

*Algunos ejercicios de Física General I*

Marco Vinicio López Gamboa

Primer semestre 2016



Algunos ejercicios de Física General I by Marco Vinicio López Gamboa is licensed under a [Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional License](#).

# *Presentación*

El presente documento contiene una serie de ejercicios tomados de varias fuentes, desde libros de textos como Física vol. I de Resnick, Halliday y Krane; Física Universitaria vol. I de Sears, Young, Zemansky y Freedman; exámenes viejos de cursos similares impartidos por otras universidades como la UCR y el TEC; en fin de una variedad de fuentes bibliográficas, gracias a las cuales se conforma este sencillo documento y de antemano se le agradece a todos esos profesores y autores por tan útiles publicaciones dirigidas a profesores y estudiantes de ciencias básicas, ciencias de la salud y de ingeniería, etc.

Este documento esta formado por tres partes (las cuales están en constante construcción); la primera esta formada por los enunciados de los ejercicios, la segunda, corresponde a las solución explicada de algunos de ellos, que estarán al final de cada sección y son soluciones realizadas por el autor y la tercera esta constituida con apendices de cálculo diferencial e integral, vectores, etc. El fin de este documento es el de promover el aprendizaje de la Física, mediante la práctica, eso sin dejar de lado el estudio de los fundamentos teóricos, que darán al lector los fundamentos conceptuales, esenciales para la realización y comprensión de cualquier ejercicio de Física.

Con respecto a las imagenes utilizadas, algunas son de las fuentes mencionadas en la bibliografía de este documento, otras son tomadas de Google imagenes, por ende se reconoce la autoría de esas imagenes a su respectivo autor y no al autor de este documento; pero el diseño de otras imagenes y los diagramas de cuerpo de libre, etc; si son elaborados por el autor de manera independiente o basadas en las imagenes de la fuentes originales, utilizando programas de carácter libre como “GeoGebra”, “KolourPaint” y “LibreOffice-Calc”.

Se insta al lector a la distribución y modificaciones que crea pertinentes; siempre y cuando reconozca el esfuerzo del autor de este documento y de los demás autores mencionados en la bibliografía de este documento, además de compartir el mismo ideal de este publicación y no lucre con la misma. Cualquier sugerencia y/o corrección serán bien recibidas, para tal efecto puede hacerlas llegar al autor al correo mvprofe7@gmail.com.

# *Tabla de contenidos*

| <b>Contenido</b>                             | <b>Página</b> |
|----------------------------------------------|---------------|
| Vectores (Enunciados)                        | 4             |
| Vectores (Algunas soluciones)                | 7             |
| Cinemática traslacional (Enunciados)         | 15            |
| Cinemática traslacional (Algunas soluciones) | 21            |
| Dinámica traslacional (Enunciados)           | 34            |
| Dinámica traslacional (Algunas soluciones)   | 42            |
| Cinemática rotacional (Enunciados)           | 60            |
| Cinemática rotacional (Algunas soluciones)   | 63            |
| Trabajo y energía (Enunciados)               | 73            |
| Trabajo y energía (Algunas soluciones)       | 82            |
| Momento lineal (Enunciados)                  | 98            |
| Momento lineal (Algunas soluciones)          | 101           |
| Sistema de partículas (Enunciados)           | 111           |
| Sistema de partículas (Algunas soluciones)   | 113           |
| Dinámica rotacional (Enunciados)             | 120           |
| Dinámica rotacional (Algunas soluciones)     | 123           |
| Equilibrio estático (Enunciados)             | 132           |
| Equilibrio estático (Algunas soluciones)     | 135           |
| Gravitación universal (Enunciados)           | 141           |
| Gravitación universal (Algunas soluciones)   | 143           |
| Bibliografía                                 | 147           |
| Apendices                                    | 148           |

# Desarrollo

## Vectores

### Enunciados:

1. Sean los vectores unitarios  $\hat{i} = (1, 0, 0)$  y  $\hat{k} = (0, 0, 1)$ ; se sabe que son perpendiculares entre sí; demuestre que:

a)  $\hat{k} \cdot \hat{i} = 0$

b)  $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

2. Sean los vectores  $\vec{e} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$  y  $\vec{r} = 7\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$  y  $\vec{c} = -5\hat{i} - 2\hat{j} + 8\hat{k}$ ; determine:

a)  $\vec{c} \cdot (\vec{r} \times \vec{e})$

b)  $|\vec{r} \times \vec{e}|$

3. Sean dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  con  $\vec{A} = A_x\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}$  y  $\vec{B} = \hat{i} + B_y\hat{j}$

i)  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 10$

ii)  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$  en el plano  $xy$ .

Con lo anterior determine el valor de las componentes  $A_x$ ,  $B_y$  y el ángulo  $\beta$  entre  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ .

4. Con los vectores:

$$\vec{u} = -1.00\hat{i} + 2.00\hat{j} - 1.00\hat{k}$$

$$\vec{v} = 3.00\hat{j} - 1.00\hat{k}$$

$$\vec{w} = 4.00\hat{i} - 8.00\hat{j} + 4.00\hat{k}$$

Determine:

a)  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

b) Un vector unitario en la dirección de  $\vec{u} \times (7\vec{v})$

c)  $(\vec{w} \times \vec{v}) \times \vec{u}$

d) El ángulo entre  $\vec{u}$  y  $(\vec{w} \times \vec{v})$ .

5. Sea  $\vec{A} = 60 \text{ cm}$  a  $270^\circ$  desde el eje  $+x$  y  $\vec{B} = 80 \text{ cm}$  a cierto ángulo  $\theta$ , con respecto al eje  $+x$ .

a) Encuentre la magnitud de  $\vec{A} + \vec{B}$  en función de  $\theta$ .

b) De la respuesta del inciso a), ¿para que valor de  $\theta$ ,  $A + B$  tomá su valor máximo y cuál es este valor máximo?

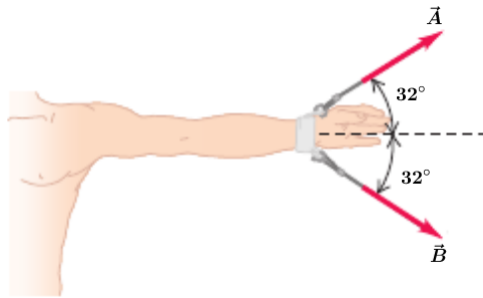
c) A partir de la respuesta del inciso a) ¿para que valor de  $\theta$ ,

$|\vec{A}| + |\vec{B}|$  toma su valor mínimo y cuál es este valor mínimo?

d) Sin referencia a la respuesta del inciso a), argumente si las respuestas de los incisos b) y c) tienen o no sentido.

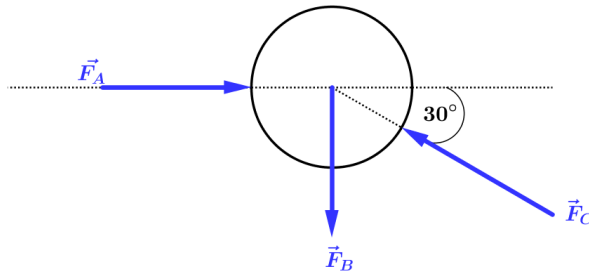
6. Con  $\vec{A} = (6\hat{i} - 8\hat{j})$  unidades,  $\vec{B} = (-8\hat{i} + 3\hat{j})$  unidades y  $\vec{C} = (26\hat{i} + 19\hat{j})$  unidades, determine  $a$  y  $b$  tal que  $a\vec{A} + b\vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$ .

7. Un paciente con una luxación en un hombro es colocado en un aparato de tracción como el que se ilustra en la figura. Los tirones  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  tienen magnitudes iguales y deben combinarse para producir una fuerza de tracción hacia fuera de 5.60 N. ¿De qué magnitud deben ser estos tirones?



8. Tres fuerzas actúan sobre la esfera mostrada en la figura. La magnitud de  $\vec{F}_B$  es de 60 N y la resultante de los tres es igual a cero. Determine:

- $|\vec{F}_A|$
- $|\vec{F}_C|$



9. Considere los vectores  $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ ,  $\vec{B} = -4\hat{i} - 6\hat{j} - 8\hat{k}$  y  $\vec{C} = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 9\hat{k}$ .

- Calcular el vector  $\vec{C} \times (\vec{A} + \vec{B})$  y su magnitud.
- Determine el ángulo entre los vectores  $\vec{A} + 2\vec{B}$  y  $\vec{A} - 2\vec{B}$ .
- Obtenga un vector unitario en la dirección del vector  $\vec{A} - \vec{B}$ .

10. Se realiza un concurso, donde el premio es un Tesla car (el mejor auto eléctrico del mundo), usted está participando en él, básicamente las instrucciones son seguir al pie de la letra los siguientes vectores en forma consecutiva, donde al final del tercer vector se encuentran las llaves de tan hermoso auto:

1<sup>ero</sup>( $\vec{A}$ ): 72.4 m, 32° al este del norte.

2<sup>do</sup>( $\vec{B}$ ): 57.3 m, 36° al sur del oeste.

3<sup>ero</sup>( $\vec{C}$ ): 17.8 m, al sur.

Realice:

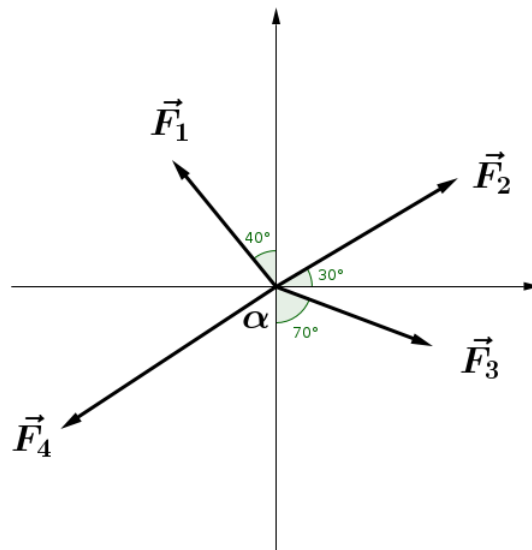
- Un diagrama donde estén graficados en forma respectiva los tres vectores y el vector desplazamiento.
- El vector desplazamiento ( $\vec{D}$ ) en términos de los vectores unitarios  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ , además su magnitud.
- La dirección del vector desplazamiento, con respecto al eje  $+x$ .

11. Un mapa en la bitácora de un pirata señala la posición del tesoro que enterró. Se puede leer que para ubicar el tesoro, se debe realizar un desplazamiento de 20 pasos al norte del viejo roble, luego 30 pasos en dirección N 30° W (30° al oeste desde el norte), hasta alcanzar un poste de hierro clavado en el suelo. Pero el mapa aclara que de este poste hay que desplazarse 10 pasos al sur y finalmente 10 pasos al oeste.

- Expresar en componentes rectangulares, el vector posición del tesoro respecto al roble en las unidades respectivas.
- Expresar en componentes rectangulares, el vector posición del tesoro respecto al poste de hierro en las unidades correspondientes.
- Calcular la magnitud y dirección del vector desplazamiento medido desde el roble al tesoro.

12. Las cuatro fuerzas concurrentes mostradas en la figura tienen una resultante igual a 0. Si  $F_1 = 800 \text{ N}$ ,  $F_2 = 1000 \text{ N}$  y  $F_3 = 800 \text{ N}$ , determine:

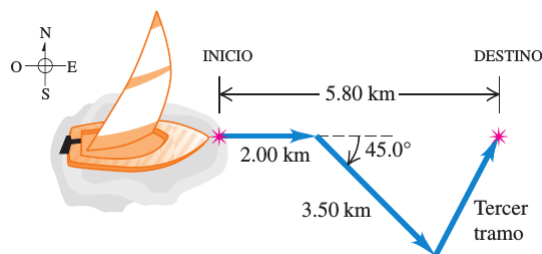
- La magnitud de  $\vec{F}_4$ .
- El ángulo  $\alpha$ .



13. Sean los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ . El vector  $\vec{A} = 5\hat{i} - 8\hat{j}$  y  $\vec{B} = -15\hat{i} - 22\hat{j}$ . La suma  $\vec{A} - 2\vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$ . Determine:

- $\vec{C}$  en términos de  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  (5 pts)
- $\vec{A} \cdot (\vec{A} - \vec{B})$  (10 pts)
- $(\vec{A} + \vec{B}) \times \left(2\vec{B} - \frac{\vec{A}}{2}\right)$
- El vector unitario de  $\left[(\vec{A} + \vec{B}) \times \left(2\vec{B} - \frac{\vec{A}}{2}\right)\right] + [(\vec{A} - \vec{C}) \times 3\vec{B}]$

14. Un marinero en un velero pequeño se topa con vientos cambiantes. Navega 2.00 km al este, luego 3.50 km al sureste y después otro tramo en una dirección desconocida. Su posición final es 5.80 km directamente al este del punto inicial (ver figura). Determine la magnitud y la dirección del tercer tramo.



15. Se definen tres vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  en un sistema de coordenadas. El vector  $\vec{A}$  tiene una magnitud de 10 m y dirección  $55^\circ$  desde el este hacia el sur. El vector  $\vec{B}$  tiene una magnitud de 15 m y dirección  $65^\circ$  desde el norte hacia el oeste.

- Dibuje los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  en un sistema de coordenadas cartesianas.
- Escribir los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  en términos de los vectores unitarios  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ .
- Determinar  $\vec{C}$  en magnitud y dirección tal que  $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$ .

*Algunas soluciones:*

4. Con los vectores:

$$\vec{u} = -1.00\hat{i} + 2.00\hat{j} - 1.00\hat{k}$$

$$\vec{v} = 3.00\hat{j} - 1.00\hat{k}$$

$$\vec{w} = 4.00\hat{i} - 8.00\hat{j} + 4.00\hat{k}$$

Determine:

$$a) \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Se tiene que:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3.00 & -1.00 \\ 4.00 & -8.00 & 4.00 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = [(3.00 \cdot 4.00) - (-8.00 \cdot -1.00)]\hat{i} - [(0 \cdot 4.00) - (4.00 \cdot -1.00)]\hat{j} + [(0 \cdot -8.00) - (4.00 \cdot 3.00)]\hat{k}$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = (12.00 - 8.00)\hat{i} - (0 - 4.00)\hat{j} + (0 - 12.00)\hat{k}$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = 4.00\hat{i} - 4.00\hat{j} - 12.00\hat{k}$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = (4.00\hat{i}, -4.00\hat{j}, -12.00\hat{k})$$

Luego:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (-1.00\hat{i}, 2.00\hat{j}, -1.00\hat{k}) \cdot (4.00\hat{i}, -4.00\hat{j}, -12.00\hat{k})$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (-1.00\hat{i} \cdot 4.00\hat{i}) + (2.00\hat{j} \cdot -4.00\hat{j}) + (-1.00\hat{k} \cdot -12.00\hat{k})$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = -4.00 - 8.00 + 12.00$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$$

Notese que estos vectores son perpendiculares debido al resultado del producto escalar.

b) Un vector unitario en la dirección de  $\vec{u} \times (7\vec{v})$

Sea:

$$7\vec{v} = 7(3.00\hat{j} - 1.00\hat{k})$$

$$7\vec{v} = 21.00\hat{j} - 7.00\hat{k}$$

Luego:

$$\vec{u} \times (7\vec{v}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1.00 & 2.00 & -1.00 \\ 0 & 21.00 & -7.00 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times (7\vec{v}) = [(2.00 \cdot -7.00) - (21.00 \cdot -1.00)]\hat{i} - [(-1.00 \cdot -7.00) - (0 \cdot -1.00)]\hat{j} + [(-1.00 \cdot 21.00) - (0 \cdot 2.00)]\hat{k}$$

$$\vec{u} \times (7\vec{v}) = (-14.00 + 21.00)\hat{i} - 7.00\hat{j} - 21.00\hat{k}$$

$$\vec{u} \times (7\vec{v}) = 7.00\hat{i} - 7.00\hat{j} - 21.00\hat{k}$$

Sea  $\vec{u} \times (7\vec{v}) = \vec{e}$  entonces el vector unitario esta dado por:

$$\hat{e} = \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|} = \frac{\vec{e}}{e}$$

$$\hat{e} = \frac{7.00\hat{i} - 7.00\hat{j} - 21.00\hat{k}}{\sqrt{(7.00)^2 + (7.00)^2 + (21.00)^2}}$$

$$\hat{e} = \frac{7.00\hat{i} - 7.00\hat{j} - 21.00\hat{k}}{7\sqrt{11}}$$

$$\hat{e} = \frac{1.00\hat{i}}{\sqrt{11}} - \frac{1.00\hat{j}}{\sqrt{11}} - \frac{3.00\hat{k}}{\sqrt{11}}$$

c)  $(\vec{w} \times \vec{v}) \times \vec{u}$

Se tiene que:

$$\vec{w} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4.00 & -8.00 & 4.00 \\ 0 & 3.00 & -1.00 \end{vmatrix}$$

$$\vec{w} \times \vec{v} = [(-8.00 \cdot -1.00) - (3.00 \cdot 4.00)]\hat{i} - [(4.00 \cdot -1.00) - (0 \cdot 4.00)]\hat{j} + [(4.00 \cdot 3.00) - (0 \cdot -8.00)]\hat{k}$$

$$\vec{w} \times \vec{v} = (8.00 - 12.00)\hat{i} + 4\hat{j} + 12.00\hat{k}$$

$$\vec{w} \times \vec{v} = -4.00\hat{i} + 4.00\hat{j} + 12.00\hat{k}$$

$$\vec{w} \times \vec{v} = (-4.00\hat{i}, 4.00\hat{j}, 12.00\hat{k})$$

Luego:

$$(\vec{w} \times \vec{v}) \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -4.00 & 4.00 & 12.00 \\ -1.00 & 2.00 & -1.00 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(\vec{w} \times \vec{v}) \times \vec{u} &= [(4.00 \cdot -1.00) - (2.00 \cdot 12.00)]\hat{i} - [(-4.00 \cdot -1.00) - (-1.00 \cdot 12.00)]\hat{j} + [(-4.00 \cdot 2.00) - (-1.00 \cdot 4.00)]\hat{k} \\
(\vec{w} \times \vec{v}) \times \vec{u} &= (-4.00 - 24.00)\hat{i} - (4.00 + 12.00)\hat{j} + (-8.00 + 4.00)\hat{k} \\
(\vec{w} \times \vec{v}) \times \vec{u} &= -28.00\hat{i} - 16.00\hat{j} - 4.00\hat{k} \\
(\vec{w} \times \vec{v}) \times \vec{u} &= (-28.00\hat{i}, -16.00\hat{j}, -4.00\hat{k})
\end{aligned}$$

d) El ángulo entre  $\vec{u}$  y  $(\vec{w} \times \vec{v})$ .

Con lo obtenido en a) es claro que ángulo solicitado es  $90^\circ$ , sin embargo a continuación se muestra como se puede obtener.

Sea  $(\vec{w} \times \vec{v}) = \vec{a}$  y  $\alpha$  el ángulo entre  $\vec{u}$  y  $\vec{z}$ , entonces:

$$\vec{u} \cdot \vec{a} = ua \cos \alpha = u_x a_x + u_y a_y + u_z a_z$$

$$\cos \alpha = \frac{u_x a_x + u_y a_y + u_z a_z}{ua}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left( \frac{u_x a_x + u_y a_y + u_z a_z}{ua} \right)$$

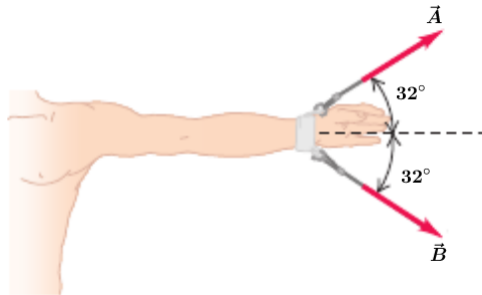
$$\alpha = \cos^{-1} \left[ \frac{(-1.00 \cdot -4.00) + (2.00 \cdot 4.00) + (-1.00 \cdot 12.00)}{\sqrt{(1.00)^2 + (2.00)^2 + (1.00)^2} \cdot \sqrt{(4.00)^2 + (4.00)^2 + (12.00)^2}} \right]$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left[ \frac{4.00 + 8.00 - 12.00}{\sqrt{6.00} \cdot \sqrt{176.00}} \right]$$

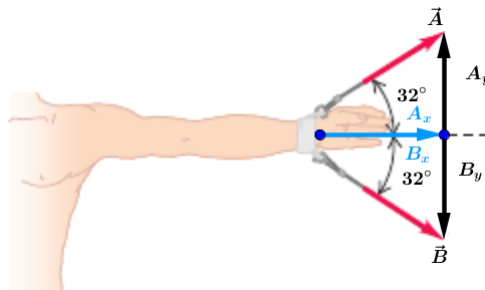
$$\alpha = \cos^{-1}(0)$$

$$\alpha = 90^\circ$$

7. Un paciente con una luxación en un hombro es colocado en un aparato de tracción como el que se ilustra en la figura. Los tirones  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  tienen magnitudes iguales y deben combinarse para producir una fuerza de tracción hacia fuera de 5.60 N. ¿De qué magnitud deben ser estos tirones?



El siguiente diagrama ayudará a la comprensión del ejercicio:



Luego se tiene que:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$

$$\text{Con } \vec{A} + \vec{B} = \vec{C} = 5,6 \text{ N} \hat{i}$$

$$A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + B_x \hat{i} + B_y \hat{j} = C_x \hat{i}$$

$$A \cos(32^\circ) \hat{i} + A \sin(32^\circ) \hat{j} + B \cos(32^\circ) \hat{i} - B \sin(32^\circ) \hat{j} = C \cos(0^\circ) \hat{i}$$

Como  $A = B$  se tiene que:

$$A \cos(32^\circ) \hat{i} + A \sin(32^\circ) \hat{j} + A \cos(32^\circ) \hat{i} - A \sin(32^\circ) \hat{j} = C \cos(0^\circ) \hat{i}$$

$$A \cos(32^\circ) \hat{i} + A \cos(32^\circ) \hat{i} = C \cos(0^\circ) \hat{i}$$

$$2A \cos(32^\circ) \hat{i} = C \cos(0^\circ) \hat{i}$$

$$A = \frac{C \cos(0^\circ) \hat{i}}{2 \cos(32^\circ) \hat{i}}$$

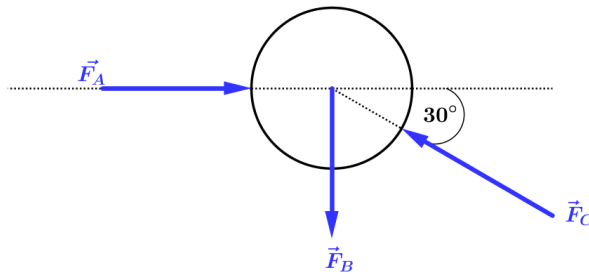
$$A = \frac{5,6 \text{ N} \cos(0^\circ) \hat{i}}{2 \cos(32^\circ) \hat{i}}$$

$$A = 3,30 \text{ N}$$

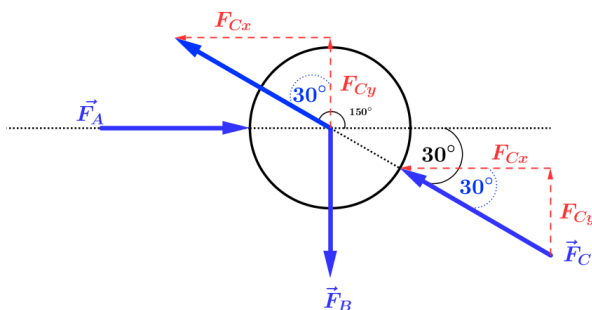
De lo anterior se concluye que  $A = B = 3,30 \text{ N}$ .

8. Tres fuerzas actúan sobre la esfera mostrada en la figura. La magnitud de  $\vec{F}_B$  es de 60 N y la resultante de los tres es igual a cero. Determine:

- a)  $|\vec{F}_A|$   
b)  $|\vec{F}_C|$



Primero que todo se deben graficar las componentes de  $\vec{F}_C$ , las cuales se pueden dibujar de dos formas:



Como se puede observar el vector  $\vec{F}_C$  esta ubicado en el segundo cuadrante, aunque en el dibujo del enunciado pareciera que estuviera en el cuarto cuadrante, esto debido a su sentido y dirección.

En general se tiene lo siguiente:

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0} \quad (\dagger)$$

$$|\vec{F}_B| = 60 \text{ N}$$

$$\vec{F}_A = F_{Ax}\hat{i}$$

$$\vec{F}_B = -F_{By}\hat{j}$$

Tomando en cuenta para  $\vec{F}_C$  los  $30^\circ$ :

$$\vec{F}_C = -F_{Cx}\hat{i} + F_{Cy}\hat{j}$$

$$\vec{F}_C = -F_C \cos 30^\circ \hat{i} + F_C \sin 30^\circ \hat{j}$$

Y para los  $150^\circ$ :

$$\vec{F}_C = F_{Cx}\hat{i} + F_{Cy}\hat{j}$$

$$\vec{F}_C = F_C \cos 150^\circ \hat{i} + F_C \sin 150^\circ \hat{j}$$

En este último a la hora de procesar las razones trigonometricas, la calculadora incluye el signo respectivo, en el caso de los  $30^\circ$  se le debe agregar el signo según la ubicación de la componente.

Para ambos casos se obtiene los mismo resultados.

Expresando  $(\dagger)$  en términos de las componentes vectoriales y para  $\vec{F}_C$  con los  $30^\circ$  :

$$F_{Ax}\hat{i} - F_{By}\hat{j} - F_{Cx}\hat{i} + F_{Cy}\hat{j} = 0_x\hat{i} + 0_y\hat{j}$$

$$F_{Ax}\hat{i} - F_{By}\hat{j} - F_C \cos 30^\circ \hat{i} + F_C \sin 30^\circ \hat{j} = 0_x\hat{i} + 0_y\hat{j}$$

$$F_{Ax}\hat{i} - 60 \text{ N}\hat{j} - F_C \cos 30^\circ \hat{i} + F_C \sin 30^\circ \hat{j} = 0_x\hat{i} + 0_y\hat{j}$$

$$(F_{Ax} - F_C \cos 30^\circ) \hat{i} + (-60 \text{ N} + F_C \sin 30^\circ) \hat{j} = 0_x\hat{i} + 0_y\hat{j}$$

De esta ecuación vectorial se forma un sistema de ecuaciones escalares:

$$\begin{cases} F_{Ax} - F_C \cos 30^\circ = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -60 \text{ N} + F_C \sin 30^\circ = 0 & (2) \end{cases}$$

De (2) se obtiene  $F_C$ :

$$F_C \sin 30^\circ = 60 \text{ N}$$

$$F_C = \frac{60 \text{ N}}{\sin 30^\circ} = 120 \text{ N}$$

Y sustituyendo  $F_C$  en (1):

$$F_{Ax} - F_C \cos 30^\circ = 0$$

$$F_{Ax} = F_C \cos 30^\circ$$

$$F_{Ax} = 120 \text{ N} \cos 30^\circ = 104 \text{ N}$$

Como  $F_{Ay} = 0$ , entonces  $F_A = 104 \text{ N}$

10. Se realiza un concurso, donde el premio es un Tesla car (el mejor auto eléctrico del mundo), usted está participando en él, básicamente las instrucciones son seguir al pie de la letra los siguientes vectores en forma consecutiva, donde al final del tercer vector se encuentran las llaves de tan hermoso auto:

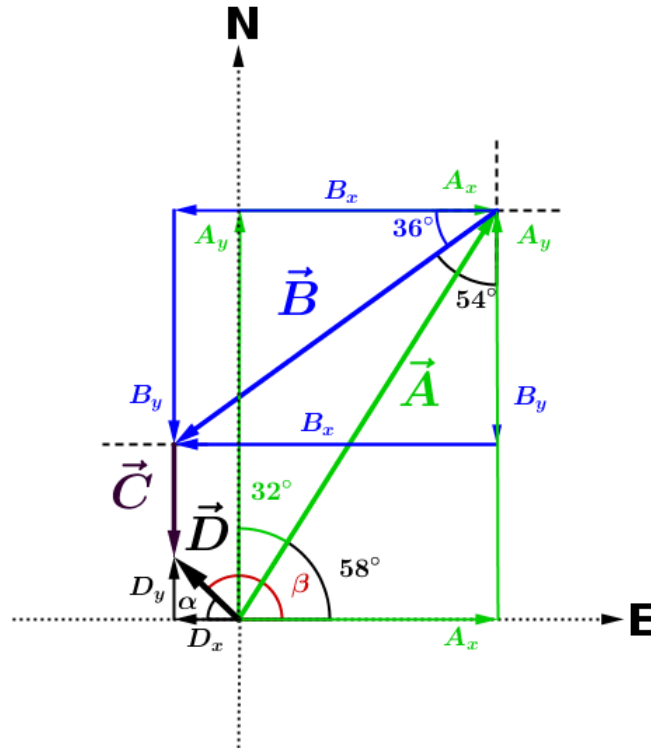
1<sup>ero</sup> ( $\vec{A}$ ): 72.4 m, 32° al este del norte.

2<sup>do</sup> ( $\vec{B}$ ): 57.3 m, 36° al sur del oeste.

3<sup>ero</sup> ( $\vec{C}$ ): 17.8 m, al sur.

Realice:

a) Un diagrama donde estén graficados en forma respectiva los tres vectores y el vector desplazamiento.



b) El vector desplazamiento ( $\vec{D}$ ) en términos de los vectores unitarios  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ , además su magnitud.

Se tiene que el vector desplazamiento está dado por la ecuación vectorial:

$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \quad (*)$$

Con los ángulos dados en las coordenadas se tienen las siguientes componentes de los vectores dados:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} = A \sin(32^\circ) \hat{i} + A \cos(32^\circ) \hat{j} = 72.4 \text{ m} \sin(32^\circ) \hat{i} + 72.4 \text{ m} \cos(32^\circ) \hat{j}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} = -B \cos(36^\circ) \hat{i} - B \sin(36^\circ) \hat{j} = -57.3 \text{ m} \cos(36^\circ) \hat{i} - 57.3 \text{ m} \sin(36^\circ) \hat{j}$$

$$\vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j} = -C_y \hat{j} = -17.8 \text{ m} \hat{j}$$

Notese que los signos de las componentes se colocan según su posición cuadrantal.

Colocando lo anterior en (\*):

$$\begin{aligned}
\vec{D} &= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + C_x \hat{i} + C_y \hat{j} \\
\vec{D} &= A \sin(32^\circ) \hat{i} + A \cos(32^\circ) \hat{j} - B \cos(36^\circ) \hat{i} - B \sin(36^\circ) \hat{j} - C_y \hat{j} \\
\vec{D} &= [A \sin(32^\circ) - B \cos(36^\circ)] \hat{i} + [A \cos(32^\circ) - B \sin(36^\circ) - C] \hat{j} \\
\vec{D} &= [72.4 \text{ m} \sin(32^\circ) - 57.3 \text{ m} \cos(36^\circ)] \hat{i} + [72.4 \text{ m} \cos(32^\circ) - 57.3 \text{ m} \sin(36^\circ) - 17.8 \text{ m}] \hat{j} \\
\vec{D} &= -7.99 \text{ m} \hat{i} + 9.91 \text{ m} \hat{j} \\
|\vec{D}| &= D = \sqrt{(D_x)^2 + (D_y)^2} \\
|\vec{D}| &= D = \sqrt{(7.99 \text{ m})^2 + (9.91 \text{ m})^2} \\
|\vec{D}| &= D = 12.7 \text{ m}
\end{aligned}$$

El mismo vector  $\vec{D}$  se obtiene también, con un proceso analogo pero con los ángulos complementarios de los ángulos dados en el enunciado (notese el cambio de las razones trigometricas):

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} = A \cos(58^\circ) \hat{i} + A \sin(58^\circ) \hat{j} = 72.4 \text{ m} \cos(58^\circ) \hat{i} + 72.4 \text{ m} \sin(58^\circ) \hat{j} \\
\vec{B} &= B_x \hat{i} + B_y \hat{j} = -B \sin(54^\circ) \hat{i} - B \cos(54^\circ) \hat{j} = -57.3 \text{ m} \sin(54^\circ) \hat{i} - 57.3 \text{ m} \cos(54^\circ) \hat{j} \\
\vec{C} &= C_x \hat{i} + C_y \hat{j} = -C_y \hat{j} = -17.8 \text{ m} \hat{j}
\end{aligned}$$

Notese que los signos de las componente se colocan según su posición cuadrantal.

Colocando lo anterior en (\*):

$$\begin{aligned}
\vec{D} &= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + C_x \hat{i} + C_y \hat{j} \\
\vec{D} &= A \cos(58^\circ) \hat{i} + A \sin(58^\circ) \hat{j} - B \sin(36^\circ) \hat{i} - B \cos(36^\circ) \hat{j} - C_y \hat{j} \\
\vec{D} &= [A \cos(58^\circ) - B \sin(54^\circ)] \hat{i} + [A \sin(58^\circ) - B \cos(54^\circ) - C] \hat{j} \\
\vec{D} &= [72.4 \text{ m} \cos(58^\circ) - 57.3 \text{ m} \sin(54^\circ)] \hat{i} + [72.4 \text{ m} \sin(58^\circ) - 57.3 \text{ m} \cos(54^\circ) - 17.8 \text{ m}] \hat{j} \\
\vec{D} &= -7.99 \text{ m} \hat{i} + 9.91 \text{ m} \hat{j}
\end{aligned}$$

También vector  $\vec{D}$  se obtiene utilizando los ángulos medidos en su forma estandar, es decir desde el eje  $+x$ :

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} = A \cos(58^\circ) \hat{i} + A \sin(58^\circ) \hat{j} = 72.4 \text{ m} \cos(58^\circ) \hat{i} + 72.4 \text{ m} \sin(58^\circ) \hat{j} \\
\vec{B} &= B_x \hat{i} + B_y \hat{j} = B \cos(216^\circ) \hat{i} + B \sin(216^\circ) \hat{j} = 57.3 \text{ m} \cos(216^\circ) \hat{i} + 57.3 \text{ m} \sin(216^\circ) \hat{j} \\
\vec{C} &= C_x \hat{i} + C_y \hat{j} = C \sin(270^\circ) \hat{j} = 17.8 \text{ m} \sin(270^\circ) \hat{j}
\end{aligned}$$

Notese que los signos de las componente los define el respectivo ángulo.

Y sustituyendo en (\*):

$$\begin{aligned}
\vec{D} &= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + C_x \hat{i} + C_y \hat{j} \\
\vec{D} &= A \cos(58^\circ) \hat{i} + A \sin(58^\circ) \hat{j} + B \cos(216^\circ) \hat{i} + B \sin(216^\circ) \hat{j} + C_y \hat{j}
\end{aligned}$$

$$\vec{D} = [A \cos(58^\circ) + B \cos(216^\circ)] \hat{i} + [A \sin(58^\circ) + B \sin(216^\circ) + C \sin(270^\circ)] \hat{j}$$

$$\vec{D} = [72.4 \text{ m} \cos(58^\circ) + 57.3 \text{ m} \cos(216^\circ)] \hat{i} + [72.4 \text{ m} \sin(58^\circ) + 57.3 \text{ m} \sin(216^\circ) + 17.8 \text{ m} \sin(270^\circ)] \hat{j}$$

$$\vec{D} = -7.99 \text{ m} \hat{i} + 9.91 \text{ m} \hat{j}$$

c) La dirección del vector desplazamiento, con respecto al eje  $+x$ .

Se tiene:

$$\tan \alpha = \frac{D_y}{D_x}$$

$$\tan \alpha = \frac{9.91 \text{ m}}{7.99 \text{ m}}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{9.91 \text{ m}}{7.99 \text{ m}} \right)$$

$$\alpha = 51^\circ$$

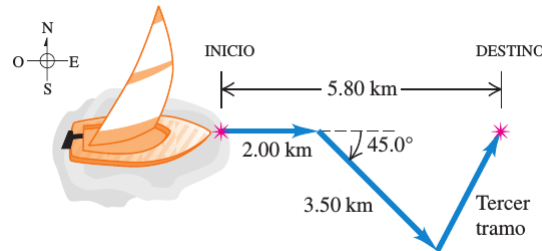
Pero, el ángulo con respecto al eje  $+x$  es  $\beta$ :

$$\beta = 180^\circ - \alpha$$

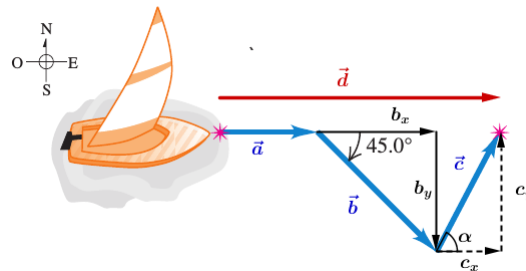
$$\beta = 180^\circ - 51^\circ$$

$$\beta = 129^\circ$$

14. Un marinero en un velero pequeño se topa con vientos cambiantes. Navega 2.00 km al este, luego 3.50 km al sureste y después otro tramo en una dirección desconocida. Su posición final es 5.80 km directamente al este del punto inicial (ver figura). Determine la magnitud y la dirección del tercer tramo.



Se tiene gráficamente lo siguiente:



Basandos en lo anterior se tiene que:

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{d} - \vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$$

$$d_x \hat{i} - (a_x \hat{i} - a_y \hat{j}) - (b_x \hat{i} - b_y \hat{j}) = \vec{c}$$

$$d_x \hat{i} - a_x \hat{i} + a_y \hat{j} - b_x \hat{i} + b_y \hat{j} = \vec{c}$$

$$(d_x - a_x - b_x) \hat{i} + (a_y + b_y) \hat{j} = \vec{c}$$

$$[5.80 \text{ km} - 2.00 \text{ km} - 3.50 \text{ km} \cos(45^\circ)] \hat{i} + [3.50 \text{ km} \sin(45^\circ)] \hat{j} = \vec{c}$$

$$1.32 \text{ km} \hat{i} + 2.47 \text{ km} \hat{j} = \vec{c}$$

La magnitud de  $\vec{c}$  esta dada por:

$$|\vec{c}| = c = \sqrt{(1.32 \text{ km})^2 + (2.47 \text{ km})^2}$$

$$|\vec{c}| = c = 2.80 \text{ km}$$

Y su dirección:

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{2.47 \text{ km}}{1.32 \text{ km}} \right)$$

$$\alpha = 61.8^\circ$$

Es decir que el tercer tramo tiene un largo de 2.80 km y esta en una dirección  $E 61.8^\circ N$ .

## Cinemática traslacional

*Enunciados:*

1. La posición de una partícula esta definida por la función  $x(t) = At^2 + Bt^3 + Ct + D$ . Si  $A = 5, B = 3, C = 9$  y  $D = 10$ , determine:

a) Las unidades según el SI de los coeficientes  $A, B, C$  y  $D$ .

b) La velocidad media y aceleración media en los intervalos de tiempo:  $t_1 = 5 \text{ s}$  y  $t_2 = 10 \text{ s}$ .

c) La posición, velocidad y aceleración instantáneas en  $t = 8 \text{ s}$ .

2. Un delfín (al que llamaremos Flipper) se desplaza en el oceano de forma que su posición en cualquier instante esta dada por la función  $x(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D$ , con  $[x] = \text{m}$  y  $[t] = \text{s}$ ; y con  $A = -4, B = 24, C = -5$  y  $D = 2$ .

Determine:

a) Las unidades de  $A, B, C$  y  $D$ .

b) La máxima velocidad alcanzada por el delfín durante su movimiento.

c) La posición en la alcanza esta velocidad.

d) La posición, velocidad y aceleración que tendrá el delfín a los 5 s de iniciado su movimiento.

3. La aceleración de una partícula que se mueve en línea recta está dada por  $a(t) = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 30 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t$ . Calcule la velocidad media de la partícula en el intervalo  $t_1 = 2 \text{ s}$  y  $t_2 = 6 \text{ s}$ , sabiendo que en  $t = 0 \text{ s}$  la posición es  $x = 10 \text{ m}$  y la velocidad es  $v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

4. La trayectoria de un objeto está dada por la ecuación:  $x(t) = (4.35) \text{ m} + \left(25.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) t - \left(11.79 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) t^2$

a) ¿En cuánto tiempo su posición  $x(t)$  es máxima?

b) ¿Cuál es este valor máximo?

5. La posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje  $x$ , está dada por  $x(t) = 3.0t^2 - 2.0t^3$ , donde  $x$  está en metros y  $t$  en segundos.

Determine:

a) ¿Cuáles son las unidades de 3 y  $-2$ ?

b) ¿Cuál es la posición de la partícula cuando alcanza su velocidad máxima en el sentido positivo de  $x$ ?

6. La velocidad de una bala disparada por una carabina está dada por  $v(t) = -5.0 \times 10^7 t^2 + 3.0 \times 10^5 t$  donde  $v$  está dada en  $\text{m/s}$  y  $t$  en  $\text{s}$ . La aceleración al salir del cañón es de  $0 \text{ m/s}^2$  y la posición es  $0 \text{ m}$  cuando está en la recámara (inicio del movimiento de la bala dentro del cañón).

a) Determine cuáles son las unidades según el SI de los coeficientes numéricos de  $v(t)$ .

b) Determine la aceleración y posición de la bala como una función del tiempo cuando está adentro del cañón.

c) Determine el tiempo que le toma a la bala salir de la carabina.

d) Encuentre la rapidez con la que la bala sale de la carabina.

e) ¿Cuál es la longitud del cañón?

7. La aceleración de una motocicleta está dada por  $a_x(t) = At - Bt^2$ , con  $A = 1.50$  y  $B = 0.120$ . La motocicleta está en reposo en el origen  $t = 0 \text{ s}$ .

a) Determine las unidades de  $A$  y  $B$ .

b) Obtenga la posición y velocidad en función de  $t$ .

8. Un deportista trota de un extremo al otro de una pista recta de  $300 \text{ m}$  en  $2.50 \text{ min}$  y, luego, trota de regreso al punto de partida en  $3.30 \text{ min}$ . ¿Qué velocidad media en  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$  tuvo el deportista en cada uno de los siguientes casos:

a) Al trotar al final de la pista.

b) Al regresar al punto de partida.

c) En el trote total.

9. Un matrimonio viaja en un automóvil a  $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  por una carretera recta. Ven un accidente a lo

lejos, así que el conductor disminuye su velocidad a  $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  en  $5.0 \text{ s}$ . ¿Qué aceleración media tuvo el automóvil?

10. En un experimento, se sacó a una pardela (un ave marina) de su nido, se le llevó a 5150 km de distancia y luego fue liberada. El ave regresó a su nido 13.5 días después de haberse soltado. Si el origen es el nido y extendemos el eje  $+x$  al punto de liberación, cuál fue la velocidad media del ave en  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ , en:

a) el vuelo de regreso.

b) desde que se sacó del nido hasta que regresó.

11. Un automóvil se mueve hacia la derecha a lo largo de un camino recto, que llamamos el eje  $+x$ , cuando el conductor aplica los frenos. Si la velocidad inicial (cuando el conductor acciona los frenos) es  $v_1 = 15.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , y toma 5.00 s desacelerar a  $v_2 = 5.00 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , ¿cuál fue la aceleración promedio del automóvil?

12. Un carro acelera a lo largo de un camino recto desde el reposo hasta  $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , durante 5.0 s; indique el valor de la magnitud de la aceleración promedio.

13. Partiendo de un pilar, usted corre a 200 m al este ( $E$ ) (la dirección  $+x$ ) con rapidez media de  $5.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , luego 280 m al oeste ( $W$ ) con rapidez media de  $4.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  hasta un poste. Calcule:

a) Su rapidez media del pilar al poste.

b) Su velocidad media del pilar al poste.

14. Una corredora con una masa de 57.5 kg parte del reposo y acelera con una aceleración constante de  $1.25 \text{ m/s}^2$  hasta alcanzar una velocidad de 6.3 m/s. Luego, continúa corriendo con esta velocidad constante. Determine:

a) La distancia ha corrido después de 59.7 s.

b) La velocidad de la corredora en este instante.

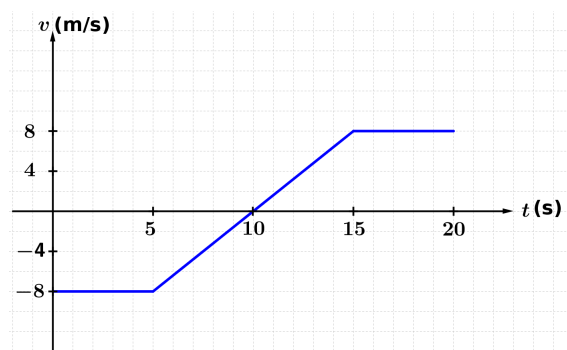
c) El cambio en el impulso lineal

15. Un carro pasa al frente de un oficial de tránsito a una rapidez constante de 15 m/s, donde el límite permitido es de 10 m/s. El oficial se monta en su patrulla y sale en su persecución desde el reposo y acelera a  $3 \text{ m/s}^2$  y alcanza al carro en 10 s; determine:

a) La rapidez del oficial de tránsito cuando lo logra alcanzar.

b) La posición de ambos vehículos cuando el oficial de tránsito alcanza al carro.

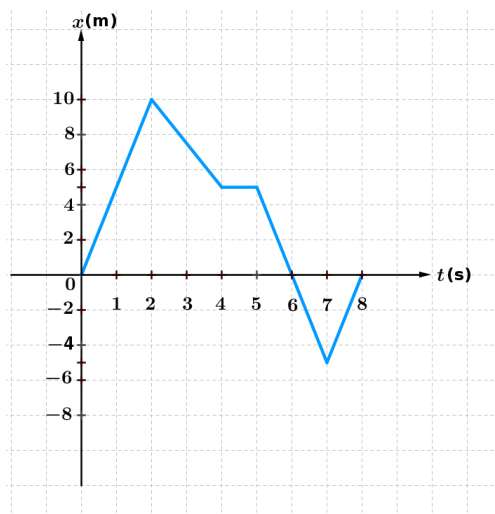
16. En la figura se muestra una gráfica  $v$  vs  $t$  de un objeto que se mueve a lo largo del eje  $x$ .



a) Trace una gráfica de la aceleración en función del tiempo.

b) Determine la aceleración media del objeto en los intervalos de tiempo  $t = 5$  s a  $t = 15$  s y  $t = 0$  s a  $t = 20$  s.

17. En la figura se muestra la gráfica del desplazamiento contra el tiempo para una partícula que se mueve a lo largo del eje horizontal  $x$ .



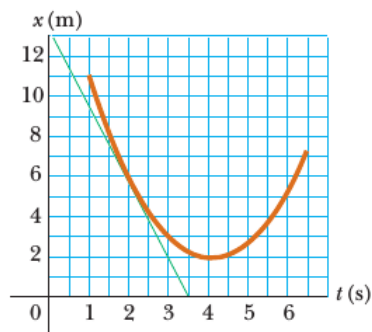
a) Encuentre la velocidad media en los intervalos de tiempo:

- i) 0 s a 2 s
- ii) 0 s a 4 s
- iii) 2 s a 4 s
- iv) 4 s a 7 s
- v) 0 s a 8 s

b) Encuentre la velocidad media en los instantes 3 s, 4.5 s y 7.5 s.

c) Determine el desplazamiento y la distancia recorrida.

18. En la siguiente figura se muestra una gráfica de posición contra tiempo para una partícula que se mueve a lo largo del eje.



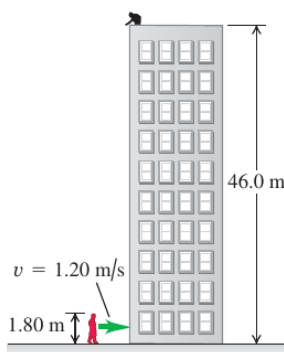
- Encuentre la velocidad media en el intervalo de tiempo de  $t = 1.5$  s a  $t = 4$  s.
- Determine la velocidad instantánea en  $t = 2$  s al medir la pendiente de la línea tangente que se muestra en la gráfica.
- ¿Para cuál valor de tiempo la velocidad es de  $0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ?

19. Un paracaidista va descendiendo con una velocidad de  $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , en el momento en que esta a 60 m de altura se le cae su altímetro. ¿Con qué velocidad impacta al suelo el altímetro?

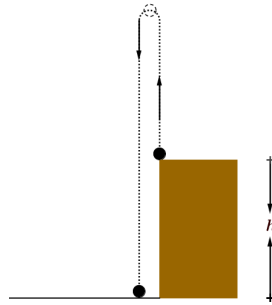
20. Una roca se suelta desde el reposo en la Tierra y llega al suelo 1.75 s después. Cuando se suelta desde la misma altura en Encelado (una luna de Saturno), llega al suelo en 18.60 s. Determine:

- La aceleración debida a la gravedad en Encelado.
- La rapidez con la que la roca llega al suelo en dicha luna.
- La distancia recorrida por la roca en Encelado a los 5.00 s.
- La altura a la que se encuentra la roca en Encelado a los 5.00 s.

21. Unos estudiantes bromistas están en la azotea del edificio de física, a 46 m de altura (ver figura). Su profesor, que tiene una estatura de 1.80 m, camina hacia la entrada del edificio a una rapidez constante de  $1.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Si dejan caer un huevo sobre la cabeza del profesor, ¿dónde deberá estar éste cuando suelten el huevo? Suponga que el huevo está en caída libre.



22. En el borde de un acantilado es lanzada verticalmente hacia arriba una piedra con rapidez  $A$ . Al descender la piedra apenas se libra del borde del acantilado y va a caer al fondo, llegando con una rapidez de  $2A$ .



a) Demuestre que la altura desde el acantilado al fondo del mismo es:  $h = \frac{3A^2}{2g}$ .

b) Demuestre que el tiempo de vuelo de la piedra es:  $t = \frac{3A}{g}$ .

23. Un arquero dispara una flecha desde una altura de 1.14 m sobre el suelo con una velocidad inicial de 47.5 m/s y un ángulo inicial de  $35.2^\circ$  sobre la horizontal. ¿En qué tiempo después de soltar la flecha del arco estará la flecha volando exactamente horizontal?

24. Un doble de películas que conduce una motocicleta aumenta horizontalmente la rapidez y sale disparado de un acantilado de 50.0 m de altura. ¿A qué rapidez debe salir del acantilado la motocicleta, para aterrizar al nivel del suelo a 90.0 m de la base del acantilado, donde se encuentran las cámaras? Desprecie la resistencia del aire.

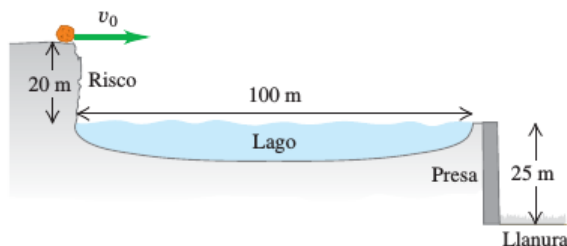
25. Un avión está volando horizontalmente a una altura  $h$ , con una velocidad  $v_a$ . En el instante que el avión pasa por encima de una batería antiaérea, el cañón dispara al avión. Calcule la velocidad mínima  $v_{0p}$  y el ángulo  $\theta$  en términos de  $h$ ,  $v_a$  y  $g$ ; a que debe dispararse el proyectil para que el choque se produzca en la altura máxima del proyectil.

26. En una azotea de un edificio de  $h = 5$  m, dos pelotas son lanzadas al mismo tiempo. Una de ellas es dejada caer verticalmente desde esa altura, mientras que la otra es lanzada horizontalmente con una velocidad inicial  $v'_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Determine:

a) El tiempo que tarda cada objeto en llegar al suelo.

b) La velocidad (en el sentido vectorial, con los vectores unitarios respectivos  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ ) con que cada una de las bolas llega al suelo.

27. Un peñasco de 76.0 kg está rodando horizontalmente hacia el borde de un acantilado que está 20 m arriba de la superficie de un lago, como se indica en la figura. La parte superior de la cara vertical de una presa está a 100 m del pie del acantilado, al nivel de la superficie del lago. Hay una llanura 25 m debajo de la parte superior de la presa.



- a) ¿Qué rapidez mínima debe tener la roca al perder contacto con el acantilado para llegar hasta la llanura sin golpear la presa?
- b) ¿A qué distancia del pie de la presa caerá la roca en la llanura?

28. Una pelota es disparada hacia arriba, desde lo alto de una torre de 35 m. con una rapidez inicial de  $80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  y un ángulo de  $25^\circ$  sobre la horizontal.

Calcule:

- a) El tiempo que tarde la pelota en llegar al suelo.
- b) Desplazamiento horizontal de la pelota.
- c) El vector velocidad de la pelota en el momento de impacto con el suelo.

29. Una botella se deja caer desde el reposo en la posición  $x = 20 \text{ m}, y = 30 \text{ m}$ . Al mismo tiempo se lanza desde el origen una piedra con una velocidad de 15 m/s. Determine: a) El ángulo con el que se tiene que lanzar la piedra para que rompa la botella.  
b) La altura a la que ha ocurrido el choque.

*Algunas soluciones:*

2. Un delfín (al que llamaremos Flipper) se desplaza en el océano de forma que su posición en cualquier instante está dada por la función  $x(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D$ , con  $[x] = \text{m}$  y  $[t] = \text{s}$ ; y con  $A = -4$ ,  $B = 24$ ,  $C = -5$  y  $D = 2$ .

Determine:

- a) Las unidades de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ .

Como  $[x(t)] = \text{m}$  y  $[t] = \text{s}$ , entonces:

$$[A] t^3 = \text{m}$$

$$[A] = \frac{\text{m}}{t^3}$$

$$[A] = \frac{\text{m}}{\text{s}^3}$$

Con un análisis similar se determina que:

$$[B] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$[C] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$[D] = \text{m}$$

b) La máxima velocidad alcanzada por el delfín durante su movimiento.

Flipper alcanza la velocidad máxima ( $v_{\max}$ ) cuando  $a = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , entonces:

$$i. x'(t) = v(t) = 3At^2 + 2Bt + C$$

$$ii. x''(t) = v'(t) = a(t) = 6At + 2B$$

Igualando *ii.* a cero para obtener el tiempo donde Flipper llega a  $v_{\max}$ :

$$0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 6At + 2B$$

$$-6At = 2B$$

$$t = \frac{48 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{24 \frac{\text{m}}{\text{s}^3}}$$

$$t = 2 \text{ s}$$

c) La posición en la alcanza esta velocidad.

Se obtiene por medio de  $x(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D(\star)$ :

$$x(2 \text{ s}) = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} (2 \text{ s})^3 + 24 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (2 \text{ s})^2 - 5 (2 \text{ s}) + 2 \text{ m}$$

$$x(2 \text{ s}) = 56 \text{ m}$$

d) La posición, velocidad y aceleración que tendrá el delfín a los 5 s de iniciado su movimiento.

De  $(\star)$  obtenemos la posición:

$$x(5 \text{ s}) = 77 \text{ m}$$

De *i.* y *ii.* obtenemos la velocidad y aceleración respectivamente:

$$v(5 \text{ s}) = -12 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} (5 \text{ s})^2 + 48 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (5 \text{ s}) - 5 \text{ m}$$

$$v(5 \text{ s}) = -65 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ (es decir se esta devolviendo)}$$

$$a(5 \text{ s}) = -24 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} (5 \text{ s}) + 48 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a(5 \text{ s}) = -72 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \text{ (Flipper va disminuyendo su velocidad)}$$

6. La velocidad de una bala disparada por una carabina está dada por  $v(t) = -5.0 \times 10^7 t^2 + 3.0 \times 10^5 t$  donde  $v$  está dada en m/s y  $t$  en s. La aceleración al salir del cañón es de  $0 \text{ m/s}^2$  y la posición es  $0 \text{ m}$  cuando está en la recámara (inicio del movimiento de la bala dentro del cañón).

a) Determine cuales son las unidades según el SI de los coeficientes numéricos de  $v(t)$ .

Como se sabe  $[v] = \text{m/s}$  y  $[t] = \text{s}$  entonces:

$$\begin{aligned} [-5.0x10^7] [t^2] &= \text{m/s} & [3.0x10^5] [t] &= \text{m/s} \\ [-5.0x10^7] \text{s}^2 &= \text{m/s} & [3.0x10^5] \text{s} &= \text{m/s} \\ [-5.0x10^7] &= \text{m/s}^3 & [3.0x10^5] &= \text{m/s}^2 \end{aligned}$$

Notese que la velocidad en función con sus respectivas unidades esta dada por:

$$v(t) = (-5.0x10^7 \text{m/s}^3) t^2 + (3.0x10^5 \text{m/s}^2) t$$

b) Determine la aceleración y posición de la bala como una función del tiempo cuando está adentro del cañon.

La aceleración en función del tiempo se obtiene con:

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{dv}{dt} \\ a(t) &= 2(-5.0x10^7 \text{m/s}^3) t + 3.0x10^5 \text{m/s}^2 \\ a(t) &= (-10.0x10^7 \text{m/s}^3) t + 3.0x10^5 \text{m/s}^2 \end{aligned}$$

Y la posición en función del tiempo:

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} \\ v dt &= dx \\ \int_{0\text{s}}^t v dt &= \int_{0\text{m}}^x dx \\ \int_{0\text{s}}^t [(-5.0x10^7 \text{m/s}^3) t^2 + (3.0x10^5 \text{m/s}^2) t] dt &= \int_{0\text{m}}^x dx \\ \frac{(-5.0x10^7 \text{m/s}^3)}{3} t^3 + \frac{(3.0x10^5 \text{m/s}^2)}{2} t^2 &= x(t) \end{aligned}$$

c) Determine el tiempo que le toma a la bala salir de la carabina.

Al salir de la carabina se tiene que  $a = 0 \text{m/s}^2$ , entonces:

$$\begin{aligned} a(t) &= 0 \text{m/s}^2 \\ 0 \text{m/s}^2 &= (-10.0x10^7 \text{m/s}^3) t + 3.0x10^5 \text{m/s}^2 \\ -3.0x10^5 \text{m/s}^2 &= (-10.0x10^7 \text{m/s}^3) t \\ \frac{-3.0x10^5 \text{m/s}^2}{-10.0x10^7 \text{m/s}^3} &= 0.003 \text{s} = t \end{aligned}$$

d) Encuentre la rapidez con la que la bala sale de la carabina.

Claro esta que es:

$$\begin{aligned} v(0.003 \text{s}) &= (-5.0x10^7 \text{m/s}^3) (0.003 \text{s})^2 + (3.0x10^5 \text{m/s}^2) (0.003 \text{s}) \\ v(0.003 \text{s}) &= 450 \text{m/s} \end{aligned}$$

e) ¿Cuál es la longitud del cañon?

Tomando la recamara de la carabina como el inicio de la misma, y como ya sabe el tiempo en que dura el recorrer el cañon, se tiene:

$$\begin{aligned}
 x(0.003 \text{ s}) &= \frac{(-5.0 \times 10^7 \text{ m/s}^3)}{3} (0.003 \text{ s})^3 + \frac{(3.0 \times 10^5 \text{ m/s}^2)}{2} (0.003 \text{ s})^2 \\
 x(0.003 \text{ s}) &= \frac{(-5.0 \times 10^7 \text{ m/s}^3)}{3} (0.003 \text{ s})^3 + \frac{(3.0 \times 10^5 \text{ m/s}^2)}{2} (0.003 \text{ s})^2 \\
 x(0.003 \text{ s}) &= 0.9 \text{ m}
 \end{aligned}$$

8. Un deportista trota de un extremo al otro de una pista recta de 300 m en 2.50 min y, luego, trota de regreso al punto de partida en 3.30 min. Qué velocidad media en  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$  tuvo el deportista en cada uno de los siguientes casos:

Antes de resolver el ejercicio, se convierten los tiempos de minutos a segundos:

$$\begin{aligned}
 2.50 \text{ min} \left( \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \right) &= 150 \text{ s} \\
 3.30 \text{ min} \left( \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \right) &= 198 \text{ s}
 \end{aligned}$$

a) al trotar al final de la pista.

Se tiene que:

$$v_{med} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Note que se indica que es hasta el final de la pista, entonces  $x_1 = 0 \text{ m}$  y  $x_2 = 300 \text{ m}$ , tome como origen de referencia el inicio de la pista claro esta.

$$\begin{aligned}
 v_{med} &= \frac{300 \text{ m} - 0 \text{ m}}{150 \text{ s} - 0 \text{ s}} \\
 v_{med} &= \frac{300 \text{ m}}{150 \text{ s}} \\
 v_{med} &= 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

b) al regresar al punto de partida.

Note que se indica que esta “regresando” hasta el punto partida, es decir se esta devolviendo, entonces  $x_1 = 0 \text{ m}$  y  $x_2 = -300 \text{ m}$ .

$$\begin{aligned}
 v_{med} &= \frac{-300 \text{ m} - 0 \text{ m}}{198 \text{ s} - 0 \text{ s}} \\
 v_{med} &= \frac{-300 \text{ m}}{198 \text{ s}} \\
 v_{med} &= -1.51 \frac{\text{m}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

Note que  $v_{med} < 0$  por que se esta devolviendo.

c)en el trote total.

Es claro que la respuesta es 0 m/s debido a que esta llegando al mismo punto de partida, ya que si suman los dos desplazamientos (ida y vuelta) se tiene que da 0 m, claro esta sumando los dos tiempos:

$$v_{med} = \frac{300 \text{ m} + -300 \text{ m}}{150 \text{ s} + 198 \text{ s}}$$

$$v_{med} = \frac{0 \text{ m}}{348 \text{ s}}$$

$$v_{med} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

También se pudo determinar de esta forma:

$$v_{med} = \frac{0 \text{ m} + 0 \text{ m}}{348 \text{ s} - 0 \text{ s}} \text{ (ya que es claro que } x_1 = 0 \text{ m y } x_2 = 0 \text{ m)}$$

$$v_{med} = \frac{0 \text{ m}}{348 \text{ s}}$$

$$v_{med} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

10.En un experimento, se sacó a una pardela (un ave marina) de su nido, se le llevó a 5150 km de distancia y luego fue liberada. El ave regresó a su nido 13.5 días después de haberse soltado. Si el origen es el nido y extendemos el eje  $+x$  al punto de liberación, cuál fue la velocidad media del ave en  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ , en:

a)el vuelo de regreso.

Se tiene que:

$$v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v_{med} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Donde:

$$x_1 = 5150 \text{ km} = 5150 \times 10^3 \text{ m} = 5150000 \text{ m}$$

$$x_2 = 0 \text{ m} \text{ (porque el ave regresa al origen)}$$

$$t_2 = 13.5 \text{ días} \left( \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ día}} \right) \left( \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \right) = 1166400 \text{ s}$$

Luego:

$$v_{med} = \frac{0 \text{ m} - 5150000 \text{ m}}{1166400 \text{ s} - 0 \text{ s}}$$

$$v_{med} = \frac{-5150000 \text{ m}}{1166400 \text{ s}}$$

$$v_{med} = -4.41 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Note que tanto  $\Delta x < 0$  y  $v_{med} < 0$ , pues el ave marina esta regresando a su nido, es decir se esta devolviendo al origen de referencia.

b) desde que se sacó del nido hasta que regresó.

Se tiene que:

$$v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

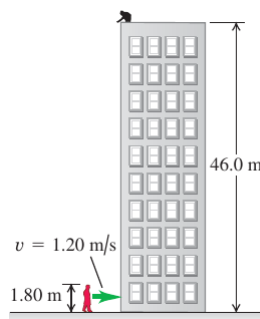
$$v_{med} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Se tiene que  $\Delta x = 0$  m, porque el ave regresa al origen de referencia (nido), es decir no se desplace nada, aunque si traslado una distancia de  $10300 \text{ km} = 10300 \times 10^3 \text{ m} = 10300000 \text{ m}$ .

$$v_{med} = \frac{0 \text{ m}}{1166400 \text{ s}}$$

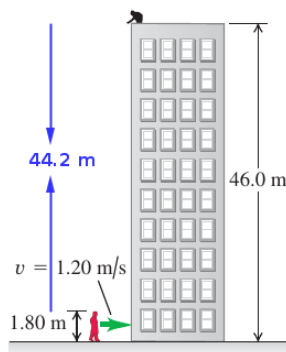
$$v_{med} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

21. Unos estudiantes bromistas están en la azotea del edificio de física, a 46 m de altura (ver figura). Su profesor, que tiene una estatura de 1.80 m, camina hacia la entrada del edificio a una rapidez constante de  $1.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Si dejan caer un huevo sobre la cabeza del profesor, ¿dónde deberá estar éste cuando suelten el huevo? Suponga que el huevo está en caída libre.



Se debe determinar el tiempo en que dura llegar el hasta la cabeza, tomando como referencia el nivel de la azotea se tiene:  $y_o = 0 \text{ m}$ ,  $y = -(46 \text{ m} - 1.80 \text{ m}) = -44.2 \text{ m}$  y  $v_{0y} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

El siguiente diagrama ayudará a la comprensión del ejercicio:



$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2$$

$$y = -\frac{g}{2}t^2$$

$$\sqrt{\frac{2y}{-g}} = t$$

$$\sqrt{\frac{2(-44.2 \text{ m})}{-9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = t$$

$$\sqrt{\frac{2(-44.2 \text{ m})}{-9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 3 \text{ s}$$

Durante este mismo tiempo el profesor se desplaza hacia la entrada del edificio y tomando de origen la posición inicial del profesor ( $x_0 = 0 \text{ m}$ ) se tiene:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a}{2}t^2 \quad (\text{como la velocidad es constante } a = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$$

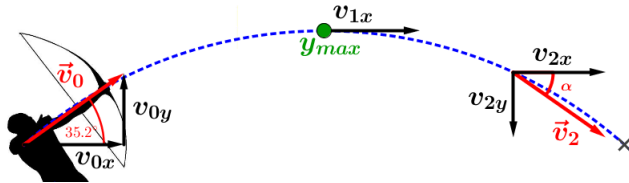
$$x = v_{0x}t$$

$$x = 1.2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3 \text{ s}$$

$$x = 3.6 \text{ m}$$

Por ende, el profesor está 3.6 m de la entrada del edificio cuando lo impacta el huevo.

23. Un arquero dispara una flecha desde una altura de 1.14 m sobre el suelo con una velocidad inicial de 47.5 m/s y un ángulo inicial de  $35.2^\circ$  sobre la horizontal. ¿En qué tiempo después de soltar la flecha del arco estará la flecha volando exactamente horizontal? El siguiente diagrama puede servir para una mejor comprensión del ejercicio:



En la altura máxima, la flecha va horizontal solamente, por lo que se tiene:

$$v_{1y} = v_{0y} - gt$$

Es sabido que en la altura máxima ( $y_{max}$ )  $v_{1y} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Por lo que:

$$0 \frac{\text{m}}{\text{s}} = v_{0y} - gt$$

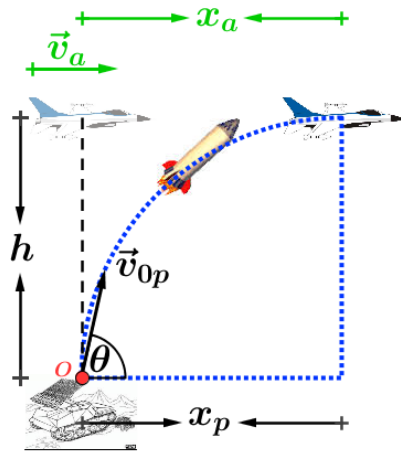
$$t = \frac{-v_{0y}}{-g}$$

$$t = \frac{-47.5 \text{ m/s} \sin(35.2^\circ)}{-9.8 \text{ m/s}^2}$$

$$t = 2.79 \text{ s}$$

25. Un avión está volando horizontalmente a una altura  $h$ , con una velocidad  $v_a$ . En el instante que el avión pasa por encima de una batería antiaérea, el cañón dispara al avión. Calcule la velocidad mínima  $v_{0p}$  y el ángulo  $\theta$  en términos de  $h$ ,  $v_a$  y  $g$ ; a que debe dispararse el proyectil para que el choque se produzca en la altura máxima del proyectil.

El siguiente diagrama pueden ayudar a la mejor comprensión del ejercicio:



Se tiene que con la expresión:

$$y_p = y_{0p} + v_{0py}t - \frac{1}{2}gt^2$$

De la expresión anterior se puede despejar  $v_{0p}$ , tomando como referencia en punto del lanza misiles donde sale el proyectil (notese que se desprecia la altura del mismo), es decir  $y_{0p} = 0$  m y  $h = y_p$ .

Entonces:

$$h = v_{0p} \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$h + \frac{1}{2}gt^2 = v_{0p} \sin \theta \cdot t$$

$$\frac{h + \frac{1}{2}gt^2}{\sin \theta \cdot t} = v_{0p} \quad (*)$$

También es sabido que el proyectil tiene una altura máxima, la misma a la que esta el avión y en ese punto al momento del impacto se tiene:

$$v_{py} = 0 \text{ m/s}$$

Y luego en base a lo anterior:

$$v_{py} = v_{0py} - gt$$

$$\frac{-v_{0py}}{-g} = t$$

$$\frac{v_{0py}}{g} = t$$

$$\frac{v_{0p} \sin \theta}{g} = t$$

Sustituyendo  $t$  en  $(\star)$ :

$$\frac{h + \frac{1}{2}g \left( \frac{v_{0p} \sin \theta}{g} \right)^2}{\sin \theta \cdot \left( \frac{v_{0p} \sin \theta}{g} \right)} = v_{0p}$$

$$\frac{h + \frac{1}{2}g \left( \frac{v_{0p}^2 \sin^2 \theta}{g^2} \right)}{\sin \theta \cdot \left( \frac{v_{0p} \sin \theta}{g} \right)} = v_{0p}$$

$$\frac{h + \frac{1}{2}g \left( \frac{v_{0p}^2 \sin^2 \theta}{g^2} \right)}{\sin \theta \cdot \left( \frac{v_{0p} \sin \theta}{g} \right)} = v_{0p}$$

$$\frac{h + \frac{1}{2}g \left( \frac{v_{0p}^2 \sin^2 \theta}{g^2} \right)}{\sin \theta \cdot \left( \frac{v_{0p} \sin \theta}{g} \right)} = v_{0p}$$

$$\frac{h + \frac{1}{2}g \left( \frac{v_{0p}^2 \sin^2 \theta}{g^2} \right)}{\sin \theta \cdot \left( \frac{v_{0p} \sin \theta}{g} \right)} = v_{0p}$$

$$\frac{h + \frac{1}{2}g \left( \frac{v_{0p}^2 \sin^2 \theta}{g^2} \right)}{\sin \theta \cdot \left( \frac{v_{0p} \sin \theta}{g} \right)} = v_{0p}$$

$$\frac{h + \frac{1}{2}g \left( \frac{v_{0p}^2 \sin^2 \theta}{g^2} \right)}{\sin \theta \cdot \left( \frac{v_{0p} \sin \theta}{g} \right)} = v_{0p}$$

$$\frac{h + \frac{1}{2}g \left( \frac{v_{0p}^2 \sin^2 \theta}{g^2} \right)}{\sin \theta \cdot \left( \frac{v_{0p} \sin \theta}{g} \right)} = v_{0p}$$

$$\frac{h + \frac{1}{2}g \left( \frac{v_{0p}^2 \sin^2 \theta}{g^2} \right)}{\sin \theta \cdot \left( \frac{v_{0p} \sin \theta}{g} \right)} = v_{0p}$$

$$\frac{h + \frac{1}{2}g \left( \frac{v_{0p}^2 \sin^2 \theta}{g^2} \right)}{\sin \theta \cdot \left( \frac{v_{0p} \sin \theta}{g} \right)} = v_{0p}$$

$$\frac{h + \frac{1}{2}g \left( \frac{v_{0p}^2 \sin^2 \theta}{g^2} \right)}{\sin \theta \cdot \left( \frac{v_{0p} \sin \theta}{g} \right)} = v_{0p}$$

$$\frac{h + \frac{1}{2}g \left( \frac{v_{0p}^2 \sin^2 \theta}{g^2} \right)}{\sin \theta \cdot \left( \frac{v_{0p} \sin \theta}{g} \right)} = v_{0p}$$

$$\frac{h + \frac{1}{2}g \left( \frac{v_{0p}^2 \sin^2 \theta}{g^2} \right)}{\sin \theta \cdot \left( \frac{v_{0p} \sin \theta}{g} \right)} = v_{0p}$$

$$\frac{h + \frac{1}{2}g \left( \frac{v_{0p}^2 \sin^2 \theta}{g^2} \right)}{\sin \theta \cdot \left( \frac{v_{0p} \sin \theta}{g} \right)} = v_{0p}$$

$$\frac{h + \frac{1}{2}g \left( \frac{v_{0p}^2 \sin^2 \theta}{g^2} \right)}{\sin \theta \cdot \left( \frac{v_{0p} \sin \theta}{g} \right)} = v_{0p}$$

$$\frac{h + \frac{1}{2}g \left( \frac{v_{0p}^2 \sin^2 \theta}{g^2} \right)}{\sin \theta \cdot \left( \frac{v_{0p} \sin \theta}{g} \right)} = v_{0p}$$

Ahora es claro que  $x_a = x_p$ , es decir el avión y proyectil están en la misma posición, para que se de el impacto y que:

$v_a t = v_{px} t$  (esto para que se pueda dar el impacto entre el avión y el proyectil, deben durar lo mismo)

$v_a t = v_{0p} \cos \theta \cdot t$  (recuerde que  $v_{px} = v_{0px}$ )

$v_a = v_{0p} \cos \theta$

$\frac{v_a}{v_{0p}} = \cos \theta$   $(*)$

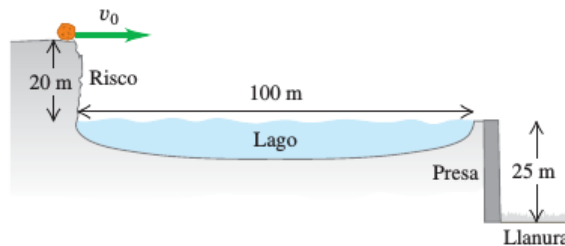
Y (★★) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{hg}{1 - \cos^2 \theta} &= \frac{1}{2}v_{0p}^2 \\ \frac{hg}{1 - \left(\frac{v_a}{v_{0p}}\right)^2} &= \frac{1}{2}v_{0p}^2 \\ \frac{hg}{1 - \frac{v_a^2}{v_{0p}^2}} &= \frac{1}{2}v_{0p}^2 \\ \frac{hg}{\frac{v_{0p}^2 - v_a^2}{v_{0p}^2}} &= \frac{1}{2}v_{0p}^2 \\ \frac{hg v_{0p}^2}{v_{0p}^2 - v_a^2} &= \frac{1}{2}v_{0p}^2 \\ 2hg &= v_{0p}^2 - v_a^2 \\ \sqrt{2hg + v_a^2} &= v_{0p}\end{aligned}$$

Finalmente para obtener la dirección es claro que con (\*) se tiene:

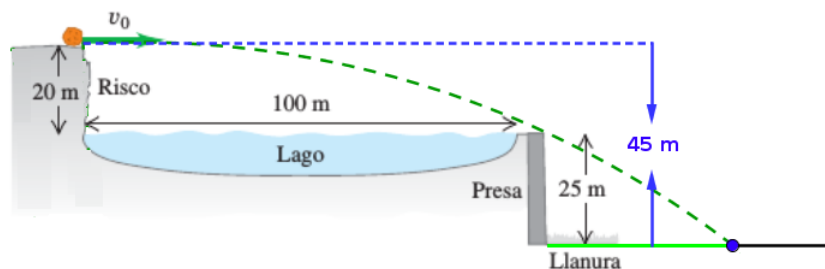
$$\begin{aligned}\left(\frac{v_a}{v_{0p}}\right) &= \cos \theta \\ \cos^{-1}\left(\frac{v_a}{v_{0p}}\right) &= \theta \\ \cos^{-1}\left(\frac{v_a}{\sqrt{2hg + v_a^2}}\right) &= \theta\end{aligned}$$

27. Un peñasco de 76.0 kg está rodando horizontalmente hacia el borde de un acantilado que está 20 m arriba de la superficie de un lago, como se indica en la figura. La parte superior de la cara vertical de una presa está a 100 m del pie del acantilado, al nivel de la superficie del lago. Hay una llanura 25 m debajo de la parte superior de la presa.



a) ¿Qué rapidez mínima debe tener la roca al perder contacto con el acantilado para llegar hasta la llanura sin golpear la presa?

El siguiente diagrama puede ayudar a la comprensión del ejercicio:



En el tiempo en que baja los 20 m debe avanzar 100 m horizontalmente, tomando como referencia el borde del acantilado se tiene:

$$x_0 = 0 \text{ m} , y_0 = 0 \text{ m} , x_{\text{presa}} = x = 100 \text{ m} , y = -20 \text{ m}$$

$$v_0 = v_{0x} = v_x , a_x = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} , v_{0y} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} , a_y = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Luego es claro que la rapidez mínima esta dada por:

$$x = v_{0x}t$$

$$xt^{-1} = v_{0x} \quad (*)$$

No se tiene el tiempo  $t$  que dura en bajar la roca y avanzar esos 100 m, pero con la siguiente ecuación se determina:

$$y_f = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

$$y_f = -\frac{gt^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{-2y_f}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{-2(-20 \text{ m})}{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

$$t = 2,02 \text{ s}$$

Sustituyendo  $t$  en (\*)

$$xt^{-1} = v_{0x}$$

$$100 \text{ m} (2,02 \text{ s})^{-1} = v_{0x}$$

$$49,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = v_{0x}$$

b) ¿A qué distancia del pie de la presa caerá la roca en la llanura?

Manteniendo la referencia que en a) se tiene ahora que:  $y_f = -45 \text{ m}$ , de la misma manera que en a) se obtiene el tiempo en que baja esos 45 m:

$$t = \sqrt{\frac{-2y_f}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{-2(-45 \text{ m})}{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

$$t = 3,03 \text{ s}$$

Luego:

$$x = v_{0x}t = \left(49,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (3,03 \text{ s}) = 149,98 \text{ m}$$

$$x = \left(49,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (3,03 \text{ s}) \text{ (Recuerde que } v_{0x} = v_x \text{ y que es constante en todo el movimiento)}$$

$$x = 149,98 \text{ m (esta distancia incluye los 100 m de longitud de la presa)}$$

Luego la distancia que hay entre la base de la presa y donde cae la roca en la llanura esta dada por:

$$x_{\text{llanura}} = x - x_{\text{presa}} = 149,98 - 100 = 49,98 \text{ m}$$

$$x_{\text{llanura}} = (149,98 - 100) \text{ m} = 49,98 \text{ m}$$

$$x_{\text{llanura}} = 49,98 \text{ m}$$

29. Una botella se deja caer desde el reposo en la posición  $x = 20 \text{ m}, y = 30 \text{ m}$ . Al mismo tiempo se lanza desde el origen una piedra con una velocidad de  $15 \text{ m/s}$ . Determine: a) El ángulo con el

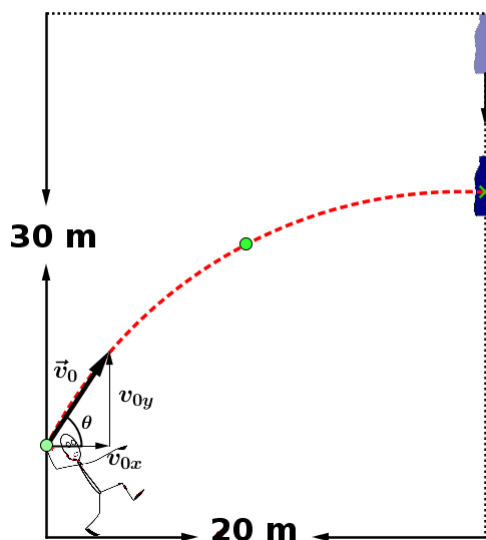
que se tiene que lanzar la piedra para que rompa la botella.

b) La altura a la que ha ocurrido el choque.

Solución:

a) Se debe obtener  $\theta$ .

El siguiente diagrama puede facilitar la comprensión del ejercicio:



Para que la roca rompa la botella ambas deben tener la misma posición en ese instante, tomando de referencia al nivel del suelo ( $y_{0p} = 0 \text{ m}$  y  $y_{0b} = 30 \text{ m}$ ).

Entonces se tiene que:

$$t_p = t_b = t$$

$$y_p = y_b$$

$$y_{0p} + v_{0yp}t - \frac{1}{2}gt^2 = y_{0b} + v_{0yb}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_{0yp}t = y_{0b}$$

$$t = \frac{y_{0b}}{v_{0yp}}$$

$$t = \frac{y_{0b}}{v_0 \sin \theta} \quad (\star)$$

También el tiempo se obtiene con:

$$x_p = v_{xp}t$$

$$\frac{x_p}{v_{xp}} = t$$

$$\frac{v_{xp}x_p}{v_0 \cos \theta} = t \quad (\star\star) \quad (v_x = v_{0x})$$

Se iguala  $(\star)$  y  $(\star\star)$  para obtener  $\theta$ :

$$\frac{y_{0b}}{v_0 \sin \theta} = \frac{x_p}{v_0 \cos \theta}$$

$$\frac{y_{0b}}{x_p} = \tan \theta$$

$$\tan^{-1} \left( \frac{y_{0b}}{x_p} \right) = \theta$$

$$\tan^{-1} \left( \frac{30 \text{ m}}{20 \text{ m}} \right) = \theta$$

$$56,3^\circ = \theta$$

b) Como  $y_p = y_b = y$  entonces:

$$v_{0yp}t - \frac{1}{2}gt^2 = y \quad (\triangleright)$$

Y de  $(\star)$ :

$$t = \frac{30 \text{ m}}{15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sin(56,3^\circ)}$$

$$t = 2,4 \text{ s}$$

Finalmente sustituyendo en ( $\triangleright$ ):

$$15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sin(56,3^\circ) \cdot 2,4 \text{ s} - 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (2,4 \text{ s})^2 = y$$

$$1,7 \text{ m} = y$$

Con la ecuación de posición de la botella se obtendrá un valor similar:

$$y = y_{0b} + v_{0yb}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = 30 \text{ m} - 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (2,4 \text{ s})^2$$

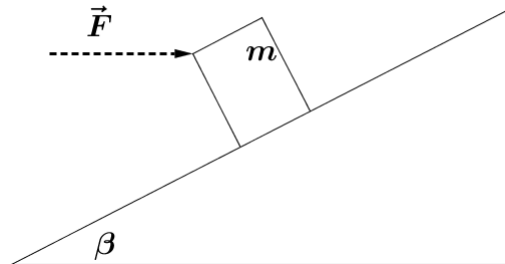
$$y = 1,7 \text{ m}$$

## Dinámica traslacional

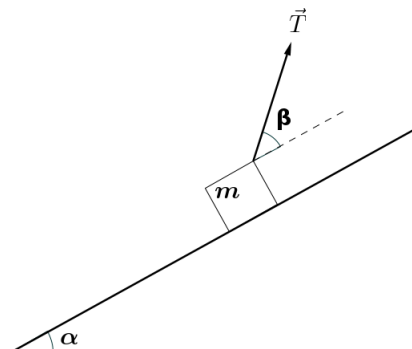
*Enunciados:*

1. Una fuerza horizontal de 50 N actúa sobre un bloque de masa  $m$  de 5 kg en un plano inclinado con ángulo  $\beta = 40^\circ$ . El coeficiente de fricción cinética entre ambos es 0.33.

- Dibuje el diagrama de fuerzas actuando sobre el bloque.
- ¿Qué aceleración tiene el bloque si sube por el plano inclinado?
- Con la fuerza horizontal todavía en acción, ¿a qué distancia hacia arriba del plano llegará el bloque si tiene una rapidez inicial ascendente de 5 m/s.



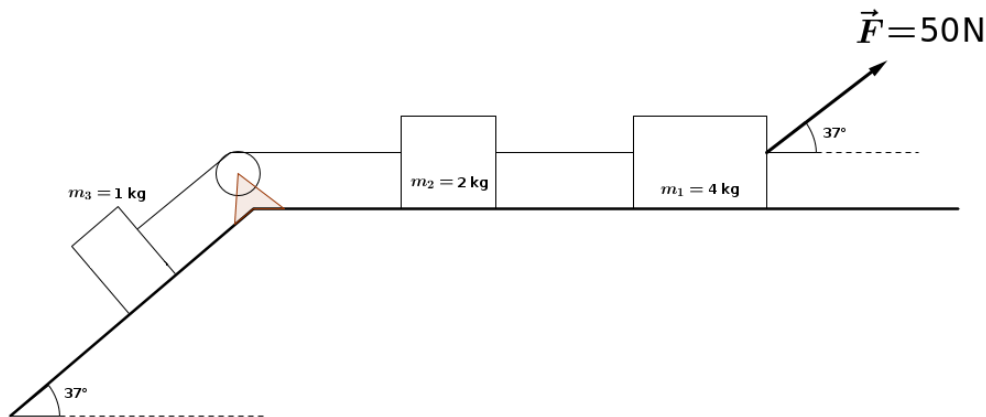
2. Sobre un plano inclinado, que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal (ver figura), un bloque de masa  $m$  es arrastrado por una cuerda hacia arriba a una velocidad constante. El coeficiente de rozamiento  $\mu_k$  entre el bloque y el plano inclinado es de  $\mu_k$ .



Demuestre que la masa  $m$  de la cuerda, se presenta por la siguiente expresión:

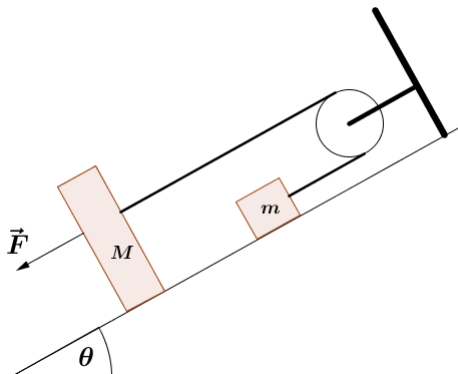
$$m(T, \mu_k, \alpha, \beta) = \frac{T(\cos \beta + \mu_k \sin \beta)}{g(\mu_k \cos \alpha + \sin \alpha)}$$

3. Para el sistema mostrado en la figura. Los coeficientes de rozamiento cinético entre los bloques y las superficies tienen un valor de 0,2. Las cuerdas son inextensibles y sin masa, al igual que las poleas. Los valores de las masas y la fuerza  $\vec{F}$  están incluidos en la figura.



- Dibuje los diagramas de fuerzas de cuerpo libre para cada masa.
- La aceleración de cada bloque.

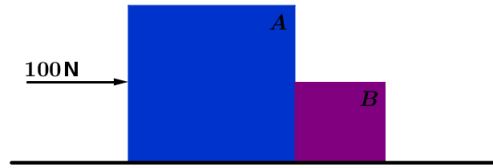
4. Se tiene un sistema de dos masas  $M = 0,5 \text{ kg}$  y  $m = 0,3 \text{ kg}$ , apoyadas sobre un plano inclinado áspero, de  $30^\circ$  con la horizontal, unidas por una cuerda liviana inextensible que pasa por una polea ligera, fija en el extremo superior del plano, tal como lo muestra la figura. Sobre la masa  $M$  actúa una fuerza constante  $\vec{F}$ , paralela al plano inclinado (ver figura adjunta).



Determinar:

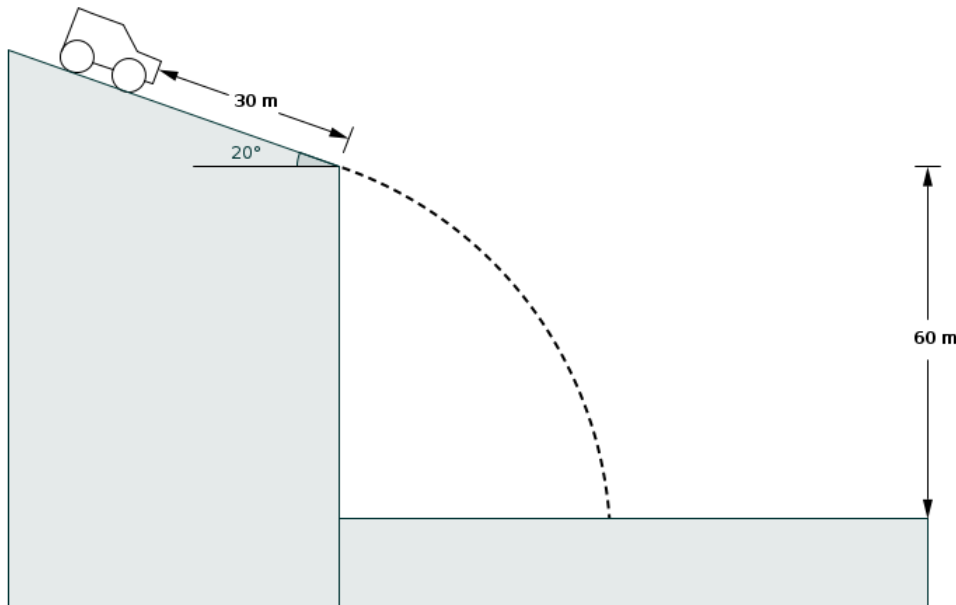
- Los diagramas de cuerpo libre con todas las fuerzas involucradas para cada bloque.
- El coeficiente de rozamiento cinético, si se sabe que cuando la magnitud de  $\vec{F}$  es cero, el sistema se mueve con una rapidez constante  $v_0$ .
- La magnitud de  $\vec{F}$  y la tensión en la cuerda, si se sabe que el cuerpo  $M$  se desplaza 1 m hacia abajo en un tiempo de 2 s a partir del reposo, con aceleración constante.

5. Las cajas  $A$  y  $B$  se encuentran en contacto sobre una superficie horizontal sin fricción como se muestra en la figura. La caja  $A$  tiene una masa de  $20.0\text{ kg}$  y la caja  $B$  tiene una masa de  $5.0\text{ kg}$ . Sobre la caja  $A$  se ejerce una fuerza horizontal de  $100\text{ N}$ . ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que la caja  $A$  ejerce sobre la caja  $B$ ?

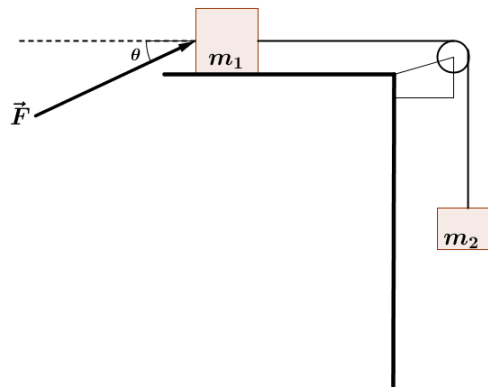


6. Un automóvil pequeño ( $m_A = 380\text{ kg}$ ) empuja a un camión grande ( $m_C = 900\text{ kg}$ ) hacia el este sobre un camino horizontal. El automóvil ejerce una fuerza horizontal de  $1200\text{ N}$  sobre el camión. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que el camión ejerce sobre el automóvil?

7. El auto de su amigo está estacionado en un acantilado que da hacia el mar, sobre una cuesta que forma un ángulo de  $20.0^\circ$  con la horizontal. Los frenos fallan y el auto desliza cuesta abajo desde el reposo una distancia de  $30.0\text{ m}$  hacia el borde del acantilado, cuya altura sobre el mar es de  $60.0\text{ m}$ , y desgraciadamente continúa más allá del borde y cae en el mar. Encuentre la posición del auto medida desde la base del acantilado cuando éste llega al mar.



8. El sistema que se muestra en la figura, está formado por dos masas  $m_1$  y  $m_2$ . El coeficiente de fricción cinético entre el bloque  $m_1$  y la mesa es de  $\mu_k$ . El bloque  $m_1$  es empujado con una fuerza  $\vec{F}$  y con una dirección de  $\theta$ , con respecto a la horizontal.



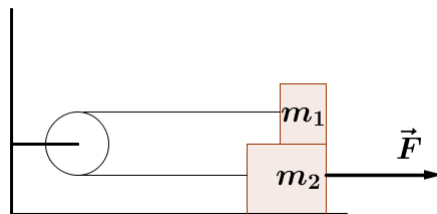
Si la cuerda que une los bloques es ideal y con masa despreciable, y la polea no tiene masa ni experimenta fuerza de fricción con el eje ni con la cuerda. Determine:

a) Que la aceleración de la cuerda y la tensión del sistema están dadas por:

$$\begin{cases} a = g - \frac{T}{m_2} \\ T = \frac{m_1 g - F \cos \theta + \mu_k m_1 g + \mu_k F \sin \theta}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \end{cases}$$

b) Los valores de la aceleración y la tensión, sabiendo que  $F = 10 \text{ N}$ ,  $m_1 = 5 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 2 \text{ kg}$ ,  $\mu_k = 0,14$  y  $\theta = 25^\circ$ .

9. Un bloque de masa  $m_1 = 2 \text{ kg}$  se coloca sobre otro bloque de masa  $m_2 = 4 \text{ kg}$ , como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción cinética para todas las superficies es de  $\mu_k = 0,2$ .

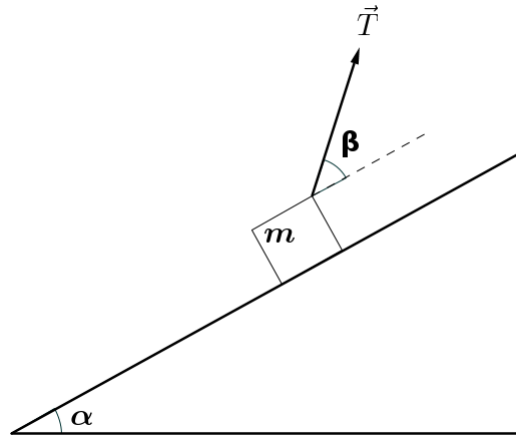


Considere la polea y la cuerda de masa despreciable. Para que valor de fuerza horizontal  $\vec{F}$ , los bloques,

a) Se moverán a velocidad constante.

b) Se acelerarán a  $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

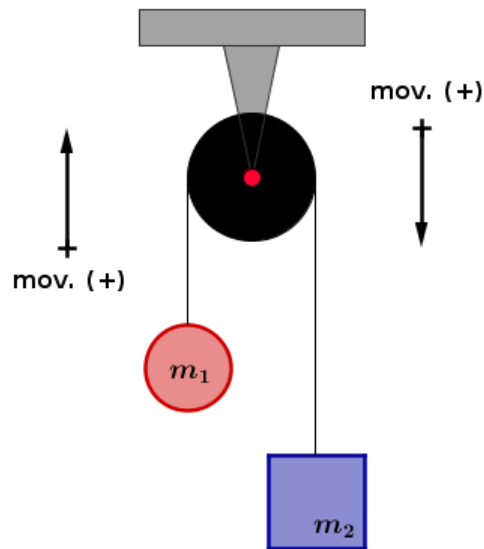
10. Sobre un plano inclinado, que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal (ver figura), un bloque de masa  $m$  es arrastrado por una cuerda hacia arriba a una velocidad constante. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano inclinado es  $\mu_k$ .



Demuestre que el coeficiente de rozamiento  $\mu_k$  se presenta por la siguiente expresión:

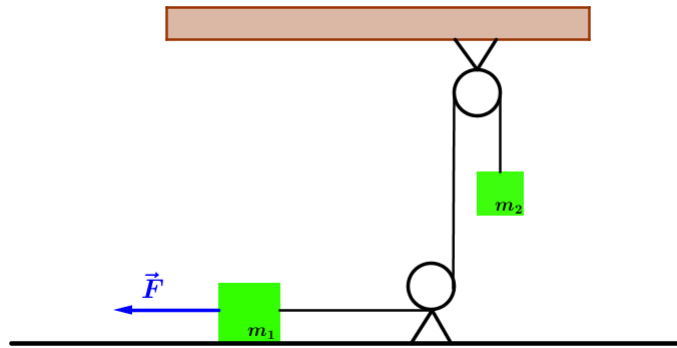
$$\mu_k(T, m, g, \alpha, \beta) = \frac{mg \sin \alpha - T \cos \beta}{T \sin \beta - mg \cos \alpha}$$

11. Cuando dos objetos de masas distintas cuelgan verticalmente sobre una polea sin fricción de masa despreciable, como en la figura, el dispositivo se llama máquina de Atwood. Se usa a veces en el laboratorio para calcular el valor de  $g$ . Determine la magnitud de la aceleración de dos objetos y la tensión en la cuerda sin peso en términos de  $g$ ,  $a$ ,  $m_1$  y  $m_2$ .

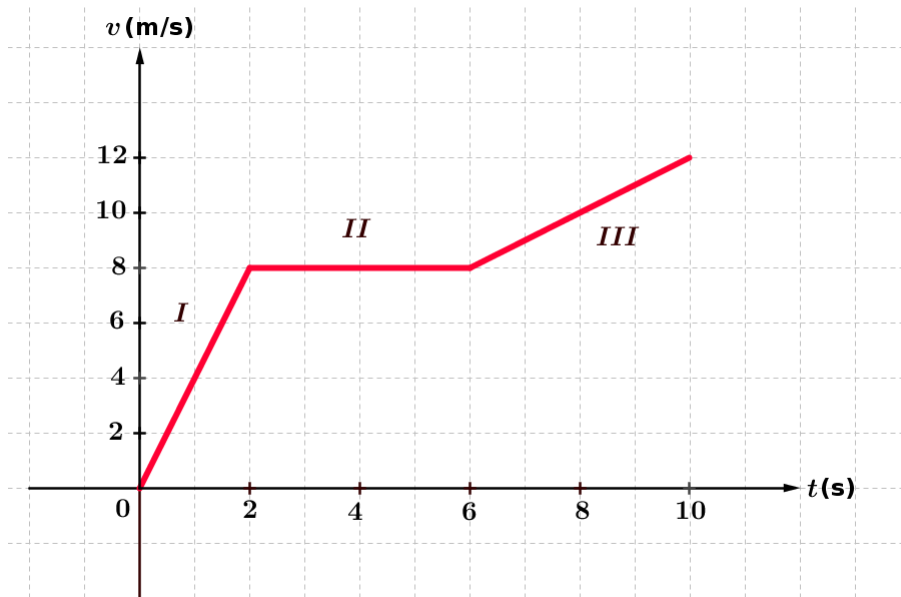


12. En base a la figura adjunta (desprecie la fricción), demuestre la aceleración de los bloques y la tensión están dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} a = \frac{F - m_2 g}{m_2 + m_1} \\ T = \frac{m_2 F + m_2 m_1 g}{m_1 + m_2} \end{cases}$$



13. Un gato de 2.75 kg se mueve en línea recta sobre el eje  $x$ . (ver gráfica).



Determine:

- La fuerza neta máxima sobre este gato. ¿En qué instante ocurre?
- ¿En que intervalo de tiempo la fuerza neta sobre el gato es cero?
- ¿Cuál es la fuerza neta cuando han transcurrido 8.5 s?

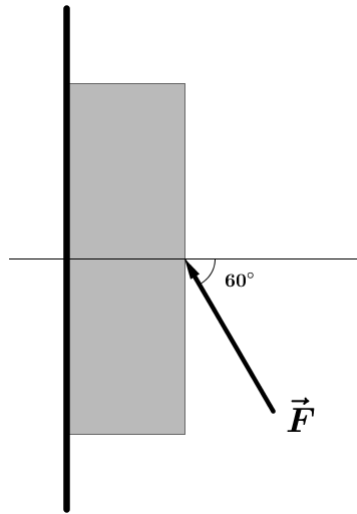
14. Un pequeño cohete de 8.00 kg que combustible que ejerce sobre él una fuerza hacia arriba, que varía con el tiempo, mientras asciende sobre la plataforma de lanzamiento. Esta fuerza satisface la ecuación  $F(t) = A + Bt^2$ . Las mediciones demuestran que en  $t = 0$  s la fuerza es de 100.0 N y al final de los primeros 2.00 s, es de 150.0 N.

- a) Determine los valores y unidades según el SI de  $A$  y  $B$ .
- b) Obtenga la fuerza neta sobre este cohete y su aceleración en el momento posterior a la ignición y a los 3.00 s después del inicio de la ignición.
- c) ¿Cuál será la aceleración del cohete a los 3.00 s después de la ignición, suponiendo que el cohete está en un punto del espacio exterior lejos de cualquier campo gravitacional?

15. Un automóvil se desplaza de manera acelerada en una carretera de pavimento en línea recta, determine:

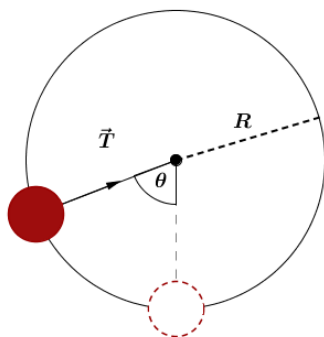
- a) La distancia mínima a la que puede detenerse si viaja a 24.6 m/s y ha comenzado a frenar; sabiendo que el coeficiente de fricción cinética entre las llantas y el pavimento seco es de 0.80.
- b) La rapidez a la que debería ir el automóvil si el pavimento está húmedo, para que se pueda detener en la misma distancia que se obtuvo en a); sabiendo que el pavimento húmedo tiene un coeficiente de fricción cinético de 0.25.

16. Un objeto, cuya masa es de 10 kg, se desliza hacia arriba por un muro vertical resbaladizo. Una fuerza  $\vec{F}$  de 60 N actúa sobre el objeto con un ángulo de  $60^\circ$ , como se muestra en la figura.



- a) Determine la fuerza normal ejercida sobre el objeto por el muro.
- b) Determine la aceleración del objeto.

17. Una bolita de masa  $m = 0,5 \text{ kg}$  que está sujeta a una cuerda que gira describiendo un círculo de radio  $R = 150 \text{ cm}$ .

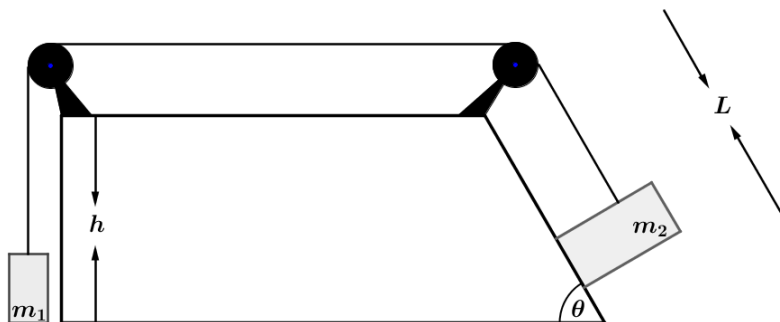


Calcule en los siguientes casos:

- La tensión de la cuerda, si la trayectoria es horizontal y sobre una superficie sin fricción, considera la rapidez tangencial  $v = 10 \text{ km/h}$  como constante.
- Considere ahora que la trayectoria es vertical. En el momento en que la cuerda forma un ángulo de  $\theta = 20^\circ$  con la vertical, la rapidez tangencial es  $v = 1,5 \text{ m/s}$ . Encuentre la aceleración centrípeta en ese momento.
- En el mismo caso que en el inciso b), calcule la tensión de la cuerda.
- En el mismo caso que en el inciso b), calcule la aceleración tangencial.
- En el mismo caso que en el inciso b), calcule la aceleración total (magnitud y dirección).

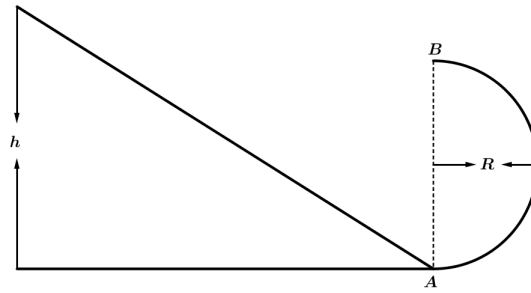
18. Un resorte tiene una longitud de  $15,4 \text{ cm}$  y cuelga de modo vertical de un punto, se le coloca una masa de  $0,2 \text{ kg}$  y se estira una longitud de  $28,6 \text{ cm}$ ; determine el valor de la constante del resorte.

19. Existen varias teorías sobre la construcción de las pirámides del Antiguo Egipto. Una de ellas sugiere que para la construcción de pirámides altas como la de Keops (de aproximadamente  $147 \text{ m}$  de altura), se usaron sistemas de poleas y contrapesos desmontables que se deslizaban sobre rampas interiores. Suponga que se quiere elevar un bloque de granito, de masa  $M = 2500 \text{ kg}$ , desde el suelo hasta una plataforma de altura  $h = 30 \text{ m}$ . Si se usa un contrapeso de masa “ $m$ ” que se desliza a lo largo de una rampa de largo  $L = 34,64 \text{ m}$ , y el coeficiente de fricción estática entre el contrapeso y la rampa es de  $0,3$ .



- Calcule la masa mínima “ $m$ ” del contrapeso necesaria para que el bloque se comience a mover.
- Una vez iniciado el movimiento, calcule la aceleración del sistema si el coeficiente de fricción cinética es de  $0,2$ . Considere que las poleas son de masa y fricción despreciables.

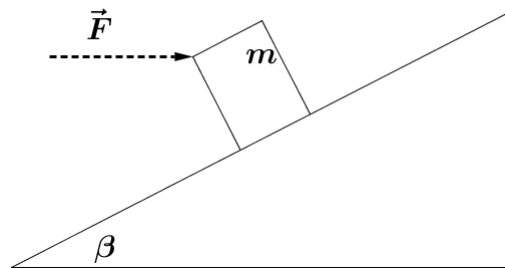
20. Por una pista lisa se deja resbalar un cuerpo. Si la pista termina en una pista circular vertical de radio  $R$ . Determine:



- La rapidez mínima en el punto más bajo de la trayectoria para que no dependa de la reacción de la pista en el punto más alto.
- El valor de  $h$  tal que el cuerpo no dependa de la reacción de la pista en el punto más alto.

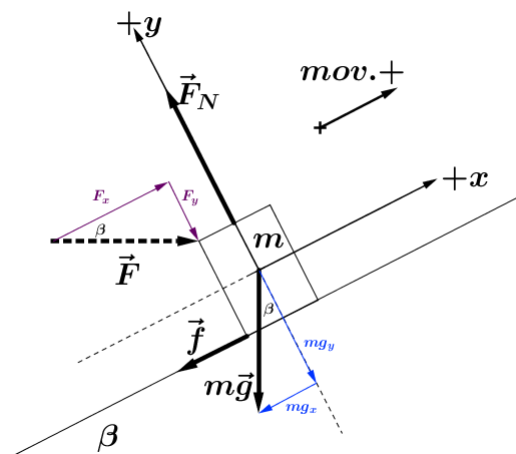
*Algunas soluciones:*

1. Una fuerza horizontal de 50 N actúa sobre un bloque de masa  $m$  de 5 kg en un plano inclinado con ángulo  $\beta = 40^\circ$ . El coeficiente de fricción cinética entre ambos es 0.33.



- Dibuje el diagrama de fuerzas actuando sobre el bloque.

A continuación un diagrama de cuerpo libre de la situación planteada:



b) ¿Qué aceleración tiene el bloque si sube por el plano inclinado?

$$\begin{aligned}\sum F_x &= ma_x \\ F_x - f - mg_x &= ma_x \\ F \cos \beta - \mu_k F_N - mg \sin \beta &= ma_x \quad (\times)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ F_N - mg_y - F_y &= 0 \\ F_N - mg_y - F_y &= 0 \\ F_N &= mg_y + F_y \\ F_N &= mg \cos \beta + F \sin \beta\end{aligned}$$

Sustituyendo  $F_N$  en  $(\times)$  se tiene:

$$\begin{aligned}F \cos \beta - \mu_k (mg \cos \beta + F \sin \beta) - mg \sin \beta &= ma_x \\ F \cos \beta - \mu_k mg \cos \beta - \mu_k F \sin \beta - mg \sin \beta &= ma_x \\ \frac{F (\cos \beta - \mu_k \sin \beta) - mg (\mu_k \cos \beta + \sin \beta)}{m} &= a_x \\ \frac{50 \text{ N} (\cos 40^\circ - 0.33 \sin 40^\circ) - 5 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (0.33 \cos 40^\circ + \sin 40^\circ)}{5 \text{ kg}} &= a_x\end{aligned}$$

$$-3.23 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = a_x \quad (\text{Si } a_x < 0 \text{ lo que indica es que el bloque en algún momento se detendrá})$$

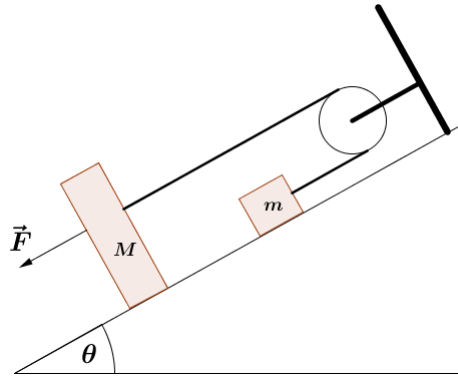
c) Con la fuerza horizontal todavía en acción, ¿a qué distancia hacia arriba del plano llegará el bloque si tiene una rapidez inicial ascendente de 5 m/s.

$$v_{0x} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, v_x = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}, a_x = -3.23 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ y } x_0 = 0 \text{ m}$$

Entonces con:

$$\begin{aligned}v_x^2 &= v_{0x}^2 + 2a(x - x_o) \\ 0 &= v_{0x}^2 + 2ax \\ \frac{-v_{0x}^2}{2a} &= x \\ \frac{-\left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\left(-3.23 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} &= x \\ 3.86 \text{ m} &= x\end{aligned}$$

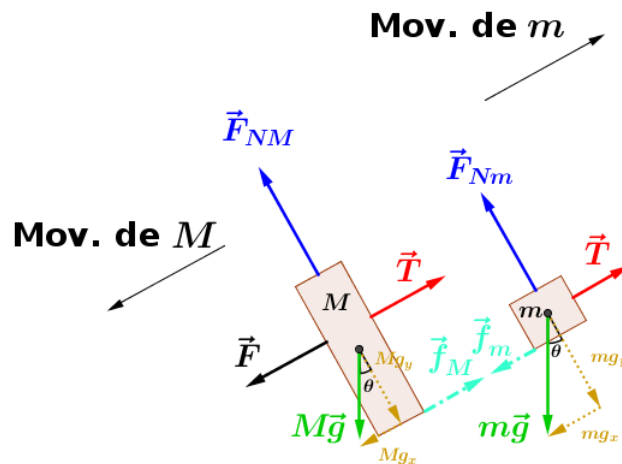
4. Se tiene un sistema de dos masas  $M = 0,5 \text{ kg}$  y  $m = 0,3 \text{ kg}$ , apoyadas sobre un plano inclinado áspero, de  $30^\circ$  con la horizontal, unidas por una cuerda liviana inextensible que pasa por una polea ligera, fija en el extremo superior del plano, tal como lo muestra la figura. Sobre la masa  $M$  actúa una fuerza constante  $\vec{F}$ , paralela al plano inclinado (ver figura adjunta).



Determinar:

a) Los diagramas de cuerpo libre con todas las fuerzas involucradas para cada bloque.

Realizando los diagramas de fuerzas se tiene para  $M$  y  $m$ :



b) El coeficiente de rozamiento cinético, si se sabe que cuando la magnitud de  $\vec{F}$  es cero, el sistema se mueve con una rapidez constante  $v_o$ .

Luego desarrollando las ecuaciones respectivas por medio de la segunda ley de Newton, obtiene:

Para  $M$ :

$$\sum F_x = 0 \text{ N } (a_x = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ ya que } v_o \text{ es constante})$$

$$F + Mg_x - f_M - T = 0 \text{ N } (\oplus)$$

$$Mg_x - f_M - T = 0 \text{ N}$$

$$Mg \sin \theta - f_M - T = 0 \text{ N}$$

$$Mg \sin \theta - \mu_k F_{NM} - T = 0 \text{ N}$$

$$Mg \sin \theta - T = \mu_k F_{NM} (\star)$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \text{ N } (a_y = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ ya que no hay movimiento en el eje vertical}) \\ F_{NM} - Mg_y &= 0 \text{ N} \\ F_{NM} &= Mg_y \\ F_{NM} &= Mg \cos \theta\end{aligned}$$

Sustituyendo  $N_M$  en  $(\star)$  se tiene:

$$Mg \sin \theta - T = \mu_k Mg \cos \theta \quad (\star\star)$$

Para  $m$ :

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \text{ N } (a_x = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ ya que } v_o \text{ es constante}) \\ T - f_m - mg_x &= 0 \text{ N } (\oplus) \\ T - \mu_k F_{Nm} - mg_x &= 0 \text{ N} \\ T - mg_x &= \mu_k F_{Nm} \quad (\otimes)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \text{ N } (a_y = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ ya que no hay movimiento en el eje vertical}) \\ F_{Nm} - mg_y &= 0 \text{ N} \\ F_{Nm} &= mg_y \\ F_{Nm} &= mg \cos \theta\end{aligned}$$

Sustituyendo  $F_{Nm}$  en  $(\otimes)$  se tiene:

$$\begin{aligned}T - mg_x &= \mu_k mg \cos \theta \\ T - mg \sin \theta &= \mu_k mg \cos \theta \quad (\otimes\otimes)\end{aligned}$$

Una forma de obtener  $\mu_k$  es sumando  $(\star\star)$  con  $(\otimes\otimes)$ :

$$\begin{aligned}Mg \sin \theta - T &= \mu_k Mg \cos \theta \\ +T - mg \sin \theta &= \mu_k mg \cos \theta \\ \hline Mg \sin \theta - mg \sin \theta &= \mu_k Mg \cos \theta + \mu_k mg \cos \theta \quad (\nabla)\end{aligned}$$

Despejando  $\mu_k$  de  $(\nabla)$ :

$$\begin{aligned}Mg \sin \theta - mg \sin \theta &= \mu_k g (M \cos \theta + m \cos \theta) \\ \frac{g (M \sin \theta - m \sin \theta)}{g (M \cos \theta + m \cos \theta)} &= \mu_k \\ \frac{\sin \theta (M - m)}{\cos \theta (M + m)} &= \mu_k \\ \tan \theta \left( \frac{M - m}{M + m} \right) &= \mu_k\end{aligned}$$

Sustituyendo por los valores respectivos:

$$\tan 30^\circ \left( \frac{0,5 \text{ kg} - 0,3 \text{ kg}}{0,5 \text{ kg} + 0,3 \text{ kg}} \right) = \mu_k$$

$$0,14 = \mu_k$$

c) La magnitud de  $\vec{F}$  y la tensión en la cuerda, si se sabe que el cuerpo  $M$  se desplaza 1 m hacia abajo en un tiempo de 2 s a partir del reposo, con aceleración constante.

Reescribiendo ( $\oplus$ ) como ya se tiene aceleración constante tenemos:

$$F + Mg_x - f_M - T = Ma_x$$

$$F + Mg \sin \theta - \mu_k Mg \cos \theta - T = Ma_x$$

$$F = Ma_x - Mg \sin \theta + \mu_k Mg \cos \theta + T \quad (\triangleright)$$

De donde  $a_x$  se obtiene con la siguiente ecuación:

$$x = x_o + v_o t + \frac{a_x t^2}{2}$$

De donde claramente  $x_o = 0 \text{ m}$  y  $v_o = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ :

$$x = \frac{a_x t^2}{2}$$

$$\frac{2x}{t^2} = a_x$$

$$\frac{2 \cdot 1 \text{ m}}{(2 \text{ s})^2} = a_x = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (\text{aceleración del sistema, es decir la aceleración de ambos bloques})$$

Y tensión la obtenemos de ( $\oplus$ ) y como ya se tiene aceleración constante tenemos:

$$T = ma_x + f_m + mg_x$$

$$T = ma_x + \mu_k mg \cos \theta + mg \sin \theta \quad (\dagger)$$

$$T = m [a_x + g (\mu_k \cos \theta + \sin \theta)]$$

$$T = 0,3 \text{ kg} \left[ 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (0,14 \cos 30^\circ + \sin 30^\circ) \right]$$

$$T = 1,97 \text{ N}$$

Finalmente la magnitud de  $F$  es obtenida sumando ( $\triangleright$ ) y ( $\dagger$ ):

$$F = Ma_x - Mg \sin \theta + \mu_k Mg \cos \theta + T$$

$$+T = ma_x + \mu_k mg \cos \theta + mg \sin \theta$$

$$F + T = Ma_x - Mg \sin \theta + \mu_k Mg \cos \theta + T + ma_x + \mu_k mg \cos \theta + mg \sin \theta$$

Luego:

$$F = Ma_x - Mg \sin \theta + \mu_k Mg \cos \theta + T + ma_x + \mu_k mg \cos \theta + mg \sin \theta - T$$

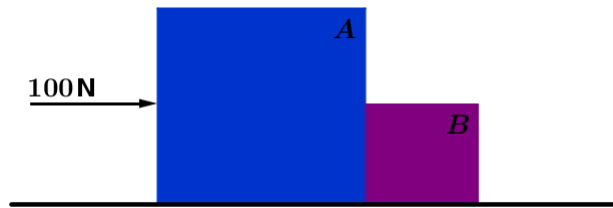
$$F = a_x (M + m) + \mu_k g \cos \theta (M + m) + g \sin \theta (m - M)$$

$$F = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (0,5 \text{ kg} + 0,3 \text{ kg}) + 0,14 \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cos 30^\circ (0,5 \text{ kg} + 0,3 \text{ kg}) + 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \sin 30^\circ (0,3 \text{ kg} - 0,5 \text{ kg})$$

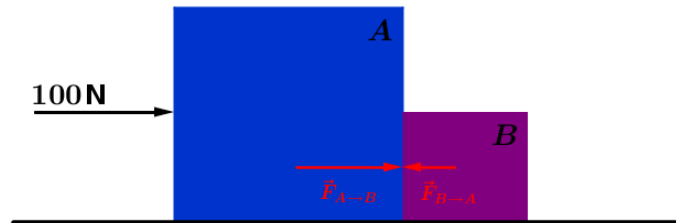
$$F = 0,4 \text{ N} + 0,95 \text{ N} - 0,98 \text{ N}$$

$$F = 0,37 \text{ N}$$

5. Las cajas  $A$  y  $B$  se encuentran en contacto sobre una superficie horizontal sin fricción como se muestra en la figura. La caja  $A$  tiene una masa de  $20.0\text{ kg}$  y la caja  $B$  tiene una masa de  $5.0\text{ kg}$ . Sobre la caja  $A$  se ejerce una fuerza horizontal de  $100\text{ N}$ . ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que la caja  $A$  ejerce sobre la caja  $B$ ?



El siguiente diagrama ilustra la interacción de las fuerzas:



Se aplica la segunda ley de Newton para determinar la aceleración del sistema con la fuerza horizontal dada y la masa de ambos bloques:

$$F = (m_A + m_B) a$$

$$F (m_A + m_B)^{-1} = a$$

$$100\text{ N} (25.0\text{ kg})^{-1} = a$$

$$4.00 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = a$$

Luego la fuerza que la caja  $A$  ejerce sobre la caja  $B$  esta dada por:

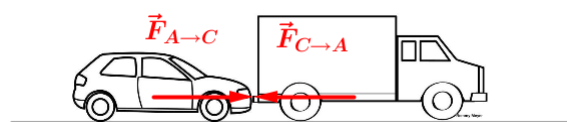
$$F_{A \rightarrow B} = m_B a$$

$$F_{A \rightarrow B} = 5.0\text{ kg} \cdot 4.00 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F_{A \rightarrow B} = 20.0\text{ N}$$

6. Un automóvil pequeño ( $m_A = 380\text{ kg}$ ) empuja a un camión grande ( $m_C = 900\text{ kg}$ ) hacia el este sobre un camino horizontal. El automóvil ejerce una fuerza horizontal de  $1200\text{ N}$  sobre el camión. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que el camión ejerce sobre el automóvil?

Como el camión es empujado por el automóvil pequeño, es claro que debido a la tercera ley de Newton este ejercerá la misma fuerza con la que es empujado, pero en dirección contraria, es decir  $1200\text{ N}$  al oeste.



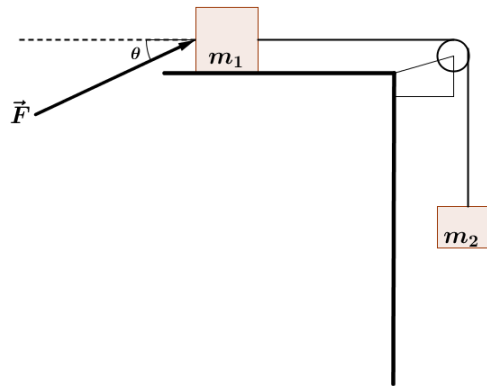
$$\vec{F}_{A \rightarrow C} = -\vec{F}_{C \rightarrow A}$$

Como  $\vec{F}_{A \rightarrow C} = 1200 \text{ N}$ , entonces:

$$1200 \text{ N} = -\vec{F}_{C \rightarrow A}$$

$$-1200 \text{ N} = \vec{F}_{C \rightarrow A}$$

8. El sistema que se muestra en la figura, está formado por dos masas  $m_1$  y  $m_2$ . El coeficiente de fricción cinético entre el bloque  $m_1$  y la mesa es de  $\mu_k$ . El bloque  $m_1$  es empujado con una fuerza  $\vec{F}$  y con una dirección de  $\theta$ , con respecto a la horizontal.

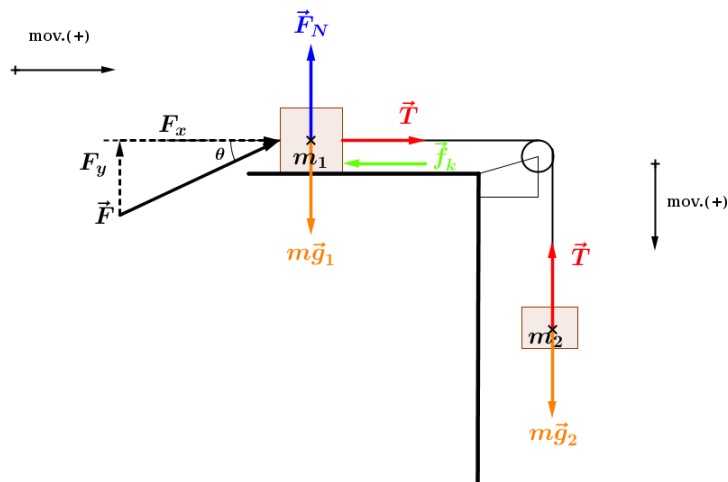


Si la cuerda que une los bloques es ideal y con masa despreciable, y la polea no tiene masa ni experimenta fuerza de fricción con el eje ni con la cuerda. Determine:

a) Que la aceleración de la cuerda y la tensión del sistema están dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = g - \frac{T}{m_2} \\ T = \frac{m_1 g - F \cos \theta + \mu_k m_1 g + \mu_k F \sin \theta}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \end{array} \right.$$

El siguiente diagrama ayudará a la mejor comprensión del ejercicio:



La aceleración del sistema se puede obtener analizando el bloque #2:

$$\sum F_x = 0 \text{ N}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= m_2 a \\ m_2 g - T &= m_2 a \\ \frac{m_2 g - T}{m_2} &= a \quad (\diamond) \\ g - \frac{T}{m_2} &= a \quad (\diamond)\end{aligned}$$

La tensión del sistema se obtiene analizando al bloque #1:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= m_1 a \\ F_x + T - f_k &= m_1 a \\ T &= m_1 a - F_x + f_k \\ T &= m_1 a - F \cos \theta + f_k \quad (\star) \\ T &= m_1 a - F \cos \theta + \mu_k F_N \quad (\star)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= F_N + F_y - m_1 g = 0 \text{ N} \\ F_N + F_y - m_1 g &= 0 \text{ N} \\ F_N &= m_1 g - F_y \\ F_N &= m_1 g - F \sin \theta \quad (\star\star)\end{aligned}$$

Sustituyendo  $(\star\star)$  en  $(\star)$ :

$$\begin{aligned}T &= m_1 a - F \cos \theta + \mu_k (m_1 g - F \sin \theta) \\ T &= m_1 a - F \cos \theta + \mu_k m_1 g + \mu_k F \sin \theta \quad (\star\star\star)\end{aligned}$$

Sustituyendo  $(\diamond)$  en  $(\star\star\star)$ :

$$\begin{aligned}T &= m_1 \left( g - \frac{T}{m_2} \right) - F \cos \theta + \mu_k m_1 g + \mu_k F \sin \theta \\ T &= m_1 g - \frac{m_1 T}{m_2} - F \cos \theta + \mu_k m_1 g + \mu_k F \sin \theta \\ T + \frac{m_1 T}{m_2} &= m_1 g - F \cos \theta + \mu_k m_1 g + \mu_k F \sin \theta \\ T \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right) &= m_1 g - F \cos \theta + \mu_k m_1 g + \mu_k F \sin \theta \\ T &= \frac{m_1 g - F \cos \theta + \mu_k m_1 g + \mu_k F \sin \theta}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \quad (\wedge)\end{aligned}$$

b) Los valores de la aceleración y la tensión, sabiendo que  $F = 10 \text{ N}$ ,  $m_1 = 5 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 2 \text{ kg}$ ,  $\mu_k = 0,14$  y  $\theta = 25^\circ$ .

Sustituyendo los valores dados en ( $\wedge$ ) se tiene que el valor de la tensión:

$$T = \frac{5 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 10 \text{ N} \cos(25^\circ) + 0,14 \cdot 5 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 0,14 \cdot 10 \text{ N} \sin(25^\circ)}{1 + \frac{5 \text{ kg}}{2 \text{ kg}}}$$

$$T = \frac{47,38 \text{ N}}{3,5}$$

$$T = 13,5 \text{ N}$$

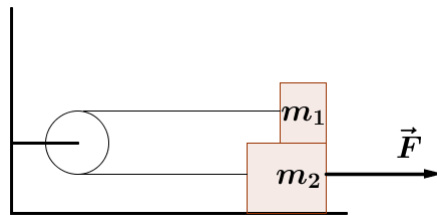
Sustituyendo el valor de  $T$  en ( $\diamond$ ):

$$a = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - \frac{13,5 \text{ N}}{2 \text{ kg}}$$

$$a = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 6,75 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a = 3,05 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

9. Un bloque de masa  $m_1 = 2 \text{ kg}$  se coloca sobre otro bloque de masa  $m_2 = 4 \text{ kg}$ , como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción cinética para todas las superficies es de  $\mu_k = 0,2$ .

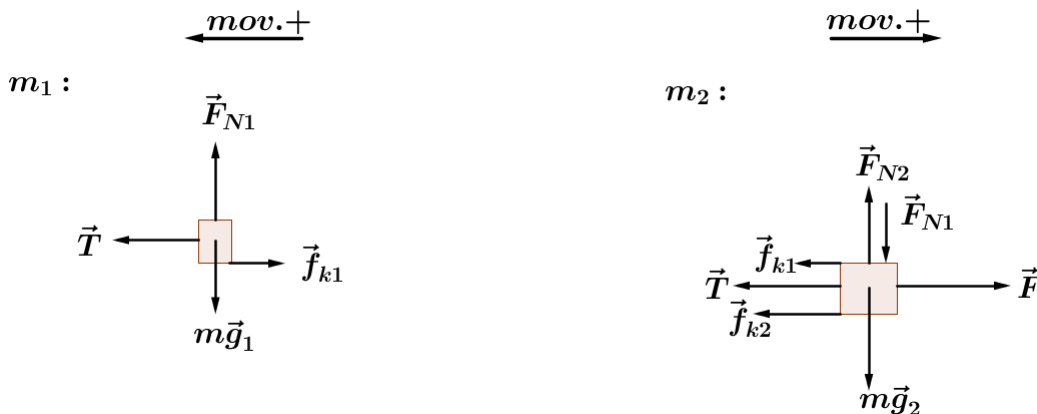


Considere la polea y la cuerda de masa despreciable. Para que valor de fuerza horizontal  $\vec{F}$ , los bloques,

a) Se moverán a velocidad constante.

Es claro que para ambos incisos, la aplicación de la segunda ley de Newton es fundamental, por que los diagramas de cuerpo libre de cada bloque pueden ser muy útiles para visualizar a todas las fuerzas

involucradas:



Luego:

Para  $m_1$ :

$$\begin{aligned} \sum F_{x1} &= 0 & \sum F_{y1} &= 0 \\ T - f_{k1} &= 0 & F_{N1} - m_1g &= 0 \\ T - \mu_k F_N &= 0 & F_{N1} &= m_1g \end{aligned} \quad (\star)$$

Sustituyendo  $F_{N1}$  en  $(\star)$ :

$$\begin{aligned} T - \mu_k m_1g &= 0 \\ T &= \mu_k m_1g \end{aligned}$$

Para  $m_2$ :

$$\begin{aligned} \sum F_{x2} &= 0 & \sum F_{y2} &= 0 \\ -T - f_{k1} - f_{k2} + F &= 0 & F_{N2} - F_{N1} - m_2g &= 0 \\ -T - \mu_k F_{N1} - \mu_k F_{N2} + F &= 0 & F_{N2} &= F_{N1} + m_2g \end{aligned} \quad (\star\star)$$

Sustituyendo  $T$ ,  $F_{N1}$  y  $F_{N2}$  en  $(\star\star)$ :

$$\begin{aligned} -\mu_k m_1g - \mu_k m_1g - \mu_k (m_1g + m_2g) + F &= 0 \\ -2\mu_k m_1g - \mu_k m_1g - \mu_k m_2g + F &= 0 \\ -3\mu_k m_1g - \mu_k m_2g + F &= 0 \\ -\mu_k g (3m_1 + m_2) + F &= 0 \\ F &= \mu_k g (3m_1 + m_2) \\ F &= 0, 2 \cdot 9, 8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (3 \cdot 2 \text{ kg} + 4 \text{ kg}) \\ F &= 19, 6 \text{ N} \end{aligned}$$

b) Se acelerarán a  $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

Análogo al caso anterior:

Para  $m_1$ :

$$\begin{aligned} \sum F_{x1} &= m_1a_x & \sum F_{y1} &= 0 \\ T - f_{k1} &= m_1a_x & F_{N1} - m_1g &= 0 \\ T - \mu_k F_N &= m_1a_x & F_{N1} &= m_1g \end{aligned} \quad (\diamond)$$

Sustituyendo  $F_{N1}$  en  $(\diamond)$ :

$$\begin{aligned} T - \mu_k m_1g &= m_1a_x \\ T &= \mu_k m_1g + m_1a_x \\ T &= m_1(\mu_k g + a_x) \end{aligned}$$

Para  $m_2$ :

$$\begin{aligned} \sum F_{x2} &= m_2a_x & \sum F_{y2} &= 0 \\ -T - f_{k1} - f_{k2} + F &= m_2a_x & F_{N2} - F_{N1} - m_2g &= 0 \\ -T - \mu_k F_{N1} - \mu_k F_{N2} + F &= m_2a_x & F_{N2} &= F_{N1} + m_2g \end{aligned} \quad (\diamond\diamond)$$

Sustituyendo  $T$ ,  $F_{N1}$  y  $F_{N2}$  en  $(\diamond\diamond)$ :

$$\begin{aligned} -m_1(\mu_k g + a_x) - \mu_k m_1g - \mu_k (m_1g + m_2g) + F &= m_2a_x \\ -\mu_k m_1g - m_1a_x - \mu_k m_1g - \mu_k m_1g - \mu_k m_2g + F &= m_2a_x \\ -3\mu_k m_1g - m_1a_x - \mu_k m_2g + F &= m_2a_x \\ -\mu_k g (3m_1 + m_2) - m_1a_x + F &= m_2a_x \end{aligned}$$

$$F = \mu_k g (3m_1 + m_2) + m_1 a_x + m_2 a_x$$

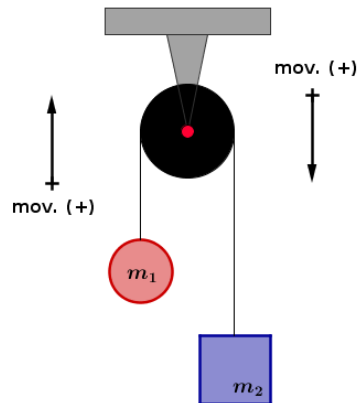
$$F = \mu_k g (3m_1 + m_2) + a_x (m_1 + m_2)$$

$$F = 0,2 \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (3 \cdot 2 \text{ kg} + 4 \text{ kg}) + 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (2 \text{ kg} + 4 \text{ kg})$$

$$F = 19,6 \text{ N} + 12 \text{ N}$$

$$F = 31,6 \text{ N}$$

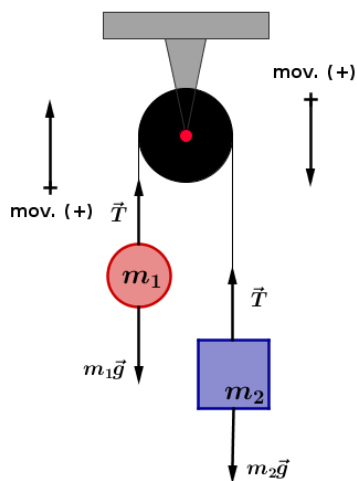
11. Cuando dos objetos de masas distintas cuelgan verticalmente sobre una polea sin fricción de masa despreciable, como en la figura, el dispositivo se llama máquina de Atwood. Se usa a veces en el laboratorio para calcular el valor de  $g$ . Determine la magnitud de la aceleración de dos objetos y la tensión en la cuerda sin peso en términos de  $g$ ,  $a$ ,  $m_1$  y  $m_2$ .



Se tiene que al considerarse que la cuerda no tiene masa la aceleración es la misma en ambos bloques:

$$a_1 = a_2 = a$$

El siguiente diagrama ayudará a la comprensión del ejercicio:



Con la segunda ley de Newton se tiene que:

Para  $m_1$ :

$$\begin{aligned}\sum F_y &= m_1 a \\ T - m_1 g &= m_1 a \\ T &= m_1 a + m_1 g\end{aligned}$$

Para  $m_2$ :

$$\begin{aligned}\sum F_y &= m_2 a \\ m_2 g - T &= m_2 a \\ T &= -(m_2 a - m_2 g) \\ T &= m_2 g - m_2 a\end{aligned}$$

De donde la aceleración se obtiene:

$$\begin{aligned}m_1 a + m_1 g &= m_2 g - m_2 a \\ m_1 g - m_2 g &= -m_2 a - m_1 a \\ g(m_1 - m_2) &= a(-m_2 - m_1) \\ \frac{g(m_1 - m_2)}{-m_2 - m_1} &= a \\ \frac{g(m_1 - m_2)}{-(m_2 + m_1)} &= a \\ \frac{g(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} &= a\end{aligned}$$

Luego la tensión se obtiene del analisis de cualquiera de los dos objetos, ya que es la misma debido y no se considera la masa de la cuerda y no se estira.

Con la tensión de  $m_1$ :

$$\begin{aligned}T &= m_1 a + m_1 g \\ T &= m_1 \left[ \frac{g(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} \right] + m_1 g \\ T &= m_1 g \left[ \frac{(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} \right] + m_1 g \\ T &= m_1 g \left( \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} + 1 \right) \\ T &= m_1 g \left( \frac{m_2 - m_1 + m_2 + m_1}{m_2 + m_1} \right) \\ T &= m_1 g \left( \frac{m_2 + m_2}{m_2 + m_1} \right) \\ T &= m_1 g \left( \frac{2m_2}{m_2 + m_1} \right)\end{aligned}$$

$$T = \frac{2m_2m_1g}{m_2 + m_1}$$

Con la tensión de  $m_1$ :

$$T = m_2g - m_2a$$

$$T = m_2g - m_2 \left[ \frac{g(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} \right]$$

$$T = m_2g - m_2g \left( \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right)$$

$$T = m_2g \left( 1 - \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right)$$

$$T = m_2g \left[ \frac{m_2 + m_1 - (m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} \right]$$

$$T = m_2g \left( \frac{m_2 + m_1 - m_2 + m_1}{m_2 + m_1} \right)$$

$$T = m_2g \left( \frac{m_1 + m_1}{m_2 + m_1} \right)$$

$$T = m_2g \left( \frac{2m_1}{m_2 + m_1} \right)$$

$$T = \frac{2m_1m_2g}{m_2 + m_1}$$

14. Un pequeño cohete de 8.00 kg que combustible que ejerce sobre él una fuerza hacia arriba, que varía con el tiempo, mientras asciende sobre la plataforma de lanzamiento. Esta fuerza satisface la ecuación  $F(t) = A + Bt^2$ . Las mediciones demuestran que en  $t = 0$  s la fuerza es de 100.0 N y al final de los primeros 2.00 s, es de 150.0 N.

a) Determine los valores y unidades según el SI de  $A$  y  $B$ .

Como se tiene la fuerza en dos intervalos de tiempo, se forma el siguiente sistema de ecuaciones donde  $A$  y  $B$  son las incógnitas:

$$\begin{cases} F(0 \text{ s}) = A + B(0 \text{ s})^2 \\ F(2.00 \text{ s}) = A + B(2.00 \text{ s})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100.0 \text{ N} = A & (1) \\ 150.0 \text{ N} = A + B \cdot 4.00 \text{ s}^2 & (2) \end{cases}$$

Sustituyendo (1) en (2) para obtener  $B$ :

$$\begin{aligned} 150.0 \text{ N} &= 100.0 \text{ N} + B \cdot 4.00 \text{ s}^2 \\ \frac{150.0 \text{ N} - 100.0 \text{ N}}{4.00 \text{ s}^2} &= B \\ 12.5 \text{ N} \cdot \text{s}^{-2} &= B \end{aligned}$$

b) Obtenga la fuerza neta sobre este cohete y su aceleración en el momento posterior a la ignición y a los 3.00 s después del inicio de la ignición.

Con base en la ecuación  $F(t) = 100 \text{ N} + 12.5 \text{ N} \cdot \text{s}^{-2} t^2$  se tiene:

Para el momento posterior a la ignición ( $t = 0 \text{ s}$ ):

$$F(0 \text{ s}) = 100 \text{ N} + 12.5 \text{ N} \cdot \text{s}^{-2} (0 \text{ s})^2$$

$$F(0 \text{ s}) = 100 \text{ N}$$

Y la fuerza neta esta dada por:

$$\sum F = F - F_g$$

$$\sum F = F - mg$$

$$\sum F = 100 \text{ N} - 8.00 \text{ kg} \cdot 9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\sum F = 21.6 \text{ N}$$

Y la aceleración:

$$\sum F = ma$$

$$\frac{\sum F}{m} = a$$

$$\frac{F - F_g}{m} = a$$

$$\frac{21.6 \text{ N}}{8.00 \text{ kg}} = a$$

$$2.7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = a$$

A los 3.00 s después del inicio de la ignición:

$$F(3.00 \text{ s}) = 100 \text{ N} + 12.5 \text{ N} \cdot \text{s}^{-2} (3.00 \text{ s})^2$$

$$F(3.00 \text{ s}) = 100 \text{ N} + 112.5 \text{ N}$$

$$F(3.00 \text{ s}) = 212.5 \text{ N}$$

Y la fuerza neta esta dada por:

$$\sum F = F - F_g$$

$$\sum F = F - mg$$

$$\sum F = 212.5 \text{ N} - 8.00 \text{ kg} \cdot 9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\sum F = 134.1 \text{ N}$$

Y la aceleración:

$$\sum F = ma$$

$$\frac{\sum F}{m} = a$$

$$\frac{F - F_g}{m} = a$$

$$\frac{134.1 \text{ N}}{8.00 \text{ kg}} = a$$

$$16.76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = a$$

c) ¿Cuál será la aceleración del cohete a los 3.00 s después de la ignición, suponiendo que el cohete está en un punto del espacio exterior lejos de cualquier campo gravitacional?

Se tiene que:

$$\sum F = ma$$

$$\frac{\sum F}{m} = a$$

$$\frac{F - F_g}{m} = a$$

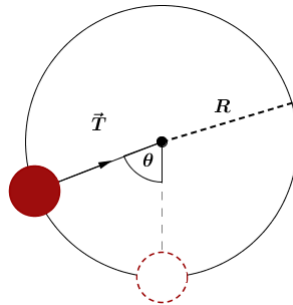
Pero  $F_g = 0 \text{ N}$ , entonces:

$$\frac{F}{m} = a$$

$$\frac{212.5 \text{ N}}{8.00 \text{ kg}} = a$$

$$26.56 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = a$$

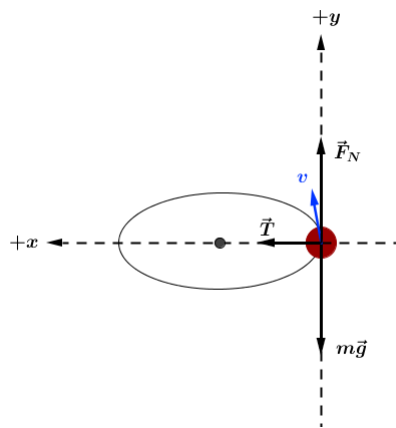
17. Una bolita de masa  $m = 0,5 \text{ kg}$  que está sujeta a una cuerda que gira describiendo un círculo de radio  $R = 150 \text{ cm}$ .



Calcule en los siguientes casos:

a) La tensión de la cuerda, si la trayectoria es horizontal y sobre una superficie sin fricción, considera la rapidez tangencial  $v = 10 \text{ km/h}$  como constante.

La siguiente figura ayudará a la comprensión del ejercicio:



Se tiene que:

$$\sum F_x = ma_C$$

$$T = ma_C$$

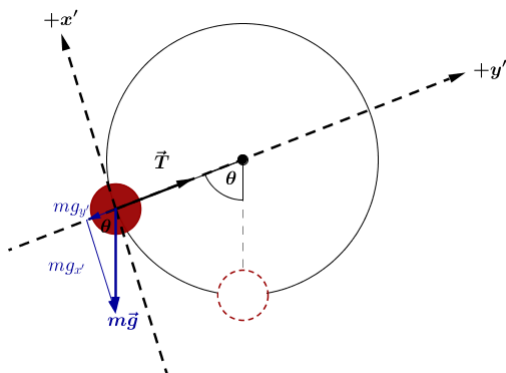
$$T = m \frac{v^2}{r}$$

$$T = 0,5 \text{ kg} \cdot \frac{(2,77 \text{ m/s})^2}{1,5 \text{ m}}$$

$$T = 2,5 \text{ N}$$

b) Considere ahora que la trayectoria es vertical. En el momento en que la cuerda forma un ángulo de  $\theta = 20^\circ$  con la vertical, la rapidez tangencial es  $v = 1,5 \text{ m/s}$ . Encuentre la aceleración centrípeta en ese momento.

La siguiente figura ayudará a la comprensión del ejercicio:



Es claro que:

$$a_C = \frac{v^2}{r}$$

$$a_C = \frac{(1,5 \text{ m/s})^2}{1,5 \text{ m}}$$

$$a_C = 1,5 \text{ m/s}^2$$

c) En el mismo caso que en el inciso b), calcule la tensión de la cuerda.

Por la segunda ley de Newton se tiene:

$$\sum Fy' = ma_C$$

$$T - mg \cos \theta = ma_C$$

$$T = ma_C + mg \cos \theta$$

$$T = m(a_C + g \cos \theta)$$

$$T = 0,5 \text{ kg} [1,5 \text{ m/s}^2 + 9,8 \text{ m/s}^2 \cos(20^\circ)]$$

$$T = 5,35 \text{ N}$$

d) En el mismo caso que en el inciso b), calcule la aceleración tangencial.

Análogo al inciso c) se tiene que:

$$\sum Fx' = ma_t$$

$$-mg \sin \theta = ma_t$$

$$-g \sin \theta = a_t$$

$$-9,8 \text{ m/s}^2 \sin(20^\circ) = a_t$$

$$-3,35 \text{ m/s}^2 = a_t$$

Se tiene que  $a_T < 0$  debido a que es apuesta al desplazamiento angular.

e) En el mismo caso que en el inciso b), calcule la aceleración total (magnitud y dirección).

La magnitud de la aceleración total esta dada por:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_C^2}$$

$$a = \sqrt{(-3,35 \text{ m/s}^2)^2 + (1,5 \text{ m/s}^2)^2}$$

$$a = 3,67 \text{ m/s}^2$$

Y su dirección es dada por:

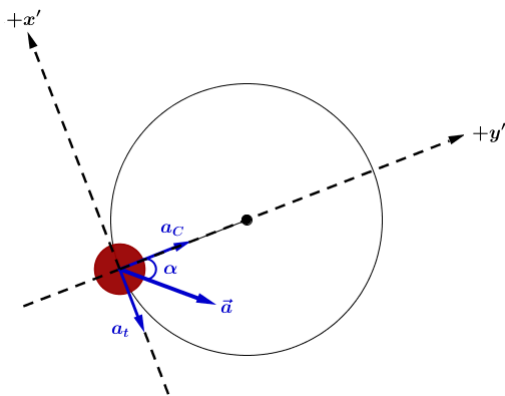
$$\tan \alpha = \frac{a_t}{a_C}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{a_t}{a_C} \right)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{-3,35 \text{ m/s}^2}{1,5 \text{ m/s}^2} \right)$$

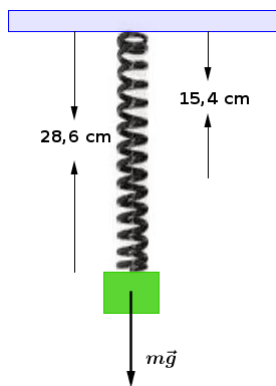
$$\alpha = 66^\circ$$

El siguiente diagrama representa a las aceleraciones:



18. Un resorte tiene una longitud de 15,4 cm y cuelga de modo vertical de un punto, se le coloca una masa de 0,2 kg y se estira una longitud de 28,6 cm; determine el valor de la constante del resorte.

La siguiente figura ayudará a la comprensión del ejercicio:



Se tiene que la única fuerza que hace que se estire el resorte es el peso, entonces:

$$F = k \Delta y$$

$$\frac{F}{\Delta y} = k$$

$$\frac{mg}{y} = k$$

$$\frac{0,2 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{28,6 \times 10^{-2} \text{ m} - 15,4 \times 10^{-2} \text{ m}} = k$$

$$14,8 \frac{\text{N}}{\text{m}} = k$$

## Cinemática rotacional

### Enunciados:

1. Una rueda da vueltas con una aceleración constante de  $3,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ .
  - a) Si la rapidez angular de la rueda es  $2 \text{ rad/s}$  con  $t_0 = 0 \text{ s}$  a través de qué desplazamiento angular en grados da vuelta en  $2 \text{ s}$ .
  - b) ¿Cuántas revoluciones (vueltas) dio la rueda durante este intervalo de tiempo?
  - c) ¿Cuál es la rapidez angular de la rueda en  $t = 2 \text{ s}$ ?
  
2. La rueda de una bicicleta estacionaria de radio  $0,5 \text{ m}$  se lleva desde  $100 \frac{\text{rev}}{\text{min}}$  hasta el reposo a través de aplicar los frenos durante un tiempo de  $5 \text{ s}$ . Determine:
  - a) El valor de la aceleración media de la rueda en  $\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ .
  - b) El número de vueltas que realiza la rueda durante ese tiempo de frenado.  
La cantidad de vueltas esta dada por el desplazamiento angular final de la rueda, entonces:
  - c) El valor de la aceleración: tangencial, radial y total en  $t = 2 \text{ s}$ .
  
3. El volante de una maquina de vapor gira a una rapidez angular constante de  $156 \text{ rev/min}$ . Cuando se corta el vapor, la fricción en el eje de la maquinaria y del aire hace que el volante llegue al reposo en  $2,2 \text{ h}$ . Calcular:
  - a) La aceleración angular del volante luego de que se corta el vapor.
  - b) ¿Cuántas vueltas dará el volante de llegar al reposo?
  - c) ¿Cuál es la aceleración lineal tangencial de una partícula a  $52,4 \text{ cm}$  del eje de rotación cuando el volante está girando a  $72,5 \text{ rev/min}$ ?
  - d) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración lineal total de la partícula del inciso c)?
  
4. Un disco gira alrededor de un eje fijo, inicialmente parte del reposo y acelera con aceleración angular constante. En cierto instante de tiempo su rapidez angular es de  $20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , cuando completa un desplazamiento angular de  $100 \text{ rad}$ , su rapidez angular es de  $50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Calcular:
  - a) La aceleración angular:
  - b) El tiempo requerido para completar los  $100 \text{ rad}$ .
  - c) El tiempo requerido para alcanzar la rapidez de  $20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .
  - d) El número de vueltas (revoluciones) que realizo hasta alcanzar la rapidez angular de  $20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

5. Una partícula de 300 g, se está moviendo en forma circular, con una rapidez dada por  $v(t) = 0.91t^2 + 1.22t$ , sabiendo que  $[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$  con una aceleración de  $7.0 \text{ m/s}^2$  en  $t = 2.1 \text{ s}$ . Para dicho instante, calcule:

- a) Las unidades de 0.91 y 1.22.
- b) La componente tangencial de la aceleración.
- c) La componente de la aceleración centrípeta.
- d) El radio de la trayectoria circular.
- e) La magnitud de la fuerza centrípeta y tangencial que están actuando sobre la partícula.

6. Una partícula de masa  $m$ , se mueve en un círculo de acuerdo a la expresión  $s(t) = t^3 + 2t^2$ , donde  $s$  se mide en metros a lo largo del círculo y  $t$  en segundos. Si la aceleración total de la partícula es  $22,63 \text{ m/s}^2$  cuando  $t = 2 \text{ s}$ .

Calcular:

- a) La rapidez lineal  $v$ .
- b) La aceleración tangencial  $a_{tan}$ .
- c) El radio del círculo  $R$ .
- d) La velocidad angular  $\omega$ .

7. Una rueda gira con una aceleración angular  $\alpha_z$  dada por  $\alpha_z(t) = 4At^3 - 3Bt^2$ , donde  $t$  es el tiempo, en tanto que  $A$  y  $B$  son constantes. Si la rueda tiene una velocidad angular inicial  $\omega_0$ , escriba las ecuaciones de:

- a) la velocidad angular
- b) el ángulo recorrido en función del tiempo.

8. El ángulo que recorre el volante de un generador durante un intervalo de tiempo  $t$  está dado por:

$$\theta(t) = At + Bt^3 - Ct^4$$

- a) ¿Cuáles son las unidades según el SI de cada una de las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$ ?
- b) Determine una expresión para la rapidez angular y aceleración angular en función del tiempo, respectivamente.
- c) Calcular la aceleración angular media entre  $t_1 = 1 \text{ s}$  y  $t_2 = 4 \text{ s}$ . Sabiendo que  $A = 2$ ,  $B = 4$  y  $C = 1$ .

9. La rapidez tangencial de un punto que se mueve en un círculo está dada por la expresión  $v(t) = 0,91 \frac{\text{m}}{\text{s}^3}t^2 + 1,22 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}t$ . Si la aceleración total del punto es  $6,9 \text{ m/s}^2$  cuando  $t = 2 \text{ s}$ , calcular en dicho instante:

- a) la aceleración tangencial.
- b) la aceleración centrípeta.
- c) el radio de la trayectoria circular que sigue el punto.
- d) la velocidad angular.
- e) la aceleración angular.

10. La aceleración angular del volante de un generador durante un intervalo de tiempo  $t$  esta dada por:

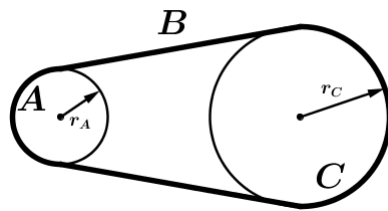
$$\alpha(t) = 6Bt - 12Ct^2$$

- Determine una expresión para la rapidez angular y posición angular en función del tiempo, respectivamente.
- ¿Cuáles son las unidades según el SI de cada una de las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$ ?
- Calcular la velocidad angular media entre  $t_1 = 1$  s y  $t_2 = 4$  s. Sabiendo que  $A = 4$ ,  $B = 7$  y  $C = 2$ .

11. Al diseñar carreteras, también se diseñan curvas peraltadas, si en las especificaciones se indica que dicha curva tiene un radio de 230 m y que la rapidez media de los vehículos por la curva debe ser de 25 m/s, ¿cuanto debe valer el ángulo de inclinación del peralte para dicha curva?

12. La rueda  $A$  de radio  $r_A = 10$  cm, está acoplada mediante una banda  $B$  a la rueda  $C$  de radio  $r_C = 25$  cm, como se aprecia en la figura. La rueda  $A$  aumenta su rapidez angular a partir del reposo con una rapidez uniforme de  $1.60$  rad/s<sup>2</sup>.

(Sugerencia: si la banda no resbala, la rapidez lineal de los bordes de las dos ruedas habrá de ser igual.)



Determine:

- El tiempo que la rueda  $C$  tarda en alcanzar una rapidez angular de 100 rev/min, suponiendo que la banda no resbale.
- La aceleración angular de  $C$ .
- La razón entre  $a_{cC}$  y  $a_{cA}$ .
- La cantidad de vueltas que da cada rueda en el tiempo obtenido en a).

13. Un tocadiscos que gira a 78 rev/min disminuye su velocidad y se detiene 32 s después de apagar el motor.

- Calcule su aceleración angular (constante) en rev/min<sup>2</sup>.
- ¿Cuántas revoluciones realiza el motor durante este tiempo?

14. Una rueda de polea de 8,14 cm de diámetro tiene una cuerda de 5,63 m de largo enrollada en su periferia. Partiendo del reposo, se le imprime una aceleración angular de  $1,47$  rad/s<sup>2</sup>.

- ¿Qué ángulo debe girar la rueda para que se desenrolle la cuerda?
- ¿Cuánto tarda en desenrollarse?

15. Las aspas de un molino de viento parten del reposo y giran con una aceleración angular de  $0.236$  rad/s<sup>2</sup>. ¿Cuánto tiempo transcurre antes que un punto del aspa experimente el mismo valor en la magnitud de la aceleración centrípeta y tangencial?

16. La Luna gira en torno a la Tierra completando una revolución en 27,3 d ( $2,36 \times 10^6$  s). Suponga que la órbita es circular y que tiene un radio de  $r = 3,82 \times 10^8$  m. Si la masa de la Luna es de  $m = 7,36 \times 10^{22}$  kg, calcule la magnitud de la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre ella.

17. Calcule la velocidad y el periodo de un satélite que está muy cerca de la superficie terrestre ( $h \ll r$ ) y que orbita alrededor del Ecuador (no está fijo respecto a la Tierra). El radio de la Tierra es  $r = 6,37 \times 10^6$  m.

### Algunas soluciones:

2. La rueda de una bicicleta estacionaria de radio 0.5 m se lleva desde  $100 \frac{\text{rev}}{\text{min}}$  hasta el reposo a través de aplicar los frenos durante un tiempo de 5 s. Determine:

a) El valor de la aceleración media de la rueda en  $\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ .

Se tiene que  $r = 0.5$  m y  $\omega_0 = 100 \frac{\text{rev}}{\text{min}}$  y  $\omega = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  (porque se detiene debido al frenado), y  $t = 5$  s (lo que dura en dar vueltas la rueda).

Luego:  $\alpha_{med} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0}$ , pero antes es claro que:

$$\omega_0 = 100 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \left( \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \right) \left( \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) = 10,47 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Con lo anterior:

$$\alpha_{med} = \frac{0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} - 10,47 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{5 \text{ s} - 0 \text{ s}}$$

$$\alpha_{med} = -2,09 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Se tiene que  $\alpha_{med} < 0$  debido al frenado, la cual es constante en todo el movimiento.

b) El número de vueltas que realiza la rueda durante ese tiempo de frenado.

La cantidad de vueltas esta dada por el desplazamiento angular final de la rueda, entonces:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

Tomo  $\theta_0 = 0$  rad, ya que es el origen o referencia donde se comienza a contar las vueltas y  $\alpha_{med} = \alpha$ . Para así tener:

$$\theta = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$\theta = 10,47 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 5 \text{ s} + \frac{\left( -2,09 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right) (5 \text{ s})^2}{2}$$

$$\theta = 10,47 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 5 \text{ s} + \frac{\left( -2,09 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right) (5 \text{ s})^2}{2}$$

$$\theta = 26,22 \text{ rad}$$

Y convirtiendo los radianes a revoluciones (vueltas):

$$\theta = 26.22 \text{ rad} \left( \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} \right) = 4.17 \text{ rev}$$

Por lo anterior, la rueda da 4 vueltas.

c) El valor de la aceleración: tangencial, radial y total en  $t = 2 \text{ s}$ .

Se sabe que la aceleración tangencial ( $a_T$ ) esta dada por  $a_T = r\alpha$ , donde  $\alpha$  es la aceleración obtenida en a), ya que es constante en todo el movimiento:

$$a_T = 0.5 \text{ m} \cdot -2,09 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Luego la aceleración radial ( $a_r$ ) esta dada por  $a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$ , donde  $\omega$  es la velocidad angular que la rueda lleva en ese instante, entonces se calcula con:

$$a_T = -1.045 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega = 10,47 \frac{\text{rad}}{\text{s}} + \left( -2,09 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right) (2 \text{ s})$$

$$\omega = 6.29 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Ahora con lo anterior:

$$a_r = \left( 6.29 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \cdot 0.5 \text{ m}$$

$$a_r = 19.78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Finalmente se tiene que la aceleración total ( $a$ ) esta dada por:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_r^2}$$

$$a = \sqrt{\left( -1.045 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)^2 + \left( 19.78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)^2}$$

$$a = 19.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

3. El volante de una maquina de vapor gira a una rapidez angular constante de  $156 \text{ rev/min}$ . Cuando se corta el vapor, la fricción en el eje de la maquinaria y del aire hace que el volante llegue al reposo en  $2,2 \text{ h}$ . Calcular:

a) La aceleración angular del volante luego de que se corta el vapor.

Se tiene que:

$$\omega_0 = 156 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \left( \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \right) \left( \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) = 16,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad t = 2,2 \text{ h} \left( \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \right) = 7920 \text{ s}$$

$$\omega = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Luego:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \omega_0 + \alpha t$$

$$\frac{-\omega_0}{t} = \alpha$$

$$\frac{-16,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{7920 \text{ s}} = \alpha$$

$$-2,06 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = \alpha$$

Al ser  $\alpha < 0$  implica que se va frenando la rueda debido al efecto del aire y la fricción y se mantendrá constante hasta que la rueda se detenga completamente.

b) ¿Cuántas vueltas dará el volante de llegar al reposo?

Se tiene que las vueltas están dadas por el desplazamiento angular:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} \quad (\theta_0 = 0)$$

$$\theta = 16,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} (7920 \text{ s}) + \frac{-2,06 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} (7920 \text{ s})^2}{2}$$

$$\theta = 64487,8 \text{ rad} \left( \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} \right) = 10263,5 \text{ rev}$$

c) ¿Cuál es la aceleración lineal tangencial de una partícula a 52,4 cm del eje de rotación cuando el volante está girando a 72,5 rev/min?

Se tiene que:

$$a_t = r\alpha$$

$$a_t = 52,4 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot -2,06 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$a_t = -1,08 \times 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

d) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración lineal total de la partícula del inciso c)?

Se tiene que:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} \quad (\odot)$$

Se obtiene la aceleración centrípeta:

$$a_c = r\omega^2$$

$$a_c = r\omega^2$$

$$\omega = 72,5 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \left( \frac{2\pi \text{rad}}{1 \text{ rev}} \right) \left( \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) = 7,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$a_c = 52,4 \times 10^{-2} \text{ m} \left( 7,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2$$

$$a_c = 30,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Luego, sustituyendo en ( $\odot$ ):

$$a = \sqrt{\left( -1,08 \times 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)^2 + \left( 30,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)^2}$$

$$a = 30,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

5. Una partícula de 300 g, se está moviendo en forma circular, con una rapidez dada por  $v(t) = 0.91t^2 + 1.22t$ , sabiendo que  $[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$  con una aceleración de  $7.0 \text{ m/s}^2$  en  $t = 2.1 \text{ s}$ . Para dicho instante, calcule:

a) Las unidades de 0.91 y 1.22.

Como  $[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$  y  $[t] = \text{s}$ , entonces se tiene que:

$$[0.91] = \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \text{ y } [1.22] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Demostraremos el caso para 0.91:

$$[0.91] [t]^2 = \frac{\text{m}}{\text{s}^3}$$

$$[0.91] \text{ s}^2 = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$[0.91] = \frac{\text{m}}{\text{s}^3}$$

El caso de 1.22 queda para estudio del estudiante.

b) La componente tangencial de la aceleración.

Como se da en el ejercicio  $v(t) = 0.91 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t^2 + 1.22 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t$  y entonces se tiene que  $v(t) = v_T$ , esto por el movimiento de la partícula y se sabe que  $a_T = \frac{dv_T}{dt}$  entonces:

$$a_T(t) = 2 \left( 0.91 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t \right) + 1.22 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_T(t) = 1.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t + 1.22 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Luego:

$$a_T(2.1 \text{ s}) = 1.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t + 1.22 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_T(2.1 \text{ s}) = 1.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} (2.1 \text{ s}) + 1.22 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_T(2.1 \text{ s}) = 5.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

c) La componente de la aceleración centrípeta.

Como se sabe  $a^2 = a_T^2 + a_C^2$  entonces:

$$a^2 - a_T^2 = a_C^2$$

$$\sqrt{a^2 - a_T^2} = a_C$$

Como  $a_T = 5.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  y  $a = 7.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  se tiene:

$$\sqrt{(7.0 - 5.0) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = a_C$$

$$4,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = a_C$$

d) El radio de la trayectoria circular.

Ahora el radio de dicha trayectoria se obtiene con la ecuación de aceleración centrípeta  $a_C = \frac{v^2}{r}$  de donde despejamos  $r$  para obtener:

$$r = \frac{v^2}{a_C} \quad (\square)$$

Pero antes de obtener el radio, debemos obtener la velocidad, la cual se obtiene de la siguiente forma:

$$v(t) = 0.91 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t^2 + 1.22 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t$$

Como es claro en  $t = 2.1 \text{ s}$ :

$$v(2.1 \text{ s}) = 0.91 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} (2.1 \text{ s})^2 + 1.22 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (2.1 \text{ s})$$

$$v(2.1 \text{ s}) = 6.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Luego, sutituyendo en ( $\square$ ):

$$r = \frac{\left(6.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\left(4.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}$$

$$r = 8.8 \text{ m}$$

e)La magnitud de la fuerza centrípeta y tangencial que estan actuando sobre la partícula.

De la segunda ley Newton:

$$F = ma$$

Se obtiene:

$$F_C = ma_C \quad F_T = ma_T$$

$$F_C = 0.3 \text{ kg} \cdot 4.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} F_T = 0.3 \text{ kg} \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F_C = 1.44 \text{ N} F_T = 1.5 \text{ N}$$

10.La aceleración angular del volante de un generador durante un intervalo de tiempo  $t$  esta dada por:

$$\alpha(t) = 6Bt - 12Ct^2$$

a)Determine una expresión para la rapidez angular y posición angular en función del tiempo, respectivamente.

Para la rapidez angular se tiene:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\alpha(t) dt = d\omega$$

$$\int \alpha(t) dt = \int d\omega$$

$$\int_0^t \alpha(t) dt = \int_0^\omega d\omega$$

$$\int_0^t (6Bt - 12Ct^2) dt = \int_0^\omega d\omega$$

$$\left(\frac{6Bt^2}{2} - \frac{12Ct^3}{3}\right) \Big|_0^t = \omega \Big|_0^\omega$$

$$\frac{6Bt^2}{2} - \frac{12Ct^3}{3} = \omega$$

$$3Bt^2 - 4Ct^3 = \omega = \omega(t)$$

Para la posición angular se tiene:

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \frac{d\theta}{dt} \\ \omega(t) dt &= d\theta \\ \int \omega(t) dt &= \int d\theta \\ \int_0^t \omega(t) dt &= \int_0^\theta d\theta \\ \int_0^t (3Bt^2 - 4Ct^3) dt &= \int_0^\theta d\theta \\ \left( \frac{3Bt^3}{3} - \frac{4Ct^4}{4} \right) \Big|_0^t &= \theta \Big|_0^\theta \\ Bt^3 - Ct^4 &= \theta = \theta(t)\end{aligned}$$

b) ¿Cuáles son las unidades según el SI de cada una de las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$ ?

Sabiendo que las unidades del SI para  $[\theta] = \text{rad}$  y  $[t] = \text{s}$  se tiene:

$$\begin{aligned}[A][t] &= \text{rad} & [B][t]^3 &= \text{rad} & [C][t]^4 &= \text{rad} \\ [A] &= \frac{\text{rad}}{[t]} [B] &= \frac{\text{rad}}{[t]^3} [C] &= \frac{\text{rad}}{[t]^4} \\ [A] &= \frac{\text{rad}}{\text{s}} [B] &= \frac{\text{rad}}{\text{s}^3} [C] &= \frac{\text{rad}}{\text{s}^4}\end{aligned}$$

c) Calcular la velocidad angular media entre  $t_1 = 1 \text{ s}$  y  $t_2 = 4 \text{ s}$ . Sabiendo que  $A = 4$ ,  $B = 7$  y  $C = 2$ .

Se tiene que:

$$\begin{aligned}\omega_{med} &= \frac{\Delta\theta(t)}{\Delta t} \\ \omega_{med} &= \frac{\theta_2(t_2) - \theta_1(t_1)}{t_2 - t_1} \\ \omega_{med} &= \frac{\theta_2(4 \text{ s}) - \theta_1(1 \text{ s})}{4 \text{ s} - 1 \text{ s}} \quad (*)\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\theta(t) &= 7 \frac{\text{rad}}{\text{s}^3} t^3 - 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^4} t^4 \\ \theta_1(1 \text{ s}) &= 7 \frac{\text{rad}}{\text{s}^3} (1 \text{ s})^3 - 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^4} (1 \text{ s})^4 \\ \theta_1(1 \text{ s}) &= 7 \text{ rad} - 2 \text{ rad} \\ \theta_1(1 \text{ s}) &= 5 \text{ rad}\end{aligned}$$

$$\theta_2(4\text{ s}) = 7 \frac{\text{rad}}{\text{s}^3} (4\text{ s})^3 - 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^4} (4\text{ s})^4$$

$$\theta_2(4\text{ s}) = 448\text{ rad} - 512\text{ rad}$$

$$\theta_2(4\text{ s}) = -64\text{ rad}$$

Sustituyendo en (\*):

$$\omega_{med} = \frac{-64\text{ rad} - 5\text{ rad}}{4\text{ s} - 1\text{ s}}$$

$$\alpha_{med} = \frac{-69 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{3\text{ s}}$$

$$\alpha_{med} = -23 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

11. Al diseñar carreteras, también se diseñan curvas peraltadas, si en las especificaciones se indica que dicha curva tiene un radio de 230 m y que la rapidez media de los vehículos por la curva debe ser de 25 m/s, ¿cuanto debe valer el ángulo de inclinación del peralte para dicha curva?

Teniendo en cuenta que:

$$\tan \theta = \frac{v^2}{Rg}$$

Entonces:

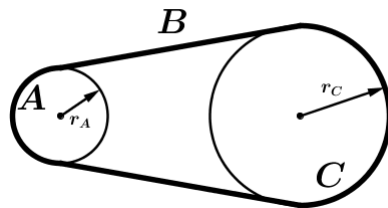
$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{v^2}{Rg} \right)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left[ \frac{(25\text{ m/s})^2}{230\text{ m} \cdot 9,8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}g} \right]$$

$$\theta = 15^\circ$$

12. La rueda  $A$  de radio  $r_A = 10\text{ cm}$ , está acoplada mediante una banda  $B$  a la rueda  $C$  de radio  $r_C = 25\text{ cm}$ , como se aprecia en la figura. La rueda  $A$  aumenta su rapidez angular a partir del reposo con una rapidez uniforme de  $1.60\text{ rad/s}^2$ .

(Sugerencia: si la banda no resbala, la rapidez lineal de los bordes de las dos ruedas habrá de ser igual.)



Determine:

a) El tiempo que la rueda  $C$  tarda en alcanzar una rapidez angular de  $100\text{ rev/min}$ , suponiendo que la banda no resbale.

Se tiene que:

$$\begin{array}{lll} r_A = 0,1 \text{ m} & \omega_{0A} = 0 \text{ rad/s} & \omega_{0C} = 0 \text{ rad/s} \\ r_C = 0,25 \text{ m} & \alpha_A = 1,6 \text{ rad/s}^2 & \omega_C = 10,4 \text{ rad/s} \end{array}$$

Conversion de  $\omega_C$  a rad/s:

$$\omega_o = 100 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \left( \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \right) \left( \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) = 10,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Al no resbalar la banda se tiene que ambas ruedas tendrán la misma velocidad lineal y por ende durarán lo mismo:

$$\omega_A = \alpha_A t + \omega_{0A}$$

$$\frac{\omega_A}{\alpha_A} = t \quad (\wedge)$$

Luego:

$$v_A = v_C$$

$$\omega_A r_A = \omega_C r_C$$

$$\omega_A = \omega_C \frac{r_C}{r_A}$$

$$\omega_A = 10,4 \text{ rad/s} \left( \frac{0,25 \text{ m}}{0,1 \text{ m}} \right)$$

$$\omega_A = 26 \text{ rad/s}$$

Sustituyendo en ( $\wedge$ ):

$$\frac{26 \text{ rad/s}}{1,6 \text{ rad/s}^2} = t$$

$$16,2 \text{ s} = t$$

b) La aceleración angular de  $C$ .

Como tienen la misma velocidad lineal entonces han de tener la misma aceleración lineal:

$$a_A = a_C$$

$$a_{tA} = a_{tC}$$

$$\alpha_A r_A = \alpha_C r_C$$

$$\alpha_A \frac{r_A}{r_C} = \alpha_C$$

$$1,6 \text{ rad/s}^2 \left( \frac{0,1 \text{ m}}{0,25 \text{ m}} \right) = \alpha_C$$

$$0,64 \text{ rad/s}^2 = \alpha_C$$

c) La razón entre  $a_{cC}$  y  $a_{cA}$ .

$$\begin{aligned}\frac{a_{cC}}{a_{cA}} &= \frac{\omega_C^2 r_C}{\omega_A^2 r_A} \quad (\omega_C = \omega_A) \\ \frac{a_{cC}}{a_{cA}} &= \frac{r_C}{r_A} \\ \frac{a_{cC}}{a_{cA}} &= \frac{0,25 \text{ m}}{0,1 \text{ m}} \\ \frac{a_{cC}}{a_{cA}} &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

d) La cantidad de vueltas que da cada rueda en el tiempo obtenido en a).

Para la rueda A:

$$\begin{aligned}\Delta\theta_A &= \omega_{0A}t + \frac{\alpha_A t^2}{2} \\ \Delta\theta_A &= \frac{\alpha_A t^2}{2} \\ \Delta\theta_A &= \frac{1,6 \text{ rad/s}^2 \cdot (16,2 \text{ s})^2}{2} \\ \Delta\theta_A &= 209,9 \text{ rad} \left( \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} \right) = 33,4 \text{ rev}\end{aligned}$$

Para la rueda C:

$$\begin{aligned}\Delta\theta_C &= \omega_{0C}t + \frac{\alpha_C t^2}{2} \\ \Delta\theta_C &= \frac{\alpha_C t^2}{2} \\ \Delta\theta_C &= \frac{0,64 \text{ rad/s}^2 \cdot (16,2 \text{ s})^2}{2} \\ \Delta\theta_C &= 83,9 \text{ rad} \left( \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} \right) = 13,3 \text{ rev}\end{aligned}$$

17. Calcule la velocidad y el periodo de un satélite que está muy cerca de la superficie terrestre ( $h \ll r$ ) y que orbita alrededor del Ecuador (no está fijo respecto a la Tierra). El radio de la Tierra es  $r = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$ .

Se debe tener presente que:

$$\begin{aligned}a_c &= \frac{v^2}{r} \\ \sqrt{a_c r} &= v \quad (\triangleleft)\end{aligned}$$

Donde se tiene en cuenta que:

$$\begin{aligned}F_r &= -ma_c \\ F_r &= -mg\end{aligned}$$

Por ende  $a_c = g$ .

Sustituyendo en ( $\triangleleft$ ):

$$\sqrt{gr} = v$$

$$\sqrt{9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 6,37 \times 10^6 \text{ m}} = v$$

$$7901 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = v$$

Luego el periodo:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$T = \frac{2\pi \cdot 6,37 \times 10^6 \text{ m}}{7901 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

$$T = 5065,6 \text{ s} \left( \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) = 84,4 \text{ min}$$

## Trabajo y energía

*Enunciados:*

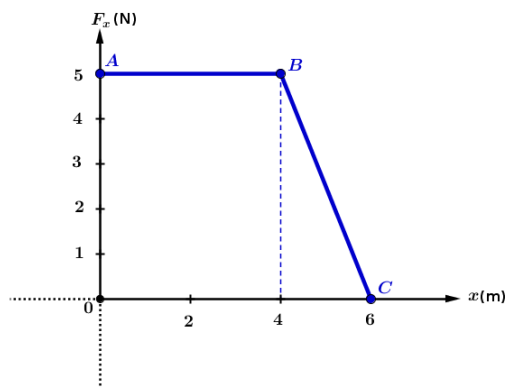
1. Una fuerza  $\vec{F} = (4x\hat{i} + 3y\hat{j}) \frac{\text{N}}{\text{m}}$  actúa sobre un objeto mientras el objeto se mueve en la dirección  $x$  desde el origen hasta  $x = 5 \text{ m}$ . Encuentre el trabajo  $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$  invertido por la fuerza sobre el objeto.

2. Se dispara una bala de  $100 \text{ g}$  de un rifle que tiene un cañón de  $0,6 \text{ m}$  de largo. Elija el origen como la ubicación donde la bala comienza a moverse. En tal caso la fuerza (en newtons) que ejercen sobre la bala los gases en expansión es  $15000 \text{ N} + 10000 \frac{\text{N}}{\text{m}}x - 25000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}x^2$ , donde  $x$  está en metros ( $[x] = \text{m}$ ).

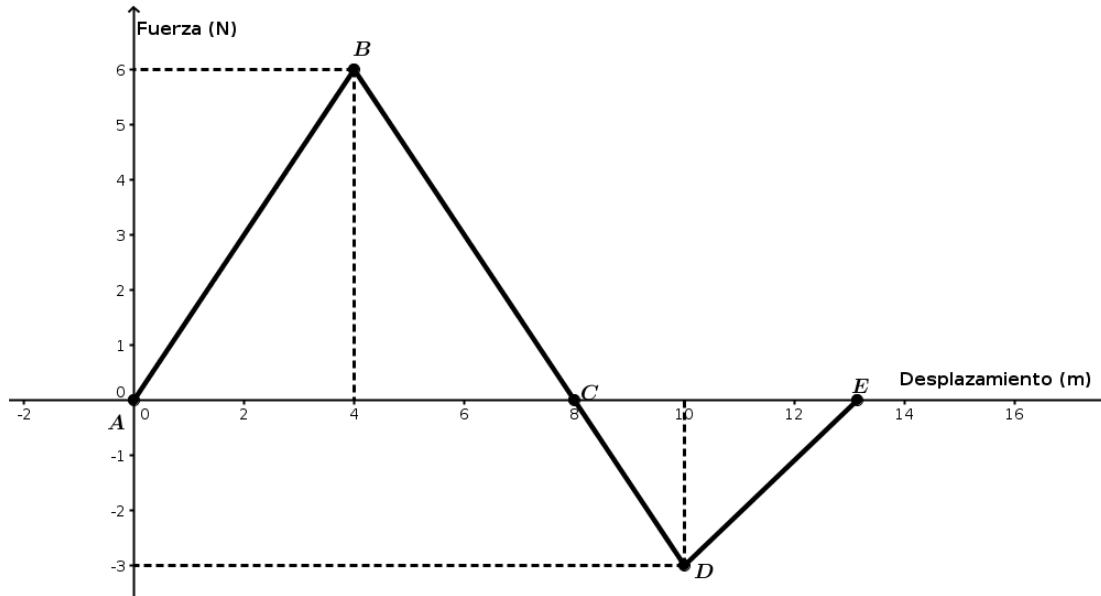
a) Determine el trabajo invertido por el gas en la bala conforme la bala recorre la longitud del cañón.

b) ¿Qué pasaría si? Si el cañón mide  $1,00 \text{ m}$  de largo, ¿cuánto trabajo se consume y cómo se compara este valor con el trabajo calculado en el inciso a)?

3. Una fuerza que actúa sobre una partícula varía con  $x$  como se muestra en la figura. Calcule el trabajo consumido por la fuerza en la partícula conforme se traslada de  $x = 0 \text{ m}$  a  $x = 6,0 \text{ m}$ .



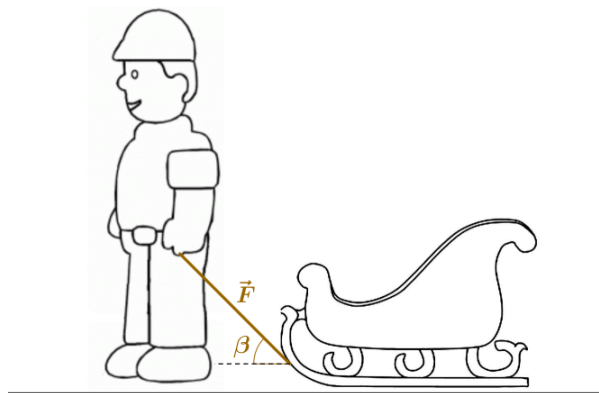
4. La fuerza que actúa sobre una partícula varía en función del desplazamiento como se muestra en la figura. Encuentre el trabajo invertido por la fuerza conforme se mueve:



- a) De  $x = 0$  m a  $x = 8$  m.
- b) De  $x = 8$  m a  $x = 10$  m.
- c) De  $x = 0$  m a  $x = 10$  m.

5. Un trabajador empuja un bloque de 58,7 lb ( $m = 26,6$  kg) una distancia de 9,54 m por un piso plano, a una rapidez constante y con una fuerza a  $32^\circ$  por debajo de la horizontal. El coeficiente de fricción cinética es 0,21. ¿Cuanto trabajo hizo esa persona en el bloque?

6. Un hombre jala un trineo de  $m$ , tirando de una cuerda a un ángulo  $\beta$  sobre la horizontal y desplazándolo una distancia de  $\Delta x$ , con una rapidez constante sobre una superficie horizontal y con fricción.



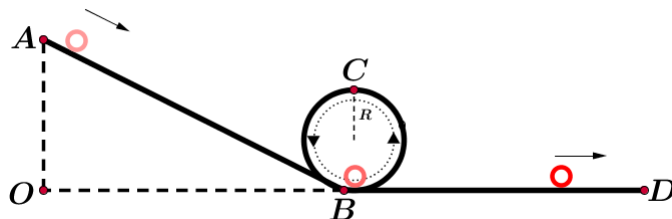
Demuestre que el trabajo del hombre sobre el trineo esta dado por la expresión:

$$W = \frac{\mu_k mg \cos \beta \Delta x}{\cos \beta + \mu_k \sin \beta}$$

7. Un bloque de masa  $m$  es empujado una distancia  $L$  sobre una pendiente, de manera que suba una distancia  $h$ . Suponiendo que no hay fricción entre la superficie de la pendiente y el bloque, y que se aplica una fuerza paralela  $\vec{F}$  a la pendiente para empujarlo hacia arriba con rapidez constante. Demuestre que el trabajo sobre el bloque está dado:

$$W = mgh$$

8. Un cuerpo de masa  $m$  y pequeñas dimensiones, se desliza sin rozamiento por el riel de la figura partiendo de  $A$  en reposo. Si  $OA = 3R$ , determine:

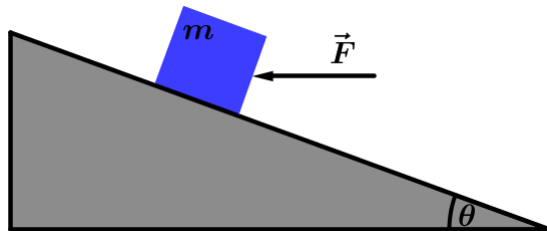


- La rapidez en el punto  $B$ .
- La energía cinética en  $C$ .
- La energía mecánica en  $D$ .

9. Un bloque de 15 kg es arrastrado sobre una superficie horizontal rugosa por una fuerza de 70 N que actúa a  $20^\circ$  arriba de la horizontal. El bloque es desplazado 5.0 m y el coeficiente de fricción cinética es 0.30. Realice:

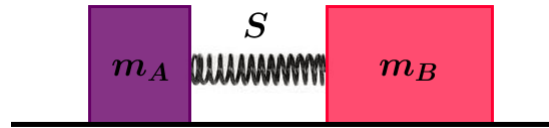
- Un diagrama de cuerpo libre que incluya todos los vectores involucrados.
- Encuentre el trabajo realizado sobre el bloque por la fuerza de 70 N.
- Encuentre el trabajo realizado sobre el bloque por la fuerza normal.
- Encuentre el trabajo realizado sobre el bloque por la fuerza de gravedad.
- Encuentre el trabajo realizado sobre el bloque por la fricción?
- Encuentre el cambio total en la energía cinética del bloque.

10. Un bloque de masa  $m = 2.2$  kg colocado en un plano inclinado (ver figura), se desplaza hacia arriba una distancia  $\Delta x = 3.1$  m, bajo la acción de una fuerza aplicada  $\vec{F}$  horizontal, si el ángulo del plano inclinado respecto a la horizontal vale  $\theta = 20^\circ$ , la fuerza aplicada tiene una magnitud de  $F = 16$  N y el coeficiente de fricción cinético vale  $\mu_k = 0.2$ ; calcule:

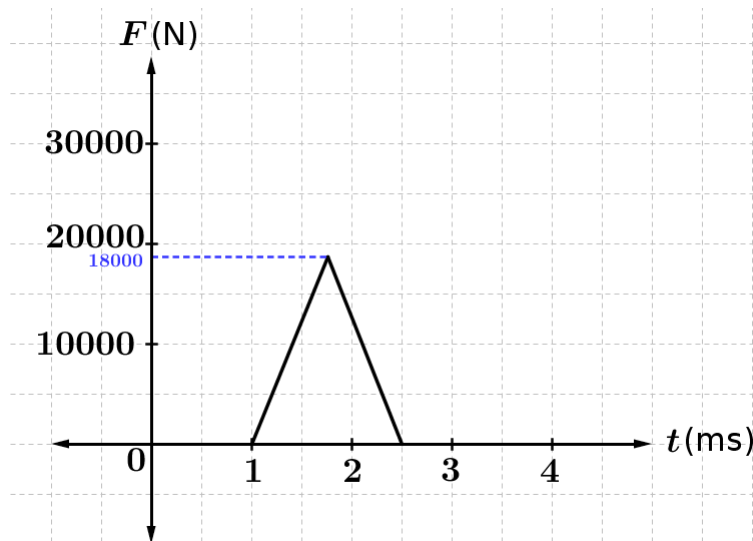


- El trabajo total ejercido sobre el bloque al desplazarlo  $\Delta x$ .
- Si el bloque tiene una rapidez inicial de  $0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , cuál será su rapidez en el instante que avanza la distancia de 3.1 m.

11. El bloque  $A$  ( $m_A = 1 \text{ kg}$ ) y el bloque  $B$  ( $m_B = 3 \text{ kg}$ ) se fuerzan uno hacia el otro, comprimiendo entre ellos un resorte (con una constante de resorte  $k = 2500 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ) hasta  $3,00 \text{ cm}$  desde su longitud de equilibrio. El resorte, que tiene masa despreciable, no está fijado a ninguno de los bloques y cae a la superficie después de expandirse. ¿Cuáles son las rapidezces del bloque  $A$  y del bloque  $B$  en este momento? (Suponga que la fricción entre los bloques y la superficie de apoyo es despreciable.)



12. En la figura se muestra una curva fuerza vs tiempo estimada para una pelota de beisbol golpeada por un bat. A partir de esta curva, determine:



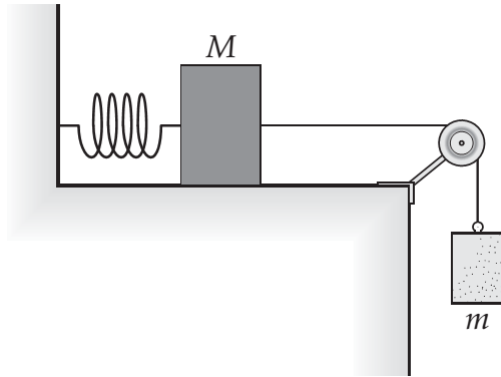
- El impulso entregado a la pelota.
- La fuerza promedio ejercida sobre la pelota.
- La fuerza máxima que se ejerce sobre la pelota.

13. Un resorte “rígido” tiene una ley de fuerza dada por  $F = -kx^3$ . El trabajo necesario para estirarlo del estado relajado  $x = 0$  a la longitud alargada  $x = l$  es  $W_0$ . En términos de  $W_0$ , ¿cuánto trabajo se requiere para extenderlo de la longitud alargada  $l$  a la longitud  $2l$ ?

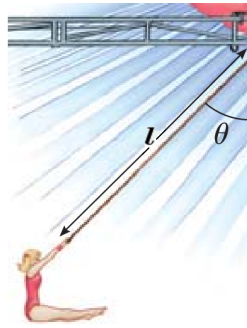
14. Un bloque de  $3.00 \text{ kg}$  está unido a dos resortes ideales horizontales, cuyas constantes de fuerza son  $k_1 = 25.0 \text{ N/cm}$  y  $k_2 = 20.0 \text{ N/cm}$ , como se observa en la figura. El sistema está inicialmente en equilibrio sobre una superficie horizontal sin fricción. Ahora el bloque se empuja  $15.0 \text{ cm}$  a la derecha y se suelta del reposo.

- ¿Cuál es la rapidez máxima del bloque? ¿En qué parte del movimiento ocurre la rapidez máxima?
- ¿Cuál es la compresión máxima del resorte 1?

15. Un bloque de  $1.5 \text{ kg}$  yace sobre una superficie plana que no ejerce fricción. Este bloque está unido a un resorte inicialmente con una longitud de relajamiento, por el lado izquierdo, con una constante de fuerza de  $55 \text{ N/m}$ . Una cuerda delgada se une al bloque, por el lado derecho y se hace pasar por encima de una polea que no ejerce fricción; del otro extremo de la cuerda pende una masa de  $500 \text{ g}$ . Si la masa suspendida se libera desde el reposo, ¿qué distancia caerá antes de detenerse?



16. Un trapecio de circo consiste en una barra suspendida de dos cables, cada uno con una longitud  $l$ , permitiendo un movimiento con una forma de arco circular. Suponga que el tamaño del cuerpo de la acrobata es pequeño comparado con la longitud  $l$ . Despreciando la influencia de la resistencia.



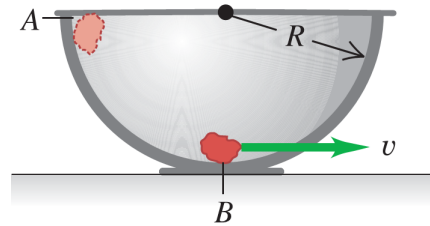
a) Demostrar que cuando se alcanza un ángulo  $\theta$  con la vertical, la acrobata debe ejercer una fuerza:

$$F_r = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_i)$$

(Donde  $\theta_i$  es el ángulo inicial de salida de la acrobata)

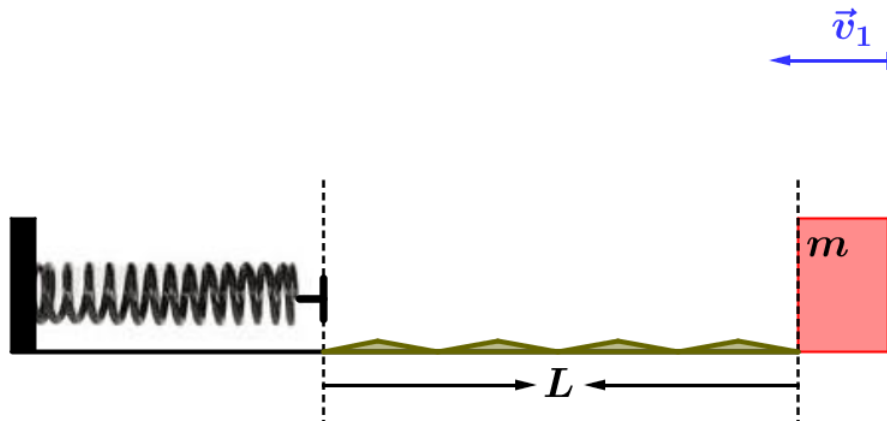
b) Determine para qué ángulo  $\theta_i$  a fuerza necesaria aplicada debe ser el doble del peso, cuando la acrobata pase por la parte más baja de la trayectoria.

17. Una piedra con masa de  $0.20 \text{ kg}$  se libera del reposo en el punto  $A$ , en el borde de un tazón hemisférico de radio  $50 \text{ cm}$  (ver figura). Suponga que la piedra es tan pequeña en comparación con el radio, que puede tratarse como partícula y suponga que la piedra se desliza en vez de rodar. El trabajo efectuado por la fricción sobre la piedra al bajar del punto  $A$  al punto  $B$  en la base del tazón es de  $0.22 \text{ J}$ . Determine:



- El trabajo efectuado sobre la piedra en los puntos de  $A$  hasta  $B$  por la fuerza normal y la gravedad.
- La rapidez de la piedra cuando llega a  $B$ .
- De las tres fuerzas que actúan sobre la piedra cuando ésta se desliza hacia abajo por el tazón, ¿cuáles (si acaso) son constantes y cuáles no lo son?
- Cuando la piedra llega al punto  $B$ , ¿cuanto vale la fuerza normal?

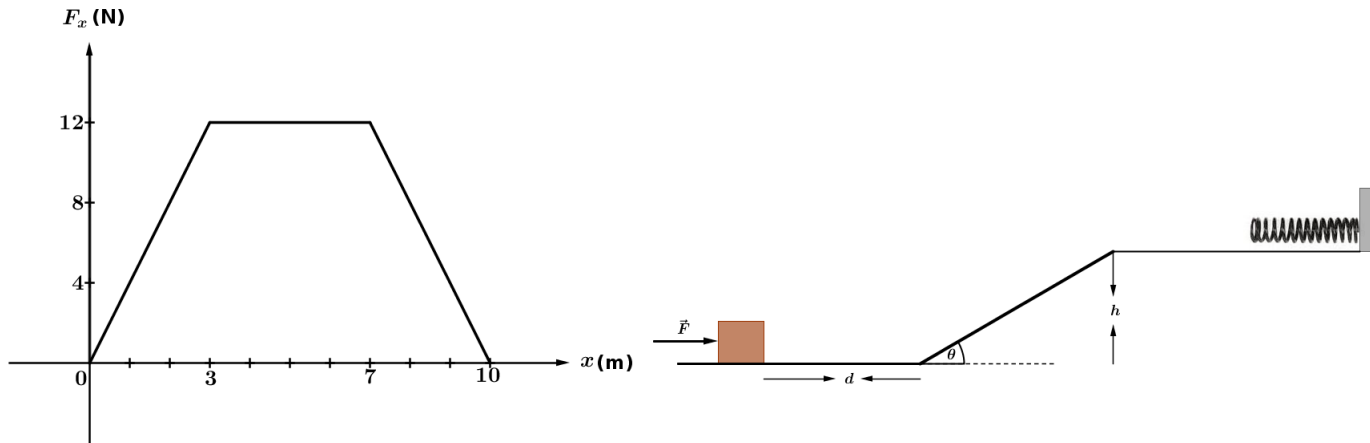
18. Una caja de  $m = 3,0 \text{ kg}$  (observe la figura) que se mueve con una rapidez  $v_1 = 13,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , entra a una superficie horizontal con rozamiento, de longitud  $L = 3,28 \text{ m}$  y con un coeficiente de fricción cinética entre ellas de  $\mu_k = 0,27$ . Después de recorrer  $L$ , choca con un resorte horizontal de masa despreciable, cuya constante de elasticidad es  $k = 7200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  y que inicialmente no posee deformación, hasta detenerse. La fuerza de fricción en esta sección es despreciable. Utilizando el Teorema de Trabajo y Energía Cinética, determine:



- La velocidad con la que la caja toca el resorte.
- La compresión máxima del resorte.
- Si la fuerza de la fricción entre las superficies no es despreciable en la sección donde se encuentra el resorte, determine la nueva compresión del resorte.

19. Se aplica una fuerza horizontal  $\vec{F}$  sobre un bloque de masa  $m = 2 \text{ kg}$  inicialmente en condición de reposo. La fuerza  $F$  depende de la posición  $x$ , tal y como se muestra en la figura. Luego de recorrer una distancia de  $d = 10 \text{ m}$  deja de actuar dicha fuerza y, el bloque sube por un plano inclinado rugoso cuyo coeficiente de fricción  $\mu = 0,2$ . El plano forma un ángulo  $\theta = 30^\circ$  con la horizontal y tiene una altura  $h = 3 \text{ m}$ .

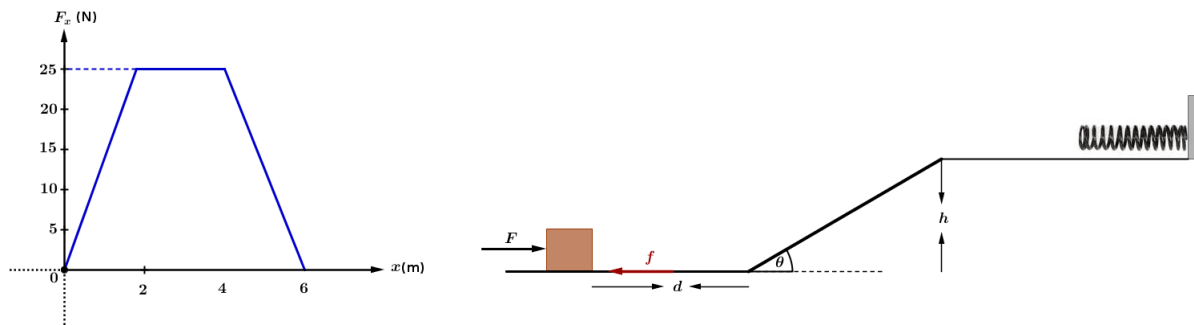
Finalmente, el bloque se desliza por una sección plana de superficie que carece de fricción hasta producir la compresión de un resorte de constante de fuerza  $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ . Utilizando la ley de conservación de la energía, determine:



- La rapidez del bloque al recorrer la distancia horizontal  $d$  bajo la acción de la fuerza  $F$ .
- La rapidez del bloque en el punto más alto del plano inclinado.
- La compresión máxima del resorte.

20. Se aplica una fuerza horizontal  $F$  sobre un bloque de masa  $m = 2 \text{ kg}$  inicialmente en condición de reposo. La fuerza  $F$  depende de la posición  $x$ , tal y como se muestra en la figura. Luego de recorrer una distancia de  $d = 6 \text{ m}$  en una superficie que ejerce una fuerza de fricción de  $2 \text{ N}$  deja de actuar dicha fuerza y, el bloque sube por un plano inclinado rugoso cuyo coeficiente de fricción cinético  $\mu_k = 0,2$ . El plano forma un ángulo  $\theta = 30^\circ$  con la horizontal y tiene una altura  $h = 3 \text{ m}$ .

Finalmente, el bloque se desliza por una sección plana de superficie que carece de fricción hasta producir la compresión de un resorte de constante de fuerza  $k = 80 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ . Utilizando la ley de conservación de la energía, determine:

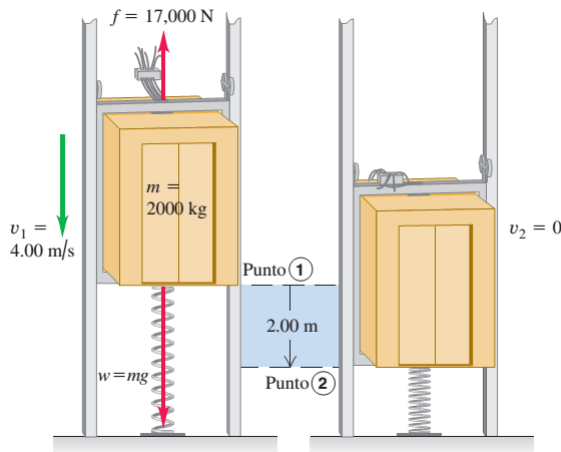


- La rapidez del bloque al recorrer la distancia horizontal  $d$  bajo la acción de la fuerza  $F$ .

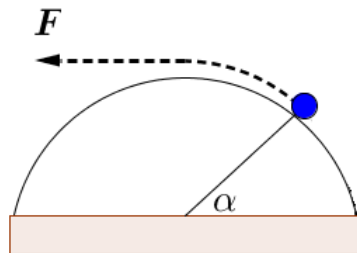
b) La rapidez del bloque en el punto más alto del plano inclinado.

c) La compresión máxima del resorte.

21. En una situación de diseño “del peor caso”, un elevador de 2000 kg con cables rotos posee una rapidez de  $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  cuando hace contacto con un resorte amortiguador en el fondo del cubo. Se supone que el resorte debe detener el elevador, comprimiéndose 2 m al hacerlo, ver figura. Durante el movimiento, un freno de seguridad aplica una fuerza de fricción de 17000 N al elevador. ¿Qué constante de fuerza debería tener el resorte? Resuelva por consideraciones de energía.



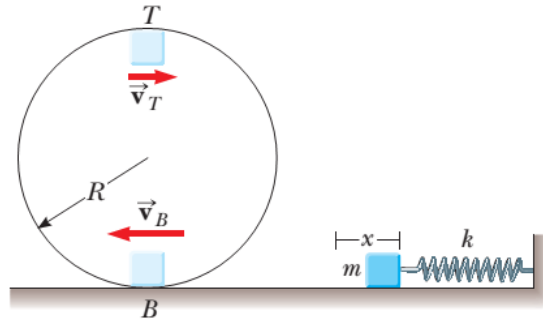
22. Una partícula pequeña de masa  $m$  se jala hacia lo alto de un medio cilindro sin fricción (de radio  $R$ ) mediante una cuerda que pasa sobre lo alto del cilindro, como se en la figura.



a) Suponiendo que la partícula se mueve con rapidez constante, demuestre que  $F = mg \cos \alpha$ . Sugerencia: Si la partícula se mueve con rapidez constante, la componente de su aceleración tangente al cilindro debe ser cero en todo momento.

b) Mediante integración directa de  $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , encuentre el trabajo invertido al mover la partícula con rapidez constante desde el fondo hasta lo alto del medio cilindro.

23. Un bloque de 0.500 kg de masa se empuja contra un resorte horizontal de masa despreciable hasta que el resorte se comprime una distancia  $x$  (ver figura). La constante de fuerza del resorte es de 450 N/m. Cuando se libera, el bloque viaja a lo largo de una superficie horizontal sin fricción al punto B, la parte baja de una pista circular vertical de radio  $R = 1.0$  m, y continúa moviéndose a lo largo de la pista. La rapidez del bloque en la parte baja de la pista es  $v_B = 12$  m/s y el bloque experimenta una fuerza de fricción promedio de 7.0 N mientras se desliza hacia arriba de la pista.



Calcule:

- La distancia de compresión  $x$ .
- ¿Qué rapidez predice para el bloque en lo alto de la pista?

Ahora para la rapidez en lo alto de la pista ( $v_T$ ), aplicamos la conservación de la energía mecánica para fuerzas no conservativas (ya que en la superficie circular si hay fricción):

- ¿En realidad el bloque llega a lo alto de la pista, o cae antes de llegar a lo alto?

24. Camino a un mirador, usted en un vehículo subiendo una pendiente de  $25^\circ$  sobre la horizontal. La masa combinada de su automóvil y usted es de 850 kg, sabiendo que va conduciendo con una velocidad constante de 10 m/s y que el coeficiente de fricción cinética entre el automóvil y carretera es de 0,25. Determine la potencia necesaria que hace el motor del automóvil para mantener la velocidad constante, desprecie la resistencia del aire.

25. Las Cataratas del Niágara vierten un promedio de  $5520 \text{ m}^3$  de agua en una caída de 49 m cada segundo. Si toda la energía potencial de esa agua se pudiese convertir en energía eléctrica, ¿cuánta potencia eléctrica podrían generar las Cataratas del Niágara?

26. Un objeto de masa  $m$  acelera uniformemente del reposo y alcanza una rapidez  $v_f$  en el tiempo  $t_f$ .

- Demuestre que el trabajo realizado en él en función del tiempo  $t$  en términos de  $v_f$  y  $t_f$  es:

$$W = \frac{1}{2} m \frac{v_f^2}{t_f^2} t^2$$

- ¿Cuál es la potencia instantánea aplicada al objeto en función del tiempo  $t$ ?

27. Una fuerza opera sobre una partícula de 2,80 kg en forma tal, que la posición de esta última en función del tiempo está dada por  $x(t) = (3,0 \text{ m/s})t - (4,0 \text{ m/s}^2)t^2 + (1,0 \text{ m/s}^3)t^3$

a) Determine el trabajo realizado por la fuerza durante los primeros 4,0 s.

b) ¿Con qué rapidez instantánea efectúa  $W$  en la partícula en el momento  $t = 3,0 \text{ s}$ ?

28. El corazón humano es una bomba potente y muy confiable; cada día admite y descarga unos 7500 L ( $7,5 \text{ m}^3$ ) de sangre. Suponga que el trabajo que realiza el corazón es el requerido para levantar esa cantidad de sangre a la altura media de una mujer estadounidense ( $1,63 \text{ m}$ ). La densidad (masa por unidad de volumen) de la sangre es de  $1,05 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Determine:

a) ¿Cuánto trabajo realiza el corazón en un día?

b) ¿Qué potencia desarrolla en watts?

*Algunas soluciones:*

1. Una fuerza  $\vec{F} = (4x\hat{i} + 3y\hat{j}) \frac{\text{N}}{\text{m}}$  actúa sobre un objeto mientras el objeto se mueve en la dirección  $x$  desde el origen hasta  $x = 5 \text{ m}$ . Encuentre el trabajo  $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$  invertido por la fuerza sobre el objeto.

Se tiene que:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

De donde es claro que  $dr = dx$ , ya el objeto se mueve desde el origen hasta  $x = 5 \text{ m}$

$$W = \int_{0 \text{ m}}^{5 \text{ m}} (4x\hat{i} + 3y\hat{j}) \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot dx\hat{i}$$

$$W = \int_{0 \text{ m}}^{5 \text{ m}} (4xdx\hat{i} \cdot \hat{i} + 3ydx\hat{i} \cdot \hat{j}) \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$W = \int_{0 \text{ m}}^{5 \text{ m}} (4x) \frac{\text{N}}{\text{m}} dx$$

$$W = 4 \frac{\text{N}}{\text{m}} \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{0 \text{ m}}^{5 \text{ m}}$$

$$W = 4 \frac{\text{N}}{\text{m}} \left( \frac{25 \text{ m}^2}{2} \right) \Big|_{0 \text{ m}}^{5 \text{ m}}$$

$$W = 50 \text{ J}$$

Este ejercicio también se puede analizar de la siguiente forma, tomando en cuenta que no se realiza ningún desplazamiento en el eje  $y$ , es claro que el trabajo en este es nulo; y como solo hay desplazamiento en el eje  $+x$ , entonces  $\phi = 0^\circ$ , con lo cual se concluye:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx \cos \phi$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x \cos \phi dx$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

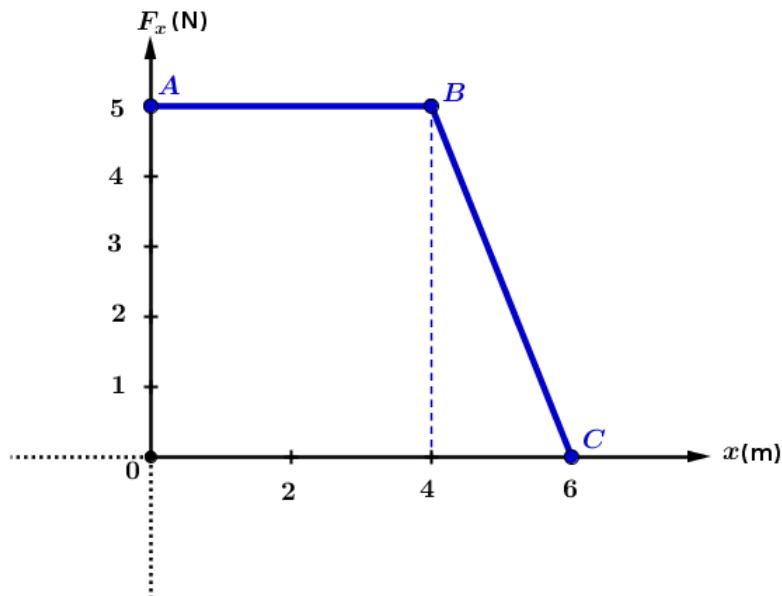
$$W = \int_{0\text{ m}}^{5\text{ m}} (4x) \frac{\text{N}}{\text{m}} dx$$

$$W = 4 \frac{\text{N}}{\text{m}} \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{0\text{ m}}^{5\text{ m}}$$

$$W = 4 \frac{\text{N}}{\text{m}} \left( \frac{25\text{ m}^2}{2} \right) \Big|_{0\text{ m}}^{5\text{ m}}$$

$$W = 50\text{ J}$$

4. Una fuerza que actúa sobre una partícula varía con  $x$  como se muestra en la figura. Calcule el trabajo consumido por la fuerza en la partícula conforme se traslada de  $x = 0\text{ m}$  a  $x = 6.0\text{ m}$ .



Claramente es el trabajo de una fuerza variable, así que lo podemos de la siguiente forma:

$$W_T = W_{AB} + W_{BC}$$

Se determinan las respectivas áreas bajo la curva, que en  $AB$  es un rectángulo y en  $BC$  es un triángulo rectángulo:

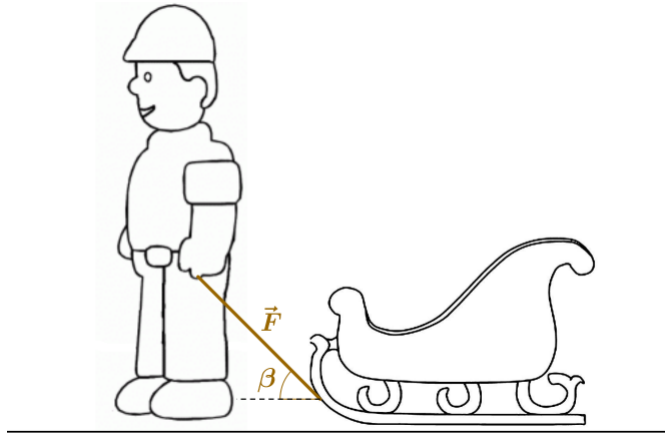
$$W_{AB} = 5\text{ N} \cdot 4\text{ m} = 20\text{ J}$$

$$W_{BC} = 0.5 (5\text{ N} \cdot 2\text{ m}) = 5\text{ J}$$

Luego:

$$W_T = 20\text{ J} + 5\text{ J} = 25\text{ J}$$

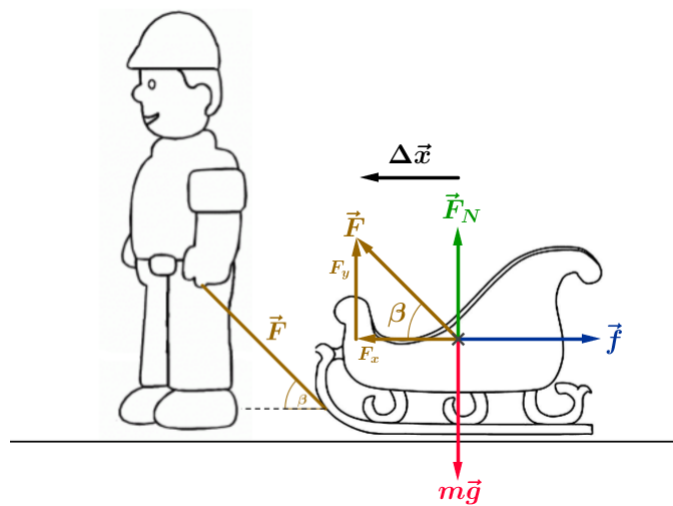
6. Un hombre jala un trineo de  $m$ , tirando de una cuerda a un ángulo  $\beta$  sobre la horizontal y desplazándolo una distancia de  $\Delta x$ , con una rapidez constante sobre una superficie horizontal y con fricción.



Demuestre que el trabajo del hombre sobre el trineo esta dado por la expresión:

$$W = \frac{\mu_k mg \cos \beta \Delta x}{\cos \beta + \mu_k \sin \beta}$$

El siguiente diagrama de cuerpo libre puede ayudar a la comprensión del ejercicio:



Se tiene que el trabajo sobre el trineo esta dado por:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$$

Como  $\vec{F}$  tiene una componente en la dirección del desplazamiento se tiene:

$$W = F \cos \beta x \quad (\odot)$$

Notese que en lo anterior se usa la componente en el eje  $x$  de la fuerza, ya que la componente en el eje  $y$  no realiza trabajo sobre el trineo debido a que es perpendicular al desplazamiento.

Se tiene por la segunda ley de Newton:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \text{ N} \\ F_x - f &= 0 \text{ N} \\ F \cos \beta - \mu_k F_N &= 0 \text{ N} \quad (*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \text{ N} \\ F_N - mg + F_y &= 0 \text{ N} \\ F_N &= mg - F_y \\ F_N &= mg - F \sin \beta \quad (**)\end{aligned}$$

Sustituyendo (\*\*) en (\*):

$$\begin{aligned}F \cos \beta - \mu_k (mg - F \sin \beta) &= 0 \text{ N} \\ F \cos \beta - \mu_k mg + \mu_k F \sin \beta &= 0 \text{ N} \\ F (\cos \beta + \mu_k \sin \beta) - \mu_k mg &= 0 \text{ N} \\ F (\cos \beta + \mu_k \sin \beta) &= \mu_k mg \\ F &= \frac{\mu_k mg}{\cos \beta + \mu_k \sin \beta} \quad (***)\end{aligned}$$

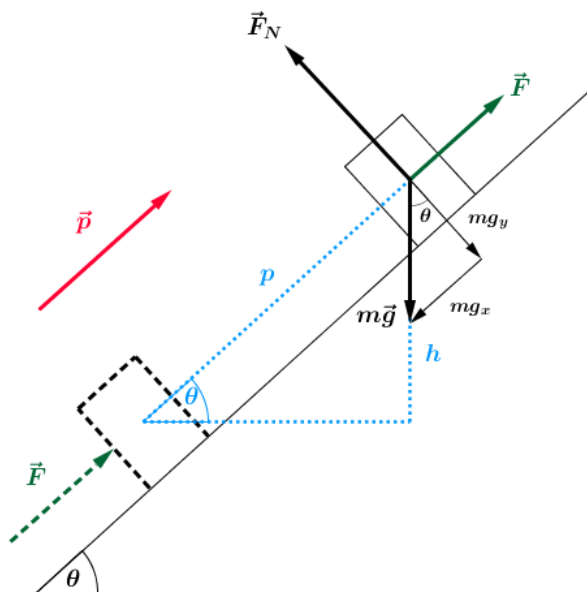
Sustituyendo lo anterior en (\*\*\*) ( $\odot$ ):

$$\begin{aligned}W &= \frac{\mu_k mg}{\cos \beta + \mu_k \sin \beta} \cdot \cos \beta \Delta x \\ W &= \frac{\mu_k mg \cos \beta \Delta x}{\cos \beta + \mu_k \sin \beta}\end{aligned}$$

7. Un bloque de masa  $m$  es empujado una distancia  $L$  sobre una pendiente, de manera que suba una distancia  $h$ . Suponiendo que no hay fricción entre la superficie de la pendiente y el bloque, y que se aplica una fuerza paralela  $\vec{F}$  a la pendiente para empujarlo hacia arriba con rapidez constante. Demuestre que el trabajo sobre el bloque está dado:

$$W = mgh$$

El siguiente diagrama de cuerpo libre puede ayudar a la comprensión del ejercicio:



Se tiene que el trabajo sobre el trineo esta dado por:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{p}$$

$$W = Fp \cos \phi \quad (\phi = 0^\circ, \vec{F} \text{ y } \vec{p} \text{ son paralelos})$$

$$W = Fp \quad (\triangleleft)$$

Se tiene por la segunda ley de Newton:

$$\sum F_x = 0 \text{ N}$$

$$F - mg \sin \theta = 0 \text{ N}$$

$$F = mg \sin \theta \quad (*)$$

Luego es claro según el diagrama que:

$$\sin \theta = \frac{h}{p} \quad (**)$$

Sustituyendo (\*\*) en (\*):

$$F = mg \cdot \frac{h}{p}$$

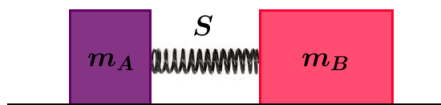
$$F = \frac{mgh}{p} \quad (***)$$

Finalmente sustituyendo (\*\*) en ( $\triangleleft$ ):

$$W = \frac{mgh}{p} \cdot p$$

$$W = mgh$$

11. El bloque  $A$  ( $m_A = 1 \text{ kg}$ ) y el bloque  $B$  ( $m_B = 3 \text{ kg}$ ) se fuerzan uno hacia el otro, comprimiendo entre ellos un resorte (con una constante de resorte  $k = 2500 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ) hasta  $3,00 \text{ cm}$  desde su longitud de equilibrio. El resorte, que tiene masa despreciable, no está fijado a ninguno de los bloques y cae a la superficie después de expandirse. ¿Cuáles son las rapidezces del bloque  $A$  y del bloque  $B$  en este momento? (Suponga que la fricción entre los bloques y la superficie de apoyo es despreciable.)



Por conservación de la energía mecánica se tiene:

$$\Delta E = 0 \text{ J}$$

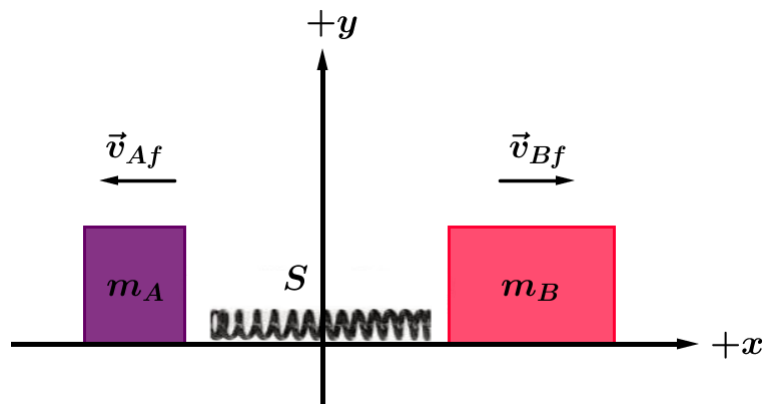
$$E_f = E_i$$

$$\frac{1}{2} m_A v_{Af}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{Bf}^2 = \frac{1}{2} k x^2$$

$$m_A v_{Af}^2 + m_B v_{Bf}^2 = k x^2 \quad (\dagger)$$

Ahora con la conservación del momento lineal:

El siguiente diagrama describe lo que sucede:



$$\begin{aligned}\vec{p}_i &= \vec{p}_f \\ \vec{0} &= m_A \vec{v}_{Af} + m_B \vec{v}_B \\ -m_A \vec{v}_{Af} (-\hat{i}) &= m_B v_B (\hat{i}) \\ m_A v_{Af} (\hat{i}) &= m_B v_B (\hat{i}) \\ \frac{m_A v_{Af}}{m_B} &= v_B\end{aligned}$$

Sustituyendo en  $v_B$  en (†):

$$m_A v_{Af}^2 + m_B \left( \frac{m_A v_{Af}}{m_B} \right)^2 = kx^2$$

$$m_A v_{Af}^2 + \frac{m_A^2 v_{Af}^2}{m_B} = kx^2$$

$$v_{Af}^2 \left( m_A + \frac{m_A^2}{m_B} \right) = kx^2$$

$$v_{Af} = \sqrt{\frac{kx^2}{m_A + \frac{m_A^2}{m_B}}}$$

$$v_{Af} = \sqrt{\frac{2500 \frac{\text{N}}{\text{m}} (3 \times 10^{-2} \text{ m})^2}{1 \text{ kg} + \frac{(1 \text{ kg})^2}{3 \text{ kg}}}}$$

$$v_{Af} = 1,29 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Luego:

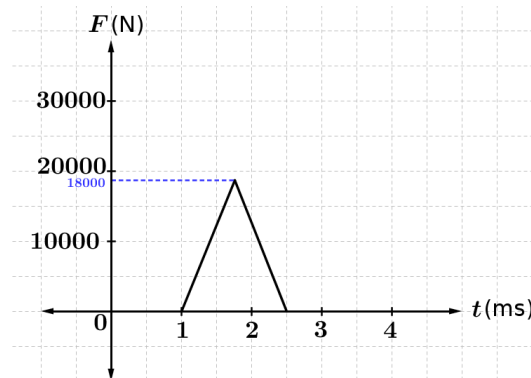
$$\frac{1 \text{ kg} \cdot 1,29 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \text{ kg}} = v_B$$

$$0,43 \frac{\text{m}}{\text{s}} = v_B$$

Lo anterior corresponde a las rapidezces, mientras que las velocidades de los bloques son:

$$\vec{v}_{Af} = 1,29 \frac{\text{m}}{\text{s}} (-\hat{i}) \text{ y } \vec{v}_B = 0,43 \frac{\text{m}}{\text{s}} (\hat{i})$$

12. En la figura se muestra una curva fuerza vs tiempo estimada para una pelota de beisbol golpeada por un bat. A partir de esta curva, determine:



a) El impulso entregado a la pelota.

El impuso esta dado por el área bajo la curva, entonces:

$$J = \frac{1}{2}bh \text{ (área del triángulo)}$$

$$J = \frac{1}{2}F\Delta t$$

$$J = \frac{1}{2} \cdot 18000 \text{ N} \cdot 1.5 \text{ ms}$$

$$J = \frac{1}{2} \cdot 18000 \text{ N} \cdot 1.5 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$J = \frac{1}{2} \cdot 18000 \text{ N} \cdot 1.5 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$J = 13.5 \text{ N}\cdot\text{s}$$

b) La fuerza promedio ejercida sobre la pelota.

$$J = F_{prom}\Delta t$$

$$\frac{J}{\Delta t} = F_{prom}$$

$$\frac{13.5 \text{ N}\cdot\text{s}}{1.5 \times 10^{-3} \text{ s}} = F_{prom}$$

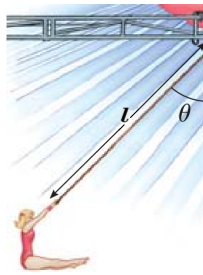
$$\frac{13.5 \text{ N}\cdot\text{s}}{1.5 \times 10^{-3} \text{ s}} = F_{prom}$$

$$9000 \text{ N} = F_{prom}$$

c) La fuerza máxima que se ejerce sobre la pelota.

Finalmente la fuerza máxima que recibe la bola, como se observa en la gráfica es de 18000 N.

16. Un trapecio de circo consiste en una barra suspendida de dos cables, cada uno con una longitud  $l$ , permitiendo un movimiento con una forma de arco circular. Suponga que el tamaño del cuerpo de la acrobata es pequeño comparado con la longitud  $l$ . Despreciando la influencia de la resistencia.

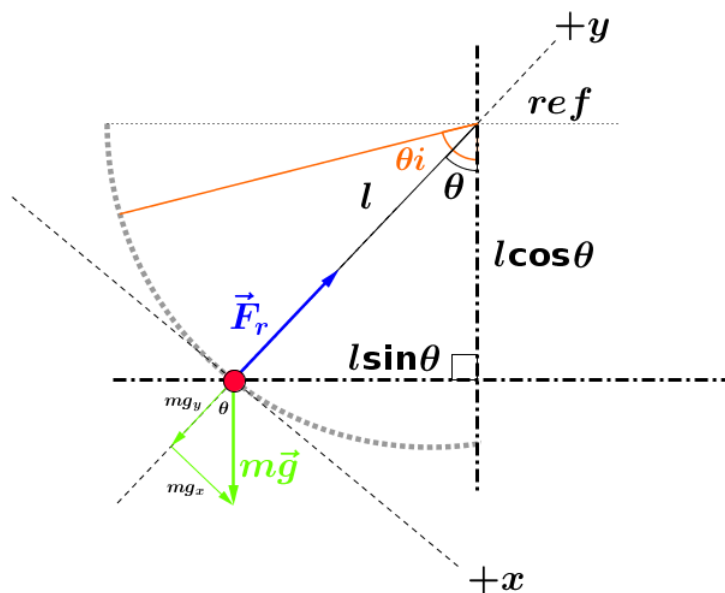


a) Demostrar que cuando se alcanza un ángulo  $\theta$  con la vertical, la acrobata debe ejercer una fuerza:

$$F_r = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_i)$$

(Donde  $\theta_i$  es el ángulo inicial de salida de la acrobata)

Primero realizamos un diagrama de cuerpo libre (DCL):



Del DCL se tiene lo siguiente:

| eje $x$          | eje $y$          |
|------------------|------------------|
| $mg \cos \theta$ | $F_r$            |
| XXXX             | $mg \sin \theta$ |

De la segunda ley de Newton en el eje radial (+y) se tiene:

$$\begin{aligned} \sum F_r &= ma_r \\ F_r - mg \cos \theta &= ma_r \\ F_r &= ma_r + mg \cos \theta (\angle) \end{aligned}$$

Como  $a_R = \frac{v^2}{r}$  y sustituyendola en ( $\times$ ) :

$$F_R = m \frac{v^2}{r} + mg \cos \theta \quad (\dagger)$$

Pero lo que hay que demostrar no esta en terminos de  $v$  ni de  $r$ , entonces debemos tomar en cuenta la conservación de la energía mecánica para determinar  $v = v_f$ , que es la velocidad que lleva la trapecista en el momento que forma el ángulo  $\theta$ .

$$\Delta E = 0 \text{ J}$$

$$E_f - E_i = 0 \text{ J}$$

$$E_f = E_i$$

$$K_f + U_f = K_i + U_i \quad (\otimes)$$

Como la trapecista parte del reposo se tiene que  $K_i = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Luego en ( $\otimes$ )se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f &= mgh_i \\ \frac{1}{2}mv_f^2 &= mgh_i - mgh_f \end{aligned}$$

Pero como se observa en el DCL  $h_i < 0 \text{ m}$  y  $h_f < 0 \text{ m}$ , esto debido a que estan debajo de la referencia horizontal, es decir debajo de la base del punto de oscilación. Luego:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = -mgh_i + mgh_f$$

Además por Pitagorás se obtiene que:  $h_i = l \cos \theta_i$  donde  $\theta_i$  es ángulo de la posición inicial de la trapecista y  $h_f = l \cos \theta_f$ , pero es claro que  $\theta_f = \theta$  (para efectos de concordancia con la demostración solicitada).

Volviendo a nuestra ecuación de conservación de energía mecánica, se tiene:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = -mgl \cos \theta_i + mgl \cos \theta$$

Se procede a sustituir  $v_f$  y se obtiene:

$$v_f = \sqrt{2(-gl \cos \theta_i + gl \cos \theta)} = v$$

Ahora se sustituye  $v$  en ( $\dagger$ ):

$$\begin{aligned} F_r &= m \frac{\left[ \sqrt{2(-gl \cos \theta_i + gl \cos \theta)} \right]^2}{r} + mg \cos \theta \\ F_r &= m \left[ \frac{2(-gl \cos \theta_i + gl \cos \theta)}{r} \right] + mg \cos \theta \\ F_r &= m \left( \frac{-2gl \cos \theta_i + 2gl \cos \theta}{r} \right) + mg \cos \theta \end{aligned}$$

Pero es claro que  $l = r$ , así que magnitudes se van a cancelar, obteniendo:

$$\begin{aligned} F_r &= m(-2g \cos \theta_i + 2g \cos \theta) + mg \cos \theta \\ F_r &= -2mg \cos \theta_i + 2mg \cos \theta + mg \cos \theta \end{aligned}$$

Y finalmente se ha demostrado lo solicitado:

$$F_r = 3mg \cos \theta - 2mg \cos \theta_i$$

$$F_r = mg (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_i)$$

b) Determine para que ángulo  $\theta_i$  a fuerza necesaria aplicada debe ser el doble del peso, cuando la acrobata pase por la parte más baja de la trayectoria.

Cuando la acrobata esta en la parte más baja  $\theta = 0^\circ$  y se tiene que  $F_r = 2mg$  entonces se tiene:

$$2mg = mg [3 \cos (0^\circ) - 2 \cos \theta_i]$$

Como se cancela  $mg$  y  $\cos (0^\circ) = 1$  obtenemos lo siguiente:

$$2 = 3 - 2 \cos \theta_i$$

$$2 - 3 = -2 \cos \theta_i$$

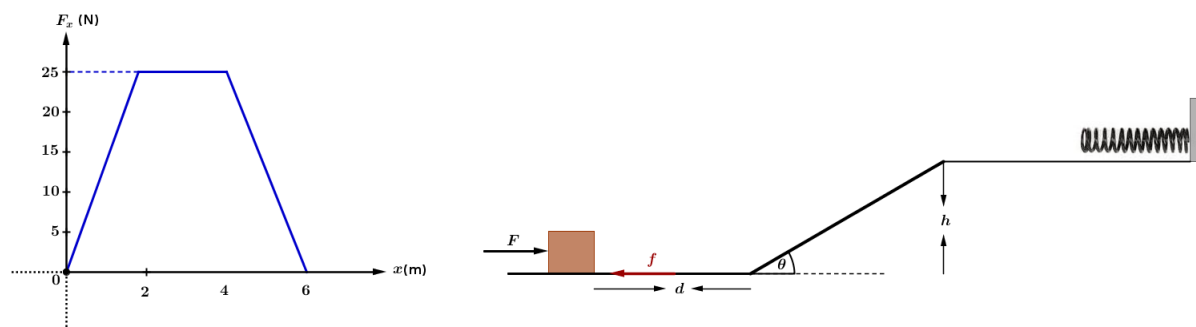
$$\frac{2 - 3}{-2} = \cos \theta_i$$

$$\cos \left( \frac{2 - 3}{-2} \right) = \cos^{-1} \theta_i$$

$$60^\circ = \theta_i$$

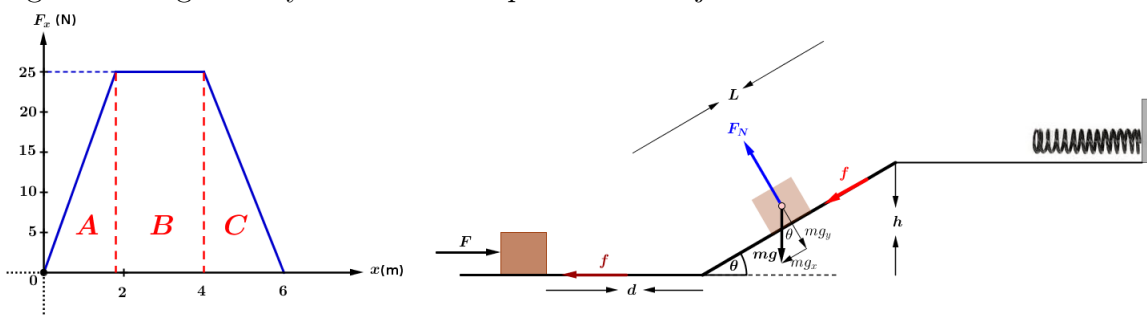
20. Se aplica una fuerza horizontal  $F$  sobre un bloque de masa  $m = 2 \text{ kg}$  inicialmente en condición de reposo. La fuerza  $F$  depende de la posición  $x$ , tal y como se muestra en la figura. Luego de recorrer una distancia de  $d = 6 \text{ m}$  en una superficie que ejerce una fuerza de fricción de  $2 \text{ N}$  deja de actuar dicha fuerza y, el bloque sube por un plano inclinado rugoso cuyo coeficiente de fricción cinético  $\mu_k = 0,2$ . El plano forma un ángulo  $\theta = 30^\circ$  con la horizontal y tiene una altura  $h = 3 \text{ m}$ .

Finalmente, el bloque se desliza por una sección plana de superficie que carece de fricción hasta producir la compresión de un resorte de constante de fuerza  $k = 80 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ . Utilizando la ley de conservación de la energía, determine:



a) La rapidez del bloque al recorrer la distancia horizontal  $d$  bajo la acción de la fuerza  $F$ .

El siguiente diagrama ayudará a la comprensión del ejercicio:



Por conservación de la energía se tiene:

$$\Delta E = W_N$$

Donde  $W_N = W_F + W_f$ :

$$E_2 - E_1 = W_F + W_f$$

$$K_2 + U_2 - (K_1 + U_1) = W_F + W_f$$

$$K_2 + U_2 - K_1 - U_1 = W_F + W_f$$

$$K_2 - K_1 = W_F + W_f$$

$$K_2 = W_F + W_f \text{ (Ya que } v_1 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \text{ porque está en reposo en el 1):}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = W_F + W_f$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = W_F + W_f$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(W_F + W_f)}{m}} \quad (\otimes)$$

Donde  $W_F$  corresponde al área bajo la curva que se obtiene de las siguientes formas: Note que la gráfica dada  $F$  vs  $x$ , forma un trapecio o dos triángulos rectángulos y un rectángulo.

$$W_F = \frac{(B + b)h}{2}$$

$$W_F = \frac{(6 \text{ m} + 2 \text{ m}) \cdot 25 \text{ N}}{2}$$

$$W_F = 100 \text{ J}$$

También:

$$W_F = W_A + W_B + W_C$$

$$W_F = \frac{b_A h_A}{2} + l_B a_B + \frac{b_C h_C}{2}$$

$$W_F = \frac{(2 \text{ m} \cdot 25 \text{ N})}{2} + 2 \text{ m} \cdot 25 \text{ N} + \frac{(2 \text{ m} \cdot 25 \text{ N})}{2}$$

$$W_F = 100 \text{ J}$$

Y  $W_f$  es el trabajo que hace la fuerza de fricción:

$$W_f = -fd$$

$$W_f = -2 \text{ N} \cdot 6 \text{ m}$$

$$W_f = -12 \text{ J}$$

Sustituyendo en  $(\otimes)$  se tiene:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(100 \text{ J} + -12 \text{ J})}{2 \text{ kg}}}$$

$$v_2 = 9,38 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) La rapidez del bloque en el punto más alto del plano inclinado.

$$\Delta E = W_f$$

$$E_3 - E_2 = W_f$$

$$K_3 + U_3 - (K_2 + U_2) = W_f$$

$$K_3 + U_3 - K_2 - U_2 = W_f$$

$$\begin{aligned}
K_3 + U_3 - K_2 &= W_f \\
\frac{1}{2}mv_3^2 + mgy_3 - \frac{1}{2}mv_2^2 &= fL \cos(180^\circ) \\
\frac{1}{2}mv_3^2 + mgy_3 - \frac{1}{2}mv_2^2 &= -fL \\
\frac{1}{2}mv_3^2 + mgh - \frac{1}{2}mv_2^2 &= -\mu_k mg \cos \theta \frac{h}{\sin \theta} \quad (\text{Ya que } y_3 = h, L = \frac{h}{\sin \theta} \text{ y } f = \mu_k mg \cos \theta)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}mv_3^2 + mgh - \frac{1}{2}mv_2^2 = -\mu_k mgh \cot \theta$$

$$\frac{1}{2}mv_3^2 + = -\mu_k mgh \cot \theta - mgh + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$v_3^2 = \frac{2}{m} \left( -\mu_k mgh \cot \theta - mgh + \frac{1}{2}mv_2^2 \right)$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{2}{m} \left( -\mu_k mgh \cot \theta - mgh + \frac{1}{2}mv_2^2 \right)}$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{2}{m} \left( -\mu_k mgh \cot \theta - mgh + \frac{1}{2}mv_2^2 \right)}$$

$$v_3 = \sqrt{2 \left( -\mu_k gh \cot \theta - gh + \frac{1}{2}v_2^2 \right)}$$

$$v_3 = \sqrt{2 \left[ -0,2 \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3 \text{ m} \cot(30^\circ) - 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3 \text{ m} + \frac{1}{2} \left( 9,38 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right]}$$

$$v_3 = 2,96 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) La compresión máxima del resorte.

$$\Delta E = W_S$$

$$E_4 - E_3 = W_S$$

$$K_4 + U_4 - (K_3 + U_3) = W_S$$

$$K_4 + U_4 - K_3 - U_3 = W_S$$

$$-K_3 = W_S$$

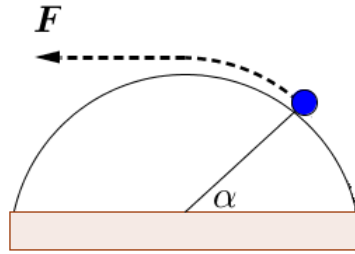
$$-\frac{1}{2}mv_3^2 = -\frac{1}{2}kx^2$$

$$\sqrt{\frac{mv_3^2}{k}} = x$$

$$\sqrt{\frac{2 \text{ kg} \left( 2,96 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{80 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} = x$$

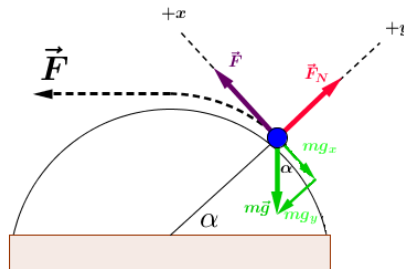
$$0,468 \text{ m} = x$$

22. Una partícula pequeña de masa  $m$  se jala hacia lo alto de un medio cilindro sin fricción (de radio  $R$ ) mediante una cuerda que pasa sobre lo alto del cilindro, como se en la figura.



a) Suponiendo que la partícula se mueve con rapidez constante, demuestre que  $F = mg \cos \alpha$ .  
Sugerencia: Si la partícula se mueve con rapidez constante, la componente de su aceleración tangente al cilindro debe ser cero en todo momento.

Como la rapidez es constante se tiene que  $a_T = 0 \text{ m/s}^2$ , entonces:



$$\sum F_x = ma_x (*)$$

Como  $a_x = a_T$ , entonces (\*) queda:

$$F - mg \cos \alpha = 0 \text{ N}$$

$$F = mg \cos \alpha$$

b) Mediante integración directa de  $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , encuentre el trabajo invertido al mover la partícula con rapidez constante desde el fondo hasta lo alto del medio cilindro.

El trabajo invertido lo obtenemos por:

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Como  $F = mg \cos \alpha$  y el desplazamiento es angular es claro que  $r = R\alpha$  y derivando respecto a  $\alpha$  tenemos  $dr = R d\alpha$ .

Luego:

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mg \cos \alpha R d\alpha$$

$$W = mgR \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha$$

Los límites de la integral están dados por el recorrido de la partícula y la posición en ese momento, es decir la mitad del semicírculo.

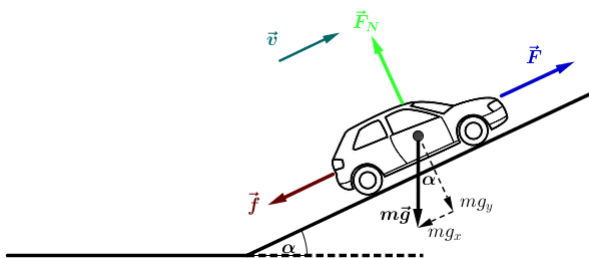
Resolviendo la integral obtenemos que el trabajo es:

$$W = mgR \cdot \sin \alpha \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$W = mgR$$

24. Camino a un mirador, usted en un vehículo subiendo una pendiente de  $25^\circ$  sobre la horizontal. La masa combinada de su automóvil y usted es de 850 kg, sabiendo que va conduciendo con una velocidad constante de 10 m/s y que el coeficiente de fricción cinética entre el automóvil y carretera es de 0,25. Determine la potencia necesaria que hace el motor del automóvil para mantener la velocidad constante, desprecie la resistencia del aire.

El siguiente diagrama puede mejorar la comprensión del ejercicio:



Se tiene que la potencia esta dada por la siguiente ecuación:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$P = Fv \cos \phi$$

Como la fuerza y la velocidad son paralelos se tiene  $\phi = 0^\circ$ , entonces:

$$P = Fv \quad (\simeq)$$

Ahora se determina la fuerza  $F$  por medio de las leyes de Newton:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ F - f - mg_x &= 0 \\ F - f - mg \sin \alpha &= 0 \\ F - \mu_k F_N - mg \sin \alpha &= 0 \\ F - \mu_k mg \cos \alpha - mg \sin \alpha &= 0 \\ F - mg (\mu_k \cos \alpha + \sin \alpha) &= 0 \\ F &= mg (\mu_k \cos \alpha + \sin \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ F_N - mg_y &= 0 \\ F_N - mg \cos \alpha &= 0 \\ F_N &= mg \cos \alpha \end{aligned}$$

$$F = 850 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} [0,25 \cos (25^\circ) + \sin (25^\circ)]$$

$$F = 5407,8 \text{ N}$$

Sustituyendo lo anterior en  $(\simeq)$  se tiene:

$$P = 5407,8 \text{ N} \cdot 10 \text{ m/s}$$

$$P = 54078 \text{ W}$$

$$P = 54 \text{ kW}$$

27. Una fuerza opera sobre una partícula de 2,80 kg en forma tal, que la posición de esta última en función del tiempo está dada por  $x(t) = (3,0 \text{ m/s})t - (4,0 \text{ m/s}^2)t^2 + (1,0 \text{ m/s}^3)t^3$

a) Determine el trabajo realizado por la fuerza durante los primeros 4,0 s.

Por medio del teorema del trabajo y la energía cinética:

$$W = \Delta K$$

$$W = K_f - K_i$$

$$W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \quad (\otimes)$$

Para obtener las respectivas velocidades derivamos:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 3,0 \text{ m/s} - 2(4,0 \text{ m/s}^2)t + 3(1,0 \text{ m/s}^3)t^2$$

$$v(0 \text{ s}) = v_i = 3,0 \text{ m/s} - 2(4,0 \text{ m/s}^2)(0 \text{ s}) + 3(1,0 \text{ m/s}^3)(0 \text{ s})^2$$

$$v(0 \text{ s}) = v_i = 3,0 \text{ m/s}$$

$$v(4 \text{ s}) = v_f = 3,0 \text{ m/s} - 2(4,0 \text{ m/s}^2)(4 \text{ s}) + 3(1,0 \text{ m/s}^3)(4 \text{ s})^2$$

$$v(4 \text{ s}) = v_f = 19,0 \text{ m/s}$$

Se sustituye  $v_i$  y  $v_f$  en  $(\otimes)$ :

$$W = \frac{1}{2}(2,80 \text{ kg})(19 \text{ m/s})^2 - \frac{1}{2}(2,80 \text{ kg})(3 \text{ m/s})^2$$

$$W = 505,4 \text{ J} - 12,6 \text{ J}$$

$$W = 492 \text{ J}$$

b) ¿Con que rapidez instantánea efectúa  $W$  en la partícula en el momento  $t = 3,0 \text{ s}$ ?

Se tiene que la potencia esta dada por:

$$P = Fv$$

Y se tiene que  $F = ma$ , entonces la potencia se puede expresar como:

$$P = mav \quad (\dagger)$$

Ahora se deriva  $v(t)$ :

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -8 \text{ m/s}^2 + (6 \text{ m/s}^3) t$$

$$a(t) = -8 \text{ m/s}^2 + (6 \text{ m/s}^3) t$$

Luego:

$$a(3 \text{ s}) = -8 \text{ m/s}^2 + (6 \text{ m/s}^3) (3 \text{ s})$$

$$a(3 \text{ s}) = 10 \text{ m/s}^2$$

$$v(3 \text{ s}) = 3,0 \text{ m/s} - 2(4,0 \text{ m/s}^2)(3 \text{ s}) + 3(1,0 \text{ m/s}^3)(3 \text{ s})^2$$

$$v(3 \text{ s}) = 6,0 \text{ m/s}$$

Se sustituyen  $a(3 \text{ s})$  y  $v(3 \text{ s})$  en (†):

$$P = (2,80 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2) \left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 168 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 168 \text{ W}$$

$$P = 168 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 168 \text{ W}$$

$$P = 168 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

$$P = 168 \text{ W}$$

28.El corazón humano es una bomba potente y muy confiable; cada día admite y descarga unos 7500 L ( $7,5 \text{ m}^3$ ) de sangre. Suponga que el trabajo que realiza el corazón es el requerido para levantar esa cantidad de sangre a la altura media de una mujer estadounidense ( $1,63 \text{ m}$ ). La densidad (masa por unidad de volumen) de la sangre es de  $1,05 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Determine:

a)¿Cuánto trabajo realiza el corazón en un día?

Se tiene que el trabajo que realiza el corazón, esta en función de la altura a la que tiene levantar esa cantidad de sangre, es decir:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{h}$$

$$W = Fh \cos \phi \quad (\star)$$

Donde  $F$  es el peso de la sangra que se levanta y  $F$  y  $h$  son paralelos y por ende  $\phi = 0^\circ$ . Entonces (★):

$$W = mgh \cos(0^\circ)$$

$$W = mgh \quad (\star\star)$$

Luego, se obtiene m con:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$\rho V = m$$

Sustituyendo m en (\*\*) se tiene:

$$W = \rho V g h$$

$$W = 1,05 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 7,5 \text{ m}^3 \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,63 \text{ m}$$

$$W = 1,26 \times 10^5 \text{ J}$$

b) ¿Qué potencia desarrolla en watts?

Luego la potencia esta dada por:

$$P = \frac{W}{t}$$

$$P = \frac{1,26 \times 10^5 \text{ J}}{1 \text{ d}}$$

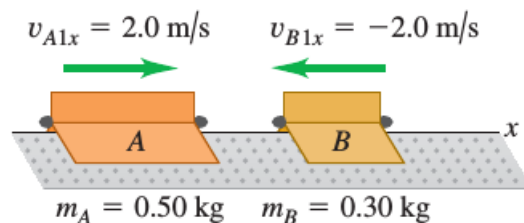
$$P = \frac{1,26 \times 10^5 \text{ J}}{86400 \text{ s}}$$

$$P = 1,46 \text{ W}$$

## Momento lineal

*Enunciados:*

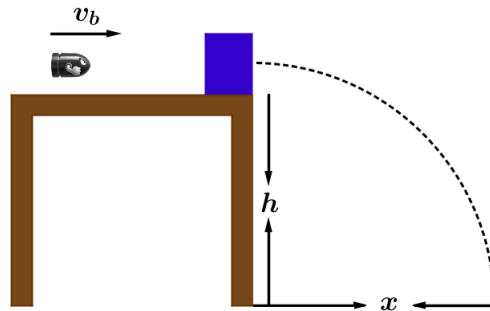
1. Dos deslizadores se acercan uno al otro sobre un riel de aire sin fricción (ver figura). Después de chocar, el deslizador B se aleja con velocidad final de 2 m/s. ¿Qué velocidad final tiene el deslizador A?



2. Un cohete se dispara verticalmente hacia arriba. En el instante en que llega a una altura de 1000 m y una rapidez de 300 m/s, explota en tres fragmentos que tienen igual masa. Un fragmento se mueve hacia arriba con una rapidez de 450 m/s, después de la explosión. El segundo fragmento tiene una rapidez de 240 m/s, y se mueve al este justo después de la explosión. ¿Cuál es la velocidad del tercer fragmento inmediatamente después de la explosión?

3. Una bala de masa  $m$  se dirige hacia un bloque de masa  $M$  que esta inicialmente en reposo en el borde de una mesa sin fricción de altura  $y$ , como se muestra en figura. La bala impacta al bloque y permanece dentro de éste y después el bloque aterriza a una distancia  $x$  desde la parte más baja de la mesa. Demuestre que la rapidez de la bala esta dada por la siguiente expresión:

$$v_b = \frac{(m + M)}{m} \sqrt{\frac{x^2 g}{2y}}$$

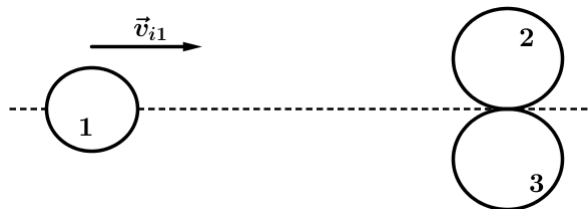


4. Una pelota de 1 kg se mueve a 12 m/s choca frontalmente con una pelota de 2 kg que se desplaza a 24 m/s en la misma dirección pero en sentido contrario. Encuentre la velocidad de cada una de las pelotas después del impacto sabiendo que el momento lineal se conserva, en cada uno de los siguientes casos:

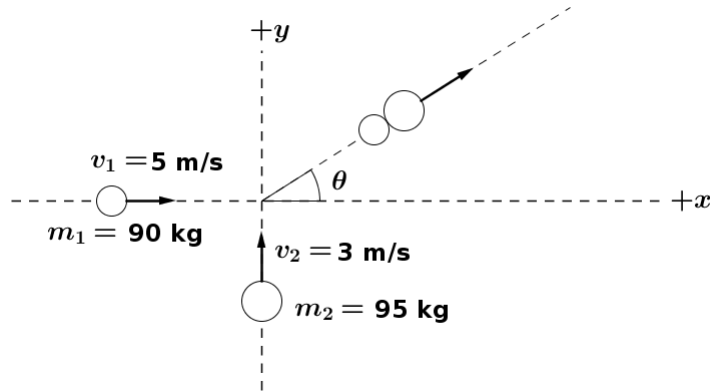
- a) Si  $\epsilon = \frac{2}{3}$ .
- b) Si las pelotas quedan unidas.
- c) Si el choque es perfectamente elástico.

5. Dos pelotas idénticas chocan de frente. La velocidad inicial de una es 0,75 m/s al este, mientras que la otra es de 0,43 m/s al oeste. Si el choque es totalmente elástico, ¿cuál es la velocidad final de cada pelota?

6. Una bola de 2 kg golpea otras dos de 3 kg, cada una inicialmente en reposo. La bola de 2 kg sigue moviéndose en la misma dirección que tenía al principio, pero su rapidez es la mitad de la original. En el sistema de referencia en el que las masas de 3 kg estaban en reposo antes del choque, se observa que dichas masas se mueven en direcciones perpendiculares entre sí, con el mismo ángulo de desviación en magnitud, con una rapidez de 3 m/s. Calcule la energía cinética ( $\Delta K$ ) ganada o perdida en el choque.

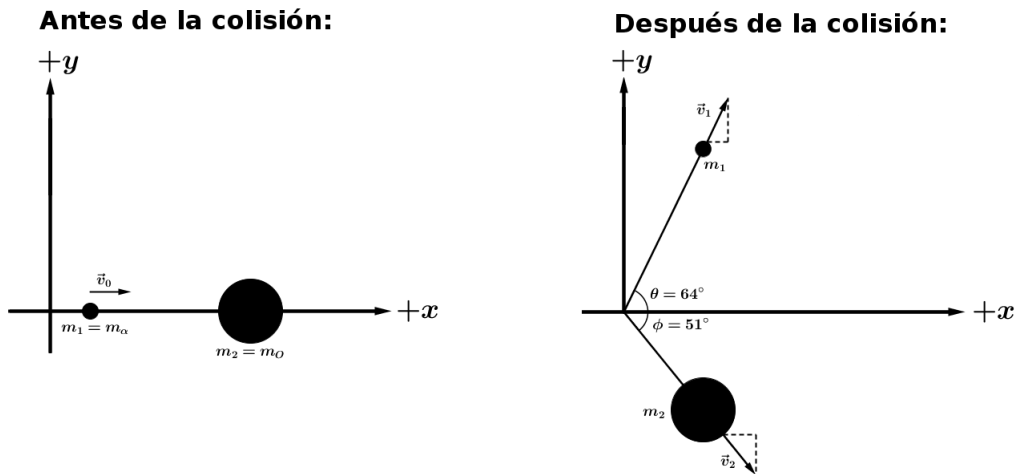


7. Un defensa de 90 kg que corre al este con una rapidez de  $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  es tacleado por un oponente de 95 kg que corre al norte con una rapidez de  $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Si la colisión es completamente inelástica, ver figura.



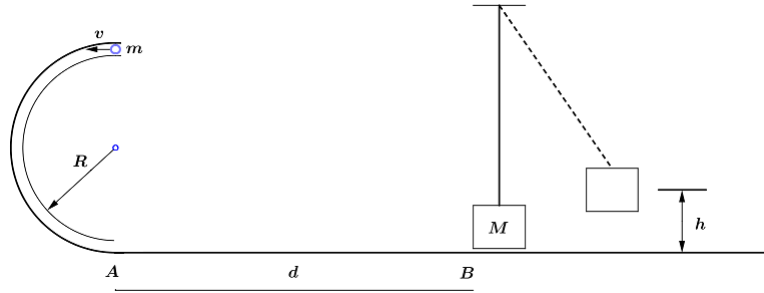
- Calcule la rapidez y dirección de los jugadores inmediatamente después de la tacleada.
- Determine la energía cinética perdida como resultado de la colisión.

8. Una partícula alfa choca con un núcleo de oxígeno inicialmente en reposo. Se dispersa en un ángulo de  $64^\circ$  arriba de su dirección inicial de movimiento, y el núcleo de oxígeno rebota en un ángulo de  $51^\circ$  por debajo de la dirección original de movimiento de la partícula alfa. La rapidez final del núcleo es  $1,20 \times 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . La masa del núcleo de oxígeno tiene un valor de 4 veces la partícula alfa.



- ¿Qué velocidad final alcanza la partícula alfa?
- Por medio de los cálculos necesarios correctos indique si la colisión es elástica o inelástica.

9. Por el carril circular sin rozamiento de radio  $R = 1\text{ m}$  de la figura se lanza una partícula de masa  $m$  con una rapidez  $v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . En el tramo rectilíneo siguiente de longitud  $d = 4\text{ m}$  el coeficiente de rozamiento cinético entre la masa y el suelo es  $\mu_k = 0.6$ . Suspendeda de una cuerda y en reposo se encuentra una masa  $M = 2m$ , como se muestra en la figura, determine:



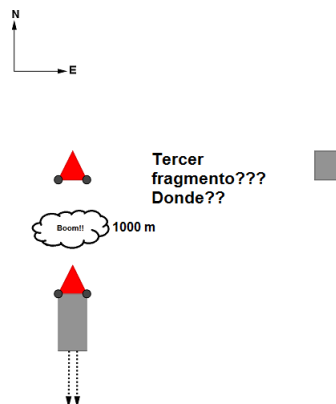
- La rapidez de  $m$  al final del tramo circular. Resuelva por consideraciones de la energía.
- La rapidez de la masa  $m$ , cuando ha recorrido el tramo horizontal de longitud  $d$ . Resuelva usando el teorema trabajo-energía cinética. Incluya los diagramas de fuerzas.
- Cuando la masa  $m$  llega a la posición donde se encuentra  $M$  choca elásticamente con ella.
- La altura  $h$  a la que sube la masa  $M$ .

10. El núcleo del  $^{214}\text{Po}$  decae radiactivamente emitiendo una partícula alfa ( $m_\alpha = 6.65 \times 10^{-27}\text{ kg}$ ) con una energía cinética de  $1.23 \times 10^{-12}\text{ J}$ , medida en el marco de referencia del laboratorio. Suponiendo que el Po estaba inicialmente en reposo en este marco, calcule la velocidad de retroceso del núcleo que queda después de la desintegración.

*Algunas soluciones:*

2. Un cohete se dispara verticalmente hacia arriba. En el instante en que llega a una altura de  $1000\text{ m}$  y una rapidez de  $300\text{ m/s}$ , explota en tres fragmentos que tienen igual masa. Un fragmento se mueve hacia arriba con una rapidez de  $450\text{ m/s}$ , después de la explosión. El segundo fragmento tiene una rapidez de  $240\text{ m/s}$ , y se mueve al este justo después de la explosión. ¿Cuál es la velocidad del tercer fragmento inmediatamente después de la explosión?

Un dibujo de la situación puede ser el siguiente:



Se tiene antes de la explosión:

$$\vec{v}_i = (300 \text{ m/s}) \hat{j}$$

$$m_i = M$$

Después de la explosión:

$$\vec{v}_{1f} = (450 \text{ m/s}) \hat{j}$$

$$m_1 = \frac{M}{3}$$

$$\vec{v}_{2f} = (240 \text{ m/s}) \hat{i}$$

$$m_2 = \frac{M}{3}$$

$$\vec{v}_{3f} = ?$$

$$m_3 = \frac{M}{3}$$

Con la conservación del momento lineal:

$$\Delta \vec{p} = 0$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

$$M (300 \text{ m/s}) \hat{j} = \frac{M}{3} (450 \text{ m/s}) \hat{j} + \frac{M}{3} (240 \text{ m/s}) \hat{i} + \frac{M}{3} \vec{v}_{3f}$$

$$M (300 \text{ m/s}) \hat{j} = \frac{M}{3} [(450 \text{ m/s}) \hat{j} + (240 \text{ m/s}) \hat{i} + \vec{v}_{3f}]$$

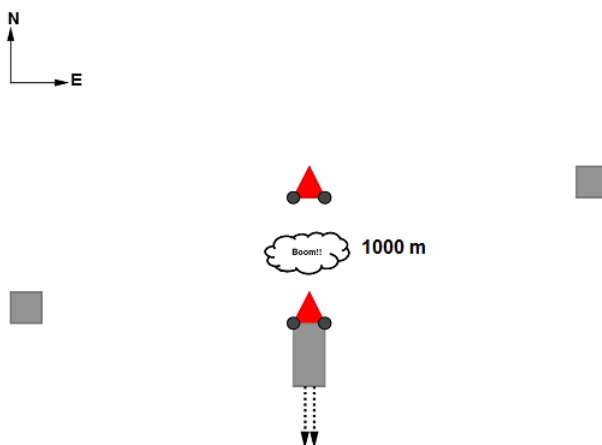
$$M (300 \text{ m/s}) \hat{j} \cdot \frac{3}{M} - 450 \text{ m/s} \hat{j} - 240 \text{ m/s} \hat{i} = \vec{v}_{3f}$$

$$(900 \text{ m/s} - 450 \text{ m/s}) \hat{j} - 240 \text{ m/s} \hat{i} = \vec{v}_{3f}$$

$$450 \text{ m/s} \hat{j} - 240 \text{ m/s} \hat{i} = \vec{v}_{3f}$$

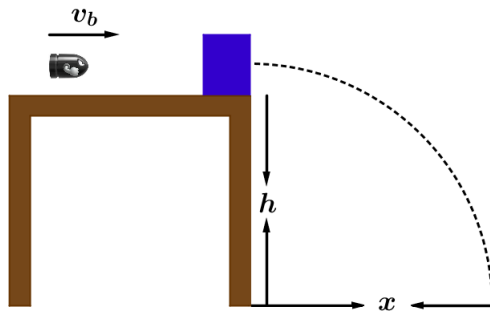
$$-240 \text{ m/s} \hat{i} + 450 \text{ m/s} \hat{j} = \vec{v}_{3f}$$

Un posible dibujo de la situación completa sería el siguiente:



3. Una bala de masa  $m$  se dirige hacia un bloque de masa  $M$  que esta inicialmente en reposo en el borde de una mesa sin fricción de altura  $y$ , como se muestra en figura. La bala impacta al bloque y permanece dentro de éste y después el bloque aterriza a una distancia  $x$  desde la parte más baja de la mesa. Demuestre que la rapidez de la bala esta dada por la siguiente expresión:

$$v_b = \frac{(m + M)}{m} \sqrt{\frac{x^2 g}{2y}}$$



Con conservación del momento lineal se puede obtener la velocidad de la bala  $v_b$ :

$$p_i = p_f \quad (\clubsuit)$$

Tome en cuenta otros detalles como los siguientes, antes de comenzar a desarrollar  $(\clubsuit)$ :

$v_B$  es la velocidad del bloque inicialmente la cual es  $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

$v$  es la velocidad inicial de  $m + M$ .

Luego:

$$mv_b + Mv_B = (m + M) v$$

$$mv_b = (m + M) v$$

$$v_b = \frac{(m + M) v}{m}$$

Pero  $v$  es la velocidad inicial de  $m + M$  (bala + bloque) en la situación de movimiento parabolico que se da de la mesa al suelo, y es la componente horizontal es decir:

$$v = v_{0x} = v_x$$

Y sabemos de proyectiles y caída libre lo siguiente:

$$x = vt$$

$$\frac{x}{t} = v \quad (+)$$

Luego:

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Si se toma como referencia el borde de la mesa se tiene:

$$y = -h$$

$$y_0 = 0 \text{ m:}$$

Luego:

$$-h = -\frac{1}{2}gt^2$$

Ya que es claro que  $v_{0y} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  por la velocidad inicial unicamente tiene componente en  $x$ .  
Entonces desjando  $t$ :

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$
$$\sqrt{\frac{2h}{g}} = t$$

Sustituyento  $t$  en (+):

$$\frac{x}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} = v$$

$$\frac{x}{\sqrt{2h}} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = v$$

$$\frac{x}{\sqrt{2h}} \frac{1}{\sqrt{g}} = v$$

$$\frac{x\sqrt{g}}{\sqrt{2h}} = v$$

$$\frac{\sqrt{x^2g}}{\sqrt{2h}} = v$$

$$\sqrt{\frac{x^2g}{2h}} = v$$

Ahora se incorpora este valor de  $v$  en  $v_b$ :

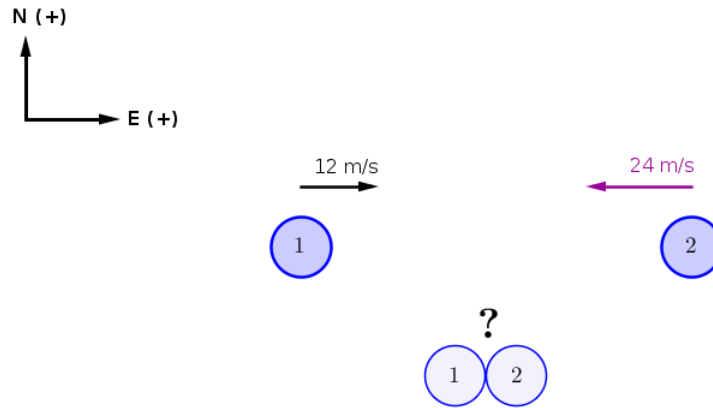
$$v_b = \frac{(m+M)}{m} \sqrt{\frac{x^2g}{2h}}$$

Queda para trabajo del estudiante la sencilla demostración del analisis dimensional.

4. Una pelota de 1 kg se mueve a 12 m/s choca frontalmente con una pelota de 2 kg que se desplaza a 24 m/s en la misma dirección pero en sentido contrario. Encuentre la velocidad de cada una de las pelotas después del impacto sabiendo que el momento lineal se conserva, en cada uno de los siguientes casos:

a) Si  $\epsilon = \frac{2}{3}$ .

El siguiente diagrama ayudará a la comprensión del ejercicio, antes de la colisión:



Como el momento lineal se conserva se tiene que:

$$\Delta \vec{p} = 0$$

$$\vec{p} = \vec{p}_0$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02}$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 v_{01} (\hat{i}) + m_2 v_{02} (-\hat{i})$$

$$(1 \text{ kg} v_1 + 2 \text{ kg} v_2) \hat{i} = (1 \text{ kg} \cdot 12 \text{ m/s} - 2 \text{ kg} \cdot 24 \text{ m/s}) \hat{i}$$

$$(1 \text{ kg} v_1 + 2 \text{ kg} v_2) \hat{i} = \left( 12 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} - 48 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \hat{i}$$

$$1 \text{ kg} v_1 + 2 \text{ kg} v_2 = -36 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_1 + 2v_2 = -36 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1)$$

Luego:

$$\epsilon = \frac{v_2 - v_1}{v_{01} - v_{02}}$$

$$\epsilon (v_{01} - v_{02}) = v_2 - v_1$$

$$\frac{2}{3} [12 \text{ m/s} - (-24 \text{ m/s})] = v_2 - v_1$$

$$\frac{2}{3} (12 \text{ m/s} + 24 \text{ m/s}) = v_2 - v_1$$

$$24 \text{ m/s} = v_2 - v_1 \quad (2)$$

Con (1) y (2) se forma el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} v_1 + 2v_2 = -36 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v_2 - v_1 = 24 \text{ m/s} \end{cases}$$

De donde se tiene que:

$$\begin{cases} v_1 = -28 \text{ m/s} \\ v_2 = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$



b) Si las pelotas quedan unidas.

Para este caso se tiene que  $v_2 = v_1 = v$ .

$$\epsilon = \frac{v_2 - v_1}{v_{01} - v_{02}}$$

$$\epsilon = \frac{v - v}{v_{01} - v_{02}}$$

$$\epsilon = \frac{0}{v_{01} - v_{02}}$$

$$\epsilon = 0$$

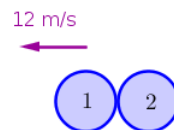
De (1) se tiene que:

$$v_1 + 2v_2 = -36 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v + 2v = -36 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$3v = -36 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = -12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



c) Si el choque es perfectamente elástico.

Para este caso  $\epsilon = 1$ , entonces:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{v_2 - v_1}{v_{01} - v_{02}} \\ \epsilon (v_{01} - v_{02}) &= v_2 - v_1 \\ 1 [12 \text{ m/s} - (-24 \text{ m/s})] &= v_2 - v_1 \\ 1 (12 \text{ m/s} + 24 \text{ m/s}) &= v_2 - v_1 \\ 36 \text{ m/s} &= v_2 - v_1 \quad (3)\end{aligned}$$

Con (1) y (3) se forma el siguiente sistema de ecuaciones:

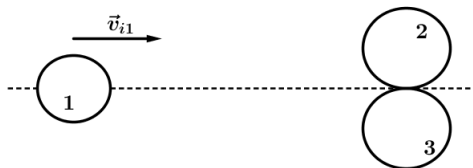
$$\begin{cases} v_1 + 2v_2 = -36 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v_2 - v_1 = 36 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

De donde se tiene que:

$$\begin{cases} v_1 = -36 \text{ m/s} \\ v_2 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$



6. Una bola de 2 kg golpea otras dos de 3 kg, cada una inicialmente en reposo. La bola de 2 kg sigue moviéndose en la misma dirección que tenía al principio, pero su rapidez es la mitad de la original. En el sistema de referencia en el que las masas de 3 kg estaban en reposo antes del choque, se observa que dichas masas se mueven en direcciones perpendiculares entre sí, con el mismo ángulo de desviación en magnitud, con una rapidez de 3 m/s. Calcule la energía cinética ( $\Delta K$ ) ganada o perdida en el choque.



Antes de comenzar a resolver el ejercicios se debe tener presente lo siguiente:

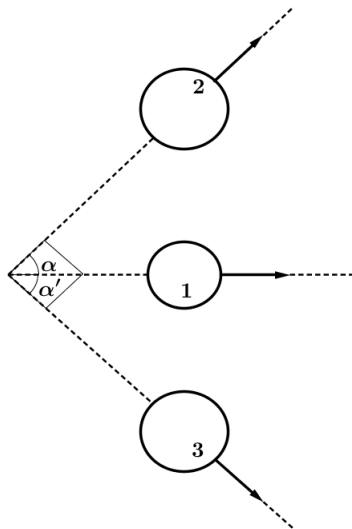
$\Delta K > 0$  hay ganancia de energía.

$\Delta K < 0$  perdida de energía.

Y que  $\Delta K = K_f - K_i$  entonces:

$$\Delta K = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 + \frac{1}{2}m_3v_{3f}^2 - \left(\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 + \frac{1}{2}m_3v_{3i}^2\right)$$

De la situación descrita en la colisión, se tiene que:



| Antes                     | Después                                                                                                                                              |
|---------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\vec{v}_{1i} = v\hat{i}$ | $\vec{v}_{1f} = \frac{v}{2}\hat{i}$                                                                                                                  |
| $\vec{v}_{2i} = 0\hat{i}$ | $\vec{v}_{2f} = v_{2f} \cos \alpha \hat{i} + v_{2f} \sin \alpha \hat{j} = 3 \frac{m}{s} \cos \alpha \hat{i} + 3 \frac{m}{s} \sin \alpha \hat{j}$     |
| $\vec{v}_{3i} = 0\hat{i}$ | $\vec{v}_{3f} = v_{3f} \cos \alpha' \hat{i} - v_{3f} \sin \alpha' \hat{j} = 3 \frac{m}{s} \cos \alpha' \hat{i} - 3 \frac{m}{s} \sin \alpha' \hat{j}$ |

Como  $\alpha + \alpha' = 90^\circ$  se tiene que  $\alpha = \alpha' = 45^\circ$

Del cuadro anterior es claro que:

$$\Delta K = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 + \frac{1}{2}m_3v_{3f}^2 - \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 + \frac{1}{2}m_3v_{3f}^2 - \frac{1}{2}m_1v^2 (*)$$

Además del cuadro se nota, que no se sabe el valor  $v$  y de (\*) nos damos cuenta que  $v_{1f}$  y  $v_{1i}$  dependen de  $v$ , por medio de la conservación del momento lineal obtendremos  $v$ :

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

Desarrollando lo anterior:

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} + m_3\vec{v}_{3i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} + m_3\vec{v}_{3f}$$

$$m_1\vec{v}_{1i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} + m_3\vec{v}_{3f}$$

$$m_1v\hat{i} = m_1\frac{v}{2}\hat{i} + m_2(v_{2f} \cos \alpha \hat{i} + v_{2f} \sin \alpha \hat{j}) + m_3(v_{3f} \cos \alpha' \hat{i} - v_{3f} \sin \alpha' \hat{j})$$

$$m_1 v \hat{i} = m_1 \frac{v}{2} \hat{i} + m_2 v_{2f} \cos \alpha \hat{i} + m_2 v_{2f} \sin \alpha \hat{j} + m_3 v_{3f} \cos \alpha' \hat{i} - m_3 v_{3f} \sin \alpha' \hat{j} \quad (\Xi)$$

De  $(\Xi)$  se despeja  $v$ , y aplicando el algebra vectorial respectiva se tiene:

$$\begin{aligned} 0\hat{i} + 0\hat{j} &= m_1 \frac{v}{2} \hat{i} + m_2 v_{2f} \cos \alpha \hat{i} + m_2 v_{2f} \sin \alpha \hat{j} + m_3 v_{3f} \cos \alpha' \hat{i} - m_3 v_{3f} \sin \alpha' \hat{j} - m_1 v \hat{i} \\ 0\hat{i} + 0\hat{j} &= \left( m_1 \frac{v}{2} - m_1 v \right) \hat{i} + (m_2 v_{2f} \cos \alpha + m_3 v_{3f} \cos \alpha') \hat{i} + (m_2 v_{2f} \sin \alpha - m_3 v_{3f} \sin \alpha') \hat{j} \end{aligned}$$

De lo anterior se obtienen dos ecuaciones una en  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ , como  $v$  solo esta presente en  $\hat{i}$ , debido que la bola 1 solo se mueve en el eje  $+x$ , se resuelve la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} 0\hat{i} &= \left( m_1 \frac{v}{2} - m_1 v \right) \hat{i} + (m_2 v_{2f} \cos \alpha + m_3 v_{3f} \cos \alpha') \hat{i} \\ 0\hat{i} &= \left( -m_1 \frac{v}{2} \right) \hat{i} + (m_2 v_{2f} \cos \alpha + m_3 v_{3f} \cos \alpha') \hat{i} \\ m_1 \frac{v}{2} \hat{i} &= (m_2 v_{2f} \cos \alpha + m_3 v_{3f} \cos \alpha') \hat{i} \\ v \hat{i} &= \frac{2(m_2 v_{2f} \cos \alpha + m_3 v_{3f} \cos \alpha')}{m_1} \hat{i} \end{aligned}$$

Sustituyendo por los valores respectivos se tiene:

$$\begin{aligned} v \hat{i} &= \frac{2 \left[ 3 \text{ kg} \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cos(45^\circ) + 3 \text{ kg} \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cos(45^\circ) \right]}{2 \text{ kg}} \hat{i} \\ v \hat{i} &= 12.72 \frac{\text{m}}{\text{s}} \hat{i} \end{aligned}$$

Se tiene presente entonces que:  $v = 12.72 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

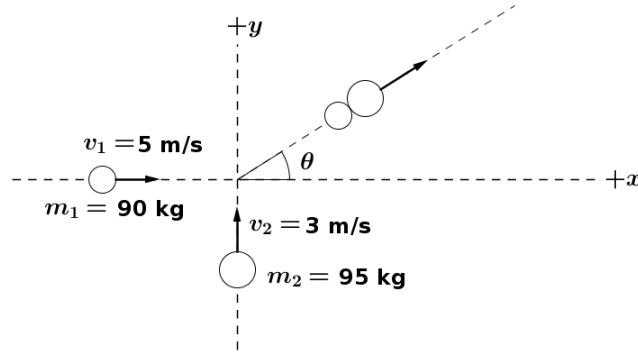
Antes de sustituir  $v$  en  $(*)$ , se deben obtener las magnitudes de  $\vec{v}_{2f}$  y  $\vec{v}_{3f}$  las cuales son:

$$|\vec{v}_{2f}| = v_{2f} = 2.99 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ y } |\vec{v}_{3f}| = v_{3f} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ kg} \left( \frac{12.72 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \text{ kg} \left( 2.99 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \text{ kg} \left( 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ kg} \left( 12.72 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \\ \Delta K &= (40.44 + 13.41 + 13.5 - 161.7) \text{ J} \\ \Delta K &= -94.35 \text{ J} \end{aligned}$$

7. Un defensa de 90 kg que corre al este con una rapidez de  $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  es tacleado por un oponente de 95 kg que corre al norte con una rapidez de  $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Si la colisión es completamente inelástica, ver figura.



a) Calcule la rapidez y dirección de los jugadores inmediatamente después de la tacleada. Se tiene por conservación del momento lineal:

$$\begin{aligned}\vec{P}_i &= \vec{P}_f \\ m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 &= (m_1 + m_2) \vec{v}_f \\ \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} &= \vec{v}_f \\ \frac{90 \text{ kg} \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \hat{i} + 95 \text{ kg} \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \hat{j}}{90 \text{ kg} + 95 \text{ kg}} &= \vec{v}_f \\ 2,45 \frac{\text{m}}{\text{s}} \hat{i} + 1,54 \frac{\text{m}}{\text{s}} \hat{j} &= \vec{v}_f\end{aligned}$$

Ahora la rapidez se obtiene con:

$$|\vec{v}_f| = v_f = \sqrt{\left(2,45 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(1,54 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 2,89 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Y su dirección:

$$\begin{aligned}\theta &= \tan^{-1} \left( \frac{1,54 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2,45 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \right) \\ \theta &= 32^\circ\end{aligned}$$

b) Determine la energía cinética perdida como resultado de la colisión.

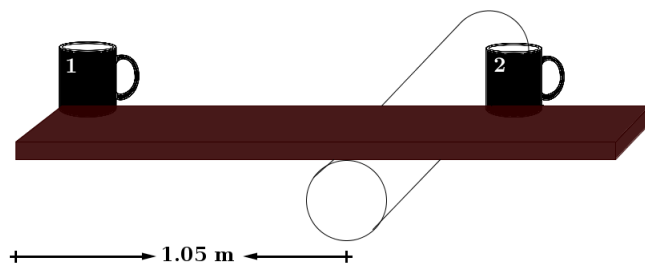
Luego la energía cinética perdida se obtiene con:

$$\begin{aligned}\Delta K &= K_f - K_i \text{ (donde } \Delta K < 0) \\ \Delta K &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 - \left( \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) \\ \Delta K &= \frac{1}{2} (185 \text{ kg}) \left( 2,89 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left[ \frac{1}{2} \cdot 90 \text{ kg} \left( 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 95 \text{ kg} \left( 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right] \\ \Delta K &= -780 \text{ J}\end{aligned}$$

## Sistema de partículas

### Enunciados:

1. Dos tazas se colocan sobre una tabla uniforme que se equilibra sobre un cilindro (ver figura). La tabla tiene una masa  $2.00\text{ kg}$  y  $2.00\text{ m}$  de longitud. La masa de la taza 1 es de  $200\text{ g}$  y está colocada a  $1.05\text{ m}$  a la izquierda del punto equilibrio. La masa de la taza 2 es de  $400\text{ g}$ . ¿Dónde debería colocarse la taza 2 para hacer equilibrio (con respecto al extremo de la derecha de la tabla)?



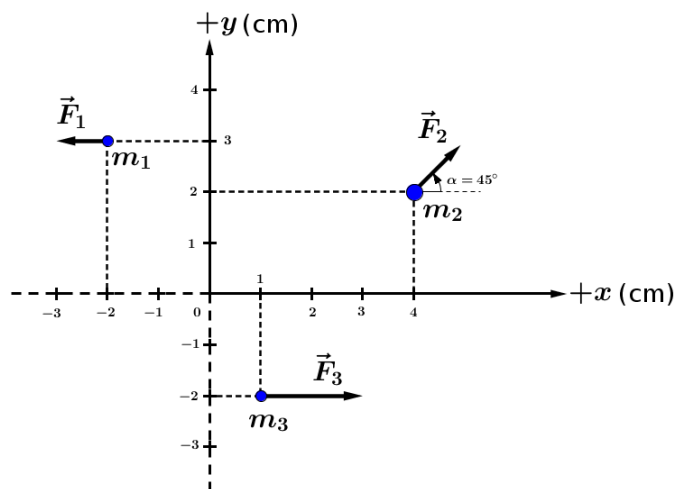
2. Dos patinadores con masas de  $65\text{ kg}$  y  $45\text{ kg}$ , respectivamente están separados  $8.0\text{ m}$  y se sujetan cada uno de un extremo de una cuerda.

a) Si tiran de la cuerda hasta juntarse, ¿qué distancia recorrerá cada patinador? (Desprecie la fricción).

b) Si solo el patinador  $45\text{ kg}$  tira de la cuerda hasta juntarse con su amigo (que se limita a sostener la cuerda), ¿qué distancia recorrerá cada patinador?

3. Una astronauta de  $100\text{ kg}$  (su masa incluye el equipo) que realiza una caminata espacial está a  $5\text{ m}$  de una nave espacial de  $3000\text{ kg}$ , con su cordón de seguridad totalmente estirado. Para volver a la cápsula, ella tira del cordón. ¿Dónde se juntarán la astronauta y la cápsula?

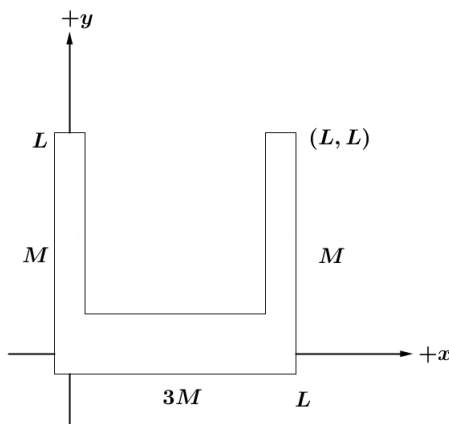
4. La figura muestra un sistema de tres partículas inicialmente en reposo, de masas  $m_1 = 4,1\text{ kg}$ ,  $m_2 = 8,2\text{ kg}$ , y  $m_3 = 4,1\text{ kg}$ . Fuerzas externas diferentes actúan sobre las partículas, de magnitudes  $F_1 = 6\text{ N}$ ,  $F_2 = 12\text{ N}$  y  $F_3 = 14\text{ N}$ . En la figura se muestran las direcciones de las fuerzas.



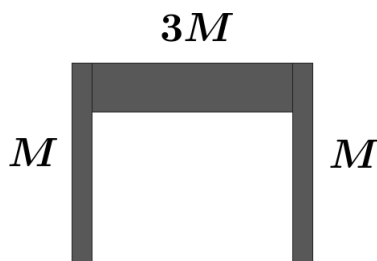
a) ¿Dónde está el centro de masa del sistema?

b) Calcule la aceleración del centro de masa.

5. Tres varillas delgadas uniformes, están dispuestas en forma de U cuyas longitudes y masas respectivas están indicadas en la figura. Determine las coordenadas del centro de masa de este sistema. Expresé la posición del centro de masa en forma polar, esto es, dando su magnitud respecto al origen del sistema, y el correspondiente ángulo respecto al semieje positivo.



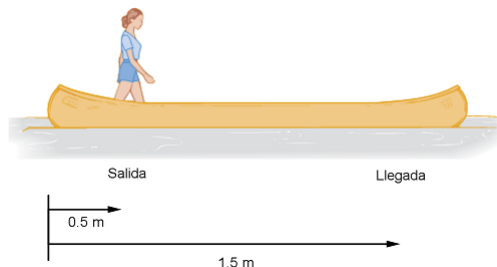
6. Tres varillas delgadas de longitud  $L$  están dispuestas en una U invertida, como se aprecia en la figura. Las dos en los brazos de la U tienen una masa  $M$ , la tercera tiene una masa  $3M$ . ¿Dónde está el centro de masa del sistema?



7. Una niña de masa  $m = 30 \text{ kg}$  está en una canoa de masa  $M = 70 \text{ kg}$  distribuida uniformemente y longitud de  $2 \text{ m}$ . Ella camina desde el punto localizado a  $0.5 \text{ m}$  desde el extremo hasta un punto localizado a  $1.5 \text{ m}$  del mismo extremo, como indica la figura. Si se ignora la fuerza de fricción entre la canoa y el agua, calcule:

a) El desplazamiento de la canoa respecto al suelo.

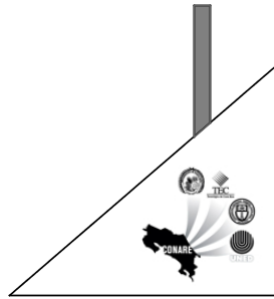
b) Cuánto se desplaza la niña respecto al suelo.



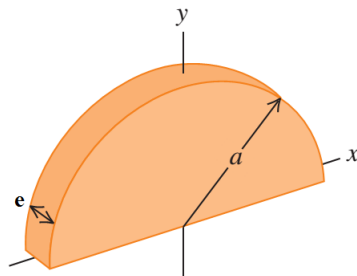
8. Una varilla de 20,0 cm de longitud tiene una densidad lineal de masa dada por:  $\lambda = 45 + 15x$ , donde  $[\lambda] = \text{g/m}$  y  $[x] = m$  es la distancia a través de la varilla, desde su extremo menos denso. Determine:

- Las unidades de 45 y 15, según el SI.
- La masa de la varilla.
- El centro de masa de la varilla.

9. Se le pide colgar una señal metálica de un alambre vertical. La señal tiene la forma triangular que se muestra en la figura. La parte baja de la señal es paralela al suelo. ¿A qué distancia del extremo izquierdo de la señal se debe unir el alambre de soporte? Sugerencia: Tome el rótulo como un triángulo rectángulo con hipotenusa  $c$ , y catetos  $a$  (en el eje  $+x$ ) y  $b$  (en el eje  $+y$ ).

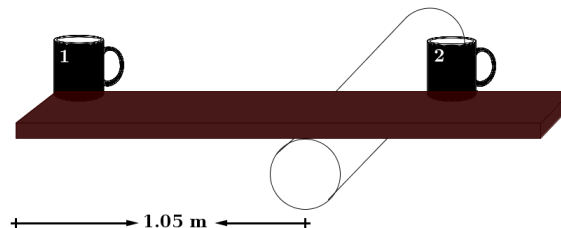


10. Determine el centro de masa, de una pieza metálica que tiene forma semicircular, con densidad uniforme  $\rho$ , espesor  $e$ , y radio  $a$ . La masa de la pieza está dada por  $M = \frac{1}{2}\rho\pi a^2 e$ . Sugerencia: utilice el sistema de coordenadas de la figura.

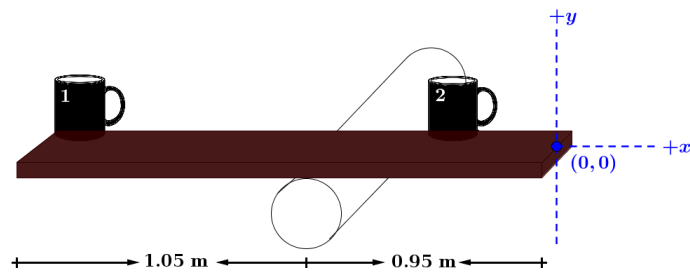


### Algunas soluciones:

1. Dos tazas se colocan sobre una tabla uniforme que se equilibra sobre un cilindro (ver figura). La tabla tiene una masa 2.00 kg de y 2.00 m de longitud. La masa de la taza 1 es de 200 g y está colocada a 1.05 m a la izquierda del punto equilibrio. La masa de la taza 2 es de 400 g. ¿Dónde debería colocarse la taza 2 para hacer equilibrio (con respecto al extremo de la derecha de la tabla)?



Tomando como eje de referencia para la rotación, lo indicado en el enunciado se tiene:



Se tiene que:

$$m_{\text{Tabla}} = m_T = 2.00 \text{ kg} \quad x_{\text{Tabla}} = x_T = -1.00 \text{ m}$$

$$m_1 = 200 \text{ g} \quad x_1 = -1.05 \text{ m}$$

$$m_2 = 400 \text{ g} \quad x_2 = ?$$

El centro de masa del sistema esta dado se encuentra el cilindro (punto de equilibrio), el cual es:

$$x_{CM} = -0.95 \text{ m}$$

Luego:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_T x_T}{m_1 + m_2 + m_T}$$

Tome  $M = m_1 + m_2 + m_T$  y se despeja  $x_2$ :

$$\frac{M x_{CM} - m_1 x_1 - m_T x_T}{m_2} = x_2$$

$$\frac{2.60 \text{ kg} \cdot -0.95 \text{ m} - 0.20 \text{ kg} \cdot -2.00 \text{ m} - 2.00 \text{ kg} \cdot -1.00 \text{ m}}{0.40 \text{ kg}} = x_2$$

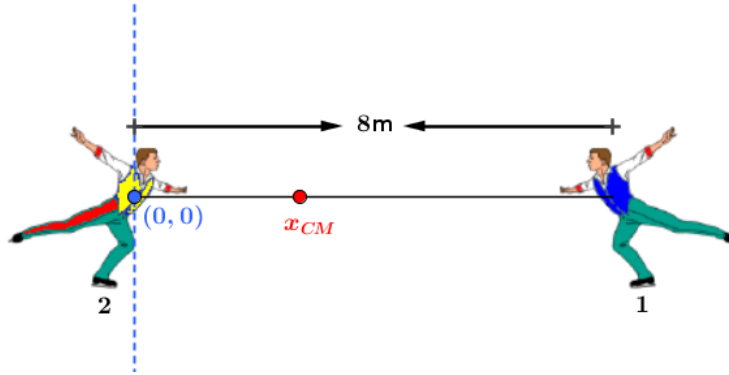
$$-0.175 \text{ m} = x_2 \quad (x_2 < 0 \text{ ya que esta a la izquierda del eje de referencia})$$

2. Dos patinadores con masas de 65 kg y 45 kg , respectivamente están separadas 8.0 m y se sujetan cada uno de un extremo de una cuerda.

a) Si tiran de la cuerda hasta juntarse , ¿qué distancia recorrerá cada patinador? (Desprecie la fricción).

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Tomando de referencia (origen,  $x_2 = 0$  m) al patinador 2:



$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1}{m_1 + m_2}$$

$$x_{CM} = \frac{45 \text{ kg} \cdot 8.0 \text{ m}}{45 \text{ kg} + 65 \text{ kg}}$$

$$x_{CM} = 3.27 \text{ m}$$

Para el patinador 1 se tiene:

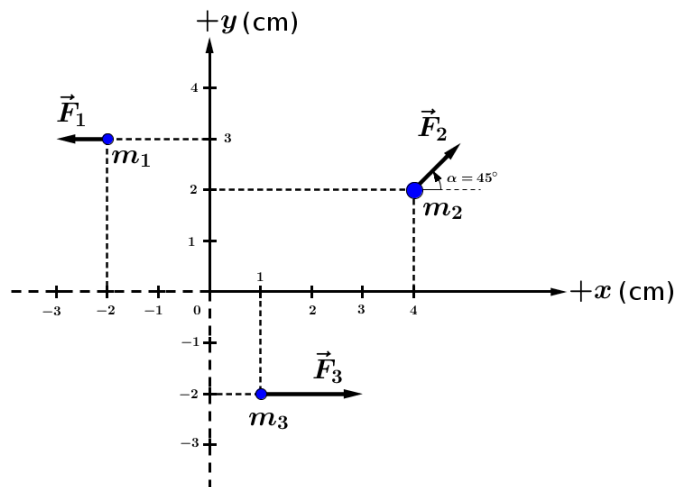
$$8 \text{ m} - 3.27 \text{ m} = 4.73 \text{ m}$$

Por ende el patinador 2 recorre 3.27 m y el 1 recorre 4.73 m.

b) Si solo el patinador 45 kg de tira de la cuerda hasta juntarse con su amigo (que se limita a sostener la cuerda), ¿qué distancia recorrerá cada patinador?

Ambos recorren lo mismo que en a), ya que no hay influencia de fuerzas externas.

3. La figura muestra un sistema de tres partículas inicialmente en reposo, de masas  $m_1 = 4,1 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 8,2 \text{ kg}$ , y  $m_3 = 4,1 \text{ kg}$ . Fuerzas externas diferentes actúan sobre las partículas, de magnitudes  $F_1 = 6 \text{ N}$ ,  $F_2 = 12 \text{ N}$  y  $F_3 = 14 \text{ N}$ . En la figura se muestran las direcciones de las fuerzas.



a) ¿Dónde está el centro de masa del sistema?

Se tiene que el centro de masa del sistema está dado por:

$$\vec{r}_{CM} = \vec{x}_{CM} + \vec{y}_{CM} \quad (\star)$$

$$\vec{x}_{CM} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 + m_3 \vec{x}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\vec{x}_{CM} = \frac{4,1 \text{ kg} \cdot 2 \text{ cm} (-\hat{i}) + 8,2 \text{ kg} \cdot 4 \text{ cm} \hat{i} + 4,1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ cm} \hat{i}}{4,1 \text{ kg} + 8,2 \text{ kg} + 4,1 \text{ kg}}$$

$$\vec{x}_{CM} = \frac{-4,1 \text{ kg} \cdot 2 \text{ cm} \hat{i} + 8,2 \text{ kg} \cdot 4 \text{ cm} \hat{i} + 4,1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ cm} \hat{i}}{4,1 \text{ kg} + 8,2 \text{ kg} + 4,1 \text{ kg}}$$

$$\vec{x}_{CM} = \frac{28,7 \text{ kgcm} \hat{i}}{16,4 \text{ kg}}$$

$$\vec{x}_{CM} = 1,75 \text{ cm} \hat{i}$$

Luego:

$$\vec{y}_{CM} = \frac{m_1 \vec{y}_1 + m_2 \vec{y}_2 + m_3 \vec{y}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\vec{y}_{CM} = \frac{4,1 \text{ kg} \cdot 3 \text{ cm} \hat{j} + 8,2 \text{ kg} \cdot 2 \text{ cm} \hat{j} + 4,1 \text{ kg} \cdot 2 \text{ cm} (-\hat{j})}{4,1 \text{ kg} + 8,2 \text{ kg} + 4,1 \text{ kg}}$$

$$\vec{y}_{CM} = \frac{4,1 \text{ kg} \cdot 3 \text{ cm} \hat{j} + 8,2 \text{ kg} \cdot 2 \text{ cm} \hat{j} - 4,1 \text{ kg} \cdot 2 \text{ cm} \hat{j}}{4,1 \text{ kg} + 8,2 \text{ kg} + 4,1 \text{ kg}}$$

$$\vec{y}_{CM} = \frac{20,5 \text{ kgcm} \hat{j}}{16,4 \text{ kg}}$$

$$\vec{y}_{CM} = 1,25 \text{ cm} \hat{j}$$

Se sustituyen en  $(\star)$ :

$$\vec{r}_{CM} = 1,75 \text{ cm} \hat{i} + 1,25 \text{ cm} \hat{j}$$

b) Calcule la aceleración del centro masa.

Se tiene que:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= m\vec{a}_{CM} \\ \frac{\sum F}{M} &= a_{CM} \quad (*)\end{aligned}$$

Luego:

$$\sum F = \sqrt{\sum F_x^2 + \sum F_y^2} \quad (**)$$

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_x &= F_1(-\hat{i}) + F_2\hat{i} + F_3\hat{i} \\ \sum \vec{F}_x &= -6\text{ N}\hat{i} + 12\text{ N}\cos(45^\circ)\hat{i} + 14\text{ N}\hat{i} \\ \sum \vec{F}_x &= 16,5\text{ N}\hat{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_y &= F_2\hat{j} \\ \sum \vec{F}_y &= 12\text{ N}\sin(45^\circ)\hat{j} \\ \sum \vec{F}_y &= 8,5\text{ N}\hat{j}\end{aligned}$$

Sustituyendo en (\*\*):

$$\begin{aligned}\sum F &= \sqrt{(16,5\text{ N})^2 + (8,5\text{ N})^2} \\ \sum F &= 18,5\text{ N}\end{aligned}$$

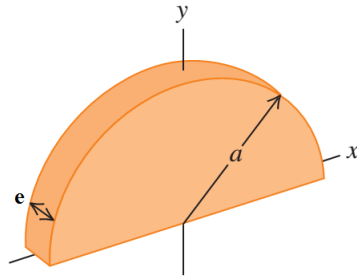
Y su dirección:

$$\begin{aligned}\beta &= \tan^{-1}\left(\frac{8,5\text{ N}}{16,5\text{ N}}\right) \\ \beta &= 27,2^\circ\end{aligned}$$

Sustituyendo  $\sum F$  en (\*):

$$\begin{aligned}\frac{\sum F}{M} &= a_{CM} \\ \frac{18,5\text{ N}}{16,4\text{ kg}} &= a_{CM} \\ 1,12\text{ m/s}^2 &= a_{CM}\end{aligned}$$

10. Determine el centro de masa, de una pieza metálica que tiene forma semicircular, con densidad uniforme  $\rho$ , espesor  $e$ , y radio  $a$ . La masa de la pieza está dada por  $M = \frac{1}{2}\rho\pi a^2 e$ . Sugerencia: utilice el sistema de coordenadas de la figura.



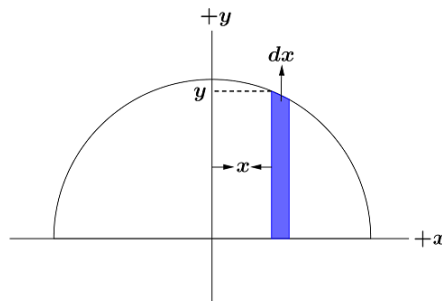
Basándose en lo suministrado por la figura y sabiendo que la ecuación del círculo en  $(0,0)$  es  $a^2 = x^2 + y^2$  (+).

Como el plano sugerido es el  $xy$  se determinará:

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int x dm$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \int y dm$$

Para  $x_{cm}$ :



$$dm = \rho dV$$

Pero  $dV = eydx$ , entonces  $dm = \rho eydx$

Ya que se trata de un rectángulo de largo  $y$  y ancho  $dx$ .

Y sustituyendo en  $x_{cm}$ :

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int x \rho ey dx$$

$$x_{cm} = \frac{\rho e}{M} \int xy dx$$

Pero la integral debe estar solo en términos de  $x$  y no de  $y$ , por eso despejamos a  $y$  de (+) obteniendo:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

Y ahora tenemos:

$$x_{cm} = \frac{\rho e}{M} \int x (\sqrt{a^2 - x^2}) dx$$

Según el sistema de coordenadas de la pieza los límites de la integral son  $-a$  y  $a$ :

$$x_{cm} = \frac{\rho e}{M} \int_{-a}^a x (\sqrt{a^2 - x^2}) dx$$

Para resolver esta integral aplicamos una simple sustitución, pero hay que tener en cuenta que al tratarse de una integral definida sus límites también cambiarán:

Sea  $u = a^2 - x^2$  entonces:

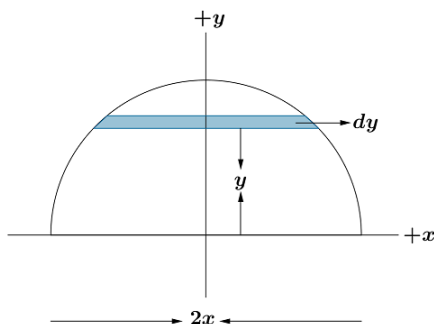
$$\begin{aligned} du &= -2x dx \\ -\frac{du}{2} &= x dx \end{aligned}$$

Ahora en cuanto a sus límites:

Si  $x \rightarrow -a$  entonces  $u = 0$  y si  $x \rightarrow a$  entonces  $u = 0$ . Y el centro de masa en el eje  $x$  está dado por:

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{\rho e}{M} \cdot -\frac{1}{2} \int_0^0 \sqrt{u} du \\ x_{cm} &= 0 \end{aligned}$$

Para  $y_{cm}$ :



$$dm = \rho dV$$

Pero  $dV = 2xedy$ , entonces  $dm = 2\rho exdy$

Ya que se trata de un rectángulo de largo  $2x$  y ancho  $dy$ .

Y sustituyendo en  $y_{cm}$ :

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \frac{1}{M} \int y 2\rho ex dy \\ y_{cm} &= \frac{2\rho e}{M} \int y x dy \end{aligned}$$

Pero la integral debe estar solo en términos de  $y$  y no de  $x$ , por eso despejamos a  $x$  de (+) obteniendo:

$$x = \sqrt{a^2 - y^2}$$

Y ahora tenemos:

$$y_{cm} = \frac{2\rho e}{M} \int y \sqrt{a^2 - y^2} dy$$

Según el sistema de coordenadas de la pieza los límites de la integral son 0 y  $a$ :

$$y_{cm} = \frac{2\rho e}{M} \int_0^a y \sqrt{a^2 - y^2} dy$$

Para resolver esta integral aplicamos una simple sustitución, pero hay que tener en cuenta que al tratarse de una integral definida sus límites también cambiarán:

Sea  $u = a^2 - y^2$  entonces:

$$du = -2y dy$$

$$-\frac{du}{2} = y dy$$

Ahora en cuanto a sus límites:

Si  $y \rightarrow 0$  entonces  $u = a^2$  y si  $y \rightarrow a$  entonces  $u = 0$ . Y el centro de masa en el eje  $y$  está dado por:

$$y_{cm} = \frac{2\rho e}{M} \cdot -\frac{1}{2} \int_{a^2}^0 \sqrt{u} du$$

$$y_{cm} = \frac{-\rho e}{M} \int_{a^2}^0 \sqrt{u} du$$

$$y_{cm} = \frac{-\rho e}{M} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_{a^2}^0$$

$$y_{cm} = \frac{-\rho e}{M} \cdot \frac{2}{3} (0 - a^2)^{\frac{3}{2}}$$

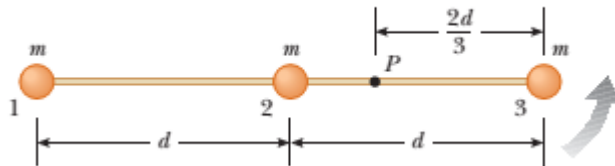
$$y_{cm} = \frac{\rho e}{\frac{1}{2}\rho\pi a^2 e} \cdot \frac{2}{3} \cdot a^3$$

$$y_{cm} = \frac{4a}{3\pi}$$

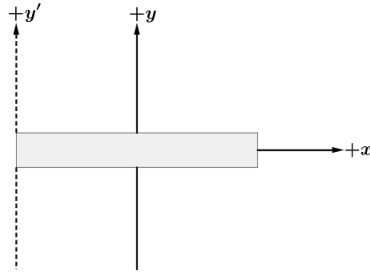
## Dinámica rotacional

*Enunciados:*

1. Una barra rígida sin masa tiene tres partículas con masas iguales unidas a ella, como se muestra en la figura. La barra es libre de dar vuelta en un plano vertical en torno a un eje sin fricción perpendicular a la barra a través del punto  $P$  y se libera del reposo en la posición horizontal en  $t = 0$  s. Determine el momento de inercia en torno a dicho eje.



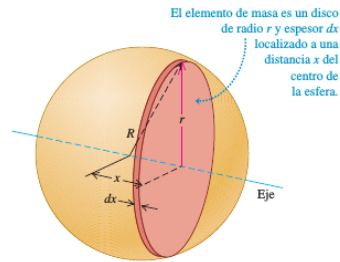
2. Se tiene una barra rígida uniforme de masa  $M$  y longitud  $L$ , como la que se muestra en la figura. Determine el momento de inercia de la barra entorno al eje  $+y$  y luego el momento de inercia en torno a un eje perpendicular ( $+y'$ ) a la barra a través de un extremo.



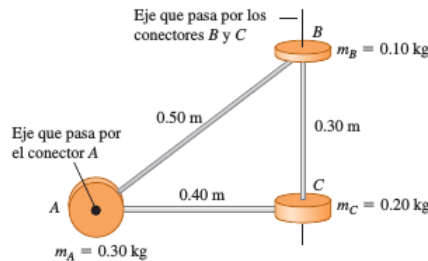
3. Dos esferas de masa  $m_1$  y  $m_2$  ( $m_1 < m_2$ ) están unidas por medio de una barra rígida de longitud  $D$  y masa despreciable. Esta barra está colocada verticalmente; y el sistema rota con respecto a un eje perpendicular a la longitud de la barra que dista a  $y$  de  $m_2$ , en la región entre  $m_1$  y  $m_2$ . Demuestre que el momento de inercia mínimo del sistema que pasa a través del centro de masa está dado por:

$$I_{min} = \frac{m_1 m_2 D^2}{m_1 + m_2}$$

4. Determine el momento de inercia de una esfera sólida uniforme de radio  $R$ , alrededor de un eje que pasa por el centro de la misma.

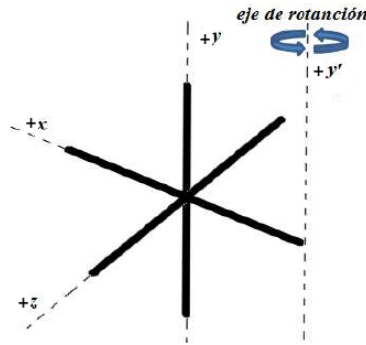


5. Un ingeniero está diseñando una pieza metálica formada por tres conectores circulares gruesos unidos por puntales ligeros moldeados.



- ¿Qué momento de inercia tiene este cuerpo alrededor de un eje que pasa por el centro del disco A y es perpendicular al plano del diagrama?
- ¿Qué momento de inercia tiene alrededor de un eje que pasa por el centro de los discos B y C?
- Si el cuerpo gira sobre el eje que pasa por A y es perpendicular al plano del diagrama, con rapidez angular  $\omega = 4.0 \text{ rad/s}$ , ¿qué energía cinética tiene?

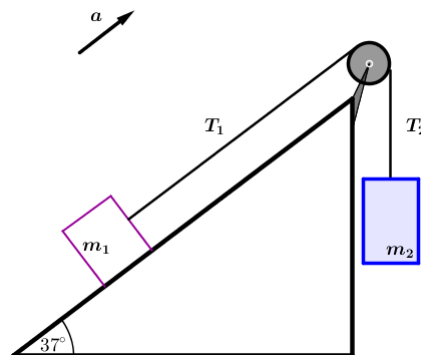
6. Tres barras idénticas de longitud  $L$ , masa  $m$  y radio  $r$  se colocan perpendiculares entre sí, como se indica en la figura, quedando el centro de masa de todas ellas en el origen de coordenadas. El arreglo se hace girar alrededor de un eje que pasa por el extremo de una barra y es paralelo a otra barra, con una velocidad angular de  $2 \text{ rad/s}$ .



Determine:

- El momento de inercia de esta configuración como función de la longitud  $L$  y la masa  $m$  de las barras. (Considere que  $L$  es mucho mayor que  $r$ ).
- La energía cinética rotacional de esta configuración, considere en este caso que la longitud  $L$  tiene un valor de  $2 \text{ m}$ ; y la masa  $m$ , es de  $0,35 \text{ kg}$ .

7. Los bloques ( $m_1 = 15 \text{ kg}$  y  $m_2 = 20 \text{ kg}$ ) mostrados en la figura están unidos entre sí por una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea de radio  $R = 0,250 \text{ m}$  y momento de inercia  $I$ . El bloque sobre la pendiente sin fricción se mueve hacia arriba con una aceleración constante de magnitud  $a = 2,00 \text{ m/s}^2$ .



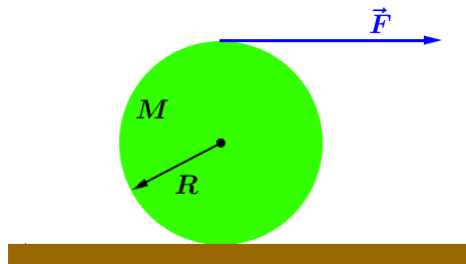
- Determine  $T_1$  y  $T_2$ , las tensiones en las dos partes de la cuerda.
- Encuentre el momento de inercia de la polea y su aceleración angular.

8. Una polea con una inercia rotacional de  $1.14 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$  y un radio de  $0,098 \text{ m}$ , sobre esta, actúa una fuerza tangencialmente en su borde que cambia con el tiempo y esta dada por  $F(t) = At + Bt^2$ , donde  $A = 0.496 \text{ N/s}$  y  $B = 0.305 \text{ N/s}^2$ . Si la polea estaba en reposo, determine la rapidez angular luego de pasados  $3.6 \text{ s}$ .

9. Una rueda en la forma de disco uniforme de radio  $R$  y de masa  $M$  gira a  $\omega_0$  en cojinetes sin fricción. Para detenerla, se presiona un freno contra el borde de la rueda con una fuerza de  $F$  en dirección radial. La rueda rota  $\Delta\theta$  antes de detenerse. Demuestre que el coeficiente de fricción entre el freno y el borde de la rueda está dado por:

$$\mu_k = \frac{MR\omega_0^2}{4F\Delta\theta}$$

10. Un carrito de alambre (ver figura) de masa  $M$  y radio  $R$  se desenrolla bajo una fuerza constante  $F$  (ver figura). Si supone que el carrito es un cilindro sólido uniforme que no se desliza, demuestre:

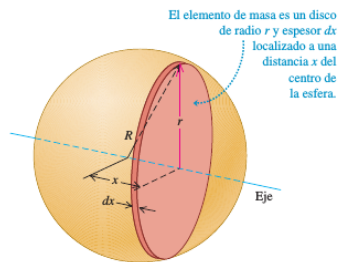


a) Que la aceleración del centro de masa es  $\frac{4F}{3M}$ .

b) La fuerza de fricción es hacia la derecha e igual en magnitud a  $\frac{F}{3}$ .

*Algunas soluciones:*

4. Determine el momento de inercia de una esfera sólida uniforme de radio  $R$ , alrededor de un eje que pasa por el centro de la misma.



El momento de inercia de la esfera se obtiene con:

$$I = \int r^2 dm \quad (*)$$

Donde:

$$dm = \rho dV$$

Luego:

$$dV = A dx$$

$$dV = \pi r^2 dx$$

Según la figura  $r$  esta dado por:

$$r = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Entonces:

$$dV = \pi \left( \sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx$$

$$dV = \pi (R^2 - x^2) dx$$

Luego:

$$dm = \rho \pi (R^2 - x^2) dx$$

Sustituyendo en (\*) a  $r$  y  $dm$ :

$$I = \int (R^2 - x^2) \rho \pi (R^2 - x^2) dx$$

$$I = \rho \pi \int (R^2 - x^2)^2 dx$$

Teniendo en cuenta que los limites de la integral van desde  $x_i = 0$  a  $x_f = R$  (desde el centro de esfera hasta su radio  $R$ ):

$$I = \rho \pi \int_0^R (R^2 - x^2)^2 dx$$

$$I = \rho \pi \int_0^R (R^4 - 2R^2 x^2 + x^4) dx$$

$$I = \rho \pi \left[ \left( xR^4 - \frac{2}{3}R^2 x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right) \Big|_0^R \right]$$

$$I = \rho \pi \left( R^5 - \frac{2}{3}R^2 \cdot R^3 + \frac{1}{5}R^5 \right)$$

$$I = \rho \pi \left( R^5 - \frac{2}{3}R^5 + \frac{1}{5}R^5 \right)$$

$$I = \rho \pi \left( \frac{8}{15}R^5 \right)$$

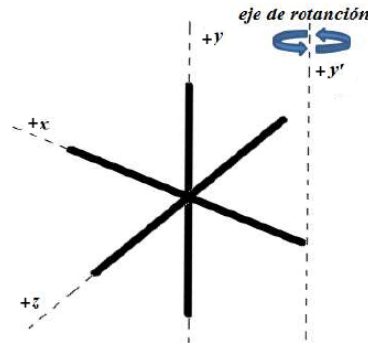
Luego es sabido que  $\rho = \frac{M}{V}$  y  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ , entonces:

$$I = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \pi \left( \frac{8}{15}R^5 \right)$$

$$I = \frac{3}{4} \cdot \frac{M}{R^3} \left( \frac{8}{15}R^5 \right)$$

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

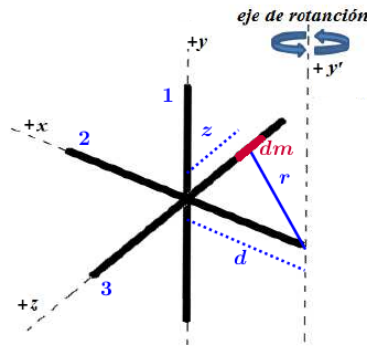
6. Tres barras idénticas de longitud  $L$ , masa  $m$  y radio  $r$  se colocan perpendiculares entre sí, como se indica en la figura, quedando el centro de masa de todas ellas en el origen de coordenadas. El arreglo se hace girar alrededor de un eje que pasa por el extremo de una barra y es paralelo a otra barra, con una velocidad angular de  $2\text{ rad/s}$ .



Determine:

a) El momento de inercia de esta configuración como función de la longitud  $L$  y la masa  $m$  de las barras. (Considere que  $L$  es mucho mayor que  $r$ ).

El siguiente diagrama ayudará a una mejor comprensión del ejercicio:



Es claro que el momento de la configuración dada es:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad (\triangleright)$$

Luego:

Para  $I_1$ , según la configuración rota en forma paralela a  $+y'$ , entonces por el teorema de ejes paralelos (T. Steiner):

$$I_1 = \frac{1}{2}mr^2 + md^2$$

Se considera la barra como un cilindro sólido y  $d = \frac{L}{2}$ :

$$I_1 = \frac{1}{2}mr^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad (L \gg r)$$

$$I_1 = \frac{1}{4}mL^2$$

Para  $I_2$ , dada la configuración es claro que se trata de una barra larga delgada con eje de rotación a través de un extremo:

$$I_2 = \frac{1}{3}mL^2$$

Finalmente para  $I_3$ , se determina por definición su momento de inercia en torno a  $+y'$ :

$$I_3 = \int r^2 dm \quad (\ddagger)$$

Donde se tiene claro lo siguiente:

$$\begin{aligned} r^2 &= d^2 + z^2 & \lambda &= \frac{dm}{dz} \\ r^2 &= \frac{L^2}{4} + z^2 & \lambda dz &= dm \end{aligned}$$

Sustituyendo lo anterior en  $(\ddagger)$ :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \left( \frac{L^2}{4} + z^2 \right) \lambda dz \\ I_3 &= \lambda \int \left( \frac{L^2}{4} + z^2 \right) dz \end{aligned}$$

Los límites de la integral van de  $-\frac{L}{2}$  a  $\frac{L}{2}$ , ya que es la zona en la barra 3 donde se puede ubicar al  $dm$ .

$$I_3 = \lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left( \frac{L^2}{4} + z^2 \right) dz$$

Se tiene que  $\lambda = \frac{m}{L}$ :

$$I_3 = \frac{m}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left( \frac{L^2}{4} + z^2 \right) dz$$

$$I_3 = \frac{m}{L} \left[ \left( z \frac{L^2}{4} + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \right]$$

$$I_3 = \frac{m}{L} \left[ \frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{24} - \left( -\frac{L^3}{8} - \frac{L^3}{24} \right) \right]$$

$$I_3 = \frac{m}{L} \left( \frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{24} \right)$$

$$I_3 = \frac{m}{L} \left( \frac{L^3}{3} \right)$$

$$I_3 = \frac{1}{3} m L^2$$

Finalmente sustituyendo los valores de  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  en (▷), obtenemos el momento de inercia de la configuración dada:

$$I = \frac{1}{4} m L^2 + \frac{1}{3} m L^2 + \frac{1}{3} m L^2$$

$$I = \frac{11}{12} m L^2$$

b) La energía cinética rotacional de esta configuración, considere en este caso que la longitud  $L$  tiene un valor de 2 m; y la masa  $m$ , es de 0,35 kg.

Se tiene que:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

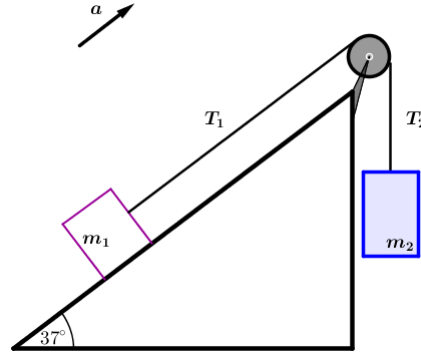
$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{12} m L^2 \omega^2$$

$$K = \frac{11}{24} m L^2 \omega^2$$

$$K = \frac{11}{24} \cdot 0,35 \text{ kg} \cdot (2 \text{ m})^2 \cdot (2 \text{ rad/s})^2$$

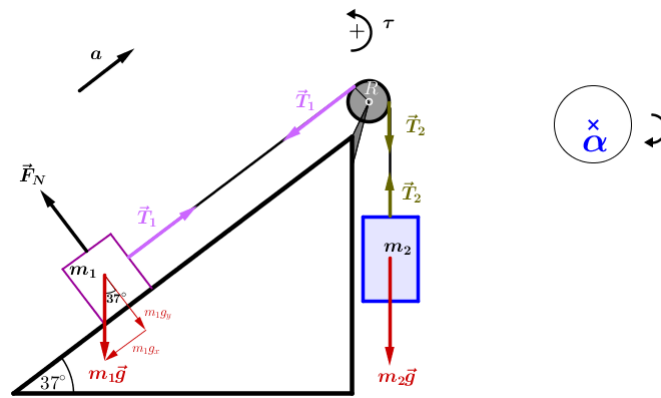
$$K = \frac{77}{30} \text{ J} \approx 2.56 \text{ J}$$

7. Los bloques ( $m_1 = 15 \text{ kg}$  y  $m_2 = 20 \text{ kg}$ ) mostrados en la figura están unidos entre sí por una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea de radio  $R = 0,250 \text{ m}$  y momento de inercia  $I$ . El bloque sobre la pendiente sin fricción se mueve hacia arriba con una aceleración constante de magnitud  $a = 2,00 \text{ m/s}^2$ .



a) Determine  $T_1$  y  $T_2$ , las tensiones en las dos partes de la cuerda.

El siguiente diagrama ayudará a una mejor comprensión del ejercicio:



Las tensiones se obtienen con la segunda ley de Newton:

$$\begin{aligned}
 \sum F_{x1} &= m_1 a \\
 T_1 - m_1 g \sin(37^\circ) &= m_1 a \\
 T_1 &= m_1 a + m_1 g \sin(37^\circ) \\
 T_1 &= m_1 [a + g \sin(37^\circ)] \\
 T_1 &= 15 \text{ kg} [2 \text{ m/s}^2 + 9.8 \text{ m/s}^2 \sin(37^\circ)] \\
 T_1 &= 118,4 \text{ N}
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 \sum F_{y2} &= m_2 a \\
 m_2 g - T_2 &= m_2 a \\
 -T_2 &= m_2 a - m_2 g \\
 T_2 &= -(m_2 a - m_2 g) \\
 T_2 &= m_2 (g - a) \\
 T_2 &= m_2 (g - a) \\
 T_2 &= 20 \text{ kg} (9.8 \text{ m/s}^2 - 2 \text{ m/s}^2) \\
 T_2 &= 156 \text{ N}
 \end{aligned}$$

b) Encuentre el momento de inercia de la polea y su aceleración angular.

Para determinar el momento de inercia se debe tener claro según el diagrama lo siguiente:

$$\sum \tau = I\alpha$$

Según la rotación que tiene el sistema y la regla de la mano derecha,  $\alpha < 0$ .

$$\sum \tau = -I\alpha$$

$$\tau_1 + \tau_2 = -I\alpha$$

Se tiene que  $\tau_1 > 0$  (antihorario) y  $\tau_2 < 0$  (horario), entonces

$$\tau_1 - \tau_2 = -I\alpha$$

$$\tau_2 - \tau_1 = I\alpha$$

$$RT_2 - RT_1 = I \frac{a}{R} \quad (\text{La polea tiene fricción ni se desliza})$$

$$\frac{R^2 (T_2 - T_1)}{a} = I$$

$$\frac{(0,250 \text{ m})^2 (156 \text{ N} - 118,4 \text{ N})}{2,00 \text{ m/s}^2} = I$$

$$\frac{(0,250 \text{ m})^2 (156 \text{ N} - 118,4 \text{ N})}{2,00 \text{ m/s}^2} = I$$

$$1,17 \text{ kgm}^2 = I$$

Luego la aceleración angular:

$$\alpha = -\frac{a}{R}$$

$$\alpha = -\frac{2,00 \text{ m/s}^2}{0,250 \text{ m}}$$

$$\alpha = -8,00 \text{ rad/s}^2$$

8. Una polea con una inercia rotacional de  $1.14 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$  y un radio de  $0,098 \text{ m}$ , sobre esta, actúa una fuerza tangencialmente en su borde que cambia con el tiempo y esta dada por  $F(t) = At + Bt^2$ , donde  $A = 0.496 \text{ N/s}$  y  $B = 0.305 \text{ N/s}^2$ . Si la polea estaba en reposo, determine la rapidez angular luego de pasados  $3.6 \text{ s}$ .

Se sabe que:

$$\sum \tau(t) = I\alpha(t)$$

$$rF(t) = I\alpha(t)$$

$$\frac{rF(t)}{I} = \alpha(t)$$

Luego:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}$$

$$\alpha(t) dt = d\omega(t)$$

$$\int_0^t \alpha(t) dt = \int_0^\omega d\omega(t)$$

$$\int_0^t \frac{rF(t)}{I} dt = \int_0^\omega d\omega(t)$$

$$\frac{r}{I} \int_0^t F(t) dt = \int_0^\omega d\omega(t)$$

$$\frac{r}{I} \int_0^t (At + Bt^2) dt = \int_0^\omega d\omega(t)$$

$$\frac{r}{I} \left( \frac{A}{2} t^2 + \frac{B}{3} t^3 \right) = \omega(t)$$

Sustituyendo por los valores dados en el enunciado:

$$\frac{0,098 \text{ m}}{1,14 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2} \left( \frac{0,496 \text{ N/s}}{2} t^2 + \frac{0,305 \text{ N/s}^2}{3} t^3 \right) = \omega(t)$$

$$85,96 \text{ kgm}^{-1} (0,248 \text{ N/s} t^2 + 0,101 \text{ N/s}^2 t^3) = \omega(t)$$

$$21,31 \text{ s}^{-3} t^2 + 8,68 \text{ s}^{-4} t^3 = \omega(t)$$

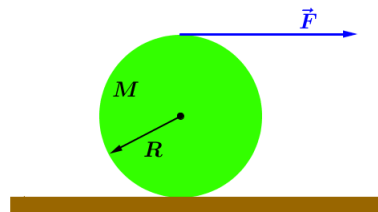
Finalmente la velocidad angular a los 3,6 s es:

$$21,31 \text{ s}^{-3} (3,6 \text{ s})^2 + 8,68 \text{ s}^{-4} (3,6 \text{ s})^3 = \omega(3,6 \text{ s})$$

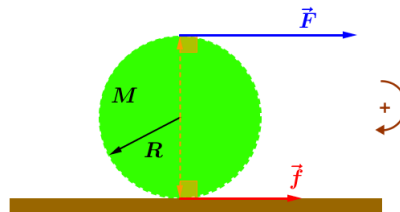
$$276,17 \text{ s}^{-1} + 404,97 \text{ s}^{-1} = \omega(3,6 \text{ s})$$

$$681 \text{ rad/s} = \omega(3,6 \text{ s})$$

10. Un carrete de alambre de masa  $M$  y radio  $R$  se desenrolla bajo una fuerza constante  $F$  (ver figura). Si supone que el carrete es un cilindro sólido uniforme que no se desliza, demuestre:



El siguiente diagrama puede ayudar a la comprensión del ejercicio:



a) Que la aceleración del centro de masa es  $\frac{4F}{3M}$ .

Se tiene que:

$$\begin{aligned}\sum \tau &= I\alpha \\ \tau_F + \tau_f &= I\alpha\end{aligned}$$

Se tiene que  $\tau_f < 0$ , porque va contra la rotación.

$$\begin{aligned}\tau_F - \tau_f &= I\alpha \\ RF - Rf &= I\alpha \\ R(F - f) &= \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R} \\ F - f &= \frac{1}{2}Ma \quad (\clubsuit)\end{aligned}$$

Luego con:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= Ma \\ F + f &= Ma \\ f &= Ma - F \quad (\clubsuit\clubsuit)\end{aligned}$$

Sustituyendo  $(\clubsuit\clubsuit)$  en  $(\clubsuit)$ :

$$\begin{aligned}F - (Ma - F) &= \frac{1}{2}Ma \\ F - Ma + F &= \frac{1}{2}Ma \\ 2F - Ma &= \frac{1}{2}Ma \\ 2F &= \frac{1}{2}Ma + Ma \\ 2F &= \frac{3}{2}Ma \\ \frac{4F}{3M} &= a \quad (\spadesuit)\end{aligned}$$

b) La fuerza de fricción es hacia la derecha e igual en magnitud a  $\frac{F}{3}$ .

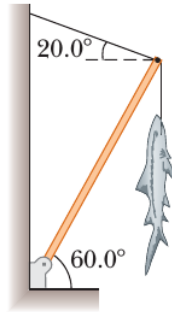
Sustituyendo  $(\spadesuit)$  en  $(\clubsuit\clubsuit)$ :

$$\begin{aligned}f &= M \cdot \frac{4F}{3M} - F \\ f &= \frac{4F}{3} - F \\ f &= \frac{F}{3}\end{aligned}$$

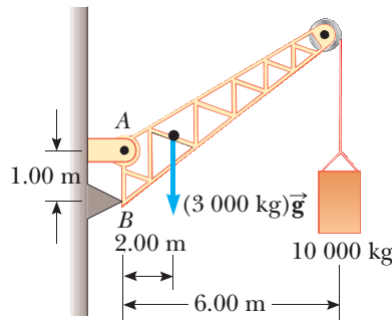
## Equilibrio estático

### Enunciados:

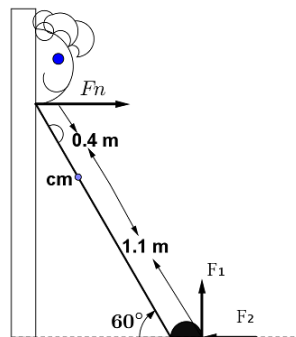
1. Un tiburón de 12000 N está sostenido mediante un cable unido a una barra de 4.50 m que se articula en la base. Calcule la tensión en la soga entre la barra y la pared, si supone que la misma sostiene el sistema en la posición que se muestra en la figura. Encuentre las fuerzas horizontal y vertical que se ejercen sobre la base de la barra. Ignore el peso de la barra.



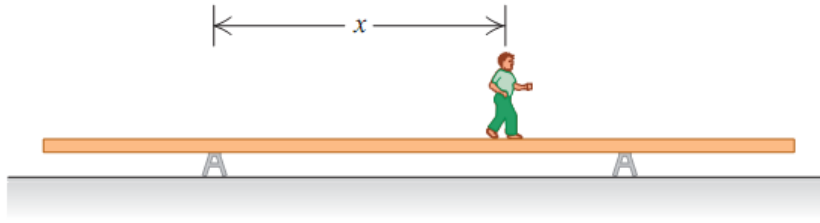
2. Una grúa de 3000 kg de masa soporta una carga de 10000 kg, como se muestra en la figura. La grúa se articula sin fricción en A y descansa contra un soporte uniforme en B. Encuentre las fuerzas de reacción en A y B.



3. Una mujer que pesa 500 N está recargada contra una pared vertical lisa. Hallar las magnitudes de la fuerza  $F_N$  que la pared ejerce sobre el hombro de la mujer y  $F_1$  y  $F_2$  que el suelo ejerce sobre sus zapatos.



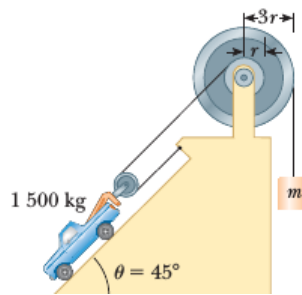
4. Un tablón uniforme de 9,0 m de longitud y 300 N de peso está situado simétricamente sobre dos soportes separados de 5,0 m, según muestra la figura. Un niño que pesa 600 N parte de A y camina hacia la derecha.



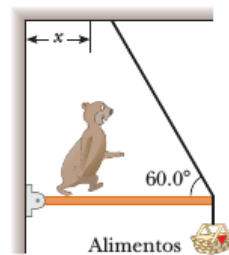
Calcule:

- La posición  $x$  del niño respecto de A, donde las fuerzas  $F_A$  y  $F_B$  ejercidas hacia arriba sobre la viga en A y B son iguales.
- ¿A qué distancia del extremo derecho de la tabla debería situarse el soporte B para que el niño pueda caminar justo hasta el extremo de la misma sin vuelque?

5. Encuentre la masa  $m$  del contrapeso necesario para equilibrar el camión de 1500 kg sobre el plano inclinado que se muestra en la figura. Suponga que ninguna polea tiene fricción ni masa.

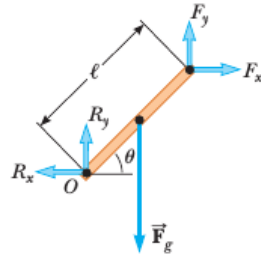


6. Un oso hambriento que pesa 700 N camina hacia afuera de una viga en un intento por recuperar una canasta de comida que cuelga en el extremo de la viga. La viga es uniforme, pesa 200 N y mide 6.00 m de largo; la canasta pesa 80.0 N.

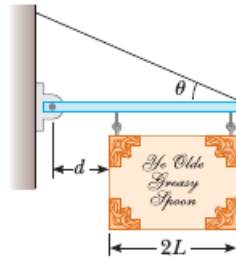


- Cuando el oso está en  $x = 1.00$  m, encuentre la tensión en el alambre y las componentes de la fuerza que ejerce la pared sobre el extremo izquierdo de la viga.
- ¿Qué pasaría si? Si el alambre puede resistir una tensión máxima de 900 N, ¿cuál es la distancia máxima que el oso puede caminar antes de que el alambre se rompa?

7. Escriba las condiciones necesarias para el equilibrio del objeto que se muestra en la figura. Calcule momentos de torsión en torno a un eje a través del punto  $O$ .



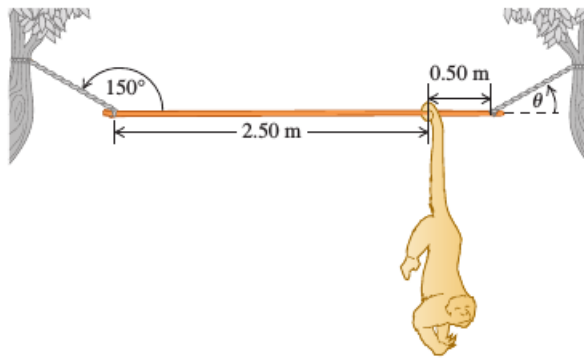
8. Una señal uniforme de peso  $F_g$  y ancho  $2L$  cuelga de una viga horizontal ligera con bisagra en la pared y sostenida por un cable.



Determine:

- La tensión en el cable.
- Las componentes de la fuerza de reacción que ejerce la pared sobre la viga, en términos de  $F_g$ ,  $d$ ,  $L$  y  $V$ .

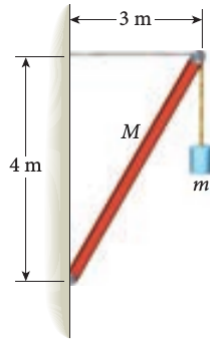
9. En un zoológico, una varilla uniforme de  $240\text{ N}$  y  $3.00\text{ m}$  de longitud se sostiene en posición horizontal con dos cuerdas en sus extremos. La cuerda izquierda forma un ángulo de  $150^\circ$  con la varilla, y la derecha forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal. Un mono aullador (*Alouatta seniculus*) de  $90\text{ N}$  cuelga inmóvil a  $0.50\text{ m}$  del extremo derecho de la varilla y nos estudia detenidamente.



Calcule:

- El ángulo  $\theta$ .
- Las tensiones en las dos cuerdas.

10. Un extremo de una viga pesada de masa  $M = 50.0 \text{ kg}$  está unida con una bisagra a una pared vertical, y el otro extremo lleva atado un cable de longitud  $3.00 \text{ m}$ , como se muestra en la figura. El otro extremo del cable también está fijado a la pared a una distancia de  $4.00 \text{ m}$  arriba de la bisagra. Se cuelga una masa  $m = 20.0 \text{ kg}$  de un extremo de la viga, mediante una cuerda.

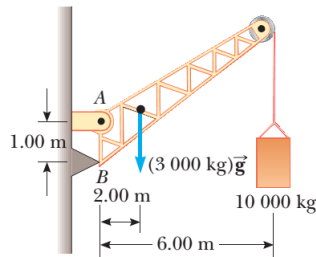


Determine:

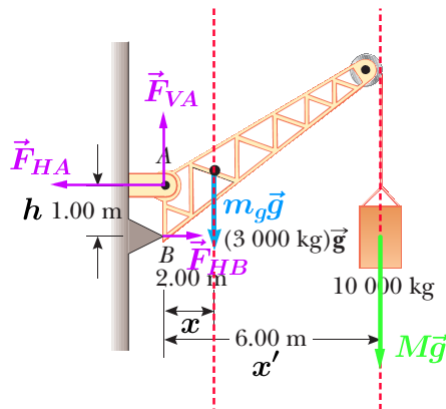
- Las tensiones en el cable y en la cuerda.
- La fuerza que ejerce la bisagra sobre la viga.

*Algunas soluciones:*

2. Una grúa de  $3000 \text{ kg}$  de masa soporta una carga de  $10000 \text{ kg}$ , como se muestra en la figura. La grúa se articula sin fricción en  $A$  y descansa contra un soporte uniforme en  $B$ . Encuentre las fuerzas de reacción en  $A$  y  $B$ .



Representado en la figura todas las fuerzas involucradas:



Aplicando la condición de equilibrio estático para fuerza se tiene:

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \text{ N} & \sum F_x &= 0 \text{ N} \\ F_{VA} - m_g g - Mg &= 0 \text{ N} & -F_{HA} + F_{HB} &= 0 \text{ N} \\ F_{VA} &= m_g g + Mg & F_{HA} &= F_{HB} \\ F_{VA} &= g(m_g + M) \\ F_{VA} &= 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (13000 \text{ kg}) \\ F_{VA} &= 127400 \text{ N}\end{aligned}$$

Ahora para para obtener la fuerza horizontal en  $A$ , utilizamos:

$$\begin{aligned}\sum \tau &= 0 \text{ Nm} \\ \tau_{F_{HB}} + \tau_{F_{VA}} + \tau_{F_{HA}} + \tau_g + \tau_M &= 0 \text{ Nm} \quad (\star)\end{aligned}$$

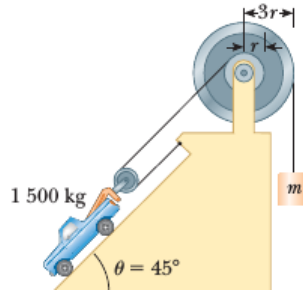
Como eje de rotación esta ubicado en el punto  $A$ , los brazos de palanca son nulos por lo que  $\tau_{F_{VA}}$  y  $\tau_{F_{HA}}$  valen 0. Y  $\tau_{F_{HB}}$  es antihorario por ende es positivo y los torques  $\tau_g$  y  $\tau_M$  son horarios y por eso son negativos. Quedando(★) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\tau_{F_{HB}} - \tau_g - \tau_M &= 0 \text{ Nm} \\ \tau_{F_{HB}} &= \tau_g + \tau_M \\ hF_{HB} &= xm_g g + x'Mg \\ F_{HB} &= \frac{xm_g g + x'Mg}{h}\end{aligned}$$

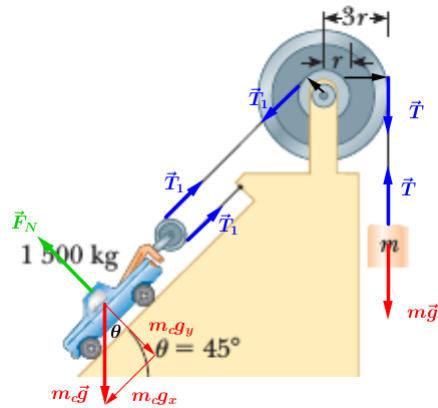
Sustituyendo con los respectivos valores:

$$\begin{aligned}F_{HB} &= \frac{2 \text{ m} \left( 3000 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) + 6 \text{ m} \left( 10000 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{1 \text{ m}} \\ F_{HB} &= 646800 \text{ N} = F_{HA}\end{aligned}$$

5. Encuentre la masa  $m$  del contrapeso necesario para equilibrar el camión de 1500 kg sobre el plano inclinado que se muestra en la figura. Suponga que ninguna polea tiene fricción ni masa.



El siguiente diagrama puede ayudar a la comprensión del ejercicio:



Se tiene que:

$$\begin{aligned}\sum \tau &= 0 \text{ m} \cdot \text{N} \\ \tau_T + \tau_{T_1} &= 0 \text{ m} \cdot \text{N} \\ \tau_T - \tau_{T_1} &= 0 \text{ m} \cdot \text{N}\end{aligned}$$

El torque  $\tau_{T_1}$  es negativo porque va en contra de la rotación. Luego:

$$3rT - rT_1 = 0 \text{ m} \cdot \text{N} \quad (*)$$

De la polea más grande se tiene:

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \text{ N} \\ T - mg &= 0 \text{ N} \\ T &= mg \quad (**)\end{aligned}$$

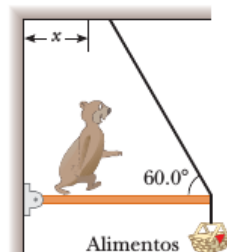
Luego en el carro se tiene:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \text{ N} \\ T_1 + T_1 - m_c g \sin \theta &= 0 \text{ N} \\ 2T_1 - m_c g \sin \theta &= 0 \text{ N} \\ T_1 &= \frac{m_c g \sin \theta}{2} \quad (***)\end{aligned}$$

Sustituyendo (\*\*) y (\*\*\*) en (\*):

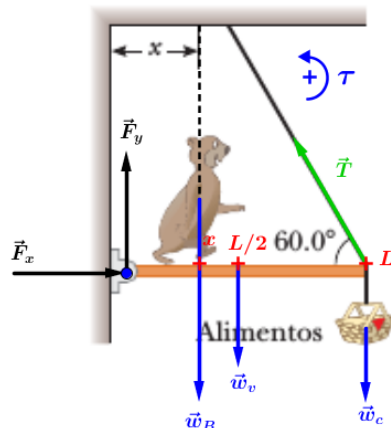
$$\begin{aligned}3rmg - r \left( \frac{m_c g \sin \theta}{2} \right) &= 0 \text{ m} \cdot \text{N} \\ 3m &= \frac{m_c \sin \theta}{2} \\ m &= \frac{m_c \sin \theta}{6} \\ m &= \frac{1500 \text{ kg} \cdot \sin(45^\circ)}{6} \\ m &= 176.7 \text{ kg}\end{aligned}$$

6. Un oso hambriento que pesa 700 N camina hacia afuera de una viga en un intento por recuperar una canasta de comida que cuelga en el extremo de la viga. La viga es uniforme, pesa 200 N y mide 6.00 m de largo; la canasta pesa 80.0 N.



a) Cuando el oso está en  $x = 1.00 \text{ m}$ , encuentre la tensión en el alambre y las componentes de la fuerza que ejerce la pared sobre el extremo izquierdo de la viga.

El siguiente diagrama puede ayudar a la comprensión del ejercicio:



Aplicando las condiciones de equilibrio se tiene:

$$\sum \tau = 0 \text{ m} \cdot \text{N}$$

$$\tau_x + \tau_y + \tau_T + \tau_B + \tau_v + \tau_c = 0 \text{ m} \cdot \text{N}$$

Como estan en el eje de rotación  $\tau_x = \tau_y = 0 \text{ m} \cdot \text{N}$ ,  $\tau_v < 0$ ,  $\tau_B < 0$  y  $\tau_c < 0$  porque son horarios.

$$\tau_T - \tau_B - \tau_v - \tau_c = 0 \text{ m} \cdot \text{N}$$

$$\tau_T = \tau_B + \tau_v + \tau_c$$

$$LT \sin \theta = xw_B \sin \alpha_1 + \frac{L}{2}w_v \sin \alpha_2 + Lw_c \sin \alpha_3$$

$$T = \frac{xw_B \sin \alpha_1 + \frac{L}{2}w_v \sin \alpha_2 + Lw_c \sin \alpha_3}{L \sin \theta}$$

Se tiene que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ$  y  $\sin(90^\circ) = 1$ , entonces lo anterior se expresa:

$$T = \frac{xw_B + \frac{L}{2}w_v + Lw_c}{L \sin \theta} \quad (\star)$$

$$T = \frac{1.00 \text{ m} \cdot 700 \text{ N} + \frac{6.00 \text{ m}}{2} \cdot 200 \text{ N} + 6.00 \text{ m} \cdot 80.0 \text{ N}}{6.00 \text{ m} \sin(60^\circ)}$$

$$T = 342 \text{ N}$$

|                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\sum F_x = 0 \text{ N}$ $F_x - T_x = 0 \text{ N}$ $F_x = T_x$ $F_x = 342 \text{ N} \cos(60^\circ)$ $F_x = 171 \text{ N}$ | $\sum F_y = 0 \text{ N}$ $T_y + F_y - w_B - w_v - w_c = 0 \text{ N}$ $F_y = -T_y + w_B + w_v + w_c$ $F_y = -T \sin(\theta) + w_B + w_v + w_c$ $F_y = -342 \text{ N} \sin(60^\circ) + 700 \text{ N} + 200 \text{ N} + 80.0 \text{ N}$ $F_y = 683 \text{ N}$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

b) ¿Qué pasaría si? Si el alambre puede resistir una tensión máxima de 900 N, ¿cuál es la distancia máxima que el oso puede caminar antes de que el alambre se rompa?

Con  $T = 900 \text{ N}$  y con  $(\star)$  se despeja  $x$ :

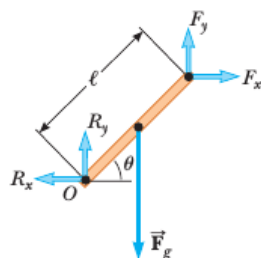
$$TL \sin \theta - \frac{L}{2}w_v - Lw_c = xw_B$$

$$\frac{TL \sin \theta - \frac{L}{2}w_v - Lw_c}{w_B} = x$$

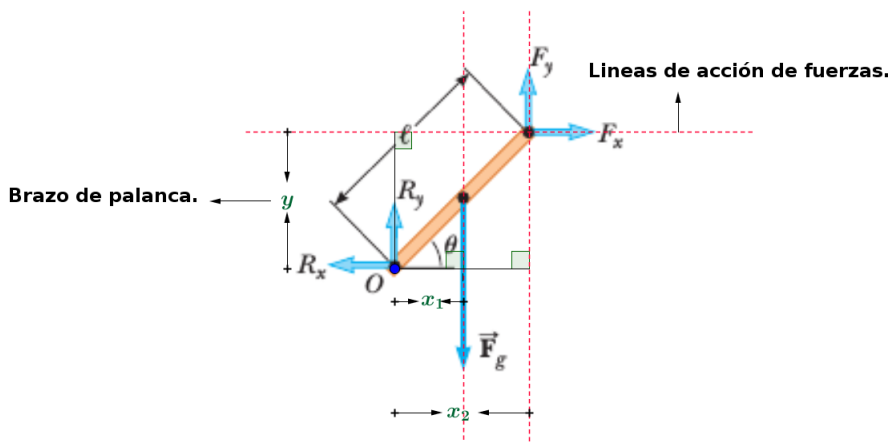
$$\frac{L \left( T \sin \theta - \frac{1}{2}w_v - w_c \right)}{w_B} = x$$

$$\frac{6.00 \text{ m} \left( 900 \text{ N} \sin(60^\circ) - \frac{1}{2} \cdot 200 \text{ N} - 80 \text{ N} \right)}{700 \text{ N}} = x = 5.13 \text{ m}$$

7. Escriba las condiciones necesarias para el equilibrio del objeto que se muestra en la figura. Calcule momentos de torsión en torno a un eje a través del punto  $O$ .



El siguiente diagrama puede ayudar a la comprensión del ejercicio:



Se tiene que:

$$\sum \tau = 0 \text{ m} \cdot \text{N}$$

$$\tau_{R_x} + \tau_{R_y} + \tau_{F_g} + \tau_{F_y} + \tau_{F_x} = 0 \text{ m} \cdot \text{N}$$

Como están en el eje de rotación  $\tau_{R_x} = \tau_{R_y} = 0 \text{ m} \cdot \text{N}$ ,  $\tau_{F_g} < 0$ ,  $\tau_{F_x} < 0$  porque son horarios.

$$-\tau_{F_g} + \tau_{F_y} - \tau_{F_x} = 0 \text{ m} \cdot \text{N}$$

$$\tau_{F_y} - \tau_{F_g} - \tau_{F_x} = 0 \text{ m} \cdot \text{N}$$

$$x_2 F_y - x_1 F_g - y F_x = 0 \text{ m} \cdot \text{N}$$

Haciendo análisis trigonométricos en el diagrama de cuerpo libre se tiene:

$$L \cos \theta F_y - \frac{L}{2} \cos \theta F_g - L \sin \theta F_x = 0 \text{ m} \cdot \text{N}$$

Luego las otras dos condiciones de equilibrio están dadas por:

$$\sum F_x = 0 \text{ N}$$

$$F_x - R_x = 0 \text{ N}$$

$$F_x = R_x$$

$$\sum F_y = 0 \text{ N}$$

$$F_y + R_y - F_g = 0 \text{ N}$$

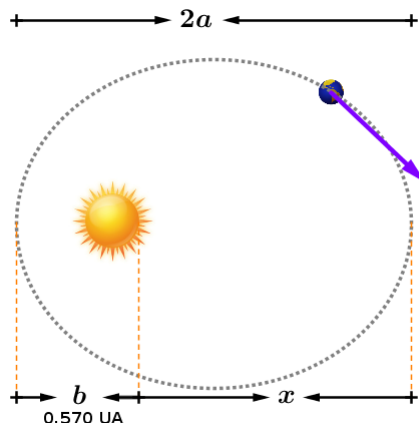
$$F_y = F_g - R_y$$

## Gravitación universal

### Enunciados:

1. La Estación Espacial Internacional opera a una altura de 350 km. Los planes para la construcción final muestran que  $5.7 \times 10^6 \text{ N}$  de material, el cual fue pesado en la superficie de la Tierra, y luego fue transportado por diferentes naves espaciales. ¿Cuál es el peso de ese material cuando está en órbita?

2. El cometa Halley (ver figura) se aproxima al Sol hasta dentro de 0.570 UA, y su periodo orbital es 75.6 años. (UA es el símbolo para unidad astronómica, donde  $1 \text{ UA} = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$  es la distancia media Tierra-Sol.) ¿Qué tan lejos del Sol viajará el cometa Halley antes de comenzar su viaje de regreso? Exprese su respuesta en UA.



3. Determine la masa del Sol, partiendo del hecho de que el periodo de rotación de la Tierra alrededor del Sol es de un año ( $365 \text{ d} = 3,156 \times 10^7 \text{ s}$ ) y que la distancia del Sol a la Tierra es de  $1,496 \times 10^{11} \text{ m}$ .

4. Se lanza una nave espacial desde la superficie terrestre con la velocidad  $v$ . El radio terrestre es  $R$ . ¿Cuál será su velocidad cuando esté muy lejos de la Tierra?

5. Un satélite, está orbitando en forma circular alrededor de la Tierra, cada revolución la hace en 100 min.

- Determine la altura a la cual se encuentra este satélite, con respecto a la superficie de la Tierra.
- Si el satélite tiene una masa de 900 kg ¿Cuál es la energía mecánica del sistema Tierra-satélite, respecto a un marco de referencia fijo en la Tierra? Desprecie la energía de rotación de la Tierra sobre su propio eje.

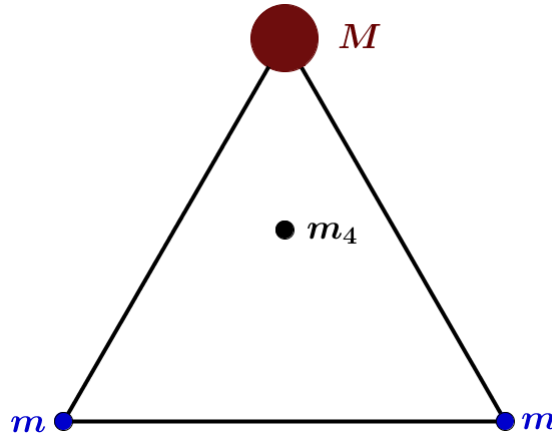
6. Suponga que hay una sonda espacial (con masa  $m$ ), y en un momento determinado se encuentra entre la Tierra (con masa  $M_T$ ) y el Sol (con masa  $M_S$ ) y las fuerzas gravitacionales involucradas están en equilibrio; si la distancia entre la Tierra y el Sol es  $d$  y la distancia entre la sonda espacial y la Tierra es  $x$ .

a) Demuestre que:

$$x = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_S}{M_T}} + 1}$$

b) Determine el valor de  $x$  si se sabe que  $d = 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$ ,  $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$  y  $M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$ .

7. En la siguiente figura se muestran tres esferas ubicadas en los vértices de un triángulo equilátero. Una cuarta esfera se encuentra en el centro del triángulo. Partiendo del hecho de que la fuerza neta sobre  $m_4$  es nula, demuestre que  $M = m$ .



8. Demuestre que la masa de la Tierra está dada por  $M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$ , partiendo del hecho de que  $r$  es el radio de la órbita de la Luna alrededor de la Tierra ( $3,82 \times 10^8 \text{ m}$ ) y el periodo de rotación Luna-Tierra que es de 27,3 días ( $2,35 \times 10^6 \text{ s}$ ). Compruebe que  $M = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$  y sabiendo que  $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$ .

9. Demuestre que el periodo de traslación de la Luna alrededor de la Tierra está dada por  $\sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{MG}} = T$ , partiendo del hecho de que  $r$  es el radio de la órbita de la Luna alrededor de la Tierra ( $3,82 \times 10^8 \text{ m}$ ) y el periodo de rotación Luna-Tierra que es de 27,3 días ( $2,35 \times 10^6 \text{ s}$ ). Compruebe además que  $T = 2,35 \times 10^6 \text{ s}$ , usando  $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$  y la masa de la Tierra  $M = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$ .

10. Determine la gravedad que ejerce Saturno sobre un satélite explorador, sabiendo que este tiene una masa de 300 kg y está a una altura de 100 km sobre su superficie. Recuerde que  $M_S = 5,68 \times 10^{26} \text{ kg}$  y  $R_S = 6,03 \times 10^7 \text{ m}$ .

### Algunas soluciones:

3. Determine la masa del Sol, partiendo del hecho de que el periodo de rotación de la Tierra alrededor del Sol es de un año ( $365 \text{ d} = 3,156 \times 10^7 \text{ s}$ ) y que la distancia del Sol a la Tierra es de  $1,496 \times 10^{11} \text{ m}$ .

De la tercera ley de Kepler se tiene:

$$T^2 = kr^3$$

$$\frac{T^2}{r^3} = k$$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

$$M_S = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{T^2}$$

$$M_S = \frac{4\pi^2}{6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}} \cdot \frac{(1,496 \times 10^{11} \text{ m})^3}{(3,156 \times 10^7 \text{ s})^2}$$

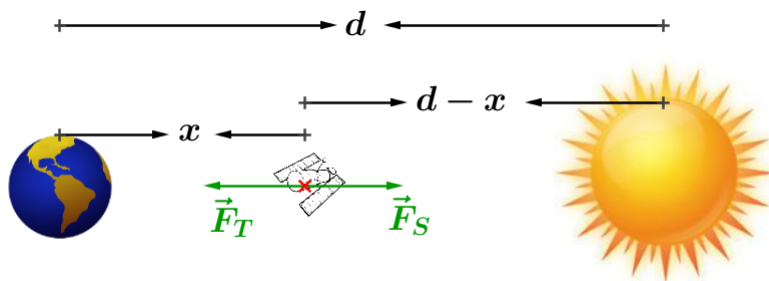
$$M_S = 1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$$

6. Suponga que hay una sonda espacial (con masa  $m$ ), y en un momento determinado se encuentra entre la Tierra (con masa  $M_T$ ) y el Sol (con masa  $M_S$ ) y las fuerzas gravitacionales involucradas están en equilibrio; si la distancia entre la Tierra y el Sol es  $d$  y la distancia entre la sonda espacial y la Tierra es  $x$ .

a) Demuestre que:

$$x = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_S}{M_T} + 1}}$$

El siguiente diagrama puede ayudar a la comprensión del ejercicio:



Como se tiene que las fuerzas están en equilibrio:

$$F_S - F_T = 0$$

$$\frac{GM_S m}{(d-x)^2} - \frac{GM_T m}{x^2} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{GM_S m}{(d-x)^2} &= \frac{GM_T m}{x^2} \\
\frac{M_S}{(d-x)^2} &= \frac{M_T}{x^2} \\
\frac{M_S}{M_T} &= \frac{(d-x)^2}{x^2} \\
\frac{M_S}{M_T} &= \frac{(d-x)^2}{x^2} \\
\frac{M_S}{M_T} &= \left(\frac{d-x}{x}\right)^2 \\
\sqrt{\frac{M_S}{M_T}} &= \sqrt{\left(\frac{d-x}{x}\right)^2} \\
\sqrt{\frac{M_S}{M_T}} &= \frac{d-x}{x} \\
x\sqrt{\frac{M_S}{M_T}} &= d-x \\
x\sqrt{\frac{M_S}{M_T}} + x &= d \\
x\left(\sqrt{\frac{M_S}{M_T}} + 1\right) &= d \\
x &= \frac{d}{\left(\sqrt{\frac{M_S}{M_T}} + 1\right)}
\end{aligned}$$

b) Determine el valor de  $x$  si se sabe que  $d = 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$ ,  $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$  y  $M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$ .

Se entonces que:

$$x = \frac{1,50 \times 10^{11} \text{ m}}{\left(\sqrt{\frac{1,99 \times 10^{30} \text{ kg}}{5,97 \times 10^{24} \text{ kg}}} + 1\right)}$$

$$x = 2,60 \times 10^8 \text{ m}$$

8. Demuestre que la masa de la Tierra esta dada por  $M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$ , partiendo del hecho de que  $r$  es el radio de la orbita de la Luna alrededor de la Tierra ( $3,82 \times 10^8$  m) T el periodo de rotación Luna-Tierra que es de 27,3 días ( $2,35 \times 10^6$  s). Compruebe que  $M = 5,97 \times 10^{24}$  kg y sabiendo que  $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$ .

Se tiene claro que:

$$F_{a_C} = F_g$$

$$m_L a_C = \frac{GMm_L}{r^2} \quad (\star)$$

Se sabe que:  $a_c = \frac{v^2}{r}$  y sustituyendo en  $(\star)$ :

$$m_L \left( \frac{v^2}{r} \right) = \frac{GMm_L}{r^2}$$

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}$$

$$\frac{v^2}{r} \cdot \frac{r^2}{G} = M$$

$$\frac{v^2 r}{G} = M \quad (\star\star)$$

Y se tiene claro que  $v = \frac{2\pi r}{T}$  y sustituyendo en  $(\star\star)$ :

$$\frac{\left( \frac{2\pi r}{T} \right)^2 r}{G} = M$$

$$\frac{\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \cdot r}{G} = M$$

$$\frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = M$$

Sabiendo que la masa de la Tierra es  $5,97 \times 10^{24}$  kg y  $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$  y con los datos dados en el enunciado se puede comprobar el valor de  $M$ :

$$\frac{4\pi^2 (3,82 \times 10^8 \text{ m})^3}{6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot (2,35 \times 10^6 \text{ s})^2} = M$$

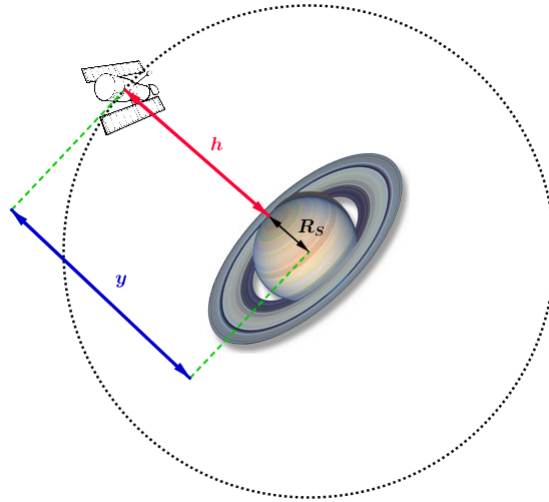
$$\frac{4\pi^2 (3,82 \times 10^8 \text{ m})^3}{6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot (2,35 \times 10^6 \text{ s})^2} = M$$

$$\frac{2,20 \times 10^8 \text{ m}^3}{368,3 \times 10^2 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}} = M$$

$$5,97 \times 10^{24} \text{ kg} = M$$

10. Determine la gravedad que ejerce Saturno sobre un satélite explorador, sabiendo que este tiene una masa de 300 kg y está a una altura de 100 km sobre su superficie. Recuerde que  $M_S = 5,68 \times 10^{26} \text{ kg}$  y  $R_S = 6,03 \times 10^7 \text{ m}$ .

El siguiente diagrama puede ayudar a la comprensión del ejercicio:



Se tiene que:

$$F_g = mg$$

$$\frac{GM_S m}{y^2} = mg$$

$$\frac{GM_S}{y^2} = g$$

Como  $y = R_S + h$ :

$$\frac{GM_S}{(R_S + h)^2} = g$$

$$\frac{6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,68 \times 10^{26} \text{ kg}}{(6,03 \times 10^7 \text{ m} + 100 \times 10^3 \text{ m})^2} = g$$

$$\frac{3,79 \times 10^{16} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}}{3,65 \times 10^{15} \text{ m}^2} = g$$

$$10,38 \times 10^{16} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = g$$

## *Bibliografía*

1. Resnick, R., Halliday, K., Krane, K. (2002) “Física volumen 1”. México: CECSA.
2. Serway, Raymond; Jewett, John Jr. (2008). “Física para ciencias e ingeniería”. Volumen 1. VII Edición. México D.F.: México, CENGAGE LEARNING Editores.
3. Young, Hugh; Freedman, Roger. (2009). “Física Universitaria”. Volumen 1. XII Edición. México D.F.: México, Pearson Educación.
4. Wilson, J., Buffa, A., Lou, B., (2007) “Física, 6ed”.Mexico: Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.
5. Giangoli, D. (2008). “Física para ciencias e ingeniería”. Volumen 1. IV Edición. México D.F: México, Pearson- Prentice-Hall.
6. Bauer, W. Westfall, G. D. (2011) “Física para Ingeniería y Ciencias”. Tomo I. McGraw Hill.
7. Alonso, M. Finn, E., “Física, Mecánica”, Volumen I, Editorial Addison Wesley Iberoamericana, Delaware, USA 1986.
8. González, F. “Principios de Mecánica”, Universidad de Costa Rica, Escuela de Física, 1978
9. Merlos, H., Loría, G., Magaña, R., “Compendio de problemas resueltos para el curso de Física General I ”, Universidad de Costa Rica, Escuela de Física, 2012
10. Vargas, W., “FS-0227 Física General para Físicos I: Problemas resueltos” Universidad de Costa Rica, Escuela de Física, 2013
11. Young, H.; Freedman, R.; (2009). FÍSICA UNIVERSITARIA. Volumen 1. XII Edición. México D.F.: México, Pearson Educación.
12. Arce,C.; Castillo,W y González, J. (2004) Álgebra lineal. Tercera edición. UCR. San Pedro.
13. Spiegel,M. Lipschutz,S.; Spellman,D. (2009). Análisis vectorial. . II Edición. México. McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. De C.V.
14. Larson, R.,Hostetler, R.,Edwars, B. (s.f) “Cálculo y Geometría Analítica vol.1, 6ed”.McGraw Hill
15. Leithold, L. (1998) “El Cálculo, 7ed”.Oxford University Press-Harla Mexico, S.A. de C.V.
16. Morales, H., “Compendio de Física General I, curso FS-0210” Universidad de Costa Rica, Escuela de Física, 2010
17. Frutos, F., “Resumenes de Física I” Universidad de Costa Rica, Escuela de Física, 2013
18. Bueche, F., Hetch, E., “Física General, 10ed”.McGraw Hill

# *Apendices*

## Cálculo

Reglas de derivación:

1.  $\frac{d}{dx}[C] = 0$ , con  $C \in \mathbb{R}$
2.  $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$ ,  $n$  ha de ser un número tal que  $x^{n-1}$  esté definido en un intervalo que contenga a 0.
3.  $\frac{d}{dx}[x] = 1$
4.  $\frac{d}{dx}[Cf(x)] = C\frac{d}{dx}[f(x)] = Cf'(x)$ , con  $C \in \mathbb{R}$
5.  $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$
6.  $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ , con  $g(x) \neq 0$
7.  $\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$
8.  $\frac{d}{dx}[\sin(x)] = \cos(x)$
9.  $\frac{d}{dx}[\cos(x)] = -\sin(x)$
10.  $\frac{d}{dx}[\tan(x)] = \sec^2(x)$
11.  $\frac{d}{dx}[\cot(x)] = -\csc^2(x)$
12.  $\frac{d}{dx}[\sec(x)] = \sec(x)\tan(x)$
13.  $\frac{d}{dx}[\csc(x)] = -\csc(x)\cot(x)$

Reglas de integración:

1.  $\int dx = x + C$ , donde  $C$  es una constante de integración y  $C \in \mathbb{R}$
2.  $\int A dx = A \int dx = Ax + C$ , con  $A \in \mathbb{R}$
3.  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ , con  $n \neq -1$
4.  $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
5.  $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$
6.  $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
7.  $\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C$
8.  $\int \csc^2(x) dx = -\cot(x) + C$
9.  $\int \sec(x) \tan(x) dx = \sec(x) + C$
10.  $\int \csc(x) \cot(x) dx = -\csc(x) + C$

## Vectores

Propiedades del producto punto:

Sean  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  vectores en tres dimensiones y  $e$  un escalar, se tiene:

- a)  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- b)  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ , con  $A \neq 0$  y  $B \neq 0$ , entonces  $\vec{A} \perp \vec{B}$ .
- c)  $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
- d)  $e(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (e\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (e\vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{B})e$

Propiedades del producto cruz o producto vectorial:

Sean  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  vectores en tres dimensiones y  $e$  un escalar, se tiene:

- a)  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ , entonces  $\vec{C} \perp \vec{A}$  y  $\vec{C} \perp \vec{B}$ .
- b)  $\vec{A} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{A} = \vec{0}$
- c)  $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$
- d)  $\vec{A} \times e\vec{A} = \vec{0}$
- e)  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$ , con  $A \neq 0$  y  $B \neq 0$ , entonces  $\vec{A} \parallel \vec{B}$ .
- f)  $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
- g)  $e\vec{A} \times e\vec{B} = e(\vec{A} \times \vec{B})$

$$\text{h) } \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

$$\text{i) } e (\vec{A} \times \vec{B}) = (e\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (e\vec{B}) = (\vec{A} \times \vec{B}) e$$

$$\text{j) } (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

$$\text{k) } (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C}) \vec{A}$$

l) La magnitud de  $\vec{A} \times \vec{B}$  es la misma que el área de un paralelogramo con lados  $A$  y  $B$ .

Vectores unitarios:

Son vectores de magnitud igual a 1. Son los siguientes:

Para el eje  $x$ :  $\hat{i} = (1, 0, 0)$

Para el eje  $y$ :  $\hat{j} = (0, 1, 0)$

Para el eje  $z$ :  $\hat{k} = (0, 0, 1)$

Donde se tiene que la forma del vector es  $(x, y, z)$ .

Los vectores unitarios también se denotan como  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$ .

Como los tres vectores unitarios son perpendiculares entre sí, se tiene que su producto punto o escalar es 0.

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{i} = 0$$

$$\hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$$

$$\hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{j} = 0$$

El producto punto o escalar entre vectores unitarios iguales es 1.

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$$

$$\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$$

$$\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

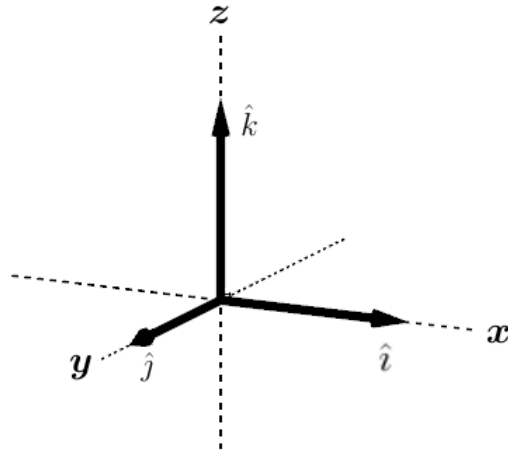
También se tiene que el producto cruz o vectorial entre los tres vectores unitarios dará como resultado al vector unitario faltante, positivo solo si están en forma consecutiva,  $\hat{i}, \hat{j}$  y luego  $\hat{k}$ :

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

Lo anterior se puede observar en la siguiente figura:

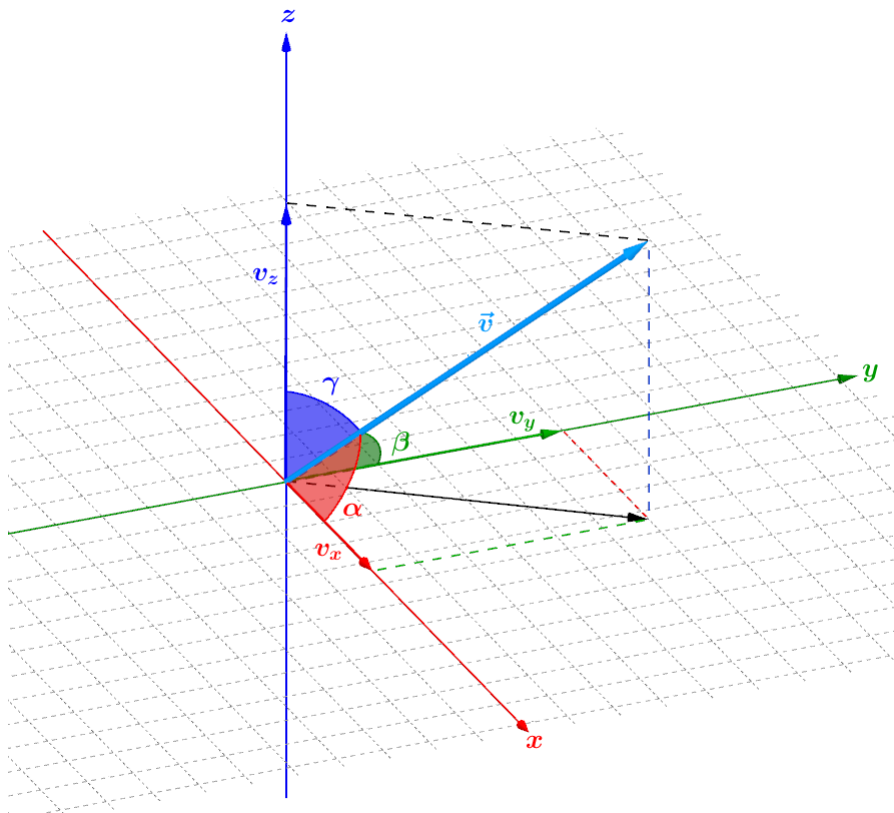


También se tiene que al ser el producto cruz o vectorial no conmutativo:

$$\begin{aligned} -\hat{j} \times \hat{i} &= \hat{k} \\ -\hat{k} \times \hat{j} &= \hat{i} \\ -\hat{i} \times \hat{k} &= \hat{j} \end{aligned}$$

Vectores en tres dimensiones:

Un vector en tres dimensiones es un vector que esta compuesto por tres componentes una en el eje  $x$ , otra en el  $y$  y otra en el eje  $z$ ; graficamente:



Donde se tiene que el vector esta dado por:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \text{ o } \vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

Y su magnitud por:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2} \quad (\dagger)$$

Y los cosenos directores son los siguientes:

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}$$

$$\cos \beta = \frac{v_y}{v}$$

$$\cos \gamma = \frac{v_z}{v}$$

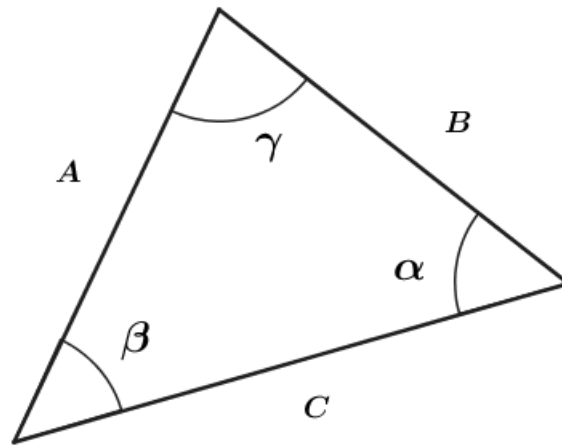
Con lo anterior se tiene que el vector se puede expresar también:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (v_x, v_y, v_z) \\ \vec{v} &= (v \cos \alpha, v \cos \beta, v \cos \gamma) \end{aligned}$$

Sustituyendo en  $(\dagger)$  :

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{(v \cos \alpha)^2 + (v \cos \beta)^2 + (v \cos \gamma)^2} \\ v &= \sqrt{v^2 \cos^2 \alpha + v^2 \cos^2 \beta + v^2 \cos^2 \gamma} \\ v^2 &= \left( \sqrt{v^2 \cos^2 \alpha + v^2 \cos^2 \beta + v^2 \cos^2 \gamma} \right)^2 \\ v^2 &= v^2 \cos^2 \alpha + v^2 \cos^2 \beta + v^2 \cos^2 \gamma \\ v^2 &= v^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \\ \frac{v^2}{v^2} &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \\ 1 &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \end{aligned}$$

Sea el triángulo  $ABC$  no siempre sea rectángulo,



se tiene que:

Ley de senos:

$$\frac{A}{\sin \alpha} = \frac{B}{\sin \beta} = \frac{C}{\sin \gamma}$$

Ley de cosenos:

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos \alpha$$

$$B^2 = A^2 + C^2 - 2AC \cos \beta$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma$$

## Momentos de inercia de diversos cuerpos

En general se tiene que el momento de inercia de un objeto esta dado por:

$$I = cMR^2$$

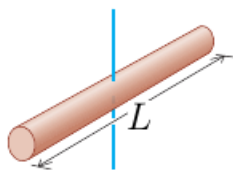
Donde:

$$0 < c \leq 1$$

La constante  $c$  se puede calcular a partir de la configuración geométrica del objeto que esta rotando, y siempre tiene un valor entre cero y uno. Cuanto más masa se concentré cerca de el eje de rotación, menor será el de  $c$ ; en cambio si toda la masa está ubicada en el borde externo del objeto, como en un aro, por ejemplo, entonces  $c$  tiende al valor 1.

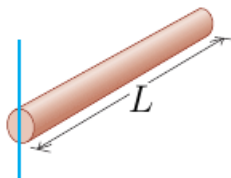
**a) Varilla delgada, eje a través del centro**

$$I = \frac{1}{12}ML^2$$



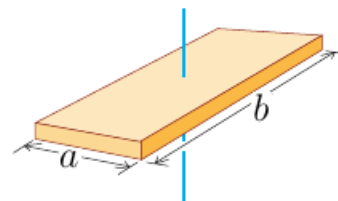
**b) Varilla delgada, eje a través de un extremo**

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$



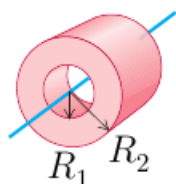
**c) Placa rectangular, eje a través del centro**

$$I = \frac{1}{12}M(a+b)^2$$



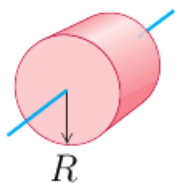
**e) Cilindro hueco de pared gruesa**

$$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$$



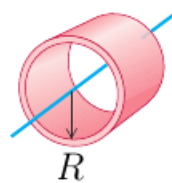
**f) Cilindro sólido**

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



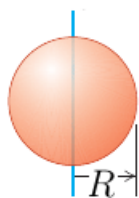
**g) Cilindro hueco de pared delgada**

$$I = MR^2$$



**i) Esfera hueca de pared delgada**

$$I = \frac{2}{3}MR^2$$



## Datos astronómicos

| Cuerpo   | Masa (kg)             | Radio (m)          | Radio de<br>órbita (m) | Periodo de<br>la órbita |
|----------|-----------------------|--------------------|------------------------|-------------------------|
| Sol      | $1.99 \times 10^{30}$ | $6.96 \times 10^8$ | — — —                  | — — —                   |
| Luna     | $7.35 \times 10^{22}$ | $1.74 \times 10^6$ | $3.84 \times 10^8$     | 27.3 d                  |
| Mercurio | $3.30 \times 10^{23}$ | $2.44 \times 10^6$ | $5.79 \times 10^{10}$  | 88.0 d                  |
| Venus    | $4.87 \times 10^{24}$ | $6.05 \times 10^6$ | $1.08 \times 10^{11}$  | 224.7 d                 |
| Tierra   | $5.97 \times 10^{24}$ | $6.38 \times 10^6$ | $1.50 \times 10^{11}$  | 365.3 d                 |
| Marte    | $6.42 \times 10^{23}$ | $3.40 \times 10^6$ | $2.28 \times 10^{11}$  | 687.0 d                 |
| Júpiter  | $1.90 \times 10^{27}$ | $6.91 \times 10^7$ | $7.78 \times 10^{11}$  | 11.86 a                 |
| Saturno  | $5.68 \times 10^{26}$ | $6.03 \times 10^7$ | $1.43 \times 10^{12}$  | 29.45 a                 |
| Urano    | $8.68 \times 10^{25}$ | $2.56 \times 10^7$ | $2.87 \times 10^{12}$  | 84.02 a                 |
| Neptuno  | $1.02 \times 10^{26}$ | $2.48 \times 10^7$ | $4.50 \times 10^{12}$  | 164.8 a                 |
| Plutón   | $1.31 \times 10^{22}$ | $1.15 \times 10^6$ | $5.91 \times 10^{12}$  | 247.9 a                 |