

Algunas fórmulas útiles para productos torcidos

Joseph C. Várilly, Edison de Faría y José M. Gracia-Bondía

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, San José 11501, Costa Rica

Cienc. Tec. (CR) **10** (1986), 81–90

Resumen

Investigamos dos modificaciones del producto cuántico o torcido de funciones sobre el espacio de fases, y proporcionamos una colección de fórmulas útiles en el cálculo con estos productos. La primera modificación es la introducción de un parámetro $a > 0$; el producto ordinario de funciones se recupera en el límite “cuasiclásico” $a \rightarrow 0$. La segunda alternativa es la transferencia del producto torcido al espacio de Bargmann de funciones analíticas: aquí se puede definir el producto torcido en términos de un núcleo integral en el espacio de Bargmann.

Abstract

We explore two modifications of the quantum mechanical or twisted product of functions on phase space, and we give a collection of formulas which are useful for calculating with these products. The first modification is the introduction of a parameter $a > 0$; the ordinary product of functions is recovered in the “quasiclassical” limit $a \rightarrow 0$. The second alternative is the transfer of the twisted product to Bargmann’s space of analytic functions: here the twisted product can be defined purely in terms of an integral kernel on Bargmann’s space.

1. Introducción

En años recientes, ha habido un interés creciente en el uso de métodos para resolver problemas de la física y química cuánticas, que hacen uso de las llamadas *funciones de Wigner* [1, 2]. Estas son funciones definidas en el espacio de fases del sistema bajo consideración, como se suele usar en la mecánica cuántica. En el enfoque clásico, los “observables” del sistema forman un álgebra de dichas funciones, donde la operación multiplicativa es el producto puntual $fg(u) := f(u)g(u)$ – aquí u representa un punto en el espacio de las fases. Al pasar a sistemas cuánticos, el principio de incertidumbre prohíbe el conocimiento simultáneo y exacto de la posición q y el momento p de una partícula y entonces la localización en un punto $u = (q, p)$ del espacio de las fases pierde relevancia: es necesario reemplazar el producto puntual por algún otro producto y trabajar con una colección de funciones que forma un álgebra bajo este nuevo producto.

El espacio de fases más simple es el espacio \mathbb{R}^{2N} : escribimos $u = (q, p)$ con $q \in \mathbb{R}^N$, $p \in \mathbb{R}^N$. Si $v = (q', p') \in \mathbb{R}^{2N}$, escribimos

$$uv := qq' + pp' = \sum_{i=1}^N q_i q'_i + p_i p'_i \quad (1)$$

para denotar el producto escalar (simétrico) en \mathbb{R}^{2N} . El espacio de fases tiene un producto anti-simétrico o “simpléctico” dado por

$$uJv := qp' - pq' = \sum_{i=1}^N q_i p'_i - p_i q'_i. \quad (2)$$

Se puede considerar J como la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ahora, un producto de funciones sobre \mathbb{R}^{2N} debe ser una operación bilineal, asociativa, invariante bajo traslaciones $u \mapsto u - v$, y compatible con la estructura simpléctica J . Resulta que hay solamente dos opciones [3]: el producto puntual ordinario y el producto dado por un núcleo integral

$$f \times g(u) := \iint f(u+s) g(u+t) L(s,t) ds dt,$$

donde el núcleo L es la forma $L(s,t) = b e^{icsJt}$ para algunas constantes b, c . Tomaremos $b = c = 1$. Usando (2), se ve que $uJu = 0$ y $vJu = -uJv$, así que $(v-u)J(w-u) = uJv + vJw + wJu$: luego

$$\begin{aligned} f \times g(u) &= \iint f(u+s) g(u+t) e^{isJt} ds dt \\ &= \iint f(v) g(w) e^{i(uJv+vJw+wJu)} dv dw. \end{aligned} \quad (3)$$

Para verificar la asociatividad de $f \times g$, es necesario cambiar el orden de integración. Para no tener que justificar tales cambios explícitamente, debemos escoger f, g en espacios de funciones “bien portadas”, como el espacio de funciones declinantes $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})$ de Schwartz. Frecuentemente, es posible extender los resultados de diversos cálculos a espacios de funciones (y de distribuciones) más grandes, usando la dualidad entre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})$ y el espacio de distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2N})$: véase [4] por ejemplo. Por lo tanto, en lo que sigue haremos muchos cálculos “formales”, cuya justificación detallada puede efectuarse por los métodos usuales de la teoría de distribuciones.

2. Definiciones básicas

En \mathbb{R}^{2N} , integramos con respecto a tres medidas: (i) la de Lebesgue, $d^{2N}u := d^N q d^N p$; (ii) $du := (2\pi)^{-N} d^N q d^N p$; y (iii) $d'u := (4\pi)^{-N} d^N q d^N p = 2^{-N} du$. Con estas normalizaciones, obtenemos $\int \exp(-u^2/2) du = 1$, donde $u^2 = uu$ como en (1), y en consecuencia

$$\int \exp(-cu^2/2 + ut) du = c^{-N} \exp(t^2/2c) \quad (4)$$

para $c > 0$, $t \in \mathbb{R}^{2N}$ (inclusive para $t \in \mathbb{C}^{2N}$), donde todas las integrales con respecto a du o $d'u$ se extienden sobre todo \mathbb{R}^{2N} . Para verificar esta fórmula, se usa la sustitución $v := \sqrt{c}(u - t/c)$, con $du = c^{-N} dv$. En particular, obtenemos

$$\int \exp(-u^2/2 + ut) du = \exp(t^2/2), \quad (5)$$

$$\int \exp(-u^2 + \sqrt{2}ut) du = 4^{-N} \exp(t^2/2). \quad (6)$$

Sea $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})$ el espacio de funciones $f: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{C}$ que son infinitamente derivables y tales que $u^n D^m f(u)$ se anula en el infinito para todo n, m multiíndices. Si $n = (n_1, n_2, \dots, n_{2N})$ se escribe $u^n = \prod_{j=1}^{2N} u_j^{n_j}$. Para $f, g \in \mathcal{S}$, defínase

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &:= \int f(u) g(u) du, \\ (f | g) &:= \int f^*(u) g(u) d'u = 2^{-N} \int f^*(u) g(u) du.\end{aligned}$$

También escribimos $f^*(u) := \overline{f(u)}$ (donde \bar{z} denota el conjugado complejo de $z \in \mathbb{C}$), así que $(f | g) = 2^{-N} \langle f^*, g \rangle$. La *función gaussiana* $f_0 \in \mathcal{S}$ se define por

$$f_0(u) := 2^N \exp(-u^2/2) = 2^N \exp(-(q^2 + p^2)/2),$$

y se ve que $(f_0 | f_0) = 1$.

$L^2 = L^2(\mathbb{R}^{2N})$ consta de funciones $f: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|^2 := (f | f) = \int |f(u)|^2 d'u$$

sea finita. Tenemos $\mathcal{S} \subset L^2$, y \mathcal{S} es denso en L^2 . Cada forma lineal y continua sobre L^2 es de la forma $g \mapsto (f | g)$ con $f \in L^2$. Si T es una forma lineal y continua sobre \mathcal{S} (en la topología usual de \mathcal{S}), escribimos $\langle T, g \rangle := T(g)$. Estas T forman el espacio de distribuciones temperadas $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2N})$, con $\mathcal{S} \subset L^2 \subset \mathcal{S}'$.

Se definen tres *transformadas de Fourier*: la “ordinaria”, que es $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, y dos “simpléticas” $F, \bar{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, por

$$\begin{aligned}\mathcal{F}g(u) &:= \int g(t) e^{-iut} dt, \\ Fg(u) &:= \int g(t) e^{iuJt} dt, \\ \bar{F}g(u) &:= \int g(t) e^{-iuJt} dt.\end{aligned}\tag{7}$$

Como $ut = tu$, $uJt = -tJu$, se ve que $\mathcal{F}g(u) = \bar{F}g(-u) = \mathcal{F}g(Ju)$. La fórmula de inversión es

$$g(t) = \int \mathcal{F}g(u) e^{itu} du = \int Fg(v) e^{itJv} dv = F^2g(t)$$

así que $F^2 = \bar{F}^2 = \text{id}$. Además,

$$\langle Ff, g \rangle = \iint f(t) e^{iuJt} g(u) dt du = \iint g(u) e^{-itJu} f(t) du dt = \langle f, \bar{F}g \rangle$$

y luego $(Ff | g) = (f | Fg)$, $(\bar{F}f | g) = (f | \bar{F}g)$. Luego F y \bar{F} se extienden a L^2 como operadores autoadjuntos y unitarios sobre L^2 .

El *producto torcido* $f \times g$ de $f, g \in \mathcal{S}$ se define por la fórmula (3). Además se puede definir una *convolución torcida* $f \diamond g$ de $f, g \in \mathcal{S}$ por

$$f \diamond g(u) := \int f(u-t) g(t) e^{-iuJt} dt. \quad (8)$$

(La convolución “ordinaria” de $f, g \in \mathcal{S}$ es dada por $f * g(u) := \int f(u-t) g(t) dt$.)

La conexión entre estas operaciones es dada por las fórmulas importantes:

$$f \diamond g = Ff \times g = f \times \bar{F}g, \quad f \times g = Ff \diamond g = f \diamond \bar{F}g. \quad (9)$$

Estas dos ecuaciones son equivalentes ya que $F^2 = \bar{F}^2 = \text{id}$. Para verificar la segunda, observamos que

$$\begin{aligned} f \times g(u) &= \iint f(v) g(w) e^{i((u-w)Jv+wJu)} dv dw \\ &= \int Ff(u-w) g(w) e^{-iuJw} dw = Ff \diamond g(u) \\ &= \iint f(u-t) g(w) e^{-itJw} e^{-iuJt} dw dt \\ &= \int f(u-t) \bar{F}g(t) e^{-iuJt} dt = f \diamond \bar{F}g(u). \end{aligned}$$

Además tenemos $F(f \times g) = Ff \diamond Fg$, $F(f \diamond g) = Ff \times Fg$ e identidades análogas para \mathcal{F} y \bar{F} , debido a (7). La primera viene de

$$\begin{aligned} F(f \times g)(u) &= \int f \times g(v) e^{iuJv} dv \\ &= \iiint f(v+s) g(v+t) e^{i(sJt+uJv)} ds dt dv \\ &= \iiint f(x) g(y) e^{i((u-s)Jx+sJv+sJu)} dx dy ds \\ &= \int Ff(u-s) Fg(s) e^{-iuJs} ds = Ff \diamond Fg(u). \end{aligned}$$

La asociatividad de la convolución torcida viene del cálculo

$$\begin{aligned} ((f \diamond g) \diamond h)(u) &= \iint f(u-t-s) g(s) h(t) e^{-i(uJt+(u-t)Js)} ds dt \\ &= \iint f(u-v) g(v-t) h(t) e^{-i(uJv+vJt)} dt dv = (f \diamond (g \diamond h))(u). \end{aligned}$$

y la asociatividad del producto torcido resulta al aplicar la transformación F a ambos lados de la ecuación $(Ff \diamond Fg) \diamond Fh = Ff \diamond (Fg \diamond Fh)$.

También tenemos

$$\begin{aligned} (f \times g)^*(u) &= \iint f^*(u+s) g^*(u+t) e^{-isJt} ds dt \\ &= \iint g^*(u+t) f^*(u+s) e^{itJs} dt ds = g^* \times f^*(u), \end{aligned}$$

así que \mathcal{S} es una $*$ -álgebra bajo el producto torcido.

Como $Fg(0) = \int g(t) dt$ y $f \diamond g(0) = \int f(-t) g(t) dt$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int f \times g(u) du &= F(f \times g)(0) = f \times Fg(0) = f \diamond \bar{F}Fg(0) \\ &= \int f(-t) g(-t) dt = \int f(u) g(u) du, \end{aligned}$$

o bien

$$\int f \times g(u) du = \langle f, g \rangle. \quad (10)$$

Si integramos las identidades $(f \times g) \times h = f \times (g \times h)$ y $h \times (f \times g) = (h \times f) \times g$ y usamos $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$, obtenemos

$$\langle f \times g, h \rangle = \langle f, g \times h \rangle = \langle g, h \times f \rangle. \quad (11)$$

La identidad (11) nos permite extender el producto torcido por dualidad, pues demuestra que las siguientes definiciones son consistentes: si $T \in \mathcal{S}'$; $f, h \in \mathcal{S}$, se definen $T \times f$ y $f \times T$ en \mathcal{S}' por:

$$\langle T \times f, h \rangle := \langle T, f \times h \rangle, \quad \langle f \times T, h \rangle := \langle T, h \times f \rangle. \quad (12)$$

La función constante 1 queda en \mathcal{S}' pero no en \mathcal{S} ; también, la distribución δ definida por $\langle \delta, f \rangle := f(0)$ está en \mathcal{S}' . Valen

$$1 \times f = f \times 1 = f, \quad \delta \times f = \bar{F}f, \quad f \times \delta = Ff \quad (13)$$

para $f \in \mathcal{S}$; las primeras dos son inmediatas pues (10) se puede escribir como $\langle 1, f \times g \rangle = \langle f, g \rangle$, y las otras son consecuencias de (9) y (12). Vemos que 1 es una identidad tanto para el producto torcido como para el producto puntual.

Para extender la convolución torcida, escribimos $\check{f}(u) := f(-u)$. Como $\bar{F}Fg = F\bar{F}g = \check{g}$, las identidades (9) muestran que

$$\langle f \diamond g, h \rangle = \langle f, \check{g} \diamond h \rangle = \langle g, h \diamond \check{f} \rangle, \quad (14)$$

lo cual permite definir $f \diamond T, T \diamond f$ para $T \in \mathcal{S}'$, $f \in \mathcal{S}$ por

$$\langle T \diamond f, h \rangle := \langle T, \check{f} \diamond h \rangle, \quad \langle f \diamond T, h \rangle := \langle T, h \diamond \check{f} \rangle.$$

Se extienden las transformaciones de Fourier a \mathcal{S}' por

$$\langle \mathcal{F}T, f \rangle := \langle T, \mathcal{F}f \rangle, \quad \langle FT, f \rangle := \langle T, \bar{F}f \rangle, \quad \langle \bar{F}T, f \rangle := \langle T, Ff \rangle.$$

Aplicando la identidad $F1 = \bar{F}1 = \mathcal{F}1 = \delta$ a (13) se recibe

$$\delta \diamond f = f \diamond \delta = f, \quad 1 \diamond f = \bar{F}f, \quad f \diamond 1 = Ff,$$

tomando en cuenta la extensión de (9).

Si queremos extender (12) al producto de dos distribuciones por

$$\langle T \times S, h \rangle := \langle T, S \times h \rangle, \quad \langle R \times T, h \rangle := \langle T, h \times R \rangle, \quad (15)$$

es necesario tomar

$$\begin{aligned} S \in \mathcal{M}_L &:= \{ S \in \mathcal{S}' : S \times h \in \mathcal{S} \text{ para todo } h \in \mathcal{S} \}, \\ R \in \mathcal{M}_R &:= \{ R \in \mathcal{S}' : h \times R \in \mathcal{S} \text{ para todo } h \in \mathcal{S} \}. \end{aligned}$$

Obsérvese que $S \in \mathcal{M}_L$ si y solo si $S^* \in \mathcal{M}_R$, donde el conjugado complejo S^* se define por $\langle S^*, f \rangle := \langle S, f^* \rangle$. Luego $\mathcal{M} := \mathcal{M}_L \cap \mathcal{M}_R$ es una $*$ -álgebra asociativa de distribuciones, como se puede verificar. De (13) se ve que $1, \delta \in \mathcal{M}$ y es posible mostrar que \mathcal{M} contiene todos los polinomios sobre \mathbb{R}^{2N} : véase [4]. Tenemos $\mathcal{S} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{S}'$. La convolución torcida también se puede extender a \mathcal{M} , y (9) sigue siendo válido con uno de f, g reemplazado por una $T \in \mathcal{S}'$ o bien con f, g reemplazadas por $R \in \mathcal{M}_L$ ó $S \in \mathcal{M}_R$ respectivamente. Usando esta extensión de (9), se ve que las transformaciones de Fourier dejan \mathcal{M} invariante.

En [4] se mostró que \mathcal{M} contiene \mathcal{E} , el espacio de distribuciones de soporte compacto (y por lo tanto contiene el espacio $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ de “funciones de espectro compacto”). En [5] se observó que \mathcal{M} también contiene el espacio de funciones \mathcal{O}_C pero no contiene \mathcal{O}_M : aquí \mathcal{O}_M denota el espacio de funciones infinitamente derivables $f : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{C}$ tales que todas sus derivadas son mayorizadas por polinomios; \mathcal{O}_C es el subespacio de \mathcal{O}_M en donde el grado del polinomio mayorizante no depende del orden de la derivada.

3. El producto torcido modificado

Después de ese breve repaso de las propiedades del producto torcido usual, veremos un par de enfoques alternativos. La primera modificación es solamente un cambio de escala. Sea a un número real positivo; si $f : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función, su *dilatación* $L_a f$ por el factor de escala a es

$$L_a f(u) := a^{-N/2} f(a^{-1/2}u). \quad (16)$$

Si $g \in \mathcal{S}$, tenemos

$$\begin{aligned} F(L_a g)(u) &= \int L_a g(t) e^{iuJt} dt = a^{-N/2} \int g(a^{-1/2}t) e^{iuJt} dt \\ &= a^{N/2} \int g(s) e^{i\sqrt{a}uJs} ds = a^{N/2} Fg(a^{1/2}u) = L_{1/a}(Fg)(u), \end{aligned}$$

y $\overline{F}(L_a g) = L_{1/a}(\overline{F}g)$ análogamente. Luego

$$FL_a = L_{1/a}F, \quad \overline{F}L_a = L_{1/a}\overline{F}. \quad (17)$$

Defínase

$$F_a := L_a^{-1}FL_a, \quad \overline{F}_a := L_a^{-1}\overline{F}L_a. \quad (18)$$

Como $v = a^{-1/2}u$ implica $d'u = a^N d'v$, tenemos $(L_a f | L_a g) = (f | g)$ para $f, g \in L^2$; luego L_a es unitario sobre L^2 y de (18) se ve que F_a y \overline{F}_a son también unitarios sobre L^2 .

Ahora definimos las versiones dilatadas del producto torcido y de la convolución torcida por:

$$\begin{aligned} f \times_a g &:= a^{-N/2} L_a(L_a^{-1}f \times L_a^{-1}g), \\ f \diamond_a g &:= a^{-N/2} L_a^{-1}(L_a f \diamond L_a g). \end{aligned} \quad (19)$$

Sustituyendo (16) en (3) y (8), se obtiene:

$$\begin{aligned} f \times_a g(u) &= \iint f(u + a^{-1/2}v) g(u + a^{-1/2}w) e^{ivJw} dv dw \\ &= a^{2N} \iint f(u + s) g(u + t) e^{isJt/a} ds dt \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} f \diamond_a g(u) &= a^{-N} \int f(u - a^{-1/2}s) g(a^{-1/2}s) e^{-i\sqrt{a}uJs} ds \\ &= \int f(u - t) g(t) e^{-iauJt} dt. \end{aligned} \quad (21)$$

El análogo de la fórmula (9) es falso si $a \neq 1$: de hecho, los operadores F_a, \bar{F}_a cambian \times_a en $\diamond_{1/a}$ y viceversa: en efecto,

$$\begin{aligned} f \times_{1/a} g &= a^N (F_a f \diamond_a g) = a^N (f \diamond_a \bar{F}_a g), \\ f \diamond_{1/a} g &= a^N (F_{1/a} f \times_a g) = a^N (f \times_a \bar{F}_{1/a} g). \end{aligned} \quad (22)$$

Para ver esto, usamos (9), (18) y (19):

$$\begin{aligned} f \times_{1/a} g &= a^{N/2} L_a^{-1} (L_a f \times L_a g) = a^{N/2} L_a^{-1} (F L_a f \diamond L_a g) \\ &= a^{N/2} L_a^{-1} (L_a F_a f \diamond L_a g) = a^N (F_a f \diamond_a g), \\ f \diamond_{1/a} g &= a^{N/2} L_a (L_a^{-1} f \diamond L_a^{-1} g) = a^{N/2} L_a (F L_{1/a} f \times L_a^{-1} g) \\ &= a^{N/2} L_a (L_a^{-1} F_{1/a} f \times L_a^{-1} g) = a^N (F_{1/a} f \times_a g), \end{aligned}$$

y análogamente para las otras igualdades en (22).

La asociatividad del producto torcido y de la convolución torcida se conserva bajo dilatación. Por ejemplo, es evidente de (19) que

$$(f \times_a g) \times_a h = a^{-N} L_a (L_a^{-1} f \times L_a^{-1} g \times L_a^{-1} h) = f \times_a (g \times_a h).$$

Luego (11) también es válida con \times_a en lugar de \times ya que las tres expresiones obtenidas son iguales a $\int (f \times g \times h)(u) du$. Para extender (14), se usa la ecuación $\bar{F}_a g = F_a \check{g}$ y (22) para obtener

$$\langle f \diamond_a g, h \rangle = a^{-N} \langle f \times_{1/a} \bar{F}_a g, h \rangle = a^{-N} \langle f, F_a \check{g} \times_{1/a} h \rangle = \langle f, \check{g} \diamond_a h \rangle,$$

y análogamente $\langle f \diamond_a g, h \rangle = \langle g, h \diamond_a \check{f} \rangle$. Por lo tanto se puede definir $T \times_a f, f \times_a T, T \diamond_a f, f \diamond_a T$ para $T \in \mathcal{S}', f \in \mathcal{S}$, por:

$$\begin{aligned} \langle T \times_a f, h \rangle &:= \langle T, f \times_a h \rangle, & \langle f \times_a T, h \rangle &:= \langle T, h \times_a f \rangle, \\ \langle T \diamond_a f, h \rangle &:= \langle T, \check{f} \diamond_a h \rangle, & \langle f \diamond_a T, h \rangle &:= \langle T, h \diamond_a \check{f} \rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

Se extiende la dilatación L_a a \mathcal{S}' por

$$\langle L_a T, f \rangle := \langle T, L_a^{-1} f \rangle. \quad (24)$$

Combinando (23) y (24), se ve que las definiciones de (19) siguen válidas si se reemplaza $f, g \in \mathcal{S}$ por $T \in \mathcal{S}', f \in \mathcal{S}$.

De (16) y (24) es inmediato que

$$L_a 1 = a^{-N/2} 1, \quad L_a \delta = a^{N/2} \delta.$$

1 y δ siguen siendo las identidades para estas operaciones:

$$1 \times_a f = f \times_a 1 = f, \quad \delta \diamond_a f = f \diamond_a \delta = f,$$

porque por ejemplo,

$$\langle 1 \times_a f, h \rangle = \langle 1, f \times_a h \rangle = \int f \times_a h(u) du = \langle f, h \rangle, \quad \text{para todo } h \in \mathcal{S};$$

$$\langle \delta \diamond_a f, h \rangle = \langle \delta, \check{f} \diamond_a h \rangle = (\check{f} \diamond_a h)(0) = \int f(t) h(t) dt = \langle f, h \rangle,$$

para todo h , por (21).

Por otro lado obtenemos

$$\begin{aligned} f \diamond_a 1 &:= a^{-N} F_a f, & 1 \diamond_a f &:= a^{-N} \bar{F}_a f, \\ f \times_a \delta &:= a^{-N} F_{1/a} f, & \delta \times_a f &:= a^{-N} \bar{F}_{1/a} f. \end{aligned}$$

Consideramos ahora el límite cuando $a \rightarrow 0$. Para $f, g \in \mathcal{S}$, tenemos $f \times_a g(u) \rightarrow f(u) g(u)$, $f \diamond_a g(u) \rightarrow f * g(u)$, usando (20) y (21) y el cálculo $\int e^{ivJw} dv dw = \int \delta(Jw) dw = 1$. Con el uso de seminormas apropiadas sobre \mathcal{S} , es posible mostrar que de hecho $f \times_a g \rightarrow fg$, $f \diamond_a g \rightarrow f * g$ en la topología usual de \mathcal{S} , cuando $a \rightarrow 0$. Luego tomando en cuenta (23) y las identidades

$$\langle Tf, h \rangle = \langle T, fh \rangle, \quad \langle T * f, h \rangle = \langle T, \check{f} * h \rangle$$

para $T \in \mathcal{S}'$, $f, h \in \mathcal{S}$, se ve que $T \times_a f \rightarrow Tf$, $T \diamond_a f \rightarrow T * f$ en \mathcal{S}' cuando $a \rightarrow 0$.

Finalmente, escribimos $\mathcal{M}_a := L_a(\mathcal{M})$. Como $L_a(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ y $L_a(\mathcal{S}') = \mathcal{S}'$, se concluye por (19) que $T \times_a f \in \mathcal{S}$ para todo $f \in \mathcal{S}$ si y solo si $L_a^{-1}T \in \mathcal{M}_L$, y que $f \times_a T \in \mathcal{S}$ para todo $f \in \mathcal{S}$ si y solo si $L_a^{-1}T \in \mathcal{M}_R$, así que

$$\mathcal{M}_a = \{ S \in \mathcal{S}' : S \times_a f \in \mathcal{S}, f \times_a S \in \mathcal{S} \text{ para todo } f \in \mathcal{S} \}.$$

Como \mathcal{F} deja \mathcal{M} invariante, se concluye de (17) que

$$\mathcal{F}(\mathcal{M}_a) = \mathcal{M}_{1/a}. \quad (25)$$

Para ver que las $*$ -álgebras \mathcal{M}_a son distintas, considérese la función $T(u) = T(q, p) := e^{iqp}$ y sea $f(u) := 2^N \exp(-iqp - q^2 - p^2)$. Este ejemplo se debe a una sugerencia de Peter Wagner [6]. Usando (4), calculamos

$$\begin{aligned} T \diamond_a f(u) &= \int T(u-t) f(t) e^{-iauJt} dt \quad [u = (q, p), t = (r, s) \in \mathbb{R}^{2N}] \\ &= 2^N \iint \exp(i(q-r)(p-s) - irs - r^2 - s^2 - ia(qs - pr)) dr ds \\ &= 2^N e^{iqp} \iint \exp(-r^2 - ir(1-a)p - s^2 - is(1+a)q) dr ds \\ &= \exp(iqp - \frac{1}{4}(1-a)^2 p^2 - \frac{1}{4}(1+a)^2 q^2). \end{aligned}$$

Ahora $T \diamond_a f = a^{-N} T \times_a \bar{F}_{1/a} f$ por (22), y $f \in \mathcal{S}$ (luego $\bar{F}_{1/a} f \in \mathcal{S}$); pero $T \diamond_a f \in \mathcal{S}$ si y solo si $a \neq 1$. Luego $T \notin \mathcal{M}$, pero ya veremos que $T \in \mathcal{M}_a$ para todo $a \neq 1$. Por lo tanto, si $b > 0$, $L_b T \notin \mathcal{M}_b$ pero $L_b T \in \mathcal{M}_a$ para $a \neq b$, así que todos los \mathcal{M}_a son distintos.

La igualdad (25) significa que \mathcal{M} es la única de las álgebras \mathcal{M}_a que es invariante bajo las transformaciones de Fourier F, \bar{F}, \mathcal{F} .

Si $g \in \mathcal{S}$, $a \neq 1$, calculamos

$$\begin{aligned} L_a T \diamond g(q, p) &= a^{-N/2} \iint e^{i(q-r)(p-s)/a} g(r, s) e^{-i(qs-pr)} ds dr \\ &= a^{-N/2} e^{iqp/a} \iint g(r, s) e^{irp(1-1/a)} e^{-is(q+(q-r)/a)} ds dr \\ &= a^{-N/2} e^{iqp/a} \int g(r, q + (q-r)/a) e^{irp(1-1/a)} dr \\ &= a^{-N/2} e^{iqp/a} h_2(q, p(1-a)/a), \quad \text{con } h(q, r) := g_2(r, q + (q-r)/a); \end{aligned}$$

donde $g \mapsto g_2$, $h \mapsto h_2$ denotan la transformación de Fourier en \mathbb{R}^N con respecto a la segunda variable. Si $a \neq 1$, $L_a T \diamond g \in \mathcal{S}$ para $g \in \mathcal{S}$, así que $L_a T \in \mathcal{M}$ y luego $T \in \mathcal{M}_{1/a}$.

4. Productos torcidos en el espacio de Bargmann

En [7], Bargmann estudió un espacio de funciones analíticas que forman un espacio de Hilbert, y una transformación integral que relaciona este espacio con $L^2(\mathbb{R}^N)$. Como nosotros trabajamos en el espacio de las fases \mathbb{R}^{2N} es necesario considerar un producto tensorial de dos copias del espacio de Bargmann, y resulta conveniente que las funciones de dos variables (ambas en \mathbb{R}^N) así obtenidas sean analíticas en una de las variables pero antianalíticas en la otra.

Tomamos entonces $z = (\bar{z}_1, z_2) \in \bar{\mathbb{C}}^N \times \mathbb{C}^N$ donde $\bar{\mathbb{C}}^N$ es el espacio vectorial conjugado de \mathbb{C}^N . Siendo $w = (\bar{w}_1, w_2)$, escribimos

$$z^* := (z_1, \bar{z}_2), \quad zw := \bar{z}_1 \bar{w}_1 + z_2 w_2, \quad zJw := \bar{z}_1 w_2 - z_2 \bar{w}_1. \quad (26)$$

En $\bar{\mathbb{C}}^N \times \mathbb{C}^N$, usamos la medida gaussiana

$$d\mu(z) := \pi^{-2N} \exp(-zz^*) d\bar{z}_1 dz_2 \equiv \pi^{-2N} \exp(-\bar{z}_1 z_1 - z_2 \bar{z}_2) d^N x_1 d^N y_1 d^N x_2 d^N y_2$$

donde $\bar{z}_1 = x_1 - iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$; con $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^N$.

Por $\mathcal{F}(\bar{\mathbb{C}}^N \times \mathbb{C}^N)$ entendemos el espacio de funciones $f: \bar{\mathbb{C}}^N \times \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ que son antianalíticas en z_1 , analíticas en z_2 , y tales que la integral $\int |f(z)|^2 d\mu(z)$ sea finita. (Todas las integraciones con respecto a $d\mu(z)$ extienden sobre todo el espacio $\bar{\mathbb{C}}^N \times \mathbb{C}^N$.) Este es un espacio de Hilbert, considerado como subespacio cerrado de $L^2(\bar{\mathbb{C}}^N \times \mathbb{C}^N, d\mu)$.

Consideramos el núcleo integral

$$A(z, u) := 2^N \exp(-\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}u^2 + \sqrt{2}zu) \equiv 2^N \exp(-\frac{1}{2}\bar{z}_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2 - \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}p^2 + \sqrt{2}(\bar{z}_1 q + \bar{z}_2 p)) \quad (27)$$

para $z \in \bar{\mathbb{C}}^N \times \mathbb{C}^N$, $u \in \mathbb{R}^{2N}$. Si $f: \bar{\mathbb{C}}^N \times \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$, $h: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones, este núcleo sirve para definir dos transformaciones \mathbb{A} y \mathbb{V} por

$$\mathbb{A}h(z) := \int A(z, u) h(u) d'u, \quad \mathbb{V}f(u) := \int A(z^*, u) f(z) d\mu(z). \quad (28)$$

La primera integral converge al menos si $h \in \mathcal{S}$; sea $\mathcal{E} := \mathbb{A}(\mathcal{S})$. Entonces se puede mostrar que \mathcal{E} es denso en $\mathcal{F}(\overline{\mathbb{C}}^N \times \mathbb{C}^N)$, que la segunda integral en (28) converge si $f \in \mathcal{E}$, y que $\mathbb{A}h = h$, $\mathbb{A}\mathbb{V}f = f$, cuando $h \in \mathcal{S}$ ó $f \in \mathcal{E}$. Además, \mathbb{A} y \mathbb{V} se extienden a un par de transformaciones unitarias (recíprocas) entre $L^2(\mathbb{R}^{2N})$ y $\mathcal{F}(\overline{\mathbb{C}}^N \times \mathbb{C}^N)$. Los detalles son adaptaciones sencillas de los argumentos originales de Bargmann [7, 8].

Ahora introducimos una función de tres variables: si $a, b, c \in \overline{\mathbb{C}}^N \times \mathbb{C}^N$, se define, usando (26),

$$K(a, b, c) := \exp\left(\frac{1}{2}(ab + bc + ca) + \frac{i}{2}(aJb + bJc + cJa)\right). \quad (29)$$

Esta función sirve para definir el *producto torcido* $f \star g$ de dos funciones $f, g \in \mathcal{E}$ por

$$f \star g(z) := \iint f(a) g(b) K(z, a^*, b^*) d\mu(a) d\mu(b). \quad (30)$$

De ahí obtenemos la relación con el producto torcido en \mathcal{S} :

$$f \star g = \mathbb{A}(\mathbb{V}f \times \mathbb{V}g).$$

Para verificar esto, es cuestión de notar que el lado derecho es de la forma (30) con el núcleo $K(z, a^*, b^*)$ reemplazado por

$$\iiint A(z, u) A(a^*, v) A(b^*, w) e^{i(uJv + vJw + wJu)} dw dv d'u,$$

y un cálculo largo, empleando (5) y (6), reduce esto a $K(z, a^*, b^*)$.

Siguiendo [7] notamos que

$$\begin{aligned} \int A(z, u) A(w^*, u) d'u &= 2^{2N} \int \exp\left(-\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}w^{*2} - u^2 + \sqrt{2}u(z + w^*)\right) d'u \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}w^{*2} + \frac{1}{2}(z + w^*)^2\right) = \exp(zw^*), \end{aligned} \quad (31)$$

usando la fórmula (6).

El núcleo K tiene diversas simetrías; entre ellas, mencionamos

$$\begin{aligned} K(a, b, c) &= K(b, c, a) = K(c, a, b); \\ K(a, b, c) &= K(Ja, Jb, Jc) = K(-a, -b, -c); \\ K(iJa, iJb, c) &= K(a, -b, c) = K(-a, b, -c). \end{aligned}$$

Si además introducimos

$$\tilde{K}(a, b, c) := \exp\left(-\frac{1}{2}(ab + bc + ca) - \frac{i}{2}(aJb + bJc + cJa)\right),$$

se verifica la relación $K(ia, ib, ic) = \tilde{K}(a, b, c)$.

Combinando (28) y (31), vemos que $\exp(zw^*)$ es un *núcleo reproductor* para $\mathcal{F}(\overline{\mathbb{C}}^N \times \mathbb{C}^N)$, puesto que

$$\int \exp(zw^*) f(w) d\mu(w) = \mathbb{A}\mathbb{V}f(z) = f(z). \quad (32)$$

De ahí es fácil calcular – como ya se indica en [7] – que

$$\mathbb{A} \mathcal{F} \mathbb{V} f(z) = f(-iz). \quad (33)$$

De hecho, de (7) y (28) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \mathcal{F} \mathbb{V} f(z) &= \iiint A(z, u) e^{-iuv} A(w^*, v) f(w) d\mu(w) dv d'u \\ &= \int \exp(-izw^*) f(w) d\mu(w) = f(-iz) \end{aligned}$$

usando (32), ya que de (5) y (6) obtenemos

$$\begin{aligned} &\iint A(z, u) e^{-iuv} A(w^*, v) dv d'u \\ &= 4^N \iint \exp\left(-\frac{1}{2}v^2 + v(\sqrt{2}w^* - iu) - \frac{1}{2}(z^2 + w^{*2} + u^2) + \sqrt{2}zu\right) dv d'u \\ &= 4^N \int \exp\left(-u^2 + \sqrt{2}u(z - iw^*) - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}w^{*2}\right) d'u \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}(z - iw^*)^2 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}w^{*2}\right) = \exp(-izw^*). \end{aligned}$$

De igual modo se verifica que

$$\mathbb{A} F \mathbb{V} f(z) = f(-iJz), \quad \mathbb{A} \bar{F} \mathbb{V} f(z) = f(iJz). \quad (34)$$

Combinando (9) con (34), se ve que el análogo de la convolución torcida en el espacio de Bargmann es semejante a (30), con el núcleo $K(z, a^*, b^*)$ reemplazado por $\tilde{K}(-z, a^*, b^*)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\mathbb{V}f \diamond \mathbb{V}g)(z) &= \mathbb{A}(F\mathbb{V}f \times \mathbb{V}g)(z) = (\mathbb{A}F\mathbb{V}f \star \mathbb{V}g)(z) \\ &= \iint f(-iJa) g(b) K(z, a^*, b^*) d\mu(a) d\mu(b) \\ &= \iint f(c) g(b) K(z, iJc^*, b^*) d\mu(c) d\mu(b) \\ &= \iint f(c) g(b) \tilde{K}(-z, c^*, b^*) d\mu(c) d\mu(b). \end{aligned}$$

Como un análogo de (5) y (6) para el espacio de Bargmann, mencionamos la fórmula

$$\int \exp(az + bz^*) d\mu(z) = e^{ab}.$$

Para verificarlo, escribimos $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}^{2N}$; entonces

$$\begin{aligned} \int \exp(az + bz^*) d\mu(z) &= 4^{2N} \iint \exp(-x^2 - y^2 + x(a + b) + iy(a - b)) d'x d'y \\ &= \exp\left(\frac{1}{4}(a + b)^2 - \frac{1}{4}(a - b)^2\right) = e^{ab}. \end{aligned}$$

La involución natural sobre \mathcal{E} es $f^*(z) := \overline{f(z^*)}$ (la doble conjugación). Es fácil chequear que $f^* = \mathbb{A}((\mathbb{V}f)^*)$, donde $(\mathbb{V}f)^*$ es el conjugado complejo (simple) en \mathcal{S} . Como $(zJw)^* = z^*Jw^*$ de (26), obtenemos $K^*(a, b, c) = K(a^*, c^*, b^*)$ por (29), así que

$$\begin{aligned} (f \star g)^*(z) &= \iint f^*(a^*) g^*(b^*) K^*(z^*, a^*, b^*) d\mu(a) d\mu(b) \\ &= \iint g^*(b^*) f^*(a^*) K(z, b, a) d\mu(b) d\mu(a) \\ &= \iint g^*(c) f^*(e) K(z, c^*, e^*) d\mu(b) d\mu(a) = g^* \star f^*(z), \end{aligned}$$

como es de esperar.

La forma bilineal canónica sobre E es

$$\langle f, g \rangle := \int f(z) g(z^*) d\mu(z).$$

Es evidente que $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$, ya que $d\mu(z^*) = d\mu(z)$.

Además observamos que

$$\langle f, g \rangle = \int \exp(\tfrac{1}{2}z^{*2}) (f \star g)(z) d\mu(z). \quad (35)$$

Antes de comprobar esto, notamos la identidad

$$\int \exp(\tfrac{1}{2}z^{*2}) K(z, a, b) d\mu(z) = e^{ab}.$$

En efecto, si escribimos $z = x + iy$, calculamos:

$$\begin{aligned} &\int \exp(\tfrac{1}{2}z^{*2}) K(z, a, b) d\mu(z) \\ &= 4^N \iint \exp(-zz^* + \tfrac{1}{2}z^{*2} + \tfrac{1}{2}(za + ab + bz) + i(zJa + aJb + bJz)) dx dy \\ &= 4^N \exp(\tfrac{1}{2}(ab + iaJb)) \iint \exp(-x^2 - y^2 + \tfrac{1}{2}(x - iy)^2 + \tfrac{1}{2}(x + iy)(a + iJa + b - iJb)) dx dy \\ &= 4^N \exp(\tfrac{1}{2}(ab + iaJb)) \iint \exp(-\tfrac{1}{2}x^2 - ixy - \tfrac{3}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}(x + iy)(a + iJa + b - iJb)) dx dy \\ &= 4^N \exp(\tfrac{1}{2}(ab + iaJb)) \int \exp(-2y^2 + \tfrac{1}{2}(ab + iaJb)) dy = e^{ab}, \end{aligned}$$

y (35) es obtenido de una aplicación de (32):

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int f(z) g(z^*) d\mu(z) = \iint \exp(z^*b^*) f(z) g(b) d\mu(b) d\mu(z) \\ &= \iiint \exp(\tfrac{1}{2}w^{*2}) K(w, z^*, b^*) f(z) g(b) d\mu(w) d\mu(b) d\mu(z) \\ &= \int \exp(\tfrac{1}{2}w^{*2}) (f \star g)(w) d\mu(w). \end{aligned}$$

Usando (31), se ve que $\langle f, g \rangle = \langle \mathbb{V}f, \mathbb{V}g \rangle$.

La asociatividad del producto \star ahora implica que

$$\langle f \star g, h \rangle = \int \exp(\frac{1}{2}z^{*2}) (f \star g \star h)(z) d\mu(z) = \langle f, g \star h \rangle,$$

y el análogo de (11) es válido en el espacio de Bargmann. Luego se puede extender el producto \star por dualidad, como se hizo en (12) y (15), y así obtener una $*$ -álgebra de funciones sesquianalíticas sobre $\overline{\mathbb{C}}^N \times \mathbb{C}^N$, ya que Bargmann ha mostrado que el dual de \mathcal{E} consta de funciones que poseen analiticidad y que obedecen ciertas condiciones de crecimiento [8].

Por último, identificamos la identidad para el producto \star .

Formalmente, $\mathbb{A}(1)(z) = \int A(z, u) d'u = \exp(\frac{1}{2}z^2)$ por (5) y (27); sea $E(z) := \exp(\frac{1}{2}z^2)$. Entonces, si $f \in \mathcal{E}$, tenemos

$$\begin{aligned} E \star f(z) &= \iint \exp(\frac{1}{2}a^2) f(w) K(z, a^*, w^*) d\mu(a) d\mu(w) \\ &= \iint \exp(\frac{1}{2}a^2) K(a^*, w^*, z) f(w) d\mu(a) d\mu(w) \\ &= \int \exp(zw^*) f(w) d\mu(w) = f(z), \end{aligned}$$

así que $E \star f = f$, y de modo semejante $f \star E = f$.

Por (33), también obtenemos $\mathbb{A}(\delta)(z) = \exp(-\frac{1}{2}z^2)$.

En resumen, las fórmulas (29) y (30) definen una operación en el espacio de Bargmann que puede ser estudiada sin referencia al producto torcido en \mathcal{S} . Es de esperar que este enfoque sea útil para extender los productos torcidos a casos de infinitos grados de libertad, como señalan Kree y Raczka [9] y otros.

Agradecimientos

Queremos agradecer a Manuel Gadella su valiosa ayuda en diversos aspectos de este trabajo y en señalar la importancia de contar con una teoría del producto torcido en espacios con medida gaussiana.

Este trabajo ha sido preparado bajo el auspicio del Proyecto de Investigación 114-85-029. Reconocemos a la Vicerrectoría de Investigación de la Universidad de Costa Rica su generoso apoyo a nuestros esfuerzos.

Referencias

- [1] E. P. Wigner, “On the quantum correction for thermodynamic equilibrium”, *Phys. Rev.* **40** (1932), 749–759.
- [2] M. Hillery, R. F. O’Connell, M. O. Scully y E. P. Wigner, “Distribution functions in physics: fundamentals”, *Phys. Reports* **106** (1984), 121–167.
- [3] J.-P. Amiet y P. Huguenin, *Mécaniques classique et quantique dans l’espace de phase*, Université de Neuchâtel, 1981.

- [4] J. M. Gracia-Bondía y J. C. Várilly, “Algebras of distributions suitable for phase-space quantum mechanics. I”, *J. Math. Phys.* **29** (1988), 869–879.
- [5] J. C. Várilly y J. M. Gracia-Bondía, “Twisted products and distribution algebras”, preprint, San José, 1985.
- [6] P. Wagner, private communication, 1986.
- [7] V. Bargmann, “On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. I”, *Commun. Pure Appl. Math.* **14** (1961), 187–214.
- [8] V. Bargmann, “On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. II”, *Commun. Pure Appl. Math.* **20** (1967), 1–101.
- [9] P. Krée and R. Raczka, “Kernels and symbols of operators in quantum field theory”, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **28** (1978), 41–73.