}$$

donde $(-1)^\sigma$ es el signo de la permutación σ. ◊

Con la identidad (2.22), se puede definir el subespacio cerrado $V^{\wedge k}$ de $V^{\otimes k}$ conformado por sumas finitas de los elementos de la forma $u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$.

Definición 2.21. Se define el álgebra exterior $\Lambda(V) := \bigoplus_{k=0}^{m} V^{\wedge k}$. ◊

El producto escalar sobre $\Lambda(V)$ está dado por

$$\langle u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_r \mid v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_s \rangle := \delta_{rs} \det[\langle u_k \mid v_l \rangle]. \tag{2.23}$$

Para mayor detalle, véase [14].

Definición 2.22. Se define el **espacio de Fock fermiónico** (también llamado *espacio de Fock antisimétrico*) $\mathcal{F}(V)$ como el espacio $\mathbb{C}$-vectorial $\Lambda(V)$ dotado con el producto escalar (2.23). ◊

Si tomamos como convención $V^{\wedge 0} := \mathbb{C}\,\Omega$, donde Ω es un vector unitario fijo, entonces $\dim_{\mathbb{C}} V^{\wedge 0} = 1$ y también $V^{\wedge m} := \Lambda^m V$ satisface que $\dim_{\mathbb{C}} V^{\wedge m} = 1$.

Sea $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ una base ortonormal de V, entonces existe una base $\{\varepsilon_K\}$ de $\mathcal{F}(V)$ dada por $\varepsilon_K := e_{k_1} \wedge e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_{k_r}$, donde $K = \{ k_1, k_2, \ldots, k_r \}$ es una parte de $\{ 1, 2, \ldots, m \}$, listada en orden creciente; esto es, $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$; y se pone $\varepsilon_\emptyset := \Omega$ por convención.

Definición 2.23. Un **bivector** es un elemento de $\Lambda^2(V)$: una suma finita de elementos de tipo $v_1 \wedge v_2$. Más generalmente, un r**-vector** es un elemento de $\Lambda^r(V)$: una suma finita de elementos de tipo $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_r$. ◊

Como los r-vectores son elementos de $\Lambda(V)$, dichos elementos conmutan o anticonmutan según la *regla de signos* de Koszul.[3] Por ende, los multivectores de grados pares (en

[3]Esa regla de signos establece que $(f \otimes g)(x \otimes y) = (-1)^{\#g\,\#x}(f(x) \otimes g(y))$, donde $\#g$ y $\#x$ representan las paridades respectivas de g y de x.

particular, los bivectores) pueden ser vistos como funciones definidas en V. Los bivectores serían funciones cuadráticas.

Nos interesa en particular una especie particular de bivectores. Sea $T \in \mathrm{Sk}(V)$. (En contraste con $\mathcal{D}(V)$ en el Caso B, este $\mathrm{Sk}(V)$ es un espacio $\mathbb{R}$-vectorial, por lo que algunas afirmaciones serán más simples que en el Caso B.) Para un tal T, defínase el bivector

$$H_T := \sum_{i,j=1}^{m} \langle e_i \mid Te_j \rangle\, e_i \wedge e_j. \tag{2.24}$$

Este bivector recibe el nombre de **hamiltoniano**.

Proposición 2.24. *La definición del bivector H_T es independiente de la base ortonormal elegida de $V = V_J$.*

Demostración. Sean $\mathcal{B} := \{\, e_l : l = 1, \dots, m \,\}$ y $\mathcal{B}' := \{\, u_r : r = 1, \dots, m \,\}$ dos bases ortonormales de V_J y sea $[A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matriz de cambio de base; entonces

$$u_k = \sum_{r=1}^{m} a_{rk} e_r .$$

Note que esta matriz A es unitaria, por lo que $A^*A = AA^* = 1_m$, esto es,

$$\sum_{k=1}^{m} \bar{a}_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} = \sum_{l=1}^{m} a_{il} \bar{a}_{jl}\ .$$

Así,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{m} \langle u_i \mid Tu_j \rangle\, u_i \wedge u_j &= \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{m} \sum_{r,s=1}^{m} \langle a_{ki} e_k \mid T(a_{lj} e_l) \rangle\, a_{ri} e_r \wedge a_{sj} e_s \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k,r=1}^{m} \sum_{l,s=1}^{m} \bar{a}_{ki} \bar{a}_{lj} a_{ri} a_{sj} \langle e_k \mid Te_l \rangle\, e_r \wedge e_s \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k,r=1}^{m} \sum_{l,s=1}^{m} \delta_{kr} \bar{a}_{lj} a_{sj} \langle e_k \mid Te_l \rangle\, e_r \wedge e_s \\
&= \sum_{k,r=1}^{m} \sum_{l,s=1}^{m} \delta_{kr} \delta_{ls} \langle e_k \mid Te_l \rangle\, e_r \wedge e_s \\
&= \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \langle e_r \mid Te_s \rangle\, e_r \wedge e_s,
\end{aligned}$$

como se quería demostrar. □

Definición 2.25. Para una matriz cuadrada antisimétrica A se define el **pfaffiano** de dicha matriz como un cierto polinomio $\operatorname{Pf} A$ en las entradas a_{ij} de A que cumple la relación:

$$(\operatorname{Pf} A)^2 = \det A.$$

Más generalmente, si $B = [b_{ij}]$ es una matriz antisimétrica de orden par $n = 2m$, se define su pfaffiano como

$$\operatorname{Pf} B := \frac{1}{2^m\, m!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \prod_{k=1}^{m} b_{\sigma(2k-1),\sigma(2k)}. \tag{2.25}$$

Note que la relación $(\operatorname{Pf} A)^2 = \det A$ deja una ambigüedad de signo en $\operatorname{Pf} A$. Al definir

$$J_{2m} = \underbrace{J_2 \oplus \cdots \oplus J_2}_{m \text{ veces}} \quad \text{donde} \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

y al imponer la condición $\operatorname{Pf} J_{2m} = +1$, se resuelve dicha ambigüedad. Note que este signo es compatible con la fórmula (2.25). ◊

(Si la dimensión del espacio vectorial V es impar entonces para A una matriz antisimétrica se tiene que $\det A = \det(-A^t) = (-1)^n \det A = -\det A \implies \det A = 0$, por lo que se define $\operatorname{Pf} A := 0$.)

Definición 2.26. Sea $L \subseteq \{1, \dots, n\}$. El L**-subpfaffiano** de una matriz antisimétrica B es el pfaffiano de la matriz antisimétrica B_L que se obtiene al eliminar todas las filas y columnas cuyos índices no pertenecen a L. Por convención $\operatorname{Pf} B_\emptyset := 1$ y $\operatorname{Pf} B_L := 0$ si $\#(L)$ es impar.

Para un operador antilineal antisimétrica T y una base ortonormal $\{u_1, \dots, u_m\}$ de V, se define T_L como la matriz con entrada (i, j)-ésima $\langle u_i \mid T u_j \rangle$. ◊

El siguiente lema se puede encontrar en [15, §5.5].

Lema 2.27. *Si A y B son matrices antisimétricas de orden m entonces*

$$\det(1 - BA) = \Bigl(\sum_{2 \mid \#(L)} \operatorname{Pf} A_L \, \operatorname{Pf} B_L \Bigr)^2. \tag{2.26}$$

Hay varias cosas que destacar del lema anterior. Primeramente si $A = B$ entonces $\det(1 - BA) \geqslant 0$, por lo que es apropiado elegir la raíz positiva:

$$\det{}^{1/2}(1 - BA) = \sum_{2 \mid \#(L)} \operatorname{Pf} A_L \, \operatorname{Pf} B_L \,.$$

Corolario 2.28. *Si* $S, T \in \mathrm{Sk}(V)$*, entonces*

$$\det(1 - TS) = \Bigg(\sum_{2|\#(L)} \overline{\mathrm{Pf}\, S_L}\ \mathrm{Pf}\, T_L \Bigg)^2 .$$

Usando la rama de la raíz cuadrada que es positiva cuando $S = T$*, se tiene entonces*

$$\det{}^{1/2}(1 - TS) = \sum_{2|\#(L)} \overline{\mathrm{Pf}\, S_L}\ \mathrm{Pf}\, T_L\,. \tag{2.27}$$

Demostración. Esto sigue directamente de la fórmula (2.26), pero con una diferencia importante. Sea $C\colon v + iu \mapsto v - iu$ para $u, v \in V$ el operador de conjugación compleja en $V^{\mathbb{C}}$. Como $T \in \mathrm{Sk}(V)$ entonces TC es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal antisimétrica; y análogamente para S. En (2.26), hay que tomar $B_L = (TC)_L$ pero $A_L = (CS)_L$.

Como $CS = C(SC)C$, los elementos de matriz de CS son los conjugados complejos de los elementos de matriz de SC. Entonces $\mathrm{Pf}\, B_L = \mathrm{Pf}\, T_L$ pero $\mathrm{Pf}\, A_L = \overline{\mathrm{Pf}\, S_L}$. □

2.4. Elementos gaussianos fermiónicos

Similarmente a como se hizo en la sección 2.2, un **elemento gaussiano fermiónico** se define como

$$f_T := \exp^{\wedge}(\tfrac{1}{2} H_T) := \sum_{0 \leqslant 2r \leqslant m} \frac{1}{2^r r!} H_T^{\wedge r}, \tag{2.28}$$

para $T \in \mathrm{Sk}(V)$. Note que, como T es antilineal y antisimétrica,

$$\langle e_j \mid Te_i \rangle = -\langle e_i \mid Te_j \rangle \implies \langle e_j \mid Te_i \rangle\, e_j \wedge e_i = \langle e_i \mid Te_j \rangle\, e_i \wedge e_j, \quad \text{para} \quad i \neq j,$$

invocando la Proposición 1.3. Por ende,

$$\tfrac{1}{2} H_T = \sum_{i<j} \langle e_i \mid Te_j \rangle\, e_i \wedge e_j\,. \tag{2.29}$$

Con esto en mente, si $\{\varepsilon_L\}$ es la base ortonormal de $\mathcal{F}(V)$ dada por $\varepsilon_L := e_{l_1} \wedge \cdots \wedge e_{l_r}$, entonces, aplicando la definición de pfaffiano:

$$\begin{aligned} f_T &= \sum_{2|\#(L)} \frac{1}{2^r r!} (-1)^{\sigma} \prod_{k=1}^{r} \langle e_{\sigma(2k-1)} \mid Te_{\sigma(2k)} \rangle\, e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(2r)} \\ &= \sum_{2|\#(L)} \mathrm{Pf}\, T_L\, \varepsilon_L, \end{aligned} \tag{2.30}$$

Entonces podemos calcular el producto escalar de f_T y f_S, donde $T, S \in \mathrm{Sk}(V)$, como

$$\begin{aligned}\langle f_S \mid f_T\rangle &= \left\langle \sum_{2|\#(K)} \mathrm{Pf}\, S_K\, \varepsilon_K \,\middle|\, \sum_{2|\#(L)} \mathrm{Pf}\, T_L\, \varepsilon_L \right\rangle \\ &= \sum_{\#(K),\, 2|\#(L)} \overline{\mathrm{Pf}\, S_K}\, \mathrm{Pf}\, T_L\, \langle \varepsilon_K \mid \varepsilon_L\rangle \\ &= \sum_{2|\#(L)} \overline{\mathrm{Pf}\, S_L}\, \mathrm{Pf}\, T_L\, \varepsilon_L,\end{aligned}$$

pues $\{\varepsilon_L\}$ es una base ortonormal. Se concluye, utilizando (2.27), que

$$\langle f_S \mid f_T\rangle = \det{}^{1/2}(1 - TS). \tag{2.31}$$

Finalmente, por definición,

$$\| f_T\|^2 := \langle f_T \mid f_T\rangle = \det{}^{1/2}(1 - T^2). \tag{2.32}$$

Resumiremos estos dos resultados en una sola proposición.

Proposición 2.29. *Si $T, S \in \mathrm{Sk}(V)$ entonces la norma y el producto escalar de los elementos gaussianos f_T y f_S corresponden a*

$$\| f_T\|^2 = \det{}^{1/2}(1 - T^2) \quad y \quad \langle f_S \mid f_T\rangle = \det{}^{1/2}(1 - TS)$$

respectivamente.

En conclusión, las normas de los elementos gaussianos fermiónicos y los bosónicos difieren en el signo del exponente del determinante; caso análogo con el producto escalar en ambos espacios de Fock.

Capítulo 3

Las representaciones metaplécticas y de espín

El espacio vectorial V es un *espacio de una partícula*, tal como se explicó en el Prólogo.

Si a V lo equipamos con una aplicación bilineal (antisimétrica o simétrica), obtenemos el espacio de Fock bosónico $\mathcal{B}(V)$ o el espacio de Fock fermiónico $\mathcal{F}(V)$, respectivamente. Ambos espacios de Fock son espacios de *varias partículas*, que es lo que se ocupa para una teoría cuántica. Trabajaremos con *campos libres* i.e., campos sin interacciones externas.

Matemáticamente, un campo libre es una familia de operadores en un espacio de Fock, que será definido en este capítulo.

3.1. Sistemas de Weyl y campos bosónicos libres

Definición 3.1. Un **sistema de Weyl** en el espacio vectorial simpléctico (V, s) es una función (continua) β desde V a los operadores unitarios sobre $\mathcal{B}(V)$, que satisface la relación

$$\beta(v)\beta(w) = e^{-\frac{1}{2}is(v,w)}\beta(v + w), \quad \text{para todo} \quad v, w \in V. \tag{3.1}$$

Esto dice que $v \mapsto \beta(v)$ es una *representación unitaria proyectiva* del grupo aditivo de V sobre el espacio de Fock $\mathcal{B}(V)$. El *factor de fase* $(v, w) \mapsto e^{-\frac{i}{2}s(v,w)}$ es el 2-cociclo de esa representación proyectiva. ◊

Ahora bien, definamos una aplicación $\beta(v)$ por

$$\beta(v)F(u) = e^{\frac{1}{4}\langle 2u-v|v\rangle}\, F(u - v) \tag{3.2}$$

para todo $F \in \mathcal{B}(V)$.

Lema 3.2. *Si $v, w \in V$, entonces $\beta(v)E_w = e^{-\frac{1}{4}\langle v|v+2w\rangle}\, E_{v+w}$.*

Demostración. Note que si $F(u) := E_w(u)$ entonces

$$\beta(v)E_w(u) = \exp(\tfrac{1}{4}\langle 2u - v \mid v\rangle)\exp(\tfrac{1}{2}\langle u - v \mid w\rangle) = e^{-\frac{1}{4}(\langle v-2u|v\rangle+\langle v-u|2w\rangle)}.$$

Nótese que si $a := \langle v - 2u \mid v\rangle + \langle v - u \mid 2w\rangle$ entonces

$$\begin{aligned} a &= \langle v \mid v\rangle - 2\langle u \mid v\rangle + 2\langle v \mid w\rangle - 2\langle u \mid w\rangle \\ &= -2\langle u \mid v + w\rangle + \langle v \mid v + 2w\rangle, \end{aligned}$$

por lo que $\beta(v)E_w(u) = e^{\frac{1}{2}\langle u|v+w\rangle}e^{-\frac{1}{4}\langle v|v+2w\rangle} = e^{-\frac{1}{4}\langle v|v+2w\rangle}E_{v+w}(u)$. □

Como $\Omega := E_0$ entonces $\|\beta(v)\Omega\| = \|e^{-\frac{1}{4}\langle v|v\rangle}\, E_v\| = e^{-\frac{1}{4}\langle v|v\rangle}\,\|E_v\| = 1$, utilizando (2.10) y (2.18).

Proposición 3.3. *Si $v, w, w' \in V$ entonces*

$$\langle\beta(v)E_{w'} \mid \beta(v)E_w\rangle = e^{\frac{1}{2}\langle w'|w\rangle} = \langle E_{w'} \mid E_w\rangle.$$

Demostración. Se acaba de probar que

$$\begin{aligned} \langle\beta(v)E_{w'} \mid \beta(v)E_w\rangle &= \langle e^{-\frac{1}{4}\langle v|v+2w'\rangle}E_{v+w'} \mid e^{-\frac{1}{4}\langle v|v+2w\rangle}E_{v+w}\rangle, \\ &= e^{-\frac{1}{4}\langle v+2w'|v\rangle}e^{-\frac{1}{4}\langle v|v+2w\rangle}\langle E_{v+w'} \mid E_{v+w}\rangle. \end{aligned}$$

Aplicando la identidad (2.11), se obtiene

$$\begin{aligned} \langle\beta(v)E_{w'} \mid \beta(v)E_w\rangle &= e^{-\frac{1}{4}\langle v+2w'|v\rangle}e^{-\frac{1}{4}\langle v|v+2w\rangle}e^{\frac{1}{2}\langle v+w'|v+w\rangle} \\ &= e^{-\frac{1}{4}(\langle v+2w'|v\rangle+\langle v|v+2w\rangle-2\langle v+w'|v+w\rangle)} \\ &= e^{\frac{1}{2}\langle w'|w\rangle} = \langle E_{w'} \mid E_w\rangle. \end{aligned}$$ □

Corolario 3.4. *Si $F_1 := \sum_a c_a E_{v_a}$ y $F_2 := \sum_b c_b E_{v_b}$ son combinaciones lineales de los vectores $\{ E_v : v \in V \}$, entonces*

$$\langle\beta(v)F_1 \mid \beta(v)F_2\rangle = \langle F_1 \mid F_2\rangle.$$

Demostración. Esto es una consecuencia directa de la proposición anterior y de la linealidad de β. □

El corolario anterior muestra que cada aplicación $\beta(v)$ se extiende a $\mathcal{B}(V)$ como un operador unitario, porque el subespacio de vectores $\sum_a c_a E_{v_a}$ es denso en $\mathcal{B}(V)$.

El sistema de Weyl $\beta(v)$ dado por (3.2) no es único. Si $v \mapsto gv$ es una transformación lineal sobre V tal que $v \mapsto \beta(gv)$ es otro sistema de Weyl, entonces

$$\beta(gv)\beta(gw) = e^{-\frac{i}{2}s(gv,gw)}\beta(g(v+w)).$$

Comparando esta igualdad con (3.1) llegamos a que los factores de fase deben ser iguales

$$e^{-\frac{i}{2}s(gv,gw)} = e^{-\frac{i}{2}s(v,w)} \quad \text{para todo} \quad v, w \in V,$$

de donde se sigue que $s(gv, gw) = s(v, w)$; y así $g \in \mathrm{Sp}(V) = \mathrm{Sp}(V, s)$.

Por el momento vamos a considerar los elementos g que dejan fija la estructura compleja J, esto es, $gJg^{-1} = J$. Esto es equivalente a $gJ = Jg$, de donde $g \in \mathrm{U}_J(V)$.

Cualquier $o \in \mathrm{U}_J(V)$ determina un operador unitario en $\mathcal{B}(V)$, mediante la acción $\Gamma(o)$ que satisface

$$\Gamma(o)F(v) = F(o^{-1}v). \tag{3.3}$$

Lema 3.5. *$\Gamma(o)$ es un operador unitario sobre el espacio de Fock bosónico $\mathcal{B}(V)$.*

Demostración. Primeramente vea que $v \mapsto o^{-1}v$ preserva la medida gaussiana

$$\int_V e^{-\frac{1}{2}\langle o^{-1}v|o^{-1}v\rangle}\,du = \int_V e^{-\frac{1}{2}\|o^{-1}v\|^2}\,dv = \int_V e^{-\frac{1}{2}\|v\|^2}\,dv,$$

por lo que

$$\begin{aligned}\|\Gamma(o)F\|^2 = \|u \mapsto F(o^{-1}u)\|^2 &= \int_V |F(o^{-1}u)|^2 e^{-\frac{1}{2}\|u\|^2}\,du \\ &= \int_V |F(v)|^2 e^{-\frac{1}{2}\|v\|^2}\,dv = \|F\|^2.\end{aligned}$$

□

Proposición 3.6. *Si $o \in U_J(V)$ y $v \in V$ entonces*

$$\Gamma(o)\beta(v)\Gamma^{-1}(o) \equiv \Gamma(o)\beta(v)\Gamma(o)^{-1} = \beta(ov).$$

Demostración. Sea $u \in V$ y $F \in \mathcal{B}(V)$, entonces, aplicando (3.2) y (3.3) obtenemos que

$$\begin{aligned}\Gamma(o)\beta(v)\Gamma^{-1}(o)F(u) &= \beta(v)\Gamma^{-1}(o)F(o^{-1}u) \\ &= e^{\frac{1}{4}\langle 2o^{-1}u-v|v\rangle}\,\Gamma(o^{-1})F(o^{-1}u-v) \\ &= e^{\frac{1}{4}\langle 2u-ov|ov\rangle}F(o(o^{-1}u-v)) \\ &= e^{\frac{1}{4}\langle 2u-ov|ov\rangle}F(u-ov) \\ &= \beta(ov)F(u).\end{aligned}$$

Como $F \in \mathcal{B}(V)$ es arbitrario, el resultado sigue. □

Antes de exponer las siguientes definiciones y teoremas, hace falta recordar unas definiciones fundamentales.

Definición 3.7. Un **operador no acotado** sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es una aplicación lineal $A\colon \operatorname{Dom} A \to \mathcal{H}$, en donde $\operatorname{Dom} A$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{H}$. Además, se dice que A es *densamente definido* si $\operatorname{Dom} A$ es denso en $\mathcal{H}$. ◊

En [30] se establece que si A es densamente definido entonces el operador adjunto A^* está bien definido y satisface $\langle A^*x \mid y\rangle = \langle x \mid Ay\rangle$ para todo $x \in \operatorname{Dom} A^*$, $y \in \operatorname{Dom} A$. Si A^* es también densamente definido, el dominio de $A^{**} := (A^*)^*$ satisface $\operatorname{Dom} A^{**} \supseteq \operatorname{Dom} A$ y $A^{**}z = Az$ para todo $z \in \operatorname{Dom} A$. Se escribe $A \subseteq A^{**}$ y se dice que A^{**} es una *extensión* de A.

Definición 3.8. El operador $\overline{A} := A^{**}$ es cerrado (i.e., su grafo es cerrado en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.) Este operador es la **clausura** de A. Un operador es **autoadjunto** si A^{**} existe y si $A = A^* = A^{**}$, por lo que $\operatorname{Dom} A^* = \operatorname{Dom} A$. ◊

Definición 3.9. Muchas veces es complicado trabajar con la totalidad del espacio $\operatorname{Dom} A$, por lo que se trabaja en una parte propia densa $\mathcal{D} \subset \operatorname{Dom} A$; si la restricción $A|_{\mathcal{D}}$ tiene clausura $\overline{A|_{\mathcal{D}}} = A$, el subespacio denso $\mathcal{D}$ se conoce como un **corazón** para A.

En el espacio de Fock $\mathcal{B}(V)$, el corazón para los operadores con los que trabajaremos será el subespacio denso de las sumas finitas $\sum_j c_j E_{v_j}$ con $c_j \in \mathbb{C}$, $v_j \in V$. ◊

El siguiente teorema es un resultado fundamental de análisis funcional, cuya demostración se encuentra en el capítulo 12 de [30].

Teorema 3.10 (Stone)**.** *Un subgrupo uniparamétrico fuertemente continuo*[1] $\{\, u_t : t \in \mathbb{R} \,\} \subset \mathrm{U}(\mathcal{H})$ *es de la forma* $u_t = \exp(itA)$ *para un único operador* autoadjunto A *sobre* $\mathcal{H}$.

Apliquemos todo lo anterior en el contexto de espacios de Fock bosónicos. Sea A un operador autoadjunto sobre $V = V_J$, entonces $t \mapsto \exp(itA)$ es un grupo uniparamétrico de operadores unitarios sobre V; es decir, $\exp(itA) \in \mathrm{U}_J(V)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Utilizando la definición del operador unitario $\Gamma(o)$, se obtiene la fórmula

$$\begin{aligned}\Gamma(\exp(itA))E_w(u) = E_w(\exp(-itA)u) &= \exp\bigl(\tfrac{1}{2}\langle \exp(-itA)u \mid w\rangle\bigr) \\ &= \exp\bigl(\tfrac{1}{2}\langle u \mid \exp(itA)w\rangle\bigr) = E_{\exp(itA)w}(u),\end{aligned}$$

donde $u, w \in V$.

[1]Esto es: para cada $x \in \mathcal{H}$, la aplicación $\mathbb{R} \to \mathcal{H} : t \mapsto u_t(x)$ es continua.

Invocando la Proposición 3.6 y el cálculo anterior, se llega a que

$$\langle E_v \mid \Gamma(\exp(itA))E_w\rangle = \langle E_v \mid E_{\exp(itA)w}\rangle = e^{\frac{1}{2}\langle v|\exp(itA)w\rangle} \tag{3.4}$$

Ahora bien, por el teorema de Stone existe un operador autoadjunto $d\Gamma(A)$ sobre $\mathcal{B}(V)$, con corazón $\mathcal{D}_0 := \text{gen}\{E_z : z \in \text{Dom}\, A\}$, tal que

$$\exp(it\, d\Gamma(A)) = \Gamma(\exp(itA)) \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Proposición 3.11. *El operador autoadjunto* $d\Gamma(A)$ *satisface*

$$\langle E_v \mid d\Gamma(A)E_w\rangle = \tfrac{1}{2}\langle v \mid Aw\rangle, \quad \textit{para todo} \quad v, w \in \mathcal{D}_0.$$

Demostración. Derivando el lado derecho de (3.4) con respecto a t y luego evaluando en $t = 0$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\langle E_v \mid d\Gamma(A)E_w\rangle &= -i\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \langle E_v \mid \Gamma(\exp(itA))E_w\rangle \\ &= -i\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp\big(\tfrac{1}{2}\langle v \mid \exp(itA)u\rangle\big) = \tfrac{1}{2}\langle v \mid Au\rangle.\end{aligned}$$ □

Lema 3.12. *Si* $F := \sum_j c_j E_{v_j} \in \mathcal{D}_0$ *entonces* $\langle F \mid d\Gamma(A)F\rangle \geqslant 0$ *toda vez que* $\langle v \mid Av\rangle \geqslant 0$ *para* $v \in \text{Dom}\, A$. *Esto es:* $d\Gamma(A)$ *es un operador autoadjunto positivo siempre que* A *sea un operador autoadjunto positivo.*

Demostración. Utilizando la proposición anterior y la sesquilinealidad del producto escalar (1.3) se tiene que

$$\langle F \mid d\Gamma(A)F\rangle = \sum_{i,j} \bar{c}_i c_j \langle E_{v_i} \mid d\Gamma(A)E_{v_j}\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \bar{c}_i c_j \langle v_i \mid Av_j\rangle = \frac{1}{2}\langle w \mid Aw\rangle$$

donde $w := \sum_j c_j v_j$. Como $\langle w | Aw\rangle \geqslant 0$ para todo j, se concluye que $\langle F | d\Gamma(A)F\rangle \geqslant 0$. □

Con toda esta información podemos definir lo que es un *campo bosónico libre* [26].

Definición 3.13. Un **campo bosónico libre** es una cuaterna $(\mathcal{B}(V), \dot{\beta}, \Gamma, \Omega)$ donde $\mathcal{B}(V)$ es un espacio de Fock bosónico, β es un sistema de Weyl, Γ es un operador unitario que satisface (3.3) y $\Omega = E_0$ es el vector "del vacío". ◊

Para finalizar esta sección, se introducirán los sistemas de Weyl infinitesimales.

Definición 3.14. Sea $t \mapsto \beta(tv)$ una familia uniparamétrica de operadores unitarios para $t \in \mathbb{R}$. La **representación derivada** $\dot{\beta}$ de un sistema de Weyl se define como

$$\dot{\beta}(v)F(u) := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \beta(tv)F(u) \tag{3.5}$$

para $F \in \mathcal{B}(V)$. ◊

Por ende, un campo bosónico libre se puede describir también como la cuaterna $(\mathcal{B}(V), \dot{\beta}, \Gamma, \Omega)$, donde $\dot{\beta}$ es la representación derivada del sistema de Weyl β.

Proposición 3.15. *Si $u, v, w \in \mathcal{D}_0$ entonces*

$$\dot{\beta}(v)E_w(u) = \tfrac{1}{2}\big(\langle u \mid v\rangle - \langle v \mid w\rangle\big)E_w(u). \tag{3.6}$$

Demostración. Aplicando el Lema 3.2 y (3.5) se obtiene que

$$\begin{aligned}
\dot{\beta}(v)E_w(u) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \beta(tv)E_w(u) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{-\frac{1}{4}\langle tv|tv+2w\rangle} E_{tv+w}(u) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{-\frac{1}{4}\langle tv|tv+2w\rangle} E_w(u) + \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{\frac{1}{2}\langle u|tv+w\rangle} \\
&= -\tfrac{1}{4}\langle v \mid 2w\rangle\, E_w(u) + \tfrac{1}{2}\langle u \mid v\rangle\, e^{\frac{1}{2}\langle u|w\rangle} \\
&= \tfrac{1}{2}\big(\langle u \mid v\rangle - \langle v \mid w\rangle\big)E_w(u). \qquad \square
\end{aligned}$$

Esto implica que $E_w \in \operatorname{Dom}\dot{\beta}(v)$ para cualquier $w \in V$, por lo que cada $\dot{\beta}(v)$ está definido densamente. Se denota el generador del subgrupo unitario uniparamétrico $t \mapsto \beta(tv)$ por $\phi(v) := -i\dot{\beta}(v)$; además el espacio vectorial generado por $\{\, E_w : w \in \mathcal{D}_0 \,\}$ es un corazón de $\phi(v)$.

De la proposición anterior se concluye que

$$\begin{aligned}
[\dot{\beta}(v), \dot{\beta}(w)]E_z(u) &:= \dot{\beta}(v)\dot{\beta}(w)E_z(u) - \dot{\beta}(w)\dot{\beta}(v)E_z(u) \\
&= \tfrac{1}{2}\dot{\beta}(v)\big((\langle u \mid w\rangle - \langle w \mid z\rangle)E_z(u)\big) - \tfrac{1}{2}\dot{\beta}(w)\big((\langle u \mid v\rangle - \langle v \mid z\rangle)E_z(u)\big).
\end{aligned}$$

Aplicando la regla de Leibniz al primer término, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} &(\langle u - tv \mid w\rangle - \langle w \mid z\rangle)E_z(u - tv) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\langle u - tv \mid w\rangle - \langle w \mid z\rangle)e^{\frac{1}{2}\langle u-tv|z\rangle} \\
&= -\langle v \mid w\rangle e^{\frac{1}{2}\langle u|z\rangle} - \tfrac{1}{2}(\langle u \mid w\rangle - \langle w \mid z\rangle)\,\langle v \mid z\rangle\, e^{\frac{1}{2}\langle u|z\rangle} \\
&= -e^{\frac{1}{2}\langle u|z\rangle}\big[\langle v \mid w\rangle + \tfrac{1}{2}(\langle u \mid w\rangle) - \langle w \mid z\rangle)\langle v \mid z\rangle\big],
\end{aligned}$$

por lo que, si $A(u) := (\langle u \mid w\rangle - \langle w \mid z\rangle)E_z(u)$,

$$\begin{aligned}
\dot\beta(v)A(u) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\beta(tv)A(u) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{\frac14\langle 2u-tv|tv\rangle}(\langle u-tv \mid w\rangle - \langle w \mid z\rangle)E_z(u-tv)\\
&= -\tfrac12\langle u \mid v\rangle(\langle u \mid w\rangle - \langle w \mid z\rangle)e^{\frac12\langle u|z\rangle} - e^{\frac12\langle u|z\rangle}\big[\langle v \mid w\rangle + \tfrac12(\langle u \mid w\rangle) - \langle w \mid z\rangle)\langle v \mid z\rangle\big]\\
&= -\tfrac12 e^{\frac12\langle u|z\rangle}(\langle u \mid w\rangle - \langle w \mid z\rangle)(\langle u \mid v\rangle - \langle v \mid z\rangle) - e^{\frac12\langle u|z\rangle}\langle v \mid w\rangle.
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\langle u-tw \mid v\rangle - \langle v \mid z\rangle)\,E_z(u-tw) = -e^{\frac12\langle u|z\rangle}\big[\langle w \mid v\rangle + \tfrac12(\langle u \mid v\rangle - \langle v \mid z\rangle)\,\langle w \mid z\rangle\big],$$

por lo que, si $B(u) := (\langle u \mid v\rangle - \langle v \mid z\rangle)E_z(u)$,

$$\begin{aligned}
\dot\beta(w)B(u) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\beta(tw)B(u) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{\frac14\langle 2u-tw|tw\rangle}(\langle u-tw \mid v\rangle - \langle v \mid z\rangle)\,E_z(u-tw)\\
&= -\tfrac12\langle u \mid w\rangle(\langle u \mid v\rangle - \langle v \mid z\rangle)e^{\frac12\langle u|z\rangle} - e^{\frac12\langle u|z\rangle}\big[\langle w \mid v\rangle + \tfrac12(\langle u \mid v\rangle - \langle v \mid z\rangle)\,\langle w \mid z\rangle\big]\\
&= -\tfrac12 e^{\frac12\langle u|z\rangle}(\langle u \mid v\rangle - \langle v \mid z\rangle)(\langle u \mid w\rangle - \langle w \mid z\rangle) - e^{\frac12\langle u|z\rangle}\langle w \mid v\rangle.
\end{aligned}$$

Al restar las expresiones $\frac12\dot\beta(v)A(u)$ y $\frac12\dot\beta(w)B(u)$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
2[\dot\beta(v),\dot\beta(w)]\,E_z(u) &= e^{\frac12\langle u|z\rangle}\langle w \mid v\rangle - e^{\frac12\langle u|z\rangle}\langle v \mid w\rangle\\
&= -(\langle v \mid w\rangle - \langle w \mid v\rangle)E_z(u) = -2i\,s(v,w)E_z(u).
\end{aligned}$$

En otras palabras,

$$[\dot\beta(v),\dot\beta(w)]\,E_z(u) = -i\,s(v,w)\,E_z(u).$$

De la densidad del conjunto $\{\, E_z : z \in V \,\}$ se obtiene entonces las relaciones

$$[\dot\beta(v),\dot\beta(w)] = -is(v,w) \iff [\phi(v),\phi(w)] = is(v,w). \tag{3.7}$$

Las relaciones (3.7) se denominan **relaciones canónicas de conmutación** para $\mathcal{B}(V)$ (o CCR, por sus siglas en inglés).

Ahora bien, consideremos el vector del vacío $E_0 := \Omega$. Este vector de norma 1 representa el "estado vacío" del campo bosónico libre. Como $e^{i\theta}\Omega$ también representa el estado vacío, el espacio vectorial generado por Ω, denominado *el sector del vacío*, es el espacio unidimensional $\mathbb{C}\,\Omega$. Nos interesa encontrar operadores que envíen $\mathbb{C}\,\Omega$ al subespacio de una partícula $V = V_J \subset \mathcal{B}(V)$. Estos operadores son denominados **operadores de creación**, denotados por el símbolo $a^\dagger$ i.e., $a^\dagger$ cumple la relación $a^\dagger(v)\,\Omega = v$, para cada $v \in V$. También existen operadores (no acotados) $a(v)$ sobre $\mathcal{B}(V)$, que envían el subespacio de una partícula V al sector del vacío $\mathbb{C}\,\Omega$. Dichos operadores se denominan **operadores de aniquilación**.

Definición 3.16. Los **operadores de creación y aniquilación** sobre $\mathcal{B}(V)$ para el campo bosónico ϕ están dados, para cada $v \in V$, por

$$a^\dagger(v) := \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\phi(v) - i\phi(Jv)) \quad \text{y} \quad a(v) := \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\phi(v) + i\phi(Jv)). \qquad \lozenge$$

Lema 3.17. *Los operadores de creación y aniquilación satisfacen*

$$a^\dagger(Jv) = i\,a^\dagger(v) \quad y \quad a(Jv) = -i\,a(v).$$

Demostración. Por definición,

$$\begin{aligned} a^\dagger(Jv) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\phi(Jv) - i\phi(J^2v)) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(i\phi(v) + \phi(Jv)) = i\,a^\dagger(v), \\ a(Jv) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\phi(Jv) + i\phi(J^2v)) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-i\phi(v) + \phi(Jv)) = -i\,a(v), \end{aligned}$$

para cada $v \in V$. □

El lema anterior muestra que $a^\dagger$ es $\mathbb{C}$-lineal en v y que a es $\mathbb{C}$-antilineal en v, por lo que

$$\phi(v) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger(v) + a(v))$$

es $\mathbb{R}$-lineal en v.

Ahora, sean $u, v, w \in V$. Aplicando la relación (3.6) se tiene que

$$\phi(v)E_w(u) = -\tfrac{i}{2}\big(\langle u \mid v\rangle - \langle v \mid w\rangle\big)E_w(u); \tag{3.8a}$$

y aplicando el Lema 1.4,

$$\begin{aligned} \phi(Jv)E_w(u) &= -\tfrac{i}{2}\big(\langle u \mid Jv\rangle - \langle Jv \mid w\rangle\big) \\ &= -\tfrac{i}{2}\big(i\langle u \mid v\rangle + i\langle v \mid w\rangle\big) = \tfrac{1}{2}(\langle u \mid v\rangle + \langle v \mid w\rangle)E_w(u). \end{aligned} \tag{3.8b}$$

Con estas dos igualdades podemos verificar la siguiente proposición.

Proposición 3.18. *Si $u, v, w \in V$ entonces las siguientes igualdades se satisfacen:*

$$a(v)E_w(u) = \frac{i}{\sqrt{2}}\langle v \mid w\rangle E_w(u) \quad y \quad a^\dagger(v)E_w(u) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\langle u \mid v\rangle E_w(u)$$

Demostración. Esto es un cálculo directo, al sumar y restar los lados derechos de (3.8a) y (3.8b). □

Podemos escribir las relaciones canónicas de conmutación para los operadores de creación y aniquilación. Aquí se denotará $\phi_v := \phi(v)$ por comodidad.

$$[a(v), a(w)] = \tfrac{1}{2}(\phi_v + i\phi_{Jv})(\phi_w + i\phi_{Jw}) - \tfrac{1}{2}(\phi_w + i\phi_{Jw})(\phi_v + i\phi_{Jv})$$

lo que equivale a

$$\tfrac{1}{2}\big(\phi_v\phi_w - \phi_w\phi_v + i(\phi_v\phi_{Jw} - \phi_{Jw}\phi_v) + i(\phi_{Jv}\phi_w - \phi_w\phi_{Jv}) - (\phi_{Jv}\phi_{Jw} - \phi_{Jw}\phi_{Jv})\big).$$

De las relaciones (3.7) obtenemos

$$\begin{aligned}[a(v), a(w)] &= \tfrac{1}{2}[is(v, w) - s(v, Jw) - s(Jv, w) - is(Jv, Jw)]\\ &= \tfrac{1}{2}[is(v, w) - d(v, w) + s(w, Jv) - is(v, w)]\\ &= \tfrac{1}{2}[is(v, w) - d(v, w) + d(w, v) - is(v, w)] = 0.\end{aligned}$$

Análogamente se obtiene $[a^\dagger(v), a^\dagger(w)] = 0$.

También,

$$\begin{aligned}[a(v), a^\dagger(w)] &= \tfrac{1}{2}(\phi_v + i\phi_{Jv})(\phi_w - i\phi_{Jw}) - \tfrac{1}{2}(\phi_w - i\phi_{Jw})(\phi_v + i\phi_{Jv})\\ &= \tfrac{1}{2}\big(\phi_v\phi_w - \phi_w\phi_v - i\phi_v\phi_{Jw} + i\phi_{Jw}\phi_v + i\phi_{Jv}\phi_w - i\phi_w\phi_{Jv} + \phi_{Jv}\phi_{Jw} - \phi_{Jw}\phi_{Jv}\big)\\ &= \tfrac{i}{2}[s(v, w) - is(v, Jw) + is(Jv, w) + s(Jv, Jw)]\\ &= \tfrac{i}{2}[s(v, w) - id(v, w) - id(w, v) + s(v, w)] = \tfrac{i}{2}[2s(v, w) - 2id(v, w)]\\ &= d(v, w) + is(v, w) = \langle v \mid w\rangle.\end{aligned}$$

En resumen, tenemos las siguientes CCR para los operadores $a^\dagger$ y a:

$$[a(v_1), a(v_2)] = [a^\dagger(v_1), a^\dagger(v_2)] = 0 \quad \text{y} \quad [a(v_1), a^\dagger(v_2)] = \langle v_1 \mid v_2\rangle, \tag{3.9}$$

para todo $v_1, v_2 \in V$.

3.2. La representación metapléctica del grupo simpléctico

En esta sección se determinará una representación del grupo simpléctico $\mathrm{Sp}(V)$, denominada **representación metapléctica** y denotada por ν. Es importante destacar que esta no es una "verdadera" representación, sino que es una *representación proyectiva*.

Definición 3.19. El **grupo lineal proyectivo** de $V = V_J$ es el grupo

$$\mathrm{PGL}(V) := \mathrm{GL}(V)/\mathbb{C}^\times.$$

Una **representación proyectiva** de un grupo G es un homomorfismo de grupos $\rho\colon G \to \mathrm{PGL}(V)$. En otras palabras, ρ satisface

$$\rho(g)\rho(h) = \alpha\, \rho(g, h), \tag{3.10}$$

donde $g, h \in G$ y $\alpha = \alpha(g, h) \in \mathbb{C}^{\times}$. ◊

Antes de entrar en detalle en la construcción de ν, hablaremos un poco de las denominadas *transformaciones de Bogoliubov* [6].

Definición 3.20. Si $v \in V$ y $g \in \mathrm{Sp}(V)$ entonces se definen dos operadores:

$$a_g^{\dagger}(v) := \tfrac{1}{\sqrt{2}}[\phi(v) - i\phi(gJg^{-1}v)] \quad \text{y} \quad a_g(v) := \tfrac{1}{\sqrt{2}}[\phi(v) + i\phi(gJg^{-1}v)]. \tag{3.11}$$

que también son operadores de creación y aniquilación, por el lema siguiente. ◊

Lema 3.21. *Las relaciones (3.11) satisfacen las relaciones canónicas de conmutación.*

Demostración. Aquí se denotará $\phi_v := \phi(v)$ por comodidad.

$$[a_g(v), a_g(w)] = \tfrac{1}{2}(\phi_v + i\phi_{gJg^{-1}v})(\phi_w + i\phi_{gJg^{-1}w}) - \tfrac{1}{2}(\phi_w + i\phi_{gJg^{-1}w})(\phi_v + i\phi_{gJg^{-1}v})$$

lo que equivale a

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}(\phi_v\phi_w - \phi_w\phi_v) + \tfrac{i}{2}(\phi_v\phi_{gJg^{-1}w} - \phi_{gJg^{-1}w}\phi_v)\\ &\quad + \tfrac{i}{2}(\phi_{gJg^{-1}v}\phi_w - \phi_w\phi_{gJg^{-1}v}) - \tfrac{1}{2}(\phi_{gJg^{-1}v}\phi_{gJg^{-1}w} - \phi_{gJg^{-1}w}\phi_{gJg^{-1}v}).\end{aligned}$$

De las relaciones (3.7) obtenemos

$$[a_g(v), a_g(w)] = \tfrac{1}{2}[is(v, w) - s(v, gJg^{-1}w) - s(gJg^{-1}v, w) - is(gJg^{-1}v, gJg^{-1}w)].$$

Como $s(gv, gw) = s(v, w)$ para todo $g \in \mathrm{Sp}(V, s)$,

$$\begin{aligned}[a_g(v), a_g(w)] &= \tfrac{1}{2}[is(v, w) - s(g^{-1}v, Jg^{-1}w) - s(Jg^{-1}v, g^{-1}w) - is(Jg^{-1}v, Jg^{-1}w)]\\ &= \tfrac{1}{2}[is(v, w) - d(g^{-1}v, g^{-1}w) + d(g^{-1}w, g^{-1}v) - is(g^{-1}v, g^{-1}w)]\\ &= \tfrac{1}{2}[is(v, w) - d(v, w) + d(w, v) - is(v, w)] = 0.\end{aligned}$$

Análogamente se obtiene $[a_g^{\dagger}(v), a_g^{\dagger}(w)] = 0$.

También,

$$\begin{aligned}
[a_g(v), a_g^\dagger(w)] &= \tfrac{1}{2}(\phi_v + i\phi_{gJg^{-1}v})(\phi_w - i\phi_{gJg^{-1}w}) - \tfrac{1}{2}(\phi_w - i\phi_{gJg^{-1}w})(\phi_v + i\phi_{gJg^{-1}v}) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(\phi_v\phi_w - \phi_w\phi_v - i\phi_v\phi_{gJg^{-1}w} + i\phi_{gJg^{-1}w}\phi_v \\
&\qquad + i\phi_{gJg^{-1}v}\phi_w - i\phi_w\phi_{gJg^{-1}v} + \phi_{gJg^{-1}v}\phi_{gJg^{-1}w} - \phi_{gJg^{-1}w}\phi_{gJg^{-1}v}\big) \\
&= \tfrac{i}{2}[s(v,w) - is(v,Jw) + is(Jv,w) + s(Jv,Jw)] \\
&= \tfrac{i}{2}[s(v,w) - id(v,w) - id(w,v) + s(v,w)] \\
&= \tfrac{i}{2}[2s(v,w) - 2id(v,w)].
\end{aligned}$$

Así, $[a_g(v), a_g^\dagger(w)] = d(v,w) + is(v,w) = \langle v \mid w\rangle$. □

Lema 3.22. *Los operadores definidos en (3.11) satisfacen las relaciones:*

$$a_g(gv) = a(p_g v) + a^\dagger(q_g v) \quad y \quad a_g^\dagger(gv) = a(q_g v) + a^\dagger(p_g v). \tag{3.12}$$

que se conocen como ***transformaciones de Bogoliubov****.*

Demostración. Como $g = p_g + q_g$ entonces, por definición,

$$\begin{aligned}
a_g(gv) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}[\phi(p_g + q_g)v + i\phi((p_g + q_g)Jv)] \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}}[\phi(p_g v) + i\phi(p_g Jv)] + \tfrac{1}{\sqrt{2}}[\phi(q_g v) + i\phi(q_g Jv)].
\end{aligned}$$

Como p_g es lineal y q_g es antilineal, obtenemos que

$$\begin{aligned}
a_g(gv) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}[\phi(p_g v) + i\phi(Jp_g v)] + \tfrac{1}{\sqrt{2}}[\phi(q_g v) - i\phi(Jq_g v)] \\
&= a(p_g v) + a^\dagger(q_g v).
\end{aligned}$$

Análogamente se verifica que $a_g^\dagger(gv) = a(q_g v) + a^\dagger(p_g v)$. □

Se define el **grupo metapléctico** $\mathrm{Mp}(V)$ como el doble cubrimiento del grupo simpléctico $\mathrm{Sp}(V)$. También, se define el grupo $\mathrm{Mp}^c(V)$ de manera que $\mathrm{Mp}^c(V)$ cubra $\mathrm{Sp}(V)$ como sigue. Hay una sucesión exacta corta

$$1 \longrightarrow U(1) \longrightarrow \mathrm{Mp}^c(V) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Sp}(V) \longrightarrow 1, \tag{3.13}$$

donde $U(1)$ es el grupo unitario de orden 1, esto es, el círculo unitario. Esta sucesión exacta corta, junto con el morfismo π, se encuentra en [12], por ejemplo.

De la igualdad (3.2) se deduce que si β es un sistema de Weyl parametrizado por $V = (V, s)$, entonces la aplicación $v \mapsto \beta(gv)$ también es un sistema de Weyl cuando

$g \in \mathrm{Sp}(V)$. Se plantea el siguiente problema: ¿Ambos sistemas de Weyl son unitariamente equivalentes o no?

Los dos sistemas de Weyl son unitariamente equivalentes si y solo si para cada $g \in \mathrm{Sp}(V)$, existe un operador unitario $\nu(g)$ sobre $\mathcal{B}(V)$ tal que

$$\nu(g)\beta(v) = \beta(gv)\nu(g) \quad \text{para todo} \quad v \in V. \tag{3.14}$$

Utilizando la relación (3.5) y la ecuación anterior, se obtiene que

$$\nu(g)\dot{\beta}(v) = \dot{\beta}(gv)\nu(g) \quad \text{para todo} \quad v \in V. \tag{3.15}$$

Proposición 3.23. *Si $g \in \mathrm{Sp}(V)$ y $v \in V$ entonces*

$$\nu(g)a(v) = a_g(gv)\nu(g) \quad y \quad \nu(g)a^\dagger(v) = a_g^\dagger(gv)\nu(g).$$

Demostración. Invocando el lema anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
a_g(gv)\nu(g) &= a(p_g v)\nu(g) + a^\dagger(q_g v)\nu(g) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}}[\phi(p_g v) + i\phi(Jp_g v)]\nu(g) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}[\phi(q_g v) - i\phi(Jq_g v)]\nu(g) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}}[-i\dot{\beta}(p_g v) + \dot{\beta}(Jp_g v)]\nu(g) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}[-i\dot{\beta}(q_g v) - \dot{\beta}(Jq_g v)]\nu(g) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}}[-i\dot{\beta}(p_g v)\nu(g) + \dot{\beta}(p_g Jv)\nu(g) - i\dot{\beta}(q_g v)\nu(g) + \dot{\beta}(q_g Jv)\nu(g)] \\
&= -\tfrac{i}{\sqrt{2}}[\dot{\beta}(gv)\nu(g) + \dot{\beta}(gJv)\nu(g)].
\end{aligned}$$

Al aplicar la identidad (3.15) obtenemos que

$$\begin{aligned}
a_g(gv)\nu(g) &= -\tfrac{i}{\sqrt{2}}[\nu(g)\dot{\beta}(v) + i\nu(g)\dot{\beta}(Jv)] \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}}[\nu(g)\phi(v) + i\nu(g)\phi(Jv)] = \nu(g)a(v).
\end{aligned}$$

De manera análoga se verifica la segunda igualdad. □

Definición 3.24. Sea W una polarización de V. Entonces se define su **sector del vacío** como el espacio de vectores $F \in \mathcal{B}(V)$ tales que

$$\beta(w^*)F(u) = 0 \quad \text{para todo} \quad u \in V,$$

donde $w^* = v + iJ_W v$, con $v \in V$. ◊

La relación (3.5) se puede escribir también como

$$\begin{aligned}\dot{\beta}(v)F(u) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{\frac{1}{4}\langle 2u-tv|tv\rangle}F(u-tv)\\ &= \tfrac{1}{4}\langle 2u \mid v\rangle F(u) + \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} F(u-tv) = \tfrac{1}{2}\langle u \mid v\rangle F(u) + \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} F(u-tv)\\ &= \tfrac{1}{2}\langle u \mid v\rangle F(u) - D_v F(u). \end{aligned} \tag{3.16}$$

aplicando la regla de la cadena. El último término de la igualdad anterior es la definición de la *derivada direccional* en la dirección del vector v, $D_v F(u) := \frac{d}{dt}\big|_{t=0} F(u+tv)$.

Al aplicar (3.16) en la Definición 3.24 obtenemos que los vectores $F \in \mathcal{B}(V)$ de este sector del vacío deben satisfacer la ecuación

$$D_{v-JJ_W v}F(u) = \tfrac{1}{2}\langle u \mid v + JJ_W v\rangle F(u),$$

para todo $u, v \in V$; y aplicando la transformada de Cayley $T_W := (1 + JJ_W)(1 - JJ_W)^{-1}$, dicha ecuación se puede escribir como

$$D_v F(u) = \tfrac{1}{2}\langle u \mid T_W v\rangle F(u). \tag{3.17}$$

La ecuación anterior es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, cuya solución general es

$$F(u) = c\exp\big(\tfrac{1}{4}\langle u \mid T_W u\rangle\big) = c f_{T_W}(u),$$

con $c \in \mathbb{C}$.

Cuando $W = W_0$ y por ende $T_W = 0$, se obtiene $F(u) = c\, f_0(u) = c\,\Omega$: el sector del vacío para W_0 es el subespacio unidimensional $\mathbb{C}\,\Omega$.

Lema 3.25. *El operador unitario $\nu(g)$, si existe, debe llevar el sector del vacío para W_0 en el sector del vacío para gW_0.*

Demostración. Los operadores $a(v)$ de la Definición 3.16 satisfacen $a(v)\Omega = 0$, donde Ω es el vector unitario del vacío de la polarización W_0. De la Proposición 3.23 obtenemos que $a_g(gv)\nu(g) = \nu(g)a(v)$ para cada $g \in \mathrm{Sp}(V)$. Así, $\nu(g)\Omega$ es aniquilado por $a_g(gv)$.

Ahora bien, si $u \in V$, note que

$$\begin{aligned} a(v) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}[\phi(v) + i\phi(Jv)] = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}[i\dot{\beta}(v) - \dot{\beta}(Jv)],\\ a^{\dagger}(v) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}[\phi(v) - i\phi(Jv)] = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}[i\dot{\beta}(v) + \dot{\beta}(Jv)]. \end{aligned}$$

Aplicando las transformaciones de Bogoliubov (3.12) se obtiene que

$$a_g(gv) = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}[i\dot{\beta}(p_g v) - \dot{\beta}(Jp_g v) + i\dot{\beta}(q_g v) + \dot{\beta}(Jq_g v)],$$

por lo que

$$a_g(gv) f_{T_g}(u) = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}[i\dot{\beta}(p_g v) f_{T_g}(u) - \dot{\beta}(Jp_g v) f_{T_g}(u) + i\dot{\beta}(q_g v) f_{T_g}(u) + \dot{\beta}(Jq_g v) f_{T_g}(u)].$$

Invocando la identidad (3.16), obtenemos

$$\begin{aligned}
&a_g(gv) f_{T_g}(u)\\
&\quad = -\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\big[i\langle u \mid p_g v\rangle f_{T_g}(u) - 2iD_{p_g v} f_{T_g}(u) - \langle u \mid Jp_g v\rangle f_{T_g}(u) + 2D_{Jp_g v} f_{T_g}(u)\\
&\qquad + i\langle u \mid q_g v\rangle f_{T_g}(u) - 2iD_{q_g v} f_{T_g}(u) + \langle u \mid Jq_g v\rangle f_{T_g}(u) - 2D_{Jq_g v} f_{T_g}(u)\big]\\
&\quad = -\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\big[i\langle u \mid p_g v\rangle f_{T_g}(u) - 2iD_{p_g v} f_{T_g}(u) - i\langle u \mid p_g v\rangle f_{T_g}(u) + 2D_{Jp_g v} f_{T_g}(u)\\
&\qquad + i\langle u \mid q_g v\rangle f_{T_g}(u) - 2iD_{q_g v} f_{T_g}(u) + i\langle u \mid q_g v\rangle f_{T_g}(u) - 2D_{Jq_g v} f_{T_g}(u)\big]
\end{aligned}$$

por el Lema 1.4.

Ahora bien, empleando la identidad (3.17) con $T_W = T_g$ se obtienen las relaciones

$$\begin{aligned}
D_{p_g v} f_{T_g} &= \tfrac{1}{2}\langle u \mid T_g p_g v\rangle f_{T_g}\,,\\
D_{q_g v} f_{T_g} &= \tfrac{1}{2}\langle u \mid T_g q_g v\rangle f_{T_g}\,.
\end{aligned}$$

Esto, junto con el Lema 1.4, permite deducir que

$$\begin{aligned}
&a_g(gv) f_{T_g}(u)\\
&\quad = -\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\big[i\langle u \mid p_g v\rangle f_{T_g}(u) - i\langle u \mid T_g p_g v\rangle f_{T_g}(u) - i\langle u \mid p_g v\rangle f_{T_g}(u) + \langle u \mid T_g J p_g v\rangle f_{T_g}(u)\\
&\qquad + i\langle u \mid q_g v\rangle f_{T_g}(u) - i\langle u \mid T_g q_g v\rangle f_{T_g}(u) + i\langle u \mid q_g v\rangle f_{T_g}(u) - \langle u \mid T_g J q_g v\rangle f_{T_g}(u)\big]\\
&\quad = -\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\big[i\langle u \mid p_g v\rangle f_{T_g}(u) - i\langle u \mid T_g p_g v\rangle f_{T_g}(u) - i\langle u \mid p_g v\rangle f_{T_g}(u) - i\langle u \mid T_g p_g v\rangle f_{T_g}(u)\\
&\qquad + i\langle u \mid q_g v\rangle f_{T_g}(u) - i\langle u \mid T_g q_g v\rangle f_{T_g}(u) + i\langle u \mid q_g v\rangle f_{T_g}(u) + i\langle u \mid T_g q_g v\rangle f_{T_g}(u)\big]\\
&\quad = \tfrac{i}{\sqrt{2}}\big[\langle u \mid T_g p_g v\rangle - \langle u \mid q_g v\rangle\big] f_{T_g}(u)\\
&\quad = \tfrac{i}{\sqrt{2}}\big[\langle u \mid (T_g p_g - q_g) v\rangle\big] f_{T_g}(u) = 0,
\end{aligned}$$

pues $T_g := q_g p_g^{-1}$.

Se concluye que $a_g(gv) f_{T_g} = 0 = \nu(g)\Omega$, y como $\dim\ker(\{\, a_g(gv) : v \in V \,\}) = 1$, se deduce que el sector del vacío para W_0 es $\{\, \alpha f_{T_g} : \alpha \in \mathbb{C} \,\}$. $\square$

Se concluye entonces que $\nu(g)\Omega$, si existe, es proporcional al gaussiano f_{T_g}; esto es, existe un escalar $c_g \in \mathbb{C}$ tal que

$$\nu(g)\,\Omega(u) := c_g f_{T_g}(u) = c_g e^{\frac{1}{4}\langle u|T_g u\rangle} \quad \text{para todo} \quad u \in V. \tag{3.18}$$

Como $\nu(g)$ debe ser unitario entonces $\|\nu(g)\Omega\| = 1$, a la vez que

$$\|\nu(g)\Omega\| := \|c_g f_{T_g}\| = |c_g|\det{}^{-1/4}(1 - T_g^2). \tag{3.19}$$

Por ende $|c_g| = \det{}^{1/4}(1 - T_g^2)$.

Como $1 - T_g^2$ es una aplicación definida positiva, su determinante – y las potencias de este – son números positivos. Se puede tomar c_g como un número real positivo para que la receta para c_g pueda generalizarse para espacio vectoriales de dimensión infinita [13].

Al tomar $c_g > 0$ por esta razón, podemos definir

$$c_g := \det{}^{1/4}(1 - T_g^2). \tag{3.20}$$

Como V es de dimensión finita también es posible escribir $c_g = \det{}^{-1/2}(p_g^t)$, pues

$$\det{}^{1/4}(1 - T_g^2) = \det{}^{-1/4}(p_g p_g^t).$$

Se puede calcular $\nu(g)$ utilizando núcleos integrales – usando la definición empleada en la prueba de la Proposición 2.15 – de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} K_{\nu(g)}(u, v) &:= \nu(g)E_v(u) = e^{\frac{1}{4}\langle v|v\rangle}\nu(g)\beta(v)E_0(u) \\ &= \exp(\tfrac{1}{4}\langle v \mid v\rangle)\,\beta(gv)\nu(g)\Omega(u) \\ &= c_g \exp\big[\tfrac{1}{4}\big(\langle v \mid v\rangle + \langle 2u - gv \mid gv\rangle + \langle u - gv \mid T_g(u - gv)\rangle\big)\big], \end{aligned}$$

empleando el Lema 3.2 y las relaciones (3.14) y (3.18).

Ahora, utilizando las igualdades $g = p_g + q_g = (1 + T_g)p_g = p_g(1 - \widehat{T}_g)$, se obtiene

$$\begin{aligned} &K_{\nu(g)}(u, v) \\ &\quad = c_g \exp\big[\tfrac{1}{4}\big(\langle v \mid v\rangle - \langle(1 + T_g)p_g v \mid (1 - T_g^2)p_g v\rangle + \langle u \mid T_g u\rangle + 2\langle u \mid (1 - T_g)gv\rangle\big)\big]. \end{aligned}$$

Finalmente, invocando la ecuación (1.11) vemos que la expresión anterior equivale a

$$\begin{aligned} &c_g \exp\big[\tfrac{1}{4}\big(2\langle u \mid p_g^{-t}v\rangle - \langle T_g p_g v \mid p_g^{-t}v\rangle + \langle u \mid T_g u\rangle\big)\big] \\ &\quad = c_g \exp\big[\tfrac{1}{4}\big(\langle \widehat{T}_g v \mid v\rangle + 2\langle p_g^{-1}u \mid v\rangle + \langle u \mid T_g u\rangle\big)\big]. \end{aligned}$$

En conclusión, el núcleo integral de $\nu(g)$ es

$$K_{\nu(g)}(u,v) = c_g \exp\big[\tfrac{1}{4}\big(\langle \widehat{T}_g v \mid v\rangle + 2\langle p_g^{-1} u \mid v\rangle + \langle u \mid T_g u\rangle\big)\big]. \tag{3.21}$$

Ahora bien, para calcular $\nu(g) f_{T_h}(u)$, con $g, h \in \mathrm{Sp}(V)$ y $u \in V$, necesitamos el siguiente lema.

Lema 3.26. *Si $T, S \in \mathcal{D}(V)$, $u, v \in V$, y si se usa la notación*

$$I_w(u,v) := \exp\big[\tfrac{1}{4}\big(\langle w \mid Tw\rangle + \langle Sw \mid w\rangle + 2\langle w \mid v\rangle + 2\langle u \mid w\rangle\big)\big]$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_V I_w(u,v) e^{-\frac{1}{2}\langle w|w\rangle}\,dw &= \det{}^{-1/2}(1 - TS) \\ &\quad \times \exp\big[\tfrac{1}{4}\big(\langle u \mid T(1-ST)^{-1}u\rangle + 2\langle u \mid (1-TS)^{-1}v\rangle + \langle S(1-TS)^{-1}v \mid v\rangle\big)\big].\end{aligned} \tag{3.22}$$

Demostración. Note que ambos lados de la ecuación son holomorfas en T y antiholomorfas en S. El resultado sigue utilizando continuación analítica, pues en la diagonal $T = S$, las expresiones

$$\int_V I_w(u,v) e^{-\frac{1}{2}\langle w|w\rangle}\,dw$$

y

$$\det{}^{-1/2}(1-T^2)\exp\big[\tfrac{1}{4}\big(\langle u \mid T(1-T^2)^{-1}u\rangle + 2\langle u \mid (1-T^2)^{-1}v\rangle + \langle T(1-T^2)^{-1}v \mid v\rangle\big)\big]$$

coinciden. El razonamiento es análogo al de la prueba del Lema 2.18. □

En particular, note que $I_w(0,0) = \det^{-1/2}(1 - TS)$, por lo que

$$\int_V \exp\big[\tfrac{1}{4}(\langle v \mid Tv\rangle + \langle Sv \mid v\rangle)\big] e^{-\frac{1}{2}\langle v|v\rangle}\,dv = \det{}^{-1/2}(1 - TS). \tag{3.23}$$

Proposición 3.27. *Si $g, h \in \mathrm{Sp}(V)$ y si $u \in V$, entonces*

$$\nu(g) f_{T_h}(u) = \det{}^{1/4}(1 - T_g^2)\det{}^{-1/2}(1 - T_h\widehat{T}_g) f_{T_{gh}}(u). \tag{3.24}$$

Demostración. Por definición,

$$\nu(g) f_{T_h}(u) = \int_V K_{\nu(g)}(u,v) f_{T_h}(v) e^{-\frac{1}{2}\langle v|v\rangle}\,dv.$$

Utilizando la relación (3.21) se obtiene que

$$\begin{aligned}
\nu(g) f_{T_h}(u) &= c_g \int_V \exp\left[\tfrac{1}{4}\left(\langle u \mid T_g u\rangle + \langle v \mid T_h v\rangle + 2\langle p_g^{-1} u \mid v\rangle + \langle \widehat{T}_g v \mid v\rangle\right)\right] e^{-\frac{1}{2}\langle v|v\rangle}\, dv \\
&= c_g\, e^{\frac{1}{4}\langle u|T_g u\rangle} \int_V \exp\left[\tfrac{1}{4}\left(\langle v \mid T_h v\rangle + 2\langle p_g^{-1} u \mid v\rangle + \langle \widehat{T}_g v \mid v\rangle\right)\right] e^{-\frac{1}{2}\langle v|v\rangle}\, dv,
\end{aligned}$$

aplicando el Lema 1.11.

Sumando y restando la expresión $\frac{1}{4}\langle p_g^{-1} u \,|\, T_h(1-\widehat{T}_g T_h)^{-1} p_g^{-1} u\rangle$ al exponente, obtenemos

$$\begin{aligned}
\nu(g) f_{T_h}(u) &= c_g\, e^{\frac{1}{4}(\langle u|T_g u\rangle + \langle p_g^{-1}u|T_h(1-\widehat{T}_g T_h)^{-1} p_g^{-1} u\rangle)} \\
&\quad \times \int_V \exp\left[\tfrac{1}{4}\left(\langle v \mid T_h v\rangle + \langle 2p_g^{-1} u \mid v\rangle + \langle \widehat{T}_g v \mid v\rangle\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. - \langle p_g^{-1} u \mid T_h(1-\widehat{T}_g T_h)^{-1} p_g^{-1} u\rangle\right)\right] e^{-\frac{1}{2}\langle v|v\rangle}\, dv \\
&= c_g\, e^{\frac{1}{4}(\langle u|T_g u\rangle + \langle u|p_g^{-t} T_h(1-\widehat{T}_g T_h)^{-1} p_g^{-1} u\rangle)} \\
&\quad \times \int_V \exp\left[\tfrac{1}{4}\left(\langle v \mid T_h v\rangle + 2\langle p_g^{-1} u \mid v\rangle + \langle \widehat{T}_g v \mid v\rangle\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. - \langle u \mid p_g^{-t} T_h(1-\widehat{T}_g T_h)^{-1} p_g^{-1} u\rangle\right)\right] e^{-\frac{1}{2}\langle v|v\rangle}\, dv.
\end{aligned}$$

Ahora, de la relación (1.13) se sigue que

$$\begin{aligned}
\nu(g) f_{T_h}(u) &= c_g\, e^{\frac{1}{4}\langle u|T_{gh} u\rangle} \int_V \exp\left[\tfrac{1}{4}\left(\langle v \mid T_h v\rangle + 2\langle p_g^{-1} u \mid v\rangle + \langle \widehat{T}_g v \mid v\rangle\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. - \langle u \mid T_{gh} u\rangle\right)\right] e^{-\frac{1}{2}\langle v|v\rangle}\, dv \\
&= c_g\, e^{\frac{1}{4}\langle u|T_{gh} u\rangle} \int_V \exp\left[\tfrac{1}{4}\left(\langle v \mid T_h v\rangle + \langle \widehat{T}_g v \mid v\rangle\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + 2\langle p_g^{-1} u \mid v\rangle - \langle u \mid T_{gh} u\rangle\right)\right] e^{-\frac{1}{2}\langle v|v\rangle}\, dv \\
&= c_g\, e^{\frac{1}{2}\langle u|T_{gh} u\rangle} \int_V \exp\left[\tfrac{1}{4}\left(\langle v \mid T_h v\rangle + \langle \widehat{T}_g v \mid v\rangle\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + 2\langle p_g^{-1} u \mid v\rangle - 2\langle u \mid T_{gh} u\rangle\right)\right] e^{-\frac{1}{2}\langle v|v\rangle}\, dv.
\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 3.26 con $T = T_h$ y $S = \widehat{T}_g$,

$$\begin{aligned}
\nu(g) f_{T_h}(u) &= c_g\, e^{\frac{1}{2}\langle u | T_{gh} u\rangle} \int_V \exp\big[\tfrac{1}{4}\big(\langle v \mid T_h v\rangle + \langle \widehat{T}_g v \mid v\rangle \\
&\qquad\qquad + 2\langle p_g^{-1} u \mid v\rangle - 2\langle u \mid T_{gh} u\rangle\big)\big] e^{-\frac{1}{2}\langle v|v\rangle}\, dv \\
&= c_g\, e^{\frac{1}{2}\langle u|T_{gh}u\rangle} \det{}^{-1/2}(1 - T_h \widehat{T}_g) \\
&\quad \times \exp\big[\tfrac{1}{4}(-\langle T_{gh} u \mid T_h (1 - T_h \widehat{T}_g)^{-1} u\rangle - 2\langle T_{gh} u \mid (1 - T_h^2) p_g^{-t} u\rangle \\
&\qquad\qquad + \langle \widehat{T}_g (1 - T_h \widehat{T}_g)^{-1} p_g^{-t} u \mid p_g^{-t} u\rangle)\big] \\
&= c_g\, e^{\frac{1}{2}\langle u|T_{gh}u\rangle} \det{}^{-1/2}(1 - T_h \widehat{T}_g) \exp[-\tfrac{1}{4}\langle u \mid T_{gh} u\rangle] \\
&= c_g\, e^{\frac{1}{4}\langle u|T_{gh}u\rangle} \det{}^{-1/2}(1 - T_h \widehat{T}_g).
\end{aligned}$$

Empleando la definición de c_g y la definición de $f_{T_{gh}}$, se concluye que

$$\begin{aligned}
\nu(g) f_{T_h}(u) &= c_g \det{}^{-1/2}(1 - T_h \widehat{T}_g) \exp\big[\tfrac{1}{4}\langle u \mid T_g u\rangle + \langle p_g^{-1} u \mid T_h (1 - \widehat{T}_g T_h) p_g^{-1} u\rangle\big] \\
&= c_g e^{\frac{1}{4}\langle u|T_{gh}u\rangle} \det{}^{-1/2}(1 - T_h \widehat{T}_g) \\
&= c_g \det{}^{-1/2}(1 - T_h \widehat{T}_g)\, f_{T_{gh}}(u),
\end{aligned}$$

de donde sigue el resultado (3.24). □

Proposición 3.28. *Si* $g, h \in \mathrm{Sp}(V)$ *entonces*

$$\begin{aligned}
J &:= \int_V K_{\nu(g)}(u, s) K_{\nu(h)}(s, v) e^{-\frac{1}{2}\langle s|s\rangle}\, ds \\
&= c_g c_h \det{}^{-1/2}(1 - T_h \widehat{T}_g) \exp\big\{\tfrac{1}{4}(\langle u \mid T_{gh} u\rangle + \langle \widehat{T}_{gh} v \mid v\rangle + 2\langle p_{gh}^{-1} u \mid v\rangle)\big\}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Demostración. Los cálculos en esta prueba son similares a los cálculos de la prueba de la proposición anterior. Usando la definición de los factores c_g, el Lema 1.11, la identidad (1.13) y la fórmula (3.22), obtenemos que

$$\begin{aligned}
J &= c_g c_h e^{\frac{1}{4}(\langle u|T_g u\rangle + \langle \widehat{T}_h v|v\rangle)} \\
&\qquad \times \int_V \exp\big[\tfrac{1}{4}\big(\langle s \mid T_h s\rangle + \langle \widehat{T}_g s \mid s\rangle + 2\langle s \mid p_h^{-t} v\rangle + 2\langle p_g^{-1} u \mid s\rangle\big)\big] e^{-\frac{1}{2}\langle s|s\rangle}\, ds.
\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 3.26 obtenemos que

$$J = c_g c_h \det{}^{-1/2}(1 - T_h \widehat{T}_g) \exp\big\{\tfrac{1}{4}(\langle u \mid T_{gh} u\rangle + \langle \widehat{T}_{gh} v \mid v\rangle + 2\langle p_{gh}^{-1} u \mid v\rangle)\big\},$$

lo que concluye el resultado. □

Así, si

$$c(g,h) := c_g c_h c_{gh}^{-1} \det{}^{-1/2}(1 - T_h \widehat{T}_g) \tag{3.26}$$

entonces

$$\nu(g)\nu(h) = c(g,h)\, \nu(gh), \tag{3.27}$$

con $g, h \in \mathrm{Sp}(V)$. Note que $c(g,h)$ debe ser un factor de fase para que ν sea unitario.

Como $1 - T_h\widehat{T}_g$ no es una aplicación definida positiva, entonces el número $c(g,h) \in \mathbb{C}$ no es necesariamente positivo. Como los tres operadores en (3.27) son unitarios, se ve que $c(g,h)$ es un factor de fase, cuya forma exponencial es

$$c(g,h) = \exp\big[i \operatorname{Arg}\big(\det{}^{-1/2}(1 - T_h\widehat{T}_g)\big)\big]. \tag{3.28}$$

La identidad (3.27) establece que, en efecto, $\nu(g)$ es una representación proyectiva del grupo $\mathrm{Sp}(V)$. Esta es la llamada **representación metapléctica** del grupo simpléctico.

3.3. Álgebras de Clifford y campos fermiónicos libres

Consideremos el espacio vectorial $V = V_J$ con una forma bilineal d, simétrica y definida positiva.

Definición 3.29. Si $w \in V$, se define la **multiplicación exterior** $\varepsilon(w) \in \mathrm{End}(\Lambda^\bullet V)$ por

$$\varepsilon(w)[v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k] := w \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k,$$

para todo $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$. ◊

Como $\varepsilon(w)^2[v_1 \wedge \cdots \wedge v_k] = w \wedge (w \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = (w \wedge w) \wedge (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = 0$, entonces $\varepsilon(w)^2 \equiv 0$ en $\mathrm{End}(\Lambda^\bullet V)$.

Definición 3.30. Para cada $u \in V$, se define $\iota(u) \in \mathrm{End}(\Lambda^\bullet V)$, llamado **operador de contracción**, como

$$\iota(u)[v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k] := \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} d(u, v_j)\, v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_j} \wedge \cdots \wedge v_k,$$

para todo $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$. ◊

Resulta que $\iota(u)^2 \equiv 0$ en $\mathrm{End}(\Lambda^\bullet V)$ por cancelación de signos.

Lema 3.31. *Si $u, v \in V$ entonces*

$$\varepsilon(v)\varepsilon(u) + \varepsilon(u)\varepsilon(v) = 0 = \iota(v)\iota(u) + \iota(v)\iota(u).$$

Demostración. Si $v_1 \dots, v_k \in V$ entonces

$$\begin{aligned}&\big(\varepsilon(v)\varepsilon(u) + \varepsilon(u)\varepsilon(v)\big)[v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k] \\ &\qquad := (v \wedge u) \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_k + (u \wedge v) \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \\ &\qquad = v \wedge u \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_k - v \wedge u \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = 0.\end{aligned}$$

Por cancelación se signos se tiene que $\iota(v)\iota(u) + \iota(v)\iota(u) = 0$. □

Definición 3.32. A partir del espacio vectorial real $V = (V, d)$, se define el **álgebra de Clifford** $C\ell(V, d)$ como la subálgebra de $\mathrm{End}(\Lambda^\bullet V)$ generada por los operadores

$$c(v) := \varepsilon(v) + \iota(v),$$

para todo $v \in V$. ◊

Lema 3.33. *Si $u, v \in V$ entonces $\varepsilon(u)\iota(v) + \iota(v)\varepsilon(u) = d(u, v)1$ en $\mathrm{End}(\Lambda^\bullet V)$, donde 1 es el operador identidad sobre $\Lambda^\bullet V$.*

Demostración. Vea que

$$\varepsilon(u)\iota(v)[v_1 \wedge \cdots \wedge v_k] = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} d(v_j, v)\, u \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_j} \wedge \cdots \wedge v_k$$

y

$$\iota(v)\varepsilon(u)[v_1 \wedge \cdots \wedge v_k] = d(u, v)\, v_1 \wedge \cdots \wedge v_k + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j d(v_j, v)\, u \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_j} \wedge \cdots \wedge v_k,$$

por lo que

$$\big(\varepsilon(u)\iota(v) + \iota(v)\varepsilon(u)\big)[v_1 \wedge \cdots \wedge v_k] = d(u, v)\, v_1 \wedge \cdots \wedge v_k.$$

Se concluye que $\varepsilon(u)\iota(v) + \iota(v)\varepsilon(u) = d(u, v)1$. □

En adelante, suprimimos el operador 1, escribiendo $\varepsilon(u)\iota(v) + \iota(v)\varepsilon(u) = d(u, v)$ simplemente.

Utilizando el lema anterior y las igualdades $\varepsilon(v)^2 \equiv \iota(u)^2 \equiv 0$, obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.34. *Si $u, v \in V$ entonces $c(u)c(v) + c(v)c(u) = 2d(u, v)$.*

Demostración. Si $v, u \in V$, como

$$c(v)^2 = \varepsilon(v)^2 + \varepsilon(v)\iota(v) + \iota(v)\varepsilon(v) + \iota(v)^2 = d(v, v),$$

entonces

$$\begin{aligned} c(u)c(v) + c(v)c(u) &= c(u + v)^2 - c(u)^2 - c(v)^2 \\ &= d(u + v, u + v) - d(u, u) - d(v, v) = 2\, d(u, v), \end{aligned}$$

pues d es una aplicación bilineal simétrica. □

El siguiente teorema es la propiedad universal de las álgebras de Clifford, cuya demostración se encuentra en cualquier libro clásicos de álgebras de Clifford, por ejemplo en [29].

Teorema 3.35. ***(Chevalley)*** *Si A es un álgebra sobre $\mathbb{R}$ con unidad 1, y si $f : V \to A$ es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal tal que $f(x)^2 = d(x, x)\,1$ para todo $x \in V$, entonces existe un único homomorfismo de álgebras $\tilde{f} : \mathrm{C}\ell(V, d) \to A$ tal que $\tilde{f}(x) = f(x)$ para $x \in V$.* ⊟

En otras palabras, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] \arrow[dr, dashed, "\tilde{f}"'] & \mathrm{C}\ell(V, d) \arrow[d, "f"] \\ & A \end{tikzcd}$$

esto es: la aplicación $g : V \to \mathrm{C}\ell(V, d)$ satisface $\tilde{f} \circ g = f$.

La multiplicación en el álgebra de Clifford $\mathrm{C}\ell(V, d)$ es $c(u)c(v)$, que se escribe simplemente como uv. Por ende, la igualdad de la proposición anterior se puede escribir como

$$uv + vu = 2d(u, v), \quad \text{para todo} \quad u, v \in V. \tag{3.29a}$$

Hasta el momento, se ha hablado de álgebras de Clifford *reales*, pero nos interesan más las álgebras de Clifford complejas. Podemos complexificar el álgebra exterior $\Lambda^\bullet(V)$ utilizando la complexificación de V: $V^{\mathbb{C}} = V \oplus iV$. La complexificación de $\Lambda^\bullet(V)$ es $\Lambda^\bullet(V^{\mathbb{C}})$; y el álgebra de Clifford asociada a esta nueva álgebra exterior se denota como $\mathbb{C}\ell(V, d) = \mathbb{C}\ell(V)$.

Al igual que en el caso real, la identificación $vu \leftrightarrow c(v)c(u)$, donde $v = v_1 + iv_2$ y $u = u_1 + iu_2$ son elementos de $V^{\mathbb{C}}$, se mantiene de manera natural, al igual que la igualdad

$$uv + vu = 2d(u, v) \quad \text{para todo} \quad u, v \in V^{\mathbb{C}}. \tag{3.29b}$$

Podemos considerar el álgebra $\mathbb{C}\ell(V)$ como el álgebra exterior dotada con la aplicación $\mathbb{C}$-lineal $\sigma\colon \mathbb{C}\ell(V) \to \Lambda^\bullet(V^{\mathbb{C}})$ dada por $\sigma(a) = a[1]$. Dicha aplicación se denomina **aplicación de símbolo** de $a \in \mathbb{C}\ell(V)$.

Proposición 3.36. *La aplicación* $\sigma\colon \mathbb{C}\ell(V) \to \Lambda^\bullet(V^{\mathbb{C}})$ *es un isomorfismo.*

Demostración. Sean $u, v \in V^{\mathbb{C}}$ y sea $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de $V^{\mathbb{C}}$ y defínase

$$E := \{e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_r}\} \subset \mathcal{E}, \quad \text{con} \quad 1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leqslant n.$$

Note que $\sigma(uv) = c(u)c(v)[1] = c(u)[v] = u \wedge v + d(u, v)$, por lo que

$$\sigma(e_{k_1}e_{k_2}) = e_{k_1} \wedge e_{k_2} + d(e_{k_1}, e_{k_2}) = e_{k_1} \wedge e_{k_2},$$

y en general $\sigma(e_{k_1}e_{k_2}\cdots e_{k_r}) = e_{k_1} \wedge e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_{k_r}$, para todo $E \subseteq \mathcal{E}$. Esto muestra la sobreyectividad.

Ahora bien, si

$$\sigma\Bigl(\sum_E \alpha_E\, e_{k_1}e_{k_2}\cdots e_{k_r}\Bigr) = \sum_E \alpha_E\, e_{k_1} \wedge e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_{k_r} = 0,$$

entonces todos los α_E son ceros porque $\{e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_r}\}$ es un conjunto linealmente independiente en V, lo que implica que σ es inyectiva. Por ende σ es una biyección. $\square$

Corolario 3.37. *Los espacios vectoriales* $\mathbb{C}\ell(V)$ *y* $\Lambda^\bullet(V^{\mathbb{C}})$ *son isomorfos.*

La aplicación $\mathbb{C}$-lineal inversa de σ se denota como Q (llamada *aplicación de cuantización* en [15]). Al aplicar Q a la identidad

$$\sigma(uv) = v \wedge w + d(u, v) \tag{3.30}$$

se obtiene otra identidad:

$$uv = Q(u \wedge v + d(u, v)) \implies Q(u \wedge v) = \tfrac{1}{2}(uv - vu). \tag{3.31}$$

La imagen $\sigma(uv)$ del producto de Clifford uv es la suma del producto cuña de dichos vectores y un escalar.

Cualquier elemento $a \in \mathbb{C}\ell(V)$ es el producto de vectores, por lo que podemos descomponer el álgebra de Clifford en dos subalgebras: la subálgebra generada por los elementos de la forma $a^+ := v_1 v_2 \cdots v_{2m}$ (llamados *elementos pares* del álgebra de Clifford) y el subespacio vectorial generado por los elementos de la forma $a^- := v_1 v_2 \cdots v_{2m+1}$ (llamados *elementos impares* del álgebra de Clifford).

Definición 3.38. La subálgebra generada por los elementos a^+ se le denomina **subálgebra par de Clifford** y se denota como $\mathbb{C}\ell^+(V)$; mientras que al subespacio vectorial generado por los elementos de la forma a^- se le denomina **subespacio impar** de Clifford y se denota como $\mathbb{C}\ell^-(V)$. Note que $a^+ + a^- \in \mathbb{C}\ell(V)$ y el único elemento que es producto de una cantidad par e impar de vectores simultáneamente es el cero $0 \in \mathbb{C}\ell(V)$, por lo que

$$\mathbb{C}\ell(V) = \mathbb{C}\ell^+(V) \oplus \mathbb{C}\ell^-(V).$$

En otras palabras, $\mathbb{C}\ell(V)$ es un álgebra $\mathbb{F}_2$-graduada (i.e., una *superálgebra*.)[2] ◊

Definición 3.39. Si $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal orientada de $V^{\mathbb{C}}$, se define el **elemento de quiralidad** de $\mathbb{C}\ell(V)$ como

$$\gamma := (-i)^m \, e_1 e_2 \cdots e_n,$$

si $n = 2m$ o $n = 2m + 1$. ◊

Lema 3.40. *La definición del elemento de quiralidad es independiente de la base ortonormal orientada escogida.*

Demostración. Si $\mathcal{E}' = \{u_1, \dots, u_n\}$ es otra base ortonormal de (V, d) con la misma orientación que $\mathcal{E}$, entonces

$$u_k = \sum_{l=1}^{n} m_{jl} e_l \quad \text{para cada} \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

donde $M = [m_{ij}]$ es la matriz de cambio de base, que es una matriz ortogonal con $\det M = +1$ porque M conserva la orientación de V, por hipótesis. Por ende

$$(-i)^m u_1 \cdots u_n = (\det M)(-i)^m e_1 \cdots e_n = (\det M)\gamma = \gamma. \qquad \square$$

Lema 3.41. *Si $n = 2m$ y si $a \in \mathbb{C}\ell^{\pm}(V)$ entonces $\gamma a \gamma = \pm a$.*

[2] La terminología **superálgebra** se le atribuye a Feliks Berezin, empleada en su libro [5].

Demostración. Primero veamos que $\gamma^2 = 1$. En efecto, como

$$\gamma^* := i^m e_n \cdots e_2 e_1 = (-1)^m (-i)^m (-1)^{m(2m\mp 1)} e_1 e_2 \cdots e_n = \gamma,$$

por lo que

$$\gamma\gamma = \gamma^*\gamma = e_n e_{n-1} \cdots e_1 e_1 e_2 \cdots e_n = 1 \implies \gamma^2 = +1.$$

Ahora bien, note que $\gamma e_j = (-1)^{n-1} e_j \gamma = -e_j \gamma$. Entonces, si $a = e_{k_1} e_{k_2} \ldots e_{k_r}$:

$$\begin{aligned} \gamma a \gamma &= \gamma e_{k_1} e_{k_2} \cdots e_{k_r} \gamma \\ &= (-1)^r e_{k_1} e_{k_2} \cdots e_{k_r} \gamma\gamma = \pm a \gamma\gamma = \pm a \end{aligned}$$

para $a \in \mathbb{C}\ell^+(V)$ (si r es par) o para $a \in \mathbb{C}\ell^-(V)$ (si r es impar). □

Considere ahora una polarización W_J para $\mathbb{C}\ell(V)$. Para $w \in W_J$, se definen los operadores de *multiplicación exterior* y *contracción* en $\Lambda^\bullet(W_J)$ como

$$\varepsilon(w) : \alpha \mapsto w \wedge \alpha$$

y

$$\iota(w^*) : w_1 \wedge \cdots \wedge w_k \mapsto \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l-1} \langle\!\langle w \mid w_l \rangle\!\rangle w_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{w_l} \wedge \cdots \wedge w_k.$$

Note que $\iota(w^*)$ depende *antilinealmente* de w.

Al igual que en los espacios de Fock bosónicos, se pueden definir los operadores de creación y aniquilación en los espacios de Fock fermiónicos.

Definición 3.42. Los **operadores de creación y aniquilación** sobre $\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(V_J)$ están dados, para todo $v \in V$, como

$$a^\dagger(v)[v_1 \wedge \cdots \wedge v_k] := v \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k, \tag{3.32a}$$

$$a(v)[v_1 \wedge \cdots \wedge v_k] := \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \langle v \mid v_j \rangle \, v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_j} \wedge \cdots \wedge v_k. \tag{3.32b}$$

Note la diferencia entre estas expresiones y las Definiciones 3.29 y 3.30. ◊

Definición 3.43. Se define el **anticonmutador** de dos operadores $A, B \in \operatorname{End}(\Lambda^\bullet V)$ como

$$\{A, B\} := AB + BA.$$ ◊

Ahora, determinaremos las relaciones CAR para $a^\dagger$ y a. Si $v, u \in V$ entonces

$$\{a^\dagger(v), a^\dagger(u)\} = a^\dagger(v)a^\dagger(u) + a^\dagger(u)a^\dagger(v).$$

Aplicando este operador a $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in \mathcal{F}(V)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
&\big(a^\dagger(v)a^\dagger(u) + a^\dagger(u)a^\dagger(v)\big)[v_1 \wedge \cdots \wedge v_k] \\
&\qquad = (v \wedge u) \wedge (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) + (u \wedge v) \wedge (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) \\
&\qquad = v \wedge u \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_k - v \wedge u \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = 0.
\end{aligned}$$

Este es un cálculo análogo al aplicado para demostrar el Lema 3.31.

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
&\{a(v), a(u)\}[v_1 \wedge \cdots \wedge v_k] = \big(a(v)a(u) + a(u)a(v)\big)[v_1 \wedge \cdots \wedge v_k] \\
&\quad = \sum_{j<l} (-1)^{l-1}(-1)^{j-1} \langle v \mid v_j \rangle \langle u \mid v_l \rangle\, v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_j} \wedge \cdots \wedge \widehat{v_l} \wedge \cdots \wedge v_k \\
&\qquad + \sum_{j>l} (-1)^{j-2}(-1)^{l-1} \langle v \mid v_j \rangle \langle u \mid v_l \rangle\, v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_l} \wedge \cdots \wedge \widehat{v_j} \wedge \cdots \wedge v_k \\
&\qquad + \sum_{j<l} (-1)^{l-1}(-1)^{j-1} \langle u \mid v_j \rangle \langle v \mid v_l \rangle\, v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_j} \wedge \cdots \wedge \widehat{v_l} \wedge \cdots \wedge v_k \\
&\qquad + \sum_{j>l} (-1)^{j-2}(-1)^{l-1} \langle u \mid v_j \rangle \langle v \mid v_l \rangle\, v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_l} \wedge \cdots \wedge \widehat{v_j} \wedge \cdots \wedge v_k
\end{aligned}$$

Lo cual equivale a

$$\begin{aligned}
&\{a(v), a(u)\}[v_1 \wedge \cdots \wedge v_k] \\
&\quad = -\sum_{j<l} (-1)^{j+l-3} \langle v \mid v_j \rangle \langle u \mid v_l \rangle\, v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_j} \wedge \cdots \wedge \widehat{v_l} \wedge \cdots \wedge v_k \\
&\qquad + \sum_{l<j} (-1)^{j+l-3} \langle v \mid v_j \rangle \langle u \mid v_l \rangle\, v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_l} \wedge \cdots \wedge \widehat{v_j} \wedge \cdots \wedge v_k \\
&\qquad - \sum_{j<l} (-1)^{j+l-3} \langle v \mid v_l \rangle \langle u \mid v_j \rangle\, v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_j} \wedge \cdots \wedge \widehat{v_l} \wedge \cdots \wedge v_k \\
&\qquad + \sum_{l<j} (-1)^{j+l-3} \langle v \mid v_l \rangle \langle u \mid v_j \rangle\, v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_l} \wedge \cdots \wedge \widehat{v_j} \wedge \cdots \wedge v_k = 0
\end{aligned}$$

por cancelación de términos. También

$$\{a(v), a^\dagger(u)\} = a(v)a^\dagger(u) + a^\dagger(u)a(v),$$

y entonces

$$\begin{aligned}\{a(v), a^\dagger(u)\}[v_1 \wedge \cdots \wedge v_k] &= \big(a(v)a^\dagger(u) + a^\dagger(u)a(v)\big)[v_1 \wedge \cdots \wedge v_k] \\ &= \langle v \mid u\rangle + \sum_{j=1}^{k}(-1)^j \langle v \mid v_j\rangle\, u \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_j} \wedge \cdots \wedge v_k \\ &\quad + u \wedge \left(\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\langle v \mid v_j\rangle\, v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_j} \wedge \cdots \wedge v_k\right) \\ &= \langle v \mid u\rangle\end{aligned}$$

por cancelación de signos en la suma.

En conclusión, las relaciones canónicas de anticonmutación de los operadores de creación y aniquilación fermiónicos son

$$\{a^\dagger(v_1), a^\dagger(v_2)\} = \{a(v_1), a(v_2)\} = 0 \quad \text{y} \quad \{a(v_1), a^\dagger(v_2)\} = \langle v_1 \mid v_2\rangle, \tag{3.33}$$

para todo $v_1, v_2 \in V$.

Definición 3.44. La acción (de Clifford) de V en W_J se define como

$$B(v) := \varepsilon(P_J v) + \iota(P_{-J} v) = a(v) + a^\dagger(v),$$

donde $P_{\pm J}$ son los operadores ortogonales definidos en (1.16). ◊

Lema 3.45. *Si $v \in V$ entonces $B(v)^2 = d(v, v)$.*

Demostración. Note que

$$\begin{aligned}B(v)^2 &= [a^\dagger(v) + a(v)][a^\dagger(v) + a(v)] \\ &= a^\dagger(v)^2 + a(v)^2 + \{a^\dagger(v), a(v)\} \\ &= a^\dagger(v)^2 + a(v)^2 + \langle v \mid v\rangle.\end{aligned}$$

De las Definiciones 3.29 y 3.30 es inmediato que

$$a^\dagger(v)^2 + a(v)^2 = 0,$$

por lo que

$$B(v)^2 = \langle v \mid v\rangle = d(v, v) + is(v, v) = d(v, v).$$ □

Una demostración alternativa se puede dar de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}\pi_J(v)^2 &= [\varepsilon(P_J v) + \iota(P_{-J} v)][\varepsilon(P_J v) + \iota(P_{-J} v)]\\ &= \varepsilon(P_J v)^2 + \varepsilon(P_J v)\iota(P_{-J} v) + \iota(P_{-J} v)\varepsilon(P_J v) + \iota(P_{-J})^2\\ &= \varepsilon(P_J v)\iota(P_{-J} v) + \iota(P_{-J} v)\varepsilon(P_J v),\end{aligned}$$

por lo que

$$\pi_J(v)^2 = 2\, d(P_J v, P_{-J} v) = d(v, v)$$

invocando el Lema 3.33 y el Lema 1.17.

Ahora bien, si $u, v \in V$, entonces

$$\begin{aligned}B(v)B(u) &= [a(v) + a^\dagger(v)][a(u) + a^\dagger(u)]\\ &= a(v)a(u) + a(v)a^\dagger(u) + a^\dagger(v)a(u) + a^\dagger(v)a^\dagger(u),\\ B(u)B(v) &= [a(u) + a^\dagger(u)][a(v) + a^\dagger(v)]\\ &= a(u)a(v) + a(u)a^\dagger(v) + a^\dagger(u)a(v) + a^\dagger(u)a^\dagger(v).\end{aligned}$$

Ahora, aplicando las relaciones canónicas de anticonmutación para los operadores de creación y aniquilación obtenemos que

$$B(v)B(u) + B(u)B(v) = 0 + \langle v \mid u\rangle + \langle u \mid v\rangle + 0 = 2\, d(v, u).$$

Utilizando el anticonmutador, la igualdad anterior se puede escribir como

$$\{B(v), B(u)\} = 2\, d(u, v). \tag{3.34}$$

Esta relación se denomina **relación canónica de anticonmutación** para los operadores $B(v)$ sobre $\mathcal{F}(V)$.

Análogamente que en el espacio de Fock bosónico, cualquier $o \in \mathrm{U}_J(V)$ determina un operador unitario en $\mathcal{F}(V)$, mediante la acción $\Gamma(o)$ definida por

$$\Gamma(o)\Omega := \Omega \quad \text{y} \quad \Gamma(o)[v_1 \wedge \cdots \wedge v_k] := ov_1 \wedge \cdots \wedge ov_k \tag{3.35}$$

para $v_k \in V$ y $k = 1, \ldots, m$.

El siguiente lema será de mucha utilidad para definir las transformaciones de Bogoliubov en $\mathcal{F}(V)$.

Lema 3.46. *Si $v \in V$, entonces $B(Jv) = i[a^\dagger(v) - a(v)]$.*

Demostración. Sean $v_1, \dots, v_k \in V$. Vea que

$$a^\dagger(Jv)[v_1 \wedge \cdots \wedge v_k] := Jv \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = i(v \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = ia^\dagger(v)[v_1 \wedge \cdots \wedge v_k].$$

También, aplicando el Lema 1.4

$$\begin{aligned} a(Jv)[v_1 \wedge \cdots \wedge v_k] &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \langle Jv \mid v_j \rangle \, v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_j} \wedge \cdots \wedge v_k \\ &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} (-i) \langle v \mid v_j \rangle \, v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_j} \wedge \cdots \wedge v_k \\ &= -i \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \langle v \mid v_j \rangle \, v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_j} \wedge \cdots \wedge v_k = -ia(v). \end{aligned}$$

Como $B(Jv) := a^\dagger(Jv) + a(Jv)$, se sigue el resultado. □

Del lema anterior se concluye que

$$a(v) = \tfrac{1}{2}[B(v) + iB(Jv)], \tag{3.36a}$$
$$a^\dagger(v) = \tfrac{1}{2}[B(v) - iB(Jv)]. \tag{3.36b}$$

Proposición 3.47. *Cada $\Gamma(o)$ es un operador unitario sobre el espacio de Fock fermiónico $\mathcal{F}(V)$.*

Demostración. Si $\boldsymbol{v} := v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ y $\boldsymbol{u} := u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$ entonces

$$\begin{aligned} \langle \Gamma(o)\boldsymbol{v} \mid \Gamma(o)\boldsymbol{u} \rangle &= \langle ou_1 \wedge \cdots \wedge ou_k \mid ov_1 \wedge \cdots \wedge ov_k \rangle \\ &= \det[\langle ov_k \mid ou_k \rangle] = \det[\langle v_k \mid u_k \rangle] \\ &= \langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \mid u_1 \wedge \cdots \wedge u_k \rangle = \langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{u} \rangle, \end{aligned}$$

por la definición del producto escalar sobre $\Lambda(V)$. □

Lema 3.48. *Si $v \in V$ y $o \in \mathrm{U}_J(V)$ entonces*

$$\Gamma(o)a^\dagger(v)\Gamma(o)^{-1} = a^\dagger(ov) \quad y \quad \Gamma(o)a(v)\Gamma(o)^{-1} = a(ov).$$

Demostración. Sean $v_1, \ldots, v_k \in V$. Estas igualdades siguen directamente de las definiciones de los operadores de creación y aniquilación. Para $a(v)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\Gamma(o)a^\dagger(v)\Gamma(o)^{-1}[v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k] &= \Gamma(o)a^\dagger(v)[o^{-1}v_1 \wedge \cdots \wedge o^{-1}v_k] \\ &= \Gamma(o)[v \wedge o^{-1}v_1 \wedge \cdots \wedge o^{-1}v_k] \\ &= ov \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \\ &= a^\dagger(ov)[v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k].\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\Gamma(o)a(v)\Gamma(o)^{-1}[v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k] = \Gamma(o)a(v)[o^{-1}v_1 \wedge \cdots \wedge o^{-1}v_k],$$

lo que equivale a

$$\Gamma(o)\left(\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\langle v \mid o^{-1}v_j\rangle\, o^{-1}v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{o^{-1}v_j} \wedge \cdots \wedge o^{-1}v_k\right).$$

Aplicando la definición de $\Gamma(o)$ obtenemos que la última expresión es igual a

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\langle v \mid o^{-1}v_j\rangle\, v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_j} \wedge \cdots \wedge v_k;$$

i.e.,

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\langle ov \mid v_j\rangle v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v_j} \wedge \cdots \wedge v_k = a(ov)[v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k]. \qquad \square$$

Corolario 3.49. *Si $o \in \mathrm{U}_J(V)$ y $v \in V$ entonces*

$$\Gamma(o)B(v)\Gamma(o)^{-1} = B(ov).$$

Demostración. Como $B(v) = a^\dagger(v) + a(v)$, entonces

$$\begin{aligned}\Gamma(o)B(v)\Gamma(o)^{-1} &= \Gamma(o)(a^\dagger(v) + a(v))\Gamma^{-1}(o) \\ &= \Gamma(o)a^\dagger(v)\Gamma(o)^{-1} + \Gamma(o)a(v)\Gamma(o)^{-1} \\ &= a^\dagger(ov) + a(ov) = B(ov).\end{aligned} \qquad \square$$

Con lo anterior podemos definir lo que se denomina *campo fermiónico libre*, análogo a la Definición 3.13 en $\mathcal{B}(V)$.

Definición 3.50. Un **campo fermiónico libre** es una cuaterna $(\mathcal{F}(V), B, \Gamma, \Omega)$, donde $\mathcal{F}(V)$ es el espacio de Fock fermiónico; B es la acción de Clifford del espacio vectorial V en la polarización W_J; Γ es una familia de operadores unitarios que satisfacen (3.35); y Ω es un vector de norma 1 en el sector del vacío para la polarización W_0. ◊

3.4. La representación de espín del grupo ortogonal especial

Considere el grupo multiplicativo $\mathbb{C}\ell(V)^\times$ y el subgrupo $\{ u \in \mathbb{C}\ell(V) : u^* u = 1 \}$ de elementos unitarios de $\mathbb{C}\ell(V)^\times$. Si V es un espacio $\mathbb{R}$-vectorial entonces $v = v^*$ para $v \in V$. Invocando la identidad (3.29b) llegamos a que si $d(v, v) = 1$ entonces $v^2 = v^* v = 1$. Note también que $v^{-1} = v$.

Consideremos ahora la complexificación $V^{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}\ell(V)$, entonces $w \in V^{\mathbb{C}}$ si y solamente si $w = v_1 + i v_2$, donde $v_1, v_2 \in V$. Como

$$w^* w = (v_1 - i v_2)(v_1 + i v_2) = v_1^2 + v_2^2 = 2,$$

por lo que $w^* w = d(v_1, v_1) + d(v_2, v_2)$. Además, $\{v, w\}$ es un conjunto linealmente dependiente, por lo que $w = \lambda v$, con $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $w^* w = |w|^2 = 1$ entonces $|\lambda| = 1$ i.e., $\lambda \in \mathbb{T}$.

Lema 3.51. *Si $v, x \in V$ y $d(v, v) = 1$ entonces $r \colon V \to V : x \mapsto -v x v^{-1}$ es una reflexión en V con $r(v) = -v$.*

Demostración. Observe que

$$-v x v^{-1} = -v x v = (x v - 2d(v, x))v = x v^2 - 2d(v, x)v = x - 2d(v, x)v \in V.$$

También $r(-v) = -v(-v)v^{-1} = v^2 v^{-1} = v$. □

Definición 3.52. Defínase el grupo $\mathrm{Spin}^c(V)$ como el conjunto formado por todos los productos pares de elementos unitarios: $u = w_1 w_2 \cdots w_{2k}$, donde $k \in \mathbb{N}$. (Cuando $k = 0$, se toma $u = \lambda \in \mathbb{T} \subset \mathbb{C}\ell(V)^\times$.) ◊

Recuerde que una *rotación* es un producto de una cantidad par de reflexiones, por lo que el homomorfismo $\phi_x \colon \mathrm{Spin}^c(V) \to \mathrm{SO}(v)$ dada por $\phi_x(u) := u x u^{-1}$ es un epimorfismo. Más aún, vea que

$$\phi_x(u) = x \iff ux = xu \iff u \in Z(\mathbb{C}\ell(V)),$$

pero como el centro de un grupo matricial está conformado por matrices escalares entonces $u = \lambda \in \mathbb{T}$. Así, $\ker \phi = \mathbb{T}$, por lo que se obtiene la sucesión exacta corta[3]

$$1 \longrightarrow \mathbb{T} \longrightarrow \mathrm{Spin}^c(V) \xrightarrow{\phi} \mathrm{SO}(V) \longrightarrow 1. \tag{3.37}$$

[3] Véase [15, Ecn. (5.9)].

Si $g \in \mathrm{SO}(V)$, se quiere encontrar una representación proyectiva μ del grupo $\mathrm{SO}(V)$ tal que

$$\mu(g)B(v) = B(gv)\mu(g) \quad \text{para todo} \quad v \in V. \tag{3.38}$$

Considere la transformación $g \mapsto gJg^{-1}$. Invocando la relación (3.36), obtenemos la siguiente definición.

Definición 3.53. Si $v, v_1, \ldots, v_k \in V$ y $g \in \mathrm{SO}(V)$, se definen los operadores

$$a_g^\dagger(v) := \tfrac{1}{2}[B(v) - iB(gJg^{-1}v)] \quad \text{y} \quad a_g(v) := \tfrac{1}{2}[B(v) + iB(gJg^{-1}v)]. \qquad \Diamond$$

Lema 3.54. *Los operadores de creación y aniquilación sobre $\mathcal{F}(V)$ satisfacen las transformaciones de Bogoliubov*

$$a_g(gv) = a(p_g v) + a^\dagger(q_g v) \quad y \quad a_g^\dagger(gv) = a(q_g v) + a^\dagger(p_g v). \tag{3.39}$$

Demostración. Como $g = p_g + q_g$, entonces

$$\begin{aligned} a_g^\dagger(gv) &= \tfrac{1}{2}[B((p_g + q_g)v) - iB((p_g + q_g)Jv)] \\ &= \tfrac{1}{2}[B(p_g v) - iB(p_g Jv)] + \tfrac{1}{2}[B(q_g v) - iB(q_g Jv)]. \end{aligned}$$

Como p_g es lineal y q_g es antilineal, obtenemos de las fórmulas (3.36) que

$$\begin{aligned} a_g^\dagger(gv) &= \tfrac{1}{2}[B(p_g v) - iB(Jp_g v)] + \tfrac{1}{2}[B(q_g v) + iB(Jq_g v)] \\ &= a^\dagger(p_g v) + a(q_g v). \end{aligned}$$

Análogamente se muestra que $a_g(gv) = a(p_g v) + a^\dagger(q_g v)$. $\square$

Si $\mu(g)$ existe, debe cumplir que

$$\mu(g)a(v) = a_g(v)\mu(g), \tag{3.40a}$$
$$\mu(g)a^\dagger(v) = a_g^\dagger(v)\mu(g), \tag{3.40b}$$

para todo $v \in V$.

Proposición 3.55. *Sea $T \in \mathrm{Sk}(V)$, entonces*

$$a(e_1)f_T + a^\dagger(Te_1)f_T = 0,$$

donde $\{e_1, \ldots, e_m\}$ es una base ortonormal de V.

Demostración. Esta prueba se basa en [15, Lema 6.5].

Por definición de elemento gaussiano fermiónico

$$f_T = \sum_{2|\#(K)} \mathrm{Pf}(T_K)\varepsilon_K .$$

El pfaffiano de una matriz antisimétrica B cuadrada, de orden $2m$, se puede expresar utilizando el desarrollo de Laplace como

$$\mathrm{Pf}\, B = (-1)^{\#k\#l} b_{kl}\, \mathrm{Pf}\, B_{k'l'} ,$$

donde b_{kl} es la entrada (k, l)-ésima de la matriz B, $B_{h'l'}$ es el menor obtenido al eliminar su k-ésima columna y su l-ésima fila y $(-1)^{\#k\#l}$ es el signo de la permutación $(k, l, K \setminus \{k, l\})$.

Por ende

$$\mathrm{Pf}\, T_K = (-1)^{\#k\#l} \langle e_k \mid Te_l\rangle\, \mathrm{Pf}\, T_{K\setminus\{k,l\}} , \tag{3.41}$$

y así

$$a(e_1) f_T = a(e_1) \sum_{2|\#(K)} \mathrm{Pf}\, T_K \varepsilon_K .$$

Usando la definición del operador de aniquilación se obtiene que

$$\begin{aligned}
a(e_1) f_T &= a(e_1) \sum_{1\notin L} \sum_{k\in L} \langle e_1 \mid Te_k\rangle\, \mathrm{Pf}(T_{L\setminus\{k\}})\, e_1 \wedge e_k \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{L\setminus\{k\}} \\
&= -\sum_{k=1}^{m} \sum_{1\notin M} \mathrm{Pf}\, T_M \langle e_k \mid Te_1\rangle\, e_k \wedge \varepsilon_M \\
&= -\sum_{1\notin M} \mathrm{Pf}\, T_M\, Te_1 \wedge \varepsilon_M,
\end{aligned}$$

por ende se obtiene que

$$(a(e_1) + a^\dagger(Te_1)) f_T = \sum_{1\in N} \mathrm{Pf}\, T_N\, Te_1 \wedge \varepsilon_N .$$

Finalmente, como estamos trabajando en $\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(V_J)$, el cual es un espacio de dimensión finita, las siguientes intercalaciones de las sumatorias están justificadas:

$$\begin{aligned}
(a(e_1) + a^\dagger(Te_1)) f_T &= \sum_{0\notin K} \mathrm{Pf}\, T_{\{1\}\cup L}\, Te_1 \wedge e_1 \wedge \varepsilon_L \\
&= \sum_{0\notin K} \sum_{k\in L} \langle e_1 \mid Te_k\rangle\, \mathrm{Pf}\, T_{L\setminus\{k\}}\, Te_1 \wedge e_1 \wedge e_k \wedge \varepsilon_{L\setminus\{k\}} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle e_1 \mid Te_k\rangle \sum_{2|\#(K)} \mathrm{Pf}\, T_K\, e_k \wedge Te_1 \wedge e_1 \wedge \varepsilon_K \\
&= \sum_{2|\#(K)} \mathrm{Pf}\, T_K\, Te_1 \wedge Te_1 \wedge e_1 \wedge \varepsilon_K .
\end{aligned}$$

Como $Te_1 \wedge Te_1 = 0$ entonces $(a(e_1) + a^\dagger(Te_1))f_T = 0$. □

Cabe destacar que la penúltima igualdad en la demostración es aplicable para cualquier $v \in V$, no solamente para un vector e_1 de una base ortonormal de V.

Definición 3.56. Si $g \in \mathrm{SO}_*(V)$, los sectores del vacío en $\mathcal{F}(V)$ son generados por los elementos gaussianos f_{T_g} tales que

$$a_g(gv)f_{T_g} = 0, \quad \text{para todo} \quad v \in V. \qquad \lozenge$$

Análogamente al Lema 3.25, se tiene que el operador unitario $\mu(g)$, si existe, debe llevar el sector del vacío para W_0 en el sector del vacío para gW_0.

Por ende, si $a_g(v)\Psi = 0$ y si $g \in \mathrm{SO}_*(V)$, entonces $\Psi = c_g f_{T_g}$, donde $T_g \in \mathrm{Sk}(V)$ y $c_g \in \mathbb{C}$.

La siguiente definición se encuentra en [24].

Definición 3.57. Si $g \in \mathrm{SO}(V) \setminus \mathrm{SO}_*(V)$, sea $\{e_1, \dots, e_l\}$ una base ortonormal del subespacio complejo $\ker(p_g) \leqslant V_J$. Si r_k, $k \in \{1, \dots, l\}$, son reflexiones de $V = (V, d)$ tales que

$$r_k(e_k + Je_k) = -(e_k + Je_k) \quad \text{y} \quad r_k(v) = v \quad \text{si} \quad d(v, e_k + Je_k) = 0,$$

entonces $rg \in \mathrm{SO}_*(V)$, donde $r := r_1 r_2 \cdots r_l$. (Si $g \in \mathrm{SO}_*(V)$, tome $r := 1$ y $l = 0$.) $\lozenge$

Proposición 3.58. *Si $g \in \mathrm{SO}(V)$ y $r := r_1 r_2 \cdots r_l$ entonces*

$$(a(p_g v) + a^\dagger(q_g v))[e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_l \wedge f_{T_{rg}}] = 0.$$

Demostración. Esta fórmula está demostrado en el libro [15], en la página 228. □

La proposición anterior nos dice que

$$\mu(g)\Omega = c_g e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \wedge f_{T_{rg}},$$

donde $c_g \in \mathbb{C}$ y $g \in \mathrm{SO}(V)$. Como $\mu(g)$ debe ser unitario entonces

$$1 = \langle \mu(g)\Omega \mid \mu(g)\Omega \rangle = |c_g|^2 \langle f_{T_{rg}} \mid f_{T_{rg}} \rangle = |c_g|^2 \det{}^{1/2}(1 - T_{rg}^2),$$

de donde $|c_g| = \det^{-1/4}(1 - T_{rg}^2)$. Tomando $c_g > 0$, por las mismas razones que en caso bosónico, se llega a que

$$c_g := \det{}^{-1/4}(1 - T_{rg}^2). \tag{3.42}$$

Ahora bien, definimos una acción parcial de $\mathrm{SO}(V)$ sobre $\mathrm{Sk}(V)$ por

$$g \cdot S := (q_g + p_g S)(p_g + q_g S)^{-1}. \tag{3.43}$$

Note que esta es una transformación de Möbius. Note que, si $S^t = -S$ entonces

$$\begin{aligned}(p_g + q_g S)^t (q_g + p_g S) &= (p_g^t + S^t q_g^t)(q_g + p_g S) \\ &= p_g^t q_g + p_g^t p_g S + S^t q_g^t q_g + S^t q_g^t p_g S \\ &= p_g^t q_g + p_g^t p_g S - S q_g^t q_g - S q_g^t p_g S \\ &= -q_g^t p_g + p_g^t p_g S - S q_g^t q_g + S p_g^t q_g S,\end{aligned}$$

aplicando la identidad (1.9b). Por ende

$$(p_g + q_g S)^t (q_g + p_g S) = -(q_g^t - S p_g^t)(p_g + q_g S) = -(q_g + p_g S)^t (p_g + p_g S),$$

por lo que

$$\begin{aligned}(g \cdot S)^t &= [(q_g + p_g S)(p_g + q_g S)^{-1}]^t \\ &= [(p_g + q_g S)^t]^{-1} (q_g + p_g S)^t \\ &= -(q_g + p_g S)(p_g + q_g S)^{-1} = -(g \cdot S).\end{aligned}$$

Se concluye que $g \cdot S$ es también antisimétrica; i.e., $g \cdot S \in \mathrm{Sk}(V)$ siempre que $g \in \mathrm{Sk}(V)$.

Lema 3.59. *La acción (3.43) satisface que*

$$g \cdot S = T_g + p_g^{-t} S (1 - \widehat{T}_g S)^{-1} p_g^{-1}.$$

Demostración. Note que $g \cdot T_h = T_{gh}$, pues

$$\begin{aligned}g \cdot T_h &= (q_g + p_g T_h)(p_g + q_g T_h)^{-1} \\ &= (q_g + p_g T_h)(p_g^{-1} + T_h^{-1} q_g^{-1}) \\ &= q_g p_g^{-1} + q_g T_h^{-1} q_g^{-1} + p_g T_h p_g^{-1} + p_g T_h T_h^{-1} q_g^{-1} \\ &= T_g + p_g q_g^{-1} + p_g q_h p_h^{-1} p_g^{-1} + p_g q_g^{-1}\end{aligned}$$

aplicando la definición de T_h (1.10). Ahora, utilizando las identidad (1.13) llegamos a que

$$g \cdot T_h = T_g + p_g^{-t} T_h (1 - \widehat{T}_g T_h)^{-1} p_g^{-1} = T_{gh}.$$

Por ende, tomando $S := T_h$ llegamos a que $g \cdot S = T_g + p_g^{-t} S (1 - \widehat{T}_g S)^{-1} p_g^{-1}$. $\square$

Se puede definir un operador en $\mathcal{F}(V)$ por [15, p. 229]:

$$\mu(g) f_S := c_g \phi_g(S) f_{g\cdot S}, \tag{3.44}$$

donde $\phi_g(S) \in \mathbb{C}$ es tal que $\mu = \mu(g)$ es unitario; por lo que una elección conveniente para este escalar es

$$\phi_g(S) := \det{}^{1/2}(1 - S\widehat{T}_g), \tag{3.45}$$

por la siguiente razón: $\phi_g(S)$ debe satisfacer que

$$c_g^2 \langle \phi_g(T) f_{g\cdot T} \mid \phi_g(S) f_{g\cdot S} \rangle = \langle f_T \mid f_S \rangle.$$

Invocando (2.31) se tiene que $\langle f_T \mid f_S \rangle = \det^{+1/2}(1 - TS)$. Por otro lado, en la demostración del 1.12 se obtuvo la identidad $1 - T_g^2 = (p_g p_g^t)^{-1}$, por lo que

$$\det{}^{-1/2}(1 - T_g^2) = \det{}^{1/2}(p_g p_g^t),$$

y por ende $c_g^2 = \det^{1/2}(p_g p_g^t)$. Así, el miembro izquierdo de la ecuación equivale a

$$\overline{\phi_g(T)} \phi_g(S) \det{}^{1/2}(p_g p_g^t) \det{}^{1/2}(1 - (h \cdot S)(h \cdot T)).$$

Ahora, invocando el Lema 3.59 y el Lema 1.11 obtenemos que

$$\begin{aligned} p_g^t[(g \cdot S)(g \cdot T)]p_g &= p_g^t(1 - T_g^2)p_g - S(1 - \widehat{T}_g S)^{-1} p_g^{-1} T_g p_g - p_g^t T_g p_g^{-t} T(1 - \widehat{T}_g T)^{-1} \\ &\quad - S(1 - \widehat{T}_g S)^{-1} p_g^{-1} p_g^{-t} T(1 - \widehat{T}_g T)^{-1} \\ &= 1 + (1 - S\widehat{T}_g)^{-1} S T_g + \widehat{T}_g T (1 - \widehat{T}_g T)^{-1} \\ &\quad - (2 - S\widehat{T}_g)^{-1} S(1 - \widehat{T}_g^2) T (1 - \widehat{T}_g T)^{-1} \\ &= (1 - S\widehat{T}_g)^{-1}(1 - ST)(1 - \widehat{T}_g T)^{-1}, \end{aligned}$$

y por ende el lado izquierdo de la ecuación se reduce a

$$\overline{\phi_g(T)} \phi_g(S) \det{}^{-1/2}(1 - S\widehat{T}_g) \det{}^{1/2}(1 - ST) \det{}^{-1/2}(1 - \widehat{T}_g T).$$

Finalmente, la igualdad (3.45) simplifica esta última igualdad a $\langle f_T \mid f_S \rangle$.

Proposición 3.60. *El escalar $\phi_g(S)$ satisface*

$$\phi_{gh}(S) = \det{}^{-1/2}(1 - T_h \widehat{T}_g) \phi_g(g \cdot S) \phi_h(S),$$

siempre que $g, h, gh \in \mathrm{SO}_*(V)$ y que $h \cdot S$ y $gh \cdot S$ existan.

Demostración. Sustituyendo la identidad (1.13) en (3.45) obtenemos que

$$\begin{aligned}\phi_{gh}(S) &= \det{}^{1/2}\big(1 - S(\widehat{T}_h + p_h^{-1}\widehat{T}_g(1 - T_h\widehat{T}_g)^{-1}p_h^{-1})\big)\\ &= \det{}^{1/2}\big(p_h^{-t}(1 - S\widehat{T}_g)p_h^t - p_h^{-t}Sp_h^{-1}\widehat{T}_g(1 - T_h\widehat{T}_g)^{-1}\big)\\ &= \det{}^{-1/2}(1 - T_h\widehat{T}_g)\det{}^{1/2}\big((1 - S\widehat{T}_h)p_h^t(1 - T_h\widehat{T}_g)p_h^{-t} - Sp_h^{-1}\widehat{T}_g p_h^{-1}\big).\end{aligned}$$

Ahora, invocando el Lema 3.59:

$$\begin{aligned}\phi_{gh}(S) &= \det{}^{-1/2}(1 - T_h\widehat{T}_g)\phi_h(S)\det{}^{1/2}(1 - T_h\widehat{T}_g - p_h^{-t}(1 - S\widehat{T}_h)^{-1}Sp_h^{-1}\widehat{T}_g)\\ &= \det{}^{-1/2}(1 - T_h\widehat{T}_g)\phi_g(h\cdot S)\phi_h(S).\end{aligned}$$ □

Por ende, como $\phi_g(S) := \det^{1/2}(1 - S\widehat{T}_g)$, tomando $S := T_h$ y por la definición del factor de fase c_h, se escribe

$$c(g,h) := c_g c_h c_{gh}^{-1}\det{}^{+1/2}(1 - T_h\widehat{T}_g) \tag{3.46}$$

de modo que

$$\mu(g)\mu(h) = c(g,h)\,\mu(gh), \tag{3.47}$$

con $g, h \in \mathrm{Sp}(V)$. Note que $c(g,h)$ debe ser un factor de fase para que μ sea unitario.

Como $1 - T_h\widehat{T}_g$ no es una aplicación definida positiva, entonces el número $c(g,h) \in \mathbb{C}$ no es necesariamente positivo. Como los tres operadores en (3.47) son unitarios, se ve que $c(g,h)$ es un factor de fase, cuya forma exponencial es

$$c(g,h) = \exp\big[i\,\mathrm{Arg}\big(\det{}^{+1/2}(1 - T_h\widehat{T}_g)\big)\big]. \tag{3.48}$$

La identidad (3.47) establece que, en efecto, $\mu(g)$ es una representación proyectiva del grupo $\mathrm{SO}(V)$. Esta es la llamada **representación de espín** del grupo ortogonal especial.

Capítulo 4

Representaciones infinitesimales

Existe una conexión entre la física de partículas y la teoría de representaciones, obtenida por Eugene Wigner en la década de 1930, como se señala en [8]: vincula las propiedades de las partículas elementales con la estructura de los grupos y las álgebras de Lie. En lugar de estudiar la teoría de representaciones de estos grupos de Lie, a menudo es preferible estudiar la teoría de las representaciones estrechamente relacionadas con las álgebras de Lie correspondientes, que suelen ser más sencillas de calcular.

Las representaciones complejas de álgebras de Lie reales juegan un papel fundamental en la teoría de campos cuánticos. Para construir dichas representaciones utilizando los operadores de creación y aniquilación, se obtienen las representaciones metapléctica ν del grupo simpléctico y de espín μ del grupo ortogonal, respectivamente.

El grupo simpléctico $\mathrm{Sp}(V)$ y el grupo ortogonal especial $\mathrm{SO}(V)$ son grupos de Lie, con álgebras de Lie respectivas $\mathfrak{sp}(V)$ y $\mathfrak{so}(V)$. Si π es una representación de un grupo de Lie G con álgebra de Lie asociada $\mathfrak{g}$, la *representación infinitesimal* $\dot{\pi}$ de $\mathfrak{g}$ se define por

$$\dot{\pi}(X) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \pi(\exp(tX)), \quad \text{para todo} \quad X \in \mathfrak{g}.$$

De [16, Tma. 3.28] se obtiene la identidad

$$\exp(\dot{\pi}(X)) = \pi(\exp X), \quad \text{para} \quad X \in \mathfrak{g}. \tag{4.1}$$

Es importante recordar que un *grupo uniparamétrico* es un subgrupo del grupo de Lie G de dimensión 1 (con álgebra de Lie asociada $\mathfrak{g}$). Este subgrupo define un homomorfismo $\varphi_X : \mathbb{R} \to G$ para algún elemento $X \in \mathfrak{g}$ – aquí $\mathbb{R}$ es considerado como el grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$. Los grupos uniparamétricos son de importancia básica en la teoría de los grupos de Lie, para quienes cada elemento del álgebra de Lie asociada define tal homomorfismo, la función exponencial. En el caso de grupos matriciales viene dado por la exponencial de matrices. Se escribe

$$\exp X := \varphi_X(1),$$

y en general $\exp(tX) = \varphi_X(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

En este capítulo se estudiarán las representaciones $\dot{\nu}$ de $\mathfrak{sp}(V)$ y $\dot{\mu}$ de $\mathfrak{so}(V)$. Además, se encontrarán dos identidades *de conmutación* para la representación metapléctica infinitesimal y para la representación de espín infinitesimal.

4.1. La representación metapléctica infinitesimal

Por la definición del grupo simpléctico se tiene que $\exp(tX^t)J\exp(tX) = J$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Derivando esta ecuación en $t = 0$ obtenemos que

$$X^tJ + JX = 0.$$

Definición 4.1. El **álgebra de Lie** $\mathfrak{sp}(V)$ de $\mathrm{Sp}(V)$ consiste de todos los operadores $\mathbb{R}$-lineales $X \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ tales que $X^tJ + JX = 0$. En otras palabras,

$$\begin{aligned}\mathfrak{sp}(V) &= \{\, X \in \mathbb{C}^{n\times n} : \exp(tX) \in \mathrm{Sp}(V) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\,\} \\ &= \{\, X \in \mathbb{C}^{n\times n} : X^tJ + JX = 0\,\}.\end{aligned} \qquad \Diamond$$

Más generalmente, si G es un grupo de Lie entonces

$$\mathfrak{g} = \{\, X \in \mathbb{C}^{n\times n} : \exp(tX) \in G \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\,\}.$$

Por la Proposición 1.2, cualquier $X \in \mathfrak{sp}(V)$ se puede expresar como la suma de dos operadores

$$L_X := \tfrac{1}{2}(X - JXJ) \quad \text{y} \quad A_X := \tfrac{1}{2}(X + JXJ). \tag{4.2}$$

Este L_X es un operador $\mathbb{C}$-lineal y A_X es un operador antilineal.

Observación. En el Caso B, L_X es un operador antisimétrico y A_X es un operador simétrico. En efecto, como $X^tJ + JX = 0$, esto es, $X^t = JXJ$, tenemos

$$L_X^t = \tfrac{1}{2}(X - JXJ)^t = \tfrac{1}{2}(X^t - JX^tJ) = \tfrac{1}{2}(JXJ - X) = -L_X,$$

y

$$A_X^t = \tfrac{1}{2}(X + JXJ)^t = \tfrac{1}{2}(X^t + JX^tJ) = \tfrac{1}{2}(JXJ + X) = A_X.$$

Proposición 4.2. *Considere el operador* $T_g := q_g p_g^{-1}$*, donde* $g \in \mathrm{Sp}(V)$*. Entonces*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} p_{\exp(tX)} = L_X \quad y \quad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T_{\exp(tX)} = A_X.$$

Demostración. Por definición $p_g := \frac{1}{2}(g - JgJ)$, y entonces

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} p_{\exp(tX)} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \tfrac{1}{2}(\exp(tX) - J\exp(tX)J) = \tfrac{1}{2}(X - JXJ) =: L_X.$$

Ahora bien, como $T_g := q_g p_g^{-1} = (g + JgJ)(g - JgJ)^{-1}$, entonces

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T_{\exp(tX)} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} q_{\exp(tX)} p_{\exp(tX)}^{-1} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} q_{\exp(tX)} p_1^{-1} + q_1 \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} p_{\exp(tX)}^{-1}.$$

Como $q_g := \frac{1}{2}(g + JgJ)$, se obtiene que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} q_{\exp(tX)} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \tfrac{1}{2}(\exp(tX) + J\exp(tX)J) = \tfrac{1}{2}(X + JXJ) =: A_X.$$

Finalmente, como $p_1 = \frac{1}{2}(1 - J^2) = 1$ y $q_1 = \frac{1}{2}(1 + J^2) = 0$, el resultado sigue. □

Definición 4.3. Si $X \in \mathfrak{sp}(V)$, se definen los **hamiltonianos cuadráticos** como las aplicaciones $H_X : (V, s) \to (V, s)$ dadas por $H_X(v) := \frac{1}{2}s(v, Xv)$, con $v \in V$. ◊

Note que si $X \in \mathfrak{sp}(V)$, la correspondencia $t \mapsto \nu(\exp(tX))$ no es necesariamente un grupo uniparamétrico, pues la representación metapléctica es proyectiva. Sin embargo, existe una función $\theta_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $e^{i\theta_X(t)}\nu(\exp(tX))$ es una representación de $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +)$; esto dice que

$$t \mapsto e^{i\theta_X(t)}\nu(\exp(tX)) \tag{4.3}$$

es un homomorfismo.

Por la definición del 2-cocíclo $c(g, h)$ y la ley de grupo se tiene que

$$e^{i\theta_X(t+s)} = c(\exp(tX), \exp(sX))e^{i\theta_X(t)}e^{i\theta_X(s)}, \tag{4.4}$$

para todo $t, s \in \mathbb{R}$ y $X, Y \in \mathfrak{sp}(V)$.

El siguiente lema y su corolario serán de mucha utilidad en cálculos posteriores. Su demostración se puede encontrar en cualquier libro de análisis matricial clásico, como en [4, p. 171] y en [19, Sec. 8.3], por ejemplo.

Lema 4.4. *Si* $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *una función matricial derivable, entonces*

$$\frac{d}{dt}\det A(t) = \operatorname{Tr}\big(\operatorname{adj} A(t)\, A'(t)\big).$$

Más aún, si A es invertible, entonces

$$\frac{d}{dt}\det A(t) = \det A(t)\operatorname{Tr}\big(A(t)^{-1}\, A'(t)\big). \tag{4.5}$$

Corolario 4.5 (Fórmula de Jacobi)**.** *Si* $A\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V_J)$ *una función matricial derivable, entonces*

$$\frac{d}{dt}\big(\det_{\mathbb{C}} A(t)\big) = \operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}\big(\operatorname{adj} A(t)\, A'(t)\big).$$

Más aún, si A es invertible, entonces

$$\frac{d}{dt}\det_{\mathbb{C}} A(t) = \det_{\mathbb{C}} A(t)\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}\big(A(t)^{-1}\, A'(t)\big). \tag{4.6}$$

Demostración. Como P_J es un operador constante, utilizando las Definiciones 1.23 y 1.24 y la fórmula (4.5), obtenemos la relación (4.6), pues $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\det_{\mathbb{C}} A(t) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\det(P_J A(t) P_J)$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\det_{\mathbb{C}} A(t) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\det(P_J A(t) P_J)\\
&= \det(P_J A(t) P_J)\ \operatorname{Tr}(P_J A(t)^{-1}\, P_J^2\, A'(t) P_J),\\
&= \det(P_J A(t) P_J)\ \operatorname{Tr}(P_J A(t)^{-1}\, P_J\, A'(t) P_J),\\
&= \det(P_J A(t) P_J)\ \operatorname{Tr}(P_J A(t)^{-1}\, A'(t) P_J),
\end{aligned}$$

invocando la $\mathbb{C}$-linealidad de $A(t)$. Así

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\det_{\mathbb{C}} A(t) = \det(P_J A(t) P_J)\ \operatorname{Tr}(P_J A(t)^{-1} A'(t) P_J) = \det_{\mathbb{C}} A\ \operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(A(t)^{-1} A'(t)).$$

por las definiciones 1.23 y 1.24 de nuevo. □

Es importante destacar que todas las expresiones con $\det^{-1/2}$ o $\det^{+1/2}$ de los capítulos 2 y 3 son potencias de $\det_{\mathbb{C}}$ y no de $\det_{\mathbb{R}}$.

Lema 4.6. *Se cumple que*

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} c(\exp(tX), \exp(sX)) = \tfrac{1}{4}\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}([A_X, T_{\exp(tX)}]).$$

Demostración. Primeramente se calcula la derivada de $\gamma_t(s) := \det_{\mathbb{C}}(1 - T_{\exp(sX)}T_{\exp(-tX)})$ evaluada en $s = 0$ utilizando la regla de la cadena, la regla del producto, la Proposición 4.2 y la relación (4.6); y notando también que $T_1 = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\gamma_t(s) &= -\frac{1}{2}\det{}^{-3/2}(1 - T_1T_{\exp(tX)})\,\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\det_{\mathbb{C}}(1 - T_{\exp(sX)}T_{\exp(-tX)})\\ &= -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}\left((1 - T_1T_{\exp(tX)})^{-1}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}(1 - T_{\exp(sX)}T_{\exp(-tX)})\right)\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(A_XT_{\exp(-tX)}).\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}c(\exp(tX), \exp(sX)) &:= \exp\left[i\operatorname{Arg}\left(\det{}^{-1/2}(1 - T_{\exp(sX)}\widehat{T}_{\exp(tX)})\right)\right]\\ &= \exp\left[i\operatorname{Arg}\left(\det{}^{-1/2}(1 - T_{\exp(sX)}T_{\exp(-tX)})\right)\right],\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}c(\exp(tX), \exp(sX)) &= i\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\operatorname{Arg}\left(\det{}^{-1/2}(1 - T_{\exp(sX)}T_{\exp(-tX)})\right)\\ &= i\Im\left(\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\det{}^{-1/2}(1 - T_{\exp(sX)}T_{\exp(-tX)})\right)\\ &= i\Im\left(\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\gamma_t(s)\right) = \frac{i}{2}\Im\left(\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(A_XT_{\exp(tX)})\right).\end{aligned}$$

Finalmente, como

$$\begin{aligned}\Im\left(\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(A_XT_{\exp(tX)})\right) &= \frac{\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(A_XT_{\exp(tX)}) - \overline{\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(A_XT_{\exp(tX)})}}{2i}\\ &= \frac{\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(A_XT_{\exp(tX)}) - \operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(T_{\exp(tX)}A_X)}{2i},\end{aligned}$$

por el Lema 1.25, entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}c(\exp(tX), \exp(sX)) &= \frac{i}{2}\,\frac{\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(A_XT_{\exp(tX)}) - \operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(T_{\exp(tX)}A_X)}{2i}\\ &= \frac{1}{4}\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(A_XT_{\exp(tX)}) - \operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(T_{\exp(tX)}A_X)\\ &= \frac{1}{4}\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}([A_X, T_{\exp(tX)}]).\end{aligned}$$

□

El lema anterior, *mutatis mutandis*, muestra que si $Y \in \mathfrak{sp}(V)$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial s}\bigg|_{t=s=0} c(\exp(sX),\exp(tY)) &= \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}[A_X, T_{\exp(tY)}] \\ &= \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(A_X T_{\exp(tY)} - T_{\exp(tY)} A_X) \\ &= \frac{1}{4}\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}(A_X A_Y - A_Y A_X) = \frac{1}{4}\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}\big([A_X, A_Y]\big).\end{aligned}$$

En conclusión,

$$\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial s}\bigg|_{t=s=0} c(\exp(sX),\exp(tY)) = \frac{1}{4}\operatorname{Tr}_{\mathbb{C}}\big([A_X, A_Y]\big). \tag{4.7}$$

La expresión (4.7) se denomina *término de Schwinger*.

Proposición 4.7. *Al derivar la identidad (4.4) con respecto a s en $s = 0$, se obtiene*

$$\theta_X(t) = \alpha\, t - i\int_0^t h(\tau)\,d\tau,$$

donde

$$h(\tau) := \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} c(\exp(sX),\exp(\tau X)) \quad y \quad \alpha := \dot\theta_X(0).$$

Demostración. Como

$$c(\exp(tX),\exp(sX)) = \exp\Big[i\operatorname{Arg}\big(\det^{-1/2}(1 - T_{\exp(sX)}T_{\exp(-tX)})\big)\Big]$$

entonces

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} e^{i\theta_X(t+s)} = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \exp\Big[i\operatorname{Arg}\big(\det^{-1/2}(1 - T_{\exp(sX)}T_{\exp(-tX)})\big)\Big]e^{i\theta_X(t)}e^{i\theta_X(s)}.$$

Invocando el Lema 4.6 y la regla de Leibniz, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} e^{i\theta_X(t+s)} &= e^{i\theta_X(t)}\big(h(t)e^{i\theta_X(0)} + c(\exp(tX),1)ie^{i\theta_X(0)}\dot\theta_X(0)\big) \\ &= e^{i\theta_X(t)}(h(t) + i\alpha c(\exp(tX),1)).\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} e^{i\theta_X(t+s)} = ie^{i\theta_X(t)}\,\dot\theta_X(t),$$

y así llegamos a la ecuación diferencial

$$ie^{i\theta_X(t)}\dot\theta_X(t) = e^{i\theta_X(t)}(h(t) + i\alpha c(\exp(tX),1)) = e^{i\theta_X(t)}(h(t) + i\alpha),$$

con condición inicial $\theta(0) = 0$, cuya (única) solución es

$$\theta_X(t) = \alpha\, t - i\int_0^t h(x)\,dx.$$

□

Por el Lema 4.6, y con la notación de la proposición anterior, se cumple que

$$h(\tau) = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}[A_X, T_{\exp(\tau X)}].$$

El valor de $\alpha = \dot{\theta}(0)$ se puede tomar de manera arbitraria. El caso más sencillo es evidentemente tomar $\alpha = 0$ y así lo haremos. Esto será de importancia más adelante.

Definición 4.8. La **representación infinitesimal** de ν se define como

$$[\dot{\nu}(X)F](u) := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{i\theta_X(t)}\nu(\exp(tX))F(u)$$

para todo $X \in \mathfrak{sp}(V)$, donde $u \in V$ y $F \in \mathcal{B}(V)$. ◊

Por la definición de $\dot{\nu}$, de la relación (3.15) se obtiene que

$$\nu(\exp(tX))\,\dot{\beta}(v)\,E_w = \dot{\beta}(\exp(tX)v)\,\nu(\exp(tX))\,E_w, \tag{4.8}$$

para $v, w \in V$; $X \in \mathfrak{sp}(V)$ y para todo $t \in \mathbb{R}$.

Similarmente a (3.21) se puede calcular el núcleo de $\dot{\nu}$.

Proposición 4.9. *Si $X \in \mathfrak{sp}(V)$ entonces, para todo $u, v \in V$,*

$$K_{\dot{\nu}(X)}(u, v) := \dot{\nu}(X)E_v(u) = \tfrac{1}{4}\big(\langle u \mid A_X u\rangle + 2\langle u \mid C_X v\rangle - \langle A_X v \mid v\rangle\big)e^{\frac{1}{2}\langle u|v\rangle}. \tag{4.9}$$

Demostración. En efecto, por la definición del núcleo integral $K_{\dot{\nu}(X)}(u, v) := \dot{\nu}(X)E_v(u)$, se tiene que

$$\begin{aligned} K_{\dot{\nu}(X)}(u, v) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{i\theta_X(t)}\nu(\exp(tX))E_v(u) \\ &= i\dot{\theta}_X(0)\nu(1)E_v(u) + \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \nu(\exp(tX))E_v(u) \\ &= i\alpha E_v(u) + \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \nu(\exp(tX))E_v(u). \end{aligned}$$

Invocando la relación (3.21) con $\alpha = 0$, y notando que $T_1 = \widehat{T}_1 = 0$ y $p_1 = 1$, se obtiene que

$$\begin{aligned} K_{\dot{\nu}(X)}(u, v) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} & c_{\exp(tX)} \exp\big(\tfrac{1}{4}(\langle u \mid T_{\exp(tX)}u\rangle + 2\langle p^{-1}_{\exp(tX)}u \mid v\rangle + \langle \widehat{T}_{\exp(tX)}v \mid v\rangle\big) \\ = \bigg(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} & c_{\exp(tX)}\bigg) \exp\big(\tfrac{1}{2}\langle u \mid v\rangle\big) \\ & + c_1 \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp\big(\tfrac{1}{4}(\langle u \mid T_{\exp(tX)}u\rangle + 2\langle p^{-1}_{\exp(tX)}u \mid v\rangle + \langle \widehat{T}_{\exp(tX)}v \mid v\rangle\big), \end{aligned}$$

i.e.,

$$K_{\dot{\nu}(X)}(u,v) = e^{\frac{1}{2}\langle u|v\rangle} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} c_{\exp(tX)}$$
$$+ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp\big(\tfrac{1}{4}(\langle u \mid T_{\exp(tX)}u\rangle + 2\langle u \mid p^{-t}_{\exp(tX)}v\rangle + \langle \widehat{T}_{\exp(tX)}v \mid v\rangle\big).$$

Ahora, nótese que

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} c_{\exp(tX)} &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \det{}^{1/4}(1 - T^2_{\exp(tX)}) \\ &= \frac{1}{4}\det{}^{-3/4}(1)\,\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(1 - T^2_{\exp(tX)})\right) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(-2T_1A_X) = 0, \end{aligned}$$

por la fórmula de Jacobi y la Proposición 4.2. Así,

$$\begin{aligned} K_{\dot{\nu}(X)}(u,v) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp\big(\tfrac{1}{4}(\langle u \mid T_{\exp(tX)}u\rangle + 2\langle p^{-1}_{\exp(tX)}u \mid v\rangle + \langle \widehat{T}_{\exp(tX)}v \mid v\rangle\big) \\ &= \frac{1}{4}\exp(\tfrac{1}{2}\langle u \mid v\rangle)\big(\langle u \mid A_Xu\rangle - 2\langle L_Xu \mid v\rangle - \langle A_Xv \mid v\rangle\big) \\ &= \frac{1}{4}\big(\langle u \mid A_Xu\rangle + 2\langle u \mid L_Xv\rangle - \langle A_Xv \mid v\rangle\big)e^{\frac{1}{2}\langle u|v\rangle}, \end{aligned}$$

usando nuevamente la Proposición 4.2 y la antimsimetría de L_X. □

4.2. La relación de conmutación para $\dot{\nu}$

En esta sección se obtendrá una igualdad que relaciona la representación metapléctica infinitesimal $\dot{\nu}$ con el campo bosónico libre $\dot{\beta}$.

Es importante destacar que $\dot{\nu}(X)$ generalmente es un operador no acotado sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{B}(V)$.

Proposición 4.10. *Derivando la relación* (4.8) *con respecto a t y evaluando la derivada en $t = 0$ se obtiene la fórmula*

$$\dot{\nu}(X)\dot{\beta}(v)\,E_w = \dot{\beta}(Xv)\,E_w + \dot{\beta}(v)\,\dot{\nu}(X)\,E_w\,. \tag{4.10}$$

Demostración. Sea $u \in V$. Multiplicando ambos miembros de la ecuación (4.8) por $e^{i\theta_X(t)}$ obtenemos que

$$e^{i\theta_X(t)}\nu(\exp(tX))\,\dot{\beta}(v)\,E_w = e^{i\theta_X(t)}\dot{\beta}(\exp(tX)v)\,\nu(\exp(tX))\,E_w,$$

Al derivar el miembro izquierdo de la igualdad anterior obtenemos que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{i\theta_X(t)}\nu(\exp(tX))\dot{\beta}(v)\, E_w(u) = \dot{\nu}(X)\dot{\beta}(v)E_w(u)$$

Mientras que, derivando el miembro derecho obtenemos, invocando la regla de Leibniz, que

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} & e^{i\theta_X(t)}\dot{\beta}(\exp(tX)v)\nu(\exp(tX))E_w(u)\\ &= \dot{\beta}(Xv)E_w(u) + \dot{\beta}(v)\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{i\theta_X(t)\nu(\exp(tX))}E_w(u)\\ &= \dot{\beta}(Xv)E_w(u) + \dot{\beta}(v)\dot{\nu}(X)E_w(u),\end{aligned}$$

por la definición de la representación metapléctica infinitesimal. Finalmente, como

$$\dot{\beta}(Xv)E_w(u) + \dot{\beta}(v)\dot{\nu}(X)E_w(u) = [\dot{\beta}(Xv) + \dot{\beta}(v)\dot{\nu}(X)]E_w(u),$$

de la densidad de $\mathrm{gen}\{E_w : w \in V\}$ el resultado sigue. □

Esto nos lleva a la siguiente la relación deseada.

Corolario 4.11. *Si $v \in V$ y $X \in \mathfrak{sp}(V)$ entonces*

$$[\dot{\nu}(X), \dot{\beta}(v)] = \dot{\beta}(Xv). \tag{4.11}$$

Demostración. Por definición

$$[\dot{\nu}(X), \dot{\beta}(v)] = \dot{\nu}(X)\dot{\beta}(v) - \dot{\beta}(v)\dot{\nu}(X).$$

De la Proposición 4.10 se ve que

$$\begin{aligned}&\dot{\nu}(X)\,\dot{\beta}(v)\,E_w = \dot{\beta}(Xv)\,E_w + \dot{\beta}(v)\,\dot{\nu}(X)\,E_w\\ \Longrightarrow\ &\dot{\nu}(X)\,\dot{\beta}(v)\,E_w - \dot{\beta}(v)\,\dot{\nu}(X)\,E_w = \dot{\beta}(Xv)\,E_w\,,\end{aligned}$$

y como $\{\, E_w : w \in V\,\}$ genera un subespacio denso de $\mathcal{B}(V)$, se llega al resultado. □

4.3. La representación de espín infinitesimal

Análogamente a la sección anterior, por la definición del grupo ortogonal especial se tiene que $\exp(tX)\exp(tX^t) = 1$ y $\det(\exp(tX)) = e^{t\,\mathrm{Tr}\,X}$; esto es

$$X + X^t = 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{Tr}\,X = 0.$$

La identidad $\det(\exp(tX)) = e^{t \operatorname{Tr} X}$ sigue de la fórmula de Jacobi. Como

$$\frac{d}{dt}\det(A(t)) = \det(A(t))\ \operatorname{Tr}(A(t)^{-1}A'(t)),$$

tomando $A(t) := \exp(tX)$, con $X \in \mathfrak{sp}(V)$, se obtiene la ecuación diferencial con condición inicial

$$\frac{d}{dt}\det(e^{tX}) = \operatorname{Tr} X \det(\exp(tX)), \qquad \det 1 = 1,$$

que tiene $t \mapsto e^{\operatorname{Tr}(tX)}$ como su solución única. Se sigue directamente que

$$\frac{d}{dt}\det\nolimits_{\mathbb{C}}(\exp(tX)) = \operatorname{Tr}_{\mathbb{C}} X\ \det\nolimits_{\mathbb{C}}(\exp(tX)).$$

Definición 4.12. El **álgebra de Lie** $\mathfrak{so}(V)$ de $\mathrm{SO}(V)$ consiste de todos los operadores $\mathbb{R}$-lineales $X \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$ tales que $X + X^t = 0$ y $\operatorname{tr} X = 0$. En otras palabras,

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(V) &= \{\, X \in \mathbb{C}^{n\times n} : \exp(tX) \in \mathrm{SO}(V) \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \,\} \\ &= \{\, X \in \mathbb{C}^{n\times n} : X + X^t = 0 \text{ y } \operatorname{Tr} X = 0 \,\}. \end{aligned}$$ ◊

Cualquier $X \in \mathfrak{so}(V)$ se puede descomponer como la suma de un operador $\mathbb{C}$-lineal L_X y un operador antilineal A_X,

$$L_X := \tfrac{1}{2}(X - JXJ) \quad \text{y} \quad A_X := \tfrac{1}{2}(X + JXJ), \tag{4.12}$$

y se satisface la siguiente proposición, cuya demostración es análoga a la de la Proposición 4.2.

Observación. En el Caso F, ambos operadores L_X y A_X son antisimétricos. En efecto, como $X^t = -X$ entonces

$$\begin{aligned} L_X^t &= \tfrac{1}{2}(X - JXJ)^t = \tfrac{1}{2}(X^t - JX^tJ) = -\tfrac{1}{2}(X - JXJ) = -L_X, \\ A_X^t &= \tfrac{1}{2}(X + JXJ)^t = \tfrac{1}{2}(X^t + JX^tJ) = \tfrac{1}{2}(-X - JX^tJ) = -A_X. \end{aligned}$$

Proposición 4.13. *Considere el operador $T_g := q_g p_g^{-1}$, donde $g \in \mathrm{SO}_*(V)$. Entonces*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} p_{\exp(tX)} = L_X \quad y \quad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T_{\exp(tX)} = A_X.$$ ⊟

Análogamente al caso bosónico infinitesimal, se tiene la siguiente definición.

Definición 4.14. Se define el **hamiltoniano cuadrático** para $Y \in \mathrm{Sk}(V)$ como

$$H_Y := \sum_{i<j} \langle e_i \mid Ye_j \rangle\, e_i \wedge e_j,$$

donde $\{e_k\}$ es una base ortonormal de $V = V_J$. Esta es la fórmula (2.24) introducida anteriormente. ◊

Estos hamiltonianos cuadráticos son independientes de la base ortonormal de V_J escogida, debido a la Proposición 2.24.

Definición 4.15. Se define la **representación de espín infinitesimal** $\dot{\mu}$ de $\mathfrak{so}(V)$ como

$$\dot{\mu}(Y)\Psi := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{i\theta_Y(t)}\mu(\exp(tY))\Psi,$$

para $Y \in \mathfrak{so}(V)$ y $\Psi \in \mathcal{F}(V)$; la función $\theta_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $e^{i\theta_Y(t)}\mu(\exp((tY))$ sea una representación del grupo $(\mathbb{R}, +)$. Así, $t \mapsto e^{i\theta_Y(t)}\mu(\exp((tY))$ es un subgrupo uniparamétrico del grupo unitario de $\mathcal{F}(V)$. ◊

Definición 4.16. Sea $\{u_l\}$ una base ortonormal de V. Se definen, para cada operador $\mathbb{C}$-lineal S y cada operador $T \in \mathrm{Sk}(V)$, las siguientes expresiones cuadráticas. Entonces

$$a^\dagger S a := \sum_{k,l=1}^{m} \langle u_k \mid S u_l\rangle\, a^\dagger(u_k)a(u_l), \tag{4.13a}$$

$$aTa := \sum_{k,l=1}^{m} \langle T u_k \mid u_l\rangle\, a(u_k)a(u_l), \tag{4.13b}$$

$$a^\dagger T a^\dagger := \sum_{k,l=1}^{m} \langle u_k \mid T u_l\rangle\, a^\dagger(u_k)a^\dagger(u_l). \tag{4.13c}$$

Note que aTa y $a^\dagger T a^\dagger$ son operadores mutuamente adjuntos, por ser $T \in \mathrm{Sk}(V)$. ◊

Lema 4.17. *Las expresiones cuadráticas* (4.13) *son independientes de la base ortonormal usada.*

Demostración. Sean $\mathcal{B} := \{\, e_l : l = 1, \ldots, m \,\}$ y $\mathcal{B}' := \{\, u_r : r = 1, \ldots, m \,\}$ dos bases ortonormales de V_J y sea $[B]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matriz de cambio de base: $u_k = \sum_{r=1}^{m} B_{rk} e_r$.

Como $B^*B = 1_m = BB^*$ entonces

$$\sum_{k=1}^{m} \bar{b}_{ki} b_{kj} = \delta_{ij} = \sum_{l=1}^{m} b_{il}\bar{b}_{jl}\,.$$

Así, para la expresión (4.13a), se obtiene

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{m} \langle u_i \mid S u_j\rangle\, a^\dagger(u_i)a(u_j) &= \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{m}\sum_{r,s=1}^{m} \langle b_{ki}e_k \mid S(b_{lj}e_l)\rangle\, a^\dagger(b_{ri}e_r)a(b_{sj}e_s) \\ &= \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,r=1}^{m}\sum_{l,s=1}^{m} \bar{b}_{ki}b_{lj}b_{ri}\bar{b}_{sj}\langle e_k \mid S e_l\rangle\, a^\dagger(e_r)a(e_s).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i,j=1}^{m} \langle u_i \mid Su_j\rangle\, a^\dagger(u_i)a(u_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k,r=1}^{m} \sum_{l,s=1}^{m} \delta_{kr} b_{lj} \bar{b}_{sj} \langle e_k \mid Se_l\rangle\, a^\dagger(e_r)a(e_s)$$
$$= \sum_{k,r=1}^{m} \sum_{l,s=1}^{m} \delta_{kr}\delta_{ls} \langle e_k \mid Se_l\rangle\, a^\dagger(e_r)a(e_s)$$
$$= \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \langle e_r \mid Se_s\rangle\, a^\dagger(e_r)a(e_s),$$

Similarmente se muestra que (4.13c) es independiente de la base ortonormal escogida.

En el caso de (4.13b), el procedimiento es el siguiente:

$$\sum_{i,j=1}^{m} \langle Tu_i \mid u_j\rangle\, a(u_i)a(u_j) = \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{m} \sum_{r,s=1}^{m} \langle T(b_{ki}e_k) \mid b_{lj}e_l\rangle\, a(b_{ri}e_r)a(b_{sj}e_s)$$
$$= \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k,r=1}^{m} \sum_{l,s=1}^{m} b_{ki} b_{lj} \bar{b}_{ri} \bar{b}_{sj} \langle Te_k \mid e_l\rangle\, a(e_r)a(e_s)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k,r=1}^{m} \sum_{l,s=1}^{m} \delta_{kr} b_{lj} \bar{b}_{sj} \langle Te_k \mid e_l\rangle\, a(e_r)a(e_s)$$
$$= \sum_{k,r=1}^{m} \sum_{l,s=1}^{m} \delta_{kr}\delta_{ls} \langle Te_k \mid e_l\rangle\, a(e_r)a(e_s)$$
$$= \sum_{r,s=1}^{m} \langle Te_r \mid e_s\rangle\, a(e_r)a(e_s),$$

mostrando que (4.13b) también es independiente de la base ortonormal escogida. La diferencia entre dichas pruebas es la lineal y antilinealidad de los operadores (y por ende los conjugados de las entradas de la matriz B). $\square$

Sea $\{u_l\}$ una base ortonormal de $V = V_J$. Sean $S, T \in \mathrm{Sk}(V)$ y sea R un operador $\mathbb{C}$-lineal y antisimétrico sobre V. Note que $[R, S]$ es antilineal. También, $[R, S]$ es antisimétrico porque

$$\langle u \mid [R,S]v\rangle = \langle u \mid RSv\rangle - \langle u \mid SRv\rangle$$
$$= \langle R^t u \mid Sv\rangle - \langle Rv \mid S^t u\rangle$$
$$= -\langle Ru \mid Sv\rangle + \langle Rv \mid Su\rangle$$
$$= -\langle v \mid S^t Ru\rangle + \langle v \mid R^t Su\rangle$$
$$= +\langle v \mid SRu\rangle - \langle v \mid RSu\rangle = -\langle v \mid [R,S]u\rangle.$$

De (2.24) se obtiene

$$H_{[R,S]} := \sum_{k,l=1}^{m} \langle u_k \mid [R,S]u_l \rangle \, u_k \wedge u_r$$

y también

$$\sum_{k,l=1}^{m} \langle u_k \mid STSu_l \rangle \, u_k \wedge u_r = H_{STS}.$$

Tenemos el lema siguiente. Este es el Lema 6.6 de [15], probado en esa referencia.[1] Esa prueba está basada un lema idéntico a la Proposición 3.55 arriba.

Lema 4.18. *Sean* $S, T \in \mathrm{Sk}(V)$ *y sea* R *un operador* $\mathbb{C}$*-lineal y antisimétrico. Se satisface que*

$$\begin{aligned} a^\dagger T a^\dagger (f_S) &= H_T \wedge f_S, \\ aTa(f_S) &= H_{STS} \wedge f_S - \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(ST) f_S, \\ a^\dagger R a(f_S) &= \tfrac{1}{2} H_{[R,S]} \wedge f_S. \end{aligned}$$ ⊟

Como S y T son operadores antilineales, entonces ST es lineal y $\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(ST)$ está bien definido.

Lema 4.19. *Si* $g(t) := \exp(tY)$*, se obtiene que*

$$\dot\mu(Y)\,\Omega = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{i\theta_Y(t)} c_{g(t)} f_{T_{g(t)}} = i\dot\theta_Y(0)\,\Omega + H_{A_Y} \wedge \Omega.$$

Demostración. Por la relación (4.16) más abajo, tenemos que

$$\dot\mu(Y)\,\Omega = \tfrac{1}{2}[a^\dagger A_Y a^\dagger + 2a^\dagger L_Y a - aA_Y a]\,\Omega.$$

Como $a(v)\Omega = 0$ para todo $v \in V$, del Lema 4.18 se obtiene directamente el resultado. □

4.4. La relación de conmutación para $\dot\mu$

En esta sección se obtendrá una igualdad que relaciona la representación de espín infinitesimal $\dot\mu$ con B. Trabajaremos con operadores S en $\mathrm{Sk}(V)$, pues tanto $p_{\exp(tX)}$ y $(p_{\exp(tX)} + q_{\exp(tX)} S)$ son invertibles.

Para poder establecer la relación de conmutación para $\dot\mu$ se necesitan varios lemas.

[1] El hamiltoniano H_T de nuestro (2.24) y el H_T de [15, Ecn. (5.40)] diferen por un factor de 2.

Lema 4.20. *Si* $Y \in \mathfrak{so}(V)$ *y* $S \in \mathrm{Sk}(V)$*, entonces*

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \sum_{2|\#(K)} \mathrm{Pf}\big((\exp(tY)\cdot S)_K\big)\, \varepsilon_K = \frac{1}{2} H_{\psi(Y,S)} \wedge f_S,$$

donde

$$\psi(Y,S) := [L_Y, S] + A_Y - S A_Y S \in \mathrm{Sk}(V) \tag{4.14}$$

y la acción parcial $\exp(tY)\cdot S$ *de* $\mathrm{SO}(V)$ *sobre* $\mathrm{Sk}(V)$ *está dada por* (3.43).

Demostración. Note que el lado izquierdo es la derivada de un elemento gaussiano fermiónico, por la expansión (2.30):

$$\sum_{2|\#(K)} \mathrm{Pf}\big((\exp(tY)\cdot S)_K\big)\, \varepsilon_K = f_{M(t)} = \exp^{\wedge}(\tfrac{1}{2} H_{M(t)}), \tag{4.15}$$

donde se usa el Lema 3.59 para poner

$$M(t) := \exp(tY)\cdot S = T_{\exp(tY)} + p^{-t}_{\exp(tY)} S (1 - T_{\exp(-tY)} S)^{-1} p^{-1}_{\exp(tY)}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} M(t) &= A_Y + \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} p^{-t}_{\exp(tY)} S + S \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (1 - T_{\exp(-tY)} S)^{-1} + S \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} p^{-1}_{\exp(tY)} \\ &= A_Y - (p_1 L_Y p_1)^t S - S(1 - T_1 S)^{-1} A_Y S (1 - T_1 S)^{-1} + S(-p_1 L_Y p_1). \end{aligned}$$

Como $T_1 = 0$, $p_1 = 1$ y L_Y es un operador $\mathbb{C}$-lineal y antisimétrico, entonces la expresión es equivalente a

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} M(t) = A_Y + L_Y S - S A_Y S - S L_Y = [L_Y, S] + A_Y - S A_Y S = \psi(Y,S).$$

También se tiene $M(0) = S$. Como la parte par espacio de Fock fermiónico es $\mathcal{F}_+(V) = \Lambda^+ V$, la subálgebra par del álgebra exterior ΛV, y esta es un álgebra *conmutativa*, se puede derivar la exponencial (4.15) como una función exponencial usual:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp^{\wedge}(\tfrac{1}{2} H_{M(t)}) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} H_{M(t)} \wedge \exp^{\wedge}(\tfrac{1}{2} H_{M(0)}) \\ &= \frac{1}{2} H_{M'(0)} \wedge \exp^{\wedge}(\tfrac{1}{2} H_S) = \frac{1}{2} H_{\psi(Y,S)} \wedge f_S\,. \end{aligned}$$

Sólo falta justificar la afirmación $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} H_{M(t)} = H_{M'(0)}$. Esto sigue por (2.29), porque

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} H_{M(t)} &= 2 \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \sum_{i<j} \langle e_i \mid M(t) e_j \rangle\, e_i \wedge e_j \\ &= 2 \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \sum_{i<j} \langle e_i \mid \psi(Y,S) e_j \rangle\, e_i \wedge e_j = H_{\psi(Y,S)}\,. \end{aligned}$$

□

Lema 4.21. *Si $S \in \mathrm{Sk}(V)$, $f_S \in \mathcal{F}(V)$ y $Y \in \mathfrak{so}(V)$ entonces*

$$\dot{\mu}(Y) f_S = \tfrac{1}{2} \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(S A_Y) f_S + \tfrac{1}{2} H_{\psi(Y,S)} \wedge f_S \,.$$

Demostración. Por definición

$$\begin{aligned}
\mu(Y) f_S &:= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{i\theta_Y(t)} c_{\exp(tY)} \phi_{\exp(tY)}(S) f_{\exp(tY)S} \\
&= i\alpha c_1 \phi_1(S) f_S + \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi_{\exp(tY)}(S) f_S + \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \sum_{2|\#(K)} \mathrm{Pf}((\exp(tY)S)_K) \varepsilon_K .
\end{aligned}$$

Utilizando el Lema 4.20 y que $\alpha = 0$ se llega a que

$$\mu(Y) f_S = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi_{\exp(tY)}(S) f_S + \frac{1}{2} H_{\psi(Y,S)} \wedge f_S .$$

También, por (4.6),

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi_{\exp(tY)}(S) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \det{}^{1/2}(1 - S T_{\exp(-tY)}) = \tfrac{1}{2} \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(S L_Y + S A_Y),$$

Finalmente, como $S L_Y$ es un operador antilineal entonces $\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(S L_Y) = 0$ y por ende

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi_{\exp(tY)}(S) f_S = \tfrac{1}{2} \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(S A_Y) f_S$$

de donde sigue el resultado. □

Proposición 4.22. *Si $Y \in \mathfrak{so}(V)$, tenemos la siguiente expansión:*

$$\dot{\mu}(Y) = \tfrac{1}{2}[a^\dagger A_Y a^\dagger + 2 a^\dagger L_Y a - a A_Y a]. \tag{4.16}$$

Demostración. Sean $T, S \in \mathrm{Sk}(V)$. Del Lema 4.18, sabemos que

$$\begin{aligned}
(a^\dagger T a^\dagger) f_S &= H_T \wedge f_S, \\
(a T a) f_S &= H_{STS} \wedge f_S - \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(ST) f_S \,, \\
(a^\dagger R a) f_S &= \tfrac{1}{2} H_{[R,S]} \wedge f_S \,.
\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 4.21, se llega a que

$$2\dot{\mu}(Y)\, f_S = H_{A_Y} \wedge f_S + H_{[L_Y,S]} \wedge f_S - H_{S A_Y S} \wedge f_S + \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(S A_Y)\, f_S$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
\dot{\mu}(Y)\, f_S &= \tfrac{1}{2}[H_{A_Y} + H_{[L_Y,S]} - H_{S A_Y S}] \wedge f_S + \tfrac{1}{2} \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(S A_Y)\, f_S \\
&= \tfrac{1}{2} H_{\psi(Y,S)} \wedge f_S + \tfrac{1}{2} \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(S A_Y)\, f_S .
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Entonces, por el Lema 4.18 obtenemos el resultado (4.16). □

Ahora, se enuncia y demuestra la proposición principal de esta sección.

Proposición 4.23. *Si $v \in V$, $S \in \mathrm{Sk}(V)$ y $Y \in \mathfrak{so}(V)$, entonces*

$$\dot{\mu}(Y)\, B(v)\, f_S = B(v)\, \dot{\mu}(Y)\, f_S + B(Yv)\, f_S\,.$$

Demostración. Por definición de la representación de espín infinitesimal tenemos que

$$\begin{aligned}\dot{\mu}(Y)\, B(v)\, f_S &:= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{i\theta_Y(t)} \mu(\exp(tY))\, B(v) f_S \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{i\theta_Y(t)} c_{\exp(tY)}\, \phi_{\exp(tY)}(S)\, B(\exp(tY)v)\, f_{\exp(tY)\cdot S}.\end{aligned}$$

Por la regla de Leibniz,

$$\begin{aligned}\dot{\mu}(Y)\, B(v)\, f_S &= i\dot{\theta}(0) c_1 \phi_1(S) B(v) f_S \\ &\quad + \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} c_{\exp(tY)}\, \phi_1(S) B(v) f_S + c_1 \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi_{\exp(tY)}(S)\, B(v) f_S \\ &\quad + c_1 \phi_1(S) \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} B(\exp(tY)v) f_S + c_1 \phi_1(S) B(v) \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f_{\exp(tY)\cdot S}\,.\end{aligned}$$

Como $\alpha = 0$, $c_1 = 1$ y $\phi_1(S) = 1$, la expresión anterior equivale a

$$\begin{aligned}\dot{\mu}(Y)\, B(v)\, f_S &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} c_{\exp(tY)}\, B(v) f_S + \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi_{\exp(tY)}\, B(v) f_S \\ &\quad + \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} B(\exp(tY)v) f_S + B(v) \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f_{\exp(tY)\cdot S}\,.\end{aligned}$$

De la formula de Jacobi (4.6) y la definición $c_g := \det^{-1/4}(1 - T_{rg}^2)$ obtenida en (3.42), se sigue que

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} c_{\exp(tY)} = -\frac{1}{4} \det^{-5/4}(1)\, \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (1 - T_{r\,\exp(tY)}) \right).$$

Por la Definición 3.57, como $\exp(tY) \in \mathrm{SO}_*(V)$, entonces podemos tomar $r = 1$; de donde

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} c_{\exp(t)Y} = -\frac{1}{4} \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (1 - T_{\exp(tY)}) \right) = \frac{1}{4} \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}\, A_Y = 0.$$

También, como $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \phi_{\exp(tY)}(S) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(S A_Y)$, entonces

$$\dot{\mu}(Y) B(v)\, f_S = \tfrac{1}{2} \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(S A_Y)\, B(v) f_S + \tfrac{1}{2} B(v)(H_{\psi(Y,S)} \wedge f_S) + \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} B(\exp(tY)v)\, f_S$$

y de (4.17) se obtiene

$$\dot{\mu}(Y) B(v)\, f_S = B(v)\, \dot{\mu}(Y)\, f_S + \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} B(\exp(tY)v)\, f_S\,.$$

Como la acción de Clifford B es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal, entonces

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} B(\exp(tY)v)\, f_S = B\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp(tY)v\right) f_S = B(Yv)\, f_S$$

y así $\dot{\mu}(Y)B(v)\, f_S = B(v)\dot{\mu}(Y)\, f_S + B(Yv)\, f_S$. □

Corolario 4.24. *Si $Y \in \mathfrak{so}(V)$, $u, v \in V$ y $S \in \mathrm{Sk}(V)$ entonces*

$$\dot{\mu}(Y)B(v)B(u)f_S = B(v)\dot{\mu}(Y)B(u)f_S + B(Yv)B(u)f_S.$$

Demostración. La prueba de este corolario es similar a la prueba de la proposición anterior. Nuevamente, por definición de la representación de espín infinitesimal, tenemos que

$$\begin{aligned}\dot{\mu}(Y)\, B(v)B(u)\, f_S &:= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{i\theta_Y(t)}\mu(\exp(tY))\, B(v)B(u)f_S \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{i\theta_Y(t)}c_{\exp(tY)}\phi_{\exp(tY)}(S)B(\exp(tY)v)B(\exp(tY)u)\, f_{\exp(tY)\cdot S}\,.\end{aligned}$$

Invocando la regla de Leibniz y usando $\alpha = 0$, $c_1 = 1$ y $\phi_1(S) = 1$, resulta

$$\begin{aligned}\dot{\mu}(Y)\, B(v)B(u)f_S = &\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} c_{\exp(tY)}B(v)B(u)f_S + \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi_{\exp(tY)}B(v)B(u)f_S \\ &+ \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} B(\exp(tY)v)\, B(u)f_S + B(v)\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} B(\exp(tY)u)\, f_S \\ &+ B(v)B(u)\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f_{\exp(tY)\cdot S}\,.\end{aligned}$$

Por la prueba de la Proposición 4.23, el primer término a la derecha es 0; el segundo y el quinto términos suman a $B(v)B(u)\,\dot{\mu}(Y)\, f_S$. Entonces

$$\begin{aligned}\dot{\mu}(Y)\, B(v)B(u)\, f_S = &\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} B(\exp(tY)v)\, B(u)f_S + B(v)\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} B(\exp(tY)u)\, f_S \\ &+ B(v)B(u)\,\dot{\mu}(Y)\, f_S\,.\end{aligned}$$

Obviamente,

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} B(\exp(tY)v)\, B(u)f_S + B(v)\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} B(\exp(tY)u)\, f_S = B(Yv)B(u)f_S + B(v)B(Yu)f_S.$$

Por la Proposición 4.23,

$$\begin{aligned}&\dot{\mu}(Y)\, B(u)\, f_S = B(u)\,\dot{\mu}(Y)\, f_S + B(Yu)\, f_S \\ \Longrightarrow\;\; &B(v)B(Yu)\, f_S = B(v)\dot{\mu}(Y)\, B(u)\, f_S - B(v)B(u)\,\dot{\mu}(Y)\, f_S\,,\end{aligned}$$

y se sigue que

$$\dot{\mu}(Y)B(v)B(u)f_S = B(Yv)B(u)f_S + B(v)\dot{\mu}(Y)\, B(u)\, f_S\,.$$ □

Utilizando los resultados anteriores obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.25. *Si $v \in V$ y $Y \in \mathfrak{so}(V)$ entonces*

$$[\dot{\mu}(Y), B(v)] = B(Yv). \tag{4.18}$$

Demostración. Por definición

$$[\dot{\mu}(Y), B(v)] = \dot{\mu}(Y)B(v) - B(v)\dot{\mu}(Y).$$

Basta aplicar la Proposición 4.23 y el Corolario 4.24, pues

$$\begin{aligned} &\dot{\mu}(Y)\, B(v)\, f_S = B(v)\, \dot{\mu}(Y)\, f_S + B(Yv)\, f_S \\ \Longleftrightarrow\ &B(Yv)\, f_S = \dot{\mu}(Y)\, B(v)\, f_S - B(v)\, \dot{\mu}(Y)\, f_S\, . \\ \Longleftrightarrow\ &B(Yv)\, f_S = \big(\dot{\mu}(Y)\, B(v) - B(v)\, \dot{\mu}(Y)\big)\, f_S \end{aligned}$$

y además,

$$\begin{aligned} &\dot{\mu}(Y)\, B(v)\, B(u)\, f_S = B(v)\dot{\mu}(Y)B(u)\, f_S + B(Yv)B(u)\, f_S \\ \Longleftrightarrow\ &B(Yv)B(u)\, f_S = \dot{\mu}(Y)\, B(v)\, B(u)\, f_S - B(v)\dot{\mu}(Y)B(u)\, f_S \\ \Longleftrightarrow\ &B(Yv)B(u)\, f_S = \big(\dot{\mu}(Y)\, B(v) - B(v)\dot{\mu}(Y)\big)B(u)\, f_S. \end{aligned}$$

Si $g \in \mathrm{SO}_*(V)$ y como $S \in \mathrm{Sk}(V)$ es tal que $p_g + q_g S$ es invertible, entonces el espacio vectorial generado por los elementos de la forma f_S y los elementos de la forma $B(u)\, f_S$ es un subespacio denso de $\mathcal{F}(V_J)$ (ver [14]). Esto concluye la prueba. □

En conclusión, se obtuvieron las relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [\dot{\nu}(X), \dot{\beta}(v)] &= \dot{\beta}(Xv), \qquad \text{para} \quad X \in \mathfrak{sp}(V),\ v \in V; \\ [\dot{\mu}(Y), B(u)] &= B(Yu), \qquad \text{para} \quad Y \in \mathfrak{so}(V),\ u \in V. \end{aligned}$$

Dichas relaciones son análogas a las relaciones canónicas de conmutación entre los operadores de creación y aniquilación. Las relaciones (4.11) y (4.18) nos indican, en ambos casos, que las representaciones infinitesimales transforman campos cuánticos libres ($\dot{\beta}$ y B) en otros campos cuánticos:

$$\dot{\beta}(v) \xrightarrow{\dot{\nu}(X)} \dot{\beta}(Xv) \quad \text{y} \quad B(u) \xrightarrow{\dot{\mu}(Y)} B(Yu).$$

Capítulo 5

Resumen y conclusiones

Las similitudes entre los elementos gaussianos de $\mathcal{B}(V_J)$ y los de $\mathcal{F}(V_J)$ son bastantes; y las representaciones metaplécticas y de espín poseen muchas analogías, como se resume en el Cuadro 5.1 abajo.

	Caso bosónico	**Caso fermiónico**
Definición	$\mathcal{B}(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\vee k}$	$\mathcal{F}(V) := \bigoplus_{k=0}^{m} V^{\wedge k}$
Forma bilineal	$s = s(v_1, v_2)$	$d = d(v_1, v_2)$
Grupo de simetría	$\mathrm{Sp}(V, s)$	$\mathrm{SO}(V, d)$
Grupos cubridores	$\mathrm{Mp}^{\mathrm{c}}(V)$	$\mathrm{Spin}^{\mathrm{c}}(V)$
Elementos gaussianos	$f_T(u) := \exp\big(\frac{1}{4}\langle u \mid Tu\rangle\big)$	$f_T := \sum_{2\mid\#(K)} \mathrm{Pf}(T_K)\, \varepsilon_K$
Operadores cuánticos	Sistema de Weyl: $\dot{\beta}$ ó ϕ	Acción de Clifford: B
Relaciones canónicas	$[a^\dagger(v_1), a^\dagger(v_2)] = 0$ $[a(v_1), a(v_2)] = 0$ $[a(v_1), a^\dagger(v_2)] = \langle v_1 \mid v_2\rangle$	$\{a^\dagger(v_1), a^\dagger(v_2)\} = 0$ $\{a(v_1), a(v_2)\} = 0$ $\{a(v_1), a^\dagger(v_2)\} = \langle v_1 \mid v_2\rangle$
Operador unitario	$\Gamma(o)F(v) := F(o^{-1}v)$	$\Gamma(o)[\boldsymbol{v}] := ov_1 \wedge \cdots \wedge ov_k$
Vector del vacío	$a(v)\Omega = 0$ y $a^\dagger(v)\Omega = v$	$a(v)\Omega = 0$ y $a^\dagger(v)\Omega = v$
Factor de fase	$c_g := \det^{+1/4}(1 - T_h\widehat{T}_g)$	$c_g := \det^{-1/4}(1 - T_h\widehat{T}_g)$
2-cocíclo $c(g, h)$	$c_g c_h c_{gh}^{-1} \det^{-1/2}(1 - T_h\widehat{T}_g)$	$c_g c_h c_{gh}^{-1} \det^{+1/2}(1 - T_h\widehat{T}_g)$
Acciones infinitesimales	$[\dot{\nu}(X), \dot{\beta}(v)] = \dot{\beta}(Xv)$	$[\dot{\mu}(Y), B(u)] = B(Yu)$

Cuadro 5.1. Comparación de los espacios $\mathcal{B}(V_J) = \mathcal{B}(V)$ y $\mathcal{F}(V_J) = \mathcal{F}(V)$

En el cuadro, $v_1, v_2, \dots, v_k, v, u \in V$; $o \in U_J(V)$; $\boldsymbol{v} := v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$; $g, h \in \mathrm{Sp}(V)$ o $g, h \in \mathrm{SO}_*(V)$; $T \in \mathcal{D}(V)$ o $T \in \mathrm{Sk}(V)$; $X \in \mathfrak{sp}(V)$ y $Y \in \mathfrak{so}(V)$.

Los objetivos planteados en el presente trabajo fueron alcanzados satisfactoriamente: se hizo un estudio comparativo de la estructura fermiónica y la estructura bosónica de las representaciones de los grupos de simetría $\mathrm{SO}(V)$ y $\mathrm{Sp}(V)$, respectivamente. Más concretamente se realizó un estudio paralelo de los espacios vectoriales reales finitodimensionales con estructura simpléctica y estructura ortogonal y los espacios de Fock que ellos generan (Capítulo 2); un estudio comparativo de la representaciones metapléctica y espín de sus grupos de simetría (Capítulo 3); y un estudio comparativo de la representaciones infinitesimales de las álgebras de Lie correspondientes (Capítulo 4).

Esta área de estudio es muy fértil. En esta tesis se trabajó con un espacio vectorial real V con $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$ únicamente. Si V es infinitodimensional, hay que trabajar con grupos de simetría *restringidos*. Recuerde que si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, se define la **norma de Hilbert y Schmidt** para un operador A sobre $\mathcal{H}$ como

$$\|A\|_{\mathrm{HS}} := \sum_{i \in I} \|Ae_i\|^2$$

(la cual es independiente de las base ortonormal $\{e_i\}$ de $\mathcal{H}$). Se dice que A es un **operador de Hilbert y Schmidt** si $\|A\|_{\mathrm{HS}} < \infty$. Además, se acostumbra escribir $\mathrm{HS}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ para denotar la clase de todos los operadores de Hilbert y Schmidt sobre $\mathcal{H}$. Se definen los *grupos de simetría restringidos* como

(a) Para el Caso B, se define el **grupo simpléctico restringido** como

$$\mathrm{Sp}'(V) := \{\, g \in \mathrm{Sp}(V) : T_g \in \mathcal{L}^2(V) \,\}. \tag{5.1}$$

(b) Para el Caso F, se define el **grupo ortogonal restringido** como

$$\mathrm{O}'(V) := \{\, g \in \mathrm{O}(V) : T_g \in \mathcal{L}^2(V) \,\}. \tag{5.2}$$

(c) También se define el **grupo ortogonal especial restringido** como el (sub)grupo $\mathrm{SO}'(V) \leqslant \mathrm{O}'(V)$ tal que

$$\mathrm{SO}'(V) := \{\, g \in \mathrm{O}'(V) : \det g = 1 \,\}. \tag{5.3}$$

En cada caso, la aplicación T_g debe ser un operador de Hilbert y Schmidt.[1]

En el caso infinitodimensional, la representación metapléctica ν no sufre mayores cambios, pues $\mathcal{B}(V)$ es infinitodimensional, sin importar la dimensión de V; la existencia

[1] Se debe observar que esta condición es suficiente [27] para que exista el determinante $\det g$ en (5.3).

de ν – en el caso infinitodimensional – fue demostrada por Shale en [27]. En el caso de la representación de espín, sí hay ciertos detalles con los que hay que tener cuidado; por ejemplo, como $\dim \mathcal{F}(V) = \infty$, entonces hay que imponer una condición para que las series con las que se trabajen sean convergentes. Esta condición, necesaria y suficiente, es que T_g sea un operador de Hilbert y Schmidt [28].

Aunque en este trabajó no se lo ha mencionado hasta ahora, existe una representación para $\mathrm{O}(V)$, denominada la *representación de pin*. En [18] se define

$$\mathrm{O}(V) =: \mathrm{Pin}(V)/\mathbb{F}_2 \quad \text{y} \quad \mathrm{SO}(V) =: \mathrm{Spin}(V)/\mathbb{F}_2,$$

donde

$$\mathrm{Pin}(V) := \{\, \alpha \in \mathbb{C}\ell(V) : \alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k,\ \alpha_i \in V,\ \alpha\bar{\alpha} = \pm 1 \,\}$$

y

$$\mathrm{Spin}(V) := \{\, \alpha \in \mathbb{C}\ell(V) : \alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2k},\ \alpha_i \in V,\ \alpha\bar{\alpha} = \pm 1 \,\}.$$

y $\mathrm{Spin}(V) \leqslant \mathrm{Pin}(V)$. En [28] se prueba la existencia de la representación de pin (y por ende de la representación de espín).

Las similitudes y diferencias entre el caso bosónico y el caso fermiónico presentadas en el Cuadro 5.1 se mantienen en el contexto infinitodimensional, como se puede apreciar en los artículos [13] y [14].

Las dos acciones infinitesimales deducidas al final del Capítulo 4 se pueden generar al trabajar en *superálgebras de Lie*: un álgebra de Lie que es $\mathbb{F}_2$-graduada.[2] Se conjetura que existe una manera de combinar estas dos representaciones infinitesimales mediante el uso de superálgebras de Lie. En esta tesis, no es posible ir tan lejos, pero eso plantea un problema para un trabajo posterior. Para empezar, hay que determinar cuál superálgebra de Lie es la más apropiada. Algunos libros que abarcan esta temática son: *Symplectic Geometry and Fourier Analysis* [33], *The Theory of Spinors* [7], *Supersymmetry for Mathematicians: An Introduction* [31] y *Elements of Noncommutative Geometry* [15].

En otras palabras, se plantea la siguiente conjetura.

Conjetura. Es posible unificar las simetrías infinitesimales de campos libres mediante técnicas de supersimetría.

[2] Vea la Definición 3.38.

Bibliografía

[1] Huzihiro Araki, “Bogoliubov automorphisms and Fock representations of canonical anticommutation relations”, in *Operator Algebras and Mathematical Physics*, Palle E. T. Jørgensen and Paul S. Muhly, eds., Contemp. Math. **62** (1987), 23–141.

[2] Nachman Aronszajn, “Theory of reproducing kernels”, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337–404.

[3] Valentin Bargmann, “On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. I”, Commun. Pure Appl. Math. **14** (1961), 187–214.

[4] Richard Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1997.

[5] Feliks Aleksandrovich Berezin, *The Method of Second Quantization*, Academic Press, New York, 1966.

[6] Nikolay N. Bogoliubov y Dmitry V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, 3ª edición, Wiley, New York, 1980.

[7] Élie Cartan, *The Theory of Spinors*, Dover, New York, 1981.

[8] Sidney Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[9] Harry Dym, *Linear Algebra in Action*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[10] Vladimir A. Fock, “Konfigurationsraum und zweite Quantelung”, Z. Phys. **75** (1932), 622–647.

[11] Gerald B. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space*, Annals of Mathematics Studies **122**, Princeton University Press, Princeton, 1989.

[12] Wee Teck Gan, Fan Gao y Martin H. Weissman. “*L*-groups and the Langlands program for covering groups: a historical introduction”, Singapur, 2017; `arXiv:1705.07559`.

[13] José M. Gracia-Bondía y Joseph C. Várilly, “The metaplectic representation and boson fields”, preprint CPP/91/21, Austin, TX, diciembre 1991.

[14] José M. Gracia-Bondía y Joseph C. Várilly, “QED in external fields from the spin representation”, J. Math. Phys. **35** (1994), 3340–3367.

[15] José M. Gracia-Bondía, Joseph C. Várilly y Héctor Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston, 2001.

[16] Brian C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*, Springer, Cham, 2015.

[17] Sigurður Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Graduate Studies in Mathematics **34**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1978.

[18] Marc Lachièze-Rey, “Spin and Clifford algebras, an introduction”, Adv. Appl. Clifford Alg. **19** (2009), 687–720.

[19] Jan R. Magnus y Heinz Neudecker, *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, 3ª edición, Wiley, Hoboken, NJ, 2019.

[20] F. Gustav Mehler, “Über die Entwicklung einer Function von beliebig vielen Variabeln nach Laplaceschen Functionen höherer Ordnung”, J. reine angew. Math. **66**, 161–176.

[21] Andrew Pressley y Graeme B. Segal, *Loop Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1986.

[22] Paul L. Robinson y John H. Rawnsley, *The Metaplectic Representation, Mp^c Structures and Geometric Quantization*, Memoirs of the AMS **410**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1989.

[23] Paul L. Robinson, “The bosonic Fock representation and a generalized Shale theorem”, `arXiv:1203.5841`, Gainesville, FL, 2012.

[24] Simon N. M. Ruijsenaars, “On Bogoliubov transformations. II. The general case”, Ann. Phys. **116** (1978), 105—134.

[25] Irving E. Segal, “Mathematical problems of relativistic physics”, lectures at the Summer Seminar, Boulder, CO, 1960.

[26] Irving E. Segal, "The complex-wave representation of the free boson field", Adv. Math. Suppl. Studies **3** (1978), 321–343.

[27] David Shale, "Linear symmetries of free Boson fields", Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 149–167.

[28] David Shale y W. Forrest Stinespring, "Spinor representations of infinite orthogonal groups", J. Math. Mech. **14** (1965), 315–322.

[29] John Snygg, *A New Approach to Differential Geometry using Clifford's Geometric Algebra*, Birkhäuser, Boston, 2012.

[30] Piotr M. Sołtan, *A Primer on Hilbert Space Operators*, Birkhäuser, Cham, 2018.

[31] Veeravalli S. Varadarajan, *Supersymmetry for Mathematicians: An Introduction*, Courant Lecture Notes **11**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[32] Joseph C. Várilly, Notas del curso "SP–1311: Análisis Funcional", Universidad de Costa Rica, 2018. Disponible en www.kerwa.ucr.ac.cr/handle/10669/76349.

[33] Nolan R. Wallach, *Symplectic Geometry and Fourier Analysis*, 2ª edición, Dover, Mineola, NY, 2018.