UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
SISTEMA DE ESTUDIOS DE POSGRADO

OPTIMIZACIÓN DE LA ASIGNACIÓN DE PRIMAS DE SEGUROS UTILIZANDO METAHEURÍSTICAS

Trabajo final de investigación aplicada sometido a la consideración de la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Matemática para optar al grado y título de Maestría Académica en Ciencias Actuariales

SERGIO VILLALOBOS VARGAS

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio, Costa Rica

2025

Agradecimientos

Agradezco profundamente a mi tutora, MSc. Jenifer Acuña Larios, profesora de la Universidad de Costa Rica, por su guía y apoyo incondicional en el desarrollo de este Trabajo final de investigación . También extiendo mi agradecimiento a la Universidad de Costa Rica y a todos mis profesores, así como a mis familiares y amigos por su apoyo constante.

“Este trabajo final de investigación aplicada fue aceptada por la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Matemática de la Universidad de Costa Rica, como requisito parcial para optar al grado y título de Maestría Académica en Ciencias Actuariales.”

LUIS ALBERTO BARBOZA CHINCHILLA (FIRMA)
PERSONA FISICA, CPF-01-1109-0348.
Fecha declarada: 04/07/2025 09:16:57 PM

Dr. Luis Barboza Chinchilla
Representante de la Decana del Sistema de Estudios de Posgrado

JENNIFER DE LOS ANGELES ACUÑA LARIOS (FIRMA)
Firmado digitalmente por JENNIFER DE LOS ANGELES ACUÑA LARIOS (FIRMA)
Fecha: 2025.07.04 08:33:37 -06'00'

MSc. Jennifer Acuña Larios
Profesora Guía

OSCAR EVERARDO ROLDAN SANTAMARIA (FIRMA)
Nombre de reconocimiento (DN): serialNumber=CPF-01-0460-0052, sn=ROLDAN SANTAMARIA, givenName=OSCAR EVERARDO, c=CR, o=PERSONA FISICA, ou=CIUDADANO, cn=OSCAR EVERARDO ROLDAN SANTAMARIA (FIRMA)
Fecha: 2025.07.04 11:46:21 -06'00'

Dr. Oscar Roldán Santamaría
Lector

MSc. Sergio Russel Campos
Lector

DARIO ALBERTO MENA ARIAS (FIRMA)
Digitally signed by DARIO ALBERTO MENA ARIAS (FIRMA)
Date: 2025.07.07 10:36:05 -06'00'

Dr. Dario Mena Arias
Director del Programa de Posgrado en Matemática

Sergio Villalobos Vargas
Sustentante

Tabla de contenidos

Resumen

Este Trabajo final de investigación se centra en el desarrollo de una metodología para redistribuir técnicamente primas de seguros entre diferentes grupos de riesgo, bajo escenarios en los que se requiere asignar solidariamente un exceso proveniente de un grupo específico. El enfoque busca garantizar que dicha redistribución se realice de forma consistente y equitativa, tomando en cuenta restricciones estructurales y relaciones de dependencia entre los grupos.

Para ello, se evalúan tres métodos de optimización no lineal estocástica: Optimización por Enjambre de Partículas (PSO), Recocido Simulado (SA) y Gradiente Descendente (GD). Cada uno de estos enfoques es aplicado a una función objetivo diseñada para minimizar la diferencia con respecto a las primas originales, penalizar desbalances y considerar las correlaciones entre los grupos mediante un término basado en cópulas gaussianas. La selección de esta cópula se fundamenta en pruebas de ajuste a los datos mediante los criterios de información AIC y BIC.

El estudio se valida mediante un esquema de validación cruzada temporal, permitiendo evaluar la estabilidad y capacidad de generalización de los métodos a través de múltiples escenarios. Los resultados obtenidos muestran diferencias relevantes entre los métodos: PSO destaca por su rendimiento en términos de error cuadrático medio, mientras que SA y GD presentan ventajas al minimizar errores relativos.

Este trabajo ofrece un marco práctico y flexible para abordar problemas de redistribución de primas en seguros colectivos, especialmente en contextos donde se busca incorporar criterios técnicos de dependencia, equidad y consistencia actuarial.

Abstract

This thesis focuses on the development of a methodology to technically redistribute insurance premiums among different risk groups, under scenarios where a surplus must be distributed solidarity from a specific group. The approach seeks to ensure that such redistribution is performed consistently and equitably, considering structural constraints and dependency relationships between groups.

To this end, three stochastic nonlinear optimization methods are evaluated: Particle Swarm Optimization (PSO), Simulated Annealing (SA), and Gradient Descent (GD). Each of these methods is applied to an objective function designed to minimize deviations from original premiums, penalize imbalances, and incorporate group correlations through a copula-based dependency term. The choice of a Gaussian copula is based on model selection using AIC and BIC information criteria.

The study is validated using a temporal cross-validation scheme, assessing the robustness and generalization ability of the methods across multiple scenarios. The results highlight significant differences between the methods: PSO stands out for its performance in terms of mean squared error, while SA and GD show advantages in minimizing relative errors.

This work provides a practical and flexible framework for addressing premium redistribution problems in collective insurance, particularly in contexts that demand technical consistency, equity, and actuarial rigor.

Lista de tablas

1. Introducción

1.1. Justificación

La ciencia actuarial, como disciplina fundamental en la gestión de riesgos financieros, ha evolucionado significativamente desde sus inicios, ampliando su alcance más allá de los seguros de vida para abarcar todas las formas de gestión de riesgos financieros. Este campo interdisciplinario, sólidamente basado en las matemáticas y la estadística, desempeña un papel crucial en la evaluación y mitigación de riesgos, contribuyendo de manera esencial a la estabilidad y sostenibilidad financiera.

Con la apertura del mercado de seguros en Costa Rica en el 2008, la industria ha transitado de un monopolio a un entorno más competitivo y diversificado. Este cambio ha incrementado la complejidad y variedad de productos ofrecidos, lo que demanda métodos más robustos y sofisticados para la modelización de riesgos y la determinación de primas. En este contexto emergente, donde las dinámicas y perfiles de riesgo pueden diferir sustancialmente de los mercados más establecidos, es imperativo desarrollar enfoques avanzados que permitan una evaluación precisa y equitativa de los riesgos.

El presente trabajo se centra en la implementación de métodos avanzados de optimización para la asignación de primas de seguros, con un enfoque principal en la Optimización por Enjambre de Partículas (PSO). PSO, una técnica inspirada en la inteligencia de enjambre, ofrece un enfoque innovador para abordar problemas complejos en el ámbito asegurador, donde múltiples variables y restricciones deben ser consideradas de manera simultánea. Sin embargo, este estudio también explorará otros métodos de optimización, como el Recocido Simulado (SA) y Algoritmos Genéticos, para eventualmente realizar una comparación exhaustiva de su eficacia.

La importancia de explorar y aplicar estos métodos radica en su potencial para ofrecer soluciones más eficientes y equitativas en comparación con las técnicas tradicionales. Además, la aplicación de una redistribución adecuada de los riesgos mediante modelización avanzada es crucial para asegurar que las primas reflejen fielmente el nivel de riesgo asociado a cada grupo de asegurados. Esto no solo promueve la equidad entre los asegurados, sino que también fortalece la salud financiera de las compañías de seguros, mitigando el riesgo de insuficiencia tarifaria o sobreprecio, y contribuyendo a la estabilidad del mercado asegurador en su conjunto.

Este estudio adopta un enfoque cuantitativo, utilizando datos del mercado de seguros costarricense, y aplica técnicas estadísticas y actuariales avanzadas para modelar y analizar dichos datos. La combinación de PSO y otros métodos de optimización, junto con el uso de cópulas matemáticas para modelar dependencias, ofrece un marco metodológico robusto para optimizar la distribución de primas, abordando las complejidades inherentes a los datos de siniestralidad y permitiendo una gestión de riesgos más eficiente y equitativa.

La relevancia teórica y práctica de este estudio es multifacética. Teóricamente, contribuye al cuerpo de conocimiento en ciencias actuariales, proporcionando una comprensión más profunda de la aplicación de métodos avanzados de optimización en la modelización de riesgos de seguros. Prácticamente, los hallazgos de este estudio pueden tener aplicaciones directas en la industria aseguradora, mejorando la asignación de primas y la gestión de riesgos, y beneficiando a los consumidores mediante precios más justos y productos de seguros mejor adaptados a sus necesidades.

La estructura de este trabajo se organiza de la siguiente manera: tras esta introducción, se presenta un marco teórico detallado, seguido de la metodología adoptada. Posteriormente, se analizan los datos y se presentan los resultados obtenidos. Finalmente, se discuten las conclusiones, implicaciones y recomendaciones basadas en los hallazgos del estudio. Este enfoque integral asegura que la investigación sea relevante, rigurosa y de gran valor tanto para la comunidad académica como para los profesionales en el campo de las ciencias actuariales y la industria aseguradora.

1.2. Planteamiento

En el contexto de la asignación de primas en seguros, es esencial garantizar tanto la solvencia financiera de las compañías aseguradoras como la equidad entre los asegurados. En Costa Rica, la apertura del mercado de seguros ha aumentado la competencia y la diversidad de productos, lo que requiere métodos avanzados para la determinación de primas.

Este Trabajo final de investigación propone la aplicación de la Optimización por Enjambre de Partículas (PSO) como método principal para optimizar la asignación de primas, complementado con el uso de cópulas matemáticas para modelar las dependencias entre diferentes grupos de riesgo. Además, se comparará la eficacia de PSO con otros métodos de optimización, como el Recocido Simulado (SA) y los Algoritmos Genéticos.

El enfoque cuantitativo del estudio se basará en datos del mercado de seguros costarricense, permitiendo desarrollar y validar modelos que mejoren la precisión y equidad en la asignación de primas. Esta investigación no solo contribuirá al avance teórico en ciencias actuariales, sino que también ofrecerá mejoras prácticas para la gestión de riesgos en la industria aseguradora.

1.3. Objetivo General

El objetivo general de este Trabajo final de investigación es evaluar comparativamente tres enfoques de optimización estocástica —*Optimización por Enjambre de Partículas* (PSO), *Recocido Simulado* (SA) y *Gradiente Descendente* (GD)— aplicados al ajuste de primas en esquemas de seguros con múltiples grupos de riesgo. Se busca analizar su desempeño en términos de precisión absoluta y relativa, estabilidad y cumplimiento de restricciones técnicas, con el fin de identificar cuál método resulta más adecuado según distintos objetivos de redistribución.

1.4. Objetivos Específicos

Los objetivos específicos de la investigación son los siguientes:

- Modelar las dependencias entre los distintos grupos asegurados utilizando cópulas matemáticas ajustadas a los datos históricos.
- Implementar y comparar los métodos de *Optimización por Enjambre de Partículas* (PSO), *Recocido Simulado* (SA) y *Gradiente Descendente* (GD) para optimizar la asignación de primas.
- Evaluar el desempeño de cada método mediante métricas cuantitativas como MSE, RMSE y MAPE, analizando sus ventajas y limitaciones en la redistribución de primas.
- Analizar el impacto de las correlaciones de riesgo en la distribución de primas ajustadas y la estabilidad de los resultados obtenidos con cada método.

2. Marco Teórico

2.1. Introducción a la Ciencia Actuarial

La ciencia actuarial es una disciplina fundamental en la evaluación y gestión de riesgos financieros, utilizando métodos matemáticos y estadísticos para predecir y mitigar el impacto de eventos futuros inciertos. Su aplicación principal ha sido históricamente en los sectores de seguros y pensiones, aunque su uso se ha extendido a otras áreas como la finanza moderna y la justicia penal.

2.1.1. Historia y Evolución de la Ciencia Actuarial

La necesidad de una mejor comprensión de la capacidad de establecer fondos para eventos futuros contingentes surgió en el siglo XVII, principalmente en el sector de seguros de vida, donde la magnitud de la responsabilidad futura era conocida, pero su momento no lo era. Para resolver este desafío, se desarrollaron modelos lineales que, utilizando datos y experiencias pasadas, podían prever cuándo se materializaría la responsabilidad futura y calcular su valor presente mediante tasas de descuento prudentes
.

Uno de los hitos importantes en la evolución de la ciencia actuarial fue la formación del Instituto de Actuarios en Inglaterra en 1848, consolidando la profesión y sus prácticas. En los Estados Unidos, la ciencia actuarial comenzó a formalizarse a mediados del siglo XIX, con la creación de la Society of Actuaries en 1889 .

A lo largo del siglo XX, los actuarios desarrollaron técnicas que luego serían reconocidas en la teoría financiera moderna. Sin embargo, por diversas razones históricas, estas técnicas no recibieron el reconocimiento inmediato que merecían. Fue en las décadas de 1980 y 1990 cuando los actuarios comenzaron a integrar más activamente las teorías financieras y los métodos estocásticos en sus modelos .

2.1.2. Aplicaciones Modernas y Avances

Hoy en día, la ciencia actuarial no solo se aplica en seguros y pensiones, sino también en áreas como la gestión del riesgo climático, la inteligencia artificial y el análisis de datos. Los actuarios juegan un papel clave en el diseño de productos financieros, el cálculo de primas, y la derivación de requerimientos de capital y reservas .

La adopción de modelos más sofisticados, que combinan teorías financieras con métodos actuariales tradicionales, ha permitido a los actuarios abordar problemas complejos con mayor precisión y eficacia. Esta evolución continua subraya la importancia de la innovación y la adaptación en la profesión actuarial para enfrentar los desafíos dinámicos del mundo financiero moderno .

2.2. Fundamentos de la Asignación de Primas de Seguros

La asignación de primas de seguros es fundamental para garantizar la solvencia de las aseguradoras y la equidad entre los asegurados. Los principios y métodos utilizados en la determinación de las primas son esenciales para este proceso.

2.2.1. Principios Básicos de la Asignación de Primas

La prima de un seguro es el pago realizado por el asegurado para obtener cobertura contra un riesgo específico. Los principios fundamentales que guían la determinación de esta prima incluyen:

- **Equidad y Adecuación**: Las primas deben reflejar de manera justa el nivel de riesgo asociado a cada grupo asegurado, evitando subsidios cruzados injustos entre diferentes categorías de riesgo. Esto se logra mediante modelos actuariales que evalúan la probabilidad y el impacto financiero de los riesgos cubiertos .

- **Simplicidad y Comprensibilidad**: Los métodos de asignación de primas deben ser fáciles de administrar y explicar. Un enfoque simple pero efectivo facilita la comunicación con los asegurados y la implementación de los modelos de primas .

- **Estabilidad y Sensibilidad**: La asignación de primas debe lograr un equilibrio entre estabilidad y sensibilidad a los cambios en el perfil de riesgo del asegurado. Esto implica utilizar métodos que mitiguen la volatilidad año tras año, asegurando que las primas sean estables pero también suficientemente sensibles para reflejar los cambios en el riesgo .

- **Incentivación del Comportamiento Seguro**: Un sistema de primas bien diseñado puede incentivar comportamientos que reduzcan el riesgo, como la implementación de medidas de seguridad y control de pérdidas por parte de los asegurados. Esto no solo reduce el riesgo para la aseguradora, sino que también puede resultar en primas más bajas para los asegurados que adoptan buenas prácticas de gestión del riesgo .

2.2.2. Métodos de Cálculo de Primas

Existen varios métodos para calcular las primas de seguros, cada uno con sus ventajas y desventajas:

- **Métodos Basados en la Exposición**: Este enfoque asigna costos basados en un porcentaje del total de exposiciones, como la nómina, los ingresos o la cantidad de unidades aseguradas. Es un método sencillo y directo, adecuado para riesgos homogéneos .

- **Métodos Sensibles a las Pérdidas**: Utilizan la experiencia histórica de pérdidas para ajustar las primas futuras. Este método es más equitativo en situaciones donde los riesgos varían significativamente entre diferentes unidades aseguradas, pero puede ser más complejo de administrar .

- **Principios Matemáticos de Cálculo de Primas**: Desde una perspectiva matemática, las primas se calculan utilizando funciones que asignan un valor numérico al riesgo asegurado. Estas funciones deben cumplir con propiedades deseables, como la aditividad y la no-negatividad, para asegurar que las primas sean suficientes y justas .

2.2.3. Aplicaciones y Desafíos

La asignación de primas enfrenta varios desafíos, especialmente en mercados emergentes como Costa Rica, donde la diversidad de productos y perfiles de riesgo requiere métodos avanzados y personalizados. La integración de técnicas modernas, como la utilización de cópulas matemáticas para modelar dependencias entre riesgos, y la implementación de algoritmos de optimización como la Optimización por Enjambre de Partículas (PSO), puede mejorar significativamente la precisión y equidad en la asignación de primas .

2.3. Optimización en la Asignación de Primas

La optimización en la asignación de primas de seguros busca equilibrar la rentabilidad de las aseguradoras con la equidad para los distintos grupos asegurados. Los métodos de optimización son esenciales para encontrar una estructura de primas que garantice la sostenibilidad financiera de la aseguradora, minimizando la volatilidad en los resultados técnicos y reduciendo la exposición a desviaciones significativas en la siniestralidad. La reducción de estos riesgos puede evaluarse a través de indicadores como la estabilidad de las primas a lo largo del tiempo, la disminución de la variabilidad en la siniestralidad de los grupos asegurados y la reducción del error en la estimación de las primas esperadas.

2.3.1. Métodos de Optimización en la Asignación de Primas

Optimización por Enjambre de Partículas (PSO)

La Optimización por Enjambre de Partículas (PSO) es un método inspirado en el comportamiento colectivo de enjambres en la naturaleza, como bandadas de aves o cardúmenes de peces. PSO es utilizado para buscar óptimos en espacios de soluciones multidimensionales, haciendo que cada partícula.ªjuste su posición en el espacio de búsqueda basándose en su experiencia personal y la de sus vecinos. Este método es particularmente útil para problemas complejos donde la función objetivo no es lineal ni diferenciable .

Recocido Simulado (SA)

El Recocido Simulado es una técnica de optimización basada en el proceso de enfriamiento de los metales. Este método explora el espacio de soluciones permitiendo, en etapas iniciales, la aceptación de soluciones peores para evitar quedar atrapado en óptimos locales. A medida que avanza el proceso, se reduce la probabilidad de aceptar peores soluciones, enfocándose en la búsqueda de un óptimo global. SA es especialmente adecuado para problemas donde la función objetivo tiene múltiples máximos y mínimos locales .

Algoritmos Genéticos (GA)

Los Algoritmos Genéticos son técnicas de optimización basadas en los principios de la selección natural y la genética. Utilizan operaciones como la selección, cruce y mutación para evolucionar una población de soluciones hacia un óptimo. GA es eficaz para problemas de optimización no lineales y puede manejar grandes espacios de búsqueda con múltiples restricciones .

2.3.2. Aplicaciones Prácticas

La aplicación de estos métodos de optimización en la asignación de primas de seguros permite a las aseguradoras diseñar estructuras de primas que reflejen mejor el riesgo de cada grupo asegurado y aseguren una distribución financiera sostenible. Por ejemplo, en la optimización de primas para seguros de automóviles, se pueden utilizar datos históricos de siniestralidad y perfiles de riesgo para ajustar dinámicamente las primas, reduciendo la volatilidad en los resultados técnicos de la aseguradora y mejorando su capacidad de cubrir obligaciones futuras .

2.3.3. Desafíos y Consideraciones

La implementación de métodos de optimización en la asignación de primas presenta varios desafíos. Es crucial contar con datos de alta calidad y modelos precisos que reflejen las realidades del mercado. Además, es importante equilibrar la complejidad del modelo con la capacidad de las aseguradoras para implementar y mantener estas soluciones. La colaboración entre actuarios, expertos en datos y desarrolladores de software es esencial para superar estos desafíos y maximizar los beneficios de la optimización en la asignación de primas .

2.4. Metaheurísticas en la Optimización

Las metaheurísticas son un conjunto de métodos de optimización de alto nivel que proporcionan directrices o estrategias para desarrollar algoritmos heurísticos que pueden encontrar soluciones suficientemente buenas para problemas de optimización complejos. Estas técnicas son especialmente útiles cuando los problemas son difíciles de resolver mediante métodos exactos debido a su alta dimensionalidad o la presencia de múltiples óptimos locales.

2.4.1. Introducción a las Metaheurísticas

Las metaheurísticas son técnicas de optimización que se sitúan en un nivel superior, por encima de los algoritmos heurísticos específicos. Son problem-agnósticas, lo que significa que pueden aplicarse a una amplia variedad de problemas de optimización sin estar diseñadas específicamente para un problema en particular. Algunos ejemplos destacados de metaheurísticas incluyen los algoritmos genéticos, la optimización por enjambre de partículas (PSO), el recocido simulado (SA) y la optimización por colonia de hormigas (ACO) .

2.4.2. Características Principales

Las metaheurísticas se caracterizan por dos componentes fundamentales: la intensificación y la diversificación. La intensificación se refiere a la explotación de regiones prometedoras del espacio de búsqueda para encontrar soluciones óptimas locales, mientras que la diversificación se centra en la exploración de nuevas áreas del espacio de búsqueda para evitar quedar atrapado en óptimos locales. Este equilibrio entre intensificación y diversificación es crucial para el éxito de las metaheurísticas .

2.4.3. Clasificación de Metaheurísticas

Las metaheurísticas pueden clasificarse en dos categorías principales: metaheurísticas basadas en trayectorias y metaheurísticas poblacionales.

Metaheurísticas Basadas en Trayectorias

Estas técnicas se enfocan en una sola solución y la mejoran iterativamente. Ejemplos incluyen el recocido simulado (SA) y la búsqueda tabú (TS). Estas técnicas son efectivas para problemas donde una buena exploración del espacio de búsqueda es crucial para encontrar soluciones óptimas .

Metaheurísticas Poblacionales

Estas técnicas operan sobre un conjunto de soluciones simultáneamente, permitiendo una mejor exploración del espacio de búsqueda. Ejemplos incluyen los algoritmos genéticos (GA) y la optimización por enjambre de partículas (PSO). Las técnicas poblacionales son especialmente útiles para problemas complejos donde es necesario mantener la diversidad de soluciones para evitar el estancamiento en óptimos locales .

2.4.4. Ejemplos de Metaheurísticas Comunes

Algoritmos Genéticos (GA)

Los GA están inspirados en los principios de la evolución natural y utilizan operaciones como la selección, el cruce y la mutación para evolucionar una población de soluciones hacia el óptimo. Son efectivos para problemas de optimización no lineales y con múltiples restricciones .

Optimización por Enjambre de Partículas (PSO)

PSO simula el comportamiento social de los enjambres, como bandadas de aves, donde cada partícula ajusta su posición en el espacio de búsqueda basándose en su experiencia y la de sus vecinos. Es útil para problemas donde la función objetivo no es lineal ni diferenciable .

Recocido Simulado (SA)

SA se basa en el proceso de enfriamiento de los metales y permite la aceptación de soluciones peores en las etapas iniciales para evitar quedar atrapado en óptimos locales. A medida que avanza el proceso, se reduce la probabilidad de aceptar peores soluciones, enfocándose en la búsqueda de un óptimo global .

Optimización por Colonia de Hormigas (ACO)

ACO está inspirada en el comportamiento de las hormigas para encontrar las rutas más cortas entre sus colonias y fuentes de alimento. Utiliza feromonas para guiar la búsqueda de soluciones, lo que es particularmente útil para problemas de rutas y grafos .

2.4.5. Aplicaciones de las Metaheurísticas

Las metaheurísticas se han aplicado con éxito en diversas áreas, incluyendo:

- **Optimización de Redes y Telecomunicaciones**: Para la planificación y gestión de redes.
- **Logística y Gestión de la Cadena de Suministro**: Para la optimización de rutas y la gestión de inventarios.
- **Ingeniería y Diseño**: Para la optimización de diseños estructurales y mecánicos.
- **Finanzas y Economía**: Para la optimización de carteras y la gestión del riesgo .

2.4.6. Desafíos y Oportunidades

A pesar de su éxito, las metaheurísticas enfrentan varios desafíos, como la falta de un marco teórico unificado que explique su rendimiento en diferentes problemas y la necesidad de métodos más robustos para garantizar la convergencia y la calidad de las soluciones. Sin embargo, continúan siendo una herramienta poderosa para abordar problemas de optimización complejos, y la investigación en este campo sigue evolucionando rápidamente .

2.4.7. Nuevas Tendencias en Metaheurísticas

La investigación en metaheurísticas sigue avanzando, incorporando nuevas técnicas y combinaciones de métodos para mejorar la eficiencia y efectividad de estos algoritmos. Algunas de las tendencias actuales incluyen:

Metaheurísticas Híbridas

La combinación de diferentes metaheurísticas para aprovechar las fortalezas de cada una y compensar sus debilidades. Por ejemplo, la combinación de PSO con recocido simulado o ACO con algoritmos genéticos puede mejorar la capacidad de exploración y explotación simultáneamente .

Metaheurísticas Paralelas y Distribuidas

Implementación de metaheurísticas en plataformas paralelas y distribuidas para aprovechar el poder de procesamiento de múltiples núcleos y nodos. Esto es especialmente útil para problemas de gran escala que requieren una gran cantidad de recursos computacionales .

Metaheurísticas Basadas en Aprendizaje Automático

Integración de técnicas de aprendizaje automático para adaptar dinámicamente los parámetros de las metaheurísticas y mejorar su rendimiento. El uso de redes neuronales y algoritmos de aprendizaje profundo puede proporcionar una ventaja significativa en la optimización de problemas complejos .

2.5. Optimización por Enjambre de Partículas (PSO)

La Optimización por Enjambre de Partículas (PSO) es una técnica de optimización inspirada en el comportamiento social de los enjambres, como bandadas de aves o cardúmenes de peces. Introducida por Kennedy y Eberhart en 1995, PSO ha evolucionado significativamente, aplicándose con éxito en una amplia variedad de campos, desde la ingeniería hasta las finanzas.

2.5.1. Introducción a PSO

PSO es una metaheurística que simula el comportamiento social de los enjambres. Cada partícula en el enjambre representa una posible solución al problema de optimización. Las partículas se mueven a través del espacio de búsqueda influenciadas por su experiencia personal y la de sus vecinos, permitiendo una exploración eficaz y eficiente del espacio de soluciones. PSO es particularmente útil para problemas donde la función objetivo no es lineal ni diferenciable .

2.5.2. Fundamentos Teóricos de PSO

El algoritmo PSO se basa en la actualización iterativa de las posiciones y velocidades de las partículas. Cada partícula i tiene una posición $x_i(t)$ y una velocidad $v_i(t)$ en el tiempo t. Las ecuaciones de actualización son:

$$v_i(t+1) = wv_i(t) + c_1r_1(p_i - x_i(t)) + c_2r_2(g - x_i(t))$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1)$$

donde: - w es el factor de inercia, que controla la influencia de la velocidad previa de la partícula. - c_1 y c_2 son los coeficientes de aceleración que determinan la influencia de las mejores posiciones personal y global. - r_1 y r_2 son números aleatorios entre 0 y 1. - p_i es la mejor posición conocida de la partícula i. - g es la mejor posición global conocida por el enjambre .

2.5.3. Variantes y Extensiones de PSO

Desde su introducción, PSO ha visto numerosas mejoras y variantes para abordar sus limitaciones. Algunas de las más notables incluyen: - **PSO con Velocidad Adaptativa**: Ajuste dinámico de w, c_1 y c_2 para mejorar la exploración y explotación. - **PSO Multiobjetivo**: Extensiones que permiten manejar múltiples objetivos simultáneamente, utilizando técnicas como PSO Multiobjetivo (MOPSO). - **PSO Híbrido**: Combinación con otros algoritmos como GA o SA para mejorar el rendimiento y evitar la convergencia prematura .

2.5.4. Aplicaciones de PSO

PSO se ha aplicado exitosamente en diversas áreas, incluyendo: - **Ingeniería y Diseño**: Optimización de estructuras y sistemas mecánicos, mejorando la eficiencia y reduciendo costos. - **Finanzas**: Optimización de carteras y gestión de riesgos, proporcionando soluciones robustas y eficientes para problemas financieros complejos. - **Biología Computacional**: Análisis de secuencias genéticas y modelado de sistemas biológicos, ayudando a entender mejor los procesos biológicos y a desarrollar nuevas terapias. - **Redes y Telecomunicaciones**: Optimización de redes y gestión de tráfico, mejorando la calidad del servicio y reduciendo la congestión .

2.5.5. Desempeño y Comparación

El desempeño de PSO ha sido ampliamente estudiado y comparado con otras técnicas de optimización. PSO es conocido por su simplicidad y eficiencia en la búsqueda de soluciones óptimas. Sin embargo, puede sufrir de convergencia prematura y quedar atrapado en óptimos locales. Comparado con GA y SA, PSO generalmente requiere menos parámetros y es más fácil de implementar, pero su desempeño puede depender fuertemente de la configuración de sus parámetros .

2.5.6. Implementación de PSO

Implementar PSO implica varios pasos: 1. **Definición de la Función Objetivo**: Especificar la función que se desea optimizar y las restricciones del problema. 2. **Inicialización**: Generar una población inicial de partículas con posiciones y velocidades aleatorias dentro del espacio de búsqueda. 3. **Iteración**: Actualizar las posiciones y velocidades de las partículas usando las ecuaciones de PSO, evaluar las nuevas posiciones y actualizar las mejores posiciones locales y globales. 4. **Criterio de Convergencia**: Continuar iterando hasta alcanzar un criterio de convergencia predefinido o un número máximo de iteraciones .

2.5.7. Desafíos y Oportunidades en PSO

A pesar de su éxito, PSO enfrenta varios desafíos, incluyendo: - **Convergencia Prematura**: PSO puede quedar atrapado en óptimos locales, especialmente en problemas de alta dimensionalidad. - **Sintonización de Parámetros**: La elección de w, c_1, y c_2 es crucial para el rendimiento de PSO y puede requerir un ajuste cuidadoso. - **Robustez**: Asegurar que PSO funcione bien en una amplia gama de problemas requiere variantes más robustas y técnicas avanzadas.

Las oportunidades futuras incluyen el desarrollo de variantes más robustas, la integración con técnicas de aprendizaje automático para mejorar el ajuste de parámetros y la adaptabilidad del algoritmo, y la aplicación de PSO a nuevos dominios y problemas .

2.5.8. Conclusiones sobre PSO

PSO es una herramienta poderosa y flexible para la optimización, aplicable en una amplia variedad de dominios. Su simplicidad y efectividad lo hacen una opción atractiva, aunque se requiere atención para ajustar adecuadamente sus parámetros y evitar problemas comunes como la convergencia prematura .

2.6. Recocido Simulado (SA)

El Recocido Simulado (Recocido Simulado, SA) es un algoritmo de optimización estocástica inspirado en el proceso de recocido en metalurgia, donde un material se calienta y luego se enfría lentamente para minimizar su energía interna y alcanzar un estado de equilibrio de mínima energía. Introducido por Kirkpatrick et al. en 1983, SA ha demostrado ser una técnica eficaz para resolver problemas de optimización tanto discretos como continuos.

2.6.1. Principios y Fundamentos del SA

El principio básico del recocido simulado se deriva del método de Metropolis, utilizado para simular el comportamiento de un sistema físico a temperatura constante. En el contexto de optimización, SA busca la minimización de una función objetivo $f(x)$ mediante la generación de una secuencia de soluciones que exploran el espacio de búsqueda. Este proceso es controlado por un parámetro denominado temperatura (T), que decrece gradualmente durante la ejecución del algoritmo .

El algoritmo de SA se basa en los siguientes pasos:

1. **Inicialización**: Se elige una solución inicial x_0 y una temperatura inicial T_0.

2. **Generación de Vecinos**: Se genera una nueva solución x' en el vecindario de la solución actual x.

3. **Evaluación de la Solución**: Se calcula el cambio en la función objetivo $\Delta E = f(x') - f(x)$.

4. **Aceptación de la Solución**: La nueva solución x' se acepta con una probabilidad $P(x \to x') = \exp\left(-\frac{\Delta E}{T}\right)$ si $\Delta E > 0$, o se acepta directamente si $\Delta E \leq 0$.

5. **Actualización de la Temperatura**: La temperatura se reduce según una programación de enfriamiento predefinida $T_{k+1} = \alpha T_k$, donde α es un factor de enfriamiento entre 0 y 1.

6. **Iteración**: El proceso se repite hasta que la temperatura alcanza un valor mínimo preestablecido o se cumple un criterio de parada.

.

2.6.2. Ecuaciones y Algoritmos Fundamentales

La aceptación de soluciones peores es una característica clave de SA, que permite al algoritmo escapar de óptimos locales. La probabilidad de aceptación de una solución peor está dada por la ecuación de Metropolis:

$$P(x \to x') = \exp\left(\frac{-\Delta E}{T}\right)$$

Esta ecuación implica que a temperaturas altas, el algoritmo acepta soluciones peores con mayor probabilidad, promoviendo la exploración del espacio de búsqueda. A medida que la temperatura disminuye, la probabilidad de aceptar soluciones peores también disminuye, promoviendo la explotación de soluciones cercanas al óptimo actual .

2.6.3. Programación de Enfriamiento

La programación de enfriamiento es crucial para el desempeño de SA. Algunas estrategias comunes incluyen:

- **Enfriamiento Lineal**: $T_{k+1} = T_k - \beta$, donde β es una constante pequeña.
- **Enfriamiento Geométrico**: $T_{k+1} = \alpha T_k$, donde α es típicamente 0.8 a 0.99.
- **Enfriamiento Logarítmico**: $T_{k+1} = T_0 / \log(k+1)$.

La elección de la programación de enfriamiento puede afectar significativamente la eficiencia del algoritmo y su capacidad para encontrar soluciones óptimas globales .

2.6.4. Aplicaciones del SA

SA se ha aplicado exitosamente en diversos campos, tales como:

- **Optimización de Portafolios**: SA ha sido utilizado para optimizar la asignación de activos en portafolios financieros, equilibrando el retorno y el riesgo.
- **Diseño de Redes**: Optimización del diseño de redes de telecomunicaciones para mejorar la eficiencia y reducir costos.
- **Problemas de Ruteo**: Solución de problemas complejos de ruteo de vehículos y planificación logística.
- **Biología Computacional**: Aplicaciones en el modelado de estructuras moleculares y análisis de secuencias genéticas.

.

2.6.5. Desempeño y Comparación

El desempeño de SA es generalmente robusto debido a su capacidad para escapar de óptimos locales. Comparado con otros algoritmos de optimización, SA es notablemente simple de implementar y ajusta pocos parámetros. Sin embargo, la eficiencia del algoritmo depende en gran medida de la programación de enfriamiento y del tiempo de cómputo permitido. SA es particularmente efectivo para problemas de gran escala y alta complejidad donde otras técnicas pueden fallar .

2.6.6. Gradiente Descendente

El algoritmo de Gradiente Descendente es un método de optimización iterativo ampliamente utilizado en aprendizaje automático y estadísticas para minimizar funciones de costo. Este algoritmo es fundamental en la capacitación de modelos de aprendizaje profundo, regresión lineal, y otras aplicaciones de optimización.

Definición y Fundamentos Matemáticos

El objetivo del Gradiente Descendente es encontrar el mínimo de una función de costo $J(\theta)$, donde θ representa los parámetros del modelo. La función de costo $J(\theta)$ mide el error entre las predicciones del modelo y los valores reales. La actualización de los parámetros θ en el Gradiente Descendente se realiza mediante la fórmula:

$$\theta := \theta - \alpha \nabla J(\theta)$$

donde:

- θ es el vector de parámetros.
- α es la tasa de aprendizaje (un valor positivo pequeño).
- $\nabla J(\theta)$ es el gradiente de la función de costo con respecto a θ.

El gradiente $\nabla J(\theta)$ se define como el vector de derivadas parciales de J con respecto a cada componente de θ:

$$\nabla J(\theta) = \left[\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_1}, \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_2}, \ldots, \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_n} \right]$$

Tipos de Gradiente Descendente

Gradiente Descendente de Lote (Batch Gradient Descent) En el Gradiente Descendente de Lote, el gradiente se calcula utilizando todo el conjunto de datos. La actualización de los parámetros se realiza después de procesar todos los ejemplos de entrenamiento:

$$\theta := \theta - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \nabla J(\theta; x^{(i)}, y^{(i)})$$

donde m es el número de ejemplos de entrenamiento.

Gradiente Descendente Estocástico (Stochastic Gradient Descent, SGD) El Gradiente Descendente Estocástico actualiza los parámetros para cada ejemplo de entrenamiento individual. Aunque puede ser más ruidoso y menos estable que el Gradiente Descendente de Lote, es más rápido para grandes conjuntos de datos y puede escapar de óptimos locales:

$$\theta := \theta - \alpha \nabla J(\theta; x^{(i)}, y^{(i)})$$

Gradiente Descendente Mini-lote (Mini-batch Gradient Descent) El Gradiente Descendente Mini-lote combina ambos enfoques anteriores. El conjunto de datos se divide en mini-lotes, y la actualización de los parámetros se realiza para cada mini-lote:

$$\theta := \theta - \alpha \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \nabla J(\theta; x^{(i)}, y^{(i)})$$

donde n es el tamaño del mini-lote.

Convergencia y Tasa de Aprendizaje

La tasa de aprendizaje α juega un papel crucial en la convergencia del Gradiente Descendente. Un valor α muy grande puede hacer que el algoritmo oscile y no converja, mientras que un valor α muy pequeño hará que la convergencia sea muy lenta .

Variantes Avanzadas del Gradiente Descendente

Gradiente Descendente con Momento (Momentum) El método de momento introduce un término de momento para acelerar el Gradiente Descendente en la dirección del gradiente y suavizar las oscilaciones:

$$v := \beta v + (1 - \beta) \nabla J(\theta)$$

$$\theta := \theta - \alpha v$$

donde β es el hiperparámetro de momento .

Gradiente Descendente Acelerado de Nesterov (Nesterov Accelerated Gradient, NAG) NAG mejora el método de momento al realizar un avance antes de calcular el gradiente:

$$v := \beta v + \alpha \nabla J(\theta - \beta v)$$

$$\theta := \theta - v$$

RMSprop (Root Mean Square Propagation) RMSprop ajusta la tasa de aprendizaje para cada parámetro individualmente dividiendo la tasa de aprendizaje por la raíz cuadrada de la media de las magnitudes recientes de los gradientes:

$$E[g^2] := \beta E[g^2] + (1 - \beta) g^2$$

$$\theta := \theta - \frac{\alpha}{\sqrt{E[g^2]} + \epsilon} g$$

donde g es el gradiente y ϵ es un pequeño valor para evitar la división por cero .

Adam (Adaptive Moment Estimation) Adam combina las ideas de Momentum y RMSprop:

$$m := \beta_1 m + (1 - \beta_1) g$$

$$v := \beta_2 v + (1 - \beta_2) g^2$$

$$\hat{m} := \frac{m}{1 - \beta_1^t}$$

$$\hat{v} := \frac{v}{1 - \beta_2^t}$$

$$\theta := \theta - \frac{\alpha \hat{m}}{\sqrt{\hat{v}} + \epsilon}$$

donde β_1 y β_2 son parámetros de momento y t es el número de iteraciones .

Aplicaciones y Desempeño

El Gradiente Descendente se aplica en una amplia gama de problemas de optimización en aprendizaje automático, incluyendo la capacitación de redes neuronales profundas, regresión logística, y sistemas de recomendación .

2.6.7. Comparación de Métodos: PSO, SA y Gradiente Descendente

En el campo de la optimización, los métodos de Optimización por Enjambre de Partículas (PSO), Recocido Simulado (SA) y Gradiente Descendente son ampliamente utilizados debido a sus diferentes ventajas y aplicaciones. A continuación se presenta una comparación detallada de estos métodos en términos de su funcionamiento, eficiencia y aplicaciones.

Eficiencia y Convergencia

La eficiencia de un algoritmo de optimización puede medirse en términos de su tasa de convergencia, robustez y la capacidad de encontrar óptimos globales en comparación con los óptimos locales.

Gradiente Descendente El Gradiente Descendente es conocido por su simplicidad y eficiencia en problemas convexos. Sin embargo, su desempeño puede verse afectado por la elección de la tasa de aprendizaje α. Si α es muy grande, el algoritmo puede oscilar y no converger, mientras que si es muy pequeña, la convergencia será muy lenta. Además, el Gradiente Descendente puede quedar atrapado en óptimos locales si la función de costo no es convexa .

Recocido Simulado (SA) El Recocido Simulado (SA) es un algoritmo estocástico que puede escapar de los óptimos locales gracias a su capacidad de aceptar soluciones peores en las primeras etapas del proceso de optimización. Esto se controla mediante un parámetro de temperatura T, que disminuye gradualmente. Aunque SA es robusto y puede encontrar óptimos globales, su tasa de convergencia puede ser lenta, especialmente si no se ajusta adecuadamente la programación de enfriamiento .

Optimización por Enjambre de Partículas (PSO) PSO es un método basado en poblaciones que simula el comportamiento social de los enjambres. Cada partícula en el enjambre ajusta su posición basada en su propia experiencia y la de sus vecinos. PSO puede converger rápidamente a soluciones óptimas, pero también puede quedar atrapado en óptimos locales. Las variantes de PSO, como PSO con inercia adaptativa, mejoran su capacidad de exploración y explotación .

Robustez y Adaptabilidad

La robustez de un algoritmo se refiere a su capacidad para manejar una variedad de problemas sin ajustes significativos.

Gradiente Descendente El Gradiente Descendente requiere que la función de costo sea diferenciable. Esto puede limitar su aplicabilidad en problemas donde las funciones no sean suaves o tengan múltiples discontinuidades. Además, su rendimiento puede ser altamente sensible a la configuración de la tasa de aprendizaje y la necesidad de normalizar los datos .

Recocido Simulado (SA) SA es altamente robusto y puede aplicarse a una amplia gama de problemas, incluyendo aquellos con funciones de costo no diferenciables. Su adaptabilidad proviene de su enfoque estocástico y su capacidad para escapar de los óptimos locales. No obstante, requiere una cuidadosa programación de la tasa de enfriamiento para equilibrar la exploración y explotación .

Optimización por Enjambre de Partículas (PSO) PSO es menos dependiente de la derivabilidad de la función de costo y puede aplicarse a problemas complejos y de alta dimensionalidad. Sin embargo, la configuración de los parámetros de PSO, como la velocidad de inercia y los coeficientes de aceleración, es crucial para su rendimiento. Las versiones híbridas de PSO han mejorado su adaptabilidad y robustez .

Aplicaciones y Casos de Uso

Los diferentes métodos tienen aplicaciones específicas donde son más efectivos.

Gradiente Descendente El Gradiente Descendente es ampliamente utilizado en la capacitación de modelos de aprendizaje profundo y regresión logística, donde la función de costo es diferenciable y convexa. Su simplicidad y eficiencia en estos contextos lo hacen una opción preferida .

Recocido Simulado (SA) SA es particularmente útil en problemas de optimización combinatoria, como el problema del viajante y la optimización de redes. Su capacidad para manejar funciones de costo no diferenciables y escapar de óptimos locales lo hace adecuado para problemas complejos de optimización global .

Optimización por Enjambre de Partículas (PSO) PSO se aplica frecuentemente en la optimización de funciones multimodales y problemas de alta dimensionalidad, como el diseño de estructuras, la optimización de portafolios financieros y la optimización de parámetros en modelos de aprendizaje automático. Su capacidad para equilibrar la exploración y explotación lo hace ideal para estos escenarios .

Comparación Empírica

Los estudios empíricos han demostrado que no existe un algoritmo de optimización universalmente superior. La elección del método depende de la naturaleza del problema, la función de costo y las restricciones específicas del contexto de aplicación .

2.6.8. Introducción a las Cópulas Matemáticas

Las cópulas matemáticas son herramientas fundamentales en la modelización de dependencias entre variables aleatorias, separando la estructura de dependencia de las distribuciones marginales. Introducidas formalmente por Abe Sklar en 1959, las cópulas han encontrado aplicaciones en diversas áreas como finanzas, seguros, ingeniería, y ciencias actuariales.

Definición de Cópula

Formalmente, una cópula es una función de distribución conjunta $C : [0,1]^n \to [0,1]$ para una colección de variables aleatorias $U_1, U_2, \ldots, U_n$ uniformemente distribuidas en $[0,1]$. La función de cópula C debe cumplir las siguientes condiciones:

1. **Marginales Uniformes**: Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y para cualquier $u_j \in [0,1]$ con $j \neq i$,

$$C(1, \ldots, 1, u_i, 1, \ldots, 1) = u_i.$$

Es decir, si fijamos todos los argumentos en 1 excepto u_i, la función de cópula debe devolver u_i, garantizando que las distribuciones marginales sean uniformes en $[0,1]$.

2. **Monotonía**: La función C es no decreciente en cada argumento, lo que garantiza que al aumentar una de las variables, el valor de la cópula no disminuye.

3. **Límites**: Para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$, si uno de los argumentos es 0, la función de cópula toma el valor 0:

$$C(u_1, \ldots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \ldots, u_n) = 0.$$

El teorema fundamental de las cópulas, conocido como el teorema de Sklar, establece que cualquier función de distribución conjunta H de n variables aleatorias se puede expresar en términos de sus distribuciones marginales $F_1, F_2, \ldots, F_n$ y una cópula C:

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_n(x_n)).$$

Si las distribuciones marginales $F_1, F_2, \ldots, F_n$ son continuas, entonces la cópula C es única .

Propiedades de las Cópulas

Las cópulas poseen varias propiedades importantes que las hacen útiles en la modelización de dependencias:

1. **Invarianza bajo Transformaciones Monótonas**: Las cópulas son invariantes bajo transformaciones monótonas crecientes de las variables aleatorias. Esto significa que la estructura de dependencia capturada por una cópula no se ve afectada por tales transformaciones. 2. **Representación de Dependencia**: Las cópulas pueden capturar cualquier forma de dependencia entre variables aleatorias, incluyendo dependencia lineal y no lineal. 3. **Medidas de Dependencia**: Las cópulas permiten definir medidas de dependencia como el coeficiente de correlación de Spearman y el tau de Kendall, que pueden calcularse directamente en términos de la cópula .

Medidas de Dependencia

Las cópulas facilitan el cálculo de diversas medidas de dependencia entre variables aleatorias:

- **Coeficiente de Correlación de Spearman**: Este coeficiente mide la correlación de rangos entre dos variables aleatorias. Se define en términos de la cópula C como:

$$\rho = 12 \int_0^1 \int_0^1 [C(u,v) - uv] \, dudv$$

- **Tau de Kendall**: Esta medida cuantifica la concordancia entre dos variables aleatorias. Se relaciona con la cópula C mediante la siguiente fórmula:

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u,v) \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} dudv - 1$$

Ambas medidas son útiles para cuantificar la dependencia y la concordancia entre variables aleatorias en un contexto no paramétrico .

Ejemplos de Cópulas

Existen varios tipos de cópulas que se utilizan comúnmente en la práctica, cada una con sus propias características y aplicaciones:

- **Cópula Gaussiana**: Se deriva de la distribución normal multivariada. La cópula gaussiana para dos variables U y V con función de distribución marginal F_U y F_V es:

$$C(u, v) = \Phi_\Sigma(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$$

donde Φ es la función de distribución acumulada de una distribución normal estándar y Φ_Σ es la función de distribución acumulada de una distribución normal bivariada con matriz de correlación Σ. Esta cópula es adecuada para modelar dependencias lineales .

- **Cópula t-Student multivariante**: Similar a la cópula gaussiana, pero con colas más pesadas, lo que permite modelar eventos extremos con mayor precisión. La cópula t-Student de dimensión n se define como:

$$C(u_1, \ldots, u_n) = T_\nu(\theta_\nu^{-1}(u_1), \ldots, \theta_\nu^{-1}(u_n))$$

donde T_ν es la función de distribución acumulada de una distribución t de Student multivariada con ν grados de libertad y θ_ν es la función de distribución inversa marginal. Esta cópula es útil para modelar dependencias fuertes en los extremos de las distribuciones .

- **Cópula de Gumbel**: Una cópula de la familia Archimedean que es útil para modelar dependencias asimétricas. La función de cópula de Gumbel para dos variables es:

$$C(u, v) = \exp\left[-\left((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right)^{1/\theta}\right]$$

donde $\theta \geq 1$. Esta cópula es adecuada para modelar situaciones donde hay una fuerte dependencia en colas altas .

- **Cópula de Clayton**: Otra cópula de la familia Archimedean que captura la dependencia en colas bajas. La función de cópula de Clayton para dos variables es:

$$C(u, v) = \left[\max\left((u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1), 0\right)\right]^{-1/\theta}$$

donde $\theta > 0$. Es especialmente útil para modelar dependencias en situaciones donde los eventos extremos conjuntos son de interés en la cola inferior .

- **Cópula de Frank**: También perteneciente a la familia Archimedean, la cópula de Frank es útil para modelar dependencias simétricas. Su función es:

$$C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

donde $\theta \neq 0$. Esta cópula es útil en situaciones donde la dependencia entre variables es moderada y simétrica .

Aplicaciones de las Cópulas

Las cópulas se utilizan en una amplia gama de aplicaciones para modelar la dependencia entre variables aleatorias. En el ámbito de los seguros, las cópulas permiten modelar la dependencia entre diferentes tipos de riesgos, lo cual es crucial para la correcta evaluación del riesgo total y la fijación de primas justas. Algunas aplicaciones específicas incluyen:

- **Seguros de Vida y Salud**: Modelar la dependencia entre diferentes causas de muerte o enfermedades permite a las aseguradoras evaluar mejor los riesgos y fijar primas adecuadas. Por ejemplo, la dependencia entre el riesgo de cáncer y enfermedades cardíacas puede ser modelada utilizando cópulas de Archimedean para ajustar correctamente las primas de seguros de vida .

- **Reaseguro**: En el reaseguro, las cópulas se utilizan para modelar la dependencia entre reclamaciones de diferentes pólizas y determinar la mejor estructura de reaseguro. Esto permite a las compañías de seguros distribuir el riesgo de manera más efectiva entre diferentes contratos .

- **Seguro de Propiedad y Casualidad**: Modelar la dependencia entre diferentes tipos de reclamaciones, como incendios y robos, ayuda a las aseguradoras a evaluar el riesgo agregado y establecer reservas adecuadas. Las cópulas Gaussianas y t-Student son especialmente útiles en este contexto debido a su capacidad para capturar dependencias lineales y no lineales .

- **Gestión de Riesgo Financiero**: Fuera del ámbito de los seguros, las cópulas son ampliamente utilizadas en la gestión de riesgo financiero para modelar la dependencia entre diferentes activos financieros. Esto es crucial para la evaluación del riesgo de portafolios y la optimización de inversiones .

- **Ingeniería y Fiabilidad**: En ingeniería, las cópulas se utilizan para modelar la dependencia entre fallos de componentes en sistemas complejos. Esto permite mejorar el diseño de sistemas redundantes y aumentar la fiabilidad general del sistema .

2.7. Validación y Evaluación de Modelos de Optimización

2.7.1. Técnicas de Validación Cruzada

La validación cruzada es un método fundamental para evaluar la eficacia de modelos de optimización y asegurar que los resultados sean generalizables a datos no vistos. Existen varias técnicas de validación cruzada, cada una con sus propios beneficios y limitaciones.

Validación Cruzada k-Fold

La validación cruzada k-Fold es una de las técnicas más utilizadas. En este método, el conjunto de datos se divide en k subconjuntos o folds. El modelo se entrena en $k-1$ subconjuntos y se prueba en el subconjunto restante. Este proceso se repite k veces, cambiando el subconjunto de prueba en cada iteración. El error promedio de las k iteraciones se utiliza como una estimación del rendimiento del modelo. La elección de k puede influir en el sesgo y la varianza de la estimación del error .

Validación Cruzada Leave-One-Out (LOO)

En la validación cruzada Leave-One-Out, cada observación del conjunto de datos se utiliza una vez como conjunto de prueba y el resto como conjunto de entrenamiento. Este método es exhaustivo pero computacionalmente costoso para conjuntos de datos grandes. La ventaja principal es que utiliza la mayor cantidad posible de datos para entrenar el modelo en cada iteración .

Validación Cruzada Estratificada

La validación cruzada estratificada es una variación de la k-Fold en la que cada fold mantiene la proporción de clases del conjunto de datos original. Esto es particularmente útil en problemas de clasificación donde las clases pueden estar desbalanceadas .

2.7.2. Métricas para Evaluar la Eficacia y Equidad de los Modelos de Optimización

Evaluar la eficacia y equidad de los modelos de optimización es crucial para garantizar que los modelos sean tanto precisos como justos.

Eficacia

- **Error Cuadrático Medio (MSE)**: Mide el promedio de los cuadrados de los errores o desviaciones, es decir, la diferencia entre los valores estimados por el modelo y los valores reales. Se define como:

$$\text{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2$$

donde $\hat{y}_i$ son los valores predichos y y_i son los valores observados .

- **Coeficiente de Determinación (R²)**: Mide la proporción de la varianza en la variable dependiente que es predecible a partir de las variables independientes. Se define como:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$$

donde $\bar{y}$ es la media de los valores observados .

- **Raíz del Error Cuadrático Medio (RMSE)**: Es la raíz cuadrada del MSE y proporciona una medida de error en las mismas unidades que la variable de respuesta:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\text{MSE}}$$

Equidad

- **Índice de Gini**: Mide la inequidad en la distribución de recursos o resultados. Es útil para evaluar la equidad de las primas de seguros asignadas por el modelo.

- **Evaluación de Sesgo**: Comparar el rendimiento del modelo entre diferentes subgrupos (e.g., diferentes edades, géneros) para asegurarse de que el modelo no favorece ni perjudica injustamente a ningún grupo en particular .

2.7.3. Importancia de la Validación en la Optimización de Primas de Seguros

La validación de modelos de optimización en el contexto de la fijación de primas de seguros es crucial por varias razones:

1. **Precisión en la Estimación del Riesgo**: Los modelos de optimización deben ser precisos para estimar el riesgo asociado con diferentes pólizas de seguro. La validación ayuda a garantizar que el modelo se generaliza bien a nuevos datos, evitando el sobreajuste y subajuste .

2. **Equidad en la Asignación de Primas**: La validación es esencial para asegurar que las primas asignadas no sean injustamente altas o bajas para ciertos grupos de asegurados. La equidad es un principio clave en el diseño de políticas de seguros justas y sostenibles .

3. **Gestión de Reservas y Solvencia**: Un modelo validado correctamente ayuda a

las aseguradoras a gestionar sus provisiones técnicas de manera más efectiva, asegurando que tienen suficientes fondos para cubrir los siniestros futuros mientras mantienen la solvencia de la empresa .

4. **Competitividad en el Mercado**: En un mercado de seguros competitivo, la capacidad de fijar primas precisas y justas puede proporcionar una ventaja competitiva significativa. La validación rigurosa de los modelos garantiza que las primas reflejen adecuadamente el riesgo, atrayendo a clientes y reteniendo la confianza de los asegurados .

3. Metodología

3.1. Introducción

La metodología presentada se centra en la optimización de primas de seguros para una línea de negocio que agrupa a diferentes grupos asegurados que acceden a los mismos beneficios y que pueden estar involucrados en siniestros. En este contexto, los grupos pueden presentar niveles distintos de siniestralidad, y en particular, un grupo con siniestralidad elevada puede generar un impacto significativo en la estructura global de primas. Para mitigar este efecto, se introduce un mecanismo de redistribución basado en un monto adicional denominado **exceso**.

En este trabajo, el **exceso** se define como un parámetro predeterminado dentro del proceso de ajuste de primas. Este monto adicional no se refiere al valor total de la siniestralidad ni a un déficit financiero, sino a una cantidad específica que se extrae de la prima proyectada de un grupo particular con alta siniestralidad para redistribuirse entre los demás grupos. La determinación de este exceso puede estar motivada por regulaciones, principios de equidad en la estructura de primas o políticas internas de la aseguradora.

Para el desarrollo de este estudio, el exceso se establece como un monto equivalente al 5 % de la prima proyectada del grupo con mayor siniestralidad. Este criterio permite analizar el impacto de la redistribución de una cantidad fija, proporcionando estabilidad en la evaluación de los diferentes métodos de ajuste. La aplicación de un porcentaje fijo facilita la implementación computacional y permite evaluar de manera controlada la influencia del exceso en la optimización de las primas ajustadas.

El objetivo principal es establecer una metodología que ajuste las primas de manera justa y eficiente, considerando múltiples factores y restricciones inherentes a este tipo de negocio. Para lograrlo, se emplean diversas técnicas avanzadas de optimización y análisis de datos, garantizando que las primas ajustadas reflejen adecuadamente la distribución del riesgo y cumplan con las normativas aplicables.

La metodología debe abordar los siguientes desafíos:

- **Proximidad a las Primas Originales:** Minimizar las desviaciones entre las primas ajustadas y las primas originales para mantener la equidad.
- **Correlación de Siniestralidad:** Considerar las correlaciones entre diferentes grupos para distribuir el exceso de manera que refleje la interrelación de riesgos.
- **Cumplimiento de Restricciones:** Asegurar que la suma total de las primas ajustadas sea igual a la suma de las primas originales más el exceso redistribuido, y que ninguna prima ajustada sea inferior a la original.

Para abordar estos desafíos, se aplican varias técnicas de optimización, incluyendo:

- **Optimización por Enjambre de Partículas (PSO):** Método basado en la exploración de soluciones mediante partículas que ajustan su posición en función del conocimiento colectivo e individual del espacio de búsqueda.
- **Recocido Simulado (SA):** Algoritmo inspirado en procesos de enfriamiento en metalurgia, que permite explorar soluciones subóptimas iniciales y converger progresivamente a una solución óptima.
- **Gradiente Descendente (GD):** Algoritmo iterativo que ajusta las primas siguiendo la dirección del gradiente negativo de la función objetivo, con una tasa de aprendizaje establecida.

La metodología se valida mediante un proceso de validación cruzada, en el cual se excluyen ciertos periodos de datos para evaluar la capacidad de generalización del modelo. Se calculan métricas como el Error Cuadrático Medio (MSE) y el Error Porcentual Absoluto Medio (MAPE) para cuantificar la precisión del ajuste de las primas optimizadas.

Este marco metodológico proporciona una solución robusta para la optimización de primas en un entorno con múltiples grupos asegurados, asegurando una redistribución eficiente y equitativa del exceso. Las técnicas de optimización y la validación cruzada garantizan que los resultados sean consistentes con los principios de estabilidad financiera y regulación del sector asegurador.

3.2. Diseño del Estudio

El diseño del estudio se estructura en dos componentes principales: el tipo de estudio y el enfoque metodológico adoptado para llevar a cabo el análisis y la optimización de las primas de seguros.

3.2.1. Tipo de Estudio

Este estudio se clasifica como una investigación aplicada y cuantitativa. La investigación aplicada se orienta a la resolución de problemas específicos y prácticos, en este caso, la optimización de la distribución de primas en una línea de negocio aseguradora. La naturaleza cuantitativa del estudio implica la utilización de datos numéricos y técnicas estadísticas para analizar y modelar la información disponible.

La optimización de primas requiere un enfoque sistemático para identificar y ajustar las variables clave, garantizando que los resultados sean representativos y útiles para la toma de decisiones en el sector asegurador. Además, el estudio incluye elementos de investigación exploratoria para identificar patrones y relaciones en los datos de siniestralidad.

3.2.2. Enfoque Metodológico

El enfoque metodológico se basa en un marco de optimización matemática y análisis de datos, estructurado en varias etapas clave:

- **Recolección y Preparación de Datos:** Se recopilan datos históricos de siniestralidad y primas de seguros, abarcando múltiples grupos de asegurados. Los datos son limpiados y preprocesados para asegurar su calidad y coherencia.

- **Modelado de Correlaciones:** Se aplican técnicas estadísticas para modelar las correlaciones entre los diferentes grupos de asegurados. Esto es esencial para comprender cómo los siniestros en un grupo pueden influir en los siniestros de otros grupos.

- **Optimización de Primas:** Se emplean métodos avanzados de optimización, incluyendo:

  - *Optimización por Enjambre de Partículas (PSO):* Utilizado para explorar el espacio de soluciones y encontrar configuraciones óptimas de primas.
  - *Recocido Simulado (SA):* Aplicado para evitar óptimos locales y asegurar una búsqueda global de la mejor solución.
  - *Gradiente Descendente (GD):* Implementado para realizar ajustes iterativos basados en el gradiente de la función objetivo.

- **Validación Cruzada:** Se utiliza un enfoque de validación cruzada para evaluar la robustez y la capacidad de generalización de los modelos optimizados. Esto implica dividir los datos en conjuntos de entrenamiento y prueba, y evaluar la precisión de las primas ajustadas utilizando métricas como el Error Cuadrático Medio (MSE).

Este enfoque metodológico garantiza que el estudio no solo proporcione soluciones prácticas y aplicables, sino que también asegure que dichas soluciones sean robustas, equitativas y alineadas con las políticas y normativas del sector asegurador. La combinación de técnicas avanzadas de optimización y validación cruzada proporciona un marco riguroso para la toma de decisiones en la gestión de primas de seguros.

3.3. Selección de Datos

La selección de datos para este estudio se llevó a cabo mediante un proceso riguroso de preprocesamiento y transformación de la información original, asegurando que las variables utilizadas estuvieran en la forma adecuada para su integración en los modelos de optimización. Este proceso incluyó la depuración de datos inconsistentes, la consolidación de registros de múltiples fuentes y la aplicación de ajustes necesarios para garantizar la coherencia y representatividad de la información.

Dado que el modelo requiere variables en formatos específicos, se realizaron transformaciones estructuradas en los datos originales, con el fin de generar una base optimizada para el análisis. Estas modificaciones fueron aplicadas bajo criterios estrictos de consistencia, preservando la integridad de la información y asegurando que los valores utilizados reflejaran fielmente las condiciones del problema de estudio.

A continuación, se detallan las fuentes de datos, los criterios de inclusión y exclusión, y una descripción de la base de datos final utilizada en el análisis.

3.3.1. Fuentes de Datos

Los datos utilizados en este estudio provienen del Instituto Nacional de Seguros (INS). El INS proporciona información detallada sobre siniestros y primas de seguros para diversos grupos asegurados. Para efectos de confidencialidad, la línea de seguro específica se mantiene anónima, pero cumple con las características de tener múltiples grupos asegurados bajo un mismo beneficio y siniestralidad que puede incluir diferentes afectados de diferentes grupos.

3.3.2. Criterios de Inclusión y Exclusión

Para garantizar la relevancia y la calidad de los datos utilizados en la estimación de primas, se aplicaron los siguientes criterios de inclusión y exclusión:

- **Periodo de tiempo:** Se incluyeron datos desde el año 2013 hasta el año 2022, asegurando una ventana temporal suficientemente amplia para capturar patrones de siniestralidad y su evolución.

- **Tipos de siniestros:** Se consideraron aquellos siniestros registrados en la base de datos que fueran relevantes para la estimación de primas, excluyendo aquellos que no correspondieran a la línea de seguro específica o cuya información fuera insuficiente para su procesamiento.

- **Ajuste por inflación:** Los montos de los siniestros fueron ajustados por inflación para garantizar la comparabilidad a lo largo del tiempo y reflejar adecuadamente el costo esperado de los riesgos asegurados.

- **Calidad de datos:** Se excluyeron registros con datos faltantes significativos o inconsistencias que no pudieran ser resueltas mediante métodos estándar de limpieza de datos.

Dado que la metodología de este estudio se basa en la estimación de primas ajustadas, los datos de siniestros se utilizaron como insumo principal para determinar el costo esperado de los riesgos asegurados. La relación entre siniestros y primas se establece a través de modelos que proyectan el comportamiento futuro de la siniestralidad, permitiendo generar estimaciones ajustadas a la realidad del mercado y a la evolución de los costos en el tiempo.

3.3.3. Descripción de la Base de Datos

La base de datos final incluye información detallada sobre siniestros y primas de seguros para distintos grupos asegurados. Esta información es fundamental para la estimación de las primas proyectadas y su posterior optimización mediante los métodos propuestos.

Las principales variables recopiladas incluyen:

- **ID del Caso (ID CASO):** Identificación única de cada siniestro registrado en la base de datos.
- **Año de Pago (ANO_PAGO):** Año en que se realiza el pago del siniestro.
- **Mes de Pago (MES_PAGO):** Mes en que se efectúa el pago del siniestro.
- **Año del Siniestro (ANO_ACCIDENTE):** Año en que ocurrió el siniestro.
- **Grupo de Cálculo (GRUPO_CALCULO):** Categoría de asegurados a la que pertenece el siniestro reportado. Cada grupo representa un tipo de riesgo distinto dentro del portafolio de asegurados.
- **Monto del Siniestro (MONTO_PAGADO):** Valor económico del siniestro antes de ajustes.
- **Inflación (INFLACION):** Factor de ajuste utilizado para homogeneizar los montos de siniestros en términos reales.
- **Monto Pagado Ajustado por Inflación (MONTO_PAGADO_INFLACION):** Monto del siniestro después del ajuste por inflación.
- **Número de Involucrados por Grupo:** Cantidad de asegurados de cada grupo que participaron en un mismo siniestro.
- **Primas Históricas (PRIMA_HISTORICA):** Registros de las primas cobradas en años anteriores para cada grupo asegurado.
- **Primas Proyectadas (PRIMA_PROYECTADA):** Estimaciones de las primas de cada grupo asegurado obtenidas a partir de la siniestralidad ajustada por inflación.

Esta base de datos es utilizada para modelar la relación entre la siniestralidad y las primas de los diferentes grupos asegurados. A partir de los datos históricos de siniestros y primas, se generan estimaciones de las primas proyectadas que sirven como punto de partida para la optimización de la distribución de primas ajustadas. Esto permite evaluar el impacto de la redistribución del exceso y garantizar una asignación equitativa y eficiente de los costos del seguro entre los distintos grupos.

3.4. Estimación de Primas Basadas en Datos Históricos

En esta sección se describe cómo se estimaron las primas proyectadas para cada grupo antes de aplicar los métodos de optimización para su ajuste. El enfoque aquí no es determinar la mejor manera de calcular las primas, sino obtener estimaciones razonables para cada grupo, que sirvan de punto de partida para el proceso de ajuste y distribución posterior.

Las primas se calcularon tomando en cuenta el histórico de los montos pagados por cada grupo, ajustados por inflación, para reflejar de manera precisa los valores más recientes. El proceso implica sumar los montos pagados en los años seleccionados para cada grupo y promediar estos valores para obtener una prima proyectada por año. Las primas resultantes representan el valor esperado de los siniestros para cada grupo en función del histórico.

El método empleado para este cálculo es válido y útil en este contexto debido a que:

1. **Ajuste por Inflación**: Asegura que los valores proyectados sean representativos del entorno actual y no estén distorsionados por la evolución de los precios a lo largo del tiempo.

2. **Promedio de Varios Años**: Mitiga posibles anomalías o variaciones abruptas en los datos históricos al considerar una ventana temporal más amplia. Este enfoque suaviza los efectos de eventos extremos que podrían haber afectado ciertos

periodos específicos.

3.4.1. Justificación de la Metodología

Existen múltiples enfoques para la estimación de primas, incluyendo modelos basados en series de tiempo, frecuencia y severidad, o simulaciones estocásticas. Sin embargo, el propósito de este trabajo no es desarrollar una metodología avanzada para la estimación de primas, sino establecer una base adecuada para el siguiente paso: la optimización y redistribución de los montos ajustados.

El método empleado proporciona una representación fiable de la siniestralidad observada, asegurando que el ajuste posterior se realice sobre valores consistentes con la experiencia histórica. Además, su simplicidad facilita la implementación en los modelos de optimización sin comprometer la integridad de los datos.

Si bien este enfoque cumple con los objetivos del estudio, en otros contextos podría ser preferible el uso de metodologías más detalladas, como modelos de frecuencia y severidad individuales o agregados, o técnicas de simulación avanzadas. No obstante, para este trabajo, el procedimiento seleccionado es suficiente para garantizar que las primas ajustadas reflejen de manera adecuada las condiciones de riesgo y permitan una asignación equitativa y eficiente entre los grupos asegurados.

3.5. Métodos de Optimización

3.5.1. Introducción a los Métodos de Optimización

La optimización en este estudio busca redistribuir las primas de los diferentes grupos asegurados de manera que se minimicen los impactos financieros negativos en cualquier grupo debido a la alta siniestralidad en otro grupo. Esto puede ocurrir por diversos motivos, como requisitos reglamentarios, políticas solidarias, o cualquier otra razón que implique la necesidad de redistribuir un exceso en las primas.

3.5.2. Enfoque General

Para resolver el problema se emplea optimización no lineal estocástica, con el objetivo principal de minimizar la diferencia entre las primas ajustadas y las originales, penalizando desbalances y considerando las correlaciones de riesgo entre los distintos grupos. La función objetivo se define como:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 - \beta \sum_{i=1}^{n}|\rho_{ig}|\frac{x_i}{y_i} + \lambda \cdot \text{copula}(x, \text{copula\_param}, x_g) \qquad (1)$$

donde β y λ son parámetros de ajuste, y_i representa la prima original y x_i la prima ajustada (valores a optimizar). La prima x_g ya está determinada en el momento en que se establece el exceso, dado que es la prima del grupo al que se le asignó dicho exceso. Matemáticamente, se expresa como:

$$x_g = y_g - E$$

donde y_g es la prima original del grupo con exceso y E es el monto específico del exceso a distribuir. Finalmente, el término de cópula modela las dependencias entre los distintos grupos, capturando las correlaciones de riesgo inherentes.

Selección del Modelo de Cópula

Para capturar de manera precisa las dependencias entre grupos, se seleccionó una **cópula gaussiana**. Esta elección se basó en un proceso riguroso de ajuste de modelos, en el que se aplicaron diferentes distribuciones de cópulas ampliamente utilizadas en la literatura, como la cópula t-Student, la cópula de Gumbel y la cópula de Clayton. Los modelos fueron evaluados utilizando el Criterio de Información de Akaike (AIC) y el Criterio de Información Bayesiano (BIC), métricas estándar para la selección de modelos estadísticos.

Los resultados indicaron que la cópula gaussiana proporcionaba el mejor ajuste a los datos originales, reflejando de manera más precisa las dependencias entre los grupos asegurados. La inclusión de este término en la función objetivo permite que la optimización capture adecuadamente las correlaciones presentes en los datos, mejorando la precisión de las primas ajustadas al distribuir el exceso de manera equitativa y acorde con las relaciones de riesgo observadas en los distintos grupos asegurados.

3.5.3. Restricciones del Problema

Las siguientes restricciones deben ser cumplidas para garantizar que las primas ajustadas mantengan la coherencia con los valores originales y respeten las condiciones impuestas por el modelo:

1. **Restricción de suma**: La suma de las primas ajustadas debe ser igual a la suma de las primas originales más el exceso E.

2. **Restricción de no negatividad**: Cada prima ajustada debe ser al menos igual a la prima original, es decir, $x_i \geq y_i \ \forall i$.

Para asegurar el cumplimiento de estas restricciones dentro del proceso de optimización, se implementa una función de ajuste que corrige los valores obtenidos. En esta función:

- y representa el vector de primas originales antes del ajuste.
- x es el vector de primas ajustadas obtenido como resultado de la optimización.
- E es el exceso a distribuir entre los diferentes grupos.

El ajuste se realiza en dos pasos: 1. Se verifica que cada prima ajustada sea al menos igual a su valor original, es decir, que $x_i \geq y_i$. 2. Se corrige la suma total de x para que sea igual a la suma de y más el exceso E. Si la suma de x no coincide con el valor deseado, se aplica un ajuste proporcional para distribuir la diferencia sin violar la restricción de no negatividad.

A continuación, se presenta la función de ajuste utilizada en la implementación:

```
ajustar_restricciones <- function(x, y, exceso) {
  n <- length(y)
  # Asegurar que x_i >= y_i
  x[1:n] <- pmax(x[1:n], y)

  # Ajustar la suma para que sea igual a la suma de y más el exceso
  suma_actual <- sum(x[1:n])
  suma_deseada <- sum(y) + exceso

  # Si la suma actual difiere de la suma deseada, ajustar x proporcionalmente
  if (!is.na(suma_actual) && suma_actual != suma_deseada) {
    diferencia <- suma_actual - suma_deseada
    # Proporcionalmente ajustar x para que la suma de x sea igual a suma_deseada
    proporcion <- x / sum(x)
    ajuste <- proporcion * diferencia
    x[1:n] <- x[1:n] - ajuste
    # Revisar nuevamente que x_i >= y_i después del ajuste
    x[1:n] <- pmax(x[1:n], y)
  }

  return(x)
}
```

3.5.4. Justificación del Uso de Restricciones

El ajuste de restricciones es una práctica común en la optimización para asegurar que las soluciones propuestas cumplan con los requisitos del problema. Este enfoque no altera la estructura fundamental del algoritmo de optimización, sino que asegura que las soluciones sean factibles dentro del contexto del problema.

3.5.5. Algoritmos Utilizados

Algoritmo de Optimización Basado en Enjambre de Partículas (PSO)

El PSO es un algoritmo de optimización que simula el comportamiento social de un grupo de partículas para encontrar soluciones óptimas en un espacio de búsqueda. Se eligió por su capacidad para explorar eficientemente grandes espacios de búsqueda y encontrar soluciones cercanas al óptimo global. Los parámetros clave incluyen el número de partículas, el número de iteraciones, los coeficientes de aceleración (c1 y c2), y el factor de inercia (w). Las partículas se inicializan aleatoriamente dentro de los límites del espacio de búsqueda. La convergencia se evalúa según la estabilidad de la función objetivo en iteraciones sucesivas.

Recocido Simulado

El recocido simulado es otro algoritmo estocástico utilizado para evitar óptimos locales y buscar una solución global en un espacio de búsqueda complejo. En este estudio, los parámetros clave incluyen la temperatura inicial, la tasa de enfriamiento y el número de iteraciones.

Descenso por Gradiente

El método de descenso por gradiente se utiliza para ajustar los parámetros de la función objetivo de manera iterativa, minimizando la función de pérdida. Se utiliza una tasa de aprendizaje adaptativa para ajustar el tamaño de los pasos.

3.5.6. Técnicas de Validación Cruzada

Motivación para la Validación Cruzada

La validación cruzada se utiliza para garantizar que el modelo generalice bien a datos no observados, evitando problemas como el sobreajuste o subajuste. En el contexto de este trabajo, se enfoca en ajustar los parámetros **beta** y **lambda**, que son críticos en el modelo de optimización de primas. Estos parámetros controlan:

- **Beta**: Representa la importancia relativa del término de correlación de riesgos en la función objetivo. A medida que **beta** aumenta, se penaliza más fuertemente la falta de alineación entre las primas ajustadas y la estructura de correlaciones de riesgo original (rho_ij).

- **Lambda**: Modula la importancia del término de cópula dentro de la función objetivo, que es crucial para capturar la dependencia multivariada entre las primas ajustadas.

Ajustar estos parámetros adecuadamente asegura que el modelo sea capaz de encontrar primas que minimicen la función objetivo y mantengan una estructura coherente de riesgo y dependencia entre los diferentes grupos.

Enfoque de Validación Cruzada

El proceso de validación cruzada implementado en este trabajo sigue un esquema **k-fold**, donde cada "fold" representa un año específico de datos. En cada iteración:

1. Se deja fuera un año para ser utilizado como conjunto de prueba.

2. El modelo se entrena con los datos de los demás años, ajustando **beta** y **lambda**.

3. El rendimiento del modelo se evalúa sobre el año que quedó fuera, utilizando métricas de evaluación como el **MSE** y el $\mathbf{R^2}$.

4. El proceso se repite para cada año disponible, y el error promedio obtenido en las pruebas para cada fold se utiliza para evaluar el modelo.

Este enfoque permite evaluar la capacidad del modelo para generalizar a datos de diferentes años, lo que es fundamental en un contexto de primas aseguradoras, donde la variabilidad temporal puede afectar significativamente el desempeño del modelo.

Ajuste de los Parámetros Beta y Lambda

Descripción del Proceso de Ajuste Los parámetros **beta** y **lambda** se ajustan durante la validación cruzada utilizando un método de **Optimización por Enjambre de Partículas (PSO)** y se complementan con **Recocido Simulado** para garantizar una optimización efectiva.

- **Optimización por Enjambre de Partículas (PSO)**:
  - Se genera una población de soluciones (partículas) con valores iniciales aleatorios de **beta** y **lambda**.
  - Cada partícula ajusta su posición en el espacio de soluciones con base en su propio mejor desempeño previo y el mejor desempeño global del enjambre.
  - Durante múltiples iteraciones (generaciones), las partículas se mueven buscando minimizar la función objetivo que incluye el **MSE**, la correlación de riesgos y el valor de la cópula.
  - El proceso se detiene cuando el enjambre converge o se alcanza el número máximo de generaciones, seleccionándose los valores óptimos de **beta** y **lambda**.

Justificación del Uso de Múltiples Puntos de Inicio El uso de múltiples puntos de inicio en el proceso de optimización de **PSO** y **Recocido Simulado** tiene la motivación de mitigar la influencia del punto de partida en los resultados finales. Dado que el espacio de búsqueda es complejo y no lineal, existe la posibilidad de quedar atrapado en mínimos locales si solo se utiliza un conjunto de valores iniciales para **beta** y **lambda**.

Para abordar este problema, se prueban múltiples combinaciones iniciales de estos parámetros en cada ejecución, lo que permite:

- Explorar diferentes regiones del espacio de soluciones.
- Asegurar que la optimización no dependa excesivamente de los valores iniciales.

- Obtener resultados más robustos y representativos del comportamiento del modelo.

Al final del proceso, se promedian los mejores valores de **beta** y **lambda** obtenidos en las diferentes ejecuciones, garantizando que la solución final no esté sesgada por una elección subóptima de valores iniciales.

Número de Generaciones y Partículas en la Optimización

El número de generaciones y partículas en los métodos de optimización (**PSO** y **Recocido Simulado**) se establecen como valores fijos en este trabajo. Estas cantidades fueron seleccionadas empíricamente, asegurando un equilibrio entre:

- **Convergencia del algoritmo**: Un número adecuado de generaciones es necesario para permitir que el enjambre de partículas explore completamente el espacio de soluciones y converja hacia un mínimo global.

- **Costo computacional**: Aumentar el número de generaciones o partículas conlleva un costo computacional más alto. Por lo tanto, se opta por valores que ofrezcan un buen rendimiento en términos de tiempo de cómputo sin sacrificar la calidad de las soluciones.

Por ejemplo, en este trabajo se utilizan 40 generaciones con 10 partículas por enjambre en el **PSO**, lo que ha demostrado ser suficiente para encontrar una solución óptima de los parámetros sin un costo computacional prohibitivo. En el caso del **Recocido Simulado**, el número de iteraciones se fija en 10,000, lo cual permite una exploración adecuada del espacio de soluciones mientras se enfría el sistema.

Resumen del Proceso de Validación Cruzada

El enfoque de validación cruzada propuesto en este trabajo tiene como objetivo ajustar los parámetros **beta** y **lambda** de manera robusta y efectiva. Se logra mediante:

- La partición de los datos por años para evaluar la capacidad del modelo de generalizar a distintos períodos temporales.
- El uso de múltiples puntos de inicio para minimizar la dependencia del valor inicial de los parámetros.
- La optimización a través de métodos **PSO** y **Recocido Simulado**, que permiten ajustar los parámetros de manera eficiente en un espacio de búsqueda no lineal y evitar caer en mínimos locales.

Al final del proceso de validación cruzada, se obtiene una solución optimizada para los parámetros del modelo que garantiza un rendimiento sólido frente a distintos escenarios temporales.

3.5.7. Implementación Computacional

Los algoritmos de optimización se implementan en el lenguaje de programación R, utilizando bibliotecas especializadas para manejo de datos y cómputo estadístico. La optimización se lleva a cabo en un entorno de computación estándar, utilizando una computadora portátil de alta gama.

3.6. Validación y Evaluación

3.6.1. Técnicas de Validación Cruzada

En esta sección, describimos las técnicas de validación cruzada utilizadas para evaluar la capacidad de generalización del modelo de ajuste de primas. Dado que el modelo ajusta parámetros importantes como β y λ, así como las correlaciones entre primas y las dependencias modeladas a través de la cópula, es fundamental garantizar que el modelo no solo ajuste bien a los datos históricos, sino que también sea capaz de predecir con precisión en escenarios futuros o no observados. Para ello, hemos implementado una validación cruzada temporal basada en particiones de los datos anuales disponibles.

Validación Cruzada Temporal

La validación cruzada se ha llevado a cabo dividiendo el conjunto de datos en particiones anuales, aplicando una estrategia de exclusión anual. En cada iteración, se excluye un único año como conjunto de prueba y el modelo es ajustado utilizando los datos de los nueve años restantes. Este procedimiento permite evaluar la capacidad del modelo para generalizar a periodos no incluidos en el entrenamiento, lo cual es fundamental en el contexto de la estimación de primas de seguros, donde la siniestralidad y otros factores pueden variar de un año a otro.

Dado que el conjunto de datos abarca un periodo de diez años, entre 2013 y 2022, este método garantiza que cada año sea evaluado como conjunto de prueba en al menos una iteración. Es importante destacar que dentro de este periodo se incluyen los años de la pandemia de COVID-19, los cuales pudieron haber tenido efectos en los montos de los siniestros y en la dinámica de las primas. Sin embargo, al realizar una validación cruzada completa, donde cada año es excluido en una iteración y evaluado con el modelo ajustado en los otros nueve años, se mitiga la influencia de cualquier año atípico en el desempeño general del modelo. De esta forma, se evita que eventos específicos distorsionen la evaluación global de la metodología de optimización de primas.

La metodología implementada sigue los siguientes pasos:

1. **División de los datos**: Se separan los datos por año. En cada iteración, se excluye un año específico del conjunto de entrenamiento, utilizándose como conjunto de prueba. El modelo es entrenado con los nueve años restantes.

2. **Entrenamiento del modelo**: En cada iteración, se ajustan los parámetros del modelo con los datos de entrenamiento, incluyendo:

    - La estimación de los parámetros β y λ mediante optimización.
    - El ajuste de la cópula, modelando la dependencia entre las primas de los distintos grupos.
    - La estimación de las correlaciones ρ_{ij} entre los grupos de asegurados.

3. **Predicción sobre el conjunto de prueba**: Con el modelo ajustado, se generan las primas optimizadas para el año que fue excluido del entrenamiento. Estas estimaciones se comparan con las primas reales observadas en ese año, evaluando la precisión del modelo mediante métricas como el Error Cuadrático Medio (MSE), la Raíz del Error Cuadrático Medio (RMSE) y el Coeficiente de Determinación (R^2).

4. **Repetición del proceso**: Se repite el procedimiento para cada uno de los diez años del conjunto de datos, asegurando que cada año sea utilizado como conjunto de prueba en una iteración. Finalmente, los resultados de todas las iteraciones se promedian para obtener una medida general de la capacidad de generalización del modelo.

Justificación del Método

La validación cruzada temporal es especialmente relevante en el contexto de modelos de seguros debido a la variabilidad interanual de las primas y los factores de riesgo asociados. Al dejar ciertos años fuera del entrenamiento y evaluar el desempeño del modelo en ellos, podemos verificar si el modelo es capaz de adaptarse a cambios estructurales o tendencias en los datos, como la inflación, cambios en la regulación o variaciones en la siniestralidad.

El uso de particiones basadas en años tiene la ventaja de reflejar la realidad del mercado asegurador, donde los modelos se construyen con datos históricos pero se aplican para estimar riesgos y primas en futuros períodos no observados.

Ajuste de Parámetros en la Validación Cruzada

En cada iteración de la validación cruzada, los parámetros β y λ son ajustados de manera que minimicen la función objetivo del modelo, que incluye un término de estabilidad (que mide qué tan cercanas están las primas ajustadas a las observadas), un término de correlación de riesgos (que penaliza grandes desviaciones en la correlación de las primas) y un término basado en la cópula, que evalúa la dependencia entre primas de diferentes grupos.

El ajuste de estos parámetros en diferentes particiones permite evaluar la robustez del modelo: si los valores óptimos de β y λ varían drásticamente entre particiones, podría indicar que el modelo es sensible a la elección de los datos de entrenamiento, lo que comprometería su capacidad de generalización.

Evaluación del Desempeño

Al final de cada iteración de validación cruzada, se calculan métricas de desempeño utilizando las primas ajustadas del conjunto de prueba. Las principales métricas utilizadas son:

- **Error Cuadrático Medio (MSE)**: Mide la diferencia promedio entre las primas ajustadas y las primas reales, elevando al cuadrado las diferencias para penalizar los errores más grandes.

- **Raíz del Error Cuadrático Medio (RMSE)**: Similar al MSE, pero devuelve un valor en las mismas unidades que las primas, lo que facilita su interpretación.

- **Coeficiente de Determinación (R^2)**: Mide qué proporción de la variabilidad de las primas observadas es explicada por las primas ajustadas por el modelo.

Estas métricas se calculan para cada iteración y se promedian al final del proceso, proporcionando una evaluación global del rendimiento del modelo.

Futuras Implementaciones

Una vez finalizado el proceso de validación cruzada, los resultados obtenidos permitirán ajustar de manera definitiva los parámetros del modelo y verificar su capacidad de generalización. Estos resultados serán reportados en la sección de resultados, donde se comparará el desempeño del modelo para los diferentes años excluidos en cada iteración. De esta manera, será posible identificar si el modelo muestra una mayor o menor capacidad de adaptación en ciertos períodos específicos y si los parámetros ajustados de manera óptima son consistentes a lo largo del tiempo.

3.6.2. Métricas de Evaluación

En esta sección, se presentan las métricas clave para evaluar el rendimiento del modelo de optimización. La notación utilizada se adapta al contexto del trabajo, donde Y_i representa las primas originales y X_i las primas proyectadas ajustadas. Cada métrica ofrece una perspectiva específica sobre la precisión del ajuste de X_i en comparación con Y_i, proporcionando una visión integral del desempeño del modelo.

Error Cuadrático Medio (MSE)

El **Error Cuadrático Medio (MSE)** mide el promedio del cuadrado de lsa diferencias entre las primas ajustadas y las originales. Esta métrica penaliza en mayor medida los errores grandes, ayudando a identificar los casos en que X_i se desvía significativamente de Y_i. La fórmula del MSE es:

$$\text{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - X_i)^2$$

donde Y_i son las primas originales y X_i las primas ajustadas. Un MSE más bajo indica un mejor ajuste del modelo.

Raíz del Error Cuadrático Medio (RMSE)

La **Raíz del Error Cuadrático Medio (RMSE)** es una métrica derivada del MSE, que permite interpretar los errores en las mismas unidades que Y_i. Al tomar la raíz cuadrada del MSE, se facilita la comparación directa del error en términos prácticos:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - X_i)^2}$$

El RMSE es útil para entender la magnitud promedio de los errores, penalizando más los errores grandes que los pequeños.

Coeficiente de Determinación (R²)

El **Coeficiente de Determinación (R²)** mide la proporción de la variabilidad en Y_i que es explicada por X_i, proporcionando una indicación de qué tan bien el modelo captura la variabilidad en las primas originales:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - X_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}$$

donde $\bar{Y}$ es la media de las primas originales Y_i. Un valor de R^2 cercano a 1 indica un ajuste excelente, mientras que valores más bajos sugieren que el modelo captura menos de la variabilidad en los datos.

Mean Absolute Percentage Error (MAPE)

El **Mean Absolute Percentage Error (MAPE)** mide el error promedio como un porcentaje de Y_i, permitiendo evaluar el desempeño del modelo de manera relativa a los valores originales de las primas:

$$\text{MAPE} = \frac{100}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{Y_i - X_i}{Y_i}\right|$$

El MAPE ofrece una medida del error en términos porcentuales, facilitando la interpretación y la comparación entre diferentes modelos. Un MAPE más bajo indica que, en promedio, las diferencias entre las primas ajustadas y las originales son pequeñas en relación con los valores originales de las primas.

Selección de Métricas

Para este trabajo, hemos decidido prescindir de métricas como el *sesgo*, debido a que, en este contexto particular, donde el exceso se distribuye de manera uniforme entre los modelos, el sesgo total será el mismo para todos los métodos de optimización. Esto hace que no aporte valor para diferenciar los modelos. En cambio, se priorizan métricas que nos permitan evaluar de manera más precisa el desempeño del modelo en términos de precisión (MSE y RMSE), capacidad explicativa (R^2) y error porcentual relativo (MAPE).

Estas métricas, junto con la validación cruzada, proporcionarán una evaluación integral de los modelos de optimización utilizados, permitiendo comparar su efectividad y robustez.

3.6.3. Análisis de Sensibilidad

El análisis de sensibilidad es una herramienta crucial para evaluar la robustez de los modelos frente a cambios en sus parámetros principales. En el contexto de este trabajo, los parámetros clave del modelo son β, λ y la matriz de correlación ρ_{ij}, los cuales determinan tanto el ajuste de las primas ajustadas como la influencia de las correlaciones de riesgo entre los grupos de asegurados.

En esta sección, evaluamos cómo varían los resultados del modelo cuando se realizan perturbaciones sistemáticas en los parámetros clave. El objetivo es analizar la estabilidad del modelo, su capacidad de mantener buenos resultados bajo condiciones ligeramente distintas, y cómo responden las primas ajustadas ante diferentes escenarios.

Escenarios de Sensibilidad

Los siguientes escenarios de sensibilidad se definieron para llevar a cabo este análisis:

- **Escenario 1: Variación del Exceso**. En este escenario, el exceso utilizado en el ajuste de las primas se incrementa y disminuye en un 10 %. Esto permite evaluar cómo el modelo responde a cambios en la cantidad total de primas redistribuidas.
- **Escenario 2: Variación en λ**. Se ajusta el parámetro λ en un 10 % hacia arriba y hacia abajo. Este parámetro controla la importancia del término de la cópula en la función objetivo, por lo que las perturbaciones permiten ver cómo afecta la dependencia entre las primas ajustadas.

- **Escenario 3: Variación en** β. El parámetro β regula la importancia de las correlaciones de riesgo entre los grupos. En este escenario, también se perturba en un 10 % hacia arriba y hacia abajo.

- **Escenario 4: Correlaciones** ρ_{ij} **en Cero**. En este escenario, se anulan las correlaciones entre los grupos asegurados ($\rho_{ij} = 0$) para ver cómo se comporta el modelo sin tener en cuenta las dependencias de riesgo.

- **Escenario 5: Perturbaciones en** ρ_{ij}. Finalmente, se introduce una perturbación aleatoria del 10 % en los valores originales de ρ_{ij}, para simular escenarios en los que las correlaciones son ligeramente diferentes a las estimadas.

Metodología

Para cada uno de los escenarios mencionados, se aplicaron los tres métodos de optimización desarrollados en este trabajo: **PSO** (Optimización por Enjambre de Partículas), **SA** (Recocido Simulado) y **GD** (Gradiente Descendente). Se midieron las siguientes métricas de evaluación en cada escenario:

- **Error Cuadrático Medio (MSE)**: Mide la precisión de las primas ajustadas respecto a las primas originales.

- **MAPE (Error Absoluto Porcentual Medio)**: Evalúa el porcentaje medio de error entre las primas ajustadas y las primas originales.

- **Raíz del Error Cuadrático Medio (RMSE)**: Similar al MSE, pero más sensible a los errores grandes.

- **Coeficiente de Determinación (R^2)**: Mide qué tan bien se ajustan las primas ajustadas a las originales.

Cada uno de los métodos de optimización fue ajustado con los mismos parámetros base, con variaciones introducidas para cada escenario de sensibilidad. A continuación, se presentan los resultados de los análisis para cada escenario:

3.6.4. Análisis de Sensibilidad

El análisis de sensibilidad es una herramienta fundamental para evaluar la robustez de un modelo frente a variaciones en los parámetros críticos. En este trabajo, se ha realizado un análisis exhaustivo sobre tres de los principales componentes del modelo: los parámetros λ, β, el exceso utilizado en la distribución de las primas ajustadas, y las correlaciones de riesgo ρ_{ij}.

Este análisis permite identificar cómo estos parámetros afectan el ajuste final de las primas, así como la estabilidad de los diferentes métodos de optimización utilizados, tales como PSO, recocido simulado (SA) y gradiente descendente (GD). A continuación, se detallan los escenarios evaluados.

Escenario 1: Variaciones en el Exceso

El exceso es un componente clave del modelo, ya que representa la parte adicional que se distribuye proporcionalmente entre las diferentes primas ajustadas. Se ha evaluado la sensibilidad del modelo frente a variaciones del **10 %** tanto al alza como a la baja en el exceso. Esta variación permite analizar si el modelo se mantiene estable o si presenta grandes fluctuaciones en las primas ajustadas y en los resultados de los métodos de optimización.

Para cada variación en el exceso, se ejecutaron los tres métodos de optimización (PSO, SA y GD), evaluando las primas ajustadas y los valores obtenidos para la función objetivo. Los resultados obtenidos serán analizados en términos del *Mean Squared Error (MSE)* y otros indicadores de rendimiento.

Resultados del Escenario 1:

Cuadro 3.1: Resultados de Sensibilidad (Parte 1) para Exceso -10 % (en millones)

Método	MSE Original (mill)	MSE Sensibilidad (mill)	RMSE Original (mill)	RMSE Sensibilidad (mill)
PSO	822.00	665.81	0.91	0.82
SA	2843.63	2300.79	1.69	1.52
GD	3205.46	2622.36	1.79	1.62

Cuadro 3.2: Resultados de Sensibilidad (Parte 2) para Exceso -10 %

Método	MAPE Original	MAPE Sensibilidad	R2 Original	R2 Sensibilidad
PSO	226.48	203.83	0.99	0.99
SA	13.88	12.63	0.98	0.98
GD	11.06	10.4	0.98	0.98

Escenario 2: Variaciones en el Parámetro λ

El parámetro λ controla la importancia del término de la cópula dentro de la función objetivo, lo que impacta directamente en la forma en que se ajustan las primas en función de las dependencias entre riesgos. Se han analizado variaciones del **10 %** al alza y a la baja en el valor de λ, con el objetivo de determinar el impacto que estas modificaciones tienen en las primas ajustadas y en la estabilidad del modelo.

El análisis incluye la ejecución de los tres métodos de optimización bajo diferentes configuraciones de λ, comparando las primas ajustadas y los errores de ajuste resultantes.

Resultados del Escenario 2:

Cuadro 3.3: Resultados de Sensibilidad (Parte 1) para Lambda +10 % (en millones)

Método	MSE Original (mill)	MSE Sensibilidad (mill)	RMSE Original (mill)	RMSE Sensibilidad (mill)
PSO	822.00	822.00	0.91	0.91
SA	2843.63	2843.57	1.69	1.69
GD	3205.46	3205.46	1.79	1.79

Cuadro 3.4: Resultados de Sensibilidad (Parte 2) para Lambda +10 %

Método	MAPE Original	MAPE Sensibilidad	R2 Original	R2 Sensibilidad
PSO	226.48	226.48	0.99	0.99
SA	13.88	13.89	0.98	0.98
GD	11.06	11.06	0.98	0.98

Cuadro 3.5: Resultados de Sensibilidad (Parte 1) para Lambda -10 % (en millones)

Método	MSE Original (mill)	MSE Sensibilidad (mill)	RMSE Original (mill)	RMSE Sensibilidad (mill)
PSO	822.00	822.00	0.91	0.91
SA	2843.63	2843.63	1.69	1.69
GD	3205.46	3205.46	1.79	1.79

Cuadro 3.6: Resultados de Sensibilidad (Parte 2) para Lambda -10 %

Método	MAPE Original	MAPE Sensibilidad	R2 Original	R2 Sensibilidad
PSO	226.48	226.48	0.99	0.99
SA	13.88	13.87	0.98	0.98
GD	11.06	11.06	0.98	0.98

Escenario 3: Variaciones en el Parámetro β

El parámetro β tiene una influencia significativa en la correlación de riesgos dentro de la función objetivo. Se han realizado variaciones del **10 %** en β, tanto al alza como a la baja, para observar si el modelo presenta sensibilidad a cambios en este parámetro. Como en los escenarios anteriores, se emplearon los tres métodos de optimización (PSO, SA y GD) para ajustar las primas bajo estas nuevas condiciones.

Resultados del Escenario 3:

Cuadro 3.7: Resultados de Sensibilidad (Parte 1) para Beta +10 % (en millones)

Método	MSE Original (mill)	MSE Sensibilidad (mill)	RMSE Original (mill)	RMSE Sensibilidad (mill)
PSO	822.00	822.00	0.91	0.91
SA	2843.63	2843.73	1.69	1.69
GD	3205.46	3121.90	1.79	1.77

Cuadro 3.8: Resultados de Sensibilidad (Parte 2) para Beta +10 %

Método	MAPE Original	MAPE Sensibilidad	R2 Original	R2 Sensibilidad
PSO	226.48	226.48	0.99	0.99
SA	13.88	13.87	0.98	0.98
GD	11.06	15.3	0.98	0.98

Cuadro 3.9: Resultados de Sensibilidad (Parte 1) para Beta -10 % (en millones)

Método	MSE Original (mill)	MSE Sensibilidad (mill)	RMSE Original (mill)	RMSE Sensibilidad (mill)
PSO	822.00	822.00	0.91	0.91
SA	2843.63	2843.78	1.69	1.69
GD	3205.46	3121.90	1.79	1.77

Cuadro 3.10: Resultados de Sensibilidad (Parte 2) para Beta -10 %

Método	MAPE Original	MAPE Sensibilidad	R2 Original	R2 Sensibilidad
PSO	226.48	226.48	0.99	0.99
SA	13.88	13.87	0.98	0.98
GD	11.06	15.3	0.98	0.98

Escenario 4: Sensibilidad a las Correlaciones ρ_{ij}

Además de los parámetros mencionados, se evaluó la sensibilidad del modelo frente a variaciones en las correlaciones ρ_{ij}. En este contexto, se consideraron dos casos:

- **Correlaciones Nulas:** En este escenario, se asignó un valor de cero a todas las correlaciones ρ_{ij}. Este análisis es relevante para entender el comportamiento del modelo en un contexto donde no se asume dependencia entre los distintos riesgos.
- **Perturbaciones Aleatorias:** Para este escenario, se introdujeron perturbaciones aleatorias de magnitud pequeña (del orden de un **10 %**) en las correlaciones ρ_{ij}, con el objetivo de evaluar la estabilidad del modelo frente a pequeños cambios en las dependencias de riesgo.

En ambos casos, se analizaron los resultados obtenidos con los tres métodos de optimización, comparando las primas ajustadas, el MSE y otros indicadores clave para determinar si el modelo es sensible a variaciones en ρ_{ij} y hasta qué punto estas dependencias afectan los resultados finales.

Resultados del Escenario 4:

Cuadro 3.11: Resultados de Sensibilidad (Parte 1) para Rho en Cero (en millones)

Método	MSE Original (mill)	MSE Sensibilidad (mill)	RMSE Original (mill)	RMSE Sensibilidad (mill)
PSO	822.00	822.00	0.91	0.91
SA	2843.63	2843.45	1.69	1.69
GD	3205.46	3121.90	1.79	1.77

Cuadro 3.12: Resultados de Sensibilidad (Parte 2) para Rho en Cero

Método	MAPE Original	MAPE Sensibilidad	R2 Original	R2 Sensibilidad
PSO	226.48	226.48	0.99	0.99
SA	13.88	13.92	0.98	0.98
GD	11.06	15.3	0.98	0.98

Cuadro 3.13: Resultados de Sensibilidad (Parte 1) para Rho Perturbado (en millones)

Método	MSE Original (mill)	MSE Sensibilidad (mill)	RMSE Original (mill)	RMSE Sensibilidad (mill)
PSO	822.00	822.00	0.91	0.91
SA	2843.63	2843.58	1.69	1.69
GD	3205.46	3121.90	1.79	1.77

Cuadro 3.14: Resultados de Sensibilidad (Parte 2) para Rho Perturbado

Método	MAPE Original	MAPE Sensibilidad	R2 Original	R2 Sensibilidad
PSO	226.48	226.48	0.99	0.99
SA	13.88	13.88	0.98	0.98
GD	11.06	15.3	0.98	0.98

Conclusiones del Análisis de Sensibilidad

El análisis de sensibilidad realizado ha proporcionado valiosa información sobre la robustez del modelo frente a variaciones en los parámetros λ, β, el exceso, y las correlaciones ρ_{ij}, evaluando el rendimiento de tres métodos de optimización: PSO, recocido simulado (SA), y gradiente descendente (GD).

- **Robustez general del modelo:** En la mayoría de los escenarios, el modelo mostró una estabilidad notable frente a variaciones del 10 % en los parámetros clave, con cambios relativamente menores en el MSE, RMSE, y MAPE. Esto sugiere que el modelo es capaz de mantener su efectividad bajo condiciones ligeramente diferentes a las condiciones iniciales, lo que refuerza la solidez del enfoque aplicado en este trabajo.

- **Efecto de las variaciones en el exceso:** El análisis demostró que una variación en el exceso impacta significativamente el ajuste de las primas, con un descenso en el MSE y el RMSE cuando el exceso disminuye un 10 %, y resultados más estables en el caso de incrementos. Esto indica que el modelo es ligeramente más sensible a reducciones en el exceso, especialmente en lo que respecta al ajuste de las primas ajustadas por el método de PSO.

- **Variaciones en los parámetros λ y β:** Tanto λ como β, parámetros fundamentales en la cópula y la correlación de riesgos, mostraron un impacto limitado en las métricas de ajuste, lo que indica que el modelo es relativamente insensible a pequeños cambios en estos parámetros. Sin embargo, en algunos casos, como en las variaciones de β, el método de GD mostró una mayor fluctuación en el MAPE, lo que podría sugerir una dependencia algo más fuerte de este parámetro en este método.

- **Sensibilidad a las correlaciones ρ_{ij}:** En el escenario de correlaciones nulas, los resultados no mostraron variaciones significativas respecto al escenario original. Sin embargo, las perturbaciones aleatorias introducidas en ρ_{ij} generaron fluctuaciones ligeras en el MAPE y el RMSE, lo que sugiere que el modelo es robusto ante pequeñas modificaciones en las correlaciones de riesgo. Esto reafirma la estabilidad del modelo en entornos donde las dependencias entre riesgos no se conocen con precisión absoluta.

- **Comparación de métodos de optimización:** PSO demostró ser el método más estable y menos afectado por las variaciones de los parámetros en términos de MSE y RMSE. Por otro lado, el método de recocido simulado (SA) presentó fluctuaciones menores en el ajuste de primas, mientras que el método de gradiente descendente (GD) mostró algo más de sensibilidad a ciertos cambios, como en las variaciones de β, lo que sugiere una mayor dependencia de los parámetros iniciales en este método.

En resumen, el análisis de sensibilidad ha permitido validar la robustez general del modelo frente a variaciones moderadas en los parámetros clave, confirmando que el enfoque es adecuado para la estimación de primas en escenarios de dependencia de riesgo. Las fluctuaciones observadas, aunque menores, indican que el método de optimización utilizado puede influir en el ajuste final, pero las diferencias no comprometen la estabilidad general del modelo.

3.7. Implementación Práctica

3.7.1. Herramientas y Software Utilizado

En la implementación del modelo, se utilizó el lenguaje de programación **R** debido a su versatilidad para manipulación de datos, modelado estadístico y optimización. Los principales paquetes utilizados fueron:

- **fst**: Para leer y escribir archivos binarios de manera eficiente.
- **tidyverse**: Colección de paquetes que facilita la manipulación y visualización de datos.
- **stats**: Librería base de R para funciones estadísticas.
- **lpSolve**: Para resolver problemas de programación lineal.
- **copula**: Implementación de cópulas multivariadas para modelado de dependencias.
- **readxl**: Para la lectura de archivos Excel, muy útil en la etapa inicial de carga de datos.

- **rsample**: Para crear subconjuntos de datos, útil en la validación cruzada.
- **xtable**: Para la exportación de resultados en formato LaTeX.

El desarrollo del proyecto se realizó en **RStudio**, un IDE especializado para R que ofrece herramientas avanzadas para el análisis de datos, depuración de código y generación de reportes. En cuanto a la plataforma computacional, todo el proceso se realizó en una **PC portátil de alta gama**, lo que permitió manejar grandes volúmenes de datos y ejecutar modelos computacionalmente intensivos. A pesar de no utilizar servidores en la nube o infraestructura de paralelización avanzada, se logró ejecutar los modelos de manera eficiente dentro de las limitaciones de la máquina.

3.7.2. Procedimiento de Implementación

El proceso de implementación siguió varios pasos estructurados para garantizar una estimación precisa y eficiente de las primas ajustadas. El flujo de trabajo general consistió en:

1. **Preparación de los datos**: Los datos originales fueron transformados para cumplir con criterios de confidencialidad. La transformación incluyó la manipulación de las primas y el exceso, asegurando que las correlaciones de riesgo entre los grupos fueran consideradas en todo momento.

2. **Modelado**: Se implementaron tres métodos de optimización: **Optimización por Enjambre de Partículas (PSO)**, **Recocido Simulado (SA)** y **Gradiente Descendente (GD)**. Cada uno de estos métodos se ajustó para maximizar la precisión de las primas ajustadas a través de múltiples iteraciones y con diferentes configuraciones de parámetros.

3. **Optimización**: Para la selección del modelo de cópula óptimo, se utilizaron criterios de información como el **BIC** y el **AIC**, lo que permitió identificar el modelo de cópula que mejor representaba las dependencias de riesgo en los datos.

4. **Evaluación**: Se realizaron validaciones cruzadas dejando fuera un año, ajustando los parámetros con los años restantes y luego evaluando el ajuste con el año excluido. Las métricas de evaluación principales fueron el **MSE**, **MAPE**, **RMSE** y el coeficiente $\mathbf{R^2}$, con los cuales se compararon los tres métodos de optimización.

5. **Presentación de Resultados**: Los resultados se organizaron en cuadros comparativos, exportados en formato LaTeX utilizando el paquete **xtable**, lo que permitió una presentación clara y estructurada de las primas ajustadas y las métricas de error asociadas.

3.7.3. Desafíos y Soluciones

Durante la implementación, surgieron varios desafíos, tanto computacionales como algorítmicos, que requirieron soluciones adaptativas.

Problemas Encontrados

Computacionales: El principal desafío computacional fue el **tiempo de ejecución**, especialmente para los métodos como PSO que, debido a su naturaleza iterativa, requieren múltiples generaciones y enjambres. Esto incrementó considerablemente el tiempo de procesamiento, limitando la capacidad de explorar escenarios con un mayor número de iteraciones o enjambres. Además, la naturaleza de los algoritmos, particularmente el PSO, complicó la paralelización eficiente del proceso, lo que también aumentó los tiempos de espera.

Algorítmicos: El **Recocido Simulado (SA)** y el **Gradiente Descendente (GD)** presentaron un avance más lento hacia la convergencia, lo que creó la percepción de que estos métodos eran menos eficientes. Dado que el tiempo de ejecución es un factor limitante, especialmente al correr diferentes configuraciones o escenarios, la necesidad de encontrar soluciones más rápidas era crítica.

Datos: Aunque no hubo problemas graves con la calidad de los datos, la naturaleza confidencial de los mismos implicó la aplicación de transformaciones que alteraron su estructura original. Esto agregó una capa de complejidad, ya que cualquier cambio en los datos requería asegurarse de que las correlaciones de riesgo y otros parámetros críticos no se viesen comprometidos.

Soluciones Implementadas

Optimización Computacional: Aunque la paralelización completa no fue posible, se ajustaron los parámetros para minimizar el número de iteraciones y enjambres sin comprometer significativamente la precisión del modelo. Además, se mejoró el código para optimizar la ejecución y reducir redundancias.

Ajustes de Parámetros: La selección del modelo de cópula se basó en los criterios **BIC** y **AIC**, lo que permitió elegir el modelo que mejor se adaptaba a las dependencias de riesgo entre los grupos de asegurados. Esta selección fue crucial para ajustar de manera precisa las primas.

Mejora en la Estructura de los Datos: Los datos fueron transformados para cumplir con los requisitos de confidencialidad, lo que añadió una capa de protección sin afectar la validez del análisis. Sin embargo, estas transformaciones implicaron cambios en la estructura que fueron cuidadosamente manejados para preservar las correlaciones de riesgo esenciales para el modelo.

3.7.4. Conclusiones sobre la Implementación

A pesar de los desafíos computacionales y algorítmicos, el proceso de implementación resultó exitoso, logrando estimaciones precisas de primas ajustadas para cada grupo de riesgo. El uso de múltiples métodos de optimización (PSO, SA, GD) permitió comparar diferentes enfoques, destacando las fortalezas y debilidades de cada uno en términos de precisión y eficiencia computacional. Las mejoras en la estructura de los datos y la optimización de los parámetros aseguraron que los resultados fueran robustos y se ajustaran a los estándares de confidencialidad y precisión requeridos en un contexto real de gestión de riesgos en seguros.

3.8. Resultados y Discusión

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de los diferentes métodos de optimización aplicados para ajustar las primas a lo largo de los años de estudio. Los resultados permiten identificar cómo cada método (PSO, SA y GD) se desempeña en la redistribución de las primas, mostrando diferencias tanto en la capacidad de ajuste como en las métricas de error obtenidas. Estas diferencias son claves para evaluar la aplicabilidad y robustez de cada modelo en el contexto específico de la optimización de primas ajustadas. A continuación, se detalla el proceso de validación cruzada que nos permitió analizar de manera exhaustiva el rendimiento de los tres métodos de optimización.

3.8.1. Validación cruzada

La validación cruzada es un proceso esencial para evaluar la capacidad de generalización de un modelo. En este análisis, se realizó una validación cruzada de exclusión anual, es decir, para cada año, se ajustaron los parámetros del modelo utilizando los datos de los otros nueve años y se predijeron las primas ajustadas del año excluido. Este procedimiento se aplicó a los tres métodos de optimización utilizados: PSO, SA y GD.

Valores de la Función Objetivo

La función objetivo, la cual refleja el ajuste de las primas ajustadas a los valores reales bajo los parámetros seleccionados, es un indicador clave para evaluar el desempeño de los modelos. A continuación, se presentan los resultados de los valores de la función objetivo para los diez años, divididos en tres tablas para una mayor claridad.

Resultados:

Cuadro 3.15: Valores de la Función Objetivo (en millones) — Años 1 a 4

Método	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
PSO	733.56	1066.38	1738.43	5297.97
SA	2323.50	3191.67	5785.37	18372.20
GD	2260.61	3081.15	6443.20	19015.70

Cuadro 3.16: Valores de la Función Objetivo (en millones) — Años 5 a 8

Método	Año 5	Año 6	Año 7	Año 8
PSO	7095.19	8674.28	9460.21	6357.75
SA	24690.93	30530.33	33888.26	23091.60
GD	27361.99	33520.87	36944.08	22036.56

Cuadro 3.17: Valores de la Función Objetivo (en millones) — Años 9 y 10

Método	Año 9	Año 10
PSO	12202.41	3997.36
SA	46378.99	14789.52
GD	47698.47	13676.87

Análisis:

Los resultados obtenidos muestran que el método PSO tiene consistentemente los valores de la función objetivo más bajos, lo que sugiere que es el método que mejor ajusta las primas en la mayoría de los años. Esto es especialmente notable en los primeros años (Año 1 a Año 5), donde PSO supera claramente a los otros métodos. Sin embargo, conforme se avanza hacia los últimos años (Año 6 a Año 10), las diferencias en los valores de la función objetivo entre PSO, SA y GD se incrementan, con SA y GD mostrando un comportamiento más errático, y con un notable aumento en los valores de la función objetivo en comparación con PSO.

Primas Ajustadas

Las primas ajustadas, que representan el resultado directo del ajuste del modelo, se presentan a continuación para los años 1 a 5 y los años 6 a 10, para cada uno de los métodos de optimización. Esta tabla es crucial para entender cómo se redistribuyen las primas ajustadas bajo cada método y cómo varía la asignación entre los diferentes grupos.

Resultados:

Cuadro 3.18: Primas Ajustadas (en millones) — Años 1 a 5, Método PSO

Grupo	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Grupo 1	4.84	5.53	4.15	5.27	4.61
Grupo 2	4.91	5.53	5.92	5.55	5.58
Grupo 3	1.32	1.54	1.52	1.90	2.14
Grupo 4	0.42	0.43	0.60	1.02	1.20
Grupo 5	30.71	30.99	33.77	36.77	34.06
Grupo 6	2.21	2.72	2.50	2.87	2.79

Cuadro 3.19: Primas Ajustadas (en millones) — Años 6 a 10, Método PSO

Grupo	Año 6	Año 7	Año 8	Año 9	Año 10
Grupo 1	5.51	5.43	2.85	3.78	2.88
Grupo 2	6.20	6.20	5.21	6.72	3.57
Grupo 3	2.02	2.64	1.64	2.25	1.30
Grupo 4	1.21	1.34	1.08	1.71	0.85
Grupo 5	37.06	41.28	26.99	39.97	22.65
Grupo 6	2.71	3.02	2.19	3.01	1.69

Cuadro 3.20: Primas Ajustadas (en millones) — Años 1 a 5, Método SA

Grupo	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Grupo 1	4.72	5.40	3.87	4.84	4.05
Grupo 2	4.78	5.40	5.76	5.16	5.17
Grupo 3	1.02	1.19	1.06	1.08	1.21
Grupo 4	0.08	0.01	0.07	0.09	0.13
Grupo 5	31.85	32.31	35.59	40.04	37.86
Grupo 6	1.96	2.44	2.10	2.16	1.96

Cuadro 3.21: Primas Ajustadas (en millones) — Años 6 a 10, Método SA

Grupo	Año 6	Año 7	Año 8	Año 9	Año 10
Grupo 1	4.96	4.78	2.16	2.77	2.43
Grupo 2	5.76	5.66	4.95	6.22	3.24
Grupo 3	0.95	1.59	0.73	0.97	0.58
Grupo 4	0.02	0.10	0.06	0.34	0.04
Grupo 5	41.28	45.76	30.68	45.27	25.63
Grupo 6	1.74	2.03	1.38	1.86	1.03

Cuadro 3.22: Primas Ajustadas (en millones) — Años 1 a 5, Método GD

Grupo	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Grupo 1	4.73	5.41	3.84	4.75	3.94
Grupo 2	4.80	5.42	5.68	5.04	5.02
Grupo 3	1.02	1.19	1.05	1.11	1.16
Grupo 4	0.08	0.00	0.07	0.18	0.15
Grupo 5	31.82	32.27	35.74	40.14	38.15
Grupo 6	1.96	2.45	2.08	2.17	1.96

Cuadro 3.23: Primas Ajustadas (en millones) — Años 6 a 10, Método GD

Grupo	Año 6	Año 7	Año 8	Año 9	Año 10
Grupo 1	4.84	4.64	2.19	2.68	2.46
Grupo 2	5.58	5.55	5.02	6.01	3.31
Grupo 3	0.97	1.58	0.71	1.13	0.59
Grupo 4	0.03	0.10	0.07	0.36	0.05
Grupo 5	41.59	46.05	30.56	45.39	25.46
Grupo 6	1.70	2.00	1.41	1.88	1.06

Análisis:

Las primas ajustadas muestran cómo los tres métodos distribuyen los riesgos entre los grupos (Grupo 1, Grupo 2, etc.) en los diferentes años. A lo largo de los diez años, observamos que PSO tiende a ser más estable en su distribución, mientras que los métodos SA y GD muestran variaciones más significativas. Estas diferencias pueden explicarse por la naturaleza de los algoritmos: mientras PSO optimiza basándose en un enjambre de soluciones, SA y GD, que se basan en métodos de recocido simulado y gradiente descendente respectivamente, tienden a explorar y ajustarse a un espacio de soluciones más dinámico, lo que genera mayor variabilidad en la distribución de primas ajustadas.

MSE y RMSE

El error cuadrático medio (MSE) y la raíz del error cuadrático medio (RMSE) son métricas cruciales para evaluar la precisión de las primas ajustadas en relación con las primas reales. A continuación, se muestran los valores de MSE y RMSE para los métodos PSO, SA y GD, divididos en dos tablas: una para los años 1 a 5 y otra para los años 6 a 10.

Resultados:

Cuadro 3.24: MSE (en millones) y RMSE (Años 1 a 5)

Año	MSE_PSO	RMSE_PSO	MSE_SA	RMSE_SA	MSE_GD	RMSE_GD
1	122260.11	349657.14	387250.47	622294.52	376768.57	613814.77
2	177731.00	421581.52	531944.78	729345.45	513525.07	716606.63
3	289738.90	538274.00	964229.20	981951.73	1073866.87	1036275.48
4	882994.59	939677.92	3062033.14	1749866.61	3169283.91	1780248.27
5	1182532.18	1087442.95	4115155.29	2028584.55	4560332.77	2135493.57

Cuadro 3.25: MSE (en millones) y RMSE (Años 6 a 10)

Año	MSE_PSO	RMSE_PSO	MSE_SA	RMSE_SA	MSE_GD	RMSE_GD
6	1445715.75	1202379.20	5088387.89	2255745.53	5586812.49	2363643.90
7	1576701.16	1255667.62	5648044.01	2376561.38	6157346.69	2481400.15
8	1059624.56	1029380.67	3848600.30	1961784.98	3672760.47	1916444.75
9	2033734.22	1426090.54	7729830.91	2780257.35	7949745.56	2819529.31
10	666227.83	816227.81	2464920.66	1570006.58	2279477.93	1509794.00

Análisis:

Los resultados indican que PSO tiene un rendimiento superior en términos de MSE y RMSE a lo largo de los años, lo que sugiere que el ajuste de las primas con este método es más preciso. Aunque SA y GD ofrecen buenos resultados, sus errores (MSE y RMSE) tienden a ser mayores en comparación con PSO, especialmente en los últimos años. Esto puede deberse a la mayor sensibilidad de SA y GD a las condiciones iniciales y a las fluctuaciones en los datos.

Promedio de MSE y RMSE por Método

Para obtener una visión más clara del rendimiento promedio de cada método a lo largo de los diez años, se calcularon los promedios de MSE y RMSE. A continuación, se muestra un resumen de estos resultados.

Resultados:

Cuadro 3.26: Promedio de MSE (en millones) y RMSE por Método

Método	Promedio_MSE (millones)	Promedio_RMSE
PSO	943726.03	906637.94
SA	3384039.67	1705639.87
GD	3533992.03	1737325.08

Análisis:

Al analizar los promedios de MSE y RMSE, queda claro que PSO es el método más eficiente, con los valores de error más bajos en ambas métricas. SA y GD, aunque son métodos robustos, presentan mayores errores promedio, lo que sugiere que PSO es más adecuado para este tipo de problema en términos de precisión en la estimación de primas ajustadas.

Conclusión de la Validación Cruzada

En resumen, los resultados de la validación cruzada confirman que el método PSO ofrece un mejor rendimiento en términos de ajuste de primas, con valores más bajos en la función objetivo, MSE y RMSE. Aunque SA y GD también ofrecen resultados competitivos, sus mayores errores sugieren que son menos estables y precisos en este contexto. Estos resultados refuerzan la recomendación de utilizar PSO para la optimización de primas ajustadas, debido a su capacidad para generalizar mejor en diferentes conjuntos de datos anuales y su menor variabilidad en las primas distribuidas.

3.8.2. Estimación de Primas Utilizando Todos los Años

En esta sección se presenta la estimación de primas ajustadas para los diferentes métodos de optimización: el *Optimización por Enjambre de Partículas* (PSO), el Recocido Simulado (SA), y el Gradiente Descendente (GD). Estos métodos fueron aplicados sobre todos los años de datos disponibles, con el fin de calcular las primas ajustadas para cada grupo y evaluar el rendimiento de cada método en términos de ajuste.

Los parámetros utilizados en la estimación incluyen las primas originales de cada grupo, las correlaciones entre los riesgos (ρ_{ij}), y los parámetros de la cópula, que permiten capturar la dependencia entre los distintos grupos. Estos parámetros se presentan en las siguientes tablas para proporcionar una visión clara de los valores y estructuras utilizados en los modelos de optimización.

Los resultados de la estimación muestran las primas ajustadas por cada método y las diferencias con respecto a las primas originales. Esta comparación es esencial para evaluar la capacidad de ajuste de cada método y analizar cómo varían las primas ajustadas en función del método utilizado. Además, se incluye un análisis cuantitativo de las métricas de error, tales como el MSE, el RMSE, el MAPE y el R^2, que permiten medir el rendimiento de cada modelo de manera objetiva.

Las correlaciones de riesgo (ρ_{ij}) entre los distintos grupos y los parámetros de la cópula juegan un papel crucial en la forma en que se ajustan las primas. A continuación, se presentan los valores de ρ_{ij}, los parámetros de la cópula, y los parámetros beta y lambda que fueron utilizados en el ajuste de las primas.

Grupo	Primas_Originales	rho_ig
Grupo 1	3577417.10	0.01
Grupo 2	4632155.73	0.42
Grupo 3	921996.94	0.67
Grupo 4	78271.09	0.66
Grupo 5	32518537.55	0.72
Grupo 6	1662931.48	0.41

Cuadro 3.27: Primas Originales y Correlaciones de Riesgo (rho$_{i}j$)

Parámetro	Valor
theta.1	0.38
theta.2	0.61
theta.3	-0.37
theta.4	-0.48
theta.5	0.15
theta.6	0.82
theta.7	0.45
theta.8	0.10
theta.9	0.24
theta.10	0.71
theta.11	0.65
theta.12	0.23
theta.13	-0.06
theta.14	0.39
theta.15	0.82
theta.16	0.57
theta.17	0.54
theta.18	-0.16
theta.19	0.73
theta.20	-0.41
theta.21	0.23

Cuadro 3.28: Parámetros de la Cópula Gaussiana

beta	lambda	Grupo.del.exceso.a.distribuir	exceso
119544.84	106642.36	103356724.68	5439827.61

Cuadro 3.29: Parámetros Beta, Lambda y Exceso

Comparación de Primas Originales y Ajustadas

Grupo	Primas Originales	Primas PSO	Primas SA	Primas GD
Grupo 1	3577417.10	4484054.95	4048520.27	3891840.61
Grupo 2	4632155.73	5538793.57	5228454.63	5090854.71
Grupo 3	921996.94	1828634.83	1077106.53	1036644.24
Grupo 4	78271.09	984909.43	132847.22	97119.66
Grupo 5	32518537.55	33425175.40	36437897.82	36889400.29
Grupo 6	1662931.48	2569569.34	1906311.05	1825278.00

Cuadro 3.30: Cuadro de Primas Originales y Ajustadas (PSO, SA, GD)

En el **Cuadro de Primas Originales y Ajustadas** se observan las estimaciones obtenidas por cada uno de los métodos para los seis grupos. Un aspecto fundamental que salta a la vista es la variabilidad en la magnitud de las primas ajustadas entre los métodos. El método PSO tiende a generar primas ajustadas más elevadas en comparación con los otros dos métodos, especialmente en los Grupos 3 y 4, donde la diferencia respecto a las primas originales es considerable. Por otro lado, los métodos SA y GD muestran ajustes más moderados, con el método GD proporcionando las primas más cercanas a las originales, en general.

El comportamiento del método SA destaca particularmente en el Grupo 5, donde la prima ajustada es significativamente superior a la prima original, lo que sugiere que este método está capturando efectos específicos de este grupo que no se reflejan de la misma manera en PSO o GD.

Diferencias entre Primas Originales y Ajustadas

Grupo	Diferencia$_PSO$	Diferencia$_SA$	Diferencia$_GD$
Grupo 1	906637.85	471103.16	314423.51
Grupo 2	906637.84	596298.90	458698.99
Grupo 3	906637.88	155109.59	114647.30
Grupo 4	906638.34	54576.13	18848.56
Grupo 5	906637.85	3919360.27	4370862.74
Grupo 6	906637.86	243379.57	162346.52

Cuadro 3.31: Cuadro de Diferencias entre Primas Originales y Ajustadas

El **Cuadro de Diferencias** nos brinda una visión directa de cuánto difieren las primas ajustadas respecto a las primas originales. En todos los grupos, se observa que el método PSO tiene una diferencia constante de aproximadamente 906,637 unidades con respecto a las primas originales. Esta consistencia en la diferencia sugiere que el algoritmo de PSO tiende a mantener un comportamiento sistemático en su ajuste, lo que podría estar relacionado con la estructura del exceso o las correlaciones internas del modelo.

Por otro lado, tanto SA como GD muestran diferencias más ajustadas y variables entre los grupos, destacando nuevamente en el Grupo 5 donde la diferencia en el caso de SA es considerablemente mayor. Esto puede indicar que SA tiene una mayor sensibilidad a ciertos patrones de datos en comparación con los otros métodos.

El **Gradiente Descendente** (GD), en general, ofrece las menores diferencias, lo que sugiere que este método tiene una capacidad más precisa para ajustar las primas a los valores originales, lo cual puede ser una ventaja significativa en términos de minimizar desviaciones en primas ajustadas en escenarios futuros.

Análisis de Métricas de Error

Métrica	PSO	SA	GD
MSE	821992346680.11	2670861107763.49	3242260613960.50
MAPE	226.48	23.21	13.07
RMSE	906637.94	1634276.94	1800627.84
R^2	0.99	0.98	0.98

Cuadro 3.32: Cuadro de Métricas de Error

Las **Métricas de Error** proporcionan una evaluación cuantitativa del desempeño de cada método de optimización. En términos de **MSE**, se observa que PSO presenta el menor valor (821,992,346,680.11), lo que indica que este método ofrece una mayor precisión en términos de la sumatoria cuadrática de los errores. Esto puede deberse a la capacidad del PSO para explorar de manera efectiva el espacio de soluciones en busca de un ajuste global. Sin embargo, el **RMSE** asociado a PSO es considerablemente alto (906,637.94), lo que sugiere que, aunque el ajuste general es bueno, existen desviaciones significativas en ciertos grupos, lo que resulta en errores grandes que influyen en el promedio cuadrático.

El método **Recocido Simulado (SA)**, aunque tiene un **MSE** más elevado, muestra un comportamiento competitivo en términos de **MAPE**, donde obtiene un valor de 23.21, lo que implica que, en términos relativos, los errores porcentuales son más pequeños que los de PSO. Sin embargo, su **RMSE** (1,634,276.94) es considerablemente mayor, lo que refuerza la hipótesis de que SA, en ciertos casos, ajusta de manera menos precisa debido a las exploraciones menos focalizadas del espacio de soluciones.

Gradiente Descendente (GD), por su parte, tiene el mayor **MSE** (3,242,260,613,960.50), lo que sugiere que en términos de error cuadrático, este método es el menos eficiente. Sin embargo, presenta el **MAPE** más bajo (13.07), lo que significa que los errores porcentuales relativos son los menores entre los tres métodos. Esto podría interpretarse como una ventaja del GD en la optimización local, donde logra ajustarse de manera precisa a los patrones generales de los datos, minimizando las desviaciones relativas.

Conclusiones

Los resultados obtenidos muestran diferencias claras en el comportamiento de los tres métodos de optimización aplicados. El **PSO**, aunque muestra un ajuste más consistente, tiende a generar primas más altas, lo que puede ser una ventaja en escenarios donde se prefiera un ajuste más conservador y menos arriesgado. Sin embargo, su desempeño en términos de **RMSE** sugiere que puede no ser el método ideal si el objetivo es minimizar grandes errores en ciertos grupos.

El **Recocido Simulado (SA)** muestra su fortaleza en la capacidad de capturar patrones en datos que otros métodos no detectan con la misma claridad. Esto se refleja en su capacidad de ajuste relativa (bajo **MAPE**), pero su alto **RMSE** sugiere que puede no ser adecuado para escenarios donde los grandes errores sean críticos.

Finalmente, el **Gradiente Descendente (GD)**, a pesar de tener el mayor **MSE**, se destaca por minimizar los errores porcentuales relativos, lo que lo convierte en un método competitivo en situaciones donde el ajuste preciso en términos relativos sea de mayor importancia que el error cuadrático acumulado. Esto lo convierte en una opción válida cuando se busca un equilibrio entre precisión y estabilidad en el ajuste.

En resumen, los resultados sugieren que no existe un método universalmente superior, y la elección del método de optimización debe depender del contexto y de las métricas que se consideren más relevantes para los objetivos del modelo.

Este estudio proporciona una evaluación exhaustiva del desempeño de tres métodos de optimización diferentes —PSO, SA y GD— aplicados al ajuste de primas de diferentes grupos. Los resultados obtenidos permiten identificar las fortalezas y debilidades de cada uno de los métodos, además de ofrecer valiosas recomendaciones para su implementación en futuros estudios.

3.8.3. Síntesis Final de Resultados

En resumen, cada método de optimización analizado muestra características particulares que lo hacen más adecuado según el criterio de evaluación utilizado. Mientras que PSO sobresale por su capacidad para minimizar el error acumulado total, SA y GD logran un mejor desempeño relativo en términos porcentuales. Estas diferencias serán retomadas en las conclusiones generales para establecer recomendaciones específicas de aplicación.

3.9. Conclusiones y Recomendaciones

Este estudio proporciona una evaluación del desempeño de tres métodos de optimización diferentes —PSO, SA y GD— aplicados al ajuste de primas en un entorno multigrupo. Los resultados obtenidos permiten identificar fortalezas y debilidades específicas de cada método y ofrecen una base sólida para recomendar su uso según distintos objetivos de ajuste.

3.9.1. Conclusiones del Estudio

El método de **Optimización por Enjambre de Partículas (PSO)** se destaca por su consistencia en la redistribución de primas y su bajo valor en la función objetivo, así como por el menor Error Cuadrático Medio (MSE). Estos resultados lo posicionan como una opción preferente cuando el objetivo es minimizar el error absoluto acumulado. No obstante, su mayor Raíz del Error Cuadrático Medio (RMSE) indica que puede generar mayores desviaciones individuales en ciertos grupos.

El **Recocido Simulado (SA)** mostró un comportamiento competitivo en términos del Error Porcentual Absoluto Medio (MAPE), lo que indica un mejor desempeño relativo. Sin embargo, su RMSE elevado refleja menos precisión en ciertos extremos del ajuste.

Por su parte, el **Gradiente Descendente (GD)** se caracteriza por tener el mayor MSE, pero logra el MAPE más bajo, lo que lo convierte en una herramienta eficaz para minimizar errores relativos, especialmente en escenarios donde la proporción del error respecto a las primas originales es más importante que el valor absoluto del error.

En conjunto, los tres métodos ofrecen soluciones viables y complementarias para la redistribución de primas, siendo la elección del método dependiente del objetivo del ajuste: precisión global (PSO) versus precisión relativa (GD/SA).

3.9.2. Implicaciones Prácticas

Desde una perspectiva práctica, la elección del método debe estar alineada con los objetivos de negocio o regulatorios:

- Si se desea minimizar el desajuste absoluto total entre primas proyectadas y originales, **PSO** es el método más recomendable.
- Si se prioriza mantener una relación porcentual estrecha entre primas ajustadas y originales para todos los grupos, métodos como **GD** y **SA** pueden ser más adecuados.

Además, los tres métodos permiten incorporar estructuras de dependencia entre grupos y otras características relevantes del riesgo, ofreciendo una alternativa sólida frente a enfoques tradicionales de asignación de primas. Su uso puede contribuir a una distribución más equitativa y técnica del monto de primas a recaudar, particularmente en contextos donde se busca reflejar correlaciones de riesgo y redistribuir cargas derivadas de excesos asignados a ciertos grupos.

3.9.3. Recomendaciones para Futuros Estudios

A partir de los resultados obtenidos, es posible sugerir algunos caminos para profundizar y ampliar este análisis en futuros trabajos:

- **Explorar otros métodos de optimización**: Aunque PSO, SA y GD mostraron buen rendimiento, explorar métodos adicionales, como *genetic algorithms* o *simulated particle evolution*, podría ayudar a identificar enfoques más efectivos o complementarios.

- **Modelos dinámicos de riesgo**: Integrar modelos que capten las dinámicas temporales, como los modelos de series de tiempo, podría mejorar la estimación de primas en escenarios futuros, particularmente en grupos con alta variabilidad.
- **Ampliar la base de datos**: Utilizar un mayor volumen de datos históricos o incorporar proyecciones de datos futuros mediante simulaciones, podría contribuir a la precisión y estabilidad de los modelos.

Bibliografía

[1] Oxford Academic. The evolution of actuarial science to 1848. 2024.

[2] Paul Embrechts Alexander J. McNeil, Rüdiger Frey. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*. Princeton University Press, 2005.

[3] Sylvain Arlot and Alain Celisse. A survey of cross-validation procedures for model selection. *Statistics surveys*, 4:40–79, 2010.

[4] Various Authors. Metaheuristic optimization: Algorithm analysis and open problems. *arXiv*, 2021.

[5] A. Chen, P. Hieber, and T. Nguyen. Funding life insurance contracts with guarantees: How can we optimally respond to the policyholder's needs? *SSRN Electronic Journal*, 2017.

[6] David Beaudoin Christian Genest, Bruno Rémillard. Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4):347–368, 2007.

[7] Maurice Clerc. Particle swarm optimization. *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*, 2010.

[8] Maurice Clerc. Particle swarm optimization. *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*, 2010.

[9] Stefano Demarta and Alexander J. McNeil. The t copula and related copulas. *International Statistical Review*, 73(1):111–129, 2005.

[10] Russell C. Eberhart and James Kennedy. Particle swarm optimization. pages 1942–1948, 1995.

[11] Paul Embrechts, Alexander J. McNeil, and Daniel Straumann. *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*. ETH Zurich, 2013.

[12] Edward W. Frees and Emiliano A. Valdez. Understanding relationships using copulas. *North American Actuarial Journal*, 2(1):1–25, 1998.

[13] Rüdiger Frey, Alexander McNeil, and Michael Nyfeler. *Copula Methods in Finance*. John Wiley & Sons, 2010.

[14] Ferrier G. D. Goffe, W. L. and J. Rogers. Global optimization of statistical functions with simulated annealing. *Journal of Econometrics*, 60(1-2):65–99, 1994.

[15] Trevor Hastie, Robert Tibshirani, and Jerome Friedman. *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction*. Springer Science & Business Media, 2009.

[16] P. Hieber, J. Natolski, and R. Werner. Fair valuation of cliquet-style return guarantees in a heterogeneous life insurance portfolio. *SSRN Electronic Journal*, 2016.

[17] Aaron Courville Ian Goodfellow, Yoshua Bengio. *Deep Learning*. MIT Press, 2016.

[18] Corporate Finance Institute. Actuarial science - overview, history, and applications. 2024.

[19] Meetu Jain, Vibha Saihjpal, Narinder Singh, and Satya Bir Singh. An overview of variants and advancements of pso algorithm. *Applied Sciences*, 12(17):8392, 2022.

[20] Gareth James, Daniela Witten, Trevor Hastie, and Robert Tibshirani. *An Introduction to Statistical Learning*. Springer, 2013.

[21] Harry Joe. *Dependence Modeling with Copulas*. CRC Press, 2014.

[22] James Kennedy and Russell C. Eberhart. A discrete binary version of the particle swarm algorithm. *Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, 5:4104–4108, 1997.

[23] James Kennedy and Russell C. Eberhart. A discrete binary version of the particle swarm algorithm. *Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, 5:4104–4108, 1997.

[24] Diederik P Kingma and Jimmy Ba. Adam: A method for stochastic optimization. *arXiv preprint arXiv:1412.6980*, 2014.

[25] Gelatt C. D. Kirkpatrick, S. and M. P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598):671–680, 1983.

[26] Yun-Chia Liang, Mehmet Fatih Tasgetiren, Quan-Ke Pan, and Hsiang-Ling Chen. Metaheuristic algorithms in optimization and applications. *Algorithms*, 2021.

[27] The Actuary Magazine. The history of actuarial science. 2024.

[28] H Liu Mengdi Wang, EX Fang. Stochastic compositional gradient descent: algorithms for minimizing compositions of expected-value functions. *Mathematical Programming*, 161:419–449, 2017.

[29] Rosenbluth A. W. Rosenbluth M. N. Teller A. H. Metropolis, N. and E. Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *The Journal of Chemical Physics*, 21(6):1087–1092, 1953.

[30] Douglas C Montgomery, Elizabeth A Peck, and G Geoffrey Vining. *Introduction to Linear Regression Analysis*. John Wiley & Sons, 2012.

[31] Roger B. Nelsen. *An Introduction to Copulas*. Springer Science Business Media, 2006.

[32] Daniel Straumann Paul Embrechts, Alexander McNeil. Modelling dependence with copulas and applications to risk management. *ETH Zurich*, 2001.

[33] Fernando Peres and Mauro Castelli. Combinatorial optimization problems and metaheuristics: Review, challenges, design, and development. *Applied Sciences*, 11(14):6449, 2021.

[34] D Wang Qiang Liu. Stein variational gradient descent: A general purpose bayesian inference algorithm. *Advances In Neural Information Processing Systems*, pages 2370–2378, 2016.

[35] Sebastian Ruder. An overview of gradient descent optimization algorithms. *arXiv preprint arXiv:1609.04747*, 2016.

[36] H. Schmeiser and J. Wagner. A proposal on how the regulator should set minimum interest rate guarantees in participating life insurance contracts. *Journal of Risk and Insurance*, 82(3):659–686, 2015.

[37] Yuhui Shi and Russell Eberhart. Particle swarm optimization: Developments, applications and resources. *Proceedings of the 2001 Congress on Evolutionary Computation*, 1:81–86, 2001.

[38] S. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II.* Springer, New York, 2004.

[39] Haochuan Li Liwei Wang Xiyu Zhai Simon Du, Jason Lee. Gradient descent finds global minima of deep neural networks. *International conference on machine learning*, pages 1675–1685, 2019.

[40] Mervyn Stone. Cross-validatory choice and assessment of statistical predictions. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 36(2):111–133, 1974.

[41] P. J. M. van Laarhoven and E. H. L. Aarts. *Simulated Annealing: Theory and Applications.* Springer, 1987.

[42] Sahil Verma and Julia Rubin. Fairness definitions explained. *Proceedings of the 2021 ACM Conference on Fairness, Accountability, and Transparency*, 2021.

[43] J. Wagner, P. Hieber, and R. Werner. Optimal asset allocation in life insurance: The impact of regulation. *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 46(3):373–409, 2017.

[44] Papers with Code. Metaheuristic optimization. 2021.

[45] Mario V. Wüthrich and Hans Bühlmann. *Market-Consistent Actuarial Valuation*. Springer, 2010.

[46] Mario V. Wüthrich and Michael Merz. *Statistical Modeling for Non-Life Insurance*. Springer, 2008.

[47] V. Černý. Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 45:41–51, 1985.

Anexos

Código R Seleccionado

En esta sección se presentan fragmentos seleccionados del código R utilizado en el desarrollo del Trabajo final de investigación . Se han incluido únicamente las funciones más relevantes para el modelado y la optimización, excluyendo procesos de carga y limpieza de datos.

A1: Función de Evaluación de la Función Objetivo

```
eval_funcion <- function(x, y, correlaciones, beta, lambda, copula_funcion, copula_
    parametros, grupo_exceso) {
  termino_estabilidad <- sum((x - y)^2)
  termino_correlacion <- -beta * sum(abs(correlaciones) * (x / y))
  termino_dependencia <- lambda * copula_funcion(x, copula_parametros, grupo_exceso)
  return(termino_estabilidad + termino_correlacion + termino_dependencia)
}
```

A2: Ajuste para Cumplimiento de Restricciones

```
ajustar_restricciones <- function(x, y, exceso) {
  n <- length(y)
  x[1:n] <- pmax(x[1:n], y)
  suma_actual <- sum(x[1:n])
  suma_deseada <- sum(y) + exceso
  if (!is.na(suma_actual) && suma_actual != suma_deseada) {
    diferencia <- suma_actual - suma_deseada
    proporcion <- x / sum(x)
```

```
    ajuste <- proporcion * diferencia
    x[1:n] <- x[1:n] - ajuste
    x[1:n] <- pmax(x[1:n], y)
  }
  return(x)
}
```

A3: Cálculo del Término de Dependencia vía Cópula

```
calcular_dependencia_copula <- function(x, parametros, grupo_exceso) {
  library(copula)
  n <- length(x)
  u <- pnorm(x[1:n], mean = mean(x[1:n]), sd = sd(x[1:n]))
  u <- as.numeric(u)
  copula_normal <- normalCopula(param = parametros, dim = length(u))
  loglik <- log(dCopula(u, copula_normal))
  return(-sum(loglik))
}
```

A4: Implementación del Método de Gradiente Descendente (GD)

```
optimizar_gd <- function(x_inicial, y, correlaciones, beta, lambda, copula_funcion,
    copula_parametros, grupo_exceso, exceso, tasa_aprendizaje = 0.01, iteraciones =
    1000) {
  x <- x_inicial
  for (i in 1:iteraciones) {
    gradiente <- 2 * (x - y) - beta * abs(correlaciones) / y
    x <- x - tasa_aprendizaje * gradiente
    x <- ajustar_restricciones(x, y, exceso)
  }
  return(x)
}
```

A5: Implementación del Método de Recocido Simulado (SA)

```
optimizar_sa <- function(x_inicial, y, correlaciones, beta, lambda, copula_funcion,
    copula_parametros, grupo_exceso, exceso, temperatura_inicial = 1000, iteraciones =
    1000, tasa_enfriamiento = 0.99) {
  x_actual <- x_inicial
```

```
  valor_actual <- eval_funcion(x_actual, y, correlaciones, beta, lambda, copula_
      funcion, copula_parametros, grupo_exceso)
  temperatura <- temperatura_inicial
  for (i in 1:iteraciones) {
    vecino <- x_actual + rnorm(length(x_actual), 0, 0.1)
    vecino <- ajustar_restricciones(vecino, y, exceso)
    valor_vecino <- eval_funcion(vecino, y, correlaciones, beta, lambda, copula_
        funcion, copula_parametros, grupo_exceso)
    delta <- valor_vecino - valor_actual
    if (delta < 0 || runif(1) < exp(-delta / temperatura)) {
      x_actual <- vecino
      valor_actual <- valor_vecino
    }
    temperatura <- temperatura * tasa_enfriamiento
  }
  return(x_actual)
}
```