UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
SISTEMA DE ESTUDIOS DE POSGRADO

CÁLCULO DE LAS TASAS FORWARD Y PROPUESTA PARA SU POSIBLE USO EN COSTA RICA.

Trabajo final de investigación aplicada sometido a la consideración de la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Economía para optar por al grado de y título de Maestría Profesional en Finanzas y Riesgo

ESTEFANY ALFARO BARRANTES

GLORIANA NARANJO PORRAS

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio, Costa Rica

2023

Dedicatoria y agradecimientos

Dedicamos esta tesis de maestría a todas las personas que nos apoyaron y guiaron en este camino. En primer lugar, a nuestro profesor tutor y lectores, quienes nos brindaron su tiempo, conocimientos y sabias orientaciones que nos permitieron llegar hasta aquí.

Queremos expresar nuestro profundo agradecimiento a nuestras familias, quienes nos enseñaron el valor del esfuerzo y la perseverancia, y nos dieron todo su apoyo incondicional. Agradecemos por su infinito amor, paciencia, comprensión y por obsequiarnos de su valioso tiempo para poder alcanzar esta meta.

Queremos agradecer también por el trabajo en equipo, el éxito de nuestro proyecto se debió en gran parte al compromiso, la cooperación y la comunicación efectiva. Cada una de nosotras aportó habilidades y conocimientos únicos, y tuvimos siempre la oportunidad de expresar nuestras ideas y contribuir al proyecto. Además, trabajamos juntas de manera armoniosa, apoyándonos mutuamente para superar los obstáculos y alcanzar nuestros objetivos.

Esta tesis es un reflejo del esfuerzo y la dedicación de todos aquellos que nos apoyaron y alentaron en este camino. Gracias a todos y todas de corazón.

"Este trabajo final de investigación aplicada fue aceptado por la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Economía de la Universidad de Costa Rica, como requisito parcial para optar por el grado y título de Maestría Profesional en Finanzas y Riesgo."

JUAN ANDRES ROBALINO HERRERA (FIRMA)

Digitally signed by JUAN ANDRES ROBALINO HERRERA (FIRMA)
Date: 2023.05.08 15:56:03 -06'00'

Ph.D. Juan Andrés Robalino Herrera

Representante de la Decana

Sistema de Estudios de Posgrado

VIDAL VILLALOBOS ROJAS (FIRMA)

Firmado digitalmente por VIDAL VILLALOBOS ROJAS (FIRMA)
Fecha: 2023.05.08 07:35:47 -06'00'

MS.c. Vidal Villalobos Rojas

Profesor Guía

CESAR ANDRES ULATE SANCHO (FIRMA)

Firmado digitalmente por CESAR ANDRES ULATE SANCHO (FIRMA)
Fecha: 2023.05.08 16:02:50 -06'00'

MS.c. César Andrés Ulate Sancho

Lector

GUSTAVO ADOLFO MORALES MORALES (FIRMA)

Firmado digitalmente por GUSTAVO ADOLFO MORALES MORALES (FIRMA)
Fecha: 2023.05.08 16:38:56 -06'00'

MS.c. Gustavo Adolfo Morales Morales

Lector

EDGAR ROBLES CORDERO (FIRMA)

Digitally signed by EDGAR ROBLES CORDERO (FIRMA)
Date: 2023.05.10 10:01:48 -06'00'

Ph.D. Edgar Robles Cordero

Director del Programa de Posgrado en Economía

ESTEFANY ALFARO BARRANTES (FIRMA)

Digitally signed by ESTEFANY ALFARO BARRANTES (FIRMA)
Date: 2023.05.10 10:09:56 -06'00'

GLORIANA MARIA NARANJO PORRAS (FIRMA)

Firmado digitalmente por GLORIANA MARIA NARANJO PORRAS (FIRMA)
Fecha: 2023.05.11 10:18:23 -06'00'

Estefany Alfaro Barrantes

Sustentantes

Gloriana Naranjo Porras

Sustentantes

Tabla de contenidos

Resumen

En este trabajo se aborda la utilización de las tasas de interés forward como herramienta para cubrir riesgos en un mercado financiero caracterizado por la alta volatilidad en tasas de interés, tipos de cambio y variaciones de precios de los activos bursátiles. Estas tasas son un buen proxy para proyectar las tasas de interés futuras, ya que el mercado actual y el mercado futuro están sumamente correlacionados al ser afectados por los mismos factores económicos. La utilidad de las tasas de interés forward radica en un mercado financiero con más información acerca de los precios futuros, lo que genera mayor eficiencia de mercado. En este sentido, se menciona que en Costa Rica existe una disparidad entre la formación de expectativas del mercado y las de las instituciones, evidenciada en la baja demanda de títulos flotantes en dólares del Banco Central y los ajustes en las tasas de interés en las subastas semanales del Ministerio de Hacienda. El presente trabajo también plantea la necesidad de mejorar la metodología para la construcción de la curva soberana de tasas de interés en Costa Rica para generar un espacio de discusión acerca de las oportunidades de mejora y las ventajas que esto tendría sobre la formación de expectativas de los agentes económicos sobre precios futuros.

Lista de figuras

Lista de abreviaturas

Abreviatura	Significado
BCCR	Banco Central de Costa Rica
D	Demanda de crédito
ETTI	Estructura Temporal de los Tipos de Interés
S	Oferta de crédito
TPRAS	Títulos de Propiedad Ajustables Soberanos

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

SEP Sistema de Estudios de Posgrado

Autorización para digitalización y comunicación pública de Trabajos Finales de Graduación del Sistema de Estudios de Posgrado en el Repositorio Institucional de la Universidad de Costa Rica.

Yo, Estefany Alfaro B. y Gloriana Naranjo P., con cédula de identidad 206970772 y 116260595, en mi condición de autor del TFG titulado Cálculo de las tasas forward y propuesta para su posible uso en Costa Rica.

Autorizo a la Universidad de Costa Rica para digitalizar y hacer divulgación pública de forma gratuita de dicho TFG a través del Repositorio Institucional u otro medio electrónico, para ser puesto a disposición del público según lo que establezca el Sistema de Estudios de Posgrado. **SI** X **NO** *

***En caso de la negativa favor indicar el tiempo de restricción: ________________ año (s).**

Este Trabajo Final de Graduación será publicado en formato PDF, o en el formato que en el momento se establezca, de tal forma que el acceso al mismo sea libre, con el fin de permitir la consulta e impresión, pero no su modificación.

Manifiesto que mi Trabajo Final de Graduación fue debidamente subido al sistema digital Kerwá y su contenido corresponde al documento original que sirvió para la obtención de mi título, y que su información no infringe ni violenta ningún derecho a terceros. El TFG además cuenta con el visto bueno de mi Director (a) de Tesis o Tutor (a) y cumplió con lo establecido en la revisión del Formato por parte del Sistema de Estudios de Posgrado.

ESTEFANY ALFARO BARRANTES (FIRMA)
Digitally signed by ESTEFANY ALFARO BARRANTES (FIRMA)
Date: 2023.05.10 10:10:46 -06'00'

GLORIANA MARIA NARANJO PORRAS (FIRMA)
Firmado digitalmente por GLORIANA MARIA NARANJO PORRAS (FIRMA)
Fecha: 2023.05.11 10:20:40 -06'00'

FIRMA ESTUDIANTE

Nota: El presente documento constituye una declaración jurada, cuyos alcances aseguran a la Universidad, que su contenido sea tomado como cierto. Su importancia radica en que permite abreviar procedimientos administrativos, y al mismo tiempo genera una responsabilidad legal para que quien declare contrario a la verdad de lo que manifiesta, puede como consecuencia, enfrentar un proceso penal por delito de perjurio, tipificado en el artículo 318 de nuestro Código Penal. Lo anterior implica que el estudiante se vea forzado a realizar su mayor esfuerzo para que no sólo incluya información veraz en la Licencia de Publicación, sino que también realice diligentemente la gestión de subir el documento correcto en la plataforma digital Kerwá.

1. Introducción

Durante la crisis sanitaria ocasionada por el SARS-CoV-2, la economía mundial enfrentó una serie de impactos negativos como cierres de puertos y de fábricas, desabastecimiento de materia prima y bienes de consumo, saturación de puertos, aumento en los tiempos de recepción de las mercancías; entre otros. Unos meses después a lo que creíamos era el inicio de la recuperación post pandemia, inicia el conflicto bélico entre Ucrania y Rusia, impactando fuertemente la economía mundial. Se registraron fuertes incrementos en los precios de las materias primas y altas tasas de inflación, que obligaron a las principales economías a aplicar ajustes en su política monetaria. Los ajustes en las tasas de política monetaria se han trasladado paulatinamente a las tasas de interés que se observan en los mercados, lo que ha ocasionado preocupación entre los agentes económicos.

Ante este escenario caracterizado por alta volatilidad en tasas de interés, tipos de cambio y variación de precios de los activos bursátiles; tanto operadores financieros como administradores públicos o privados, han buscado la forma de cubrirse por medio del uso de derivados financieros, especialmente en industrias donde se ha experimentado una volatilidad de precios significativa.

Una de las herramientas que se utilizan comúnmente para cubrirse del riesgo, son las tasas de interés forward, que se definen como tasas de interés sobre inversiones y préstamos que comienzan en una fecha futura, la fecha de liquidación, y duran hasta una fecha más lejana en el futuro, la fecha de vencimiento. (Svensson, 1994). Estas tasas se consideran un buen *proxy* sobre las proyecciones de las tasas de interés, ya que el mercado actual o spot y el mercado futuro o forward están sumamente correlacionados al ser afectados por los mismos factores económicos.

Estas tasas se han utilizado para la fijación de precios de nuevos instrumentos financieros, en el descubrimiento de posibilidades de arbitraje y por algunos Bancos Centrales con fines de política monetaria. Esto sucede al estar implícitas las tasas forward en la curva cero cupón, lo que se logra transformar en información valiosa acerca de las expectativas de los agentes económicos sobre precios futuros. En términos macroeconómicos, su utilidad radica en un mercado financiero con mayor información acerca de los precios futuros, lo que genera mayor eficiencia de mercado.

Desafortunadamente, para Costa Rica se observa disparidad entre la formación de expectativas del mercado y las de las instituciones, lo anterior se evidencia al observar la baja demanda por los títulos flotantes en dólares del Banco Central, la valoración de los TPRAS (títulos de propiedad ajustables soberanos), ligados al precio de la curva de rendimiento soberna, y los ajustes en las tasas de interés en las subastas semanales del Ministerio de Hacienda.

De acuerdo con Rodrigo Cubero, presidente del Banco Central de Costa Rica en el periodo 2018-2022, la curva de rendimiento soberana del país tiene un grave problema de ausencia de información sobre puntos específicos de la curva. De acuerdo con Cubero, dentro del mercado de bonos soberanos hay segmentos con más liquidez que otros; en unos segmentos hay realmente pocas transacciones y eso hace que la información sobre dónde está la tasa de interés en un momento dado del tiempo normalmente tenga que hacerse por vía de extrapolación y con un algoritmo de las compañías que hace este tipo de pricing. Por lo que no siempre queda claro la correcta construcción del algoritmo o que la inferencia que se hace de dónde se ubica el precio en un momento dado del tiempo, cuando no ha habido transacciones recientes, sea enteramente precisa.

Asimismo, Melvin Garita, Gerente General de Valores en el Banco Nacional de Costa Rica, indica que la formación de la curva soberana tiene dos aristas, la primera tiene que ver con la metodología para la construcción de la curva, la cual se realiza apegada a las mejores prácticas de análisis numérico, mientras que la segunda arista tiene que ver con la información que genera el mercado y que constituye el principal insumo para la estimación de una estructura temporal de tasas de interés.

Frente a esta realidad, se realizó un cuestionamiento más profundo de la calidad de la información que revela la curva soberana actual, así como la metodología para su construcción. Esto con la motivación de generar un espacio de discusión acerca de las oportunidades de mejora de la curva soberana y las ventajas que esto tendría sobre la formación de expectativas de los agentes económicos sobre precios futuros.

En relación con la formación de expectativas, Garita nos indica que actualmente en el mercado financiero costarricense, bajo esta formación de la curva, se ven forzados a realizar un análisis mucho más integral dado los vacíos de información que tiene la curva soberana, esto incluye análisis histórico de los nodos de la curva soberana, análisis de tasas reales, análisis de pares internacionales (para la curva soberana en dólares), entre otros.

La presente investigación se estructura de la siguiente forma: los apartados dos y tres se centran en describir la motivación, así como los objetivos generales y específicos de este estudio. En el cuarto capítulo se definen los fundamentos teóricos necesarios como teoría de interés, teoría de factores de descuento y teoría de valoración. En el capítulo quinto se profundiza en diferentes metodologías para la correcta construcción de la curva soberana, así como las debilidades identificadas en la curva costarricense. Por último, se enfrentan las principales ideas desarrolladas durante el documento para la presentación de las conclusiones.

2. Motivación

Dada la importancia de curva soberana y los problemas identificados en la actual curva de Costa Rica, como la ausencia de información sobre puntos específicos por la poca liquidez y profundidad del mercado, la concentración tanto en la oferta como en la demanda de instrumentos financieros y las implicaciones que esto tiene en la formación de expectativas en el mercado costarricense; en esta investigación se va a realizar una revisión metodológica de la construcción de la curva actual y una propuesta para mejorar su precisión, con el fin de que arroje información valiosa acerca de las expectativas de los agentes económicos sobre precios futuros.

3. Objetivos

3.1 Objetivo general

La presente investigación revisa la curva soberana actual de Costa Rica, con el objetivo de evaluar su precisión e influencia en la construcción de expectativas de los agentes económicos sobre las tasas de interés futuras.

3.2 Objetivos específicos

- Descubrir porque la construcción actual de la curva soberana no se alinea con las expectativas de los agentes económicos.
- Encontrar el o los métodos matemáticos y estadísticos correctos para el cálculo de la curva soberana en Costa Rica.
- Derivar a partir de la curva soberana las tasas forwards implícitas para Costa Rica.

4. Marco Teórico

4.1 Teoría general del interés[1]

4.1.1 Periodo

Se define como la unidad en la cual el tiempo está medido. Puede medirse en distintas unidades: días, meses, décadas, etc.

[1] **Fuente:** Víquez, J. (2021). Microeconomía Avanzada I. Teoría general de interés. Universidad de Costa Rica.

4.1.2 Principal

Se define principal a la cantidad de dinero (capital) inicial.

4.1.3 Valor acumulado

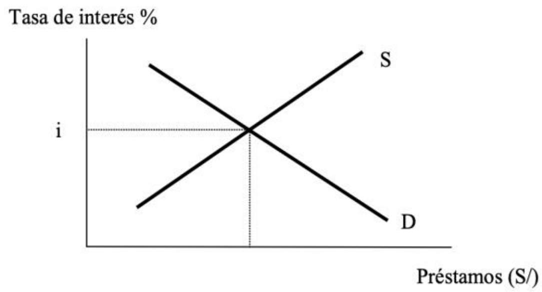
Se define como valor acumulado a la cantidad de dinero que se paga al final de un periodo de tiempo.

4.1.4 Interés: Principal- Acumulado

Se define como la diferencia entre el valor acumulado y el principal. Se expresa normalmente como un porcentaje del principal. Usualmente es positivo, sin embargo, se pueden presentar tasas de interés negativas, cuando en una inversión se pierde dinero.

De acuerdo con Fisher, I. (1930), como cualquier otro precio en la economía de mercado, la tasa de interés es determinada por las fuerzas de la oferta y de la demanda, en este caso, de la oferta y la demanda de crédito. Si la oferta de crédito (S) de los prestamistas aumenta con relación a la demanda (D) de los prestatarios, el precio (tipo de interés i) tenderá a bajar mientras que los prestamistas compiten para encontrar el uso para sus recursos. Si la demanda aumenta con relación a la oferta, el tipo de interés tenderá a elevarse mientras que los prestatarios compiten por los fondos cada vez más escasos. Entonces el interés es la compensación que paga el prestatario al prestamista de capital por su uso, es el costo de oportunidad que se paga por el uso del capital.

Figura 1. Tasa de interés de equilibrio



Fuente: Fisher, I. (1930) The Theory of Interest Rate. Macmillan

4.1.5 Tasa efectiva de interés

La tasa efectiva de interés i_n, es la cantidad de dinero que una unidad monetaria, invertida al principio del n-ésimo periodo, se producirá al final de dicho periodo. Entonces, dicha tasa efectiva vendría dada por:

$$i_n = \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n-1}} \qquad (1)$$

Donde A_n es el valor acumulado al final del n-ésimo periodo. Observe que esta tasa es efectivamente un rendimiento porque me indica cuánto incrementó el principal del periodo n-1 al periodo n- ésimo.

4.1.6 Tasa de interés simple

En un esquema de inversión donde se reinvierte solamente el principal, sin reinvertir los intereses generados en periodos anteriores se le llama interés simple y la tasa constante que paga de interés se le llama *tasa de interés simple.* Se trabaja con ecuaciones en diferencia pues el tipo de dinámica que siguen las tasas de interés es de naturaleza recursiva.

Para este esquema el valor acumulado A_n seguiría la siguiente ecuación en diferencias:

$$A_{n+1} = A_n + iK \qquad (2)$$

La ecuación (2) con condición inicial $A_0 = K$, donde K es el principal.

La solución de la ecuación (2) es:

$$A_n = K\,(1 + i * n) \quad (3)$$

4.1.7 Tasa de interés compuesto

Dentro de un esquema de inversión donde se reinvierte el principal y los intereses generados en períodos anteriores se le llama interés compuesto y a la tasa efectiva constante que paga de interés se le llama tasa de *interés compuesto*.

Para este esquema el valor acumulado A_n seguiría la siguiente ecuación en diferencias:

$$A_{n+1} = (1 + i)A_n \qquad (4)$$

(4) con condición inicial $A_0 = K$, donde K es el principal.

La solución de la ecuación (4) es

$$A_n = K\,(1 + i)^n = Ke^{n*r} \quad (5)$$

donde $r = ln\ (1 + i)$

4.1.8 Tasa nominal convertible

Se define como la tasa nominal de interés pagadera m veces por periodo, $i^{(m)}$, donde $m > 1$ es un entero positivo, es una tasa que paga un interés efectivo de $\frac{i(m)}{m}$ cada $m - ésima$ parte de periodo.

4.1.9 Tasas equivalentes

Se dice que dos tasas son equivalentes si una cantidad dada de principal, invertido bajo el mismo esquema de inversión, durante el mismo plazo, a cada una de estas tasas, produce el mismo valor acumulado.

4.1.10 Tasa compuesta continuamente

Se denota por r a la tasa de interés *nominal convertible continuamente* (fuerza de interés), esta es una tasa equivalente, la cual representa la tasa constante que se debe pagar durante el periodo, componiendo continuamente, para que se obtenga la misma cantidad de dinero que si se invirtiera de una sola vez a la tasa efectiva i. Dicha tasa viene dada por la fórmula:

$$r = ln\ (1 + i) \quad (6)$$

La unidad de cuenta de la fuerza de interés r es la misma que i, esto implica que si i es una tasa efectiva anual, r debe expresarse en años, y el valor acumulado de n años sería $A_n = e^{n*r}$. Pero si i fuera una tasa efectiva diaria, entonces el valor acumulado de n años sería $A_n = e^{n*365*r}$.

4.1.11 Tasas variables

Lo mencionado hasta el momento, está restringido a un número de períodos enteros, utilizando interés compuesto y una tasa fija. Bajo el esquema de tasa variable, se debe conservar la naturaleza de pagos, pero con interés representados en fracciones de tiempo cuando Δt →0.

4.1.12 Fracción de periodo

Sea $i^{(m)}$ la tasa nominal equivalente a i. Se define la fracción de periodo $\Delta t \coloneqq \frac{1}{m}$ y note que $\Delta t\ m \to \infty \to 0$.

Utilizando entonces fracciones de periodo se elimina la restricción temporal, obteniendo el valor acumulado para cualquier momento en el tiempo que permite realizar cálculos de forma continua en (t).

4.1.13 Tasas distintas

Cuando ya no se cuenta con una tasa fija i, sino que para el primer periodo la tasa es R_1, para el segundo periodo es R_2, y así sucesivamente, se tienen las siguientes soluciones:

Interés simple:

$$A_{n+1} = A_n + R_{n+1}K \ \Rightarrow \ A_n = K\left(1 + \sum_{k=1}^{n} R_k\right) \qquad (7)$$

Interés compuesto:

$$A_{n+1} = (1 + R_{n+1})A_n \ \Rightarrow \ A_n = K\prod_{k=1}^{n}(1 + R_k) = Ke\sum_{k=1}^{n} rk \qquad (8)$$

$$\text{donde } r_k \ \coloneqq ln\ ln\ (1 + R_k)$$

4.1.14 Tasas continuas distintas en tiempo continuo

Cuando ya no se cuenta con una tasa fija i, sino que se posee una tasa R_t (rt) que rige en el instante t se tiene,

Interés Simple:

$$A'_t = R_t K \;\Rightarrow\; A_t = K\left(1 + \int_0^t R_s ds\right) \quad (9)$$

Interés compuesto:

$$A'_t = r_t A_t \;\Rightarrow\; A_t = K e^{\int_0^t r_s ds} \quad (10)$$

Con las ecuaciones (9) y (10) se logra un marco completamente flexible con tasas que cambian en el tiempo y que permite generar todos los escenarios (tasa fija, cambios discretos, etc.)

4.2 Factores de Descuento[2]

Suponga que la tasa de interés es i durante el periodo. Si invierto la cantidad de $\frac{K}{1+i}$ unidades de dinero hoy, al final del periodo se contará con un valor acumulado de:

$$\frac{K}{1+i} * (1+i) = K \qquad (11)$$

El monto $K * \frac{1}{1+i}$ se conoce como *valor presente* de K unidades de dinero al principio del periodo, mientras que la tasa de interés es el costo de oportunidad de no invertir el dinero.

El factor de descuento se denota por

$$D = \frac{1}{1+i} \qquad (12)$$

[2] **Fuente:** Víquez, J. (2021). Microeconomía Avanzada I. Factores de descuento. Universidad de Costa Rica

Se define así ya que cuando se quiere saber el valor presente de K unidades de dinero en ese periodo, es equivalente a tener $K * D$ unidades de dinero al inicio del periodo.

Es importante antes de continuar, repasar la relación entre la tasa real r, la inflación π y la tasa de interés (nominal) i ,dada por $(1 + r)(1 + \pi) = (1 + i)$.

Deflatar K unidades de dinero es:

$$\frac{1}{1+\pi} * K \quad (13)$$

Mientras que descontar K unidades de dinero es:

$$\frac{1}{1+i} * K = \frac{1}{(1+r)(1+\pi)} * K = \frac{1}{(1+r)} * \left[\frac{1}{(1+\pi)} * K\right] \quad (14)$$

Descontar implica deflatar y descontar en términos reales.

Si después de t unidades de tiempo se tiene que 1 unidad de dinero crece hasta ser A_t , por lo que invertir K unidades de dinero se llega a un valor acumulado de $K * A_t$, entonces se necesitarán $K = \frac{1}{A_t}$ unidades de dinero al inicio del periodo para obtener 1 unidad de dinero al final del tiempo t.

El factor de descuento bajo esquema de interés simple es:

$$D_t = \frac{1}{1+i*t} \quad (15)$$

El factor de descuento bajo esquema de interés compuesto es:

$$D_t = \frac{1}{(1+i)^t} \quad (16)$$

4.2.1 Factor de descuento continuo

Lo visto anteriormente es bajo un esquema de interés compuesto, pero de manera discreta. Utilizando la igualdad $(1+i)=e^{r}$ se obtiene un esquema de interés compuesto continuamente, el factor de descuento es

$$D=e^{-r} \qquad (17)$$

Igualmente, el factor de descuento en varios periodos sería

$$D_t=e^{-rt} \qquad (18)$$

donde t es el tiempo en que se da el valor que se quiere descontar.

Ahora se aplican las fórmulas anteriores a los diferentes esquemas de tasas de interés:

Esquema de interés simple

Interés simple discreto:

$$D_t=\frac{1}{(1+\sum_{k=1}^{n} R_k+\Delta t*R_{n+1})}=\frac{1}{(1+i_t*t)} \quad (19)$$

donde $\Delta t<1$ es una fracción tal que $t=n+\Delta t, n\coloneqq\lfloor t\rfloor$ e i_t es la tasa fija equivalente.

Interés simple continuo:

$$D_t=\frac{1}{(1+\int_0^t R_s ds)}=\frac{1}{(1+i_t*t)} \qquad (20)$$

Esquema de interés compuesto

Interés compuesto discreto:

$$D_t = \frac{1}{(\prod_{k=1}^{n}(1+R_k))(1+R_{n+1})^{\Delta t}} = e^{-(\sum_{k=1}^{n} r_k + \Delta t * r_n + 1)}$$

$$= \frac{1}{(1+\rho_t)^t}$$

$$= e^{-\delta_t * t} \qquad (21)$$

donde $r_k \coloneqq ln\,(1+R_k)$. Donde $\Delta t < 1$ es una fracción tal que $t = n + \Delta t, n \coloneqq \lfloor t \rfloor$ y ρ_t junto con δ_t son las tasas fijas equivalentes respectivas.

Interés compuesto continuo:

$$D_t = e^{-\int_0^t r_s ds} = e^{-\delta_t * t} = \frac{1}{(1+\rho_t)^t} \quad (22)$$

4.2.2 Valor acumulado y valor presente diferidos

Valor acumulado diferido

Sea $T > t \geq 0$. Denote por $A(t,T)$, el valor acumulado de una inversión de 1 unidad de dinero que vence en T unidades de tiempo pero que inicia dentro de t unidades de tiempo.

Valor presente diferido

Sea $T > t \geq 0$. Denote por $D(t,T)$, el valor presente al tiempo t, de 1 unidad de dinero en el tiempo T.

En el caso de interés fijo, las funciones de valor acumulado y valor presente son, respectivamente:

$$A(t,T) \coloneqq A_{T-t} \quad (23)$$

$$D(t,T) \coloneqq D_{T-t} = \frac{1}{A_{T-t}} \ (24)$$

Esto porque es una inversión que se hace por un periodo de tiempo $T-t$ unidades de tiempo y las tasas son independientes del tiempo.

Es imprescindible tener claro que llevar a valor futuro un flujo de dinero a través de su valor acumulado y luego descontarlo, no es lo mismo a descontar dicho flujo inmediatamente, es decir, existen factores de descuento $D(t,T)$ como el de interés simple, tales que:

$$D(0,t) \neq A(t,T) * D(0,T) \quad (25)$$

El único esquema de interés que permite la igualdad para todos los posibles flujos es el interés compuesto.

Si se analiza el factor de descuento $D(0,T)$ y por otro lado se tiene $D(0,t)D(t,T)$, el primero estudia una estrategia definida durante el periodo $[0,T]$, la cual puede ser simple, mixta, etc.

La segunda, por su parte, asume una estrategia de inversión establecida para el plazo $[0,t]$, pero al final del tiempo t, deben reinvertir el principal más los intereses, correspondiendo a otra inversión establecida para el plazo $[t,T]$ pero con un principal distinto.

Es por esto, que la única estrategia de inversión que cumple con $D(0,T) = D(0,t)D(t,T)$, para todo t, es aquella donde reinvierte el principal y los intereses en todo momento t, la cual es la definición del interés compuesto.

Si se asume que se tienen dos opciones de inversión:

1. Invertir a X años plazo a una tasa i.
2. Invertir a X años pero reinvirtiendo cada año a una tasa r.

Si la inversión 1 es mayor que la inversión 2:

$$1 + i > (1 + r)^X \qquad (26)$$

Esto provocaría que las personas en lugar de reinvertir cada año, invierta directo a X años, provocando que los que requieren capital en el corto plazo estén dispuestos a pagar una tasa mayor por el uso del capital, r tendría que subir; y los que requieren capital en el largo plazo no necesiten pagar tanto por ese principal, i tendría que bajar.

Los cambios se harían hasta que r sea equivalente a i :

$$1 + i + (1 + r)^X \qquad (27)$$

Es decir, las **tasas son equivalentes**, la tasa es constante.

Lo anterior se fundamenta en varias hipótesis que no se cumplen en la realidad por las siguientes razones:

- **Ausencia de riesgo:** las inversiones son comparables en términos de riesgo.
- **No hay segmentación de mercado:** Los inversionistas del corto plazo son los mismos que los de largo plazo.

- **No hay preferencia por la liquidez:** la gente es indiferente entre tener el dinero ahora o después.
- **Tasas determinísticas:** se sabe cuánto será la tasa que se pagará en el futuro.
- **Agentes racionales:** tienen bien definidas y ordenadas sus preferencias.
- **No hay punto de saciedad:** más dinero siempre será preferido a menos.

4.2.3 Tasa corta

Se define por $A(t,T)$ el valor acumulado de una cuenta bancaria al tiempo $T \geq t \geq 0$. Se asume que $A(t,t) = 1$, y que la cuenta bancaria evoluciona de acuerdo a la siguiente ecuación diferencial:

$$d_s A(t,s) = r_s A(t,s)ds, \quad A(t,t) = 1 \quad (28)$$

Donde r_s es una función positiva del tiempo. Como consecuencia;

$$A(t,T) = e^{\int_t^T r_s ds} \qquad (29)$$

r_t es la tasa instantánea de interés compuesta continuamente, pagada en el momento t. Se le llama la ***tasa corta*** o la ***tasa spot instantánea.***

Esta cuenta bancaria es útil porque sirve de numerario, es decir, de parámetro para medir el valor del dinero en el tiempo. En la práctica, r_t se puede tomar como la tasa bancaria *overnight.*

4.2.4 Factor de descuento estocástico

El factor de descuento estocástico $D(t,T)$ entre los instantes t y T , es el momento en el tiempo t que es equivalente a una unidad de dinero pagable en el tiempo T, y está dado por:

$$D(t,T) = e^{-\int_t^T r_s ds} \qquad (30)$$

El factor de descuento $D(t,T)$ es estocástico, pues se está trabajando con tasas estocásticas, la única tasa corta que conocemos en t es r_t , mientras que las tasas $\{r_s\}_{s>t}$ son desconocidas.

4.2.5 Bonos cero cupón

Un bono con cero cupón con T-vencimiento, es un contrato que garantiza al poseedor el pago de 1 unidad de dinero en el tiempo T, sin pagos intermedios. El valor de este contrato en el tiempo $t < T$ se denota $P(t,T)$. Donde $P(t,T) = 1$, para todo T.

Estos bonos cero cupón se negocian con descuento, por lo que su precio siempre es inferior a 1. El rendimiento, tasa de interés efectiva, de ese título cero cupón es:

$$R(t,T) = \frac{1-P(t,T)}{P(t,T)} \qquad (31)$$

Inmediatamente se tiene que

$$P(t,T) = \frac{1}{1+R(t,T)} \qquad (32)$$

4.2.6 Convenciones temporales

Existe un problema cuando se intenta calcular el tiempo al vencimiento de un bono, debido a que durante el año existen feriados, meses con diferente cantidad de días, años bisiestos, etc; que dificultan el conteo de días.

Función de conteo de días

Se denota por $\tau(t,T)$ a la medida escogida para contar los días que hay entre las fechas t y T. Si t y T están suficientemente cerca, menos de un día, en todos los casos $\tau(t,T) = T - t$.

Plazo al vencimiento

El tiempo al vencimiento $\tau(t,T)$ es la cantidad de tiempo, usualmente años, desde el presente t hasta el tiempo en que acaba el contrato $T > t$.

4.2.7 Rendimientos Equivalentes

Rendimientos Equivalentes I

Tasas asociadas a $R(t,T)$ y a $P(t,T)$

Se denota por $\rho(t,T)$ a la tasa de interés spot compuesta anualmente, en el tiempo t hasta un momento T, y es la tasa efectiva anual que es equivalente a $R(t,T)$, ampliando:

$$\rho(t,T) \ := \ (1 + R(t,T))^{\frac{1}{\tau(t,T)}} - 1 = \frac{1}{[P(t,T)]^{\frac{1}{\tau(t,T)}}} - 1 \qquad (33)$$

Se denota por $L(t,T)$ a la tasa de interés spot anual de interés simple, en el tiempo t hasta un momento T, y es la tasa anualizada de $R(t,T)$, ampliando:

$$L(t,T) \ := \ \frac{R(t,T)}{\tau(t,T)} = \frac{1-P(t,T)}{\tau(t,T)P(t,T)} \qquad (34)$$

Rendimientos Equivalentes II

Tasas asociadas a $R(t,T)$ y a $P(t,T)$

Se denota por $\delta(t,T)$ a la tasa de interés spot compuesta continuamente, en el tiempo t hasta un momento T, y es la tasa compuesta continuamente que es equivalente a $R(t,T)$, ampliando:

$$\delta(t,T) \ := ln\ ln\left(1+\rho(t,T)\right) \ = \frac{ln\ (1+R(t,T))}{\tau(t,T)} = -\frac{lnP(t,T)}{\tau(t,T)} \qquad (35)$$

Se denota por $\rho^{(m)}(t,T)$ a la tasa de interés spot compuesta m veces al año, y es la tasa nominal de un m −ésimo de año que es equivalente a $R(t,T)$ ampliando:

$$\rho^{(m)}(t,T) \ := \ m\left((1+R(t,T)^{\frac{1}{m\tau(t,T)}}-1\right) = m\left(\frac{1}{[P(t,T)]^{\frac{1}{m\tau(t,T)}}}-1\right) \quad (36)$$

4.2.8 Curva Cero Cupón

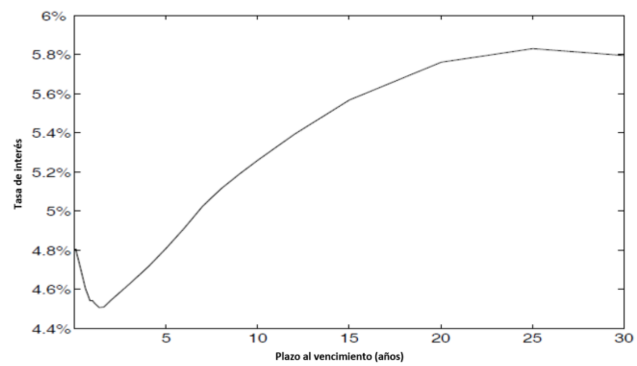
4.2.8.1 Estructura temporal de tasas de interés (ETTI)

En economía la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI) (también conocida como curva de rendimientos o curva cero cupón) representa la relación existente, en un momento dado del tiempo, entre el rendimiento de un conjunto de bonos, que ha de tener el mismo riesgo de insolvencia, y el tiempo que resta hasta su vencimiento, es decir se compara el rendimiento de un bono con vencimiento dentro de un año con otro de las mismas características, pero vencimiento a dos, tres y más años.

Es una curva de tasas equivalentes, ya sea de tasas compuestas continuamente (δ) o de tasas equivalentes anuales (ρ), que va indicando la evolución de las tasas de interés.

La curva cero cupón en el tiempo t , es el gráfico de las tasas spot. Usualmente se utiliza el gráfico de la función $T \to \delta(t,T)$, o de $T \to \rho(t,T)$.

Figura 2. Curva Cero Cupón



Fuente: Víquez, J. (2021). Microeconomía Avanzada I. *Factores de Descuento Estocásticos* (pp.26). Universidad de Costa Rica

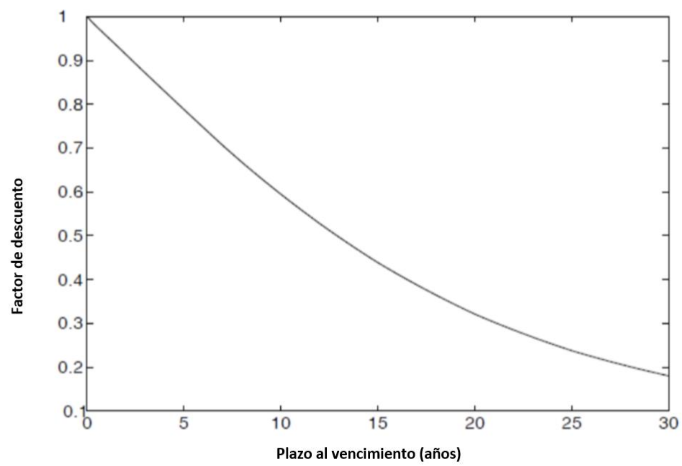
La ETTI o curva cero cupón es una curva de expectativas. El mercado tiene ahí contenido lo que se espera que sean las tasas en el futuro.

Las tasas que componen la ETTI deben ser tasas equivalentes para que sean completamente comparables. Si la curva soberana se construye con tasas no equivalentes el gráfico de la curva no significa nada porque el rendimiento va aumentando con los años solamente porque los recursos se invierten durante más tiempo.

4.2.9 Curva Bono Cero Cupón

La curva bono cero cupón en el tiempo t, es el gráfico de la función $T \to P(t,T)$. Por la positividad de las tasas de interés, esta curva es decreciente respecto a T, empezando por $P(t,T)=1$. También se le conoce como la estructura temporal de factores de descuento.

Figura 3. Curva Bono Cero Cupón



Fuente: Víquez, J. (2021). Microeconomía Avanzada I. *Factores de Descuento Estocásticos*(pp.27). Universidad de Costa Rica

Relación entre $\boldsymbol{P(t,T)}$ y $\boldsymbol{D(t,T)}$

Si se deposita 1 unidad de dinero en la cuenta bancaria, sabemos que se recibirán $A(t,T)$ unidades de dinero en el tiempo T. Si se venden $\frac{1}{P(t,T)}$ bonos cero cupón al precio $P(t,T)$, entonces se deberán pagar $\frac{1}{P(t,T)}$ unidades de dinero en el tiempo T.

La riqueza de la persona sería $\omega_t = \frac{1}{P(t,T)} * P(t,T) - 1 = 0$ y $\omega_t = A(t,T) - \frac{1}{P(t,T)}$.

ω_T es estocástica pues depende de los valores desconocidos de $\{r_s\}T \geq s > t$. Como se invierte $\omega_T = 0$ unidades de dinero, el mercado debería garantizar que sea imposible que $P[\omega_T \geq 0] = 1$ y $P[\omega_T > 0] > 0$, que implica una ganancia segura.

Debe existir una medida de probabilidad Q donde $\omega_T * D(t,T)$ sea una martingala, i.e.,$E^Q[\omega_T * D(t,T)]|F_t = 0 = w_t * D(t,t)$.

Entonces, bajo esta medida de probabilidad Q se tiene que

$$0 = E^Q[\omega_T * D(t,T)|F_t] = E^Q\left[1 - \frac{D(t,T)}{P(t,T)}|F_t\right] = 1 - \frac{E^Q[D(t,T)|F_t]}{P(t,T)} \quad (37)$$

en conclusión,

$$P(t,T) = E^Q[D(t,T)|F_t] \quad (38)$$

El precio de un bono cero cupón es lo que el mercado espera que sea el valor del factor de descuento $D(t,T)$ con la información que posee en t.

Determinantes de $P(t,T)$ y $D(t,T)$

Sea $U(C_t, C_T) = U_t(C_t) + U_T(C_T)$ una función de utilidad colectiva, donde C_s es la cantidad de dinero para consumo en el tiempo s. Inicialmente se cuenta con ω_T dinero y se invierten $\alpha * P(t,T)$ unidades de dinero en bonos cero cupón al precio $P(t,T)$ conocido al tiempo t, esperando recibir α unidades de dinero en el tiempo T .

Sea $u(C_t, C_T) := E^Q[U(C_t, C_T)|F_t] = U_t(C_t) + E^Q[U_T C_T|F_t]$ la "felicidad" esperada con el patrón de consumo $\{C_t, C_T\}$. Como $C_t = \omega_t - \alpha * P(t,T)$ y $C_T = \alpha$, se desea maximizar la felicidad total esperada, es decir, el problema es $max_\alpha u(\omega_t - \alpha * P(t,T), \alpha)$.

Derivando respecto a α e igualando a cero se obtiene:

$$-U'_t(C_t) * P(t,T) + E^Q[U'_t(C_t)|F_t] = 0 \implies P(t,T) = E^Q\left[\frac{U'_T(C_T)}{U'_t(C_t)}\right]|F_t \quad (39)$$

Si las personas valoran más el consumo presente, los bancos tendrán que pagar más interés (r_s aumenta). Las tasas marginales de sustitución esperada $\frac{E^Q[U'_T(C_T)|F_t]}{U'_t(C_t)}$ y estocástica $\frac{U'_T(C_T)}{U'_t(C_t)}$, define los precios $P(t,T)$ y los factores de descuento $D(t,T)$, respectivamente.

4.3 Teoría de valoración[3]

La teoría de valoración se fundamenta en el concepto de "No-Arbitraje". En un escenario donde existen dos inversiones A y B, las cuales dan los mismos pagos futuros, A y B deben tener el mismo valor presente, a esto se le conoce como **ley de un solo precio.**

Si $\phi_t^{(i)}$ son las unidades del activo i que se posee en el portafolio y $S_t^{(i)}$ es el valor de ese activo, en el tiempo t, entonces el valor del portafolio sería $V_t = \sum_{i=1}^{N} \phi_t^{(i)} S_t^{(i)}$.

Por lo tanto, la definición de no-arbitraje implica que debe ser imposible que:

$$V_0 = \sum_{i=1}^{N} \phi_0^{(k)} S_0^{(k)} = 0, \mathbb{P}[V_T \geq 0] = 1, \mathbb{P}[V_T > 0] > 0 \qquad (40)$$

[3] Fuente: Víquez, J. (2021). Microeconomía Avanzada I. Teoría de valoración. Universidad de Costa Rica.

Unicidad del Precio

Valoración vía estrategia de replicación

Un flujo es una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Un flujo H es accesible si existe algún ϕ tal que $V_T(\phi) = H$. La estrategia de inversión ϕ se dice que "genera" H, y $\pi_t = V_t(\phi)$ sería el precio al tiempo t asociado a H.

Valoración vía expectativa matemática

Asuma que existe una medida martingala $\mathbb{Q}$ equivalente a $\mathbb{P}$ y sea H un flujo accesible. Entonces, para cada tiempo t, $0 \leq t \leq T$, existe un único precio π_t asociado a H, ampliando:

$$\pi_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[D(t,T)H|F_t] \qquad (41)$$

4.3.1 Títulos tasa fija

Se le llama **bono cuponado tasa fija** con tasa facial i, valor facial VF, tiempos de pagos $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$ y vencimiento $T = T_n$, a cualquier contrato que garantice n cupones, durante un plazo T , por un monto de $i.VF$ cada cupón en el momento T_k y devuelve el valor facial en el último pago.

Un bono cuponado tasa fijas se puede ver como un portafolio de bonos cero cupón, y por tanto, debe valer lo mismo y así cumplir la condición de no arbitraje.

Precio título tasa fija

Se denota por $PF(t;\mathcal{T};\mathrm{i})$ al precio de un bono cuponado tasa fija con tiempos de pagos $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$,tasa facial i, y valor facial igual a 1 unidad, en el momento t.

$$PF(t;\mathcal{T};\mathrm{i}) = \sum_{k=1}^{n-1} iP(t,T_k) + (1+i)P(t,T) \qquad (42)$$

4.3.2 Tasa interna de Retorno (TIR)

Se denota por TIR $(t;\mathcal{T};\mathrm{i};\mathrm{P})$ a la tasa interna de retorno para un título con precio P, pagos en $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$, tasa facial i y vencimiento $T = T_n$, en el momento t. Representa el rendimiento promedio (geométrico) derivado de una inversión en un título cuponado con esas características. Dicha tasa viene dada en forma implícita por:

$$P = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{i}{(1+TIR(t;\mathcal{T};\mathrm{i};\mathrm{P}))^{\tau(t,T_i)}} \right) + \frac{(1+i)}{(1+TIR(t;\mathcal{T};\mathrm{i};\mathrm{P}))^{\tau(t,T_i)}} \qquad (43)$$

4.3.3 Contrato Forward

Un forward es un contrato entre dos partes para comprar o vender un activo a precio fijado y en una fecha determinada, a diferencia de un contrato futuro este no está estandarizado y no es negociado en un mercado organizado. Un contrato forward involucra dos instantes:

- El tiempo t: momento en que se efectúa el contrato.
- El tiempo S: momento $(S > t)$ en que se fija el valor variable F a recibir.

Precio contrato forward

Se define por $F_P(t; S, F, K)$ el precio en el tiempo t de un contrato forward, con valor variable F fijado en S, y con pago fijo K.

4.3.4 Contrato Forward de Tasas de Interés

Un contrato forward de tasas de interés, también conocido como contrato SWAP, es un contrato forward en donde se intercambia la variable $L(S, T)$ por un monto fijo.

- En el tiempo t se firma el contrato.

- En el tiempo $S > t$ se fija la tasa variable a pagar $L(S,T)$ y se intercambia por la tasa fija K.
- En el tiempo $T > S$ recibe el pago $R(S,T) = \tau(S,T)L(S,T)$ y se paga valor fijo $\tau(S,T)K$.

El valor de este contrato, el flujo, en el instante T es

$$\tau(S,T)(L(S,T) - K) = \left(\frac{1}{P(S,T)} - 1 - \tau(S,T)K\right) \qquad (44)$$

Utilizando el hecho de que $R(S,T) = \tau(S,T)L(S,T) = \frac{1}{P(S,T)} - 1$.

4.3.5 Tasa de interés forward

Se define tasa de interés forward como la única capaz de lograr que el contrato forward valga 0 unidades de dinero, lo que se conoce como estar "at the money". Para obtener la tasa de interés forward, se resuelve para K en la expresión :

$$F_p(t; S, L(S,T), K) = (1 + \tau(S,T)K)P(t,T) - P(t,S) = 0 \qquad (45)$$

La tasa de interés forward, anualizada, en el tiempo t, con inicio en el instante $S > t$ y vencimiento $T > S$, denotada por $F(t;S,T)$, se define por

$$F(t;S,T) := \frac{P(t,S) - P(t,T)}{\tau(S,T)P(t,T)} = \frac{R(t,T) - R(t,S)}{\tau(S,T)(1 + R(t,S))} \quad (46)$$

- Tasa forward efectiva: $F_e(t;S,T) = \tau(S,T)F(t;S,T)$
- Tasa forward compuesta anual:$\rho_F(t;S,T) = (1 + F_E(t;S,T))^{\frac{1}{\tau(S,T)}} - 1$
- Tasa forward compuesta continua: $\delta_F(t;S,T) = \ln(1 + \rho_F(t;S,T))$

Si las tasas $R(S,T)$ son conocidas en el momento t, se debe cumplir que $F(t;S,T) = L(S,T)$, sino existiría la posibilidad de arbitraje.

Si las tasas $R(S,T)$ son desconocidas en el momento t,entonces $F(t;S,T)$ representa las expectativas del mercado sobre las tasas que regirán en el futuro.

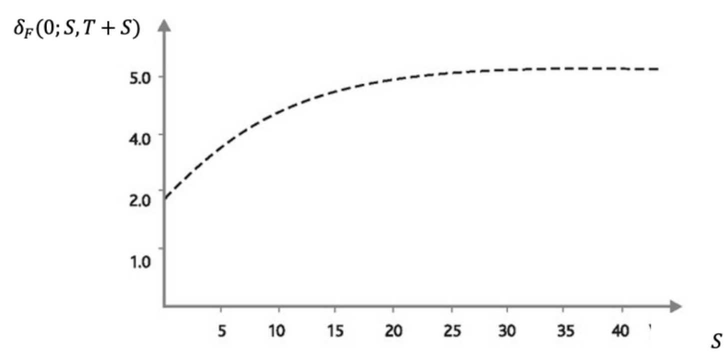
$$F_E(t;S,T) = \mathbb{E}^T[R(S,T)|F_t] \qquad (47)$$

En particular , $F_E(t;S,T) = R(t,T)$

4.3.6 Curva Forward

Se le llama curva forward al gráfico de las tasas forward para un plazo fijo. Se utiliza la función $S \to \rho_F(0;S,T+S)$ ó $S \to \delta_F(0;S,T+S)$, para un T fijo. Representa las tasas que se espera que existan en el futuro para inversiones con un plazo al vencimiento de T.

Figura 4. Curva Forward

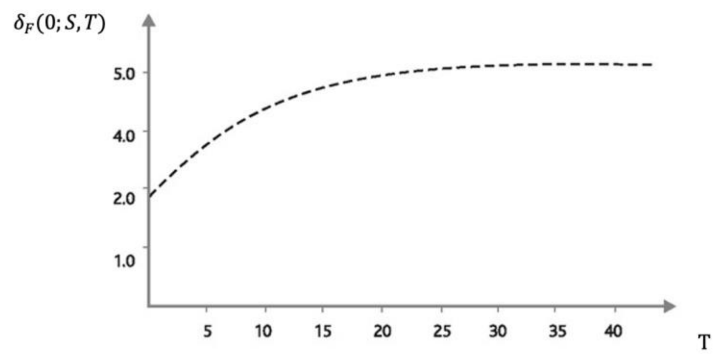


Fuente: Víquez, J. (2022). Microeconomía Avanzada I .Teoría de Valoración (p.p26). Universidad de Costa Rica.

4.3.7 Curva Cero Cupón Forward

Se llama curva cero cupón forward al gráfico de las tasas forward para un tiempo futuro fijo. Se utiliza la función $T \to \rho_F(0; S, T)$ ó $T \to \delta_F(0; S, T)$, para un S fijo. Representa la curva cero cupón que se espera que exista para un momento S en el futuro.

Figura 5. Curva Cero Cupón Forward



Fuente: Víquez, J. (2022). Microeconomía Avanzada I Teoría de Valoración (p.p27). Universidad de Costa Rica.

4.3.8 Rendimientos Cero Cupón vs Cuponados

Las tasas forward son tales que los rendimientos de todos los títulos (cuponados o cero cupón) al mismo plazo, tienen el mismo rendimiento, dada la información obtenida hasta el tiempo t.

Por esta razón, se utiliza la curva cero cupón para valorar, no solo se cuenta con precios libres de arbitraje, sino que además se cumple la indiferencia que debe existir entre títulos cuponados y cero cupón, esto desde el punto de vista del rendimiento.

4.3.9 Tasa de Interés Forward Instantánea

La tasa de interés forward instantánea en el tiempo t para el vencimiento $T > t$, se denota $f(t,T)$, y se define como

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln\big(P(t,T)\big)}{\partial T} \Leftrightarrow P(t,T) = e^{-\int_t^T \int(t,s)ds} \qquad (48)$$

Tasas y precios: Expectativas de Mercado

Teorema

- El precio de un bono cero cupón es
  $$P(t,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[D(t,T)|F_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}|F_t\right] \qquad (49)$$
  donde $\mathbb{Q}$ es una medida martingala equivalente a $\mathbb{P}$.

- El valor esperado del rendimiento cero cupón entre S y T, bajo la respectiva medida T-Forward, es igual a la tasa forward efectiva relacionada.

- El valor esperado de cualquier tasa corta, en cualquier momento futuro, bajo la respectiva medida T-Forward, es igual a la tasa forward instantánea relacionada.

4.3 Tipos de Curva de Rendimientos

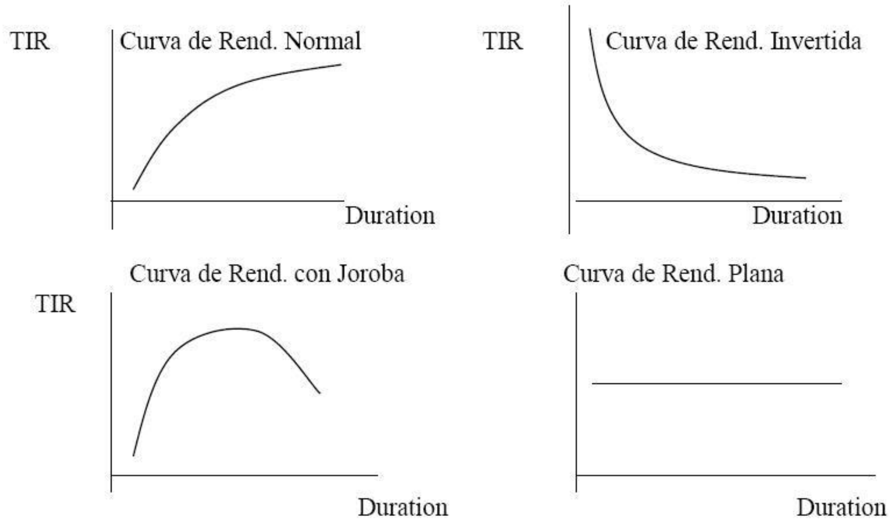
Existen diferentes curvas de rendimiento para cada tipo de riesgo o clasificación de los bonos:

- **Curva de rendimiento normal o positiva:** Es aquella cuyos rendimientos en el corto plazo son menores que los rendimientos esperados en el largo plazo. La curva más usual.
- **Curva de rendimiento invertida o negativa:** Es aquella curva donde los rendimientos en el corto plazo son mayores que los rendimientos esperados

en el largo plazo; este tipo de gráfica es algo inusual, lo cual puede deberse a razones económicas coyunturales. La curva negativa tiende a ocurrir cuando las tasas de corto plazo se incrementan rápidamente y los inversionistas creen que ese crecimiento es temporal, por ello las tasas de largo plazo permanecen cerca del nivel inicial.

- **Curva de rendimiento con montículo:** En esta curva los rendimientos intermedios son más caros o baratos, según el respectivo caso, de los inmediatamente anteriores o posteriores. Esto puede deberse a situaciones técnicas o económicas como la de calce de plazos, donde el emisor esté promoviendo recursos para cubrir obligaciones que debe cumplir en un determinado periodo.
- **Curva de rendimiento plana:** Es aquella donde los rendimientos en el corto plazo son iguales que los rendimientos esperados en el largo plazo. Dicha curva indica que el tipo de interés es único sea cual sea el vencimiento de la emisión.

Figura 6. Tipos de curvas de rendimiento esperado de los bonos



Fuente: Hull, J. (2014) Options, Futures and Other Derivatives. 9th Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River.

4.4 Teorías sobre la estructura de vencimiento[4]

Las tasas forward se pueden determinar para diversos vencimientos. Se expondrán cuatro teorías sobre la estructura de vencimiento: teoría de las expectativas puras, la teoría de la prima de liquidez, teoría de segmentación del mercado y teoría de preferencia por el hábitat.

Tanto la teoría de las expectativas puras, como la teoría de la prima de liquidez, utilizan tasas futuras como un elemento clave y se reconocen por su interpretación de las tasas futuras tal como se presenta a continuación:

La teoría de las expectativas puras: Esta teoría afirma que las tasas forward son iguales a las futuras tasas spot esperadas, lo cual implica que las tasas forward

[4] **Fuente:** CFA Institute. (2018)

brindan un pronóstico insesgado de las tasas de interés en el futuro; las tasas forward son estimadores separados de las futuras tasas de interés; si las tasas están sesgadas, el inversionista puede tratar de aprovecharse, si las tasas forward son estimadores no sesgados de las futuras tasas de interés, indica que ésta se apoya en la eficiencia de los mercados financieros y no se puede utilizar la información implícita en las tasas del mercado sobre las tasas forward para generar rendimientos extraordinarios; conforme vaya llegando nueva información deben cambiar las preferencias del inversionista y ajustar los rendimientos, así como la tasa forward implícita. Esta teoría, además, indica que cuando la curva de rendimientos tiene una inclinación ascendente se espera que las tasas de interés aumenten y cuando la curva de rendimientos es descendente implica que las tasas de interés disminuirán.

La teoría de la prima de liquidez: Esta teoría asevera que las tasas forward exceden las futuras tasas spot esperadas, lo cual indica que la liquidez no necesariamente será igual al rendimiento de un valor de inversiones consecutivas en instrumentos de corto plazo. También, indica que la diferencia entre las tasas forward y las tasas spot esperadas se debe a la preferencia que tienen los inversionistas por instrumentos de corto plazo; si la liquidez influye en la curva de rendimiento, las tasas forward sobrestiman las expectativas que tiene el mercado de las tasas futuras de interés. Una forma más apropiada de estimar la tasa forward sería tomar en cuenta la prima de liquidez. Incluso con la existencia de una prima de liquidez, se puede recurrir a las curvas de rendimientos para interpretar las expectativas sobre tasas. Una curva plana de rendimiento indica que el mercado espera una reducción de las tasas de interés (sin el efecto de la prima de liquidez). Una pendiente ligeramente ascendente significa que no se esperan modificaciones de las tasas de interés porque si se eliminara la prima de liquidez, esta curva de rendimiento sería plana.

La teoría de la segmentación del mercado: Apunta que los distintos participantes en el mercado tienen preferencias de vencimiento diferentes. Por ejemplo, los fondos de pensiones están interesados en tasas a más largo plazo, los creadores de mercado se centran en las tasas a corto plazo y muchos objetivos de las empresas apuntan a las tasas de medio plazo.

La teoría supone que los diferentes agentes no pueden o no quieren realizar ninguna otra inversión que no se ajuste a sus preferencias de vencimiento. Los tasas vienen determinadas por la oferta y la demanda de deuda a largo y corto plazo para los distintos segmentos del mercado.

La teoría de la preferencia por el hábitat: es similar a la teoría de la segmentación del mercado, ya que sostiene que los prestamistas y los prestatarios prefieren determinados vencimientos en función de sus objetivos. La única variación respecto a la teoría anterior es que los inversores buscarán vencimientos distintos de sus preferidos, es decir, su hábitat habitual, si los rendimientos extra esperados son lo suficientemente grandes para ellos. Esta teoría se basa en el supuesto racional de que los agentes aceptaran riesgo adicional si esto conlleva a mayores retornos.

4.5 Cálculo de la curva soberana en colones para Costa Rica

Es calculada por el Banco Central de Costa Rica, la metodología vigente sobre el cálculo de la curva de rendimiento soberana en Costa Rica se realizó en diciembre del 2020 y se revisó en octubre del 2022.[5] Esta se calcula con base en la información sobre las negociaciones en colones dentro de los mercados primario y secundario de bonos emitidos por el Ministerio de Hacienda y el Banco Central de Costa Rica (BCCR) y utiliza los modelos paramétricos de Svensson y Nelson Siegel

Aunque hay muchas técnicas y modelos para ajustar una curva de rendimiento, el modelo propuesto por Nelson y Siegel es uno de los más populares, de acuerdo con Diebold y Li (2006) este éxito se atribuye a tres características principales. En primer lugar, el modelo respeta las restricciones impuestas por la teoría económica y financiera (por ejemplo, el factor de descuento tiende a cero a medida que crece el vencimiento). En segundo lugar, su aproximación parsimoniosa evita el sobreajuste dentro de la muestra, mejorando su capacidad de previsión. Por último, puede adoptar cualquier forma de curva de rendimiento, observada empíricamente en el mercado. Gracias a la gran versatilidad mostrada por el modelo Nelson-Siegel y al reciente interés de los investigadores, han surgido extensiones del modelo. Algunas de ellas son la de Svensson en 1995 que incluye variables adicionales, y la de Christensen, Diebold y Rudebusch en 2011 que incluye condiciones de no arbitraje.

La razón por la que se eligen las familias Nelson- Siegel es porque estos modelos tienen la flexibilidad necesaria para adaptarse a la forma cambiante de la curva de rendimiento, usando pocos parámetros.

Para el cálculo de la curva soberana en Costa Rica, el BCCR incluye instrumentos estandarizados de tasa fija y cero cupón a un plazo de 10 años. Su

[5] **Fuente:** Banco Central de Costa Rica.

punto de inicio es la tasa de interés del Mercado Integrado de Liquidez, negociaciones a un día, ponderadas por monto y las observaciones se excluyen siguiendo cuatro criterios:

1. Bonos cero cupón con menos de tres meses al vencimiento.
2. Bonos a tasa fija con menos de seis meses al vencimiento.
3. Bonos a tasa fija con más de diez años al vencimiento.
4. Valores extremos, elegidos a partir de criterios estadísticos, previamente establecidos.

Esta curva se calcula semanalmente los miércoles, con base en las negociaciones observadas durante la semana inmediata anterior, definida de miércoles a martes y se publica en el sitio web del Banco Central de Costa Rica.

5. Marco metodológico

Durante el apartado anterior se hizo un amplio repaso alrededor de la teoría del interés, los factores de descuento y la teoría de valoración, necesarios para establecer las bases teóricas para el análisis de las metodologías a desarrollarse en el presente capítulo.

5.1 Cálculo de las Tasas forward para Costa Rica

Las tasas forward están implícitas en las tasas spot y al utilizarlas es posible separar más fácilmente las expectativas a corto, mediano y largo plazo. Al estar implícitas en las spot, las tasas forward pueden derivarse a partir de la Estructura Temporal de Tasas de Interés (ETTI) pues el mercado tiene ahí contenido lo que se espera que sean las tasas en el futuro.

Utilizando los datos actuales que brinda el Banco Central de Costa Rica sobre la curva de rendimientos soberana se hizo un ejercicio de cálculo de tasas forward para Costa Rica (sección 7.2). En este ejercicio se tomó una tasa fija para cada título, obteniendo una única variable desconocida TIR y resolviendo la ecuación (43) que representa el promedio geométrico de las tasas anteriores:

$$P = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{i}{(1 + TIR(t; \mathcal{T}; i; \mathrm{P}))^{\tau(t,T_i)}} \right) + \frac{(1 + i)}{(1 + TIR(t; \mathcal{T}; i; \mathrm{P}))^{\tau(t,T_n)}}$$

Con

P: precio observado

$\mathcal{T}$: pagos en $\mathcal{T}=\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_n\}$

i: tasa facial observada

T_n: vencimiento

Como se puede observar a partir de la ecuación anterior, el descuento se realizó con una tasa fija y no con el cero cupón. Esto está equivocado porque la tasa no es única; la tasa depende del momento en el que se calcula, es función de la periodicidad, del cupón, del esquema de pagos y del precio observado. La TIR de un título es información de ese título, pero no se permea en el mercado.

La tasa cero cupón no es comparable con la tasa fija TIR porque ambas tienen diferentes flujos de caja, por lo tanto es incoherente generar una única TIR con periodicidades o tasas faciales diferentes. Vemos entonces que no es correcto utilizar la TIR como factor de descuento porque genera precios de arbitraje.

Cuando se valora un título con la tasa fija TIR, cada flujo se descuenta a la misma tasa y esto tiene dos efectos directos. El primero es la relación inversa entre la TIR y el precio observado que se deriva de la ecuación (43); esta relación produce el segundo efecto que es que los cambios de precio de los títulos valorados estén subestimados o sobreestimados. Este segundo efecto se produce porque cuando se descuenta usando la tasa variable cero cupón, al calcular el precio, los cupones intermedios no se afectan, sólo el cupón del último periodo se ve afectado por el cambio de precio; pero, al utilizar una tasa fija se castigan todos los flujos por igual lo que lleva a que el cálculo del precio sea erróneo y se genere la idea de que existen oportunidades de arbitraje. La tasa fija TIR no es una medida de rendimiento porque ningún agente económico puede llegar al mercado a pedir que sus inversiones se realicen con la TIR, por lo tanto esta tasa fija no es una tasa de mercado.

Lo correcto es entonces descontar cada flujo por una tasa distinta cuando se utilizan tasas cero cupón, esto provoca que la ecuación (43) se convierta en una ecuación con variables desconocidas, se deben entonces extraer tasas que cumplan con:

$$PF(t;\mathcal{T};i) = \sum_{k=1}^{n-1} iP(t,T_k) + (1+i)P(t,T_n) \qquad (50)$$

La solución de esta ecuación es la que permite obtener las tasas forward de manera correcta, los métodos para resolverla se profundizarán en el siguiente apartado.

5.2 Adecuada construcción de la curva soberana para Costa Rica

Es indispensable que la construcción de la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI) a partir de la información de mercado se base en un modelo probabilístico correcto, dada su importancia para predecir el futuro del mercado y para medir riesgos.

Si se buscan expectativas bien calculadas es vital utilizar probabilidad para explicar la naturaleza de las tasas de interés y estadística para poder realizar estimaciones a partir de la información del mercado.

Aunque existen muchos métodos para realizar este cálculo, se busca cumplir con la condición de cero arbitraje, por lo que se busca un modelo que genere valores precisos y exactos. Es necesario que a partir de la información que brinda el mercado se pueda generar la curva más cercana y más certera de acuerdo con las expectativas de los agentes económicos, esto para evitar inducir ruido en el mercado y evitar que los agentes crean que los precios que observan en la curva son los correctos cuando son falsos.

Se busca un modelo que sea suficientemente sencillo y a la vez suficientemente robusto, existen cuatro clases principales de métodos:

a. Estimación Directa

b. Estimación Polinomial

c. Estimación No Paramétrica

d. Estimación Paramétrica

Esta última es la más utilizada por los Bancos Centrales alrededor del mundo, los modelos de Nelson-Siegel y Svensson utilizan estimación paramétrica. Esta tiene varios retos porque es una optimización que no es única, no se converge a un único óptimo. En este caso existen varios óptimos locales por lo que se necesitan métodos heurísticos como el método de gradiente. Esta estimación es precisa y robusta pero requiere mucha más matemática y más tratamiento de datos.

5.2.1 Estimación Directa - Bootstrapping

El modelo que se busca debe ser capaz de resolver la ecuación (50), pues al utilizar tasas cero cupón hay que descontar cada flujo por una tasa distinta. Una posible solución a la ecuación (50) se encuentra mediante el método conocido como "Bootstraping", este es un proceso recursivo donde se construye a partir de los datos que ya se tienen, esto es, conocidas n-1 tasas anteriores se puede obtener la n- ésima tasa.

Al realizar el cálculo con **tasas equivalentes anuales** la ecuación (50) se convierte en

$$P = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{i}{(1+\rho(0,T_k))^{\tau(0,T_k)}} + \frac{(1+i)}{(1+\rho(0,T_n))^{\tau(0,T_n)}} \quad (51)$$

Con

P: precio observado de mercado del título cuponado

$\mathcal{T}$: pagos en $\mathcal{T}=\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_n\}$

i: tasa facial observada

T_n: vencimiento

Ya se conocen todas las tasas $\rho(0,T_k)$ anteriores, esto es, para todo $k < n$ entonces usando bootstraping se despeja la tasa de interés de la ecuación (51) y se obtiene la solución para tasas anualizadas:

$$\rho(0,T_n) = \left(\frac{(1+i)}{P - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{i}{\left(1+\rho(0,T_k)^{\tau(0,T_k)}\right)}} \right)^{\frac{1}{(0,T_n)}} - 1 \qquad (52)$$

Ahora si se tienen **tasas compuestas continuamente**, el factor de descuento cambia a $e^{-\tau\delta}$, entonces la ecuación a resolver sería:

$$P = \sum_{k=1}^{n-1} i e^{-\tau(0,T_k)\delta(0,T_k)} + (1+i)e^{-\tau(0,T_n)\delta(0,T_n)} \qquad (53)$$

Al conocerse todas las tasas de los periodos anteriores, esto es, al conocer las tasas $\delta(0,T_k)$ para todo $k < n$ entonces la tasa cero cupón para el n- ésimo periodo T_n es:

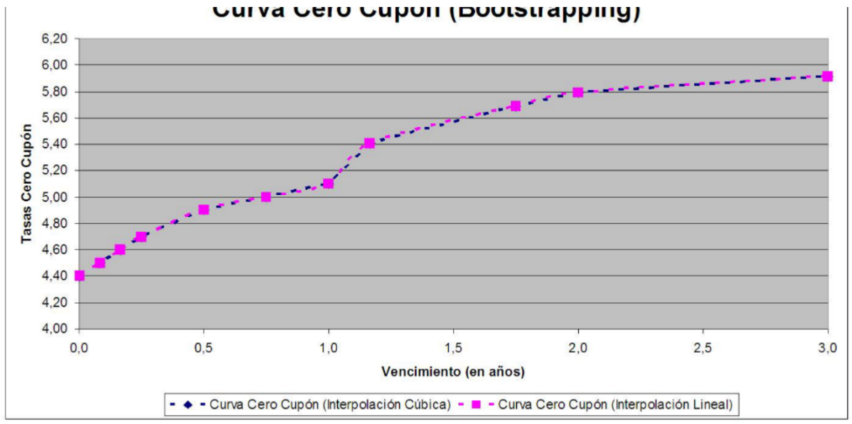
$$\delta(0,T_n) = \frac{1}{\tau(0,T_n)} \ \ln \left(\frac{(1+i)}{P - \sum_{k=1}^{n-1} i e^{-\tau(0,T_k)\delta(0,T_k)}} \right) \qquad (54)$$

Observe que es fundamental saber el tipo de tasa que se está utilizando para realizar los cálculos, pues la fórmula cambia si se están usando tasas equivalentes anuales o tasas compuestas continuamente, usar la fórmula adecuada permite evitar lo que se conoce como ruido por modelación. (Víquez, 2022).

Los pasos para aplicar este método se pueden resumir de la siguiente forma:

1. Se buscan en el mercado los datos de los bonos cero cupón transados, así como los títulos cuponados a tasa fija a los cuales les queda solo el último pago, cuyo vencimiento sea menor a un año. Al ser bonos cero cupón o cuponados sin plazos en medio, entonces se puede fácilmente despejar sus tasas.
2. Se utiliza interpolación lineal o cúbica para obtener los plazos de en medio, y así se consigue una curva cero cupón continua para los plazos cubiertos por los bonos cero cupón. Con esto se obtienen los k periodos y solo hace falta obtener el n- ésimo periodo.
3. Se toma el título con vencimiento más próximo al año al cual le quede solamente un cupón después del año. Aquí se usa bootstraping, utilizando la ecuación (51), se obtiene la tasa cero cupón implícita en este último flujo.
4. Nuevamente se utiliza interpolación lineal o cúbica para obtener los plazos de en medio, con esto se une de manera continua el final de la curva cero cupón (construida en el punto 2) con este nuevo valor obtenido en el punto anterior.
5. De nuevo se considera el título más próximo que solo tenga un último pago restante y se repiten los pasos anteriores (es un proceso recursivo). Esto se repite hasta que se obtenga toda la curva.

Figura 7. Curva Cero Cupón con Bootstrapping



Fuente: Víquez, J. (2022). Teoría Matemática del Interés. *Construcción de la curva cero cupón* (pp.18). Universidad de Costa Rica

Sin embargo, al aplicar este método a datos reales se pueden encontrar varios problemas como que podrían existir varios bonos (con cupones distintos) que vencen el mismo día; pueden existir fechas para las que no exista ningún bono venciendo ese día; o fechas de vencimiento de los bonos que no estén igualmente espaciadas. Esta técnica funciona principalmente para ver qué forma tiene la curva o para verificar si el óptimo encontrado a partir de otros métodos es bueno; pero no es tan preciso como para construir la curva porque es un método que depende de los datos observados en cada nodo y eso lo hace poco robusto. Dados estos inconvenientes se han desarrollado otras técnicas más eficientes. (Víquez, 2022).

5.2.2 Métodos indirectos

Los métodos indirectos buscan ajustar los datos observados a una forma específica de la curva cero cupón, puede ser polinomial, exponencial, una combinación lineal de estas, etc. Estos métodos indirectos tienen el riesgo de una mala especificación, lo que hará que el resultado de estimación para la ETTI no sea confiable.

5.2.2.1 Estimación Polinomial

Se tienen n títulos, tanto cuponados como cero cupón, libres de riesgo y con precios de mercado $P_t^{(k)}$, cupones $i^{(k)}$ y pagos en $\mathcal{T}^{(k)}=\{T_1^{(k)}, T_2^{(k)}, \dots, T_n^{(k)}\}$ todo esto se observa en el mercado.

Una vez obtenidos los datos con sus características, se especifica la forma de los factores de descuento $P(\mathrm{t};\mathrm{T};\beta) = \mathrm{g}(\tau(\mathrm{t},\mathrm{T});\beta)$ para los precios teóricos cero cupón; o las tasas $\delta(\mathrm{t};\ \mathrm{T};\ \beta) = \mathrm{h}(\tau(\mathrm{t},\mathrm{T});\ \beta)$ para las tasas implícitas cero cupón, este último se usa en modelos paramétricos.

Finalmente, se estiman los parámetros β de manera que minimicen la diferencia entre los precios observados y los precios teóricos, el problema de optimización se vería:

$$\hat{\beta} = \min_{\beta} \sum_{k=1}^{n} (P_t^{(k)} - \hat{P}_t^{(k)}(\beta))^2$$

Donde $\hat{P}_t^{(k)}(\beta)$ son los precios teóricos del modelo y lo único desconocido en esta fórmula son los β.

La primera estimación se hace asumiendo que el factor de descuento es un polinomio de orden m, que muestra el comportamiento de la cero cupón, esto es:

$$P(t;T;\ \beta) = g(\tau(\mathrm{t},\mathrm{T});\beta) = \sum_{l=0}^{m} \beta_l\ \tau(\mathrm{t},\mathrm{T})^l$$

Donde $\beta^T = (\beta_0, \dots, \beta_m)$

En primer lugar, se realiza el cálculo del precio teórico de la siguiente forma:

$$\hat{P}_t^{(k)} = \sum_{j=1}^{N-1} i^{(k)}\, P\left(t;\ T_j^{(k)};\ \beta\right) + \left(1 + i^{(k)}\right) P\left(t;\ T_N^{(k)};\ \beta\right) \qquad (55)$$

Con:

$i^{(k)}$: tasa de interés

$P\left(t;\ T_j^{(k)};\ \beta\right)$: factor de descuento para la sumatoria

$P\left(t;\ T_N^{(k)};\ \beta\right)$: factor de descuento en el último periodo

Seguidamente, en la ecuación (55) se sustituye el precio cero cupón por la fórmula del polinomio, esto para mostrar que se están evaluando los betas adecuados, entonces:

$$\hat{P}_t^{(k)} = \sum_{j=1}^{N-1} i^{(k)} \left(\sum_{l=0}^{m} \beta_l \tau\left(t;\ T_j^{(k)}\right)^l \right) + \left(1 + i^{(k)}\right) \sum_{j=1}^{N-1} i^{(k)} \left(\sum_{l=0}^{m} \beta_l \tau\left(t;\ T_N^{(k)}\right)^l \right) \qquad (56)$$

Ahora se intercambian las sumatorias para utilizar factor común y reordenar la expresión de manera que:

$$\hat{P}_t^{(k)} = \sum_{l=0}^{m} \left(\sum_{j=1}^{N-1} i^{(k)}\, \tau\left(t;\ T_j^{(k)}\right)^l + \left(1 + i^{(k)}\right) \tau\left(t;\ T_N^{(k)}\right)^l \right) \beta_l \qquad (57)$$

Para simplificar la notación se hace el siguiente cambio de variable:

$$\sum_{j=1}^{N-1} i^{(k)}\, \tau\left(t;\ T_j^{(k)}\right)^l + \left(1 + i^{(k)}\right) \tau\left(t;\ T_N^{(k)}\right)^l = \boldsymbol{X}^{(k)}$$

De esta forma la sumatoria puede reescribirse como:

$$\hat{P}_t^{(k)} = \boldsymbol{X}^{(k)} \beta$$

Y como $\hat{P}_t^{(k)}$ es también un vector, con Y= $\left(\hat{P}_t^{(k)}\right)_{1\leq k\leq n}$ se obtiene el siguiente sistema de regresión lineal:

$$Y = \boldsymbol{X}^{(k)}\beta + \epsilon$$

La optimización se realiza sujeta a $P(t,t) = \sum_{l=0}^{m} \beta_l \tau(t,t)^l = \beta_0 = 1$, pues un título cero cupón que ya venció debe valer uno si no hay arbitraje.

Con el estimador de mínimos cuadrados generalizados se obtienen los betas óptimos, es decir, se obtiene el factor de descuento para cualquier plazo que viene dado por:

$$P(t,T) = \sum_{l=0}^{m} \widetilde{B}_l \, \tau(t,t)^l \quad (58)$$

La estimación polinomial tiene también una serie de problemas por ejemplo requiere un grado de polinomio muy grande para un mejor ajuste por lo que no siempre logra ajustar bien los precios observados en el mercado, requiere además de una ecuación por bono lo que puede dificultar el cálculo, además el impacto de los cambios pequeños puede crecer de forma exponencial de manera que se podría cambiar por completo la forma de la curva, esto lo hace un método poco robusto. Por último no es posible predecir con este método las tasas de largo plazo pues no es posible hacer extrapolaciones. (Víquez, 2022).

5.2.2.2 Splines

En términos matemáticos "spline" se define como como un polinomio a trazos de orden m. Es una función que está compuesta por varios segmentos polinomiales unidos por puntos llamados nodos, estos últimos son elegidos por la persona que utiliza el modelo para diferenciar el corto, mediano y largo plazo. El spline cúbico busca conectar cada nodo, ajustando una única función polinomial entre ellos, el resultado de esto es un encadenamiento de ecuaciones cúbicas que representa la curva cero cupón.

Formalmente se definen los nodos como $\{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_M\}$ tal que $\eta_p < \eta_{p+1}$; p= 0

En los splines con estimación estándar se asume que el factor de descuento es un polinomio a trazos de grado m, entonces para cada nodo se define:

$$P(t;T;\ \beta) = g(\tau(t,T);\beta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{m} \beta_{l+0*(m+1)} \tau\,(t,T)^{l}\ ,\ t = \eta_0 \ \leq T \leq \eta_1 \\ \sum_{l=0}^{m} \beta_{l+1*(m+1)} \tau\,(t,T)^{l}\ ,\ \eta_1 \ \leq T \leq \eta_2 \\ \vdots \\ \sum_{l=0}^{m} \beta_{l*(M-1)} \tau\,(t,T)^{l}\ ,\ \eta_{M-1} \ \leq T \leq \eta_M \end{cases}$$

Una vez que se tienen los parámetros y las funciones se arma el factor de descuento, reescribiendo lo anterior como una única sumatoria:

$$P(t;T;\ \beta) = \sum_{r=0}^{M-1}\left(\sum_{l=0}^{m} \beta_{l+r(m+1)}\ \tau(t,T)^{l}\right) 1_{[\eta_r,\eta_{r+1}]}(T) \qquad (59)$$

Para este método al igual que con la estimación polinomial que se vio en el apartado anterior, se arman precios teóricos y se contrastan con los observados. Los precios teóricos se obtienen nuevamente a partir de la ecuación (55):

$$\widehat{P}_t^{(k)} = \sum_{j=1}^{N-1} i^{(k)}\, P\left(t;\ T_j^{(k)};\ \beta\right) + \left(1 + i^{(k)}\right) P\left(t;\ T_N^{(k)};\ \beta\right)$$

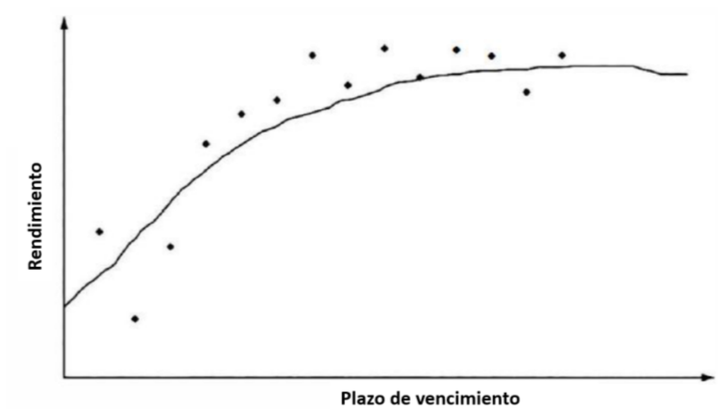
Y se procede a sustituir el precio cero cupón por la fórmula del spline, esto es, por la ecuación (59). Al igual que en el caso anterior se reordena y simplifica la expresión hasta obtener un sistema de regresión lineal.

$$Y = \boldsymbol{X}^{(k)}\beta + \epsilon$$

La optimización se realiza sujeta a $P(t,t) = \sum_{l=0}^{m} \beta_l \tau(t,t)^l = \beta_0 = 1$, pues un título cero cupón que ya venció debe valer uno si no hay arbitraje. Con el estimador de mínimos cuadrados generalizados se obtiene el factor de descuento para cualquier plazo dentro de los nodos definidos que viene dado por:

$$P(t,T;\beta) = \sum_{r=0}^{M-1}\left(\sum_{l=0}^{m} \widetilde{\beta_{l+r(m+1)}}\, \tau(t,T)^l\right) 1_{[\eta_r,\eta_{r+1}]}(T) \quad (60)$$

Figura 8. Aproximación de Curva Cero Cupón con Splines Cúbicos



Fuente: Víquez, J. (2022). Teoría Matemática del Interés. *Construcción de la curva cero cupón* (pp.32). Universidad de Costa Rica

Los splines también tienen una serie de problemas, entre ellos, con los splines cúbicos no es posible extrapolar datos porque la estimación de la tasa de largo plazo es muy vólatil respecto a sus observaciones. Existen otros tipos de splines como cuadráticos y exponenciales, pero estos realmente no generan estimaciones más estables. Uno de los principales inconvenientes al usar polinomios de orden cuadrático o mayor es que se generan curvas de tasas forward instantáneas que no funcionan para realizar predicciones de largo plazo. (Víquez, 2022).

5.2.3 Estimación paramétrica

5.2.3.1 Nelson Siegel

Se busca un modelo que sea estable, matemáticamente estabilidad es la condición en la que una leve variación en un sistema no lo perturba significativamente. Nelson y Siegel introdujeron su modelo en 1987 y fueron pioneros en buscar una justificación teórica donde se consiga estabilidad y robustez para la curva cero cupón.

Nelson y Siegel, dada la dinámica recursiva de las tasas de interés, propusieron una ecuación diferencial lineal de segundo orden como la dinámica que siguen las tasas de interés forward instantáneas:

$$\eta_1^2 y'' + \eta_1 y' + y = \beta_0 \quad (61)$$

Donde β_0 es un parámetro de estabilidad que garantiza que la ecuación converge a un valor y permite realizar extrapolaciones; además que la ecuación sea derivable garantiza la suavidad de la curva. La solución de y en la ecuación (61) es la curva forward instantánea y a partir de ahí se obtiene la curva cero cupón.

El modelo busca solucionar para $y = f(t,T)$. Al ser esta ecuación diferencial lineal, homogénea y con coeficientes constantes, se puede utilizar la ecuación característica:

$$\eta_1^2 r^2 + \eta_1 r + 1 = 0 \quad (62)$$

La ecuación (62) tiene como solución única y repetida: $r = \frac{1}{\eta_1}$ (63)

Para ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes, se tienen condiciones de estabilidad, la condición para que sea estable es que la raíz debe ser negativa, y por la ecuación K eso significa que η_1 debe ser positivo.

Ahora, la solución de la ecuación diferencial (61) es:

$$f(t,T,\beta) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}} + \beta_2 \left(\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}\right) e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}} \quad (64)$$

La ecuación (64) es la curva de las tasas forward **instantáneas.**

Ahora, usando la relación entre la curva forward instantánea y la cero cupón compuesta continuamente. Si se integra la forward instantánea y se divide entre el tiempo se obtiene la cero cupón, esto es:

$$\delta(t,T;\ \beta) = \frac{1}{\tau(t,T)} \int_t^T f(t,s)ds \quad (65)$$

Recordando que $\delta(t,T;\ \beta)$ es la tasa equivalente compuesta continuamente, que es un promedio continuo de las forwards instantáneas.

Usando esta equivalencia en (64) se obtiene:

$$\delta(t,T;\ \beta) = h(\tau(t,T);\ \beta)$$

$$\delta(t,T;\ \beta) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}}{\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}\right) + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}}{\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}} - e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}\right) \quad (66)$$

La ecuación (66) es la curva cero cupón compuesta continuamente, y tiene la siguiente interpretación:

β_0 es la tasa cupón de largo plazo, es el punto al que convergen las tasas de interés.

β_1 es el *spread* entre el corto y el largo plazo.

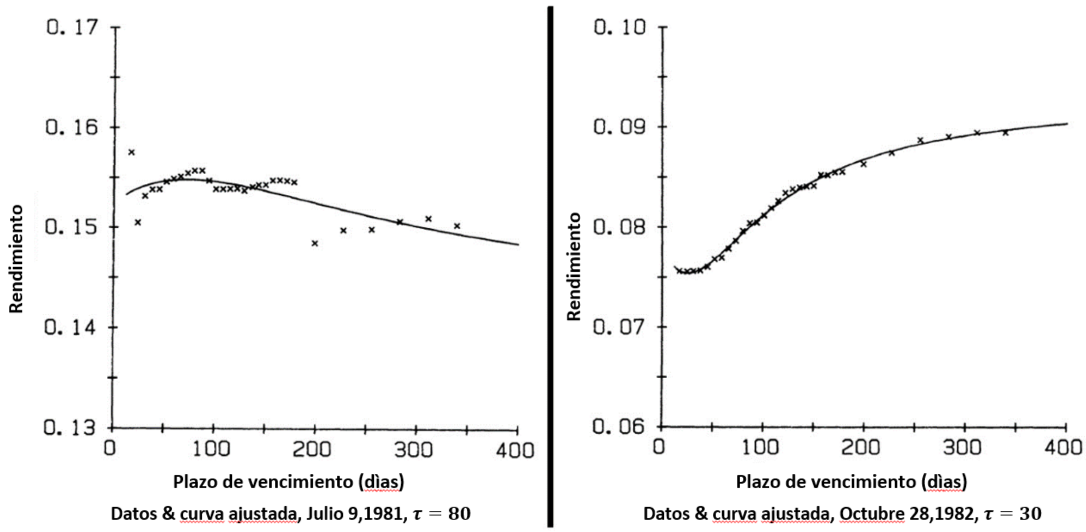
Este parámetro brinda la posibilidad de ver la diferencia entre invertir en el muy corto plazo y el largo plazo, las tasas forward instantáneas y cero cupón son comparables porque ambas son nominales compuestas continuamente, y al poderlas comparar es posible observar si en el futuro hay un *spread* positivo o negativo.

En un escenario como la crisis sanitaria del COVID-19, los agentes económicos se van al futuro a invertir a largo plazo, pues invertir en el corto plazo es muy riesgoso. Esto ocasiona que las tasas de largo plazo se reduzcan por el aumento en la oferta de ese plazo; en sentido contrario, por el aumento en la colocación de recursos en el corto plazo, las tasas de corto plazo suben. El fenómeno anterior genera una curva invertida. Esto sucede porque se tienen rendimientos más altos en el corto plazo que en el largo plazo.

β_2 es el parámetro de la curvatura que le permite al modelo tener una joroba.

η_1 es un parámetro de reescalamiento, indica dónde se genera la joroba de la curva.

Figura 9. Aproximación de Curva Cero Cupón con método Nelson-Siegel



Fuente: Víquez, J. (2022). Teoría Matemática del Interés. *Construcción de la curva cero cupón* (pp.52). Universidad de Costa Rica

Nelson y Siegel probaron el modelo con distintos plazos (distintos τ) hasta encontrar la curva de mejor ajuste. Sin embargo, en 1994, Svensson descubrió que la fórmula usada por Nelson-Siegel no funcionaba para ciertos datos de mercado.

5.2.3.2 Svensson

Svensson encuentra siete años después de Nelson y Siegel que los mercados muchas veces se comportan de forma que el modelo contiene dos parámetros, es decir, dos jorobas. Svensson cambió entonces la ecuación (66) agregándole un parámetro extra para tener mayor flexibilidad, de forma que:

$$f(t,T,\beta) = \beta_0 + \beta_1\, e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}} + \beta_2 \left(\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}\right) e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}} + \beta_3 \left(\frac{\tau(t,T)}{\eta_2}\right) e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_2}} \quad (67)$$

Nuevamente para obtener la curva cero cupón compuesta continuamente se utiliza la (65), de forma que la curva cero cupón de Svensson es:

$$\delta(t,T;\ \beta) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1- e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}}{\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}\right) + \beta_2 \left(\frac{1- e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}}{\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}} - e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}\right)$$

$$+ \beta_3 \left(\frac{1- e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}}{\frac{\tau(t,T)}{\eta_2}} - e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_2}}\right) \quad (68)$$

5.2.3.3.Svensson Modificado

El problema con el modelo de Svensson es que las jorobas η_1 y η_2 pueden encontrarse muy cerca la una de la otra, cuando esto sucede el modelo de Svensson converge al de Nelson-Siegel. Para solucionar este problema Cairns propone en el año 2004 una modificación de la ecuación (68) tal que la ecuación de la curva cero cupón ahora está dada por:

$$\delta(t,T;\ \beta) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1- e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}}{\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}\right) + \overline{\beta_2} \left(\frac{1- e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}}{\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}} - e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}\right)$$

$$+ \frac{\overline{\beta_3}}{\frac{1}{\eta_2} - \frac{1}{\eta_1}} \left(\eta_1 \left[\frac{1- e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}}{\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}} - e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_1}}\right] - \eta_2 \left[\frac{1- e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_2}}}{\frac{\tau(t,T)}{\eta_2}} - e^{-\frac{\tau(t,T)}{\eta_2}}\right]\right)$$

$$(69)$$

Cairns realiza el cambio en los parámetros $\beta_2 = \overline{\beta_2} + \frac{\eta_1 \overline{\beta_3}}{\eta_2^{-1} - \eta_1^{-1}}$ y $\beta_3 = -\frac{\eta_1 \overline{\beta_3}}{\eta_2^{-1} - \eta_1^{-1}}$ este cambio elimina el problema de convergencia del modelo original de Svensson. (Víquez, 2022).

5.2.4 Construcción de la ETTI

Para encontrar la estructura temporal de tasas de interés se debe resolver el problema de optimización:

$$V(\beta) = (P_t - \widehat{P}_t(\beta))^T \sum (P_t - \widehat{P}_t(\beta))^{-1} \quad (70)$$

Donde $P_t^{(k)}$ es el precio observado del k −ésimo bono y $\widehat{P_t^{(k)}}(\beta)$ es el precio teórico o estimado del k −ésimo bono, esto es,

$$\widehat{P_t^{(k)}}(\beta) = \sum_{j=1}^{N-1} i^{(k)} e^{-\tau(t,T_j^{(k)})\delta(t,T_j^{(k)};\,\beta)} + (1 + i^{(k)})\, e^{-\tau(t,T_N^{(k)})\delta(t,T_N^{(k)};\,\beta)}$$
(71)

La matriz Σ es un ponderador que evita que transacciones muy pequeñas afecten significativamente el ajuste del modelo.

En la ecuación (71) el precio teórico se construye con tasas compuestas continuamente, el δ cambia dependiendo del modelo que esté usando, ya sea Nelson-Siegel, Svenson o Svenson modificado. El algoritmo es el mismo y se ajusta al modelo que se quiera utilizar.

Una vez que se obtienen los parámetros se realiza una optimización no lineal, esto es una optimización numérica. Para realizar este tipo de optimización los programas especializados prueban valores de todos los parámetros y los cambian, por esto se deben imponer restricciones como las observadas en la ecuación (63), con el objetivo obtener un modelo estable y evitar tener resultados irreales pues la ecuación (70) es un problema de múltiples óptimos. (Víquez, 2022).

Los pasos para la construcción de la ETTI son:

a. Puntos Iniciales: indicar los puntos donde se inicia la optimización. Esto funciona para ver la forma de la curva y observar dónde ubicar las jorobas.
b. Cotas Superiores: indicar hasta dónde llega el modelo en la parte superior, por ejemplo las tasas no pueden ser mayores de cien.
c. Cotas Inferiores: indicar hasta dónde llega el modelo en la parte inferior, por ejemplo las tasas no pueden ser negativas.
d. Control: elegir los parámetros específicos para coordinar el funcionamiento del modelo, por ejemplo cantidad de iteraciones, tolerancia, etc.
e. Función a Optimizar: resolver la ecuación (70) con el modelo que se desee, Nelson-Siegel, Svensson o Svensson modificado.

Existen también métodos metaheurísticos que, dada la solución de múltiples óptimos, son más indicados para resolver la optimización de (70), entre estas se pueden mencionar el Algoritmo genético, Nelder Mead, PSO y sobrecalentamiento estimulado.

5.2 Debilidades de la curva soberana en Costa Rica

En el caso particular de Costa Rica, la curva soberana calculada por el Banco Central hoy en día tiene el problema metodológico de utilizar el modelo de Nelson-Siegel y Svensson que, como se vio en el apartado anterior, deriva **tasas forward instantáneas**. Sin embargo el BCCR las está utilizando como tasas cero cupón y descontando de manera inadecuada con la fórmula (43). Se debería estar utilizando el factor de descuento de la fórmula (21), este es, $e^{-\delta_{t} * t}$. Pues es el factor de descuento para el esquema de interés compuesto continuo.

Las tasas obtenidas actualmente por el BCCR deben integrarse y dividirse entre el tiempo, esto es, dividirse entre $\tau(\mathrm{t}, \mathrm{T})$ como se muestra en (65). Esta operación es indispensable para obtener la curva cero cupón compuesta continuamente, actualmente se están mezclando tasas que son matemáticamente distintas porque por un lado se están promediando tasas internas de retorno y por otro lado se está usando una curva de forwards instantáneas compuestas continuamente como si fueran tasas equivalentes anuales.

La presente investigación tomó en cuenta también la opinión de una serie de expertos, a partir de esto se identificó que otro importante problema en el cálculo de las tasas forward está en la propia estructura de las tasas spot que tiene Costa Rica hoy en día, como se mencionó anteriormente la curva de rendimiento soberana del país tiene un grave problema de ausencia de información sobre puntos específicos de la curva.

Patricia Mata Solís, Directora de Oferta Pública en la Superintendencia General de Valores (SUGEVAL), indica que todo mercado de valores sobre todo un mercado como el costarricense que es un mercado de deuda pública, requiere que la gestión de la deuda se haga muy eficientemente, no solo desde el punto de vista de la consolidación fiscal sino también en la obtención del financiamiento por parte de los operadores. El país necesita tener una estrategia de deuda de mediano plazo del Gobierno Central que sea actualizada constantemente. Esta estrategia debe estar ligada a un plan de emisión para que el mercado cuente con toda la información, y este plan de emisión debe ser anual, no semestral como se hace actualmente. El tema de la información es vital porque ciertamente los precios del mercado primario influyen en el mercado secundario y para generar un mercado secundario profundo y líquido es indispensable conocer cuando el primario no va a competir.

Asimismo Melvin Garita señala la poca profundidad y baja liquidez del mercado bursátil nacional, y los diferentes factores que están detrás de esas características, como un monopolio -en la práctica- en la oferta de instrumentos, un oligopolio institucional -también en la práctica- en la demanda de instrumentos financieros, la ausencia de operaciones que ayuden a descubrir precios, como las ventas en corto y los préstamos de valor, entre algunos otros, hacen que los procesos de ajuste de rendimientos sean muy lentos, por lo que la curva soberana podría no estar reflejando la mejor información en cuanto a las condiciones económicas y financieras del emisor soberano y del entorno interno y externo que enfrenta.

Elián Villegas, ministro de Hacienda en el periodo 2018-2022, considera que la curva soberana costarricense presenta debilidades propias de la escasa profundidad de mercado, al darse esa escasa profundidad los precios que existen dependen en muchos casos de las metodologías y de la técnica de las empresas encargadas de la valoración y no de lo que son propiamente las cotizaciones que se realizan en el mercado. De acuerdo con Villegas esto se profundiza porque tenemos un mercado que es un mercado de órdenes y no un mercado donde existan cotizaciones efectivas a lo largo del día, de forma tal que la curva que hoy tenemos es una curva que no está suficientemente alimentada por el mercado secundario.

Para Elian Villegas el mayor problema que se le puede ver a la curva hoy tiene que ver con que la información no es proveída por el emisor, Ministerio de Hacienda, sino por el Banco Central o por la Bolsa Nacional de Valores; para él una de sus propuestas es que sea el Ministerio de Hacienda quién genere toda la información y quién genere esa curva para que más bien sea el mercado el que utilizando la información que le da el Ministerio de Hacienda relativa a la curva (en esa curva el Ministerio debe incorporar tanto mercado primario como secundario), tenga un instrumento que le sirva para definir expectativas de macro precios de interés para el país.

Costa Rica tiene particularmente un mercado concentrado. Para Mata el mercado costarricense tiene tres importantes monopolios, el monopolio de la Bolsa Nacional de Valores pues únicamente ahí se puede realizar las transacciones de compra y venta de bonos soberanos, el monopolio de los puestos de bolsa y el monopolio de los agentes de bolsa. Esto es de mucha relevancia porque como en todo monopolio cuando se tiene concentración de poder se tienen poderes de negociación y eso termina afectando los precios. Para Mata es indispensable romper el principio de mercado concentrado para la deuda pública, con el fin de que se permita a operadores mayoristas como operadoras de pensiones, aseguradoras y bancos entrar a comprar deuda al emisor directamente sin necesidad de pasar por el puesto de valores.

Mata indica que es también vital tener creadores de mercado si se quiere una adecuada formación de precios, esto porque los creadores de mercado generan liquidez con la punta de venta y con la punta de compra de manera constante y la información de dichas transacciones es pública. Actualmente en el mercado costarricense, los puestos de bolsa no funcionan como creadores de mercado porque no tienen el capital suficiente para soportar pérdidas. Los principales proveedores de este tipo de liquidez en los mercados desarrollados son los bancos, no los intermediarios.

Adicional a lo ya mencionado, a partir de las diferentes entrevistas con expertos, se identificó que la curva soberana costarricense parte de supuestos irreales como competencia perfecta e información completa lo cual dista en la realidad; además en la construcción de la curva actual no se toma en cuenta que la captación es diferente para las instituciones financieras públicas y privadas, ni toma en cuenta que la captación se hace tanto en colones como en dólares.

6. Conclusiones

Actualmente[6], en el país las tasas de interés de largo plazo se están reduciendo; en sentido contrario, por la desaceleración económica, las expectativas de bajo crecimiento futuras y el control de la inflación por parte del BCCR, las tasas de corto están subiendo. Por lo tanto, en Costa Rica se observa una curva invertida y esto sucede porque se tienen rendimientos más altos en el corto plazo que en el largo plazo. Esto es una problemática actualmente porque el inversionista, el formador de la curva, está captando a mitad de la curva a tasas más altas que a largo plazo y eso no tiene mucho sentido dentro de la formación de expectativas de los agentes económicos en el país.

Luego de estudiar ampliamente las condiciones del mercado de deuda pública de Costa Rica, la presente investigación cumplió con dos de los tres objetivos planteados.

Como primer aporte, se descubrió que la construcción actual de la curva soberana no se alinea con las expectativas de los agentes económicos por la siguiente serie de razones:

1. El mercado de bonos costarricense es considerado como un mercado de bonos ilíquido, con un bajo volumen de negociación. De acuerdo con Ibanez (2015), en las economías en desarrollo con escasos datos sobre los precios del mercado de bonos, una parte sustancial de la negociación en el mercado secundario se concentra en un puñado de bonos que el mercado percibe como líquidos, por lo que no tiene

---

[6] Se hace referencia al año 2022

sentido estimar la estructura de plazos basándose en un pequeño número de valores líquidos. Según Cubero, la calidad de información del mercado es menor cuánto menos líquido sea ese mercado, incluso para los segmentos un poco más líquidos. El mercado costarricense es menos profundo de lo que veríamos en países más sofisticados como Estados Unidos o Inglaterra, pero incluso menos profundo en comparación a mercados emergentes en América Latina como Chile o México. Estos últimos, son mercados mucho más profundos donde se pensaría que la formación de precios es más fidedigna y la curva soberana refleja los precios de una forma más precisa que en nuestro país.

2. La curva soberana calculada por el Banco Central hoy en día tiene el problema metodológico de utilizar el modelo de Nelson-Siegel y Svensson que deriva tasas forward instantáneas, sin embargo el BCCR las está utilizando como tasas cero cupón y descontando de manera inadecuada.

Entre los otros aportes relevantes de esta investigación está la revisión de distintas metodologías para la correcta construcción de la curva soberana, que permite al lector comprender las bases matemáticas necesarias para el ajuste requerido en la curva de Costa Rica; si bien no se cumplió con el alcance de calcular las tasas forward planteado en el tercer objetivo de esta investigación por falta de información debido a la poca profundidad del mercado, se sientan las bases que permiten a quienes deseen realizar estudios en este campo de análisis, aplicarlo a otros mercados de deuda pública o privada.

El cálculo de tasas forward sería de utilidad para el Banco Central de Costa Rica, ya que brindaría información sobre la evolución de las tasas de interés que afectan la demanda interna y, por tanto, la inflación. Debido al desfase en la transmisión, es importante tener una visión de futuro en las decisiones monetarias; mediante el seguimiento a través de tasas forward el Banco Central puede extraer información sobre la situación económica futura, esto permite al Banco controlar las expectativas del mercado sobre las futuras medidas de política monetaria.

La ETTI, al expresar la relación entre los rendimientos de los bonos libres de riesgo cero cupón y su duración hasta el vencimiento, puede utilizarse para la gestión del riesgo y tiene un papel importante en la fijación de precios de los títulos de renta fija y de los derivados de tipos de interés, así como otros activos financieros, es por esto que es de suma importancia contar con datos precisos para la toma de decisiones de los agentes.

En línea con la precisión de los datos y la profundidad del mercado, el gobierno costarricense y el Banco Interamericano de Desarrollo Económico están trabajando en un plan de acción para el desarrollo del mercado de capitales. Dentro de las acciones planteadas se tiene la estimación de los costos de entrada y permanencia en el mercado para los emisores de valores, así como del plazo total que se invierte desde la decisión de acceder al mercado hasta obtener la autorización de oferta pública.

Adicional a esto, se ha estudiado el mecanismo de avales del Sistema de Banca para el Desarrollo, con el fin de evaluar la posibilidad de aportar mejoras crediticias a potenciales PYME emisoras y ofrecerles flexibilidad en los requisitos de acceso al mercado de capitales. Además se ha buscado regular el financiamiento de proyectos empresariales y de infraestructura pública y disminuir la concentración en deuda pública de los fondos de pensiones.

De mano con lo anterior , se plantea mejorar la divulgación de la información de mercado primario, regulación para canjes y subastas inversas de deuda, desarrollar un plan de Emisión Deuda Interna, desarrollar un plan de Financiamiento del Gobierno Central, aperturar el mercado de deuda pública, mejorar y unificar la metodología para la Estructura Temporal de Tasas de Interés y permitir el acceso de intermediarios extranjeros.

Finalmente, plantea subastas continuas, optimización de servicios de compensación y liquidación, mejora de mecanismos de liquidez en el mercado secundario y la participación de bancos estatales con cuentas margen.

En conclusión, es importante tener modelos que dejen de lado el supuesto de una tasa de interés fija, pues el pronóstico adecuado sobre las tasas de interés permite tener un mejor panorama de la evolución de la demanda interna, la inflación, la postura en política monetaria y la situación económica futura en general. (Siegel, 1987).

7. Bibliografía

Alpízar, G; Echeverría, R; Quirós, M; Salazar, M (2005). Modelación de las estructuras de tasas de interés nominales para Costa Rica. Academia de Centroamérica.

Anton, H. Introducción al algebra lineal. Limusa, México, 2004.

Banco Central de Costa Rica (2020). Aspectos metodológicos del cálculo de la curva de rendimientos soberana. Recuperado de: https://gee.bccr.fi.cr/indicadoreseconomicos/Documentos/DocumentosMetodologiasNotasTecnicas/Metodologia_Curva_Soberana.pdf

Banco Central de Costa Rica. (2018). Valoración de instrumentos de renta fija: Bonos tasa fija y tasa flotante. Recuperado de: https://www.bccr.fi.cr/inversiones-bccr/Documents/valoracion_bonos_bccr.pdf

Banco Central de Islandia. Boletín Monetario: Forward interest rates and their application in Central Bank analysis (2005). Recuperado de: https://www.cb.is/lisalib/getfile.aspx?itemid=4634

Bodie, Z., Kane, A. y Marcus, A. J. (1999). Investments. McGraw Hill (Fouth Edition), Cap 9 y 10.

CFA Institute. (2018). Traditional Theories of the Term Structure of Interest Rates. IFT lecture on Fixed Income.

Chou, J., Su, Y., Tang, H., Chen, C. (2009). Fitting the term structure of interest rates in illiquid market: Taiwan experience. Investment Management and Financial Innovations, 6(1)

Diebold, F. and Li, C. (2006). Forecasting the term structure of government bond yields. Journal of Econometrics 130 (2006) 337–364.

Diebold, F., Rudebusch, G., Boragan, S. (2006). The macroeconomy and the yield curve: a
dynamic latent factor approach. Journal of Econometrics 131 (2006) 309–338.

Dutta, G., Basu, S., Vaidyanathan, K. (2005). Term Structure Estimation in Illiquid Government Bond Markets: An Empirical Analysis for India. Journal Of Emerging Market Finance, 4:1

Fisher, I. (1930) The Theory of Interest Rate. Macmillan. Fouth Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River.

Hull, J. (2014) Options, Futures and Other Derivatives. 9th Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River.

Ibanez, F. (2015). Calibrating the Dynamic Nelson-Siegel Model: A Practitioner Approach. Central Bank of Chile. Recuperado el 12 de junio desde: https://mpra.ub.uni-muenchen.de/68439/

Mankiw, G.N. (2013). Principios de Economía. México: Cengage Learning Editores. Séptima edición.

Roca, R. (2002) La tasa de interés y sus principales determinantes. Recuperado el 27 de febrero 2022 desde: https://economia.unmsm.edu.pe/org/arch_iie/arch_invest/doc_inv_DI-02-003.pdf

Siegel, A. and Nelson, C. (1987). Parsimonious modeling of yield curves, Journal of Business, 60, 473-489.

Svensson, L. (1994). Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994, Working Paper No. 4871, National Bureau of Economic Research.

Venegas, D. (2012). Estudio jurídico de los Contratos Forward y su aplicación en Costa Rica. Universidad de Costa Rica.

Vélez, M. & Montoya, J. (2007). Metaheurísticos: Una Alternativa Para La Solución De Problemas Combinatorios. *Revista EIA*, (8), 99-115. Extraído desde: http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1794-12372007000200009&lng=en&nrm=is&tlng=es

Víquez, J. (2021). Microeconomía Avanzada I. Universidad de Costa Rica.

Víquez, J. (2022). Teoría Matemática del Interés. Universidad de Costa Rica.

8. Anexos

8.1 Entrevistas

Rodrigo Cubero Brealey, presidente del Banco Central de Costa Rica 2018-2022

1. ¿Cuál es su opinión sobre la calidad de formación de la curva soberana? ¿Qué problemas le ve a la curva soberana?

En mi opinión el principal problema es la ausencia de información sobre puntos específicos de la curva, el mercado financiero costarricense, incluyendo el mercado de bonos soberanos, es un mercado poco profundo. Dentro del mercado de bonos soberanos hay segmentos con más liquidez que otros, en unos segmentos hay realmente pocas transacciones y eso hace que la información sobre dónde está la tasa de interés en un momento dado del tiempo normalmente tenga que hacerse por vía de extrapolación y con un algoritmo de las compañías que hace este tipo de pricing. No siempre queda claro que el algoritmo este bien o que la inferencia que se hace de dónde se ubica el precio en un momento dado del tiempo, cuando no ha habido transacciones recientes, sea enteramente preciso.

Aparte de eso la calidad de información del mercado es menor cuánto menos líquido sea ese mercado, incluso para los segmentos un poco más líquidos estamos hablando de un mercado menos profundo de lo que veríamos en países más sofisticados como Estados Unidos o Inglaterra, pero incluso mercados emergentes en América Latina como Chile o México que son realmente mercados mucho más profundos donde uno pensaría que la formación de precios es más fidedigna y la curva soberana refleja los precios de una forma más precisa.

2. ¿Cómo solucionaría estos problemas?

Un tema clave es el desarrollo del mercado secundario, en este momento hay todo un plan de trabajo, una hoja de ruta que se desarrolló de manera conjunta entre el Banco Central y el Banco Interamericano de Desarrollo. En esa misma dirección hay también plan de trabajo de la Bolsa Nacional de Valores, una hoja de ruta sobre cómo desarrollar el mercado de capitales en Costa Rica y también el mercado de títulos de deuda. En esa hoja de ruta uno de los puntos centrales es cómo atraer inversionistas extranjeros al mercado doméstico, cómo eliminar o reducir la segmentación que tenemos en este momento, que para los inversionistas extranjeros se hace más complicado participar en Costa Rica. Hay dos temas acá, uno es el tratamiento tributario de las inversiones en Costa Rica que es desventajoso porque las inversiones están sujetas a una retención que no estaría aplicándosele a los bonos de deuda externa; la otra desventaja desde la perspectiva de un inversionista extranjero es que en los bonos transados domésticamente la jurisdicción que aplica en caso de conflicto es la costarricense, mientras que los bonos externos son cortes en Nueva York, o Londres, o la plaza de emisión de los eurobonos. Esas diferencias disminuyen el apetito de los inversionistas extranjeros, pero aún frente a esos obstáculos hay cosas que se pueden hacer para facilitar la participación de los inversionistas extranjeros, incluso sin necesidad de reforma legal. Ahí digamos mucho el tratamiento contable para la participación de los fondos de inversión o inversionistas institucionales, incluso individuales desde el extranjero se puede facilitar desde el punto de vista administrativo con reducir las reglas de inscripción en bolsa.

Otro tema importante es como lograr diversificación por el lado de la demanda, actualmente la demanda de bonos soberanos viene de fondos de pensiones, el INS, bancos y otras instituciones grandes del estado como el ICE o

Recope. Entonces hay un mercado pequeño y concentrado del lado de demanda, se debe crear un mayor apetito por parte de inversionistas domésticos corporativos por ejemplo hacia el mercado de bonos y que eso potencie el mercado secundario, es parte de los esfuerzos que se deben hacer.

Melvin Garita Mora, Gerente General BN-Valores Banco Nacional de Costa Rica

1. ¿Cuál es su opinión sobre la calidad de formación de la curva soberana? ¿Qué problemas le ve a la curva soberana?

La formación de la curva soberana tiene dos aristas, la primera tiene que ver con la metodología para la construcción de la curva, la cual se realiza apegada a las mejores prácticas de análisis numérico, mientras que la segunda arista tiene que ver con la información que genera el mercado y que constituye el principal insumo para la estimación de una estructura temporal de tasas de interés.

La poca profundidad y baja liquidez del mercado bursátil nacional, y los diferentes factores que están detrás de esas características, como un monopolio -en la práctica- en la oferta de instrumentos, un oligopolio institucional -también en la práctica- en la demanda de instrumentos financieros, la ausencia de operaciones que ayuden a descubrir precios, como las ventas en corto y los préstamos de valor, entre algunos otros, hacen que los procesos de ajuste de rendimientos sean muy lentos, por lo que la curva soberana podría no estar reflejando la mejor información en cuanto a las condiciones económicas y financieras del emisor soberano y del entorno interno y externo que enfrenta.

2. ¿Cómo contribuye esto a la formación de expectativas del mercado en el que usted labora?

La formación de expectativas se ve forzada a realizar un análisis mucho más integral, dados los vacíos de información que tiene la curva soberana, esto incluye análisis histórico de los nodos de la curva soberana, análisis de tasas reales, análisis de pares internacionales (para la curva soberana en dólares), entre otros.

3. ¿Cómo solucionaría estos problemas?

Es necesario realizar una mejora regulatoria que facilite y haga menos costosa la inscripción de nuevos emisores privados, además que permita ofrecer los servicios de gestión de activos de una manera masiva a costos razonables. Mientras que se hace necesario que transacciones como los préstamos de valor y las ventas en corto se puedan implementar, con el objetivo de esclarecer el mercado mucho más rápido.

Elian Villegas Valverde, ministro de Hacienda Costa Rica 2018-2022

1. ¿Cuál es su opinión sobre la calidad de formación de la curva soberana? ¿Qué problemas le ve a la curva soberana?

La curva soberana costarricense todavía presenta algunas debilidades propias de una situación que es la escaza profundidad de mercado, al darse esa escaza profundidad los precios que existen van a depender en muchos casos de las metodologías y de la técnica de las empresas encargadas de la valoración y no de lo que son propiamente las cotizaciones que se realizan en el mercado, esto se profundiza porque tenemos un mercado que es un mercado de órdenes y no un mercado donde tenemos cotizaciones efectivas a lo largo del día, de forma tal que esta curva que hoy tenemos es una curva que no está suficientemente alimentada por el mercado secundario.

El mayor problema que se le puede ver a la curva hoy tiene que ver con que la información de la curva no es proveída por el emisor que es el Ministerio de Hacienda sino por el Banco Central o por la Bolsa Nacional de Valores, entonces uno de los principales temas es que sea el Ministerio de Hacienda quién genere toda la información y quién genere esa curva para que más bien sea el mercado el que utilizando la información que le da el Ministerio de Hacienda relativa a la curva (en esa curva el Ministerio debe incorporar tanto mercado primario como secundario), tenga un instrumento que le sirva para definir expectativas de macro precios de interés para el país.

2. ¿Cómo contribuye esto a la formación de expectativas del mercado en el que usted labora?

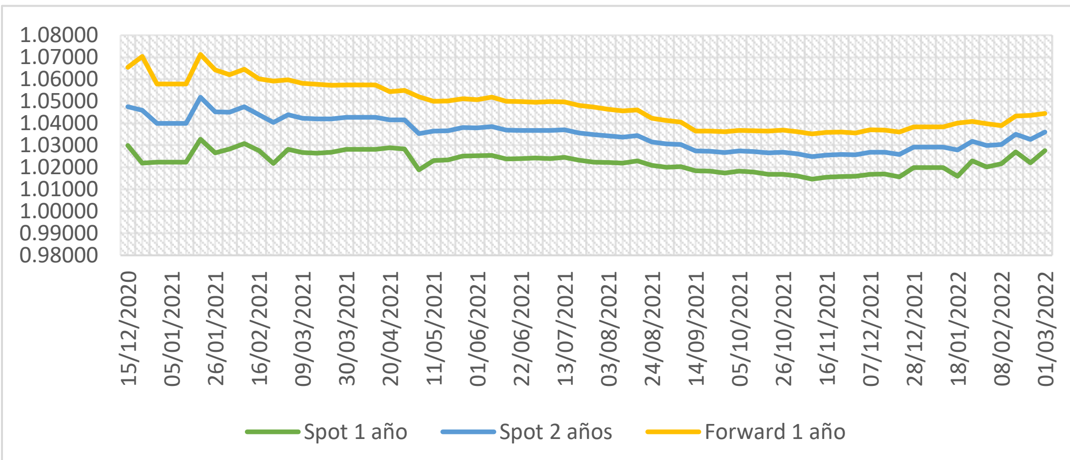
Si bien la curva no representa de la mejor manera lo que es el riesgo soberano si tiene algunas funciones importantes, entre ellas sirve para tener mayor claridad de las expectativas de inflación y también sirve para conocer cuál es la expectativa sobre el riesgo soberano que está en los bonos del estado costarricense. En este último caso la expectativa de riesgo según el plazo a lo largo de la curva.

3.¿Cómo solucionaría estos problemas?

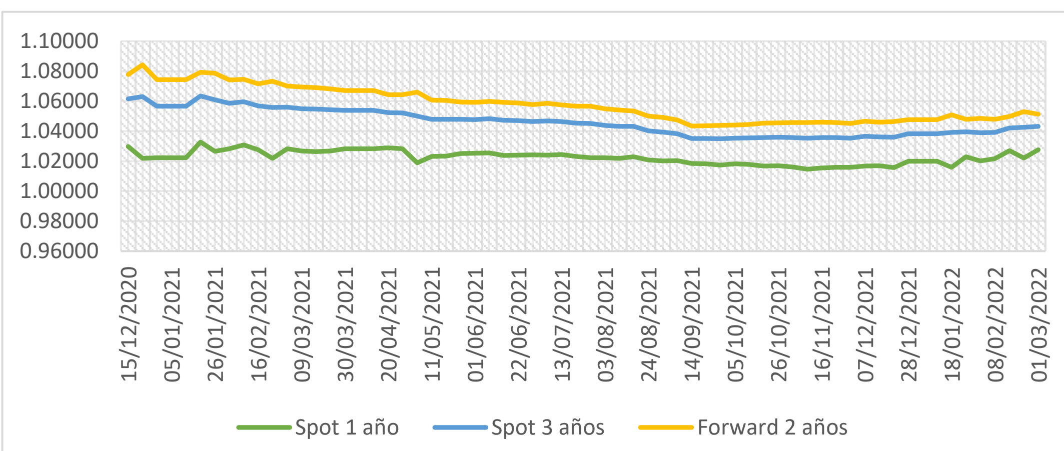
Se pueden solucionar con dos acciones. El número uno es tomar el liderazgo para transparentar la información de la curva desde el Ministerio de Hacienda, incorporando tanto mercado primario como secundario; y el segundo tema se puede hacer también mejorando la situación existente que comentaba antes en relación con el mercado de órdenes y es llevar adelante el proceso de creadores de mercado por medio del cual habrán bancos que estarán con posiciones de compra y venta de valores a lo largo de todo el día.

8.2 Ejercicio cálculo de tasas forward CR para distintos plazos[7]

Utilizando los datos actuales que brinda el Banco Central de Costa Rica sobre la curva de rendimientos soberana se hizo el siguiente ejercicio de cálculo de tasas forward para Costa Rica. En este ejercicio se tomó una tasa fija para cada título, obteniendo una única variable desconocida TIR.

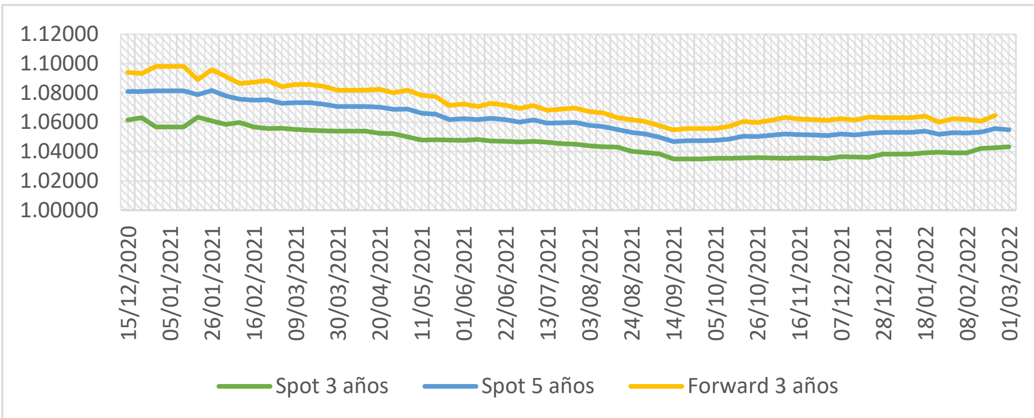


Fuente: elaboración propia con datos del Banco Central de Costa Rica.

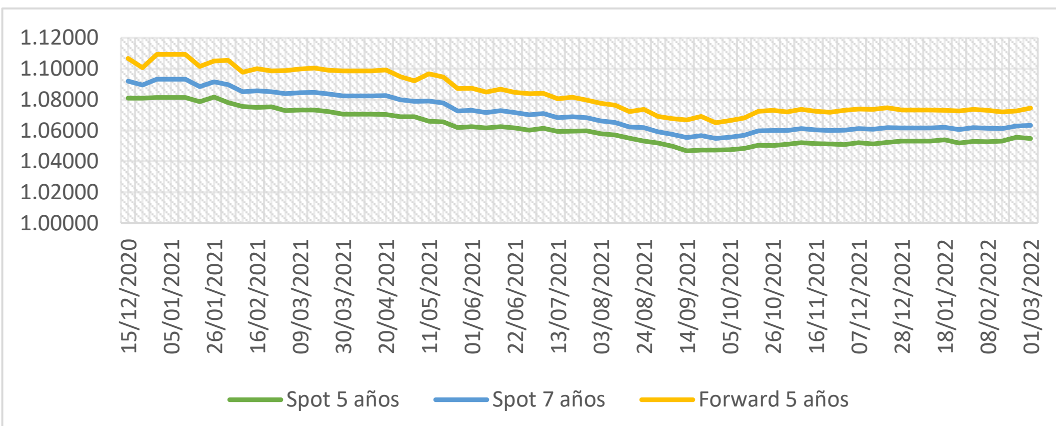


[7] Véase sección 5.1 Cálculo de las Tasas forward para Costa Rica.

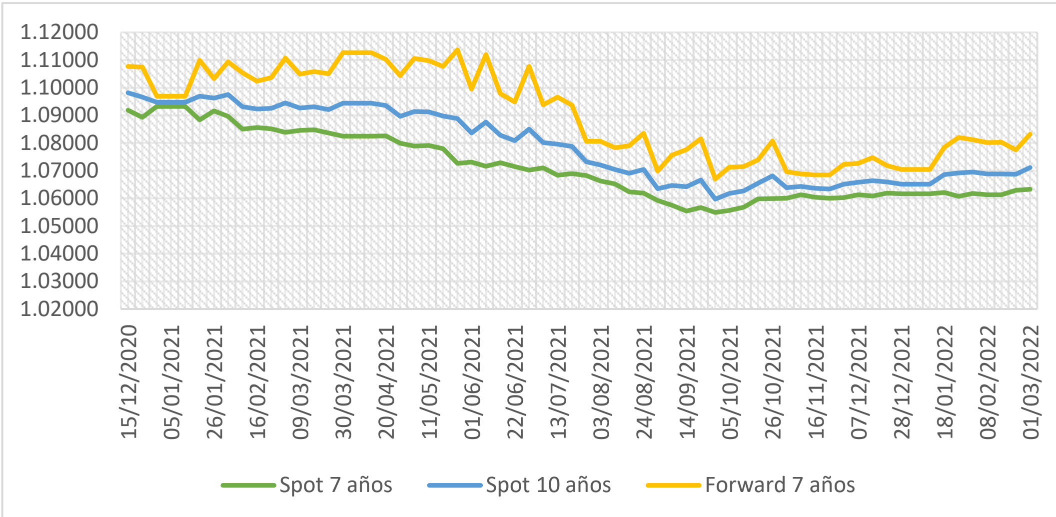
Fuente: elaboración propia con datos del Banco Central de Costa Rica.



Fuente: elaboración propia con datos del Banco Central de Costa Rica.



Fuente: elaboración propia con datos del Banco Central de Costa Rica.



Fuente: elaboración propia con datos del Banco Central de Costa Rica

8.3 Glosario

1. **Costo de oportunidad:** Es lo que se sacrifica con objeto de obtener algo. Es el costo de la alternativa a la que se renuncia cuando se toma una determinada decisión, incluyendo los beneficios que se podrían haber obtenido al escoger la opción alternativa.

2. **Creador de mercado:** Un creador de mercado es un individuo o una entidad financiera que proporciona la liquidez del mercado al actuar como contraparte de compradores y vendedores en un mercado financiero. El papel del creador de mercado es asegurarse de que siempre haya compradores y vendedores disponibles para cualquier activo financiero que se esté negociando en el mercado, incluso en momentos de alta volatilidad y escasez de participantes.

3. **Interpolación lineal:** La interpolación es un método numérico y gráfico que permite encontrar datos desconocidos entre o en medio de otros datos ya conocidos. El tipo de interpolación difiere según la naturaleza de los datos tratados. Existe la interpolación lineal (para datos que presentan una relación lineal entre sí), la interpolación cuadrática, cúbica, interpolación exponencial, entre otras.

4. **Medida Martingala:** Una medida martingala $\mathbb{Q}$ equivalente a $\mathbb{P}$ es una medida de riesgo neutral. Es una medida de probabilidad que cumple con $\mathbb{Q}$ (A) = 0 si y solo si $\mathbb{P}$ (A) = 0

5. **Mercado Integrado de Liquidez (MIL):** Es el servicio por medio del cual el Banco Central de Costa Rica controla la liquidez del sistema financiero, y los demás participantes realizan operaciones financieras para administrar posiciones de liquidez de corto plazo.

6. **Método de gradiente:** Es un algoritmo para resolver numéricamente los sistemas de ecuaciones lineales cuyas matrices son simétricas y definidas positivas.

7. **Métodos metaheurísticos:** son métodos aproximados diseñados para resolver problemas de optimización combinatoria, proporcionan un marco general para crear nuevos algoritmos híbridos, combinando diferentes conceptos derivados de la inteligencia artificial, la evolución biológica y los mecanismos estadísticos.

8. **Mínimos cuadrados generalizados (MCG):** Es un método utilizado cuando la matriz de varianzas y covarianzas del término de error de un modelo de regresión lineal (MCO) deja de ser un escalar, esto produce que el estimadores MCO ineficientes. Con una transformación algébrica los estimadores MCO se convierten en estimadores MCG insesgados, consistentes y eficientes.

9. **Condición de No-Arbitraje:** Debe ser imposible que:

   i. $V_0 = \sum_{i=1}^{N} \emptyset_0^{(K)} S_0^{(K)} = 0$ **;** *ie* no se esté invirtiendo dinero

   y

   ii. $\mathbb{P}[V_T \geq 0] = 1$; *ie* no se pierde en el futuro

   y

   iii. $\mathbb{P}[V_T > 0] > 0$; *ie* se tienen ganancias con probabilidad positiva

   La condición de No- Arbitraje es la imposibilidad de invertir cero unidades de dinero hoy y recibir en el futro una cantidad positiva con probabilidad positiva.

10. **Tasa bancaria *overnight:*** es la tasa a la que los bancos se prestan fondos entre ellos al final del día en el mercado nocturno.

11. **Tasas estocásticas:** son tasas que varían debido a la ocurrencia de eventos de carácter contingente, donde la tasa de interés es una variable aleatoria y tiene asociada una función de probabilidad que la caracteriza.