



ALME 35



Coordinación editorial

Mónica Marcela Parra-Zapata
Colombia

Editoras y Editor responsables

Rebeca Flores
México

Horacio Saúl Sostenes González
México

Edilma Rubí Granados Martínez
Guatemala

María Camila Ocampo-Arenas
Colombia

Luz Cristina Agudelo Palacio
Colombia

Diana Milena Escobar Franco
Colombia

Comité editorial

Cristian Paredes Cancino
México

José Fernandes da Silva
Brasil

Cariño Ruiz Camargo
México

José Isaac Sánchez Guerra
México

Milton Rosa
Brasil

Jhony Alexander Villa-Ochoa
Colombia

Isabel García-Martínez
Chile

Diana Wendolyne Ríos Jarquín
México

Diseño:

Gabriela Sánchez Téllez



ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, Volumen 35, Número 2, agosto 2022, es una publicación semestral editada por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Av. Universidad 1900, Oxtotulco Universidad, Delegación Coyoacán, C.P. 04460, Ciudad de México, www.clame.org.mx, articulos.alme@gmail.com. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo 04-2015-082710244200-203, otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN: 2448-6469. Se autoriza la reproducción total o parcial, previa cita a la fuente:

Autor(es) (2022). Nombre del artículo. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 35 (2). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

ALME es una publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: Presidenta: Carmen Evarista Matías Pérez (República Dominicana); Secretaria: Elizabeth Mariscal Vallarta (México); Tesorera: Santa Daysi Sánchez González (República Dominicana); Vocal Norteamérica: Evelia Reséndiz Balderas (México); Vocal Caribe: Anelys Vargas Ricardo (Cuba); Vocal Centroamérica: Rodolfo David Fallas Soto (Costa Rica); Vocal Sudamérica: Mónica Marcela Parra-Zapata (Colombia).

COMITÉ CIENTÍFICO DE EVALUACIÓN

ARGENTINA



Rodolfo Eliseo D'Andrea

ESPAÑA



Carmen López Esteban

PERÚ



Daysi Julissa García-Cuéllar

COLOMBIA



Maria Denis Vanegas Vasco

MÉXICO



Adriana Gómez Reyes
Carlos Daniel Prado Pérez
Daniela Pagés Rostán
Gisela Montiel Espinosa
José Rafael Couoh Noh
Lorenzo Contreras Garduño
María del Carmen Fajardo Araujo
María Graciela Treviño Garza
María Isabel Segura Gortáres
Miriam Estela Lemus
Rafael Pantoja Rangel
Silvia Guadalupe Maffey García
Silvia Ibarra Olmos
Vivian Libeth Uzuriaga López

VENEZUELA



Ivonne Coromoto Sanchez Sanchez
Luis Andrés Castillo Bracho

CUBA



Olga Lidia Pérez González
Valentina Badía Albanés

DISEÑO DE UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE PARA LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS: UNA SESIÓN FOTOGRÁFICA EN UN PARQUE EÓLICO

DESIGN OF A LEARNING SITUATION FOR TRIGONOMETRIC RATIOS: A PHOTOGRAPHIC SESSION IN AN EOLIC PARK

Rigoberto Ruiz Esquivel, Francisco Sanabria Zúñiga, Fabián Wilfrido Romero Fonseca
Universidad de Costa Rica (Costa Rica)
rigoberto.ruiz@ucr.ac.cr, francisco.sanabria@ucr.ac.cr, fabian.romero@ucr.ac.cr

Resumen

Se pretende con este trabajo reflexionar sobre la resolución de una situación de aprendizaje enmarcado en el contexto de la toma de fotografías en un parque eólico, buscando la significación de las razones trigonométricas básicas a partir de su uso. De esta manera, se planteó una situación de aprendizaje construida mediante una trayectoria hipotética de aprendizaje, la cual parte de estrategias y consideraciones por parte del docente, cuya meta es el significar la relación no proporcional entre ángulo y la cuerda, pero se desconoce el camino o trayectoria que los estudiantes recorran para alcanzar el objetivo establecido. A partir de la implementación de la situación planteada en un formato de taller con docentes de matemáticas, se obtiene que dicho proceso THA brinda un escenario de análisis y reflexión sobre la práctica docente, donde se destacan la necesidad de predecir los posibles caminos que recorren los estudiantes para adquirir un conocimiento y el reto que significa para los docentes identificar que el alumno recorre una trayectoria distinta a la pensada previamente no significa que el estudiante esté en algo incorrecto.

Palabras clave: trigonometría, razones trigonométricas, trayectoria hipotética de aprendizaje.

Abstract

The purpose of this work is to reflect on the resolution of a learning situation framed in the context of taking photographs in a wind farm, seeking the meaning of the basic trigonometric ratios from their use. In this way, a learning situation constructed by means of a hypothetical learning trajectory was proposed, which is based on strategies and considerations by the teacher, whose goal is the meaning of the non-proportional relationship between angle and chord, but the path or trajectory that the students will follow to reach the established objective is unknown. This trajectory is based on the results of research in Mathematics Education. From the implementation of the situation proposed in a workshop format with teachers of math, it is obtained that the THA process provides a scenario for analysis and reflection on teaching practice, where is highlighted the need to predict the possible paths that students follow to acquire knowledge and the challenge for teachers to identify that the student follows a path different from the one previously thought does not mean that the student is doing something wrong.

Keywords: trigonometry, trigonometric ratios, learning hypothetical trajectory.

■ Introducción

El desarrollo del Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas propuesto por Simon (1995), representa la relación entre las teorías sobre la enseñanza y el aprendizaje, lo conocido sobre el aprendizaje de un contenido, representaciones, materiales, las actividades matemáticas y las hipótesis del docente respecto a lo que comprenden los estudiantes.

Siguiendo la metodología de la trayectoria hipotética de aprendizaje (THA), se busca estudiar las razones trigonométricas en el contexto de la toma de fotografías, reconociendo que el aprendizaje de las matemáticas no debe limitarse a una simple reproducción de resultados previamente elaborados, sino que debe ser producto de una serie de construcciones y articulaciones de las mismas, las cuales se establecen con el propósito de generar una situación de aprendizaje que permita a los y las estudiantes construir significados alrededor de un determinado tema, lo cual conlleva a que el docente aprenda a analizar los procesos de aprendizaje, relacionados a dichas razones, en un contexto cercano a las matemáticas que conocen los estudiantes.

Para dicho fin, limitamos el campo de acción de este trabajo a la trigonometría, donde se busca aplicar las razones trigonométricas básicas en diversos contextos, de modo que abordamos el uso de estas “para estudiar y cuantificar la relación (no proporcional) entre un ángulo central, en el círculo, y la cuerda que subtiende” (Scholz, 2020, p.52). De esta manera, se realiza una adaptación de una actividad propuesta en Montiel (2012), donde variamos el contexto, con la intención de representar una situación cotidiana al tomar una fotografía con un teléfono celular, utilizando como referencia un parque eólico costarricense. Además, de presentar la actividad siguiendo la metodología de la THA.

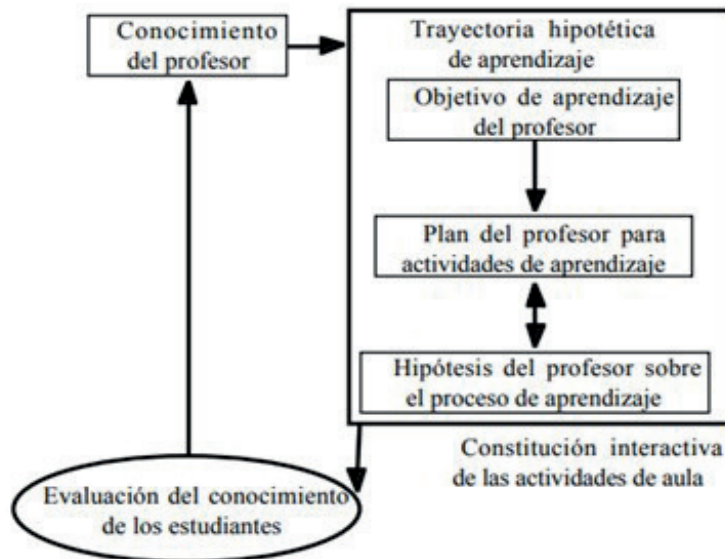
■ Elementos Teórico-Metodológicos

Según Simon (1995), el desarrollo del Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas representa la relación cíclica entre los aspectos del conocimiento, el pensamiento, la toma de decisiones y la actividad del docente. Dicho ciclo describe la relación entre distintas áreas del conocimiento del docente como lo son teorías del profesor sobre la enseñanza y el aprendizaje, lo que conoce sobre el aprendizaje de un contenido, representaciones, materiales y actividades matemáticas. Así, se toma en cuenta el pensamiento, el aprendizaje, las actividades de aprendizaje y la meta del mismo, así como el conocimiento matemático del docente y sus hipótesis al respecto de lo que comprenden los estudiantes.

La meta del aprendizaje motiva un camino o estrategia para el docente abordar el aprendizaje, a este se le denomina trayectoria hipotética del aprendizaje, lo cual es básicamente el plan que realiza el docente para enseñar, tomando en cuenta también su experiencia sobre la forma en que podría proceder el aprendizaje, a pesar de no conocer con certeza el camino de aprendizaje que recorre cada uno de los estudiantes. La importancia de esta trayectoria consiste, según Simon (1995), en que brinda al docente un fundamento para elegir un diseño instruccional particular.

Para Simon (1995) la trayectoria hipotética de aprendizaje consta del objetivo de aprendizaje que define la dirección, las actividades de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético, predicción de cómo evolucionará el pensamiento y la comprensión de los estudiantes en el contexto de las actividades de aprendizaje. La Figura 1 esquematiza el ciclo metodológico para crear una THA, el autor hace énfasis en la creación y modificación continua de la trayectoria de hipotética del aprendizaje, señalando que es importante fijar un objetivo, así como el fundamento para enseñar, además de las hipótesis del docente, aspectos que son complementados con nuevas hipótesis producto de las actividades propuestas inicialmente. Las modificaciones a dicha trayectoria pueden realizar cambios en cualquiera o en todos los elementos de la misma, ya sea la meta, las actividades o el proceso hipotético de aprendizaje.

Figura 1. Diagrama de una THA



Fuente: Gómez, P. y Lupiáñez, J, 2007, p. 80.

Para Simon (1995) las situaciones que se plantean para el aprendizaje requieren que los estudiantes establezcan diversas conexiones y no simplemente apelar a la memoria o un proceso previamente esquematizado, señalando la probabilidad de que el aprendizaje se fomenta desafiando las concepciones del alumno utilizando una variedad de contextos. Además, menciona que una base amplia de situaciones que desafíen a los estudiantes, así como el conocimiento de las dificultades que se encuentran, permite propiciar el aprendizaje de forma eficaz, cuando se carece de un conocimiento más sólido.

Como la THA considera el recorrido que, supone el docente, llevará a los estudiantes a lograr un aprendizaje, se toman en cuenta la dirección, las actividades de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético, Simon (2014) partiendo de este hecho presenta las siguientes implicaciones:

- La buena pedagogía comienza con un objetivo conceptual claramente articulado.
- Aunque los estudiantes aprenden de maneras idiosincrásicas, hay puntos en común en sus formas de aprendizaje que pueden ser la base de la instrucción. Por lo tanto, se pueden hacer predicciones útiles sobre el aprendizaje de los estudiantes.
- La planificación de la instrucción implica una predicción informada sobre los posibles procesos de aprendizaje de los estudiantes.
- Basado en la predicción de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, la instrucción está diseñada para fomentar el aprendizaje.
- La trayectoria del aprendizaje de los estudiantes no es independiente de la intervención instructiva utilizada. El aprendizaje de los estudiantes se ve afectado significativamente por las oportunidades y limitaciones que brinda la estructura y el contenido de las lecciones de matemáticas.

■ El objetivo de aprendizaje

Partiendo del hecho de que no se debe limitar el aprendizaje a una simple reproducción de resultados previos, sino que debe generarse a partir de construcciones elaboradas por los mismos estudiantes, basadas en su conocimientos previos y conexiones entre los mismos, a través de situaciones que permitan construir nuevos conocimientos contextualizados, se requiere que el rol del docente sea activo y reflexivo, pues debe encargarse del diseño y coordinación de las situaciones de aprendizaje (Montiel, 2012).

Ubicados en el contexto de la educación costarricense, se selecciona como objetivo de aprendizaje el propuesto por el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP), que plantea “aplicar las razones trigonométricas básicas (seno, coseno, tangente) en diversos contextos” (MEP, 2012, p. 317), que corresponde al nivel de noveno año (estudiantes de 14 años aproximadamente).

Así, en el caso de la trigonometría desde esta visión Montiel (2012) propone “una construcción basada en prácticas y no sólo en conceptos, poniendo énfasis a la construcción de la relación y la funcionalidad trigonométricas y sus respectivos desarrollos del pensamiento geométrico-proporcional y analítico-funcional; en contraste con la visión tradicional sobre el aprendizaje de la razón y la función” (p. 23). La cual sintetiza en la Figura 2.

Figura 2. *Construcción del conocimiento trigonométrico.*

		PRÁCTICA SOCIAL	
		Anticipación	Predicción
Práctica de Referencia		Matematización de la Astronomía	Matematización de la Física
Contexto		Estático-proporcional	Dinámico-periódico
Lenguaje		Geométrico-numérico	Curvas-ecuaciones
Racionalidad		Helenística-euclidiana	Física-matemática
Herramienta		Razón trigonométrica	Función trigonométrica
Variables		$\text{sen } \theta$ (longitud) ϕ ángulo (en grados)	$\text{sen } x$ (distancia) x tiempo (radián-real)
Escala de tiempo		Finita	Infinitesimal-infinito

Fuente: Montiel, 2012.

Particularmente las orientaciones del programa oficial de matemáticas propuestas por el MEP respecto a la introducción de las razones trigonométricas en noveno año, pretende que “por medio de la experimentación y el diálogo se logre interiorizar la necesidad de aplicar razones trigonométricas básicas y relaciones trigonométricas” (MEP, 2012, p. 317). Además, sugiere, sin esto representar una obligación, que se puede realizar un trabajo con las mismas al incorporarlas dentro del contexto de la circunferencia “introducir el círculo trigonométrico y el uso de los radianes para establecer la conexión entre geometría analítica y trigonometría con el área de medidas” (p. 318). Lo cual permitiría establecer algunas conexiones en especial con lo referente a medidas, sin embargo, el enfoque que se le brinda a este tema, por lo general, consiste en reducirlo a un proceso aritmético mecánico y no a un uso del conocimiento para resolver problemas.

■ La Trayectoria Hipotética de Aprendizaje

Siguiendo el ciclo para crear una trayectoria hipotética de aprendizaje, primero fijamos el objetivo de aprendizaje, el cual corresponde a “aplicar las razones trigonométricas básicas (seno, coseno, tangente) en diversos contextos” (MEP, 2012, p.317), para posteriormente elaborar un plan de actividades que permitan el aprendizaje de dicho objetivo.

De este modo se decide adaptar la situación de aprendizaje que propone Montiel (2012), variando el contexto de la misma planteado por la autora con la intención de implementar una situación de aprendizaje, la cual, puede presentarse de manera un tanto natural a los estudiantes costarricenses del valle central, como lo es la toma de fotografías con su celular, cabe destacar que en general en esta región del país la mayoría de los estudiantes cuentan con acceso a un dispositivo con cámara, por ende la toma de fotografía con el mismo es una situación cotidiana para ellos. Asimismo, se involucra el contexto de un parque eólico pues estos se pueden observar a lo largo del país.

El plan para las actividades de aprendizaje busca provocar el trabajo matemático por parte de los estudiantes a través de la siguiente pregunta generadora ¿Cuál es la distancia a la que se debe tomar una fotografía, para obtener una imagen completa de una torre eólica? (ver Figura 3).

Figura 3. Representación de la situación en cuestión.



Fuente: Elaboración propia.

Una vez establecidas las tareas que conforman la situación de aprendizaje, se procede a definir las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje, esto se realiza para cada una de las tareas planteadas, considerando la experiencia previa con los estudiantes, errores comunes que suelen cometer en la resolución de ejercicios que involucran las razones trigonométricas, así como fenómenos identificados desde la teoría, como por ejemplo, el significado lineal de las razones trigonométricas reportado por Montiel (2012).

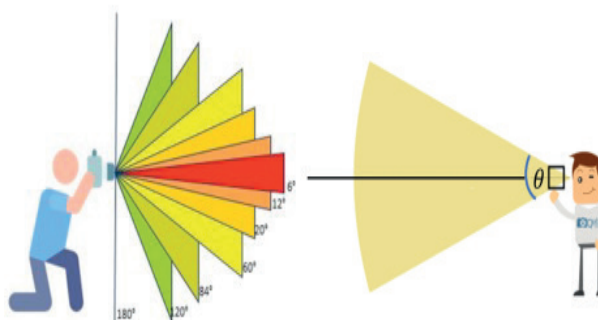
Finalmente se puso en práctica la situación didáctica propuesta por medio de la implementación de un taller, con docentes de matemáticas en el marco del RELME 34, el cual se llevó a cabo en forma virtual. En donde se analizó tanto la resolución de la situación didáctica, como la trayectoria hipotética planteada para la misma, a partir de dicha implementación se presentan los resultados del presente trabajo.

Sobre la situación de aprendizaje

Como ya se mencionó la situación de aprendizaje se enmarca en el contexto de la toma de una fotografía a una torre eólica, por lo que inicialmente se plantea la interrogante ¿Cuál es la distancia a la que se debe tomar una fotografía,

para obtener una imagen completa de la torre eólica? y como segundo interrogante se cuestiona si ¿Existe diferencia respecto de la distancia, si la fotografía se toma con dos celulares distintos? Ambas preguntas buscan generar un espacio donde el alumno se cuestione sobre la situación planteada desde su experiencia previa, pues si bien es cierto no todos los alumnos habrán intentado fotografiar una torre de estas, es probable que sí un objeto de gran dimensión. Posteriormente se toma en cuenta en la situación de aprendizaje un concepto propio de la fotografía como lo es el ángulo de visión de la cámara, el cual se refiere a la porción de lo que vemos por medio de la misma, es decir, lo que podemos captar en la fotografía que se desea tomar. Para la implementación de este concepto, se asumen algunas hipótesis adicionales, como por ejemplo que el celular se encuentra de manera vertical (perpendicular al suelo a cierta altura), por lo que su ángulo de visión se amplía o reduce de forma vertical (ver Figura 4). Además, de utilizar datos reales de dos dispositivos particulares un iPhone 11 con la cámara Ultra Wide con 120° de apertura y un iPhone 6S con una apertura de 60° .

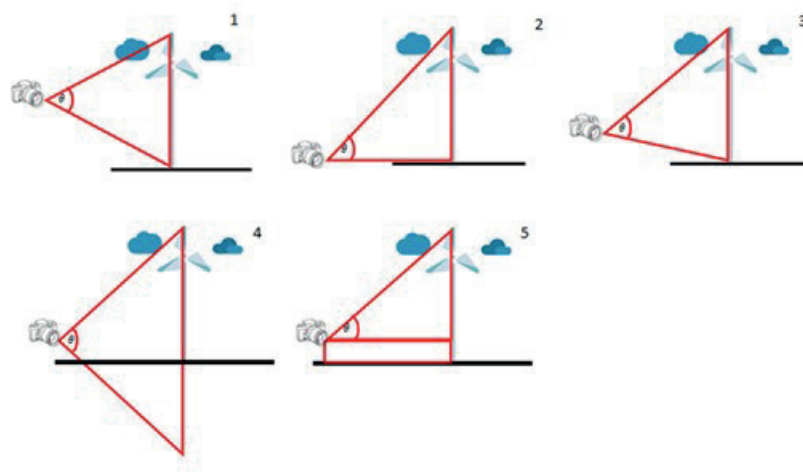
Figura 4. Representación del ángulo de visión.



Fuente: Elaboración propia.

Una vez implementado este concepto en la situación se solicita hacer un modelo de la situación, para lo cual la Figura 5 establece las hipótesis previas de las posibles respuestas por parte de los participantes.

Figura 5. Hipótesis de la THA de los posibles modelos de la situación.

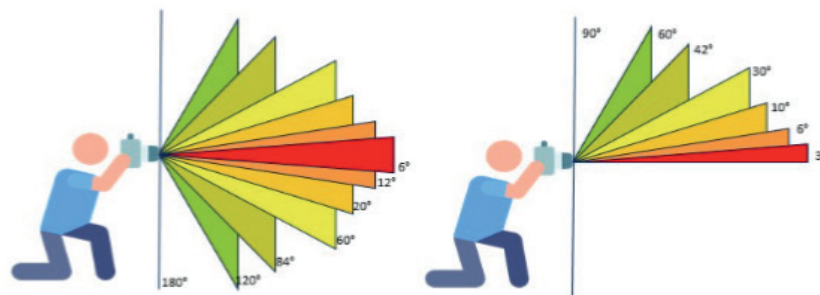


Fuente: Elaboración propia.

Ante tales posibles soluciones, la situación planteada en relación con el contexto cuestiona, ¿Si se modifica la altura en la que se coloca el celular, se podría reducir la distancia para tomar una fotografía completa de la torre? ¿Tendrá sentido ubicar el celular a más de 10 metros de altura, sin utilizar otros dispositivos o herramientas? Esto con la intencionalidad de que el estudiante descubra que existen restricciones asociadas al contexto, que pese a ser matemáticamente aceptables en el modelo, no son viables en el contexto de la situación.

Posteriormente se considera un caso particular del modelo realizado, al tomar una división del ángulo de apertura de la cámara (Figura 6), el cual se realiza con la intención de introducir un modelo geométrico asociado a la situación inicial, donde se puede reducir al considerar triángulos rectángulos.

Figura 6. División del ángulo de apertura.



Fuente: Elaboración propia.

La actividad se orienta a observar que, al cambiar la longitud del alguno de los catetos del triángulo rectángulo, también cambia la medida de dos de sus ángulos y la longitud de la hipotenusa. De modo que se busca encontrar algunas relaciones presentes entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Es decir, se busca establecer si se presenta una relación de algún tipo, por ejemplo, proporcional, lineal o cuadrática. Finalmente, a partir de las proporciones encontradas en la tarea previa, las cuales relacionan las longitudes de los lados del triángulo y un ángulo en un triángulo rectángulo, se definen éstas como razones trigonométricas.

■ Resultados

Debido a que cada una de las tareas asignadas en la situación de aprendizaje se plantean con una intencionalidad particular, inicialmente se pretendía desafiar a los estudiantes por medio del interrogante ¿Cuál es la distancia a la que se debe tomar una fotografía, para obtener una imagen completa de la torre eólica?, donde las respuestas esperadas dependen de la concepción del alumno sobre la situación presentada, ante lo cual las respuestas se pueden agrupar en los siguientes aspectos:

- Una distancia equivalente a la altura de la torre.
- Que la distancia depende del alcance de la cámara, la inclinación y altura de la misma.
- Se puede calcular la distancia mediante prueba y error, alejándose hasta lograr la foto deseada.

Por ejemplo, una de las respuestas de los participantes indica: “La distancia es relativa con respecto a la altura de la torre eólica, y la inclinación de la cámara del fotógrafo. Para mí es un estimado de 40 m”, lo cual coincide con las hipótesis planteadas para esta pregunta particular, dado que no todos los participantes descubren a priori las

necesidades y requerimientos del planteamiento propuesto. Sin embargo, ninguno de los participantes identificó inicialmente la posibilidad de utilizar razones trigonométricas para establecer la distancia consultada.

Ante el cuestionamiento ¿Existe diferencia respecto a la distancia, si la fotografía se toma con dos celulares distintos?, el 40% de los participantes argumentan que existe diferencia dependiendo de las características del teléfono, mientras que el 40% no identifica diferencia y un 20% de los participantes indican que si la distancia es grande ambos dispositivos pueden tomar la fotografía a la misma distancia.

Por otra parte, al implementar el concepto de ángulo de visión, con los celulares iPhone 11 con la cámara Ultra Wide con 120° de apertura y iPhone 6s con una apertura de 60° , e indagar sobre la distancia a la cual se debería colocar cada uno de los celulares para tomar una fotografía completa de la torre, se obtienen diversas respuestas. Entre ellos, la tercera parte de las respuestas obtenidas corresponde a las del iPhone 11 como tiene un ángulo más amplio, la distancia es más corta, el de iPhone 6s con apertura de 60° , debe estar a una distancia más amplia, es decir, a mayor ángulo menor distancia, por otra parte, con una sexta parte de las respuestas se alude a falta de datos y con la misma cantidad de respuestas se incurre en el fenómeno identificado como significado lineal de las razones trigonométricas, donde se indica si se toma en cuenta que están a la misma altura y posición el iPhone 6s debería estar al doble de la distancia.

Por otra parte, se obtienen respuestas que no consideran diferencia al incorporar el concepto mencionado o incorporan distintas colocaciones para el celular de modo que la fotografía sería distinta, tal es el caso de colocar el teléfono en la base de la torre mirando hacia arriba (Figura 7).

Figura 7. Vista de la torre desde la base.

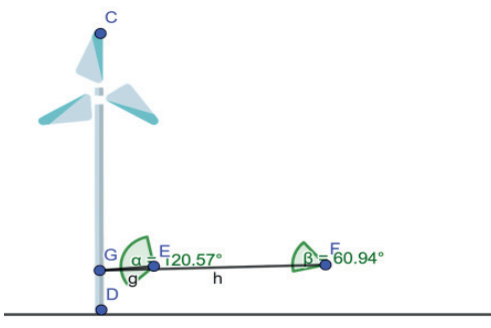
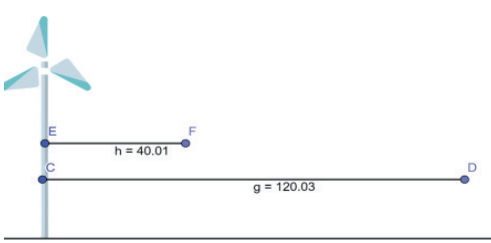
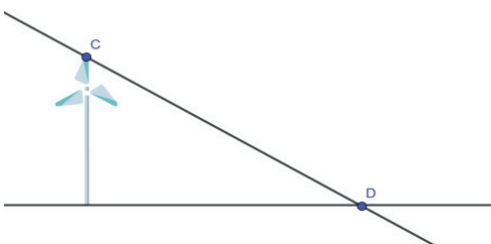
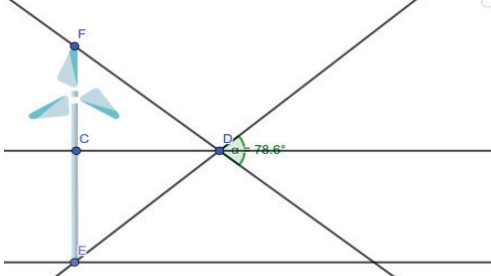


Fuente: Elaboración propia.

Respecto de la construcción del modelo, cabe destacar que se implementó por medio del uso de la herramienta GeoGebra, donde los participantes del taller representan en un applet una distancia apropiada a la que se deba ubicar cada una de las cámaras de los celulares (iPhone 11 y iPhone 6s) para poder tomar la fotografía, conociendo que la torre eólica tiene una altura aproximada de 69.3 metros (desde la base hasta el punto más alto donde llegan las aspas).

La Tabla 1 resume los principales resultados obtenidos durante la implementación de la situación de aprendizaje.

Tabla 1. Resultados obtenidos durante la aplicación de la situación de aprendizaje.

Respuestas de los participantes	Descripción
	<p>Respecto a este modelo consiste con una de las predicciones elaboradas en la Figura 4, donde se interpreta que hay una altura razonable para la ubicación del celular al tomar la fotografía.</p>
	<p>En este caso, pese a que no logra inferir el procedimiento realizado, los resultados obtenidos son consistentes con una de las hipótesis planteadas (ver Figura 4).</p>
	<p>En este caso, se puede apreciar que el modelo es consistente a una forma tradicional de resolver problemas con razones trigonométricas.</p>
	<p>En este caso, se deduce que quien realiza el modelo no considera la situación de manera integral, dado que se conoce que la altura de la torre es de 69,3m y por ende no es viable colocar el celular a la mitad de la altura de la misma, pues sin ayuda de algún instrumento una persona no alcanza dicha altura para tomar la foto.</p>

Fuente: Elaboración propia.

Para la siguiente parte de la situación de aprendizaje, inicialmente la solución depende del modelo establecido en la pregunta anterior, sin embargo, en cualquier caso, se puede recurrir a identificar un triángulo rectángulo adecuado. Por lo que se procede a generalizar el modelo, donde los participantes desde el primer momento identifican que el celular con apertura de 60° debe colocarse más lejos de la base de la torre respecto al celular con apertura de 120° .

En la siguiente sección, la intencionalidad de una de las tareas corresponde a que los participantes logran identificar que la relación en la situación planteada no es una relación lineal, ya que se buscaba que se evidenciara que si se duplica el ángulo la distancia no se duplica, con lo cual los participantes, lograron tal objetivo.

Otro aspecto a resaltar dentro de las intencionalidades de otra de las tareas es que se logrará evidenciar una relación entre el ángulo de inclinación y la longitud de la altura en un triángulo rectángulo, ya que esto sirve de puente para introducir que esa relación recibirá el nombre de razones trigonométricas.

Finalmente, al indagar sobre si los participantes encuentran alguna relación entre las longitudes de los lados y los ángulos de inclinación, se determina, que sí encuentran una relación con respuestas generales, como, por ejemplo: si, a la medida que aumenta el ángulo, aumenta la longitud del cateto opuesto (altura), pese a identificar alguna relación como la mencionada, ninguno de los participantes formalizó o vincula dicha relación con las razones trigonométricas.

■ Conclusiones

Al utilizar la trayectoria hipotética del aprendizaje (THA), el docente reflexiona y analiza sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje, donde debe ser un actor activo del aprendizaje, pues no solo debe limitar su actividad a la de transmitir un contenido, sino que debe generar espacios donde el alumno, por medio de la actividad descubra nuevos conocimientos, basado en sus conocimientos previos y este debe ser un aprendizaje contextualizado.

La gran ventaja del ciclo que tiene la THA, es que se puede modificar en cada parte del mismo, por ende, se ve alimentado cada vez que se aplica, incluso el plan del docente puede cambiarse total o parcialmente. En la presente implementación, a partir de lo observado en el taller, se sigue que:

Primero, las hipótesis planteadas en cada una de las actividades se cumplieron, total o parcialmente, por lo que no es necesario incorporar nuevas hipótesis a esta trayectoria, salvo si se modificará el contexto para adaptarlo a una población en particular.

Por otro lado, se logró evidenciar la necesidad de predecir los posibles caminos que recorre cada uno de los estudiantes para llegar a adquirir un conocimiento, además del reto que significa para los docentes identificar que el alumno que recorre una trayectoria distinta a la pensada previamente no necesariamente significa que esté en algo incorrecto.

Este análisis nos permitió recorrer las distintas fases de la THA, aunado a los conocimientos trigonométricos de interés, ubicando la situación de aprendizaje en un contexto donde la actividad matemática no se limita a identificar un triángulo rectángulo, donde se busca un valor faltante, sino que se presenta con ayuda de la geometría una situación integral, donde se predicen algunos posibles caminos para el aprendizaje. Priorizando el análisis de la relación no lineal entre la cuerda y el ángulo, estudiada en un contexto particular.

Se resalta que los hallazgos en nuestra implementación, los participantes en su mayoría a través de las diversas tareas planteadas fueron estableciendo un mejor modelo de la situación, pues como se suponía, no todos desde un primer momento identificaron la presencia de un triángulo rectángulo donde poder aplicar las razones

trigonométricas, esto a pesar de ser docentes de matemáticas y por ende se parte de la hipótesis que ellos deben conocer las razones trigonométricas básicas.

Finalmente, se destaca que este ciclo de aprendizaje apoyado por los resultados de investigación, brindan un espacio de análisis y reflexión sobre la práctica docente, sobre el ¿qué y cómo se enseña? Lo cual se considera muy valioso para desarrollar un proceso de enseñanza en relación con las razones trigonométricas y sería muy interesante aplicarlo en un entorno escolar.

■ Referencias

- Gómez, P. y Lupiáñez, J. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 1(2), 79-98.
- Ministerio de Educación Pública (2012). Programas de estudio de matemática. San José, Costa Rica: MEP
- Montiel, G. (2012). Desarrollo del pensamiento trigonométrico. Diaz desoci Santos.
- Scholz, O. (2020). *Desarrollo del pensamiento trigonométrico, en el tránsito de lo geométrico a lo variacional*. México DF (Tesis de Doctorado). Instituto Politécnico Nacional, México DF, México.
- Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Simon, M. (2014). Hipotetical Learning Trajectories in Mathematics Education. En Lerman, S. (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 272-274). Netherlands: Springer.

