UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
SISTEMA DE ESTUDIOS DE POSGRADO

PROCESOS DE LÉVY CILÍNDRICOS: REGULARIZACIÓN E INTEGRACIÓN

Tesis sometida a la consideración de la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Matemática para optar al grado y título de Maestría Académica en Matemática con énfasis en Matemática Pura

ANDDY ENRIQUE ALVARADO SOLANO

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio, Costa Rica

2019

Dedicado a mi amigo, mentor y colega Christian Fonseca Mora. Sin él esto nunca hubiera sido posible... gracias por creer en mi y guiarme en el camino. "Seguimos trabajando..."

Agradecimientos

Quiero dar un especial agradecimiento a mi madre Eloísa Solano por todo su amor y apoyo brindado a lo largo del desarrollo de este trabajo. También un agradecimiento a mi querida Raquel Berrocal por su amor y el ánimo que me ha dado en cada paso. Un especial agradecimiento a mi amigo y colega Jorge Esquivel por su amistad brindada todo este tiempo. También agradezco a Darío Mena por su amistad, compañerismo y trabajo como lector. A su vez agradezco a Pedro Mendez por su labor realizada como lector, por ayudar en mi formación como matemático y siempre exigirme en la misma.

"Esta tesis fue aceptada por la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Matemática de la Universidad de Costa Rica, como requisito parcial para optar al grado y título de Maestría Académica en Matemáticas con énfasis en Matemática Pura"

Dr. Santiago Cambronero Villalobos
Representante del Decano del sistema de estudios de posgrado

Dr. Christian Fonseca Mora
Director de Tesis

Dr. Darío Mena Arias
Asesor

Dr. Pedro Méndez Hernández
Asesor

José David Campos Fdez

Dr. José David Campos Fernández
Representante del Director del programa de posgrado en Matemáticas

Anddy Alvarado Solano
Candidato

Índice general

Resumen

Para la presentación de los resultados de plantea una estructura de una tesis compuesta de 4 capítulos. Dichos capítulos están descritos acontinuación.

En el Capítulo 1 se presentan algunos preliminares necesarios para la comprensión de los temas centrales en los siguientes capítulos. Se supondrá que el lector está familiarizado con las propiedades básicas de los espacios de Hilbert, y solamente se realizará un breve repaso de algunas de las clases de operadores lineales que son relevantes para nuestro estudio. Similarmente, supondremos familiaridad con la teoría básica de procesos estocásticos en espacios de dimensión finita y solamente haremos un breve repaso por las propiedades más importantes de los procesos de Lévy que son clave para nuestros argumentos posteriores. Y por último se presentará breves resultados sobre procesos estocásticos que toman valores en un espacio de Hilbert, en particular se introducirán ejemplos.

En el Capítulo 2 se realizará una exposición de la teoría de procesos cilíndricos realizados en trabajos actuales. Se comenzará con el estudio de medidas cilíndricas sobre espacios de Hilbert. Se presentará la existencia de la descomposición cilíndrica de Lévy-Itô. Nuestra exposición está principalmente basada en la referencia [3].

En el Capítulo 3 se abordará el problema de probar la existencia de un proceso clásico de Lévy que corresponda a un proceso cilíndrico de Lévy que es mapeado mediante un operador de Hilbert-Schmidt. Dicho procedimiento es conocido como regularización o radonificación a través de un operador de tipo Hilbert-Schmidt. Es conocido que en general a todo proceso clásico de Lévy corresponde un proceso cilíndrico de Lévy, pero el recíproco es falso en general y por eso se necesita la regularización/radonificación a través de un operador, que resulta ser de tipo Hilbert-Schmidt. Dicho procedimiento es ampliamente conocido en la literatura para el caso de las llamadas semimartingalas cilíndricas [6, 18] y se supone cierto por los expertos para el caso de un proceso cilíndrico de Lévy, pero no hemos podido encontrar una prueba en la literatura. De este modo, se plantea proponer una prueba original para este resultado basándose en técnicas que ya han sido empleadas con éxito para el caso de un proceso cilíndrico de Lévy en espacios de distribuciones (véase [11, 12]). Además, se estudiarán los casos particulares de un proceso de Wiener cilíndrico y los procesos compuestos de Poisson cilíndricos y su efecto bajo esta regularización así como consecuencias relevantes gracias al mismo. El material de este capítulo constituye un aporte original en la teoría cilíndrica.

Finalmente, en el Capítulo 4 se expone la teoría de integración estocástica para familias de operadores aleatorios de tipo Hilbert-Schmidt con respecto a un proceso cilíndrico de Lévy que posee segundos moméntos débiles. Se tiene además como objetivo probar unas cuantas propiedades las cuales son las más importantes. Nuestra exposición se basará principalmente en las técnicas empleadas en [13]. Con las mismas se presenta los resultados

más originales del trabajo. Esta integral estocástica ya se ha trabajado en [27] no obstante implementaremos los resultados del capítulo 3 para obtener una presentación concisa y más simple del mismo resultado además que en algunos aspectos se mejora incluso el resultado.

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

SEP Sistema de Estudios de Posgrado

Autorización para digitalización y comunicación pública de Trabajos Finales de Graduación del Sistema de Estudios de Posgrado en el Repositorio Institucional de la Universidad de Costa Rica.

Yo, Anddy Alvarado Solano, con cédula de identidad 3-0474-0514, en mi condición de autor del TFG titulado Procesos de Lévy cilíndricos: Regularización e Integración.

Autorizo a la Universidad de Costa Rica para digitalizar y hacer divulgación pública de forma gratuita de dicho TFG a través del Repositorio Institucional u otro medio electrónico, para ser puesto a disposición del público según lo que establezca el Sistema de Estudios de Posgrado. **SI** [X] **NO** * [ ]

***En caso de la negativa favor indicar el tiempo de restricción: ______________ año (s).**

Este Trabajo Final de Graduación será publicado en formato PDF, o en el formato que en el momento se establezca, de tal forma que el acceso al mismo sea libre, con el fin de permitir la consulta e impresión, pero no su modificación.

Manifiesto que mi Trabajo Final de Graduación fue debidamente subido al sistema digital Kerwá y su contenido corresponde al documento original que sirvió para la obtención de mi título, y que su información no infringe ni violenta ningún derecho a terceros. El TFG además cuenta con el visto bueno de mi Director (a) de Tesis o Tutor (a) y cumplió con lo establecido en la revisión del Formato por parte del Sistema de Estudios de Posgrado.

INFORMACIÓN DEL ESTUDIANTE:

Nombre Completo: Anddy Enrique Alvarado Solano.

Número de Carné: B20300 Número de cédula: 3-0474-0514.

Correo Electrónico: anddy.alvarado@ucr.ac.cr.

Fecha: 19-12-19. Número de teléfono: 8750-2307.

Nombre del Director (a) de Tesis o Tutor (a): Christian Fonseca Mora.

FIRMA ESTUDIANTE

Nota: El presente documento constituye una declaración jurada, cuyos alcances aseguran a la Universidad, que su contenido sea tomado como cierto. Su importancia radica en que permite abreviar procedimientos administrativos, y al mismo tiempo genera una responsabilidad legal para que quien declare contrario a la verdad de lo que manifiesta, puede como consecuencia, enfrentar un proceso penal por delito de perjurio, tipificado en el artículo 318 de nuestro Código Penal. Lo anterior implica que el estudiante se vea forzado a realizar su mayor esfuerzo para que no sólo incluya información veraz en la Licencia de Publicación, sino que también realice diligentemente la gestión de subir el documento correcto en la plataforma digital Kerwá.

Introducción

En la última década y motivado por la creciente demanda de modelos más realistas para diferentes fenómenos en la física, biología, finanzas, estadística, entre otras, los procesos estocásticos cilíndricos han experimentado un creciente desarrollo como impulsores de ecuaciones diferenciales estocásticas y en derivadas parciales estocásticas en espacios de dimensión infinita. Se pueden mencionar por ejemplo los trabajos [13, 16, 26, 28, 29, 35].

En forma análoga a la definición de proceso estocástico (que denominaremos de ahora en adelante como un proceso estocástico clásico), un proceso estocástico cilíndrico se define como una colección de variables aleatorias cilíndricas, indexadas usualmente por un subconjunto de la parte positiva de la recta real. A su vez, una variable aleatoria cilíndrica es una generalización del concepto de variable aleatoria (clásica) definida en un espacio de dimensión infinita y que tiene la característica principal que su distribución de probabilidad es solamente finito aditiva. Las variables aleatorias cilíndricas han sido estudiadas principalmente desde la década de 1960, y bajo diferentes nombres dentro de los que se encuentran los *procesos estocásticos lineales* [5], los *procesos generalizados aleatorios* [14], las *funciones lineales aleatorias* [33], entre otros. Sin ninguna duda, la clase de procesos estocásticos cilíndricos más estudiada durante la segunda mitad del siglo pasado es el denominado movimiento Browniano cilíndrico (véase [7, 17, 20]). Sin embargo, aunque dicho proceso cilíndrico posee muchas propiedades interesantes y que facilitan su uso, posee limitaciones como modelo de ruido de ecuaciones diferenciales ya que se limita al caso Gaussiano y con trayectorias contínuas.

Precisamente buscando la posibilidad de considerar un modelo más general que permitiera trayectorias posiblemente discontínuas y cierta irregularidad en tiempo y en espacio, en [1] los autores introdujeron los procesos de Lévy cilíndricos en espacios de Banach como una generalización natural del movimiento Browniano cilíndrico. Desde entonces, dicha clase de procesos cilíndricos ha sido estudiada intensivamente y empleada como ruido en la definición de integración estocástica y su aplicación al estudio de ecuaciones diferenciales estocásticas, principalmente en el caso de un espacio de Hilbert. Véase por ejemplo [19, 27, 28, 29]. En este trabajo, el objetivo principal es abordar el estudio de los procesos cilíndricos de Lévy en un espacio de Hilbert y su correspondiente teoría de integración estocástica para el caso en que se presentan segundos momentos (en forma débil). Se busca en cierta manera contribuir al desarrollo del tema mediante la elaboración de un cuerpo teórico consistente que contenga los avances recientes en la materia y que además incluya algunos aspectos difíciles de encontrar en la literatura.

Se persigue además como meta hacer contribuciones con resultados nuevos que permitan ya sea mejorar la exposición, o bien permitir una mejor comprensión de la teoría conocida. Desarrollaremos una construcción de una integral estocástica respecto a estos procesos cilíndricos. Dicha construcción generalizará la teoría clásica de integración estocástica. Esto por tanto ayudará a realizar estudios futuros de modelos más complejos donde las herramientas conocidas son aún limitadas.

Actualmente se ha realizados trabajos para la construcción de integrales respecto a procesos de Lévy cilíndricos los cuales son [19] y [27], el primero se realizó suponiendo un proceso de Lévy sin momentos y el segundo trabajo se hizo suponiendo segundos momentos. En vista a la complejidad de trabajar con procesos de Lévy sin momentos, supondremos en el respectivo capítulo segundos momentos. Esto para realizar una construcción alternativa y más natural que la presentada en [27]. También con esto se probará una construcción de integrales más generales respecto a integradores más complejos, esto con el fin de realizar un preámbulo a proyectos futuros para su investigación.

En síntesis, en el presente trabajo tenemos tres principales objetivos:

- Hacer un cuerpo teórico consistente de la teoría cilíndrica necesaria para los objetivos presedentes.
- Establecer una relación entre los procesos de Lévy clásicos y Lévy cilíndricos. Más precisamente, demostrar una manera en que un proceso de Lévy cilíndrico pueda definir un proceso clásico de Lévy.
- Construir una integral estocástica respecto a un proceso de Lévy cilíndrico que generalice la teoría clásica de integración estocástica en espacios de dimensión infinita y además presentar una construcción más simple que las presentadas en trabajos realizados hasta la fecha.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se tiene por objetivo presentar los conceptos básicos en teoría de probabilidad tanto en el caso finito dimensional como en dimensión infinita. Además de conceptos básicos de análisis funcional.

§ 1.1 Nociones básicas de probabilidad

Para comenzar esta sección es propio empezar enunciando conceptos y resultados clásicos de teoría de la medida que serán fundamentales en argumentos de futuras secciones.

Definición 1.1.1. *([9], pág 402) Sea Ω un conjunto no vacío y sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de Ω. Se dice que $\mathcal{A}$ es un π-sistema si para todo $A, B \in \mathcal{A}$ se tiene $A \cap B \in \mathcal{A}$. Y diremos que $\mathcal{A}$ es un λ-sistema si: i) $\Omega \in \mathcal{A}$, ii) Si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \setminus B \in \mathcal{A}$ y iii) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ es una sucesión creciente entonces $\lim_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Por último denotaremos por $\lambda(\mathcal{A})$ al menor λ-sistema que contiene a $\mathcal{A}$.*

Teorema 1.1.1 (**Teorema de Dynkin**)**.** *([9], pág 402) Si $\mathcal{A}$ es un π-sistema entonces $\lambda(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$. En particular si $\mathcal{C}$ es un λ-sistema que contiene que contiene a $\mathcal{A}$ entonces $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}$, donde $\sigma(\mathcal{A})$ es la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$.*

Proposición 1.1.1. *([10], pág 43) Sean $(E, \mathcal{M}), (F, \mathcal{N})$ espacios de medida tal que $\mathcal{N}$ es generado por $\mathcal{E}$. Entonces $f : E \to F$ es $\mathcal{M}/\mathcal{N}$-medible si y solo si $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ para todo $A \in \mathcal{E}$.*

Consideremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que supondremos que es completo. Denotaremos mediante $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^n)$ al espacio de variables aleatorias, es decir las funciones $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ que son $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-medibles. Cuando $n = 1$, simplemente escribimos $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Para una variable aleatoria X podemos definir su distribución como $p_X(A) := \mathbb{P} \circ X^{-1}(A)$, para todo $A \in \mathcal{F}$. Mediante la distribución obtenemos una forma de integrar la variable aleatoria X ([1], pág 6). Dada una función medible $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, escribimos:

$$\mathbb{E}(f(X)) := \int_\Omega f(X(\omega))\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)p_X(dx).$$

Decimos que dos variables X y Y son iguales en distribución o bien identicamente distribuidas si sus distribuciones son iguales, en tal caso escribimos $X \stackrel{d}{=} Y$.

Con este sentido de integrabilidad cabe mencionar que al espacio $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se le puede dotar de una métrica: sea $d : L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \times L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}^+$ dada por:

$$d(X,Y) = \mathbb{E}\left(\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|} \right). \tag{1.1}$$

Más aún, hay una equivalencia entre convergencia en esta métrica y la convergencia en probabilidad. Además, $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un espacio métrico completo equipado con esta topología. Ver en [5], pág 2.

Sea X una variable aleatoria con primer momento (es decir, integrable) y sea $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Definimos la esperanza condicional de X como la variable aleatoria Y que satisface: i) Y es $\mathcal{G}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-medible e integrable y ii) para todo $A \in \mathcal{G}$ cumple $\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A)$. En caso que exista esta Y la denotamos por $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$. Entonces la esperanza condicional es la variable aleatoria que satisface $\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))$ esto para todo $A \in \mathcal{G}$. Si X es independiente de $\mathcal{G}$ entonces $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$. Además si consideramos $\mathbb{1}_A$ con $A \in \mathcal{G}$ entonces se satisface que $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A X|\mathcal{G}) = \mathbb{1}_A\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$. En general es válido si en lugar de $\mathbb{1}_A$ consideramos una variable medible Z respecto a $\mathcal{G}$ siempre y cuando la multiplicación de X con Y tenga sentido.

A una familia $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+} \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ le llamaremos un proceso estocástico. Para un $k \in \mathbb{N}$, la distribución finito dimensional de tamaño k del proceso $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es la colección de medidas de probabilidad $p_{t_1,\ldots,t_k}$ que definimos como:

$$p_{t_1,\ldots,t_k}(B) := \mathbb{P}((X_{t_1}, ..., X_{t_k}) \in B),$$

esto para $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{kn})$.

Dado un $t \geq 0$, llamaremos a una familia de sub-σ-álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+} \subset \mathcal{F}$ una filtración si $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ siempre que $s \leq t$. Al definir una filtración diremos que $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad filtrado. Ademá un proceso $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ si para todo $t \in \mathbb{R}^+$, X_t es $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-medible. A la filtración dada por $\{\sigma(X_t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ se le conoce como la filtración natural, y todo proceso es adaptado a su respectiva filtración natural. Si un proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ entonces su filtración natural está contenida en dicha filtración.

Diremos que una filtración satisface las hipótesis usuales si satisface las siguientes dos condiciones. La primera es que sea completa, o sea que $\mathcal{F}_0$ contiene a todos los conjuntos de probabilidad 0. La segunda condición es continuidad por la derecha, o sea que para cada t se cumple que $\mathcal{F}_t = \cap_{\epsilon>0}\mathcal{F}_{t+\epsilon}$.

Diremos que un proceso $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una versión de $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ si para cada $t \geq 0$ se tiene $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$. De esto se sigue que ambos procesos son iguales en distribución. Diremos que $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es indistinguible de $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ si $\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \in \mathbb{R}^+) = 1$ y en tal caso escribiremos $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+} = \{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Para un $\omega \in \Omega$ una trayectoria del proceso $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ se define como el mapeo $t \mapsto X_t(\omega)$. Diremos que un proceso $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es continuo si sus trayectorias son continuas casi seguramente, y diremos que es "càdlàg"(*continu à droite, limite à gauche*) si sus trayectorias son continuas por derecha y poseen límites por la izquierda casi seguramente.

Definiremos $C_I(\mathbb{R})$ para un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}^+$ como el espacio de los procesos continuos y con valores en $\mathbb{R}$ con $t \in I$. De forma análoga definimos el espacio $D_I(\mathbb{R})$ para los procesos càdlàg con valores reales. En el caso particular de que $I = [0,T]$ para $T \geq 0$, escribiremos simplemente $C_T(\mathbb{R})$ y $D_T(\mathbb{R})$.

Defina $d : C_T(\mathbb{R}) \times C_T(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$ (respectivamente para $D_T(\mathbb{R})$) dado por:

$$d(X,Y) = \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} \frac{|X_t - Y_t|}{1 + |X_t - Y_t|} \right),$$

donde $X = \{X_t\}_{t\in[0,T]}$ y $Y = \{Y_t\}_{t\in[0,T]}$. La convergencia en esta métrica equivale al siguiente modo de convergencia: decimos que una familia $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_T(\mathbb{R})$ converge uniformemente en probabilidad a $X = \{X_t\}_{t\in[0,T]}$ si para todo $\epsilon > 0$ se satisface:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^n - X_t| > \epsilon \right) = 0.$$

Note que la topología de $C_T(\mathbb{R})$ y $D_T(\mathbb{R})$ es inducida por la de $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ restringida al supremo. Y más aún, los espacios de trayectorias continuas y trayectorias càdlàg son espacios completos con esta métrica. De forma análoga definimos $C_{\mathbb{R}^+}(\mathbb{R})$ y $D_{\mathbb{R}^+}(\mathbb{R})$ con estas topologías son generadas por las seminormas de $C_{T_n}(\mathbb{R})$ y $D_{T_n}(\mathbb{R})$ respectivamente, donde $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente a $+\infty$.

Un resultadoúltil que nos simplificará argumentos posteriores es el siguiente

Lema 1.1.1. *Sean $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ procesos estocásticos con trayectorias càdlàg. Si $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una versión de $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ entonces los procesos son indistinguibles.*

Diremos que un proceso $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ adaptado a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala si para $0 \leq s < t$ se cumple $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$. Se satisface que $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_t) = X_t$, y si X_t es independiente de $\mathcal{F}_s$ entonces $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t)$. Asumiremos para este trabajo que todas las martingalas que consideremos serán càdlàg.

Un resultado útil sobre este tipo de procesos es el siguiente:

Teorema 1.1.2 (**Desigualdad Maximal de Doob**)**.** *([1], pág 74) Si $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ es una martingala entonces para $p > 1$ se tiene:*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^p \right) \leq q^p \mathbb{E}(|X_T|^p)$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Definimos el espacio de martingalas cuadrado integrables como:

$$\mathcal{M}_T^2(\mathbb{R}) := \{X = \{X_t\}_{t\in[0,T]} : \{X_t\}_{t\in[0,T]} \text{ martingala con } \|X\|_{\mathcal{M}_T^2} < \infty\},$$

donde:

$$\|X\|_{\mathcal{M}_T^2}^2 := \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|X_t|^2 = \sup_{t\in[0,T]} \|X_t\|_{L^2(\Omega,\mathbb{P})} < \infty.$$

En el caso en lugar de $[0,T]$ consideramos $\mathbb{R}^+$ entonces se denota $\mathcal{M}^2$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^2}$.

§ 1.2 Procesos de Lévy

Definición 1.2.1. *([1], pág 43) Dado un proceso estocástico* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *decimos que es un proceso de Lévy si satisface:*

- $X_0 = 0$ *casi seguramente.*
- $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *tiene incrementos estacionarios, es decir; para cualquier* $n \in \mathbb{N}$ *con* $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ *y* $j = 1, ..., n$ *se cumple* $X_{t_{j+1}} - X_{t_j} \overset{d}{=} X_{t_{j+1}-t_j} - X_0$.
- $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *tiene incrementos independientes, es decir; para cualquier* $n \in \mathbb{N}$ *con* $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$, *las variables* $X_{t_{j+1}} - X_{t_j}$ *son independientes para* $0 \leq j \leq n-1$.
- $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *es estocásticamente continuo, es decir; para todo* $\epsilon > 0$ *y para todo* $s \geq 0$ *se cumple:*
$$\lim_{t\to s} \mathbb{P}(|X_t - X_s| > \epsilon) = 0.$$

Tres ejemplos clásicos de procesos de Lévy y muy utilizados en aplicaciones son los siguientes:

Ejemplo 1.2.1 (**Proceso de Poisson**). *([1], pág 49) Considere un proceso* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *con valores en* $\mathbb{N}$. *Decimos que el proceso es de Poisson si es un proceso de Lévy y* $X_t \sim \pi(t\lambda)$ *con* $\lambda > 0$, *es decir* X_t *posee distribución de Poisson con parámetro* $t\lambda$. *A dicho* $\lambda > 0$ *se le suele llamar intensidad de* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$. *Es posible calcular y obtener que* $\mathbb{E}(X_t) = t\lambda$ *y además* $\varphi_{X_t}(u) = \exp\{t\lambda(e^{iu} - 1)\}$.

Ejemplo 1.2.2 (**Movimiento Browniano**). *([7], pág 81) Un proceso* $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *con valores en* $\mathbb{R}^n$ *se dice ser un movimiento Browniano si: i)* $B_0 = 0$ *ii) posee trayectorias continuas, iii) posee incrementos independientes y iv)* $B_t - B_s \sim N(0, |t-s|A)$, *es decir, posee distribución Gaussiana con media* 0 *y covarianza* $|t-s|A$, *donde* A *es una matriz simétrica* $n \times n$ *definido positiva. Si* $B_t - B_s \sim N(|t-s|m, |t-s|A)$, *se le llama un Movimiento Browniano con desplazamiento. En general se puede cálcular por definición que* $\varphi_{B_t}(u) = \exp\{t(i\langle m, u\rangle - \frac{1}{2}\langle u, Au\rangle)\}$, *pronto presentaremos el Corolario 1.2.1 de donde se concluirá que* $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *es un proceso de Lévy. Cabe mencionar que por continuidad se tiene* $\mathbb{E}(B_t) = tm$ *donde* $m = \mathbb{E}(B_1)$. *Si* $m = 0$ *y* $A = I$ *se le llama movimiento Browniano estandar.*

Ejemplo 1.2.3 (**Proceso Compuesto de Poisson**). *([1], pág 49) Considere la sucesión* $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que las variables son i.i.d con distribución común* p_Z *(por ende todas las funciones caracteristicas coinciden) y sea* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *un proceso de Poisson con* $N_t \sim \pi(t\lambda)$ *el cual es independiente de todo* $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Entonces un proceso compuesto de Poisson se define como:*
$$X_t = \begin{cases} 0 & si \quad N_t = 0 \\ \\ Z_1 + \cdots + Z_{N_t} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función característica de este proceso es $\varphi_{X_t}(u) = \exp\{t\lambda \int_{\mathbb{R}^n} (e^{i\langle u,y\rangle} - 1)p_Z(dy)\}$. *Se puede entender un proceso compuesto de Poisson como una caminata aleatoria con tiempo aleatorio.*

Teorema 1.2.1. *([1], pág 87) Todo proceso de Lévy tiene una versión càdlàg que es, a su vez, un proceso de Lévy.*

Definición 1.2.2. *([1], pág 29) Sea ν una medida Borel sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Decimos que ν es una medida de Lévy si:*

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} (|y|^2 \wedge 1)\nu(dy) < \infty.$$

Denotaremos $\Delta X_t = X_t - X_{t^-}$ como el proceso de salto de un proceso de Lévy $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$. Entonces, dado $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ definimos la medida aleatoria de Poisson asociada a ΔX_t como:

$$N_t(A)(\omega) = \#\{0 \leq s \leq t : \Delta X_s(\omega) \in A\} = \sum_{0\leq s\leq t} \mathbb{1}_A(\Delta X_s(\omega))$$

esta medida cuenta los saltos en el tiempo dentro de A.

Definimos la intensidad la cual es $\mu(A) = \mathbb{E}(N_1(A))$ y en general $\mathbb{E}(N_t(A)) = t\mu(A)$ y definimos con esta una medida de Poisson aleatoria compensada como $\tilde{N}_t(A)(\omega) = N_t(A)(\omega) - t\mu(A)$.

Con las medidas aleatorias definimos un nuevo tipo de integral, llamada integral de Poisson, la cual se establece, para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ medible, como:

$$\int_A f(x)N_t(dx) = \sum_{0\leq u\leq t} f(\Delta X_u)\mathbb{1}_A(\Delta X_u)$$

mientras que la integral compensada de Poisson se define como:

$$\int_A f(x)\tilde{N}_t(dx) = \int_A f(x)N_t(dx) - t\int_A f(x)\mu(dx).$$

Presentamos ahora el resultado más importante de los procesos de Lévy.

Teorema 1.2.2 (Descomposición de Lévy-Itô). *([1], pág 126) Si $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso de Lévy, entonces existe $b \in \mathbb{R}^n$, un movimiento Browniano con media nula $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ con covarianza A y una medida aleatoria de Poisson independiente $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ sobre $\mathbb{R}^+ \times \{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ tal que para cada $t \geq 0$ se cumple:*

$$X_t = bt + B_t + \int_{|x|<1} x\tilde{N}_t(dx) + \int_{|x|\geq 1} xN_t(dx).$$

Algo de suma importancia, es el término de saltos pequeños. En uno de los términos aparece la bola unitaria centrada en el origen la cual no es un conjunto inferiormente acotado, no obstante, hay que mencionar que es abuso de la notación ya que si se analiza la muy interesante construcción [1], pág 121 veremos que en realidad:

$$\int_{|x|<1} x\tilde{N}_t(dx) = L^2 - \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}<|x|<1} x\tilde{N}_t(dx).$$

Como consecuencia de este teorema, se obtiene un resultado que también caracteriza a la transformada de Fourier de un proceso de Lévy.

Corolario 1.2.1 (**Teorema de Lévy-Khintchine**). *([1], pág 29 ó pág 127) Si $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso de Lévy entonces existe $b\in\mathbb{R}^n$, una matriz $n\times n$, simétrica y definido positiva A y una medida de Lévy ν tal que para cada $t\in\mathbb{R}^+$:*

$$\varphi_{X_t}(u)=\exp\left\{t\left(i\langle b,u\rangle-\frac{1}{2}\langle u,Au\rangle+\int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}[e^{i\langle u,y\rangle}-1-i\langle u,y\rangle\mathbb{1}_B(y)]\nu(dy)\right)\right\},$$

donde $B=B_1(0)=\{y\in\mathbb{R}^n:|y|<1\}$. Reciprocamente, toda función $\varphi:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ dada por la expresión anterior para un vector $b\in\mathbb{R}^n$ y una matriz $n\times n$, simétrica y definido positiva A, es la función caracteristica de un proceso $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ de Lévy.

El recíproco del anterior resultado se puede demostrar a partir del uso de medidas infinitamente divisibles ([1], pág 24), pero por la identificación entre dichas medidas y procesos de Lévy se puede concluir el mismo para procesos. Por comodidad llamaremos a:

$$\eta(u)=i\langle b,u\rangle-\frac{1}{2}\langle u,Au\rangle+\int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}[e^{i\langle u,y\rangle}-1-i\langle u,y\rangle\mathbb{1}_B(y)]\nu(dy),$$

como el símbolo de Lévy. Y por la caracterización explicita de la transformada de Fourier llamaremos (b,A,ν) las caracteristicas de $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$.

§ 1.3 Operadores sobre espacios de Hilbert

Trabajaremos siempre es un espacio Hilbert separable H. Dada una familia ortonormal maximal $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ se cumple el siguiente desarrollo de Fourier:

$$h=\sum_{k=0}^{\infty}\langle h_k,h\rangle h_k \quad \text{para todo} \quad h\in H. \tag{1.2}$$

La notación $\langle\cdot,\cdot\rangle$ será asignada para referirnos al producto interno del espacio Hilbert.

Considere H,G dos espacios localmente convexos y un operador $T:H\to G$ lineal. Denotaremos por $\mathcal{L}(H,G)$ a la clase de operadores lineales y continuos de H en G. Si $H=G$ escribiremos $\mathcal{L}(H)$. Cuando H y G son normados, definimos la norma de $T\in\mathcal{L}(H,G)$ como $\|T\|:=\sup_{\|x\|<1}\|T(x)\|$. Si el espacio G es Banach, entonces $\mathcal{L}(H,G)$ es un espacio de Banach.

Otra alternativa para caracterizar a los operadores lineales que sean continuos es verificar que posee gráfico cerrado, o sea: T tiene gráfico cerrado si y solo si para cualquier sucesión $\{x_i\}_{i\in I}\subset E$ tal que $x_i\to x$ y $T(x_i)\to y$ se tiene que $y=T(x)$ ([24], pág 460).

El siguiente resultado será clave para desarrollar los objetivos del presente trabajo.

Teorema 1.3.1 (**Teorema del gráfico cerrado**). *(caso especial de [24], pág 475) Sea E espacio de Banach, F un espacio vectorial topológico completo y metrizable, y un operador lineal $T:E\to F$. Entonces T tiene gráfico cerrado si y solo si $T\in\mathcal{L}(E,F)$.*

Primero sean H y G espacios de Hilbert separables, entonces para $T\in\mathcal{L}(H,G)$ definimos su adjunto como el operador $T^*\in\mathcal{L}(G,H)$ que satisface $\langle Tx,y\rangle_H=\langle x,T^*y\rangle_G$ y diremos que es simétrico si $T = T^*$. Se puede definir la raíz cuadrada de un operador y con esta, definir el valor absoluto del mismo como $|T| := \sqrt{T^*T}$. Observese que si T es simétrico (ó autoadjunto) entonces $|T| = T$.

Definición 1.3.1. *([4], pág 153) Sea $T \in \mathcal{L}(H,G)$ y sea $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal completa, definimos la traza del operador como:*

$$Tr(T) := \sum_{k=0}^{\infty} \langle Th_k, h_k\rangle.$$

Definimos el espacio de operadores de traza finita como el conjunto $\mathcal{L}_1(H,G)$ de los operadores tales que $Tr(|T|) < \infty$.

Si $H = G$ escribimos $\mathcal{L}_1(H)$. Además denotaremos por $\mathcal{L}_1^+(H)$ la clase de operadores simétricos y de traza finita.

Definición 1.3.2. *([4], pág 151) Sea $S \in \mathcal{L}(H,G)$. Diremos que el operador S es de Hilbert-Schmidt si dado cualquier conjunto ortonormal completo $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ se tiene que:*

$$\|S\|^2_{\mathcal{L}_2(H,G)} := \sum_{k=0}^{\infty} \|S(h_k)\|^2_G < \infty.$$

A la clase de operadores de Hilbert-Schmidt la denotaremos por $\mathcal{L}_2(H,G)$, y si $H = G$ escribimos $\mathcal{L}_2(H)$. Observese que si $T \in \mathcal{L}(H)$ y $S \in \mathcal{L}_2(H)$ entonces $T\circ S, S\circ T \in \mathcal{L}_2(H)$. Si H, G son espacios de Hilbert entonces $\mathcal{L}_2(H,G)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno dado por $\langle S,T\rangle_{\mathcal{L}_2(H,G)} = \sum_{k=0}^{\infty} \langle S(h_k), T(h_k)\rangle_G$, para una base ortonormal de H. Y por último tenemos que si $S \in \mathcal{L}_2(H,G)$ entonces $S^* \in \mathcal{L}_2(G,H)$ y $\|S\|_{\mathcal{L}_2(H,G)} = \|S^*\|_{\mathcal{L}_2(G,H)}$.

§ 1.4 Procesos estocásticos en Espacios de Hilbert

En esta sección generalizamos los conceptos de la Sección 1.1 sobre espacios de Hilbert. En su mayoría las definiciones y conceptos son análogos. Lo que haremos es una mención breve de algunos conceptos distintos que necesitaremos.

Una función $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (H, \mathcal{B}(H))$ es variable aleatoria si es $\mathcal{F}/\mathcal{B}(H)$-medible y $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; H)$ el espacio de todas ellas equipado con la métrica (1.1) pero usando la norma de H. Llamamos distribución de X a $p_X(A) := \mathbb{P}\circ X^{-1}(A)$, para todo $A \in \mathcal{B}(H)$. Definimos la integral de una función medible $f : H \to H$, escribimos:

$$\mathbb{E}(f(X)) := \int_\Omega f(X(\omega))\mathbb{P}(d\omega) = \int_H f(x)p_X(dx).$$

Se define la función caracteristica como $\varphi : H \to \mathbb{C}$ dada por:

$$\varphi_X(h) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle X,h\rangle}\right).$$

Ejemplo 1.4.1 (Variable Aleatoria Gaussiana). *([25], pág 29) Decimos que una variable aleatoria X con valores en H es Gaussiana si para todo $h \in H$ se cumple*

$\langle X,h\rangle \sim N(m,A)$ como variable en $\mathbb{R}$. Aquí A es la respectiva covarianza de la variable Gaussiana $\langle X,h\rangle$. La función caracteristica de una variable Gaussiana está dada por:

$$\varphi_X(h) = e^{im(h)-\frac{1}{2}A(h)}$$

donde m es un funcional lineal y A es una forma cuadrática.

La definición de esperanza condicional es análoga. Cabe mencionar que si $T \in \mathcal{L}(H)$ (o inclusive en $\mathcal{L}(E,F)$ con F espacio de Banach separable), entonces $\mathbb{E}(T(X)|\mathcal{G}) = T(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))$ para $X \in L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};H)$ y $\mathcal{G}$ sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ (ver [25], pág 25).

Los procesos de Lévy con valores en un espacio de Hilbert se define igual que en la sección 2 solo que, evidentemente consideraremos normas en lugar de valores absolutos (ver [25], pág 38). Ahora mencionamos ejemplos de los mismos.

Ejemplo 1.4.2 (Movimiento Browniano en Hilbert). *([7], pág 81) Consideramos un proceso $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ con valores en H, diremos que es un movimiento Browniano si:*

- $B_0 = 0$
- $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *posee trayectorias continuas*
- $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *posee incrementos independientes*
- *Para todo $t > s$, $B_t - B_s$ es variable aleatoria Gaussiana como sigue: para todo $h \in H$ se tiene $\langle B_t - B_s, h\rangle \sim N(0,|t-s|A)$ donde A es la covarianza.*

Si $\langle B_t - B_s, h\rangle \sim N(|t-s|m,|t-s|A)$ se dice que es un Movimiento Browniano con desplazamiento. Por el Ejemplo 1.4.1 se tiene que $\varphi_{B_t}(h) = \exp\{im_t(h) - \frac{1}{2}A_t(h)\}$ donde $m_t(h) = \mathbb{E}(\langle B_t,h\rangle)$ y $A_t(h) = \mathbb{E}((\langle B_t,h\rangle - m_t(h))(\langle B_t,h\rangle - m_t(h)))$.

Ejemplo 1.4.3 (Proceso Compuesto de Poisson en Hilbert). *([25], pág 45) Considere la sucesión $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que las variables son i.i.d con distribución común p_Z (por ende todas las funciones caracteristicas coinciden) y que toman valores en H y sea $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ un proceso de Poisson con $N_t \sim \pi(t\lambda)$ el cual es independiente de todo $\{Z_n\}_{t\in\mathbb{N}}$. Entonces un proceso compuesto de Poisson con valores en H se define para todo $t \geq 0$ como:*

$$X_t = \begin{cases} 0 & si \quad N_t = 0 \\ \\ Z_1 + \cdots + Z_{N_t} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se tiene que $\varphi_{X_t}(h) = \exp\{t\lambda \int_H (e^{i\langle u,y\rangle} - 1)p_Z(dy)\}$.

Todo proceso compuesto de Poisson definido como en el Ejemplo 1.4.3 es un proceso de Lévy con función característica:

$$\varphi_{X_t}(h) = e^{t\lambda \int_H (e^{i\langle u,y\rangle}-1)p_Z(dy)}.$$

Recíprocamente, se puede probar (ver [25], pág 46) que si un proceso de Lévy tiene dicha función característica, entonces satisface la definición del Ejemplo 1.4.3 para algún $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ y algunos $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Los procesos de Lévy que toman valores en un espacio de Hilbert separable tienen versión càdlàg ([25], pág 39). Como se hizo en el Ejemplo 1.4.2, la función caracteristica del proceso está dado por un operador lineal y una forma cuadrática, no obstante hay una manera para describir más a estos objetos cuando se consideran procesos de Lévy.

Teorema 1.4.1. *([25], pág 66) Sea $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ un proceso de Lévy y càdlàg con valores en un espacio de Hilbert. Si para cada $t \geq 0$ el proceso posee segundos momentos, entonces existe un $m \in H$ y $Q \in \mathcal{L}_1^+(H)$ definido no negativo tal que:*

- $\mathbb{E}(\langle X_t, h\rangle) = t\langle m, h\rangle$
- $\mathbb{E}(\langle X_t - mt, h_1\rangle\langle X_s - ms, h_2\rangle) = t \wedge s\langle Q(h_1), h_2\rangle$
- $\mathbb{E}(\|X_t - mt\|^2) = tTr(Q)$.

Si consideramos el Ejemplo 1.4.2 y Teorema anterior se tendría que:

$$m_t(h) = \mathbb{E}(\langle B_t, h\rangle) = t\langle m, h\rangle,$$

y además se satisface que

$$\begin{aligned} A_t(h) &= \mathbb{E}((\langle B_t, h\rangle - m_t(h))(\langle B_t, h\rangle - m_t(h)) \\ &= \mathbb{E}(\langle B_t - mt, h\rangle\langle B_t - mt, h\rangle) \\ &= t\langle Q(h), h\rangle, \end{aligned}$$

por lo tanto usando que $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es Gaussiano se tiene:

$$\varphi_{B_t}(h) = e^{im_t(h) - \frac{1}{2}A_t(h)} = e^{it\langle m,h\rangle - \frac{1}{2}t\langle Q(h),h\rangle} = e^{t(i\langle m,h\rangle - \frac{1}{2}\langle Q(h),h\rangle)}.$$

Esto es consistente con el caso finito-dimensional (Ejemplo 1.2.2) pues $\langle m, h\rangle$ es la media y la covarianza Q es un operador simétrico. Entonces diremos que $B_t \sim N(tm, tQ)$ y si $m = 0$, o sea $\mathbb{E}(\langle B_t, h\rangle) = 0$ para todo $h \in H$, es un movimiento Browniano estandar. En general para un proceso de Lévy llamaremos a m su media y Q su covarianza, a dicho m lo denotaremos por $\mathbb{E}(X_t)$.

Teorema 1.4.2 (**Descomposición de Lévy-Itô**)**.** *([2], pág 80) Si $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso de Lévy con valores en H, entonces existe $b \in H$, un movimiento Browniano estandar $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ con covarianza Q y una medida aleatoria de Poisson independiente $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ sobre $\mathbb{R}^+ \times \{H \setminus \{0\}\}$ tal que para cada $t \geq 0$ se cumple:*

$$X_t = bt + B_t + \int_{\|x\|<1} x\tilde{N}_t(dx) + \int_{\|x\|\geq 1} xN_t(dx).$$

Una versión alternativa a esta descomposición se puede encontrar en [25], pág 53. Nuevamente la integral compensada de Poisson de la descomposición es en el sentido de un límite en L^2.

Capítulo 2

Teoría Cilíndrica

En este capítulo se tiene como objetivo hacer un análisis de los objetos cilíndricos y los resultados más relevantes para el desarrollo del trabajo. Además que se discutirá una breve introducción al origen de dicha teoría.

§ 2.1 Medidas cilíndricas

El origen de los hoy llamados procesos cilíndricos se encuentra en la teoría de la medida.

Defina para $\{y_1, ..., y_n\} = \Gamma \subset H$ la proyección $\pi_{y_1,...,y_n} : H \to \mathbb{R}^n$ dada por $\pi_{y_1,...,y_n}(h) = (\langle y_1, h\rangle, ..., \langle y_n, h\rangle)$. Definimos para $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y $y_1, ..., y_n \in H$ el conjunto:

$$Z_{y_1,...,y_n}(B) := \{h \in H : (\langle y_1, h\rangle, ..., \langle y_n, h\rangle) \in B\} = \pi^{-1}_{y_1,...,y_n}(B),$$

al cual llamaremos un conjunto cilíndrico o simplemente un cilindro de tamaño n y base $y_1, ..., y_n$. Al conjunto de todos los cilindros de tamaño n se le denotará por $\mathcal{Z}(H, \Gamma)$. En el caso de que $\Gamma = H$ escribimos $\mathcal{Z}(H)$. Denotaremos a la σ-álgebra cilíndrica n-dimensional por $\mathcal{C}(H, \Gamma) := \sigma(\mathcal{Z}(H, \Gamma))$ y la σ-álgebra cilíndrica como $\mathcal{C}(H) := \sigma(\mathcal{Z}(H))$.

Es importante discutir primero unos aspectos respecto a la σ-álgebra cilíndrica. Lo primero es observar la identidad que satisfacen los cilindros y es que dados dos cilindros con bases de diferentes tamaños, podemos reescribirlos para que tengan base de igual tamaño. Para ello mencionamos la siguiente propiedad: si $B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y $B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ y con esto una base $y_1, ..., y_n, x_1, ..., x_m \in H$ se tiene:

$$Z_{y_1,...,y_n,x_1,...,x_m}(B_1 \times B_2) = Z_{y_1,...,y_n}(B_1) \cap Z_{x_1,...,x_m}(B_2).$$

Con esta propiedad se nos permite siempre comparar cilindros de igual tamaño, en efecto, consideremos dos cilíndros $Z_{y_1,...,y_n}(B_1)$ y $Z_{x_1,...,x_m}(B_2)$ donde $m > n$, entonces podemos considerar $w_1, ..., w_{m-n} \in H$ y con ello podemos extender a $Z_{y_1,...,y_n}(B_1)$:

$$Z_{y_1,...,y_n}(B_1) \subseteq Z_{y_1,...,y_n,w_1,...,w_{m-n}}(B_1 \times \mathbb{R}^{m-n})$$

$$= Z_{y_1,...,y_n}(B_1) \cap Z_{w_1,...,w_{m-n}}(\mathbb{R}^{m-n}) \subseteq Z_{y_1,...,y_n}(B_1),$$

y por tanto:

$$Z_{y_1,...,y_n}(B_1) = Z_{y_1,...,y_n,w_1,...,w_{m-n}}(B_1 \times \mathbb{R}^{m-n}).$$

de este modo siempre podemos extender un cilindro para que si estamos comparandolo respecto a otro, estos posean el mismo tamaño.

Con esta propiedad podemos inclusive comparar cilindros que tengan diferente base pues:

$$Z_{y_1,\ldots,y_n}(B_1) = Z_{y_1,\ldots,y_n,x_1,\ldots,x_n}(B_1 \times \mathbb{R}^n) = Z_{y_1,\ldots,y_n,x_1,\ldots,x_n}(\tilde{B_1})$$
$$Z_{x_1,\ldots,x_n}(B_2) = Z_{y_1,\ldots,y_n,x_1,\ldots,x_n}(\mathbb{R}^n \times B_2) = Z_{y_1,\ldots,y_n,x_1,\ldots,x_n}(\tilde{B_2}),$$

donde claramente $\tilde{B_1} := B_1 \times \mathbb{R}^n, \tilde{B_2} := \mathbb{R}^n \times B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2n})$.

Con estas aclaraciones técnicas podemos proceder con el siguiente resultado.

Proposición 2.1.1. *$\mathcal{Z}(H)$ es un álgebra.*

Demostración. Primero, observe que $H \in \mathcal{Z}(H)$, pues $H = Z_{y_1,\ldots,y_n}(\mathbb{R}^n)$.

Sea $B \in \mathcal{B}(H)$ y suponga $Z_{y_1,\ldots,y_n}(B) \in \mathcal{Z}(H)$. Observe que:

$$(Z_{y_1,\ldots,y_n}(B))^c = Z_{y_1,\ldots,y_n}(B^c),$$

y como $B^c \in \mathcal{B}(H)$ entonces $(Z_{y_1,\ldots,y_n}(B))^c \in \mathcal{Z}(H)$

Por último, consideremos 2 cilindros y veremos que $\mathcal{Z}(H)$ es cerrado bajo uniones finitas. Por la discusión previa a este resultado, sin perdida de generalidad, se tomarán del mismo tamaño y misma base. Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(H)$, entonces $Z_{y_1,\ldots,y_n}(B_1), Z_{y_1,\ldots,y_n}(B_2) \in \mathcal{Z}(H)$, note que:

$$\begin{aligned} Z_{y_1,\ldots,y_n}(B_1) \cup Z_{y_1,\ldots,y_n}(B_2) &= \pi^{-1}_{y_1,\ldots,y_n}(B_1) \cup \pi^{-1}_{y_1,\ldots,y_n}(B_2) \\ &= \pi^{-1}_{y_1,\ldots,y_n}(B_1 \cup B_2) \\ &= Z_{y_1,\ldots,y_n}(B_1 \cup B_2), \end{aligned}$$

y como $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}(H)$, se sigue que $Z_{y_1,\ldots,y_n}(B_1) \cup Z_{y_1,\ldots,y_n}(B_2) \in \mathcal{Z}(H)$. □

Proposición 2.1.2. *Para todo $\Gamma = \{y_1, ..., y_n\} \subset H$ se tiene:*

$$\mathcal{C}(H, \Gamma) = \mathcal{Z}(H, \Gamma) = \sigma(Z_{y_1,\ldots,y_n}(B) : B \in \mathcal{F})$$

donde $\mathcal{F}$ es un generador arbitrario de la σ-álgebra Boreliana $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Por definición tenemos que $\mathcal{Z}(H, \Gamma) \subseteq \mathcal{C}(H, \Gamma)$. Por tanto para obtener la primer igualdad basta mostrar que $\mathcal{Z}(H, \Gamma)$ es un λ-sistema, ya que con esto, por el Teorema 1.1.1, $\mathcal{C}(H, \Gamma)$ que en particular es un π-sistema se podría concluir que $\sigma(\mathcal{C}(H, \Gamma)) = \mathcal{C}(H, \Gamma) \subseteq \mathcal{Z}(H, \Gamma)$.

Para verificar que $\mathcal{Z}(H, \Gamma)$ es un λ-sistema verificamos: Para $\mathbb{R}^n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tenemos:

$$H = \{h \in H : (\langle h, y_1\rangle, ..., \langle h, y_n\rangle) \in \mathbb{R}^n\} = \pi^{-1}_{y_1,\ldots,y_n}(\mathbb{R}^n) \in \mathcal{Z}(H, \Gamma).$$

Ahora tome $Z_{y_1,\ldots,y_n}(B_1), Z_{y_1,\ldots,y_n}(B_2)$, entonces note que:

$$Zy_1, ..., y_n(B_1) \setminus Z_{y_1,\ldots,y_n}(B_2) = \{h \in H : (\langle h, y_1\rangle, ..., \langle h, y_n\rangle) \in B_1 \setminus B_2\} \in \mathcal{Z}(H, \Gamma).$$

Y por último, dada una sucesión $\{Z_{y_1,\ldots,y_n}(B_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}(H,\Gamma)$ entonces:

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} Z_{y_1,\ldots,y_n}(B_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \pi^{-1}_{y_1,\ldots,y_n}(B_k) = \pi^{-1}_{y_1,\ldots,y_n}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \in \mathcal{Z}(H,\Gamma).$$

De este modo se tiene que $\mathcal{Z}(H,\Gamma)$ es un λ-sistema.

Por último, para verificar la segunda igualdad, sea $\mathcal{F}$ un generador de la σ-álgebra Boreliana $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, note que $\sigma(Z_{y_1,\ldots,y_n}(B) : B \in \mathcal{F})$ es la σ-álgebra más pequeña generada por los cilíndros, entonces está contenida en $\mathcal{C}(H,\Gamma)$. Pero de igual forma, por definición $\mathcal{C}(H,\Gamma)$ está contenida en $\sigma(Z_{y_1,\ldots,y_n}(B) : B \in \mathcal{F})$. □

Lema 2.1.1. *Sea H un espacio de Hilbert. Si es separable, entonces $\mathcal{C}(H) = \mathcal{B}(H)$.*

Demostración. "$\subseteq$"Sabemos que $\pi_{y_1,\ldots,y_n}$ es continua, entonces es $\mathcal{B}(H)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-medible, por tanto tenemos para, cualquier cilindro $Z_{y_1,\ldots,y_n}(B) = \pi^{-1}_{y_1,\ldots,y_n}(B) \in \mathcal{B}(H)$. Como esto es indiferente del tamaño del cilindro que se tome y es indiferente de la base, se sigue que $\mathcal{Z}(H) \subseteq \mathcal{B}(H)$, y por definición de σ-álgebra se sigue que $\mathcal{C}(H) \subseteq \mathcal{B}(H)$.

"$\supseteq$"Primero, como H es separable entonces existe un subconjunto denso numerable $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces para cualquier $f : H \to \mathbb{R}$ continua se satisface $\sup_{h\in H} f(h) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f(h_n)$.

Observe que para $r > 0$ y $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denso numerable, contenido en la bola unitaria centrada en el origen de H, se tiene:

$$\begin{aligned}
B_r(x) &= \{h \in H : \|h - x\| < r\} \\
&= \left\{h \in H : \sup_{y\in B_1(0)} |\langle y, h-x\rangle| < r\right\} \\
&= \left\{h \in H : \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle y_n, h-x\rangle| < r\right\} \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{h \in H : |\langle y_n, h-x\rangle| < r\} \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{h \in H : \langle y_n, h\rangle \in \ ]\langle y_n, x\rangle - r, \langle y_n, x\rangle + r[\ \} \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_{y_n}(\ ]\langle y_n, x\rangle - r, \langle y_n, x\rangle + r[\ ).
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{C}(H)$ es una σ-álgebra, entonces es cerrado bajo intersecciones contables de cilindros, y $B_r(x) \in \mathcal{C}(H)$. Ahora como H es separable dado un abierto U de H existen bolas $\{B_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $U = \cup_{k\in\mathbb{N}} B_{n_k}$, se sigue que la σ-álgebra generada por los abiertos está contenida en $\mathcal{C}(H)$, y por definición de σ-álgebra generada, se concluye $\mathcal{B}(H) \subseteq \mathcal{C}(H)$. □

Como se mostró en el Lema 2.1.1, se tiene una forma particular de describir la σ-álgebra Boreliana, para la cual se puede definir una medida finito aditiva μ sobre $\mathcal{Z}(H)$. Dicha medida se puede establecer finito aditiva ya que al fijar una cantidad finita de cilindros no se debe tornar difícil. El Teorema de extensión de Caratheodory dicta que una medida contable aditiva sobre un álgebra se puede extender a la σ-álgebra generada por dicha álgebra. No obstante, aquí se presenta un problema, y es que, como el álgebra cilíndrica de H considera todos los cilindros de todos los tamaños posibles, no siempre es posible extender de manera natural este μ como una medida contable aditiva. Dado este problema entonces estamos interesados en utilizar medidas solo finito aditivas para dar pie a posibles resultados más generales.

Considerando una medida μ sobre el álgebra cilíndrica y en vista de la Proposición 2.1.2, dicha medida estará definida sobre un σ-álgebra para un tamaño fijo de cilindros y al ser de un solo tamaño es más natural establecer una contable aditividad para μ. Con estas observaciones definimos las medidas cilíndricas:

Definición 2.1.1. *([3], pág 699) Una función $\mu : \mathcal{Z}(H) \to [0, \infty]$ decimos que es una medida cilíndrica si para cualquier subconjunto finito Γ de H se tiene que $\mu|_{\mathcal{C}(H,\Gamma)}$ es una medida. Si $\mu(H) = 1$ decimos que es una medida cilíndrica de probabilidad.*

Entre las décadas de los cincuentas y setentas se estudió el cómo se podría extender una medida cilíndrica a una medida propiamente o dicho como en la literatura, extender a una medida de Radon. Para resolver este problema se consideró la función característica de una medida cilíndrica la cual se define como $\varphi_\mu : H \to \mathbb{C}$ dada por:

$$\varphi_\mu(h) = \int_H e^{i\langle u,h\rangle} \mu(du)$$

Sazonov demostró que una condición necesaria y suficiente para esta extensión es que su función característica fuese continua en una topología en específico, la cual es más débil que la normada [32]. Por otro Minlos concluyó que esa condición de continuidad era necesaria y suficiente en el contexto de duales de espacios nucleares contablemente Hilbertianos [23]. Esta misma observación la hizo Kolmogorov [21], y a dicha topología estudiada por Sazonov la llamó la topología de Sazonov. En general se demostró que para dicha extensión, la topología normada no es suficiente, vease por ejemplo el capítulo 6 de [34]. Notando los elementos que tenían en común las conclusiones de los matemáticos ya mencionados es la implementación (directa o indirecta) de operadores de Hilbert-Schmidt. Posteriormente en espacios de Banach se desarrolló la teoría de operadores radonificantes los cuales generalizan a los Hilbert-Schmidt, una referencia de la misma es [34]. En síntesis, los operadores de Hilbert-Schmidt son la clave para extender una medida cilíndrica a una medida de Radon.

Por último, retomando la Definición 2.1.1 para una medida cilíndrica de probabilidad, notese que se puede pensar μ como una medida que al proyectar respecto a un $\Gamma \subset H$ se recupera una medida contable aditiva sobre una σ-álgebra. Por Teorema de extensión de Kolmogorov a dichas proyecciones se les puede asociar una variable aleatoria donde su distribución es la correspondiente proyección de μ. Schwartz desmostró que para una medida cilíndrica, existe un operador el cual recupera todas las variables aleatorias que define μ mediante sus proyecciones [33]. Y estos operadores los cuales definiremos en la siguiente sección se les llama cilíndricos y son el centro del presente trabajo.

§ 2.2 Procesos Cilíndricos

Con estos aspectos tratados en la sección anterior, procedemos a definir las variables aleatorias cilíndricas y posteriormente los procesos estocásticos cilíndricos.

Definición 2.2.1. *([3], pág 703) Una variable aleatoria cilíndrica X sobre un espacio Hilbert H es un mapeo lineal:*

$$X : H \longrightarrow L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).$$

A su vez un proceso cilíndrico sobre H es una familia $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ de variables aleatorias cilíndricas.

Definimos para la variable aleatoria cilíndrica X su distribución cilíndrica como $p_X : \mathcal{Z}(H) \to [0,\infty]$ una medida cilíndrica dada por:

$$p_X(Z) = p_X \circ \pi^{-1}_{h_1,...,h_n}(B) := \mathbb{P}((X(h_1), ..., X(h_n)) \in B),$$

esto para todo $Z \in \mathcal{C}(H,\Gamma)$, para toda escogencia de $\Gamma = \{h_1, ..., h_n\}$ y todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Para una variable aleatoria cilíndrica X podemos definir su función caracteristica $\varphi_X : H \to \mathbb{C}$ mediante $\varphi_X(h) := \mathbb{E}(\exp\{iX(h)\})$. En algunos textos se le suele llamar como el funcional característico.

Cabe destacar que a lo que respecta a filtraciones, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se sigue pidiendo como un espacio de probabilidad filtrado con las hipótesis usuales. En el contexto cilíndrico diremos que un proceso cilíndrico $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es adaptado si para cada $h \in H$ se tiene que $\{X_t(h)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$-adaptado. Observese que la filtración no depende del h escogido. Para este trabajo siempre consideraremos procesos cilíndricos adaptados.

Pese a que la definición de variable y proceso cilíndrico es más general que las variables aleatoria y procesos estocásticos respectivamente, en realidad en la práctica siempre se han considerado de una manera sutil como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2.1 (Proceso Cilíndrico Inducido). *([3], pág 707) Considere un proceso estocástico $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ que toma valores en H. Considere el proceso estocástico cilíndrico inducido $\{X_t(h)\}_{t\in\mathbb{R}^+} := \{\langle Y_t, h\rangle\}_{t\in\mathbb{R}^+}$. En efecto este es un proceso cilíndrico gracias a la linealidad del producto interno además que, para t fijo, Y_t es medible y la medibilidad se preserva bajo funciones continuas como es el caso del producto interno. Además vemos que $\varphi_{X_t}(h) = \mathbb{E}(\exp\{iX_t(h)\}) = \varphi_{Y_t}(h)$.*

Definición 2.2.2. *Definimos una variable cilíndrica cuadrado integrable como un operador lineal X de H en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$. Un proceso cilíndrico cuadrado integrable es una familia de variables aleatorias cilíndricas cuadrado integrables $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$.*

Definición 2.2.3. *([11], pág 890) Sea $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ un proceso cilíndrico. Decimos que es una martingala cilíndrica si para todo $h \in H$ se tiene que $\{X_t(h)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala adaptada a la filtación $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$.*

De hecho uno podría hablar de una martingala cilíndrica cuadrado integrable como que para cada $h \in H$ se tiene que $\{X_t(h)\}_{t\in\mathbb{R}^+} \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R})$ (ver definición de la sección 1.1). Ahora discutiremos una vez más los tipos de procesos que nos interesan:

Definición 2.2.4. *([3], pág 705) Dado un proceso cilíndrico $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ diremos que es un proceso de Lévy cilíndrico si para todo $h_1, ..., h_n \in H$ se tiene que $\{(X_t(h_1), ..., X_t(h_n))\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso de Lévy con valores en $\mathbb{R}^n$.*

Observese que en la definición anterior se tiene que si $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso de Lévy cilíndrico entonces dada cualquier escogencia de elementos $h_1, ..., h_n \in H$ hacen que

$\{(X_t(h_1),...,X_t(h_n))\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ sea un proceso de Lévy, entonces a su vez como la escogencia de un solo h_i, $i=1,...,n$, hace que $\{X_t(h_i)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ sea un proceso de Lévy entonces no solo $\{(X_t(h_1),...,X_t(h_n))\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es Lévy, sino que también entrada por entrada es Lévy. Como se presentó en secciones anteriores, se cuentan con ejemplos de este tipo de procesos cilíndricos.

Ejemplo 2.2.2 (**Movimiento Browniano Cilíndrico**). *([3], pág 705) Para un proceso cilíndrico $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ diremos que es un movimiento Browniano cilíndrico si para $h_1,...,h_n \in H$ se tiene que $\{(B_t(h_1),...,B_t(h_n))\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un movimiento Browniano con valores en $\mathbb{R}^n$. Por el Ejemplo 1.2.2 sabemos que un movimiento Browniano con valores en $\mathbb{R}^n$ es un proceso de Lévy. Diremos que es un movimiento Browniano cilíndrico estandar si además $\{(B_t(h_1),...,B_t(h_n))\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un movimiento Browniano estandar en $\mathbb{R}^n$.*

Ejemplo 2.2.3 (**Proceso Compuesto de Poisson Cilíndrico**). *([3], pág 706) Sea $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias cilíndricas con distribución cilíndrica común p_Z, además para todo $h\in H$ se tiene que $\{Z_n(h)\}_{n\in\mathbb{N}}$ son independientes. Si $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso de Poisson (como en el Ejemplo 1.2.1) tal que es independiente de $\{Z_n(h)\}_{n\in\mathbb{N}}$ para todo $h\in H$ definimos el proceso compuesto cilíndrico de Poisson como el proceso cilíndrico dado por:*

$$X_t = \begin{cases} 0 & si \qquad N_t = 0 \\ \\ Z_1 + \cdots + Z_{N_t} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Note que en efecto es un proceso de Lévy Cilíndrico, puesto que para todo $h_1,...,h_n \in H$ se tiene que $\{(X_t(h_1),...,X_t(h_n))\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso de Lévy.

Notese que $\mathbb{P}(\Omega)=1$ entonces si X_t es un operador de H en $L^2(\Omega,\mathbb{P})$ también es un operador lineal de H en $L^1(\Omega,\mathbb{P})$, esto para cada $t\geq 0$. En analog al Teorema 1.4.1, podemos definir de manera análoga una media cilíndrica y una covarianza cilíndrica. Para ello tomaremos un proceso de Lévy cilíndrico cuadrado integrable.

Definimos un operador $m: H\to\mathbb{R}$ dado por $m_t(h)=\mathbb{E}(X_t(h))$, de manera análoga se obtiene que dicho operador es lineal y satisface $m_t(h)=tm_1(h)$, escribimos entonces $m := m_1$, así llamaremos media cilíndrica al operador $m: H\to\mathbb{R}$ tal que $\mathbb{E}(X_t(h)) = tm(h)$. A diferencia del Teorema 1.4.1, aquí no se puede concluir que m es un funcional lineal, pues no se posee continuidad de las variables cilíndricas.

Ahora definimos un operador $Q_{t,s}: H\to H$ tal que satisface:

$$\langle Q_{t,s}(h_1), h_2\rangle = \mathbb{E}(X_t(h_1)X_s(h_2)).$$

De igual forma que el el Teorema 1.4.1 se puede mostrar que dicho operador es lineal, simétrico, definido positivo y satisface que $Q_{t,s}=t\wedge sQ_{1,1}$, escribimos entonces $Q:=Q_{1,1}$. Definimos la covarianza cilíndrica como el operador lineal $Q: H\to H$ tal que satisface $t\wedge s\langle Q(h_1),h_2\rangle = \mathbb{E}(X_t(h_1)X_s(h_2))$. En este caso, esta covarianza no tenemos garantizada la continuidad.

Retomando el Ejemplo 2.2.1 cabe mencionar que uno puede definir procesos de Lévy cilíndricos a partir de un proceso de Lévy.

Proposición 2.2.1. *Sea* $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *un proceso de Lévy con valores en un Hilbert* H*. Entonces el proceso cilíndrico inducido* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *dado por* $X_t(h) = \langle Y_t, h\rangle$ *para todo* $t \geq 0$*, es un proceso de Lévy Cilíndrico.*

Demostración. Sea $h_1, ..., h_n \in H$. Vamos a demostrar que $\{(X_t(h_1), ..., X_t(h_n))\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso de Lévy con valores en $\mathbb{R}^n$. Para ello verificaremos los cuatro puntos que debe satisfacer dados en la Definición 1.2.1.

- $(X_0(h_1), ..., X_0(h_n)) = (\langle Y_0, h_1\rangle, ..., \langle Y_0, h_n\rangle) = (0, ..., 0)$ casi seguramente.

- Para ver incrementos estacionarios, debemos utilizar la relación unívoca entre la función característica y la distribución y el hecho de que $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ tiene incrementos estacionarios, pues dado $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ se tiene:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{(X_{t_{j+1}}(h_1),...,X_{t_{j+1}}(h_n))-(X_{t_j}(h_1),...,X_{t_j}(h_n))}(u_1, ..., u_n) \\
&= \varphi_{((X_{t_{j+1}}-X_{t_j})(h_1),...,(X_{t_{j+1}}-X_{t_j})(h_n))}(u_1, ..., u_n) \\
&= \mathbb{E}\left(e^{i\langle((X_{t_{j+1}}-X_{t_j})(h_1),...,(X_{t_{j+1}}-X_{t_j})(h_n)),(u_1,...,u_n)\rangle}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(e^{i((X_{t_{j+1}}-X_{t_j})(h_1)u_1+\cdots+(X_{t_{j+1}}-X_{t_j})(h_n)u_n)}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(e^{i(X_{t_{j+1}}-X_{t_j})(u_1h_1+\cdots+u_nh_n)}\right) \\
&= \varphi_{X_{t_{j+1}}-X_{t_j}}(u_1h_1 + \cdots + u_nh_n) \\
&= \varphi_{Y_{t_{j+1}}-Y_{t_j}}(u_1h_1 + \cdots + u_nh_n) \\
&= \varphi_{Y_{t_{j+1}-t_j}}(u_1h_1 + \cdots + u_nh_n) \\
&= \varphi_{X_{t_{j+1}-t_j}}(u_1h_1 + \cdots + u_nh_n) \\
&= \varphi_{(X_{t_{j+1}-t_j}(h_1),...,X_{t_{j+1}-t_j}(h_n))}(u_1, ..., u_n).
\end{aligned}$$

  De este modo concluimos que:

$$((X_{t_{j+1}} - X_{t_j})(h_1), ..., (X_{t_{j+1}} - X_{t_j})(h_n)) \stackrel{d}{=} (X_{t_{j+1}-t_j}(h_1), ..., X_{t_{j+1}-t_j}(h_n)).$$

- Como $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ tiene incrementos independientes entonces se tiene que para $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$ se cumple que $\sigma((Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j})^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}(H))$ son independientes para $j = 1, ..., k$. Por el Teorema 2.1.1, se tiene que también hay independencia sobre los cilindros de cualquier base, entonces en particular hay independencia sobre cilindros de base $h_1, ..., h_n$, denotemos a estos por $Z = Z_{h_1,...,h_n}(B)$, entonces:

$$\begin{aligned}
&\sigma((Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j})^{-1}(Z) : Z \in \mathcal{C}(H)) \\
&= \sigma[((X_{t_{j+1}} - X_{t_j})(h_1), ..., (X_{t_{j+1}} - X_{t_j})(h_n))^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)].
\end{aligned}$$

  Entonces se tiene que $((X_{t_{j+1}} - X_{t_j})(h_1), ..., (X_{t_{j+1}} - X_{t_j})(h_n))$ son independientes para $j = 1, ..., k$.

- Por último para verificar la continuidad estocástica es propio primero notar lo siguiente, para $\omega \in \Omega$ se cumple por desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle (Y_t - Y_s)(\omega), h_k\rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \|(Y_t - Y_s)(\omega)\|^2 \|h_k\|^2 = C\|(Y_t - Y_s)(\omega)\|^2$$

  donde $C = \sum_{k=1}^{n} \|h_k\|^2$.

  De este modo tenemos que para $\epsilon > 0$ se cumple:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(|(X_t(h_1), ..., X_t(h_n)) - (X_s(h_1), ..., X_s(h_n))| > \epsilon) \\
&= \mathbb{P}(|((X_t - X_s)(h_1), ..., (X_t - X_s)(h_n))| > \epsilon) \\
&= \mathbb{P}(|(X_t - X_s)(h_1)|^2 + \cdots + |(X_t - X_s)(h_n)|^2 > \epsilon^2) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} |(X_t - X_s)(h_k)|^2 > \epsilon^2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} |\langle Y_t - Y_s, h_k\rangle|^2 > \epsilon^2\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\|Y_t - Y_s\|^2 > \frac{\epsilon^2}{C}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\|Y_t - Y_s\| > \frac{\epsilon}{\sqrt{C}}\right)
\end{aligned}$$

  y el resultado se concluye tomando $t \to s$.

Como la selección de $h_1, ..., h_n$ fue arbitraria se concluye que $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso de Lévy cilíndrico. □

Este ejemplo de un proceso cilíndrico inducido nos interesa pues, como se observa, si se tiene un proceso estocástico con valores en H se puede definir uno cilíndrico y por la proposición anterior, si se dota al proceso estocástico de la cualidad de ser Lévy, el cilíndrico que se define es Lévy cilíndrico. Es natural pensar si se podrá satisfacer el converso, o sea, que si se tiene un proceso cilíndrico este podrá definir un proceso con valores en H y más aún, si este cilíndrico fuese Lévy ¿se cumplirá que el proceso estocástico que pudiese definir sea Lévy? Este problema será el tema central del Capítulo 3.

Por último falta mencionar, como se hizo en las Secciones 1.2 y 1.4, la correspondiente descomposición de Lévy-Itô en su versión cilíndrica.

Teorema 2.2.1 (**Descomposición de Lévy-Itô cilíndrica**). *([3], pág 708) Sea un proceso de Lévy cilíndrico $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$. Entonces existe un operador lineal $b : H \to \mathbb{R}$, un movimiento Browniano cilíndrico $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ con media cilíndrica 0, una familia de operadores $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ de H en $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y una familia de operadores $\{\tilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ de H en $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ tales que $\{b(\cdot)t + \tilde{N}_t + N_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso cilíndrico; y se satisface la siguiente descomposición para $t \geq 0$:*

$$X_t = bt + B_t + \tilde{N}_t + N_t.$$

Capítulo 3

Regularización

En los siguientes dos capítulos nos restringiremos a variables aleatorias cilíndricas continuas de H en $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

El objetivo central de este capítulo es mostrar una forma en que un proceso cilíndrico puede definir un procesos estocástico en dualidad. Posterioremente a esto, estudiaremos las extensiones de dicho resultado.

§ 3.1 Regularización de un proceso cilíndrico

Para esta sección retomaremos el espacio $C_T(\mathbb{R})$ definido en la sección 1.1 equipado con la topología presentada en esa misma sección. También cabe mencionar que esta sección está basada en las técnicas empleadas en [11] pero con las modificaciones pertinentes para los contextos en los que se están planteando en el trabajo.

Consideremos un operador $X : H \to C_T(\mathbb{R})$ definido como $X(h) = \{X_t(h)\}_{t\in[0,T]}$, donde $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ es un proceso cilíndrico para el cual $X(h) \in C_T(\mathbb{R})$ para todo $h \in H$. Usando el hecho que X_t es un operador lineal para cada t, se garantiza que X está bien definido, puesto que si $h_1, h_2 \in H$ son tales que $h_1 = h_2$, entonces se tiene que

$$\{0_t\}_{t\in[0,T]} = \{X_t(0)\}_{t\in[0,T]} = X(0) = X(h_1 - h_2) = \{X_t(h_1 - h_2)\}_{t\in[0,T]}$$

$$= \{X_t(h_1)\}_{t\in[0,T]} - \{X_t(h_2)\}_{t\in[0,T]} \iff \{X_t(h_1)\}_{t\in[0,T]} = \{X_t(h_2)\}_{t\in[0,T]}.$$

De esto se concluye que $X(h_1) = X(h_2)$. Además, como observamos X es un operador lineal gracias a la linealidad de los procesos $\{X_t(h)\}_{t\in[0,T]}$, con $h \in H$. Cabe mencionar que X no es en general sobreyetivo, no todo proceso en $C_T(\mathbb{R})$ es generado por la acción de X sobre elementos de H. Este operador tiene una caracteristica más:

Lema 3.1.1. *El operador lineal $X : H \to C_T(\mathbb{R})$ es contínuo.*

Demostración. La estrategia para realizar la demostración será emplear el Teorema 1.3.1 aprovechando que X es un operador lineal. Entonces basta mostrar que X tiene gráfico cerrado.

Sea $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $h_n \to h$ in H tal que $X(h_n) = \{X_t(h_n)\}_{t\in[0,T]} \to \{Y_t\}_{t\in[0,T]}$ en $C_T(\mathbb{R})$, y como dijimos antes, la topología es la de convergencia uniforme en probabilidad.

Hay que mostrar que $\{Y_t\}_{t\in[0,T]} = \{X_t(h)\}_{t\in[0,T]}$. Ahora note que para cada t, $X_t(\cdot)$ es una variable cilíndrica la cual es continua, entonces $X_t(h_n) \to X_t(h)$ en probabilidad. Sea $\epsilon > 0$ y sea $t \in [0,T]$ luego se tiene:

$$\mathbb{P}\left(|X_t(h) - Y_t| > \epsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(|X_t(h) - X_t(h_n)| > \frac{\epsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t(h_n) - Y_t| > \frac{\epsilon}{2}\right),$$

tomando $n \to \infty$ se concluye que $\mathbb{P}(Y_t = X_t(h)) = 1, \forall t \in [0,T]$. Concluimos que $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}$ es una versión de $\{X_t(h)\}_{t\in[0,T]}$, y como ambos procesos poseen trayectorias continuas, se concluye por el Lema 1.1.1 que son indistinguibles, por tanto $\{Y_t\}_{t\in[0,T]} = \{X_t(h)\}_{t\in[0,T]} = X(h)$. □

Con este operador, podemos obtener un estimado útil que necesitaremos luego.

Lema 3.1.2. *Sea $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ un proceso cilíndrico tal que para todo $h \in H$ se tiene que $\{X_t(h)\}_{t\in[0,T]} \in C_T(\mathbb{R})$. Entonces para todo $\epsilon > 0$ y para todo $h \in H$, existe un $\rho > 0$ tal que:*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} \left|1 - e^{iX_t(h)}\right|\right) \leq \epsilon + \frac{2\|h\|^2}{\rho^2}. \tag{3.1}$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Por continuidad de la función e^{iz}, existe $\delta > 0$ tal que si $|z| < \delta$ entonces $|1 - e^{iz}| < \frac{\epsilon}{2}$. Usando el Lema 3.1.1 nos garantizamos que dados $\delta, \epsilon > 0$ existe $\rho > 0$ se cumple:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t(h)| > \delta\right) < \frac{\epsilon}{4},\ h \in B_\rho(0), \tag{3.2}$$

donde $B_\rho(0) = \{h \in H : \|h\| < \rho\}$.

Sea $h \in B_\rho(0)$ y tome $\Gamma = \left\{\omega \in \Omega : \sup_{t\in[0,T]} |X_t(h)(\omega)| < \delta\right\}$. Note que este conjunto cumple $1 - \frac{\epsilon}{4} < \mathbb{P}(\Gamma) \leq 1$. Además observamos que para cualquier $h \in H$ siempre se satisface $\sup_{t\in[0,T]} \left|1 - e^{iX_t(h)}\right| \leq 2$.

Entonces, dado $h \in B_\rho(0)$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} \left|1 - e^{iX_t(h)}\right|\right) &= \int_\Gamma \sup_{t\in[0,T]} \left|1 - e^{iX_t(h)}\right| \mathbb{P}(d\omega) + \int_{\Gamma^c} \sup_{t\in[0,T]} \left|1 - e^{iX_t(h)}\right| \mathbb{P}(d\omega) \\
&< \frac{\epsilon}{2}\mathbb{P}(\Gamma) + 2\mathbb{P}(\Gamma^c) < \epsilon.
\end{aligned}$$

Por otro lado, para $h \in B_\rho^c(0)$ tenemos que $\|h\| > \rho$, entonces $\frac{\|h\|^2}{\rho^2} > 1$ y por tanto se cumple:

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} \left|1 - e^{iX_t(h)}\right|\right) \leq 2\mathbb{P}(\Omega) = 2 < \frac{2\|h\|^2}{\rho^2}.$$

Sumando las dos cotas obtenidas se concluye el resultado. □

Como se mencionó en la Sección 2.2 entre la relación de medidas cilíndricas y operadores de Hilbert-Schmidt para que estos radonifiquen la medida cilíndrica, estudiaremos la relación entre estos operadores y los procesos cilíndricos. Los siguientes resultados se puede trabajar con $\mathcal{L}_2(H,G)$, con H y G espacios de Hilbert separables, no obstante como todo se trabaja de forma análoga, usaremos solo $\mathcal{L}_2(H)$. Además el siguiente análisis es heurístico, posteriormente probaremos las siguientes afirmaciones.

Dado $h \in H$, sea $X(h) = \{X_t(h)\}_{t\in[0,T]}$ y considerando la linealidad, la continuidad del producto interno, la continuidad de los operadores, se observa que para $\omega \in \Omega$ y $t \in [0,T]$ se cumple:

$$\begin{aligned}
X_t \circ S(h)(\omega) &= X_t \circ S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \langle h_k, h\rangle h_k\right)(\omega) \\
&= \lim_{n\to\infty} X_t \circ S\left(\sum_{k=0}^{n} \langle h_k, h\rangle h_k\right)(\omega) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \langle h_k, h\rangle X_t \circ S(h_k)(\omega) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{k=0}^{n} h_k X_t \circ S(h_k)(\omega), h \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} h_k X_t \circ S(h_k)(\omega), h \right\rangle \\
&:= \langle Y_t(\omega), h\rangle.
\end{aligned}$$

Primero para que este cálculo tenga sentido debemos justificar la convergencia de la serie $\sum_{k=0}^{n} \langle h_k, h\rangle X_t \circ S(h_k)(\omega)$. Para ello bastaría probar que $\{X_t \circ S(h_k)(\omega)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es cuadrado sumable. Esto pues usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la identidad de Parseval se satisface:

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=0}^{\infty} \langle h_k, h\rangle X_t \circ S(h_k)(\omega)\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\langle h_k, h\rangle X_t \circ S(h_k)(\omega)| \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\langle h_k, h\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |X_t \circ S(h_k)(\omega)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|h\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |X_t \circ S(h_k)(\omega)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.
\end{aligned}$$

Si logramos verificar que $Y_t = \sum_{k=0}^{\infty} h_k X_t \circ S(h_k)$ es una variable aleatoria de Ω en H, tendremos una forma para pasar de un proceso cilíndrico a un proceso estocástico usual con valores en H. Note que además la cuadrado sumabilidad de $\{X_t \circ S(h_k)(\omega)\}_{k\in\mathbb{N}}$ garantiza que este Y_t es bien definido pues para $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > n \geq N$ y $\omega \in \Omega$:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} |X_t \circ S(h_k)(\omega)|^2\right| < \epsilon,$$

entonces por la identidad de Parseval y la ortogonalidad de $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ se tiene que:

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} h_k X_t \circ S(h_k)(\omega) \right\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \left| \left\langle h_j, \sum_{k=n}^{m} h_k X_t \circ S(h_k)(\omega) \right\rangle \right|^2 = \sum_{k=n}^{m} |X_t \circ S(h_k)(\omega)|^2 < \epsilon.$$

De lo que se tiene que $\{\sum_{k=0}^{n} h_k X_t \circ S(h_k)(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y por tanto convergente. Así concluimos un Y_t bien definido. De estas observaciones podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1 (**Regularización**). *Sea $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ un proceso cilíndrico tal que para todo $h \in H$ se tiene $\{X_t(h)\}_{t\in[0,T]} \in C_T(\mathbb{R})$ y sea $S \in \mathcal{L}_2(H)$. Entonces el proceso cilíndrico $\{X_t \circ S\}_{t\in[0,T]}$ define un proceso estocástico $\{Y_t\}_{t\in[0,T]} \in C_T(H)$ tal que para todo $h \in H$ se satisface $\{X_t \circ S(h)\}_{t\in[0,T]} = \{\langle Y_t, h\rangle\}_{t\in[0,T]}$ casi seguramente.*

Demostración. Notese que para $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se tiene:

$$\left\{\omega \in \Omega : \frac{1}{C^2} \sup_{t\in[0,T]} \sum_{k=0}^{\infty} |X_t \circ S(h_k)(\omega)|^2 > 1\right\}$$

$$= \bigcup_{n=0}^{\infty} \left\{\omega \in \Omega : \frac{1}{C^2} \sup_{t\in[0,T]} \sum_{k=0}^{n} |X_t \circ S(h_k)(\omega)|^2 > 1\right\}.$$

Como esta unión es creciente se tiene:

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{C^2} \sup_{t\in[0,T]} \sum_{k=0}^{\infty} |X_t \circ S(h_k)|^2 > 1\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{C^2} \sup_{t\in[0,T]} \sum_{k=0}^{n} |X_t \circ S(h_k)|^2 > 1\right).$$

Considerando $g(y) = 1 - e^{-\frac{y}{2}}$ sobre $[1, \infty[$ tenemos que el mínimo se alcanza en $y = 1$. Entonces por desigualdad de Chebyshev se tiene:

$$\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{C^2} \sup_{t\in[0,T]} \sum_{k=0}^{n} |X_t \circ S(h_k)|^2 > 1\right)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(1 - e^{-\frac{1}{2C^2} \sup_{t\in[0,T]} \sum_{k=0}^{n} |X_t \circ S(h_k)|^2}\right)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} \left(1 - e^{-\frac{1}{2C^2} \sum_{k=0}^{n} |X_t \circ S(h_k)|^2}\right)\right).$$

Para continuar es preciso observar lo siguiente: denotamos por $h^{(n)} = (h_1, ..., h_n)$ y con esto denotamos $X_t \circ S(h^{(n)})(\omega)$ como $(X_t \circ S(h_1)(\omega), ..., X_t \circ S(h_n)(\omega))$, por el Ejemplo 1.1.1 y por teorema de existencia de Kolmogorov, existe un espacio de probabilidad $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ y una variable aleatoria Z tal que $Z \sim N(0, C^2 I)$, con estas observaciones tenemos:

$$e^{-\frac{1}{2C^2} \sum_{k=0}^{n} |X_t \circ S(h_k)(\omega)|^2} = e^{-\frac{1}{2C^2} \langle X_t \circ S(h^{(n)})(\omega), X_t \circ S(h^{(n)})(\omega)\rangle} = \varphi_Z\left(X_t \circ S(h^{(n)})(\omega)\right).$$

Dicho esto proseguimos con las siguientes cotas: usando el hecho de que estamos con medidas finitas y por Teorema Fubini se tiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} 1 - e^{-\frac{1}{2C^2}\sum_{k=0}^{n}|X_t\circ S(h_k)|^2}\right) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} 1 - \varphi_Z(X_t\circ S(h^{(n)}))\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} 1 - \tilde{\mathbb{E}}\left(e^{i\langle X_t\circ S(h^{(n)}),Z\rangle}\right)\right),
\end{aligned}$$

donde $\tilde{\mathbb{E}}$ es la esperanza respecto al espacio de probabilidad $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}})$, de la desigualdad de Jensen se sigue:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left(1 - \tilde{\mathbb{E}}\left(e^{i\langle X_t\circ S(h^{(n)}),Z\rangle}\right)\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left(1 - \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sum_{k=0}^{n} z_k X_t\circ S(h_k)} p_Z(dz)\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_{\mathbb{R}^n} 1 - e^{i\sum_{k=0}^{n} z_k X_t\circ S(h_k)} p_Z(dz)\right)\right) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |1 - e^{i\sum_{k=0}^{n} z_k X_t\circ S(h_k)}| p_Z(dz)\right)\right) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t\in[0,T]} |1 - e^{i\sum_{k=0}^{n} z_k X_t\circ S(h_k)}| p_Z(dz)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |1 - e^{i\sum_{k=0}^{n} z_k X_t\circ S(h_k)}|\right) p_Z(dz).
\end{aligned}$$

Por la linealidad de X_t podemos hacer $\sum_{k=0}^{n} z_k X_t\circ S(h_k) = X_t\left(\sum_{k=0}^{n} z_k S(h_k)\right)$ y usando el hecho de que estamos tratando con el mapeo $h\mapsto\{X_t(h)\}_{t\in[0,T]}$ del Lema 3.1.1 entonces podemos usar el Lema 3.1.2 y desigualdad de Cauchy-Schwartz para obtener:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |1 - e^{iX_t\left(\sum_{k=0}^{n} z_k S(h_k)\right)}|\right) p_Z(dz) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\epsilon + \frac{2}{\rho^2}\left\|\sum_{k=0}^{n} z_k S(h_k)\right\|^2\right) p_Z(dz) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \epsilon + \frac{2}{\rho^2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{k=0}^{n}|z_k|\|S(h_k)\|\right)^2 p_Z(dz) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \epsilon + \frac{2}{\rho^2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{k=0}^{n}|z_k|^2\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\|S(h_k)\|^2\right) p_Z(dz) \\
&= \lim_{n\to\infty} \epsilon + \frac{2}{\rho^2}\left(\sum_{k=0}^{n}\|S(h_k)\|^2\right)\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{k=0}^{n}|z_k|^2\right) p_Z(dz)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \epsilon + \frac{2}{\rho^2 C^2}\left(\sum_{k=0}^{n} \|S(h_k)\|^2\right) = \epsilon + \frac{2\|S\|^2_{\mathcal{L}_2(H)}}{\rho^2 C^2}.$$

Como ϵ es arbitrario se sigue:

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{C^2}\sup_{t\in[0,T]}\sum_{k=0}^{\infty}|X_t\circ S(h_k)|^2 > 1\right) \leq \frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}\frac{\|S\|^2_{\mathcal{L}_2(H)}}{\rho^2 C^2}$$

. Finalmente observe que si $C^2 \to \infty$ se concluye que:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]}\sum_{k=0}^{\infty}|X_t\circ S(h_k)|^2 = \infty\right) = 0.$$

Sea $\Gamma := \left\{\omega\in\Omega : \sup_{t\in[0,T]}\sum_{k=0}^{\infty}|X_t\circ S(h_k)|^2 < \infty\right\}.$

Entonces defina $Y_t : \Omega \longrightarrow H$ como

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} h_k X_t\circ S(h_k)(\omega) & si \quad \omega\in\Gamma \\ \\ 0 & si \quad \omega\in\Gamma^c \end{cases}$$

Este proceso es bien definido y satisface que para $t\in[0,T]$ y $\omega\in\Gamma$ se cumple $X\circ S(h)(\omega) = \langle Y_t(\omega), h\rangle$. Una vez definido es preciso verificar su medibilidad. Sea $t\in[0,T]$ fijo, hay que mostrar que dado $A\in\mathcal{B}(H)$ se tiene que $Y_t^{-1}(A)\in\mathcal{F}$, pero como H es separable por Lema 2.1.1 y la Proposición 1.1.1 basta mostrar que se cumple en los cilindros.
Como ya tuvimos antes, dado $\omega\in\Gamma$ se tiene $\langle Y_t(\omega), h\rangle = X_t\circ S(h)(\omega)$ para $h\in H$. Sea $Z_h(B)$ un cilindro, entonces $Y_t^{-1}(Z_h(B)) = (X_t\circ S(h))^{-1}(B)$. Gracias a que $X_t\circ S(h)$ es $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-medible, entonces $(X_t\circ S(h))^{-1}(B)\in\mathcal{F}$, pues $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Por último solo nos falta verificar que $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}\in C_T(H)$. Para ello sea $\epsilon>0$ entonces note que:

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\epsilon}\sup_{t\in[0,T]}\left\|Y_t - \sum_{k=0}^{n} h_k X_t\circ S(h_k)\right\| > 1\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{\epsilon}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\sum_{k=n}^{\infty} h_k X_t\circ S(h_k)\right\| > 1\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\epsilon^2}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\sum_{k=n}^{\infty} h_k X_t\circ S(h_k)\right\|^2 > 1\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{\epsilon^2}\sup_{t\in[0,T]}\sum_{k=n}^{\infty}|X_t\circ S(h_k)|^2 > 1\right).$$

y esta última igualdad es válida pues ya vimos que la serie es convergente como elemento en H, por tanto la identidad de Parseval aplica. Y siguiendo los mismos estimados de antes (solo sustituyendo el contador $k=0$ por $k=n$), entonces se tendrá:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\frac{1}{\epsilon^2}\sup_{t\in[0,T]}\sum_{k=n}^{\infty}|X_t\circ S(h_k)|^2>1\right)\\
&=\lim_{m\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{1}{\epsilon^2}\sup_{t\in[0,T]}\sum_{k=n}^{m}|X_t\circ S(h_k)|^2>1\right)\\
&\leq\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{m-n}}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|1-e^{i\sum_{k=n}^{m}z_kX_t\circ S(h_k)}|\right)p_Z(dz)\\
&=\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{m-n}}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|1-e^{iX_t\left(\sum_{k=n}^{m}z_kS(h_k)\right)}|\right)p_Z(dz)\\
&\leq\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{m-n}}\left(\delta+\frac{2}{\rho^2}\left\|\sum_{k=n}^{m}z_kS(h_k)\right\|^2\right)p_Z(dz)\\
&\leq\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}\lim_{m\to\infty}\left(\delta+\frac{2}{\rho^2}\left(\sum_{k=n}^{m}\|S(h_k)\|^2\right)\int_{\mathbb{R}^{m-n}}\sum_{k=n}^{m}|z_k|^2p_Z(dz)\right)\\
&=\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}\lim_{m\to\infty}\left(\delta+\frac{2}{\rho^2\epsilon^2}\sum_{k=n}^{m}\|S(h_k)\|^2\right)\\
&=\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}\left(\delta+\frac{2}{\rho^2\epsilon^2}\sum_{k=n}^{\infty}\|S(h_k)\|^2\right).
\end{aligned}
$$

y por definición de S, sabemos que $\sum_{k=0}^{\infty}\|S(h_k)\|^2<\infty$ entonces esto implica que $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\|S(h_k)\|^2=0$ y por tanto:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left\|Y_t-\sum_{k=0}^{n}h_kX_t\circ S(h_k)\right\|>\epsilon\right) &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}\left(\delta+\frac{2}{\rho^2\epsilon^2}\sum_{k=n}^{\infty}\|S(h_k)\|^2\right)\\
&= \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}\delta.
\end{aligned}
$$

Como el $\delta>0$ es arbitrario se concluye que:

$$
\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left\|Y_t-\sum_{k=0}^{n}h_kX_t\circ S(h_k)\right\|>\epsilon\right)=0.
$$

Como $\{\sum_{k=0}^{n}h_kX_t\circ S(h_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C_T(H)$ se sigue por completitud de $C_T(H)$ que $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}\in C_T(H)$.

Por último, por construcción tenemos que $\{X_t\circ S(h)\}_{t\in[0,T]}$ es una versión del proceso $\{\langle Y_t,h\rangle\}_{t\in[0,T]}$ y al tener ambos trayectorias continuas se sigue por el Lema 1.1.1 que son indistinguibles para todo $h\in H$. $\square$

Observación 1. *En esta sección se trabajó en el espacio $C_T(\mathbb{R})$ no obstante desde su inicio se pudo considerar el espacio $D_T(\mathbb{R})$ y los argumentos se preservan.*

Por último, en pos de tener un resultado "recíproco" para el Ejemplo 2.2.1 entonces tenemos lo siguiente.

Corolario 3.1.1. *Sea $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ un proceso cilíndrico y sea $S \in \mathcal{L}_2(H)$. Entonces $\{X_t \circ S\}_{t\in[0,T]}$ define un proceso estocástico $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}$ tal que para todo $h \in H$ y para cada $t \in [0,T]$ se cumple $X_t \circ S(h) = \langle Y_t, h\rangle$ casi seguramente.*

Demostración. La prueba de este resultado se desprende directamente de la prueba del Teorema 3.1.1, salvo que este caso se realiza la prueba para una de las variables cilíndricas del proceso cilíndrico $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$, en tal caso no se consideran supremos en los cálculos. Además el Lema 3.1.1 no es necesario, se puede utilizar una versión del Lema 3.1.2, con un mismo estimado salvo que no se considera un supremo, sino un $t \in [0,T]$. De este modo para cada $t \in [0,T]$ se construye una variable aleatoria con valores en H, digamos Y_t, entonces consideramos el proceso estocástico $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}$, y por el mismo análisis realizado antes del Teorema 3.1.1 se tiene que $X_t \circ S(h) = \langle Y_t, h\rangle$ para cada $h \in H$. □

Observación 2. *Este proceso $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}$ del Teorema 3.1.1 es único hasta versiones indistinguibles. En efecto si $\{X_t \circ S(h)\}_{t\in[0,T]}$ define otro proceso $\{Z_t\}_{t\in[0,T]}$ con valores en H tal que $\{X_t \circ S(h)\}_{t\in[0,T]} = \{\langle Z_t, h\rangle\}_{t\in[0,T]}$ entonces por la linealidad del producto interno se sigue:*

$$\{\langle Z_t, h\rangle\}_{t\in[0,T]} = \{\langle Y_t, h\rangle\}_{t\in[0,T]} \Leftrightarrow \{\langle Z_t - Y_t, h\rangle\}_{t\in[0,T]} = \{0_t\}_{t\in[0,T]}$$

entonces como esto es para todo $h \in H$ se sigue que $Z_t = Y_t$ para todo $t \in [0,T]$, por tanto $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}$ es una versión de $\{Z_t\}_{t\in[0,T]}$. Como ambos procesos tienen trayectorias continuas o bien càdlàg del Lema 1.1.1 se concluye que son indistinguibles. El proceso que se define en el Corolario 3.1.1 es único hasta versiones.

Observación 3. *Observese que el Teorema 3.1.1 se demuestra para $t \in [0,T]$. Si uno quisiera extenderlo para $t \in \mathbb{R}^+$, se usa el siguiente argumento: Dado el proceso cilíndrico $\{X_t \circ S\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, sabemos por Teorema 3.1.1 que sobre cada $[0,T]$ tenemos la existencia de $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}$ la cual es única hasta versiones indistinguibles. Sea $T_n \to \infty$ crecientemente, entonces $\{Y_t\}_{t\in[0,T_n]} = \{Y_t\}_{t\in[0,T_{n+1}]}$ sobre $[0,T_n]$. De este modo para $\{X_t \circ S\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ basta tomar $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ definido como $\{Y_t\}_{t\in[0,T_n]}$ para todo $t \in [0,T_n]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Observación 4. *Para establecer la relación entre el proceso dado por la regularización y la teoría clásica de procesos consideramos: en la relación $\{X_t \circ S\}_{t\in\mathbb{R}^+} = \{\langle Y_t, \cdot\rangle\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, si el proceso $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ fuese un proceso estocástico con valores en H, o sea, un proceso en el sentido clásico y no cilíndrico, la acción que realiza S se entiende como $\{X_t \circ S\}_{t\in\mathbb{R}^+} = \{\langle S^*(X_t), \cdot\rangle\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ de este modo $\{\langle Y_t, \cdot\rangle\}_{t\in\mathbb{R}^+} = \{\langle S^*(X_t), \cdot\rangle\}_{t\in\mathbb{R}^+}$.*

Dado este resultado, para un proceso cilíndrico $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ tal que para todo $h \in H$ se tiene que $\{X_t(h)\}_{t\in\mathbb{R}^+} \in C_{\mathbb{R}^+}(\mathbb{R})$ (respectivamente $D_{\mathbb{R}^+}(\mathbb{R})$) y un operador $S \in \mathcal{L}_2(H)$ diremos que S **regulariza a** $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ **en un proceso** $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ si $\{X_t \circ S\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ define un proceso estocástico único hasta versiones indistinguibles $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ con valores en H tal que para todo $h \in H$ satisface $\{X_t \circ S(h)\}_{t\in\mathbb{R}^+} = \{\langle Y_t, h\rangle\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ y además $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+} \in C_{\mathbb{R}^+}(H)$ (respectivamente $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+} \in D_{\mathbb{R}^+}(H)$).

§ 3.2 Regularización de un proceso Lévy cilíndrico

Consideraremos el caso que $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ sea un proceso Lévy y verificaremos si el proceso regularizado resulta ser un proceso Lévy. Hasta donde tenemos conocimiento no hay referencia de una regularización de un proceso de Lévy, pese a que los expertos afirman la veracidad de este hecho.

La siguiente definición extiende la idea de versiones y versiones indistinguibles a procesos cilíndricos.

Definición 3.2.1. *Sean $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ dos procesos cilíndricos. Dada una base ortonormal $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de H, diremos que $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una versión cilíndrica de $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ si para cada $t\in\mathbb{R}^+$ se cumple que $\mathbb{P}\left(X_t(h_k)=Y_t(h_k),\ \forall k\in\mathbb{N}\right)=1$. Y por otro lado diremos que $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es indistinguible cilíndricamente de $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ si se tiene que $\mathbb{P}(X_t(h_k)=Y_t(h_k),\ \forall k\in\mathbb{N},\ \forall t\in\mathbb{R}^+)=1$, y en dado caso escribimos $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}=\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$.*

Note que en la definición anterior basta considerarla sobre una base ortonormal ya que por continuidad de variables aleatorias se puede extender a todo h, y en efecto, dado un $h\in H$:

$$X_t(h)=Y_t(h)\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}\langle h_k,h\rangle X_t(h_k)=\sum_{k=0}^{\infty}\langle h_k,h\rangle Y_t(h_k)\Leftrightarrow X_t(h_k)=Y_t(h_k)$$

El siguiente resultado es el análogo al Teorema 1.2.1 pero en el contexto cilíndrico.

Proposición 3.2.1. *Sea $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ un proceso de Lévy cilíndrico. Entonces existe una versión cilíndrica que es a su vez un proceso de Lévy cilíndrico $\{\tilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ tal que para todo $h\in H$ se tiene que $\{\tilde{X}_t(h)\}_{t\in\mathbb{R}^+}\in D_{\mathbb{R}^+}(\mathbb{R})$.*

Demostración. Sea $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ un proceso de Lévy cilíndrico. Entonces se tiene que para todo $h\in H$, $\{X_t(h)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es Lévy y por Teorema 1.2.1 tiene una versión càdlàg dada por $\{\tilde{X}_t(h)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$. Sea $\{\tilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ operadores dados por estas versiones càdlàg. Cada $\tilde{X}_t$ es lineal, pues al ser $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ lineal se satisface:

$$\tilde{X}_t(h_1+h_2)=X_t(h_1+h_2)=X_t(h_1)+X_t(h_2)=\tilde{X}_t(h_1)+\tilde{X}_t(h_2)\text{ casi seguramente .}$$

De este modo $\tilde{X}_t$ es lineal, por tanto $\{\tilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso cilíndrico. Además es de Lévy cilíndrico pues dados $h_1,...,h_n\in H$ se tiene que $\{(\tilde{X}_t(h_1),...,\tilde{X}_t(h_n))\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es la versión càdlàg del proceso de Lévy $\{(X_t(h_1),...,X_t(h_n))\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, entonces el proceso dado por $\{(\tilde{X}_t(h_1),...,\tilde{X}_t(h_n))\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es proceso de Lévy. Así $\{\tilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es proceso de Lévy cilíndrico.

Sea $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H y dado $t\in\mathbb{R}^+$ defina $A_k:=\{\omega\in\Omega:X_t(h_k)=\tilde{X}_t(h_k)\}$ entonces $\mathbb{P}(A_k)=1$. Por último observamos que se tiene a su vez

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{\infty}A_k\right)=1-\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(A_k^c)=1,$$

y así concluimos que $\mathbb{P}(X_t(h_k)=\tilde{X}_t(h_k),\forall k\in\mathbb{N})=1$. □

Observación 5. *El resultado de la Proposición 3.2.1 no requiere que los procesos cilíndricos sean continuos de H en $L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.*

Teorema 3.2.1. *Sea* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *un proceso de Lévy cilíndrico tal que* $\{X_t(h)\}_{t\in\mathbb{R}^+} \in D_{\mathbb{R}^+}(\mathbb{R})$ *para todo* $h \in H$ *y sea* $S \in \mathcal{L}_2(H)$*. Entonces* S *regulariza a* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *en un proceso de Lévy* $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$*.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.1 sabemos que existe el proceso $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ tal que $\{X_t \circ S(h)\}_{t\in\mathbb{R}^+} = \{\langle Y_t, h\rangle\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ para todo $h \in H$, además $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+} \in D_{\mathbb{R}^+}(H)$. Debemos verificar que $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ cumple las condiciones para ser un proceso de Lévy.

- Note que para todo $h \in H$ por linealidad se cumple que $0 = X_0 \circ S(h)(\omega) = \langle Y_0(\omega), h\rangle$. Por tanto $Y_0(\omega) = 0$ para todo $\omega \in \Omega$.

- Vamos ahora a probar incrementos estacionarios. Sea $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, como $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es Lévy cilíndrico entonces posee incrementos estacionarios para cualquier selección finita de elementos de H. Entonces:

  $$X_{t_{j+1}} \circ S(h) - X_{t_j} \circ S(h) = (X_{t_{j+1}} - X_{t_j}) \circ S(h) \overset{d}{=} X_{t_{j+1}-t_j} \circ S(h),$$

  para $j = 1, ..., n$. Por la relación unívoca entre distribuciones y función característica, esto equivale a $\varphi_{X_{t_{j+1}}\circ S - X_{t_j}\circ S}(h) = \varphi_{X_{t_{j+1}-t_j}\circ S}(h)$. Con esta equivalencia entre función característica y distribuciones vemos que:

  $$\begin{aligned} \varphi_{Y_{t_{j+1}}-Y_{t_j}}(h) &= \mathbb{E}\left(e^{i\langle Y_{t_{j+1}}-Y_{t_j},h\rangle}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{i(X_{t_{j+1}}\circ S - X_{t_j}\circ S)(h)}\right) \\ &= \varphi_{X_{t_{j+1}}\circ S - X_{t_j}\circ S}(h) \\ &= \varphi_{X_{t_{j+1}-t_j}\circ S}(h) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{iX_{t_{j+1}-t_j}\circ S(h)}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{i\langle Y_{t_{j+1}-t_j},h\rangle}\right) \\ &= \varphi_{Y_{t_{j+1}-t_j}}(h). \end{aligned}$$

  Entonces se tiene $Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j} \overset{d}{=} Y_{t_{j+1}-t_j} = Y_{t_{j+1}-t_j}$.

- Nos encargaremos ahora de incrementos independientes. Para esto tome $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ y $j, m \in \{1, ..., n\}$ con $j > m$, debemos mostrar que $Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j}$ es independiente de $Y_{t_{m+1}} - Y_{t_m}$, o sea que $\sigma((Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j})^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}(H))$ es independiente de $\sigma((Y_{t_{m+1}} - Y_{t_m})^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}(H))$.

  Trabajaremos primero con cilindros. Tomaremos unidimensionales para no complicar el siguiente cálculo, pero el mismo argumento se aplica para el caso de cualquier dimensión o bien basta con convencerse que si se desean de una cierta dimensión basta extender los cilindros que se usarán a continuación: llamemoslos $Z_y(B_1)$ y

$Z_y(B_2)$, los denotaremos por Z_1 y Z_2 respectivamente por comodidad. Entonces:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}((Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j})^{-1}(Z_1) \cap (Y_{t_{m+1}} - Y_{t_m})^{-1}(Z_2)) \\
&= \mathbb{P}(\{\langle Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j}(\omega), y\rangle \in B_1\} \cap \{\langle Y_{t_{m+1}} - Y_{t_m}(\omega), y\rangle \in B_2\}) \\
&= \mathbb{P}(\{(X_{t_{j+1}} - X_{t_j}) \circ S(y) \in B_1\} \cap \{(X_{t_{m+1}} - X_{t_m}) \circ S(y) \in B_2\}) \\
&= \mathbb{P}((X_{t_{j+1}} - X_{t_j}) \circ S(y) \in B_1)\mathbb{P}((X_{t_{m+1}} - X_{t_m}) \circ S(y) \in B_2) \\
&= \mathbb{P}((Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j})^{-1}(Z_1))\mathbb{P}((Y_{t_{m+1}} - Y_{t_m})^{-1}(Z_2)).
\end{aligned}
$$

Entonces $Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j}$ es independiente de $Y_{t_{m+1}} - Y_{t_m}$ pero sobre el álgebra $\mathcal{Z}(H)$. Sean $\mathcal{A}_1 := \{(Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j})^{-1}(Z) : Z \in \mathcal{Z}(H)\}$ y $\mathcal{A}_2 := \{(Y_{t_{m+1}} - Y_{t_m})^{-1}(Z) : Z \in \mathcal{Z}(H)\}$. Aquí $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{F}$, y como $\mathcal{Z}(H)$ es un álgebra, se sigue que $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ son π-sistemas, entonces $\sigma(\mathcal{A}_1)$ y $\sigma(\mathcal{A}_2)$ son independientes. Se concluye recordando que $\sigma(\mathcal{Z}(H)) = \mathcal{C}(H) = \mathcal{B}(H)$.

- Para finalizar debemos verificar la continuidad estocástica. Por los incrementos estacionarios notamos que para $t \geq s \geq 0$ se tiene:

$$\mathbb{P}(\|Y_t - Y_s\| > \epsilon) = \mathbb{P}(\|Y_{t-s}\| > \epsilon),$$

y llamemos a $l = t - s$. En todo caso si $t \to s$ implica que $l \to 0$ y claramente este límite es por la derecha, entonces como $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+} \in D_{\mathbb{R}^+}(H)$ se sigue que $\lim_{l\to 0} Y_l = Y_0 = 0$ y por tanto:

$$\lim_{t\to s^+} \mathbb{P}(\|Y_t - Y_s\| > \epsilon) = \lim_{t\to s^+} \mathbb{P}(\|Y_{t-s}\| > \epsilon) = 0.$$

Para verificar el límite por la izquierda, o sea $s \geq t > 0$ basta observar que:

$$\lim_{t\to s^-} \mathbb{P}(\|Y_t - Y_s\| > \epsilon) = \lim_{t\to s^-} \mathbb{P}(\|Y_s - Y_t\| > \epsilon) = \lim_{t\to s^-} \mathbb{P}(\|Y_{s-t}\| > \epsilon) = 0,$$

con lo cual se concluye que $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso de Lévy. □

Corolario 3.2.1. *Sea $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ un proceso de Lévy cilíndrico y sea $S \in \mathcal{L}_2(H)$. Entonces $\{X_t \circ S\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ define un proceso de Lévy $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+} \in D_{\mathbb{R}^+}(H)$ tal que $\{\langle Y_t, \cdot\rangle\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una versión cilíndrica de $\{X_t \circ S(\cdot)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$.*

Demostración. Por la Proposición 3.2.1 sabemos que $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ posee una versión cilíndrica càdlàg $\{\tilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, entonces por el Teorema 3.2.1, $S \in \mathcal{L}_2(H)$ regulariza a $\{\tilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ en el proceso de Lévy $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Sea $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H, entonces:

$$\mathbb{P}(X_t \circ S(h_k) = \langle Y_t, h_k\rangle, \forall k \in \mathbb{N}) = \mathbb{P}(X_t \circ S(h_k) = \tilde{X}_t \circ S(h_k), \forall k \in \mathbb{N}) = 1.$$

□

§ 3.3 Consecuencias de la regularización

En esta sección pretendemos ver implicaciones y aplicaciones del regularizar procesos cilíndricos y de Lévy cilíndricos. Primero trataremos unos resultados respecto a la regularización de un proceso cilíndrico.

Proposición 3.3.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$, $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ un proceso cilíndrico y sea $S \in \mathcal{L}_2(H)$. Entonces $\{X_t \circ S \circ T\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ define un proceso dado por $\{T^*(Y_t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ con valores en H tal que $\{X_t \circ S \circ T(\cdot)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una versión cilíndrica de $\{\langle T^*(Y_t), \cdot\rangle\}_{t\in\mathbb{R}^+}$.*

Demostración. Observese que $S \circ T \in \mathcal{L}_2(H)$. Entonces, por Corolario 3.1.1, existe $\{Y_t^T\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ tal que $\{X_t \circ S \circ T(\cdot)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una versión cilíndrica de $\{\langle Y_t^T, \cdot\rangle\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, donde $\{Y_t^T\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es el proceso obtenido por regularizar $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ con $S \circ T$. Por otro lado:

$$X_t \circ S \circ T(h) = \langle Y_t, T(h)\rangle = \langle T^*(Y_t), h\rangle$$

de este modo se concluye el resultado, y más aún, se tiene que $\{Y_t^T\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una versión de $\{T^*(Y_t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$. □

Proposición 3.3.2. *Sea $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ un proceso cilíndrico cuadrado integrable y sea $S \in \mathcal{L}_2(H)$. Entonces $\{X_t \circ S\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ define un proceso cuadrado integrable $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ con valores en un espacio de Hilbert H tal que $\{X_t \circ S(\cdot)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una versión cilíndrica de $\{\langle Y_t, \cdot\rangle\}_{t\in\mathbb{R}^+}$.*

Demostración. Por el Corolario 3.1.1 existe $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$. Ahora por definición de variable aleatoria cilíndrica $X_t \in \mathcal{L}(H, L^2(\Omega, \mathbb{P}))$, entonces para $S \in \mathcal{L}_2(H)$, se tiene que $X_t \circ S \in \mathcal{L}_2(H, L^2(\Omega, \mathbb{P}))$ entonces por identidad de Parseval se sigue:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\|Y_t\|^2) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} |\langle Y_t, h_k\rangle|^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} |X_t \circ S(h_k)|^2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}|X_t \circ S(h_k)|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \|X_t \circ S(h_k)\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{P})} = \|X_t \circ S\|^2_{\mathcal{L}_2(H,L^2(\Omega,\mathbb{P}))} < \infty.\end{aligned}$$

Por tanto para cada $t \in \mathbb{R}^+$ se cumple $Y_t \in L^2(\Omega, \mathbb{P}; H)$. □

A partir de este resultado podemos extender a más concluciones si consideramos más cualidades para nuestro proceso cilíndrico. Por ejemplo ser martingala.

Proposición 3.3.3. *Sea $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ martingala cilíndrica cuadrado integrable tal que para todo $h \in H$ se tiene $\{X_t(h)\}_{t\in[0,T]} \in D_T(\mathbb{R})$ y sea $S \in \mathcal{L}_2(H)$. Entonces S regulariza a $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ en una martingala $\{Y_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{M}_T^2(H)$.*

Demostración. Por Proposición 3.3.2, sabemos que $\mathbb{E}(\|Y_t\|^2) = \|X_t \circ S\|^2_{\mathcal{L}_2(H,L^2(\Omega,\mathbb{P}))}$. Por otro lado para todo $h \in H$ se tiene que $\{X_t(h)\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{M}_T^2(\mathbb{R})$, entonces se tiene que $\sup_{t\in[0,T]} \|X_t(h)\|_{L^2(\Omega,\mathbb{P})} < \infty$. Por el Teorema de Banach-Steinhauss se tiene que $\sup_{t\in[0,T]} \|X_t\|_{\mathcal{L}(H,L^2(\Omega,\mathbb{P}))} < \infty$ y de esto se sigue:

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\|Y_t\|^2 = \sup_{t\in[0,T]} \|X_t \circ S\|^2_{\mathcal{L}_2(H,L^2(\Omega,\mathbb{P}))} \leq \sup_{t\in[0,T]} \|X_t\|^2_{\mathcal{L}(H,L^2(\Omega,\mathbb{P}))} \|S\|^2_{\mathcal{L}_2(H)},$$

por tanto $\|Y\|_{\mathcal{M}_T^2} < \infty$ donde $Y = \{Y_t\}_{t\in[0,T]}$.

Al ser $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ una martingala cilíndrica, se tiene que, para $0 \leq s < t$, $\mathbb{E}(X_t \circ S(h)|\mathcal{F}_s) = X_s \circ S(h)$. Además:

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} h_k X_t \circ S(h_k)\right\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |X_t \circ S(h_k)|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |X_t \circ S(h_k)|^2} < \infty,$$

donde esto nos dice que $\| \sum_{k=0}^{n} h_k X_t \circ S(h_k)\| < C$. Luego por la definición de Y y el Teorema de convergencia dominada condicional concluimos:

$$\mathbb{E}(Y_t|\mathcal{F}_s) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \mathbb{E}(X_t \circ S(h_k)|\mathcal{F}_s) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k X_s \circ S(h_k) = Y_s$$

y con esto tenemos que $\{Y_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{M}_T^2(H)$. □

De la misma manera que se hizo en la Observación 3, se puede realizar una regularización de una martingala cuadrado integrable sobre $\mathbb{R}^+$ haciendo la misma extensión realizada. Entonces $S \in \mathcal{L}_2(H)$ regulariza una martingala cilíndrica cuadrado integrable $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ en $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+} \in \mathcal{M}^2(H)$.

Corolario 3.3.1. *Sea $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ un movimiento Browniano cilíndrico y sea $S \in \mathcal{L}_2(H)$. Entonces S regulariza a $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ en un movimiento Browniano con valores en un espacio de Hilbert $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$.*

Demostración. Por Teorema 3.2.1 sabemos que el proceso $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es Lévy. Segun la definición del Ejemplo 1.4.2 de un movimiento Browniano con valores en H, se satisface que $Y_0 = 0$, con trayectorias continuas y sus incrementos independientes. Basta verificar entonces que para $t > s$ se tiene que $Y_t - Y_s$ es una variable Gaussiana, pero sabemos que $\langle Y_t - Y_s, h\rangle = B_t(S(h)) - B_s(S(h))$. Por definición de movimiento Browniano cilíndrico como se presentó en el Ejemplo 2.2.2, para todo $h \in H$ se tiene que $\{B_t(S(h))\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un movimiento Browniano con valores en $\mathbb{R}$, por tanto para todo $t > s$ se cumple $B_t(S(h)) - B_s(S(h)) \sim N(0, |t-s|A)$ con A la covarianza. □

Corolario 3.3.2. *Sea $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ un proceso compuesto de Poisson cilíndrico tal que $X(h) = \{X_t(h)\}_{t\in\mathbb{R}^+} \in D_{\mathbb{R}^+}(\mathbb{R})$ y sea $S \in \mathcal{L}_2(H)$. Entonces S regulariza a $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ en un proceso compuesto de Poisson $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$.*

Demostración. Consideremos un proceso compuesto de Poisson cilíndrico $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, entonces existen variables aleatorias cilíndricas $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con misma distribución cilíndrica y que para todo $h \in H$ se tiene $\{Z_n(h)\}_{n\in\mathbb{N}}$ son independientes, además existe un proceso de Poisson $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ independiente de todo $\{Z_n(h)\}_{n\in\mathbb{N}}$ para cada $h \in H$ tal que vale la siguiente descomposición:

$$X_t = \begin{cases} 0 & si \quad N_t = 0 \\ & \\ Z_1 + \cdots + Z_{N_t} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces al componer con el operador S se tiene:

$$X_t \circ S(h) = \begin{cases} 0 & si \quad N_t = 0 \\ \\ Z_1 \circ S(h) + \cdots + Z_{N_t} \circ S(h) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por Teorema 3.2.1:

$$\langle Y_t, h \rangle = \begin{cases} 0 & si \quad N_t = 0 \\ \\ \langle M_1, h \rangle + \cdots + \langle M_{N_t}, h \rangle & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces el proceso regularizado tiene la siguiente forma:

$$Y_t = \begin{cases} 0 & si \quad N_t = 0 \\ \\ M_1 + \cdots + M_{N_t} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $\{M_n\}_{n\in\mathbb{R}^+}$ y $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ son los procesos con valores en H dados por el Teorema 3.1.1. Observese que $\{M_n\}_{n\in\mathbb{R}^+}$ son independientes, basta considerar el mismo análisis de independencia realizado en la prueba del Teorema 3.2.1, salvo que en vez de usar incrementos se usa directamente el proceso y se emplea que $\{Z_n \circ S\}_{n\in\mathbb{N}}$ son independientes. Para verificar que poseen misma distribución que considerando un cilindro $A_{h_1,...,h_n}(B)$ con $B \in \mathcal{B}(H)$:

$$p_{Z_i \circ S}(A_{h_1,...,h_n}(B)) = \mathbb{P}((Z_i \circ S(h_1), ..., Z_i \circ S(h_n)) \in B)$$

$$= \mathbb{P}((\langle M_i, h_1 \rangle, ..., \langle M_i, h_n \rangle) \in B) = \mathbb{P}(M_i \in A_{h_1,...,h_n}(B)).$$

Entonces al tomar la σ-álgebra $\mathcal{C}(H)$, por Lema 2.1.1 se sigue que p_{M_i} coinciden en $\mathcal{B}(H)$. Así ya tenemos garantizado que $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son i.i.d.

Por último necesitamos que $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ sea independiente de $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dados $0 \le t_1 \le \cdots \le t_m \le T$ selección de tiempos dada, entonces sea $j \in \{1, ..., m\}$, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{A_h(B_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ cilindros y $k \in \mathbb{N}$. Por independencia de $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ con $\{Z_n \circ S(h)\}_{n\in\mathbb{N}}$ para todo $h \in H$ se cumple:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\{N_{t_j} = k\} \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n^{-1}(A_n)\right)\right) &= \mathbb{P}\left(\{N_{t_j} = k\} \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\langle M_n, h\rangle \in B_n\}\right)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\{N_{t_j} = k\} \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{Z_n \circ S(h) \in B_n\}\right)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\{N_{t_j} = k\} \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (Z_n \circ S(h))^{-1}(B_n)\right)\right) \\ &= \mathbb{P}(N_{t_j} = k) \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}((Z_n \circ S(h))^{-1}(B_n)) \\ &= \mathbb{P}(N_{t_j} = k) \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(M_n^{-1}(A_n)). \end{aligned}$$

Observese que, así como se discutió en la prueba del Teorema 3.2.1, basta tomar cilindros unidimensionales de misma base. Para una cantidad arbitraria de tiempos del proceso de Poisson, el cálculo es análogo. De este modo $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es independiente de $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sobre $\mathcal{Z}(H)$ y como se realizó en la misma prueba del teorema de regularización de Lévy, se extiende a $\mathcal{C}(H) = \mathcal{B}(H)$.

De este modo encontramos una descomposición con las condiciones requeridas, por tanto $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso compuesto de Poisson. $\square$

Antes de proseguir, vale la pena mencionar la siguiente observación para efectos de uso en próximas secciones:

Observación 6. *Observese que dado un proceso de Lévy cilíndrico cuadrado integrable $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, gracias al Teorema 3.2.1 existe una relación entre los primeros momentos del proceso cilíndrico y el regularizado, basta observar que:*

$$\mathbb{E}(X_t \circ S(h)) = \mathbb{E}(\langle Y_t, h\rangle) = t\langle m^Y, h\rangle,$$

donde m^Y es la media de $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$. Si tuviesemos que $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ posee media cilíndrica 0 entonces de la igualdad anteriore tendriamos que para todo $h \in H\setminus\{0\}$ $m^Y = \mathbb{E}(Y_t) = 0$. Por tanto si el proceso cilíndrico tiene media cilíndrica 0 el proceso regularizado posee media 0.

Si retomamos el Teorema 2.2.1 junto con el Teorema 3.2.1 resulta que se puede mejorar la conclusión y dar una mayor descripción de las componentes de la descomposición. Cabe recordar que nosotros estamos suponiendo las variables cilíndricas son operadores continuos de H en $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a diferencia en el Teorema 2.2.1 que no se requiere esta hipótesis.

Proposición 3.3.4. *Sea $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ un proceso de Lévy cilíndrico tal que $\{X_t(h)\}_{t\in\mathbb{R}^+} \in D_{\mathbb{R}^+}(\mathbb{R})$ para todo $h \in H$. Entonces en el Teorema 2.2.1, se tiene que $b \circ S \in H^*$ y $\{(\tilde{N}_t + N_t)\circ S\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso cilíndrico para $S \in \mathcal{L}_2(H)$.*

Demostración. Sea $S \in \mathcal{L}_2(H)$, entonces S regulariza a $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ en un proceso de Lévy $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ tal que $\{X_t \circ S(h)\}_{t\in\mathbb{R}^+} = \{\langle Y_t, h\rangle\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ para cada $h \in H$. Ahora usando la descomposición Lévy-Itô en espacios de Hilbert se tiene que:

$$Y_t = b^Y t + B_t^Y + \int_{\|x\|\le 1} x\tilde{N}_t^Y(dx) + \int_{\|x\|>1} xN_t^Y(dx),$$

para algún $b^Y \in H$, $\{B_t^Y\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ un movimiento Browniano con media 0 y con valores en H, una medida aleatoria de Poisson $\{N_t^Y\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ y su respectiva medida compensada $\{\tilde{N}_t^Y\}_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Por otro lado al considerar la descomposición de Lévy-Itô cilíndrica se tiene:

$$b\circ S(h)t + B_t \circ S(h) + \tilde{N}_t \circ S(h) + N_t \circ S(h)$$

$$= \langle b^Y, h\rangle t + \langle B_t^Y, h\rangle + \left\langle \int_{\|x\|\le 1} x\tilde{N}_t^Y(dx) + \int_{\|x\|>1} xN_t^Y(dx), h \right\rangle.$$

De esta igualdad se tiene que $b\circ S(h) = \langle b^Y, h\rangle$ con lo cual $b\circ S$ es continuo. Ahora observese que $\{B_t\circ S\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un movimiento Browniano cilíndrico, entonces $\{B_t\circ S(h)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un movimiento Browniano usual con valores en $\mathbb{R}$. Por otro lado $\{B_t^Y\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un movimiento Browniano, o sea un proceso de Lévy, entonces $\{\langle B_t^Y, h\rangle\}_{t\in[0,T]}$ es un proceso de Lévy con trayectorias continuas además $\langle B_t^Y, h\rangle$ es Gaussiano, de este modo $\{\langle B_t^Y, h\rangle\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un movimiento Browniano. Con esto se tiene que las componentes continuas en ambas descomposiciones deben coincidir, por tanto $B_t \circ S(h) = \langle B_t^Y, h\rangle$. Entonces se tiene:

$$\tilde{N}_t \circ S(h) + N_t \circ S(h) = \left\langle \int_{\|x\|\leq 1} x\tilde{N}_t^Y(dx) + \int_{\|x\|>1} xN_t^Y(dx), h \right\rangle$$

de lo que se sigue la continuidad de $\{\tilde{N}_t \circ S + N_t \circ S\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, y como ya sabemos que $\{b\circ S(\cdot)t + \tilde{N}_t\circ S + N_t\circ S\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es cilíndrico, o sea es lineal, se tiene que $\{\tilde{N}_t\circ S + N_t\circ S\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es lineal y por tanto cilíndrico. $\square$

Capítulo 4

Integral Regularizada

En este capítulo estamos interesados en definir una integral estocástica que, en lugar de hacerlo respecto a un proceso estocástico clásico, sea respecto a un proceso cilíndrico. En nuestro caso nos restringiremos a un proceso de Lévy cilíndrico cuadrado integrable con media cilíndrica 0 y con esto daremos sentido a la expresión:

$$\int_0^t \Phi_s dL_s \quad \text{con} \quad t \geq 0.$$

Para definir dicha integral realizaremos una construcción en diferentes pasos. Primero que todo debemos definir la clase de integrandos sobre los cuales la integral va a actuar, posteriormente encontraremos una clase más simple de los mismos donde definiremos la integral de la manera más elemental posible. Finalmente nos encargaremos de extender esta definición.

Es importante aclarar que hasta donde alcanza nuestro conocimiento, la única otra construcción para Lévy cilíndrico con segundos momentos es la realizada por Riedle en [27]. Una construcción para Lévy cilíndricos sin momentos fue hecha por Jakubowski y Riedle en [19], sin embargo la clase de integrandos es aún restrictiva. El trabajo en este capítulo se realizó con un métoo original y que podría ser empleado en el futuro para procesos cilíndricos más generales.

Recordamos que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad con una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ y H un espacio de Hilbert separable.

Para este capítulo, siempre que consideremos un proceso de Lévy $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ con valores reales y adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, supondremos que es càdlàg y además supondremos que dado $s < t$ se tendrá $X_t - X_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$, donde $\mathcal{F}_s$ es un miembro de la filtración del espacio de probabilidad filtrado. Esta suposición asegura que todo proceso de Lévy con media 0 es una martingala. Y en efecto esto se tiene gracias a los incrementos estacionarios:

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(X_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t - X_s) + X_s = X_s.$$

Esta hipótesis fue también utilizada en [1], pag 76. Observe que con esta misma suposición pero para un proceso de Lévy cilíndrico con media cilíndrica 0 se obtendrá una martingala cilíndrica (solo que esta suposición de independencia se pide para todo $h \in H$). Esta hipótesis se preserva bajo regularizaciones, o sea, si un proceso cilíndrico la satisface, entonces el proceso regularizado también. Esto es posible mostrarlo sobre los cilindros como se realizó en la prueba del Teorema 3.2.1.

Además es propio mencionar que, como ya se dijo al inicio del capítulo 3, nosotros estamos utilizando variables cilíndricas continuas de H en $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, entonces con esta suposición uno puede mostrar de manera análoga, como en el Teorema 1.4.1, que la covarianza cilíndrica aparte de ser lineal, definido positiva y simétrica, además es continua. Es decir $Q \in \mathcal{L}(H)$, con esto también podemos afirmar entonces que $Q^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(H)$.

Antes de comenzar es propio destacar que este capítulo está basado en los trabajos realizados en [13] y en [22].

§ 4.1 Integrandos de Hilbert-Schmidt

Primero que todo definiremos los objetos que estudiaremos

Definición 4.1.1. *A una función $\Phi : \Omega \to \mathcal{L}_2(H)$ que sea $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathcal{L}_2(H))$-medible le llamaremos una variable aleatoria Hilbert-Schmidt. Y denominaremos como un proceso de Hilbert-Schmidt a la familia de operadores aleatorios Hilbert-Schmidt $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$.*

En integración estocástica es usual encontrar la siguiente definición de procesos:

Definición 4.1.2. *([1], pág 216) Sea $T \geq 0$. A la σ-álgebra dada por:*

$$\sigma(\mathcal{P}_T) := \sigma(\{A\times]s,t] \subset \Omega \times [0,T] : A \in \mathcal{F}_s\} \cup \{A \times \{0\} \subset \Omega \times [0,T] : A \in \mathcal{F}_0\}),$$

le llamaremos la σ-álgebra predecible. Un proceso con valores en H, $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$, es predecible si es $\sigma(\mathcal{P}_T)/\mathcal{B}(H)$-medible.

Escribimos ahora $\Phi = \{\Phi_t\}_{t\in[0,T]}$. Ahora definimos la función p definida sobre los procesos de Hilbert-Schmidt dada por:

$$p(\Phi)^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^T \|\Phi_s \circ Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{L}_2(H)} ds\right).$$

Como sabemos, $\mathcal{L}_2(H)$ es un espacio de Hilbert, entonces podemos considerar procesos de Hilbert-Schmidt predecibles. Definimos entonces la clase de operadores Hilbert-Schmidt $\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]}$ los cuales son de nuestro interés:

$$\mathcal{HS}_T := \left\{\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]} : \text{ es predecible y } p(\Phi) < \infty\right\}.$$

Lema 4.1.1. *p define una seminorma para $\mathcal{HS}_T$.*

Demostración. Sean $\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]}, \{\Psi_t\}_{t\in[0,T]}$ procesos de Hilbert-Schmidt y sea $c \in \mathbb{R}$. Observese que usando la linealidad de las integrales y usando el hecho de que $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_2(H)}$ es norma, se verifica facilmente que $p(c\Phi) = |c|p(\Phi)$. Además note que $p \geq 0$. Por último verificamos la desigualdad triángular. Para ello basta observar que:

$$p(\Phi) = \| \|\Phi \circ Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}_2(H)} \|_{L^2(\Omega\times[0,T], \mathbb{P}\otimes ds)}.$$

por tanto si consideramos $p(\Phi+\Psi)$ solo se debe aplicar la desigualdad triángular de cada una de las normas. $\square$

Observese que $\mathcal{HS}_T$ es un espacio vectorial. Como es propio debemos verificar que esta clase que se propone no es una clase vacía entonces procedemos considerando los siguientes procesos.

Consideremos para $t \in [0,T]$ el operador aleatorio $\Phi_t : \Omega \to \mathcal{L}_2(H)$ como:

$$\Phi_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{A_i}(\omega)\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)S_i \tag{4.1}$$

donde $0 \leq t_i < t_{i+1} \leq T$ con $i = 1, ..., n$ (aquí pediremos que $t_0 = 0, t_{n+1} = T$), $A_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ y $\{S_i\}_{i=0}^n \subset \mathcal{L}_2(H)$. Observese que Φ_t es $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathcal{L}_2(H))$-medible para todo $t \in [0,T]$.

Lema 4.1.2. *En la expresión* (4.1) *podemos asignarle una nueva representación donde se tenga que* $]t_i, t_{i+1}]\cap]t_j, t_{j+1}] = \emptyset$ *y* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *para* $i \neq j$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad suponga $i < j$ y además $]t_i, t_{i+1}]\cap]t_j, t_{j+1}] =]t_j, t_{i+1}]$, entonces defina la partición como $]t_r, t_{r+1}] =]t_i, t_{i+1}]$ y además $]t_{r+1}, t_{r+2}] =]t_j, t_{j+1}]\setminus]t_r, t_{r+1}]$,por otro lado tome $A_r = A_i, A_{r+1} = A_j \setminus A_r, A_{r+2} = A_{i+1} \setminus A_{r+1}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}S_i + \mathbb{1}_{A_j}\mathbb{1}_{]t_j,t_{j+1}]}S_j \\
&= \mathbb{1}_{A_r}\mathbb{1}_{]t_r,t_{r+1}]}S_i + \mathbb{1}_{A_{r+1}}\mathbb{1}_{]t_{r+1},t_{r+2}]}(S_i + S_k) + \mathbb{1}_{A_{r+2}}\mathbb{1}_{]t_{r+2},t_{r+3}]}S_k
\end{aligned}$$

observe que por ser filtración se tiene $\mathcal{F}_{t_i} \subseteq \mathcal{F}_{t_j} \subseteq \mathcal{F}_{t_{i+1}} \subseteq \mathcal{F}_{t_{j+1}}$ se preserva la condición necesaria de los nuevos conjuntos a considerar entonces:

$$\sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)S_i = \sum_{r=0}^{m} \mathbb{1}_{A_r}\mathbb{1}_{]t_r,t_{r+1}]}(t)S_r$$

$\square$

A los procesos de Hilbert-Schmidt dados por (4.1) les llamaremos procesos simples de Hilbert-Schmidt. Al conjunto de los procesos $\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]}$ de Hilbert-Schmidt que son simples lo denotaremos como:

$$\mathcal{HSS}_T := \left\{\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]} : \{\Phi_t\}_{t\in[0,T]} \text{ es proceso simple } \right\}$$

Lema 4.1.3. $\mathcal{HSS}_T$ *es un sub-espacio vectorial lineal de* $\mathcal{HS}_T$.

Demostración. Primero probaremos que $\mathcal{HSS}_T \subset \mathcal{HS}_T$. Sea $\Phi = \{\Phi_t\}_{t\in[0,T]}$ dado por (4.1). Notese que el proceso es predecible. Además note que $p(\Phi) < \infty$, en efecto, basta notar que si se toma $]0,T] = \bigcup_{i=0}^{n}]t_i, t_{i+1}]$ y como cada intervalo es disjunto entonces:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\int_0^T \left\| \left(\sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s)S_i\right) \circ Q^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathcal{L}_2(H)}^2 ds\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s)S_i \circ Q^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathcal{L}_2(H)}^2 ds\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \mathbb{1}_{A_i}S_i \circ Q^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathcal{L}_2(H)}^2 ds\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}(t_{i+1}-t_i)\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A_i}\|S_i \circ Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}_2(H)}^2\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}(t_{i+1}-t_i)\mathbb{P}(A_i)\|S_i \circ Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}_2(H)}^2 < \infty
\end{aligned}
$$

Concluimos que $\mathcal{HSS}_T \subset \mathcal{HS}_T$. Ahora sean $\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]}, \{\Psi_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{HSS}_T$ y $c \in \mathbb{R}$. Claramente $\mathcal{HSS}_T$ es cerrado en el producto escalar, entonces verificaremos que es cerrado en la adición, . Aquí escribimos para $t \geq 0$:

$$
\Phi_t = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)S_i \quad \text{y} \quad \Psi_t = \sum_{k=0}^{m} \mathbb{1}_{B_k}\mathbb{1}_{]r_k,r_{k+1}]}(t)S'_k
$$

donde $\{t_i\}_{i=0}^n, \{r_k\}_{k=0}^m$ son particiones de $[0,T]$, $A_i \in \mathcal{F}_{t_i}$, $B_k \in \mathcal{F}_{r_k}$, $\{S_i\}_{i=0}^n, \{S'_k\}_{k=0}^m \subset \mathcal{L}_2(H)$. Ahora basta considerar todos los puntos generados por las particiones y conjuntos medibles en una nueva indexión (gracias al Lema 4.1.2 todas las componentes se pueden pedir disjuntas unas de otras):

$$
\Phi_t + \Psi_t = \sum_{j=0}^{n+m} \mathbb{1}_{C_j}\mathbb{1}_{]u_j,u_{j+1}]}(t)S''_j \in \mathcal{HSS}_T
$$

donde $C_j \in \{A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m\}$ y $u_j \in \{t_1, ..., t_n, r_1, ..., r_m\}$. □

Ahora observese que:

$$
p(\Phi) = 0 \Longleftrightarrow \Phi_t(\omega) \circ Q^{\frac{1}{2}} = 0 \;\; \forall h \in H \text{ y } \mathbb{P} \otimes dt \text{ casi seguramente}
$$

entonces obtenermos que $p(\Phi) = 0$ si y solo si $\Phi = 0$ sobre $Q^{\frac{1}{2}}(H)$. Como queremos utilizar una norma, debemos considerar clases de equivalencia con la cual entonces en lugar de p escribiremos $\|\Phi\|_{\mathcal{HS}_T}^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^T \|\Phi_s \circ Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}_2(H)}^2 ds\right)$. Para simplificar, mantendremos la misma notación de la clase de integrandos, solo que ahora consideraremos la siguiente observación.

Observación 7. *Note que las relaciones de equivalencia respecto a p no implica que los procesos son iguales $\mathbb{P} \otimes dt$ casi seguramente, sino más bien deben corresponder $Q^{\frac{1}{2}}\mathbb{P} \otimes dt$ casi seguramente.*

Teorema 4.1.1. *El espacio* $(\mathcal{HS}_T, \|\cdot\|_{\mathcal{HS}_T})$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{\Phi_t^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de Cauchy en $\mathcal{HS}_T$. Por desigualdad de Chebyshev aplicado a la medida $\mathbb{P}\otimes dt$ existe una subsucesión $\{n_k\}$ tal que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\otimes dt(A_k) &\leq 2^{2k}\int_{\Omega\times[0,T]} \|\Phi_t^{n_{k+1}}\circ Q^{\frac{1}{2}} - \Phi_t^{n_k}\circ Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{L}_2(H)} d\mathbb{P}\otimes dt \\
&= 2^{2k}\|\Phi^{n_{k+1}} - \Phi^{n_k}\|_{\mathcal{HS}_{[0,T]}} < \frac{1}{2^k},
\end{aligned}$$

donde $A_k = \left\{(\omega,t)\in\Omega\times[0,T] : \|\Phi_t^{n_{k+1}}\circ Q^{\frac{1}{2}} - \Phi_t^{n_k}\circ Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}_2(H)} > \frac{1}{2^k}\right\}$. Luego sumando sobre k se tiene:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\otimes dt(A_k) < \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 2$$

Entonces por Lema de Borel-Cantelli se concluye que:

$$\mathbb{P}\otimes dt\left(\limsup_{k\to\infty} A_k\right) = 0$$

Entonces para $(\omega,t)\notin \limsup_{k\to\infty} A_k$ se tiene que:

$$\|\Phi_t^{n_{k+1}}(\omega)\circ Q^{\frac{1}{2}} - \Phi_t^{n_k}(\omega)\circ Q^{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}_2(H)} < \frac{1}{2^k} \longrightarrow 0,$$

cuando $k\to\infty$. Por tanto para (ω,t) fijo se tiene $\{\Phi_t^{n_k}(\omega)\circ Q^{\frac{1}{2}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}_2(H)$, entonces existe $\Psi_t(\omega)$ a la cual la sucesión converge. De este modo defina:

$$\Psi_t(\omega) = \begin{cases} 0 & si \quad (\omega,t)\in \limsup_{k\to\infty} A_k \\ \lim_{k\to\infty}\Phi_t^{n_k}(\omega)\circ Q^{\frac{1}{2}} & si \quad (\omega,t)\notin \limsup_{k\to\infty} A_k \end{cases}$$

De hecho como $\{\Phi_t^{n_k}(\omega)\circ Q^{\frac{1}{2}}(h)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en H entonces $\{\Phi_t^{n_k}(\omega)(q)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy con $q = Q^{\frac{1}{2}}(h)$, de este modo $\Phi_t^{n_k}(\omega)(q)\to\Phi_t(\omega)(q)$ cuando $k\to\infty$, entonces por unicidad de límite necesariamente $\Psi_t(\omega)(h) = \Phi_t(\omega)(q) = \Phi_t(\omega)\circ Q^{\frac{1}{2}}(h)$. Concluimos entonces que $\Psi_t = \Phi_t\circ Q^{\frac{1}{2}}$.

De este modo encontramos un proceso de Hilbert-Schmidt $\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]}$. Finalmente por el Lema de Fatou:

$$\begin{aligned}
\|\Phi^n - \Phi\|^2_{\mathcal{HS}_T} &= \mathbb{E}\left(\int_0^T \|\Phi_s^n\circ Q^{\frac{1}{2}} - \Phi_s\circ Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{L}_2(H)} ds\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^T \lim_{k\to\infty}\|\Phi_s^n\circ Q^{\frac{1}{2}} - \Phi_s^{n_k}\circ Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{L}_2(H)} ds\right) \\
&\leq \liminf_{k\to\infty}\|\Phi^n - \Phi^{n_k}\|^2_{\mathcal{HS}_T}.
\end{aligned}$$

De este modo se concluye que $\lim_{n\to\infty}\|\Phi^n - \Phi\|_{\mathcal{HS}_T} = 0$ y este proceso límite cual es predecible pues es límite de procesos predecibles. Por tanto $\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]}\in\mathcal{HS}_T$. $\square$

Ahora definiremos $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{HS}_T} : \mathcal{HS}_T \times \mathcal{HS}_T \to \mathbb{R}$ dado por:

$$\langle\Phi,\Psi\rangle_{\mathcal{HS}_T} = \mathbb{E}\left(\int_0^T \langle\Phi_s\circ Q^{\frac{1}{2}}, \Psi_s\circ Q^{\frac{1}{2}}\rangle_{\mathcal{L}_2(H)}ds\right).$$

Teorema 4.1.2. *El espacio $(\mathcal{HS}_T, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{HS}_T})$ es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Notese que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{HS}_T}$ es bilineal gracias a la linealidad del producto interno de $\mathcal{L}_2(H)$ y a la de las integrales. Además es una forma simétrica ya que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{L}_2(H)}$ tome valores reales. Por último observe que $\langle\Phi,\Phi\rangle_{\mathcal{HS}_T} = \|\Phi\|^2_{\mathcal{HS}_T}$, de este modo $\langle\Phi,\Phi\rangle_{\mathcal{HS}_T} = 0$ si y solo si $\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]} = 0$. $\square$

Teorema 4.1.3. *$\mathcal{HSS}_T$ es denso en $\mathcal{HS}_T$.*

Demostración. Como $\mathcal{HS}_{[0,T]}$ es un espacio de Hilbert entonces vamos a demostrar que $\mathcal{HSS}_T^{\perp} = \{0\}$ para obtener densidad. Sea $\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{HSS}_T^{\perp}$. Debemos mostrar que si $\langle\Phi,\Psi\rangle_{\mathcal{HS}_T} = 0$ para todo $\{\Psi_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{HSS}_T$ entonces se tendrá que $\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]} = 0$. Para ello es suficiente considerar $\{\Psi_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{HSS}_T$ de la forma $\Psi_t = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{]s,t]}S$ donde $S \in \mathcal{L}_2(H), A \in \mathcal{F}_s$ y $0 \le s < t \le T$. Entonces:

$$\langle\Phi,\Psi\rangle_{\mathcal{HS}_T} = 0 \Longleftrightarrow \int_A\int_s^t \langle\Phi_s\circ Q^{\frac{1}{2}}, S\circ Q^{\frac{1}{2}}\rangle_{\mathcal{L}_2(H)}ds\mathbb{P}(\omega) = 0$$

Defina:

$$\mathcal{P} := \left\{A\times]s,t] \subset \Omega\times[0,T] : \int_A\int_s^t \langle\Phi_s\circ Q^{\frac{1}{2}}, S\circ Q^{\frac{1}{2}}\rangle_{\mathcal{L}_2(H)}ds\mathbb{P}(\omega) = 0\right\} \cup \{\emptyset, \Omega\times[0,T]\}.$$

Procedemos a mostrar que $\mathcal{P}$ es un π-sistema. Note para empezar que $\mathcal{P}$ no es vacío puesto que al pedir $\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{HSS}_T^{\perp}$ garantizamos que todo conjunto $A\times]s,t]$ satisface estar en $\mathcal{P}$. Luego si $A\times]s_1,t_1], B\times]s_2,t_2] \in \mathcal{P}$, observese que su intersección es $A\cap B\times]s_1,t_1]\cap]s_2,t_2]$, si alguna de estas intersecciones es vacía entonces nos daría $\emptyset$ el cual pertenece a $\mathcal{P}$, si las intersecciones no son vacías y nuevamente como $\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{HSS}_T^{\perp}$ se satisface que la intersección también pertenece a $\mathcal{P}$.

Ahora note que naturalmente la σ-álgebra de la Definición 4.1.2 $\sigma(\mathcal{P}_T)$ es la más pequeña que contiene a dichas "cajas"de la forma $A\times]s,t]$, por tanto está contenida en $\sigma(\mathcal{P})$. Por otro lado como $\sigma(\mathcal{P}_T)$ es un λ-sistema que contiene a $\mathcal{P}$ entonces por Teorema de Dynkin se concluye que $\sigma(\mathcal{P}) = \sigma(\mathcal{P}_T)$.

De este modo se tiene que la integral es nula sobre todo $\sigma(\mathcal{P}_T)$-medible entonces $\langle\Phi_t\circ Q^{\frac{1}{2}}, S\circ Q^{\frac{1}{2}}\rangle_{\mathcal{L}_2(H)} = 0$ para todo $S \in \mathcal{L}_2(H)$ no cero entonces $\Phi_t(\omega)\circ Q^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}_2(H)^{\perp} = \{0\}$ y como los elementos de $\mathcal{HS}_T$ están dados por clase de equivalencia se sigue que $\Phi = 0$. $\square$

Observación 8. *De hecho, es posible realizar una completa construcción y definición del espacio $(\mathcal{HS}_{[a,b]}, \|\cdot\|_{\mathcal{HS}_{[a,b]}})$ con $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$, donde entendemos a la norma $\|\Phi\|^2_{\mathcal{HS}_{[a,b]}}$ por $\mathbb{E}\left(\int_a^b \|\Phi_r\circ Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{L}_2(H)}dr\right)$. Basta seguir los pasos de la sección 4.1, no obstante por ser análoga a la presentada para $\mathcal{HS}_T$ la omitiremos.*

§ 4.2 Construcción de la integral regularizada

Para esta sección tomaremos la siguiente notación: para un proceso (estocástico ó cilíndrico) $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ denotaremos por $\Delta X_{t_i\wedge t} = X_{t_{i+1}\wedge t} - X_{t_i\wedge t}$.

En nuestro afán de definir para $t \geq 0$:

$$\int_0^t \Phi_s dL_s$$

iniciaremos definiendola sobre $\mathcal{HSS}_T$. Una manera natural (y lógica) de definirla sería que si:

$$\Phi_t = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]} S_i$$

entonces tomamos:

$$\int_0^t \Phi_s dL_s := \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \Delta L_{t_i\wedge t} \circ S_i^*.$$

No obstante, note que esta integral estaría definiendo simplemente procesos cilíndricos compuestos con operadores Hilbert-Schmidt, esta integral se puede entender como una **integral cilíndrica** pues lo que se obtiene es un proceso cilíndrico y no uno con el sentido clásico con valores en H.

Sin embargo, observe que gracias al Teorema 3.2.1 podemos afirmar que para $t \geq 0$:

$$\int_0^t \Phi_s dL_s(h) = \left\langle \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \Delta Y^i_{t_i\wedge t}, h \right\rangle,$$

donde $\{Y^i_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ son los procesos de Lévy con valores en H dado por las Regularizaciones de los procesos de Lévy cilíndricos $\{L_t \circ S_i^*\}_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Note que por las suposiciones hechas al inicio del capítulo, cada $\{L_{t_i\wedge t}\}_{t\in[0,T]}$ es proceso de Lévy cilíndrico cuadrado integrable con media cilíndrica 0, entonces es una martingala cilíndrica cuadrado integrable con media cilíndrica 0. Por Teorema 3.3.3 y la Observación 6 tenemos que cada $\{Y^i_{t_i\wedge t}\}_{t\in[0,T]}$ pertenece a $\mathcal{M}^2_T(H)$ con media 0.

Observación 9. *También cabe mencionar que $\{Y^i_t\}_{t\in[0,T]}$ también es un proceso de Lévy. Entonces sus incrementos son independientes y como la función mínimo es continua, se sigue que $\{\Delta Y^i_{t_i\wedge t}\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso independiente de $\{\Delta Y^i_{t_j\wedge t}\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ para $i \neq j$. Además al tener incrementos estacionarios tenemos que $\Delta Y^i_{t_i\wedge t} \stackrel{d}{=} Y^i_{(t_{i+1}-t_i)\wedge t}$.*

De este modo **la integral que realmente queremos** tiene sentido que la tomemos para cada $t \geq 0$ como:

$$\int_0^t \Phi_s dL_s := \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \Delta Y^i_{t_i\wedge t},$$

y a esta integral es a lo que le llamaremos como **integral regularizada**. La relación que sostendría la integral cilíndrica con la integral regularizada sería:

$$\int_0^t \Phi_s dL_s(h) = \left\langle \int_0^t \Phi_s dL_s, h \right\rangle.$$

Con estas ideas en mente, procedemos a estudiar propiedades para esta integral regularizada.

Definición 4.2.1. *Defina* $J : \mathcal{HSS}_T \to \mathcal{M}_T^2(H)$ *dado por* $J(\Phi) = \{J_t(\Phi)\}_{t\in[0,T]}$ *definido para cada* $t \geq 0$ *como:*

$$J_t(\Phi) := \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \Delta Y^i_{t_i\wedge t}.$$

Aquí $\{Y^i_t\}_{t\in[0,T]}$ *es la martingala cuadrado integrable con media* 0 *dada por la regularización de* $\{S^*_i\}_{i=0}^n$ *aplicado a la martingala cilíndrica cuadrado integrable con media cilíndrica nula* $\{L_t\}_{t\in[0,T]}$*. A dicho operador* J *le llamaremos la integral regularizada simple.*

Gracias a que los procesos que se obtienen mediante la regularización son únicos hasta indistinguibilidades, nos garantizamos que J es un operador bien definido.

Teorema 4.2.1. *El operador* J *satisface para cada* $t \geq 0$ *que:*

$$\|J_t(\Phi)\|_{L^2(\Omega,\mathbb{P};H)} = \|\Phi\|_{\mathcal{HS}_t}.$$

Demostración. Sea $\Phi = \{\Phi_s\}_{s\in[0,T]} \in \mathcal{HSS}_T$, entonces:

$$\|J_t(\Phi)\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{P};H)} = \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \Delta Y^i_{t_i\wedge t}\right\|^2\right) = \sum_{0\leq i,j\leq n} \mathbb{E}(\langle \mathbb{1}_{A_i}\Delta Y^i_{t_i\wedge t}, \mathbb{1}_{A_j}\Delta Y^j_{t_j\wedge t}\rangle).$$

Como $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ entonces $\mathbb{E}(\langle \mathbb{1}_{A_i}\Delta Y^i_{t_i\wedge t}, \mathbb{1}_{A_j}\Delta Y^j_{t_j\wedge t}\rangle) = 0$. En efecto, basta observar que, al menos una de las indicadoras siempre valdrá 0, entonces solo quedan los términos donde $A_i = A_j$.

Además utilizando propiedades de esperanza condicional y que el incremento es independiente de la σ-álgebra menor, entonces:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i}\|\Delta Y^i_{t_i\wedge t}\|^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i}\|\Delta Y^i_{t_i\wedge t}\|^2|\mathcal{F}_{t_i})) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{E}(\|\Delta Y^i_{t_i\wedge t}\|^2).$$

Así se sigue que:

$$\begin{aligned}
\|J_t(\Phi)\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{P})} &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{E}\|\Delta Y^i_{t_i\wedge t}\|^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(A_i)\|\Delta L_{t_i\wedge t} \circ S^*_i\|^2_{\mathcal{L}_2(H,L^2(\Omega,\mathbb{P}))} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(A_i)\sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{E}|\Delta L_{t_i\wedge t} \circ S^*_i(h_l)|^2.
\end{aligned}$$

Y utilizando el hecho de que $\{L_t(h)\}_{t\in[0,T]}$ posee incrementos estacionarios y usando la definición de covarianza cilíndrica se sigue:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(A_i)\sum_{l=0}^{\infty}\mathbb{E}|\Delta L_{t_i\wedge t}\circ S_i^*(h_l)|^2\\
&=\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(A_i)\sum_{l=0}^{\infty}\mathbb{E}|L_{(t_{i+1}-t_i)\wedge t}\circ S_i^*(h_l)|^2\\
&=\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(A_i)\sum_{l=0}^{\infty}(t_{i+1}-t_i)\wedge t\langle Q(S_i^*(h_l)),S_i^*(h_l)\rangle\\
&=\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(A_i)(t_{i+1}-t_i)\wedge t\|Q^{\frac{1}{2}}\circ S_i^*\|^2_{\mathcal{L}_2(H)}\\
&=\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(A_i)(t_{i+1}-t_i)\wedge t\|S_i\circ Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{L}_2(H)}\\
&=\mathbb{E}\left(\int_0^t\sum_{i=0}^{n}\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s)\|S_i\circ Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{L}_2(H)}ds\right).
\end{aligned}$$

Así concluimos que:

$$\begin{aligned}
\|J_t(\Phi)\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{P};H)} &= \mathbb{E}\left(\int_0^t\sum_{i=0}^{n}\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s)\|S_i\circ Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{L}_2(H)}ds\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^t\left\|\left(\sum_{i=0}^{n}\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s)S_i\right)\circ Q^{\frac{1}{2}}\right\|^2_{\mathcal{L}_2(H)}ds\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^t\|\Phi_s\circ Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{L}_2(H)}ds\right)\\
&= \|\Phi\|^2_{\mathcal{HS}_t}.
\end{aligned}$$

□

Observación 10. *Del Teorema 4.2.1 se sigue que para cada* $t\in[0,T]$, J_t *es un operador continuo.*

Corolario 4.2.1. *El operador* $J:\mathcal{HSS}_T\to\mathcal{M}_T^2(H)$ *es un operador lineal y continuo.*

Demostración. Sean $\Phi=\{\Phi_s\}_{s\in[0,T]},\Psi=\{\Psi_s\}_{s\in[0,T]}\in\mathcal{HSS}_T$ y $c\in\mathbb{R}$. Probaremos que J respeta la suma. Supondremos sin pérdida de generalidad que:

$$\Phi_s=\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{]t_0,t_1]}(s)S\quad\text{y}\quad\Psi_s=\mathbb{1}_B\mathbb{1}_{]r_0,r_1]}(s)R,$$

entonces:

$$\Phi_s+\Psi_s=\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{]t_0,t_1]}(s)S+\mathbb{1}_B\mathbb{1}_{]r_0,r_1]}(s)R\in\mathcal{HSS}_T,$$

por el Lema 4.1.2, podemos pedir los intervalos y conjuntos son disjuntos, pero para efectos de la verificación haremos el cálculo en el caso de que $A\cap B\neq\emptyset$ y sin pérdida de generalidad $]t_0,t_1]\cap]r_0,r_1] =]r_0,t_1]$. Entonces pata $t\geq 0$:

$$\begin{aligned}
J_t(\Phi+\Psi) &= J_t(\mathbb{1}_{A\setminus B}\mathbb{1}_{]t_0,r_0]}S+\mathbb{1}_{A\cap B}\mathbb{1}_{]r_0,t_1]}(S+R)+\mathbb{1}_{B\setminus A}\mathbb{1}_{]t_1,r_1]}R)\\
&= \mathbb{1}_{A\setminus B}(Y^S_{r_0\wedge t}-Y^S_{t_0\wedge t})+\mathbb{1}_{A\cap B}(Y^{S+R}_{t_1\wedge t}-Y^{S+R}_{r_0\wedge t})+\mathbb{1}_{B\setminus A}(Y^R_{r_1\wedge t}-Y^R_{t_1\wedge t})\\
&= \mathbb{1}_A\Delta Y^S_{t_0\wedge t}+\mathbb{1}_B\Delta Y^R_{r_0\wedge t}\\
&= J_t(\Phi)+J(\Psi),
\end{aligned}$$

donde estos super índices indica el operador Hilbert-Schmidt utilizado en la regularización para generar el proceso estocástico respectivo.

El producto escalar es un cálculo elemental aplicando la linealidad entonces la omitiremos. De este modo se concluye que cada J_t es un operador lineal y en consecuencia J es un operador lineal.

Para la continuidad denotaremos por $J(\Phi)=\{J_t(\Phi)\}_{t\in[0,T]}\in\mathcal{M}^2_T(H)$, ahora note que por el Teorema 4.2.1 y usando el Teorema 1.1.2 obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\|J(\Phi)\|^2_{\mathcal{M}^2_T} &\leq \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\|J_t(\Phi)\|^2\right)\\
&\leq 4\,\|J_T(\Phi)\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{P};H)}\\
&= 4\|\Phi\|^2_{\mathcal{HS}_T}.
\end{aligned}$$

Así concluimos que $J\in\mathcal{L}(\mathcal{HSS}_T,\mathcal{M}^2_T(H))$. □

Ahora en adelante denotaremos:

$$\int_0^t \Phi_s dL_s := J_t(\Phi),\quad t\geq 0.$$

Para extender esta integral a todo $\mathcal{HS}_T$ basta notar que por el Teorema 4.1.3, un proceso $\Phi=\{\Phi_s\}_{s\in[0,T]}\in\mathcal{HS}_T$ es límite de procesos simples $\{\Phi^n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{\Phi^n_s\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{HSS}_T$. Gracias al Teorema 4.2.1 tenemos que $\{\Phi^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ al ser de Cauchy:

$$\|J(\Phi^n)-J(\Phi^m)\|_{\mathcal{M}^2_T}\leq\|J\|_{\mathcal{L}}\|\Phi^n-\Phi^m\|_{\mathcal{HS}_T}$$

entonces $\{J(\Phi^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathcal{M}^2_T$. Y por completitud se sigue que existe una martingala límite.

Definición 4.2.2. *Definimos la integral regularizada como el operador J de $\mathcal{HS}_T$ en $\mathcal{M}^2_T(H)$ dado por $J(\Phi)=\{J_t(\Phi)\}_{t\in[0,T]}$ donde:*

$$\int_0^t \Phi_s dL_s = J_t(\Phi) := \lim_{n\to\infty}\int_0^t \Phi^n_s dL_s = \lim_{n\to\infty} J_t(\Phi^n)\quad \text{para } t\geq 0$$

Teorema 4.2.2. *La integral regularizada satisface para $\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]}\in\mathcal{HS}_T$ que:*

$$\left\|\int_0^t \Phi_s dL_s\right\|_{L^2(\Omega,\mathbb{P};H)} = \|\Phi\|_{\mathcal{HS}_t}\quad \text{para}\ \ t\geq 0.$$

Demostración. Utilizando el Teorema 4.2.1 y la definición de la integral se tiene que:

$$\left\|\int_0^t \Phi_s dL_s\right\|_{L^2(\Omega,\mathbb{P};H)} = \lim_{n\to\infty}\left\|\int_0^t \Phi_s^n dL_s\right\|_{L^2(\Omega,\mathbb{P};H)} = \lim_{n\to\infty}\|\Phi^n\|_{\mathcal{HS}_t} = \|\Phi\|_{\mathcal{HS}_t}$$

□

Observación 11. *Del Teorema 4.2.2 observamos que para cada $t \geq 0$, el operador J_t es un operador continuo. Además por las hipótesis pedidas sobre el integrador, tenemos que $\mathbb{E}(J_t(\Phi)) = 0$ para todo $t \geq 0$.*

Corolario 4.2.2. *La integral regularizada es un operador lineal y continuo de $\mathcal{HS}_T$ en $\mathcal{M}_T^2(H)$.*

Demostración. Aquí implementaremos el Corolario 4.2.1, sean $\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]}, \{\Psi_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{HS}_T$, sean $\{\Phi^n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\Psi^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{HSS}_T$ las respectivas sucesiones que convergen a estos procesos (esto por el Teorema 4.1.3) y sea $c \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\begin{aligned}
\int_0^t (c\Phi_s + \Psi_s)dL_s &= \lim_{n\to\infty}\int_0^t (c\Phi_s^n + \Psi_s^n)dL_s \\
&= \lim_{n\to\infty} c\int_0^t \Phi_s^n dL_s + \int_0^t \Psi_s^n dL_s \\
&= c\int_0^t \Phi_s dL_s + \int_0^t \Psi_s dL_s.
\end{aligned}$$

De esto se sigue que cada J_t es un operador lineal y de lo cual se sigue que J es lineal.

Para la continuidad usamos la nuevamente el Teorema 4.2.2 y la desigualdad de Doob (Teorema 1.1.2):

$$\begin{aligned}
\|J(\Phi)\|_{\mathcal{M}_T^2}^2 &\leq \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\|J_t(\Phi)\|^2\right) \\
&\leq 4\,\|J_T(\Phi)\|_{L^2(\Omega,\mathbb{P})}^2 \\
&= 4\|\Phi\|_{\mathcal{HS}_T}^2,
\end{aligned}$$

así concluimos que $J \in \mathcal{L}(\mathcal{HS}_T, \mathcal{M}_T^2(H))$. □

Observación 12. *Es posible realizar la misma construcción para considerar una integral como $\int_s^t \Phi_r dL_r$, basta seguir la construcción presentada en la sección 4.2, pero considerando:*

$$J_{[s,t]}(\Phi) = \mathbb{1}_{A_j}(Y_{t_{j+1}\wedge t} - Y_s) + \sum_{i=j+1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}\Delta Y_{t_i\wedge t}, \tag{4.2}$$

donde $s \in]t_j, t_{j+1}]$ para algún $j = 0, ..., n$ y gracias al Lema 4.1.2 podemos asumir que t no está contenido en el mismo intervalo (se puede tomar una partición más fina de $[0,T]$ si es necesario). Y si observamos es consistente con lo deseado para la integral, pues solo considera los incrementos a partir del tiempo s. Se puede concluir que $J_{[s,t]}$ es lineal y continuo, además que $\|J_{[s,t]}(\Phi)\|_{L^2(\Omega,\mathbb{P};H)} = \|\Phi\|_{\mathcal{HS}_{[s,t]}}$. Inclusive, es posible construir y definir la integral regularizada sobre $\mathcal{HS}_{[a,b]}$.

Observación 13. *Como se mencionó en la Observación 4, si el integrador fuese un proceso de Lévy en el sentido clásico, entonces las integrales estocásticas clásicas se recuperan con esta misma construcción. En efecto, puesto que si* $\{L_t\}_{t\in[0,T]}$ *fuese un proceso clásico de Lévy entonces la Definición 4.2.1 luciría:*

$$J_t(\Phi) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{A_i} S(\Delta L_{t_i\wedge t}).$$

§ 4.3 Algunas propiedades

La construcción, desarrollada en la Sección 4.2, muestra que la regularizada $\{\int_0^t \Phi_s dL_s\}_{t\in[0,T]}$ satisface lo siguiente:

- La propiedad de linealidad.
- $\| \int_0^t \Phi_s dL_s\|_{L^2(\Omega,\mathbb{P};H)} = \|\Phi\|_{\mathcal{HS}_t}$.
- Es continua sobre la clase $\mathcal{HS}_T$.

Para finalizar analizaremos brevemente unas propiedades más de la integral regularizada. Para ello continuaremos con las notaciones establecidad en la Sección 4.2.

Proposición 4.3.1. *Sea* $\{\Phi_r\}_{r\in[0,T]} \in \mathcal{HS}_T$ *entonces para* $0 \le s < t \le T$ *se cumple:*

$$\int_s^t \Phi_r dL_r = \int_0^t \Phi_r dL_r - \int_0^s \Phi_r dL_r.$$

Demostración. La demostración de este hecho se sigue empezando sobre la clase $\mathcal{HSS}_T$ comparando la resta de las integrales con (4.2) el cual es un cálculo directo y posteriormente se extiende por densidad y la definición de las integrales sobre la clase $\mathcal{HS}_T$. □

Proposición 4.3.2. *Sea* $U \in \mathcal{L}(H)$ *y sea* $\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{HS}_T$ *entonces:*

$$\int_0^t U \circ \Phi_s dL_s = U\left(\int_0^t \Phi_s dL_s\right).$$

Demostración. Primero, observese que por continuidad de U se preserva la medibilidades, por tanto $\{U\circ\Phi_t\}_{t\in[0,T]}$ es un proceso predecible de Hilbert-Schmidt. Además es fácil notar que $\|U\circ\Phi\|_{\mathcal{HS}_T} \le \|U\|_{\mathcal{L}(H)}\|\Phi\|_{\mathcal{HS}_T}$. De este modo concluimos que $\{U\circ\Phi_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{HS}_T$.

Primero asumiremos que $\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{HSS}_T$ con $\Phi_t = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{]t_0,t_1]} S_0$. Por Proposición 3.3.1 sabemos que $(U \circ S_0)^* = S_0^* \circ U^*$ regulariza $\{L_t\}_{t\in[0,T]}$ en la martingala cuadrado integrable con media cero $\{U(Y_t)\}_{t\in[0,T]}$. De este modo:

$$\int_0^t U \circ \Phi_s dL_s = \mathbb{1}_A \Delta U(Y_{t_0\wedge t}) = U(\mathbb{1}_A \Delta Y_{t_0\wedge t}).$$

El resultado se extiende por linealidad y posteriormente por continuidad. □

Lema 4.3.1. *Sea* $0 \leq l < r \leq T$ *y sea* $A \in \mathcal{F}_l$ *y sea entonces:*

$$\int_0^t \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{]l,r]} \Phi_s dL_s = \mathbb{1}_A \int_{l\wedge t}^{r\wedge t} \Phi_s dL_s.$$

Demostración. Suponga $\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{HSS}_T$ con $\Phi_t = \mathbb{1}_B \mathbb{1}_{]t_0,t_1]} S_0$ entonces:

$$\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{]l,r]} \Phi_t = \mathbb{1}_{A\cap B} \mathbb{1}_{]t_0,t_1]\cap]l,r]} S_0,$$

observese que $A \cap B \in \mathcal{F}_l \wedge \mathcal{F}_{t_0}$.

Ahora se deben analizar los casos $]l,r]\cap]t_0,t_1] =]t_0,r]$, $]l,r]\cap]t_0,t_1] =]l,t_1]$, $]l,r]\cap]t_0,t_1] =]t_0,t_1]$, $]l,r]\cap]t_0,t_1] =]l,r]$ y $]l,r]\cap]t_0,t_1] = \emptyset$.

Verificaremos solo el primer caso puesto que los demás son análogos. Si $]t_0,t_1]\cap]l,r] =]t_0,r]$, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{]l,r]} \Phi_s dL_s &= \mathbb{1}_{A\cap B}(Y_{r\wedge t} - Y_{t_0\wedge t}) \\
&= \mathbb{1}_A(\mathbb{1}_B \Delta Y_{t_0\wedge r\wedge t} - \mathbb{1}_B \Delta Y_{t_0\wedge l\wedge t}) \\
&= \mathbb{1}_A \left(\int_0^{r\wedge t} \Phi_s dL_s - \int_0^{l\wedge t} \Phi_s dL_s \right) \\
&= \mathbb{1}_A \int_{l\wedge t}^{r\wedge t} \Phi_s dL_s,
\end{aligned}$$

posterioremente se extiende por linealidad y continuidad. □

Para el siguiente resultado recordamos la definición de un tiempo de parada.

Definición 4.3.1. *Sea* $\tau : \Omega \to [0,T]$ *función medible. Decimos que* τ *es un tiempo de parada si* $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ *para cada* $t \in [0,T]$.

Proposición 4.3.3. *Sea* τ *un tiempo de parada tal que* $\mathbb{P}(\tau \leq T) = 1$. *Entonces:*

$$\int_0^t \mathbb{1}_{]0,\tau]} \Phi_s dL_s = \int_0^{\tau\wedge t} \Phi_s dL_s.$$

Demostración. Suponga $\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{HS}_T$. Primero note que $\{\mathbb{1}_{]0,\tau]}\Phi_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{HS}_T$. Suponga que τ es una función simple, o sea:

$$\tau = \sum_{j=0}^{m} \mathbb{1}_{B_j} a_j,$$

donde $\{a_j\}_{j=0}^m \subset [0,T]$ y $B_j = \{\tau = a_j\} \in \mathcal{F}_{a_j}$. Entonces por linealidad de la integral:

$$\int_0^t \mathbb{1}_{]0,\tau]} \Phi_s dL_s = \sum_{j=0}^{m} \int_0^t \mathbb{1}_{B_j} \mathbb{1}_{]0,a_j]} \Phi_s dL_s.$$

Ahora supondremos que $\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{HSS}_T$ dado por $\Phi_t = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{]t_0,t_1]} S$. Entonces como

$A \cap B_j \in \mathcal{F}_{t_0} \wedge \mathcal{F}_{a_j}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m} \int_0^t \mathbb{1}_{B_j} \mathbb{1}_{]0,a_j]} \Phi_s dL_s &= \sum_{j=0}^{m} \int_0^t \mathbb{1}_{A\cap B_j} \mathbb{1}_{]0,a_j]\cap]t_0,t_1]}(s) S dL_s \\
&= \sum_{j=0}^{m} \int_0^t \mathbb{1}_{A\cap B_j} \mathbb{1}_{]t_0\wedge a_j, t_1 \wedge a_j]}(s) S dL_s \\
&= \sum_{j=0}^{m} \mathbb{1}_{A\cap B_j} \Delta Y_{t_0 \wedge a_j \wedge t} \\
&= \sum_{j=0}^{m} \mathbb{1}_{B_j} \int_0^{a_j \wedge t} \Phi_s dL_s \\
&= \int_0^{\tau \wedge t} \Phi_s dL_s.
\end{aligned}$$

Luego para $\Phi = \{\Phi_t\}_{t\in[0,T]}$ arbitrario, existe $\{\Phi^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{HSS}_T$ tal que converge a Φ en $\mathcal{HS}_T$. Entonces $\{\mathbb{1}_{]0,\tau]}\Phi^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\mathbb{1}_{]0,\tau]}\Phi$ en $\mathcal{HS}_T$. Entonces por continuidad de la integral regularizada:

$$\int_0^t \mathbb{1}_{]0,\tau]} \Phi_s dL_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \mathbb{1}_{]0,\tau]} \Phi^n_s dL_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\tau\wedge t} \Phi^n_s dL_s = \int_0^{\tau \wedge t} \Phi_s dL_s.$$

Ahora para τ en general, se puede aproximar con una sucesión decreciente de tiempos de parada $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dados por:

$$\tau_n(\omega) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{(k+1)T}{2^n} \mathbb{1}_{\left]\frac{kT}{2^n}, \frac{(k+1)T}{2^n}\right]}(\tau(\omega)) \quad \text{para} \quad \omega \in \Omega.$$

Por Teorema de convergencia acotada tenemos cuando $n \to \infty$ que:

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T (\mathbb{1}_{]0,\tau_n]}\Phi_s - \mathbb{1}_{]0,\tau]}\Phi_s) ds\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T \mathbb{1}_{]\tau,\tau_n]}\Phi_s ds\right) \longrightarrow 0,$$

de este modo observamos que $\{\mathbb{1}_{]0,\tau_n]}\Phi_t\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\{\mathbb{1}_{]0,\tau]}\Phi_t\}_{t\in[0,T]}$ en $\mathcal{HS}_T$ y por continuidad de la integral se sique que:

$$\int_0^t \mathbb{1}_{]0,\tau]} \Phi_s dL_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\tau_n \wedge t} \Phi_s dL_s = \int_0^{\tau\wedge t} \Phi_s dL_s.$$

□

Por último en el capítulo queremos extender la clase de integrandos. Sea $\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]}$ un proceso de Hilbert-Schmidt defina la clase dada por:

$$\mathcal{HS}_T^{Loc} = \left\{ \{\Phi_t\}_{t\in[0,T]} : \quad \text{predecible y } \mathbb{P}\left(\int_0^T \|\Phi_s \circ Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{L}_2(H)} ds < \infty\right) = 1 \right\}.$$

Como primera observación es notar que $\mathcal{HS}_T \subseteq \mathcal{HS}_T^{Loc}$. En efecto, sea $\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{HS}_T$, escriba entonces por desigualdad de Chebyshev para $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \|\Phi_s(\omega)\circ Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{L}_2(H)}ds > n\right) \leq \frac{1}{n}\|\Phi\|_{\mathcal{HS}_T},$$

de este modo cuando $n \to \infty$ concluimos que $\mathbb{P}\left(\int_0^T \|\Phi_s \circ Q^{1/2}\|_{\mathcal{L}_2(H)}ds < \infty\right) = 1$.

Sea $\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{HS}_T^{Loc}$. Considere $\tau : \Omega \to [0,T]$ dado por:

$$\tau = \inf_{t\in[0,T]}\left\{\int_0^t \|\Phi_s\circ Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{L}_2(H)}ds > n\right\} \wedge T := t^* \wedge T.$$

Observe que si t^* no es finito entonces $\tau = T$ por tanto es bien definido, entonces en todo caso se cumple $\mathbb{P}(\tau \leq T) = 1$.

Si t^* no es finito entonces $\{\tau \leq t\} = \{\tau = T\} \in \mathcal{F}_T$ entonces en tal caso τ es un tiempo de parada. Si t^* es finito entonces hay dos casos, si $\tau = T$ ya fue analizado y en tal caso es tiempo de parada, pero si $\tau = t^*$ realizamos lo siguiente:

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left\{\tau < t + \frac{1}{m}\right\} = \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{\infty}\left\{\int_0^{q_k} \|\Phi_s\circ Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{L}_2(H)}ds > n\right\}$$

donde $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ es sucesión decreciente y convergente a t^* tal que $q_k < t + \frac{1}{m} + \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$ a partir de un k suficientemente grande.

Entonces note que $\left\{\int_0^{q_k} \|\Phi_s\circ Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{L}_2(H)}ds > n\right\} \in \mathcal{F}_{q_k}$ lo que implica, gracias a las condiciones sobre la sucesión, que $\bigcup_{k=0}^{\infty}\left\{\int_0^{q_k} \|\Phi_s\circ Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{L}_2(H)}ds > n\right\} \in \mathcal{F}_{t+\frac{1}{m}+\epsilon}$.

Posteriormente tenemos que $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+\epsilon}$ con lo cual nos lleva a concluir, gracias a las hipótesis usuales de la filtración, que $\{\tau \leq t\} \in \bigcap_{\epsilon>0}\mathcal{F}_{t+\epsilon} = \mathcal{F}_t$. Por tanto τ es un tiempo de parada.

Observese que $\mathbb{1}_{]0,\tau]}$ es continua por izquierda, por tanto $\{\mathbb{1}_{]0,\tau]}\Phi_t\}_{t\in[0,T]}$ es un proceso predecible y además $\|\mathbb{1}_{]0,\tau]}\Phi\|_{\mathcal{HS}_T} = \|\Phi\|_{\mathcal{HS}_\tau} \leq n$.

De este modo aseguramos que $\{\mathbb{1}_{]0,\tau]}\Phi_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{HS}_T$ entonces podemos definir la integral regularizada (siguiendo la notación utilizada en la Definición 4.2.2) como el operador $J : \mathcal{HS}_T^{Loc} \to \mathcal{M}_T^{2,Loc}(H)$ dado por $J(\Phi) = \{\int_0^t \Phi_s dL_s\}_{t\in[0,T]}$, donde en este caso

$$\int_0^t \Phi_s dL_s = \int_0^t \mathbb{1}_{]0,\tau]}\Phi_s dL_s \ \text{ sobre } \ \{\tau \geq t\}.$$

Observe que esta definición es independiente de la escogencia de τ, pues si escogemos para $m > n$:

$$\tau' = \inf_{t\in[0,T]}\left\{\int_0^t \|\Phi_s\circ Q^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{L}_2(H)}ds > m\right\} \wedge T,$$

entonces $\tau' \leq \tau$, de este modo $\{\tau' \geq t\} \subset \{\tau \geq t\}$.

Utilizando la Proposición 4.3.3 tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathbb{1}_{]0,\tau]}\Phi_s dL_s &= \int_0^{\tau'\wedge t} \mathbb{1}_{]0,\tau]}\Phi_s dL_s \\ &= \int_0^{\tau\wedge t} \mathbb{1}_{]0,\tau']}\Phi_s dL_s \\ &= \int_0^{t} \mathbb{1}_{]0,\tau']}\Phi_s dL_s.\end{aligned}$$

Conclusiones

A lo largo del presente trabajo observamos que la teoría cilíndrica es un campo que está en pleno desarrollo y es de mucha utilidad para seguir desarrollando herramientas para el área de ecuaciones estocásticas en derivadas parciales. A su vez la teoría de regularización nos permite desarrollar de una manera más eficiente y que implementa técnicas más simples para la comprensión de estas áreas de estudio en comparación a los métodos ya utilizados (por ejemplo la teoría desarrollada en [22]).

A lo que respecta al presente trabajo y sus objetivos respectivos podemos concluir:

- Nuestro primer objetivo era hacer un cuerpo teórico consistente de la teoría cilíndrica necesaria para los objetivos presedentes. El capítulo 2 hace una presentación breve y concisa de el origen, ejemplos y resultados relevantes para el proyecto de los objetos cilíndricos realizados hasta la actualidad.

- El segundo objetivo era demostrar o bien refutar la posibilidad de que un proceso de Lévy cilíndrico podría inducir la existencia de un proceso estocástico de Lévy. En el capítulo 3, se desarrolló el concepto de regularización de un proceso cilíndrico vía operadores de Hilbert-Schmidt. Esta idea ha sido utilizada en contextos mucho más generales que un espacio de Hilbert, por lo cual se debió realizar todos los aspectos técnicos de estos resultados de regularización. Una vez obtenido el Teorema 3.1.1, se da pie a analizar el caso de procesos de Lévy cilíndricos. La culminación para este objetivo fue la demostración del Teorema 3.2.1. Más aún logramos presentar casos particulares de procesos de Lévy cilíndricos sometidos a este Teorema como lo fue el caso del movimiento Browniano cilíndrico y un proceso compuesto de Poisson cilíndrico. Estas conclusiones de regularización para el caso de Lévy cilíndricos, así como la presentación del capítulo constituye un aporte original para la comprensión de la materia.

- Para finalizar, nuestro último objetivo de construir una integral estocástica respecto a un proceso de Lévy cilíndrico se logró satisfactoriamente. El capítulo 4 contiene una construcción detallada de la integral propiamente. La construcción presentada es original y generaliza las construcciones ya realizadas para integrales respecto a un movimiento Browniano cilíndrico.

No obstante, aunque se haya cumplido con los objetivos del proyecto, estas son áreas aún en desarrollo, y da pie a varias nuevas preguntas y potenciales proyectos de investigación futuros. Estos pueden ser:

- Como se trató en la sección 2.1, la teoría cilíndrica tiene un inicio en la teoría de medidas cilíndricas. Es bien conocida la relación de los procesos estocásticos de Lévy con las medidas infinitamente divisibles. Esta relación es la que permite en muchos libros mostrar el Teorema de Lévy-Kintchin. Una primera pregunta es si dicha relación se preserva con las llamadas medidas cilíndricas infinitamente divisibles. Además si hay posibilidad de establecer un Teorema de Lévy-Kintchin para procesos cilíndricos.

- Como se presentó en el capítulo 2, los procesos de Lévy cilíndricos tienen su descomposición de Lévy-Itô, en la cual cada componente de su descomposición no es necesariamente un proceso cilíndrico. Esto da pie analizar más a fondo esta descomposición para tal vez obtener un posible Teorema de Lévy-Kintchin. Además cabe preguntarse si la prueba y construcción del Teorema de descomposición de Lévy-Itô es la más óptima, o sea, si existirá una descomposición donde se pueda dar una mejor descripción de los términos que la conforman.

- En vista a las consecuencias obtenidas en la sección 3.3, es natural esperar que varias de las propiedades que posea el proceso cilíndrico las obtenga el proceso estocástico que induce. Un estudio interesante sería sobre procesos de Markov y el posible desarrollo de la teoría de estos en el ámbito cilíndrico.

- Como se presentó en la sección 4.3, al obtener una integral estocástica con propiedades tan deseadas como si una integral de Itô se tratase, lo natural es preguntarse qué otras propiedades logra satisfacer la integral regularizada. Una clara extensión es verificar si se puede extender la clase de integrandos a unos más generales que $\mathcal{HS}_T$. Y por su puesto implementar esta integral regularizada a una ecuación estocástica en derivadas parciales para verificar su utilidad.

Bibliografía

[1] D. Applebaum. *Lévy Processes and Stochastic Calculus.* Cambridge University Press Second Edition (2009).

[2] D. Applebaum. *Lévy Processes and Stochastic Integrals on Banach Spaces.* Probability and Mathematical Statistics, Vol 27, 75-88 (2007).

[3] D. Applebaum, M. Riedle. *Cylindrical Lévy Processes in Banach Spaces.* Proc. London Math Soc. 697-726 (2010).

[4] E. B. Davies. *Linear Operator and their Spectra.* Cambridge University Press (2007).

[5] A. Badrikian. *Séminaire Sur les Fonctions Aléatoires Linéaires et les Mesures Cylindriques.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 139 Springer (1970).

[6] A. Badrikian, A. S. Üstünel. *Radonification of cylindrical semimartingales on Hilbert spaces.* Ann. Math. Blaise Pascal 3, 13-21 (1996).

[7] G. Da Prato, J. Zabczyk. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions, Second Edition.* Cambridge University Press (2014).

[8] C. Dellacherie, P. A. Meyer. *Probabilities and Potential B, Theory of Martingales.* North-Holland Publishing Company (1980).

[9] R. Durrett. *Probability Theory and examples (fourth edition).* Cambridge University Press (2010).

[10] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern tecniques and their applications.* John Wiley and Sons, Inc (1999).

[11] C. A. Fonseca Mora. *Existence of Continuous and Cadlag Versions for Cylindrical Processes in the Dual of a Nuclear Space.* J. Theor. Probab, DOI 10.1007/s10959-016-0726-0. (2016).

[12] C. A. Fonseca Mora. *Lévy processes and infinitely divisible measures in the dual of a nuclear space.* J. Theor. Probab, DOI 10.1007/s10959-019-00972-3. (2019).

[13] C. A. Fonseca Mora. *Stochastic integration and stochastic PDEs driven by jumps on the dual of a nuclear space.* Stoch PDE: Anal Comp, 6, no.4, 618-689 (2018).

[14] I. M. Gel'fand, N. Ya Vilenkin. *Generalized functions. Vol. 4: Applications of harmonic analysis.* Academic Press (1964).

[15] H. Heyer. *Structural Aspects in the Theory of Probability (Second enlarged edition)*. World Scientific Publishing (2004).

[16] E. Issoglio, M. Riedle. *Cylindrical fractional Brownian motion in Banach spaces*. Stochastic Process. Appl. 124 No 11, 3507-3534 (2014).

[17] K. Itô. *Foundations of Stochastic Equations in Infinite Dimensional Spaces*. Series in Mathematics, SIAM (1984).

[18] A. Jakubowski, S. Kwapień, P. R. de Fitte, J. Rosiński. *Radonification of cylindrical semimartingales by a single Hilbert-Schmidt operator*. Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., 5, No 3, 429-440 (2002).

[19] A. Jakubowski, M. Riedle. *Stochastic integration with respect to cylindrical Lévy processes*. Ann. Probab. 45, No 6B, 4273-4306 (2017).

[20] G. Kallianpur, J. Xiong. *Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensional Spaces*. Lecture Notes-Monograph Series, Institute of Mathematical Statistics (1995).

[21] A. N. Kolmogorov. *A note on the papers of R. A. Minlos and V. V. Sazonov*. Teor. Verojant. i Primen., 4, no.2, 237-239 (1959).

[22] W. Liu, M. Rockner. *Stochastic Partial Differential Equation: An Introduction* Springer International Publishing (2015).

[23] R. A. Minlos. *Generalized random processes and their extension to a measure*. In Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability, Vol.3, American Mathematical Society, 291-313 (1963).

[24] L. Narici, E. Beckenstein. *Topological Vector Spaces, Pure and Applied Mathematics (2nd edition)*. CRC Press Boca Rotan (2011).

[25] S. Peszat, J. Zabczyk. *Stochastic Partial Differential Equations with Lévy Noise* Cambridge University Press (2007).

[26] E. Priola, J. Zabczyk, *Structural properties of semilinear SPDEs driven by cylindrical stable processes*. Probab. Theory Relat. Fields. 149 No 1-2, 97-137 (2011).

[27] M. Riedle. *Stochastic integration with respect to cylindrical Lévy processes in Hilbert spaces: an L^2 approach*. Infin. Dimens. Anal. Quantum. Probab. Relat. Top, 17 (2014).

[28] M. Riedle. *Ornstein-Uhlenbeck processes driven by cylindrical Lévy processes*. Potential Anal, 42, 809-838 (2015).

[29] M. Riedle. *Stable cylindrical Lévy processes and the stochastic Cauchy problem*. Electron. Commun. Probab. 23, Paper No 36 (2018).

[30] H. I. Royden, P. M. Fitzpatrick. *Real Analysis, fourth edition*. China Machine Press (2010).

[31] K. Sato. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distribution* Cambridge Iniversity Press (1999).

[32] V. V. Sazonov. *A Remark on Characteristic Functionals*. Theory Probab. Appl., 3,188-192 (1958).

[33] L. Schwartz. *Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures.* Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, Oxford University Press (1973).

[34] N. N. Vakhania, V. I. Tarieladze, S. A. Chobanyan. *Probability Distributions on Banach Spaces.* D. Reidel Publishing Company (1987).

[35] M. Veraar, I. Yaroslavtsev. *Cylindrical continuous martingales and stochastic integration in infinite dimensions.* Electron. J. Probab., 21, No 59, 1-53 (2016).