

Datos de Investigación – Estudio procesos de generalización en una situación de Aprendizaje relativa a la Serie Trigonométrica de Fourier

Descripción del contenido:

En las páginas siguientes, se presentan los datos y el análisis de datos para una situación de aprendizaje relativa a la serie trigonométrica de Fourier. Donde se analizan las producciones de los estudiantes como fuente primaria de información. La referencia a las fuentes secundarias se presenta de la siguiente forma:

- ❖ Protocolos de Observación: [PO]-1- «texto». El número indica la tarea a la que corresponde el protocolo. El «texto» será la referencia textual a lo que se indica en el protocolo de observación respectivo. Si lo que se coloca es un parafraseo o descripción no se utilizarán las comillas.
- ❖ Videos grupales: [VG]-1-|00:00:01|- «transcripción textual del video». El primer número indica la tarea correspondiente y lo que está entre barras muestra la hora, minuto y segundo del video en el que inicia lo transcrito. Si lo que se coloca es una descripción de lo ocurrido no se utilizarán las comillas.
- ❖ Videos de equipo: [VE1]-1-|00:00:01|- «transcripción textual del video». El primer número indicará el número de equipo, el segundo número indica la tarea correspondiente y lo que está entre barras muestra la hora, minuto y segundo del video en el que inicia lo transcrito. Si lo que se coloca es una descripción de lo ocurrido no se utilizarán las comillas.

Para los diálogos se utiliza la misma nomenclatura para indicar video, tarea y tiempo en que inicia el diálogo e inmediatamente, hacia abajo, la transcripción del diálogo como se muestra a continuación:

[VE1]-1-|00:00:01|

M3: transcripción textual.

P: transcripción textual.

H1: transcripción textual.

Para esto, se utiliza una P como etiqueta para el profesor y las etiquetas asignadas a cada estudiante previo al inicio del curso.

Propósito del documento:

Poner a disposición del repositorio los datos primarios utilizados en el análisis de la investigación, garantizando la protección de la identidad de los participantes.

Tipo de datos:

Respuestas escritas de estudiantes universitarios, organizadas en tablas. Además, extractos de grabaciones de las interacciones durante el trabajo con la situación de aprendizaje.

Condiciones de uso:

Los datos han sido anonimizados. Su uso está limitado a fines académicos y de investigación. Para cualquier otro uso, se recomienda contactar con el equipo investigador correspondiente a través del repositorio Kerwá.

Fecha de publicación:

Agosto 2020

Identificador del proyecto:

Proyecto de investigación doctoral aprobado.



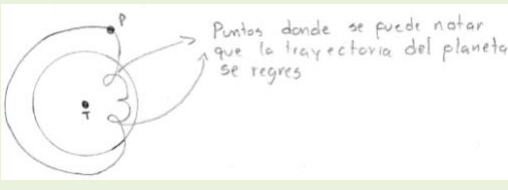
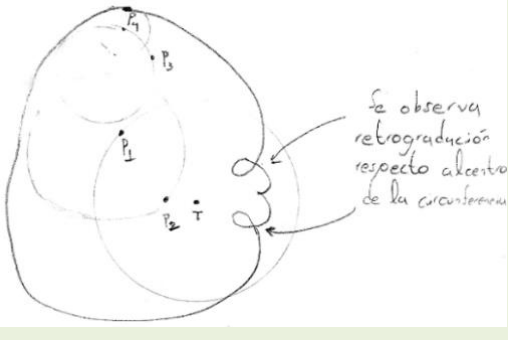
TAREA #1

Objetivo de la Tarea: Caracterizar el comportamiento del sistema de forma cualitativa, lo que permitirá una comprensión más profunda del fenómeno y no solo aquello que detectan los sentidos a simple vista.

Parte I. ¿Qué permite explicar este modelo?

Intención: Comprender por qué el modelo de los alejandrinos permite explicar aquello que el modelo griego no permitía. Se busca propiciar una comprensión profunda del sistema, así como Fourier conocía el comportamiento del fenómeno de propagación del calor a través de la empírea antes de proponer su modelo matemático del fenómeno (Farfán y Romero, 2017).

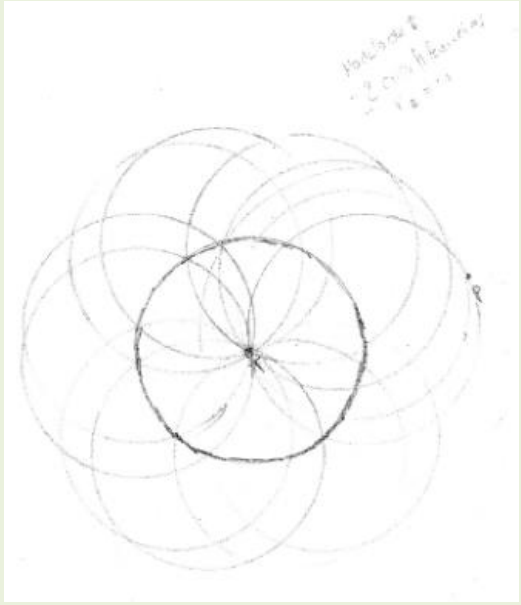
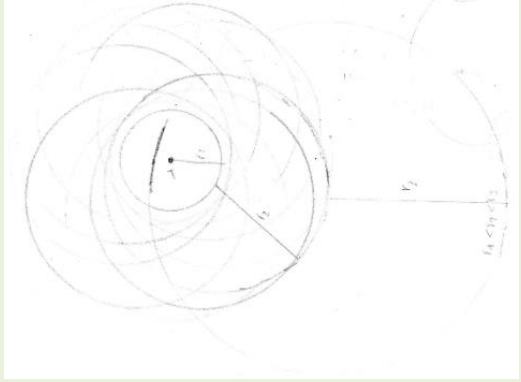
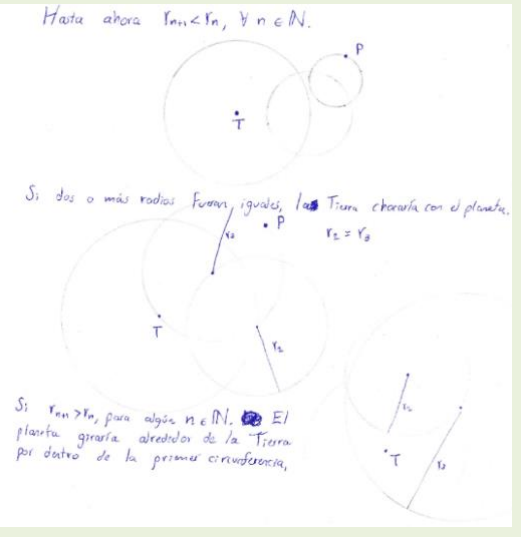
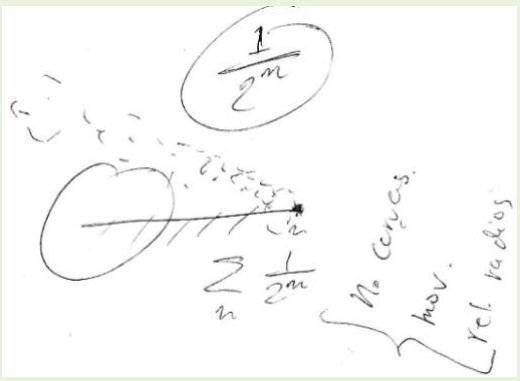
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	<p>La luminosidad es constante en el modelo con una sola circunferencia, ya que depende solamente de la distancia del planeta respecto a la Tierra, la cual es constante para una circunferencia de radio r; se tiene un problema análogo para la explicación de las estaciones del año.</p> <p>El movimiento de P alrededor de una circunferencia no explica el movimiento de retrogradación debido a que la velocidad es constante y se mueve siguiendo la trayectoria circular.</p>	<p>Las estaciones del año se dan por el movimiento de traslación de la Tierra, al dejar en el modelo geocentrico fija la Tierra pues no veían su comportamiento.</p> <p>Para la luminosidad de los planetas depende de cuanta cantidad de luz les llega del Sol pero al contemplar a la Tierra como el centro y al Sol como planeta por aparte al no estudiar al conjunto con el movimiento de traslación de los planetas no podían explicar la trayectoria de la luz.</p> <p>Ahora bien para el fenómeno de retrogradación el suponer el hecho de que se movían en una trayectoria circular es erróneo pues cada planeta tiene un distinto comportamiento.</p>	<p>Porque el brillo de un objeto aumenta conforme se acerca y disminuye conforme se aleja. Y si un planeta (con brillo constante) está a distancia constante con la Tierra, entonces su brillo sería constante.</p> <p>Porque si el Sol es quien da calor a la Tierra. El calor varía de la misma manera que el brillo. Así que con una órbita constante del Sol no podrían producirse los cambios de temperatura necesarios para producir las estaciones.</p> <p>Porque con una órbita de una circunferencia, los planetas siempre se mueven en un sentido. Por lo que no pueden parar y retroceder.</p>	<p>Debido a que se está suponiendo la Tierra al centro de la circunferencia, el hecho de que cambie la luminosidad de un astro no puede explicarse pues en este caso se tendría al astro a la misma distancia siempre respecto al centro, no teniendo sentido entonces que cambie la intensidad de la luz que se recibe de ahí.</p> <p>El fenómeno de retrogradación no podría explicarse pues el astro siempre se encontraría a la misma distancia del centro de la circunferencia si se moviera en un círculo.</p> <p>Las estaciones del año no tienen sentido si dejamos fija la Tierra como el centro de la circunferencia, pues debe haber un cambio en su posición respecto a otro lugar para explicar dicho fenómeno.</p>	<p>Si suponemos al punto P como el Sol, éste siempre se halla a la misma distancia de la Tierra. Las estaciones del año se dan cuando la tierra está a distintas distancias radiales del Sol. Por lo tanto falla la noción de las estaciones en el modelo con una circunferencia. Hablando de la retrogradación, como se cumplen las leyes de la física, el planeta sigue su propia trayectoria por efecto de inercia, lo cual impide que el planeta regrese sobre su propia trayectoria. Análogamente, al estar la tierra a la misma distancia del Sol, no hay acercamientos del mismo, por lo cual no se aprecia un efecto del aumento de la intensidad luminosa del Sol.</p>	<p>[VE3]-1-[00:15:16]</p> <p>M3: ¿Y las estaciones del año?</p> <p>H3: ¿Qué? (incomprensible, 8)</p> <p>M3: (incomprensible, 3)</p> <p>H3: Ah pues, es que imagínate que tienes una regla, ¿no? Entonces si se mueve, o sea si la dejas en el (incomprensible, 1, ¿punto aquí?). Tiene sentido si fuera como un planeta y si tienes un planeta a una distancia alrededor de una manera, pero si lo alejas o lo acercas le daría (x)más o menos intenso, ¿no?</p> <p>M3: A parte se supone que en este tiempo estudiaban como uno, ¿no? Por uno. Y aquí también contempl- no contemplaban la cantidad de los kilómetros o (incomprensible, 2) ¿Ay no? †¿Sí?†</p> <p>H3: Si, creo yo que (incomprensible, 4) esta de aquí (incomprensible, 2) como siempre está a la misma distancia no tendría sentido si cambia.</p>	<p>[VG]-1-[00:41:46]</p> <p>H1: Yo podría ((levantando la mano)) con el primero de luminosidad. ¡Eh! Bueno (x)la luminosidad (x)de un objeto varia con el::: con la distancia, o sea si se acerca más recibimos más luz, si se aleja recibimos menos. Y con la órbita de una circunferencia es una distancia constante, es un círculo de radio constante. Así que, si el planeta no cambia su brillo por no cambiar la distancia, tampoco cambiaría el brillo que percibimos. Así que, debería ser una órbita que si cambie la distancia a la Tierra, que se acerque y se aleje para explicar cambios de brillo=</p> <p>P: Para explicar cambios de brillo ¿quién quiere opinar sobre el cambio de luminosidad?</p> <p>H8: Yo ((levantando la mano)) consideré que, si por esas mismas razones se puede explicar con la luminosidad, pero si consideramos planetas entre el Sol y la Tierra que estorbaran o hicieran una especie de sombra.</p> <p>P: ¡Ajá!</p> <p>H8: Para que la iluminación del Sol no llegara 100% a la Tierra, podría haber cambios en la luminosidad.</p> <p>P: ¡Ajá! ¿Cómo con eclipses?</p> <p>H8: ((Asiente con la cabeza))</p> <p>[VG]-1-[00:44:10]</p> <p>H8: También podría ser como que las órbitas de los planetas se sincronizan cierto tiempo con el sol ((explica el movimiento con sus manos)) y al estar, pos tomando un cierto tiempo, paralelos con la, con la, del sol y podría mantenerse más tiempo el cambio de luminosidad, pero solo considerando un poquito ((se refiere a la duración del evento)).</p> <p>P: ¡Ajá! Yo tengo un comentario, pero me voy a esperar, sobre eso. Porque hoy en día sabemos (x)que es, los planetas lo que hacen es reflejar la luz del Sol, ¿verdad? Si. ¿Y en la época de los alejandrinos se sabía eso?</p> <p>H4: ¡Eh:::! Prácticamente no, por que como no es un modelo heliocéntrico cada planeta tiene su propio brillo, en el modelo alejandrino.</p> <p>P: ¡Ajá! Entonces eso, como que entonces no es el Sol el culpable de que cambien (x)de brillo ¿verdad? Tiene que ser el mismo planeta al que algo le pasa para que cambie de brillo.</p> <p>[VG]-1-[00:45:28]</p> <p>H1: Bueno, me surgió una idea, una idea, de una forma de::: pensar más, sería más antigua, más eh::: mística. Por ejemplo, decir que los planetas tienen almas o voluntades ¿no? Y que de repente puedan decir hoy quiero brillas más o hoy quiero brillar menos. Y::: igual el Sol, que yo me imagino que los alejandrinos si se imaginaban al Sol como una bola de fuego ¿no? Caliente, que era la que da el calor a la tierra y tal vez el Sol podía tener (x)una voluntad de decir eh tal año voy a calentar más, brillar más.</p> <p>P: De hecho los dioses están asociados a los planetas ¿verdad? Los dioses griegos, [los alejandrinos].</p> <p>H1: [Justamente por eso]. Si, (x)y eso todavía podía ser explicado con una circunferencia. O sea, eso del brillo y estaciones, o sea con las voluntades de los planetas, pero el problema yo creo que ya es la retrogradación=</p> <p>H4: =Perdón, yo creo que ahí te sales un poquito del marco contextual, porque::: tú lo único que estás analizando (x)son circunferencias. O sea, igual ponte en el en los zapatos de un astrofi- astrónomo alejandrino, o sea, también están como (x)a este midiendo, están experimentando, igual no todo (incomprensible, 3) de todo esto, entonces están a prueba y error. Por ejemplo, ubícate en un, en un, astrónomo frustrado alejandrino que no puede explicar el modelo (x)de luminosidad o de estaciones como un modelo de una, así que yo discrepo un poco contigo.</p> <p>H1: Si, si, por eso dije al final que la retrogradación es lo que mata al modelo de una circunferencia, porque eso de plano no podría explicarse con ese modelo ¿no? Que el planeta se salga de su órbita y haga lo que quiera, ya tendrían que aplicar un modelo matemático basado en los datos.</p> <p>[VG]-1-[00:48:35]</p> <p>P: Entonces de las estaciones, ya dijeron algo, pero para que quede así como tal vez de este grupo ((señala al equipo 3)) alguien, nos dice por qué no, ya lo mencionaron pero como para que lo dejemos.</p> <p>H1: Bueno, el calor también, bueno varía de la misma forma que el brillo, y si el calor se lo adjudicamos al sol, o sea un</p>

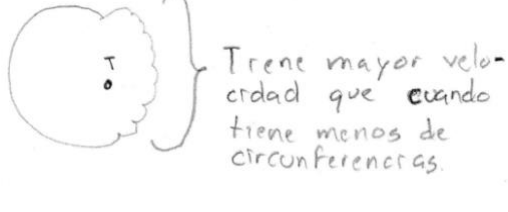
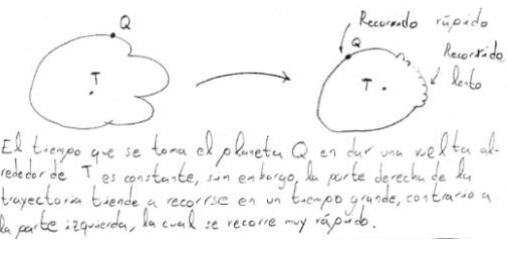

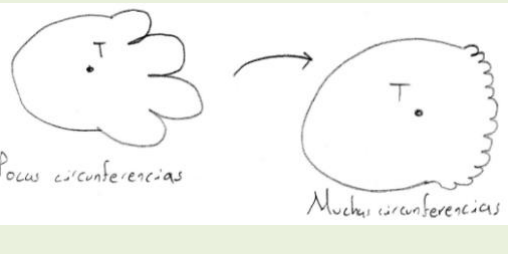
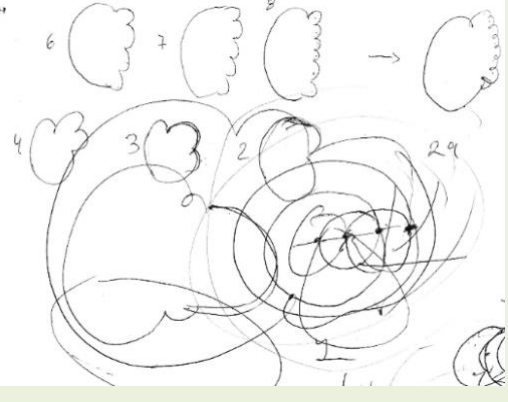
Parte I. ¿Qué permite explicar este modelo?							
Intención: Comprender por qué el modelo de los alejandrinos permite explicar aquello que el modelo griego no permitía. Se busca propiciar una comprensión profunda del sistema, así como Fourier conocía el comportamiento del fenómeno de propagación del calor a través de la empuera antes de proponer su modelo matemático del fenómeno (Farfán y Romero, 2017).							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							<p>cambio de distancia bien podría, o sea si se disminuye la distancia va a recibir más calor la Tierra igual si se aleja va a recibir menos, y eso podría explicar estaciones. Por ejemplo, de la segunda circunferencia ahí podría verse un, en la parte derecha, por ejemplo que sea verano que el sol se acerca más, y luego seguiría arriba podría ser otoño y la parte izquierda el invierno y abajo la primavera. Digo como una idea de cuatro estaciones podrían (x)ser explicadas ahí por la segunda imagen.</p>
Pregunta b	<p>Los modelos 2, 3, y 4 permiten explicar el cambio en la luminosidad de los planetas y las estaciones del año, ya que la distancia entre P y T varía a lo largo de la trayectoria, entonces también la luminosidad.</p> <p>En los tres modelos se puede ver que la distancia entre P y T es mayor al radio de la primera circunferencia en parte de la trayectoria y menor al radio de la primera circunferencia en el resto de la trayectoria.</p> <p>Particularmente, el modelo con dos circunferencias explica de mejor manera el modelo de las estaciones que conocemos.</p>	<p>El modelo 2 explicaría perfectamente las estaciones del año, ya que suponiendo que el planeta es el Sol, en el punto más cerca de la Tierra sería donde mayor calor y luz le da a la Tierra que sería la estación del Verano, conforme se aleja el Sol sería otoño, cuando más lejos está sería invierno y cuando se vuelve a acercarse sería primavera.</p> <p>El modelo 2,3,4 explican la luminosidad de los planetas ya que entre más cerca estén más luminosos se ven y más alejados menos luminosos se notarán.</p>  <p>• Para las estaciones del año</p>	<p>Los modelos 2, 3 y 4 pueden explicar el cambio de luminosidad de los planetas. Ya que en todos ellos varía la distancia a la Tierra (los planetas se acercan y luego se alejan). Por lo tanto también varía el brillo de los planetas.</p> <p>Los modelos 2, 3 y 4 pueden explicar las estaciones. Ya que si el Sol tiene una órbita de esos tipos, varía la distancia a la Tierra (el Sol se acerca y luego se aleja). Por lo que también varía el calor que le da a ella. Y así podrían explicarse las estaciones.</p> <p>Pero nuestras 4 estaciones podrían explicarse muy bien con el segundo modelo. Ya que en la parte derecha el Sol tendría un acercamiento máximo que correspondería al verano. Arriba al otoño. A la izquierda con el alejamiento máximo, el invierno. Y abajo la primavera.</p>	<p>Los modelos de 2, 3 y 4 circunferencias son capaces de explicar el cambio en la luminosidad de los planetas, dado que su trayectoria no describe un círculo perfecto alrededor del centro de la circunferencia, es decir, existen épocas del año en las que los astros se encuentran más alejados o menos alejados del centro de la circunferencia.</p> <p>Las estaciones del año pueden explicarse fácilmente usando el modelo de 2 circunferencias, teniéndose como circunferencia central a la Tierra y como aquella que gira alrededor de ella al Sol. Tendría sentido entonces que la parte más cercana de la trayectoria del Sol respecto a la Tierra produciría el verano y la más lejana el invierno.</p>  <p>El punto es la distancia respecto al centro es la misma de luminosidad</p> <p>Mayor luminosidad</p>	<p>Se puede explicar a partir del modelo de 2 circunferencias pues la distancia del punto P a la tierra deja de ser igual radialmente en todos sus puntos, esto permite que haya un acercamiento y un alejamiento del planeta (puede tratarse del Sol), claro, el modelo de 4 circunferencias explica mejor los fenómenos de luminosidad y de cambio en las estaciones del año.</p>	<p>[VE3]-1-[00:16:49] M3: ¿Cuáles permiten explicar el cambio de luminosidad y las estaciones del año? H3: Pero, imagínate que uno de estos fuera el Sol, (2) [como que [Mmm]] M3: suena muy raro, ¿no? H3: Si es ra= M3: =O sea, imagínate que uno de estos fuera el Sol y es el que hace que nos de calor o frío. Yo creo que a lo mej- por muy antiguo que fuera (incomprensible, 2, ¿la gente?) padecía de frío. M3: ((risas)) H3: Entonces, tienen sentido que si uno de estos fuera el Sol y si fuera a describir una trayectoria rara, entonces se aleja y hace calor y hace frío (incomprensible, 2). M3: Entonces, esto también se puede explicar con cualquiera de estos. H3: Con cualquiera de estos tres. M3: O en específico con este, ¿no? H3: Con este, ¿con este se podrían explicar las estaciones? M3: Pues sí, porque podrías decir de que aquí es como el verano donde más tiene (incomprensible, 5) y entonces conforme se va alejando es como el otoño, ¿no?, (incomprensible, 2), el pinche invierno y te acercas y es primavera, ¿no? H3: ¿Y este no lo podría explicar? Igual= M3: =Tendría dos veranos, ¿no? H3: Tendría dos veranos. M3: ((risas)) Pues sí, ¿no? Porque mira tienes dos puntos a la misma distancia interviniendo. Entonces tendrías dos veranos. ((risas)) H3: Y este tampoco podría, ni este. M3: Dos veranos, [dos ver- ((risas))] H3: [Dos veranos y medio]. M3: Tal vez el de la luminosidad podría ser.</p>	<p>[VG]-1-[00:50:24] P: De los modelos con dos, tres y cuatro circunferencias, entonces ¿cuál permite explicar el cambio de luminosidad de los planetas y las estaciones? Entonces vamos a escuchar de aquí, de este equipo ((señalando al Equipo 2)), alguien que nos comente. M1: ¿De luminosidad? P: ¡Ajá! ¿Cuál modelo te parece? M1: Mmm, yo creo que los tres. P: Los tres pueden explicar. M1: Porque, ya hay variación en la distancia entre, eh bueno la órbita ya no tiene radio constante, entonces ya hay variación entre la distancia del planeta y la Tierra, ya. P: Con eso explicamos cambios de distancia. ¿De acuerdo? ¿Todos de acuerdo? ((Los estudiantes asienten con la cabeza)) Entonces sí, los tres podrían ser luminosidad. ¿De las estaciones? (M3 levanta la mano, pero H1 toma la palabra inmediatamente) H1: Si ponemos ahí en esa órbita el Sol, ya va a haber partes en las que de más calor y otras menos. P: ¿Sí? ¿Todos de acuerdo? H3: No exactamente, yo creo que, para lo que estamos acostumbrados nosotros aquí, el más sencillo sería el de dos circunferencias solamente, porque solamente tiene un punto en la órbita donde está, digamos, más cerca. O sea aquel planeta que rodea a la Tierra que está más cerca a nosotros, entonces tendría sentido que sólo en esa parte de la órbita hubiera más calor aquí en la Tierra y en la parte más alejada también tendría sentido decir que es aquella donde sentimos más frío. Sin embargo, las otras dos ((refiriéndose a los modelos con tres y cuatro circunferencias)) tienen= M3: =Dos puntos cercanos. H3: ¡Ajá! Dos puntos cercanos o dos puntos más o menos alejados, entonces= P: =Como que dos veranos ¿verdad? Tendría dos veranos. H3: Eso es un poco extraño, creo.</p>
Pregunta c	<p>El modelo 4 permite explicar el fenómeno de retrogradación.</p> <p>Dado que el vector velocidad es tangente a la trayectoria, en los modelos 2 y 3, dicho vector se mueve siempre en sentido horario visto desde T.</p> <p>En el modelo 4 se puede ver una retroceso al dar un giro completo y regresar al mismo punto.</p>	<p>El modelo 4 explica el fenómeno de retrogradación ya que es cuando se notaría más la presencia de que la trayectoria del planeta se regresa y vuelve a tomar su trayectoria original.</p>  <p>Punto donde se puede notar que la trayectoria del planeta se regresa</p>	<p>El modelo 4 puede explicar el fenómeno de retrogradación. Ya que tiene una parte (la parte derecha de la imagen) en la que los círculos se desfasan. Provocando que el planeta gire en sentido opuesto (horario) al del círculo con centro en la Tierra.</p> <p>En las animaciones de los modelos 2 y 3 se aprecia que los planetas se frenan, pero no se ve que retrocedan.</p>	<p>El modelo que explica de manera más sencilla la retrogradación es el de 4 circunferencias, pues la curva descrita por el cuarto planeta se corta a sí misma en ciertos puntos de la trayectoria (ver figura).</p> <p>En los modelos de 2 y 3 circunferencias podríamos observar un cambio de velocidad aparente al acercarse los planetas más lejanos a su punto más cercano al centro de la circunferencia principal.</p>  <p>Se observa retrogradación respecto al sentido de la circunferencia</p>	<p>Pienso que el modelo que mejor describe el proceso de retrogradación es el modelo de 4 circunferencias, pues hay partes de la trayectoria en las que la trayectoria pasada se cruza con la trayectoria presente, de hecho, hay dos secciones de este fenómeno.</p>	<p>[VE3]-1-[00:14:09] H3: ¿Cuál de estas (incomprensible, 4, ¿permite explicar?) el fenómeno de retrogradación? M3: >Yo digo que sería el ¿cuatro?< H3: ¡Ajá!, está, así como [(incomprensible, 3)] H6: [Como que regresa y luego sigue con la misma.]</p>	<p>[VG]-1-[00:52:57] P: Y en la pregunta c, ya:: dice ¿cuáles permiten explicar el fenómeno de retrogradación? (3) Entonces ¿cuál o cuáles? M2: [El:: modelo 4] ((varios lo confirman)) H4: [El modelo 4] P: ¿El modelo 4? Bueno de este equipo ((refiriéndose al Equipo 3)), ya tu hablaste ((refiriéndose a H3)), entonces eh, "M2" o::: "H6" ((llama a M2 y H6 por su nombre)). Coméntenos, del modelo todos coincidieron que el 4, entonces ¿en qué parte del trayecto? H6: Bueno en la parte derecha, porque bueno, (incomprensible, 1) de hecho cualquier planeta. Realmente nada más se marca el rastro de uno de los puntos verdes, pero cualquiera de ellos si es observado desde la Tierra de alguna manera ((realiza el movimiento de un bucle con su mano e igual que H4)) se puede apreciar como hay un aparente cambio de dirección o de trayectoria. [VG]-1-[00:55:15] P: ¿Cuál modelo podría? M2: El cuatro. H6: Bueno, aun así considero que cualquier caso, porque en esta parte de aquí ((señalando la parte derecha de la imagen)) en el que hay dos circunferencias, esa parte aun observándola se podría ver aunque sea al menos uno, una regresión. P: ¿Están de acuerdo? H1: No necesariamente, es que del dibujo pienso que seguramente se podría ver que el planeta se frena, o sea que va, de repente va muy lento, se para un instante y luego ya sigue, pero regresión como tal, bueno de la figura a mí no me parece que se, que se vea que se regrese, pero que si se frena, en el segundo y tercer modelo.</p>
Intencionalidad	<p>En los incisos a, b y c, se espera que el estudiante relacione el cambio de luminosidad y las estaciones del año con la distancia que hay entre T y P, por tanto, el modelo de una circunferencia no permite explicar estos fenómenos ya que esta distancia nunca cambia, no así en el modelo con 2, 3 y 4 circunferencias en donde la distancia de P a T cambia durante la trayectoria.</p> <p>Respecto del fenómeno de retrogradación, su explicación estará en los bucles que se generan en el modelo con 4 circunferencias.</p>						
¿Qué hace?	<p>Comparar las distancias entre el planeta y la Tierra.</p> <p>Comparar la dirección del vector velocidad en cada punto de la trayectoria.</p> <p>Observar el movimiento sobre la trayectoria.</p>	<p>Comparar las distancias entre el planeta y la Tierra.</p> <p>Observar el movimiento sobre la trayectoria.</p>	<p>Comparar las distancias entre el planeta y la Tierra.</p> <p>Observar el movimiento sobre la trayectoria.</p>	<p>Comparar las distancias entre el planeta y la Tierra.</p> <p>Observar el movimiento sobre la trayectoria.</p>	<p>Comparar las distancias entre el planeta y la Tierra.</p> <p>Observar el movimiento sobre la trayectoria.</p>	<p>Comparar las distancias entre el planeta y la Tierra.</p> <p>Observar el movimiento sobre la trayectoria.</p>	<p>Comparar las distancias entre el planeta y la Tierra.</p> <p>Comparar el movimiento del Sol y de otro planeta alrededor de la Tierra.</p> <p>Observar el movimiento sobre la trayectoria.</p>

Parte I. ¿Qué permite explicar este modelo?							
Intención: Comprender por qué el modelo de los alejandrinos permite explicar aquello que el modelo griego no permitía. Se busca propiciar una comprensión profunda del sistema, así como Fourier conocía el comportamiento del fenómeno de propagación del calor a través de la empuera antes de proponer su modelo matemático del fenómeno (Farfán y Romero, 2017).							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
¿Cómo hace?	Considerando la distancia del planeta a la Tierra en diferentes puntos de la trayectoria, en los modelos presentados. Considerando al vector velocidad y su movimiento en la trayectoria.	Considerando la distancia del planeta a la Tierra en diferentes porciones de la trayectoria, en los modelos presentados. Considerando la forma de la trayectoria y cómo se vería el movimiento posicionado desde la Tierra.	Considerando la distancia del planeta a la Tierra en diferentes porciones de la trayectoria, en los modelos presentados. Considerando la forma de la trayectoria y cómo se vería el movimiento posicionado desde la Tierra.	Considerando la distancia del planeta a la Tierra en diferentes porciones de la trayectoria, en los modelos presentados. Considerando la forma de la trayectoria y cómo se vería el movimiento posicionado desde la Tierra.	Considerando la distancia del planeta a la Tierra en diferentes porciones de la trayectoria, en los modelos presentados. Considerando la forma de la trayectoria y cómo se vería el movimiento posicionado desde la Tierra.	Considerando la distancia del planeta a la Tierra en diferentes porciones de la trayectoria, en los modelos presentados. Considerando la forma de la trayectoria y cómo se vería el movimiento posicionado desde la Tierra.	Considerando la distancia del planeta a la Tierra en diferentes porciones de la trayectoria, en los modelos presentados. Considera la posibilidad de que la un planeta debido se cruce en medio de la Tierra y el sol lo que podría provocar cambios de luminosidad. Considera la forma de la trayectoria y cómo se vería el movimiento posicionado desde la Tierra.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) El cambio de luminosidad y las estaciones del año dependen de los cambios en la distancia del planeta a la Tierra. (A) Debido al movimiento del vector velocidad sobre la trayectoria se puede explicar el fenómeno de retrogradación.	(A) El cambio de luminosidad y las estaciones del año dependen de los cambios en la distancia del planeta a la Tierra. (A) Debido la forma de la cuarta trayectoria se puede explicar el fenómeno de retrogradación. (C) Con el modelo de movimiento planetario actual, al explicar con base en el movimiento de traslación de los planetas alrededor del Sol.	(A) El cambio de luminosidad y las estaciones del año dependen de los cambios en la distancia del planeta a la Tierra. (A) Debido la forma de la cuarta trayectoria se puede explicar el fenómeno de retrogradación. (C) Con el modelo de movimiento planetario actual, para evaluar si sus argumentos son plausibles.	(A) El cambio de luminosidad y las estaciones del año dependen de los cambios en la distancia del planeta a la Tierra. (A) Debido la forma de la cuarta trayectoria se puede explicar el fenómeno de retrogradación. (C) Con el modelo de movimiento planetario actual, para evaluar si sus argumentos son plausibles.	(A) El cambio de luminosidad y las estaciones del año dependen de los cambios en la distancia del planeta a la Tierra. (A) Debido la forma de la cuarta trayectoria se puede explicar el fenómeno de retrogradación. (C) Con sus nociones físicas de movimiento, inercia en particular.	(A) El cambio de luminosidad y las estaciones del año dependen de los cambios en la distancia del planeta a la Tierra. (A) Debido la forma de la cuarta trayectoria se puede explicar el fenómeno de retrogradación. (C) Con su conocimiento actual sobre las estaciones del año.	(A) El cambio de luminosidad y las estaciones del año dependen de los cambios en la distancia del planeta a la Tierra. (A) El cambio de luminosidad se podría deber a eclipses, planetas que en su trayectoria se colocan en medio del Sol y la Tierra. (A) Debido la forma de la cuarta trayectoria se puede explicar el fenómeno de retrogradación. (C) Con su conocimiento actual sobre el funcionamiento de los eclipses. (C) Con su conocimiento actual sobre las estaciones del año.

Parte II. ¿Y si aumentamos el número de epiciclos?

Intención: Se busca, con apoyo de un applet, vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.

Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	<p>En la figura se puede ver que disminuyen. El número de bucles aumenta, teniendo uno de mayor tamaño y el resto disminuyendo en tamaño.</p> <p>Si consideramos un modelo en el que los radios de las circunferencias agregadas aumenten, se obtendría un modelo similar, pero la mayoría de los bucles aumentarían su tamaño teniendo al final uno pequeño.</p> <p>Además, hay circunferencias donde la Tierra queda encerrada en dicha circunferencia o incluso chocan.</p>  	<p>Solo van disminuyendo los radios.</p>	<p>$r_n > r_{n+1}$ para todo n natural.</p> <p>Datos curiosos: Si dos o más radios fueran iguales, el planeta eventualmente chocaría con la Tierra. Si r_n para algún n, las órbitas girarían alrededor de la Tierra por dentro de la primera circunferencia.</p> 	<p>Solo se vuelven más pequeños.</p>	<p>A apreciación del dibujo, la variación del radio de las circunferencias conforme se añade otra es $\frac{r}{2^n}$ con respecto a la circunferencia original, R.</p> 	<p>[VE3]-1-[01:01:55]</p> <p>H6: Cada circunferencia es la mitad de la anterior, tiene un radio de la mitad de la anterior. (4) Esta circunferencia tiene un radio de la mitad de esta.</p> <p>M3: Sí, creo que sí. Se van haciendo más chicos, o sea de mitad.</p> <p>H6: ¡Ajá!</p> <p>H3: ¿Quieres wachar eso eh, si eso que dices es cierto sería interesante. ((Empieza a medir sobre la pantalla con el transportador))</p> <p>M3: ¿Y por qué con el transportador si tienes una regla? ((risas))</p> <p>H3: Porque está más chiquito el transportador "M3" ((llama a M3 por su nombre)).</p> <p>M3: ¡Ay! No lo he detenido, qué tonta. (16)</p> <p>H3: No m-, sí es cierto.</p> <p>H3: ¿En serio?</p> <p>M3: ¡Sí!</p> <p>[VE3]-1-[01:03:11]</p> <p>H6: Pos no jaló.</p> <p>H3: (Incomprensible, 1, ¿después?) del tercer círculo ya no jaló la idea de que disminuyen a la mitad.</p> <p>M3: ¿Uju?</p> <p>H3: Del tercer círculo ya no jaló eso de que disminuyan a la mitad.</p> <p>M3: Sí::</p> <p>H3: ¿En serio?</p> <p>M3: Mira aquí son como cuatro y medio=</p> <p>H3: =Tu tienes unas elipses=</p> <p>M3: Ah::, mira y aquí son como dos veinticinco, y como uno y cacho. Son casi, sí son casi la mitad.</p> <p>H3: No mira, estos son dos cuatro, dos qué, dos siete, dos ocho, dos punto ocho ¡dos punto ocho! Este sí es de uno punto cuatro, (3) pero este es de (incomprensible, 2) y este es de seis milímetros=</p> <p>M3: =Bueno solo van disminuyendo ¿no? Ya.</p>	<p>[VG]-1-[02:03:47]</p> <p>P: ¿Cómo cambian los radios de una circunferencia a otra conforme se van agregando?</p> <p>H4: Bueno, tal vez no importe tanto la expresión, eh, pero, eh, digamos que decrecían como uno en a la dos n.</p> <p>P: >Ok< (3) Ok, entonces (3) ¡Ajá! No importa tanto la expresión matemática, pero uno como a la dos n, pero ¿cómo sabes que uno a la dos n?</p> <p>H4: Fue una suposición.</p> <p>P: Una suposición, un supuesto.</p> <p>H8: Ver-, bueno, de vista tiene varias (incomprensible, 1, ¿formas?).</p> <p>P: Ok, ¿quién más?</p> <p>H6: Yo llegué a la misma, a la misma conclusión.</p> <p>P: Llegaron a la misma conclusión.</p> <p>H6: ¡Ajá! Pero es que yo:: vi repetidas veces la animación.</p> <p>P: ¿Ajá?</p> <p>H6: Y siguiendo la trayectoria anaranjada, viendo las circunferencias, pues si pareciera que cada radio es la mitad del anterior.</p> <p>P: Ok, ¿pareciera que cada radio es la mitad del anterior?</p> <p>H6: Sí, la expresión es uno entre dos a la n.</p> <p>H3: Ok, pero eso ¿pareciera? ¿Cierto?</p> <p>H6: ¡Ajá! ((asiente con la cabeza))</p> <p>P: Pero, entonces, (x)si tienes que contestar algo así como con certeza ¿qué contestarían?</p> <p>M3: Pues que [se van haciendo más pequeños].</p> <p>H3: [Pos que se hacen más pequeños]</p> <p>H1: Que disminuyen.</p> <p>P: Van disminuyendo ¿verdad? Eso es como con certeza, eso. La expresión quien sabe, porque habría que tener como más informació::n. Bueno los compañeros ((señalando al equipo 2)) tal vez nos puedan compartir lo que estaban haciendo, al respecto, porque ellos si trataron de::: como que medirlo.</p> <p>H2: Bueno, digamos, los pi- la posición los pixeles que había entre cada, o sea la distancia entre:::, el radio, pero en pixeles. Y encontramos que la primera era la mitad, se aproximaba a la mitad del primer radio, y la tercera se aproximaba a la tercera parte del primer radio, pero la cuarta ya no nos coincidió que fuera la cuarta parte; o medimos mal, entonces podría ser uno en- n, o nosotros, bueno yo también había visto, pero nada más fue asumiendo que fuera la mitad cada radio, que también era uno entre dos a la n.</p> <p>P: Ah ok, pero en lo que coincidían todos es que disminuyen ¿verdad? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) En eso si coinciden todos. "H1" ((refiriéndose por su nombre)) me dijo por qué no podían aumentar, entonces no sé si quiera compartirlo con los compañeros su análisis de por qué no se pueden, por qué no pueden aumentar los radios.</p> <p>H1: Bueno primero me, eh, me fijé en el caso en que::: dos radios son iguales, ahí eventualmente se produciría un choque con la Tierra, porque (x)los círculos eh, no sé si se alcanza a ver ((mostrando su hoja de trabajo a los compañeros)).</p> <p>P: Si quieres lo haces en el, en el pintarrón. Ahí hay plumones</p> <p>H1: El círculo de la tierra y por acá voy a poner un círculo del mismo radio. Yo puedo encontrar un punto sobre esta circunferencia, en la que este, le voy a poner r dos ((se refiere al radio de la segunda circunferencia)), un punto sobre esta circunferencia en la que diste r dos de la Tierra, aquí voy a trazar otro círculo y esta que sea la trayectoria del planeta y se ve que eventualmente aquí chocaría con la Tierra, en algún punto ¿no? Podría ser cuando avance más, por acá, pero en algún punto chocaría con la Tierra. Y ahora se me ocurrió que, pues algo parecido, esta es la Tierra, con un r dos menor, que realmente podría ser un r n-ésimo en el caso general, pero que aquí hubiera un círculo mayor que r tres, o sea no pasaría algo trágico pero si serían órbitas interiores. Pero serían, bueno, le darían vuelta a la Tierra por</p>

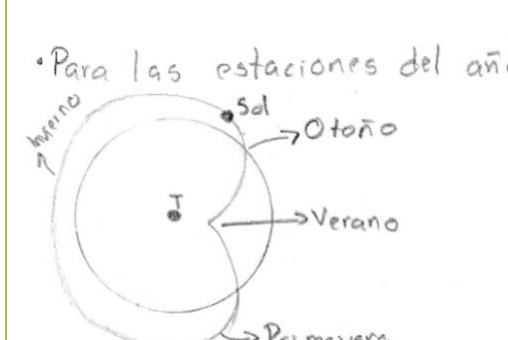
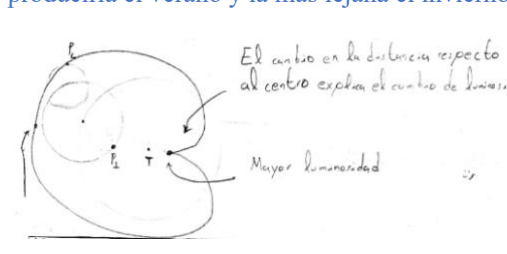
Parte II. ¿Y si aumentamos el número de epiciclos?							
Intención: Se busca, con apoyo de un applet, vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Intencionalidad	Se busca concluir que los radios de las circunferencias tienden a cero en forma cualitativa, para esto los estudiantes podría usar frases como “disminuyen”, “se hacen más pequeños”, entre otras.						
¿Qué hace?	Observar los radios de las circunferencias conforme se van agregando. Comparar los cambios en la trayectoria al agregar circunferencias.	Observar los radios de las circunferencias conforme se van agregando.	Observar los radios de las circunferencias conforme se van agregando.	Observar los radios de las circunferencias conforme se van agregando.	Estimar la medida de los radios. Comparar las medidas de los radios de las circunferencias.	Estimar la medida de los radios. Medir los radios de las circunferencias. Observar las medidas de los radios de las circunferencias.	Observar los radios de las circunferencias. Estimar la medida de los radios. Medir los radios de las circunferencias.
¿Cómo hace?	Considera el número de “curvaturas” que se van formando al agregar circunferencias y sus tamaños. Considera el movimiento al considerar los casos en que los radios aumenten de tamaño o se mantengan iguales.		Considera el movimiento al considerar los casos en que los radios aumenten de tamaño o se mantengan iguales.		Establece la primera circunferencia como su unidad de medida y compara los demás radios con esta para medirlos.	Considera la figura para estimar que la medida de los radios va disminuyendo a la mitad. Utilizan una regla para medir los radios de las circunferencias.	Considera la figura para estimar que la medida de los radios va disminuyendo a la mitad. Utilizan una regla para medir los radios de las circunferencias. Considera el movimiento al considerar los casos en que los radios aumenten de tamaño o se mantengan iguales.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Se aprecia directamente de la figura. (A) El número de bucles aumenta, teniendo uno de mayor tamaño y el resto disminuyendo en tamaño. (A) Si los radios aumentan cambiaría la forma de la trayectoria que se forma.		(A) Se aprecia directamente de la figura. (A) Si los radios se mantienen iguales el planeta, eventualmente, colisionaría a la Tierra. (A) Si los radios aumentan la trayectoria del planeta cruzaría por dentro de la primera circunferencia.		(A) Se aprecia directamente de la figura. (C) Con la costumbre escolar de cuantificar el cambio sin atender lo que cambia y cómo lo hace.	(A) Se aprecia directamente de la figura. (A) Se pueden comparar las medidas de los radios. (C) Con la costumbre escolar de cuantificar el cambio sin atender lo que cambia y cómo lo hace. (C) Con la medición hecha pues no se ajusta a su hipótesis de que los radios disminuyen a la mitad.	(A) Se aprecia directamente de la figura. (A) Se pueden comparar las medidas de los radios. (A) Si los radios se mantienen iguales el planeta, eventualmente, colisionaría a la Tierra. (A) Si los radios aumentan la trayectoria del planeta cruzaría por dentro de la primera circunferencia. (C) Con la costumbre escolar de cuantificar el cambio sin atender lo que cambia y cómo lo hace. (C) Con la medición hecha pues no se ajusta a su hipótesis de que los radios disminuyen a la mitad.
Pregunta b	La rapidez es mayor al aumentar las circunferencias. Además de que la trayectoria parece tomar una forma definida al aumentar el número de circunferencias.	Pues entre mas circunferencias se agreguen mas rápido va el punto Q. 	Conforme se agregan más círculos los planetas tienen que recorrer mayor distancia y hacer más giros. Así que si tienen que mantener un periodo constante de rotación. Tendrían que moverse con más rapidez conforme se agregan círculos.	Se vuelve aparentemente más rápido en ciertos puntos de la órbita mientras el número de circunferencias aumenta. 	Conforme se agrega una circunferencia, la velocidad recorrida por el punto de la órbita, aumenta, esto pues las pendientes en la gráfica de los puntos de mayores circunferencias es mayor a las de menor número de circunferencias. 	[VE3]-1-[01:04:00] H6: Va aumentando la velocidad ¿no? M3: A no sé, no he vi- no he llegado a esa, pérame. (16) Es que ni sé. La siguiente gráfica muestra la distancia recorrida por el punto que se mueve sobre las circunferencias ((leyendo la pregunta)) (Incomprensible, 2) La velocidad está aumentando. M3: Sí, es la, la pendiente es la velocidad. H3: ¿Entonces? M3: Entre más::: cerca esté del Y es más grande su velocidad ¿no? (4) Por que recorre mayor distancia en menos tiempo ¿no? H6: Exactamente. [VE3]-1-[02:25:10]- después de la puesta en común, H3 elimina una parte de su respuesta inicial, esta incluía «...aumenta, sin embargo, el tiempo que tarda un planeta en dar una vuelta completa permanece constante»	[VG]-1-[02:03:47] P: Ok, la siguiente gráfica muestra la distancia recorrida por un punto que se mueve sobre la circunferencia sexta, décima, vigésima y trigésima, entonces, ¿cómo cambia el movimiento de dichos puntos, (7) de una circunferencia a otra? H4: Bueno ((H7 levantó la mano, entonces H4 le cedió la palabra)). H7: Pues entre más aumenten el número de circunferencias, un punto sobre esa circunferencia va a ser, bueno digamos un planeta en esa circunferencia se va a mover a una velocidad mayor que un planeta en una circunferencia menor. Porque de la gráfica se ve que, por ejemplo, la amarilla es la es que es del mayor número de circunferencias, entonces quiere decir de la gráfica que recorre mayor, mayores distancias en menores tiempos y::: por eso sabemos que es mayor la velocidad comparada con la anterior. P: ¿Qué más? ¿(x)Quién está de acuerdo, no está de acuerdo? ¿Otro argumento? Pueden estar de acuerdo, pero tener otro argumento. H2: Lo mismo, pero nosotros nos fijamos en la pendiente. P: ¿Se fijaron en la pendiente? M3: Ajá ((varios estudiantes asienten con la cabeza)).
Intencionalidad	A través del estudio del cambio se pretende que los estudiantes infieran que la velocidad de los puntos sobre cada circunferencia sigue aumentando sin cota, para esto podría utilizar frases como “va más rápido”, “en el mismo tiempo recorre cada vez más distancia”, entre otras. Según la prueba piloto, es posible que para la pregunta b los estudiantes consideren que la gráfica se refiere a la trayectoria del planeta al agregar circunferencias, cuando en realidad se refiere al movimiento de cada punto sobre cada circunferencia.						
¿Qué hace?	Observar el movimiento de los puntos sobre cada circunferencia. Comparar los cambios en la trayectoria al agregar circunferencias.	Estimar la velocidad del punto Q al agregar cada vez más circunferencias.	Observar la forma que va tomando la trayectoria. Estimar la velocidad del punto Q al agregar cada vez más circunferencias.	Estimar la velocidad del punto Q al agregar cada vez más circunferencias. Observar la forma que va tomando la trayectoria.	Comparar la pendiente de una gráfica a otra. Estimar la velocidad del punto Q sobre la órbita recorrida.	Observar la posición de las rectas respecto del eje de las ordenadas.	Observar los cambios de la distancia respecto del tiempo en cada gráfica. Comparar la pendiente de una gráfica a otra.
¿Cómo hace?	Considera el movimiento del punto sobre diferentes circunferencias. Considera la forma de la trayectoria al agregar circunferencias.	Considera el movimiento del punto sobre la trayectoria.	Considera el movimiento del punto sobre la trayectoria. Considera el tiempo que tarda el planeta de completar la trayectoria (periodo).	Considera el movimiento del punto sobre la trayectoria.	Considera el movimiento del punto sobre la trayectoria. Considera las pendientes de las rectas en la gráfica suministrada.	Relaciona la velocidad con la pendiente de la recta.	Considera la distancia recorrida respecto del tiempo en cada gráfica.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) La rapidez es mayor al aumentar las circunferencias.	(A) Considera las trayectorias formadas por diferente número de circunferencias. (C) Estudia el cambio de la rapidez del Planeta, y no de los puntos sobre cada circunferencia.	(A) Al ser el periodo fijo y aumentar el tamaño de la trayectoria, debe aumentar la velocidad del punto Q conforme se agregan más circunferencias. (C) Estudia el cambio de la rapidez del Planeta, y no de los puntos sobre cada circunferencia.	(A) Considera las trayectorias formadas por diferente número de circunferencias. (A) Al ser el periodo fijo y aumentar el tamaño de la trayectoria, debe aumentar la velocidad del punto Q conforme se agregan más circunferencias. (C) Estudia el cambio de la rapidez del Planeta, y no de los puntos sobre cada circunferencia.	(A) A mayor número de circunferencia mayor pendiente. (C) Estudia el cambio de la rapidez del Planeta, y no solo de los puntos sobre cada circunferencia.	(A) Entre más cerca se encuentre la recta del eje de las ordenadas mayor es la velocidad. (A) Se da mayor velocidad al recorrer una mayor distancia en un menor tiempo. (C) Estudia el movimiento del Planeta, y no solo de los puntos sobre cada circunferencia, al considerar el que el tiempo que tarda en completar la órbita el planeta permanece constante.	(A) Se da mayor velocidad al recorrer una mayor distancia en un menor tiempo. (A) La pendiente de la recta da la misma información sobre el cambio de la velocidad.
Pregunta c	La distancia que recorre el planeta aumenta al aumentar el número de circunferencias, así como también aumenta el número de bucles.	Conforme mas circunferencias se agreguen la parte derecha se vuelve mas curvas cerradas y la parte izquierda se vuelve mas amplia y rápida. Además la parte derecha la recorre en un tiempo mas lento que la parte izquierda.	Los planetas van haciendo más bucles y cada vez más pequeños conforme se agregan círculos. Parece que la trayectoria tiende a una elipse con la Tierra en uno de los focos. La distancia máxima es la suma de los radios. Así que esta suma debe converger para que la figura converja.	Se observan deformaciones en la parte más cercana al centro de la trayectoria, las cuales aumentan cada vez más conforme se agregan más circunferencias. Por otra parte, la trayectoria en su punto más alejado describe una perturbación grande, la cual tiende a aumentar su tamaño conforme se agregan más circunferencias. Observe la simetría horizontal de la trayectoria y la aparente convergencia hacia una trayectoria muy bien definida. 	Se va haciendo más uniforme (suavemente continua) en su parte derecha, pues se van agregando cada vez más pequeños arcos que modelará una curva suave cuando el número de circunferencias agregadas sea muy grande. 	[VE3]-1-[01:05:54] H6: Agregamos dos circunferencias. M3: Teníamos tres circunferencias. H6: (Incomprensible, 1) la trayectoria fíjate, la trayectoria se va::: ¿deteriorando? ¿Se va haciendo discreta, no? M3: Oye H6: No si, mira, aquí. Mira, ahorita vas a ver. Esta es un polígono discreto. M3: Pues porque va más rápido en ese punto. [VE3]-1-[01:07:13] H3: No te parece como una especie de elipse fea. M3: ((risas)) Parece un (2) gatito del cielo. H3: ¿Un qué? M3: Un gatito del cielo, una nube pues. H3: Ah::: [VE3]-1-[01:07:43] H3: ¿Cómo cambian las trayectorias mientras se agregan más? M3: Que se vuelve más como chicharrón, wey, la parte derecha. H3: ¡Ajá! M3: Y lo avienta más atrás. H3: Y si le pongo todos ((se refiere a todas las circunferencias que permite el applet)) M3: Ya ves se hace como chicharrón. [VE3]-1-[02:27:31]- después de la puesta en común, H3 le agrega argumentos a su respuesta inicial a la pregunta, la cual no incluía la frase «y	[VG]-1-[02:12:23] P: ¿Cómo cambia la trayectoria del planeta conforme se agregan más y más circunferencias? Ahora si estamos hablando de la trayectoria del planeta, entonces qué analizaron de ese. A ver, quién nos dice qué fue lo que hicieron para analizar ese. H2: Nosotros nos fijamos que el punto más alejado que estaba, la (incomprensible, 1) de T era la suma de todos, de todas las otras circunferencias. Entonces entre más circunferencias tuviera, más alejado iba a estar de T, entonces iba a recorrer una gran distancia en un y regreso, entre mayor fuera el número de radios iba a ser más grande, la trayectoria. P: ¿Siempre, siempre iba a ser más grande la trayectoria? ¿En todo momento? H1: Bueno, ahí también podríamos preguntarnos eh::: la relación entre, entre los radios. Porque si eh::: como si estuviéramos midiendo pixeles, si variara con uno en n no convergería, o sea la suma al infinito ser- haría una distancia máxima infinita. P: ¿Si fuera uno en n? ((H1 asiente con la cabeza)) ¿Los radios? H1: Sí, en el punto más alejado, que es la suma de todos los radios. P: Ah ok, entonces la suma de todos los radios sería la que no convergería, en ese caso=

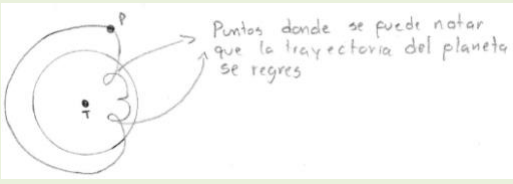
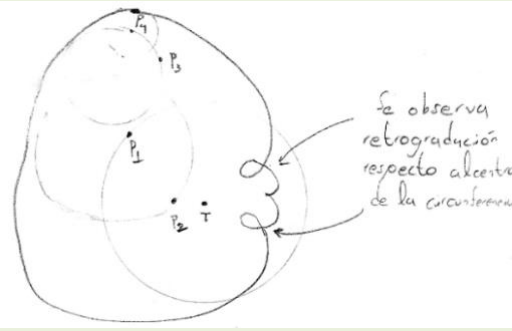
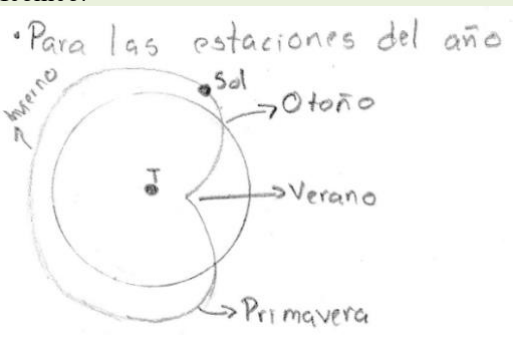
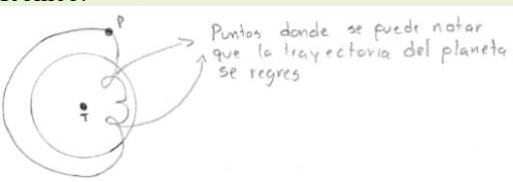
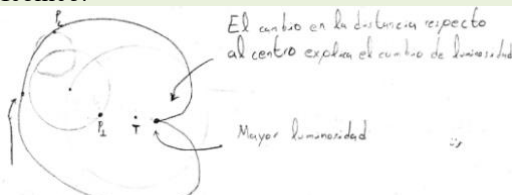
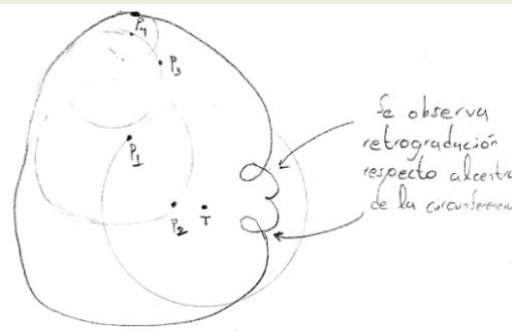
Parte II. ¿Y si aumentamos el número de epiciclos?							
Intención:	Se busca, con apoyo de un applet, vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.						
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
						la aparente convergencia hacia una trayectoria muy bien definida»	H1: =En ese caso= P: =Si fuera uno entre n. H1: Si. (3) Si fueran mitades si:::, si convergerían. P: Uno entre dos a la n. H1: ¡Ajá! Esa sí converge. H8: Aunque conforme más círculos se van agregando tiende a una forma::: ¿elíptica? Pero es que no sé (incomprensible, 2) cómo verlo porque es más grande de un lado y más chico del otro.
Intencionalidad	La intención es que el estudiante identifique el carácter estable del sistema en forma cualitativa, esto a través de frases como “cuando hay muchas circunferencias casi no cambia la forma de la trayectoria conforme se agregan más”, “tiende a parecerse a una...”. Para esto se espera analice el cambio en la forma de la trayectoria conforme se agregan cada vez más circunferencias. Se espera que, expresen que “algo extraño pasaba con la parte izquierda de la trayectoria”, esto es importante, pues no toda la trayectoria es estable.						
¿Qué hace?	Comparar la distancia recorrida por el planeta para las diferentes trayectorias al agregar circunferencias. Observar los cambios en la forma de la trayectoria al agregar circunferencias.	Observar los cambios en la forma de la trayectoria al agregar circunferencias. Comparar el tiempo transcurrido en recorrer distintas partes de una misma trayectoria.	Observar los cambios en la forma de la trayectoria al agregar circunferencias. Comparar las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias.	Observar los cambios en la forma de la trayectoria al agregar circunferencias. Comparar las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias.	Observar los cambios en la forma de la trayectoria al agregar circunferencias. Comparar las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias.	Observar los cambios en la forma de la trayectoria al agregar circunferencias. Comparar las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias.	Observar los cambios en la forma de la trayectoria al agregar circunferencias. Comparar las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias. Estimar los radios de las circunferencias.
¿Cómo hace?	Considera los cambios en la distancia recorrida. Considera los cambios en la forma de la trayectoria para diferentes partes de la misma, no en forma global.	Considera los cambios en la forma de la trayectoria para diferentes partes de la misma, no en forma global.	Considera los cambios en la forma de la trayectoria para diferentes partes de la misma y en forma global.	Considera los cambios en la forma de la trayectoria para diferentes partes de la misma y en forma global.	Considera los cambios en la forma de la trayectoria en forma global.	Considera los cambios en la forma de la trayectoria para diferentes partes de la misma y en forma global.	Considera los cambios en la forma de la trayectoria para diferentes partes de la misma y en forma global.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) La distancia que recorre el planeta aumenta al aumentar el número de circunferencias.	(A) Conforme se agregan más circunferencias las distintas partes de una misma trayectoria se modifican.	(A) Conforme se agregan más circunferencias las distintas partes de una misma trayectoria se modifican. (A) La forma de la trayectoria se va pareciendo a una elipse conforme se agregan más circunferencias.	(A) Conforme se agregan más circunferencias se observan deformaciones en la aparte cercana al centro de la trayectoria. (A) Conforme se agregan más circunferencias se observa una perturbación grande que aumenta de tamaño en el punto más alejado de la trayectoria. (A) La trayectoria toma una forma simétrica muy bien definida conforme se agregan más circunferencias.	(A) La trayectoria toma más uniforme (suavemente continua) conforme se agregan más circunferencias.	(A) La trayectoria toma una forma definida conforme se agregan más circunferencias. (A) Conforme se agregan más circunferencias una parte de la trayectoria cambia con cierta regularidad.	(A) La distancia que recorre el planeta aumenta al aumentar el número de circunferencias. (A) La trayectoria toma una forma definida conforme se agregan más circunferencias. (A) Conforme se agregan más circunferencias en el punto más alejado de la trayectoria podría converger o no.
Pregunta d	Sí, dado que el modelo se plantea para un ciclo determinado para cada planeta, al aumentar el número de circunferencias en el modelo, la distancia en la trayectoria es mayor, y por lo tanto, la rapidez con que se mueve tiene que aumentar para completar la trayectoria durante el ciclo. Al aumentar el número de circunferencias, el punto se mueve mucho más rápido, y la aportación que realiza a la trayectoria puede ser despreciable, por lo que, se puede apreciar una forma casi definida.	Sí, entre mas circunferencias vamos agregando la forma de la trayectoria no se ve casi afectada ya que el radio vas disminuyendo tanto de tal forma que despues se vera que el movimiento del punto Q es insignificante.	Sí hay relación. Ya que de b) se tiene que mientras más círculos más bucles tienen que dar los planetas. Y de a) se tiene que cada círculo añadido tiene un radio menor que el anterior, por lo que su bucle será de menor longitud que el del círculo anterior.	Sí, el aumento en la velocidad aparente se explica por el hecho de que la trayectoria total del planeta ocurre en el mismo tiempo, sin depender del número de circunferencias, teniendo que recorrer una mayor distancia en un mismo tiempo (relación entre a) y b)). La observación de una mayor deformación en la trayectoria se relaciona con la cantidad de círculos porque al aumentar las circunferencias aumenta el número de deformaciones, volviéndose éstas más pequeñas y recurrentes en la trayectoria. Observemos que la forma de la trayectoria tiende a algo que nos recuerda a una elipse, conforme se agreguen más circunferencias esta forma se definirá cada vez más, siendo que los puntos tienden a girar sobre el radio más rápido y su radio tiende a ser cada vez más pequeño, concluyendo que su contribución a la distancia respecto al centro será cada vez más mínima.	Conforme se va agregando otra circunferencia, la contribución al giro se desplaza en torno al centro de masa del planeta, con lo que no se sale de la forma bien definida que se respondió en el inciso c)	[VE3]-1- 01:26:40 H3: Al final ¿qué contestaron? M3: Ah:: H6: ¿En cuál? M3: En la d. H6: Yo puse que sí, por la conservación del momento angular. M3: Sí, yo también, yo puse así ((risas)). H6: ¿La conservación del momento angular? Ok:: M3: ¿Tú qué le pusiste? †Ah caramba† si lo explicaste bien. H6: A mí me pareció trampa, pero. H3: ¡Ajá! (4) No sé (7) M3: (Incomprensible, 2) (5) H3: Es que no entiendo muy bien qué está pasando. O sea, le agregas un círculo ((realiza un sonido repetitivo al añadir circunferencias al applet)) M3: Lo vas a bobiar como hace rato ((risas)). H3: Sí, pero le agregas un círculo, pero al final de cuentas tarda el mismo tiempo en dar una trayectoria= =Sí= M3: =Siempre ¿no? H3: No sé, es que. (13) Pero por las grafiquitas de aquí no parece que tardan el mismo tiempo, ¡mira! H3: Pero se refiere a distancia. M3: Con respecto al tiempo= H3: =Respecto al tiempo. (3) M3: Mmm:: H3: Tienes (x)un tiempo aquí, bueno entonces tiene sentido que hagan- que no hayan recorrido la misma distancia. Pero, en general, yo siento que::: aunque agregues más círculos tardan la misma cantidad de tiempo en dar la vuelta. Mira, lo que sí es que el punto parece moverse más rápido. M3: Ok:: [VE3]-1- 02:23:32 - después de la puesta en común, M3 cambia su respuesta inicial a la pregunta. Su respuesta inicial había sido «Sí, podría tener relación con la conservación del momento angular ya que esto depende del radio y la velocidad angular del objeto, y aquí se presentan los mismos parámetros solamente se agrega la manera de la trayectoria del objeto.» [VE3]-1- 02:25:10 - después de la puesta en común, H3 le agrega argumentos a su respuesta inicial a la pregunta, la cual no incluía el último párrafo.	[VG]-1- 02:19:09 P: Bueno, entonces esa es la pregunta interesante, eso que acabamos de responder acá de que va tomando como una forma definida, en este caso como un huevo, digamos ¿Cómo se relaciona con esas otras dos? Con que los radios se hacen cada vez más pequeños y con que la velocidad de los puntos es cada vez mayor. A ver. H8: Puede ser como un fractal de los arcos que se van haciendo dependiendo de los radios que se tengan, y esa es la relación que puede existir- bueno para ya establecerlo matemáticamente, va a ser como la ecuación de un fractal. P: ¿Parece como la ecuación de un fractal? H4: Eh, bueno yo entien-, bueno yo pensé que si los radios fueran iguales en todo momento, que no pudieran (incomprensible, 1) entonces ni siquiera tendríamos esa::: esa forma que nos plantea el modelado, tendríamos una forma más educada ¿no? Algo más concéntrico, pero siempre (incomprensible, 1). Entonces también tendríamos que la velocidad del punto más, más alejado con radios más o menos iguales, en caso de que no choquen, iría más lento. (x)el punto más alejado. Bueno, es lo que, lo que yo pude observar. P: Ok::: Eso fue lo que pudo observar ¿qué más? H6: Por la conservación del momento angular. P: ¿Ajá, qué? H6: Digamos en los puntos en esta parte ((se refiere a la parte izquierda de la trayectoria)) se dan radios mayores y estos más cercanos cercana los radios son menores y ya vimos que en las circunferencias pues la velocidad al parecer es mayor, entonces, hay una, buena la pregunta plantea si hay alguna relación, entonces yo creo que la relación es esa, bueno a parte de otras, pero sería visualmente la conservación del momento angular. [VG]-1- 02:21:39 P: Pero no me queda claro todavía cómo afecta eso el momento angular. H6: Porque se tiene que conservar, entonces, bueno, bueno es que no sé cómo plantearlo mejor, no sé cómo puedo explicarlo. Pero, pues sí, a la pregunta, de que si hay una relación yo creo que es el momento angú-, bueno la conservación del momento angular. H1: Es que sería con fuerzas, es decir si es una fuerza central sí, si se conserva, pero esto son solo trayectorias. P: ¿Ustedes qué contestaron, o qué::: (refiriéndose al Equipo 2) H2: Pues bueno yo iba a argumentar que entre mayor número de órbitas la trayectoria total recorrida iba a ser mayor y, pues yo lo relacioné con eso, pero no (incomprensible, 2) P: Ahorita estás repensando el= M2: =Bueno considerando que::: ese movimiento es para un solo planeta (incomprensible, 2) la observación decía que pues todo ese planeta tenía un cierto ciclo, un cierto tiempo, y así como lo dice “H2” ((se refiere a H2 por su nombre)) si aumentas el número de circunferencias parece que la distancia es mayor entonces si dejas ese, ese tiempo fijo por eso también se determina que tiene que ir más rápido, la velocidad tiene que aumentar. [VG]-1- 02:23:14 P: Ahorita que dijeron, no es que como que va tomando ya una forma definida, se esperaría que esa forma definida sea

Parte II. ¿Y si aumentamos el número de epiciclos?							
Intención: Se busca, con apoyo de un applet, vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							<p>la del planeta ¿cierto? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) ¿Por qué no cambia esa forma después? ¿O sea si yo sigo agregando circunferencias ustedes creen que esa forma cambie mucho?</p> <p>H4: (x)Va a converger, como a lo que va a ser ¿no? Si le sigue agregando pues cada vez se va haciendo más chiquito cada radio (x)que le va agregando entonces cada vez va contribuyendo menos al giro, y cada vez gira más entorno a su propio centro de masa, entonces ya no va a girar como que va a ser como diferencia sino en sí mismo, entonces pues ya no cambia tanto la forma definida.</p>
Intencionalidad	Se busca confrontar el cómo cambia la trayectoria del planeta (estabilidad) con lo que provoca el cambio. Sin embargo, determinar cómo cambia y qué produce el cambio es una tarea cognitivamente muy compleja para los fenómenos de determinación del estado estacionario (Farfán, 2012; Romero, 2016). Se espera que, con ayuda del docente y a partir de las ideas planteadas por los estudiantes, se acerquen a la idea de que al tender los radios de las circunferencias a cero y la velocidad de movimiento del punto al infinito esto provoca que se logre la estabilidad; es decir, agregar una circunferencia muy pequeña y un punto sobre esta que se mueve muy rápido no provoca cambios significativos en el sistema en general.						
¿Qué hace?	Comparar lo que se mantiene invariante —el periodo—, con lo que no —tamaño de la trayectoria, radios, velocidad de los puntos—. Comparar el aporte que proporciona a la trayectoria el punto al agregar cada vez más circunferencias.	Comparar el aporte que proporciona a la trayectoria el punto al agregar cada vez más circunferencias.	Comparar los efectos sobre la forma de la trayectoria al aumentar el número de circunferencias.	Comparar lo que se mantiene invariante —el periodo—, con lo que no —tamaño de la trayectoria, radios, velocidad de los puntos—. Comparar los efectos sobre la forma de la trayectoria al aumentar el número de circunferencias. Comparar el aporte que proporciona a la trayectoria el punto al agregar cada vez más circunferencias.	Comparar el aporte que proporciona a la trayectoria el punto al agregar cada vez más circunferencias.	Identificar los parámetros en una noción física conocida. Comparar lo que se mantiene invariante —el periodo—, con lo que no —tamaño de la trayectoria, radios, velocidad de los puntos—.	Identificar la similitud con una noción geométrica conocida. Identificar los parámetros en una noción física conocida. Comparar lo que se mantiene invariante —el periodo—, con lo que no —tamaño de la trayectoria, radios, velocidad de los puntos—. Comparar el aporte que proporciona a la trayectoria el punto al agregar cada vez más circunferencias.
¿Cómo hace?	Prestando tención los cambios en el tamaño de la trayectoria, los radios y la velocidad de los puntos respecto del tiempo que tarda el planeta en completar la trayectoria. Prestando atención al aporte del punto al agregar cada vez más circunferencias.	Prestando atención al aporte del punto al agregar cada vez más circunferencias.	Relacionando la cantidad de bucles con el tamaño de los radios, sin indicar cómo es esa relación.	Presta tención los cambios en el tamaño de la trayectoria, los radios y la velocidad de los puntos respecto del tiempo que tarda el planeta en completar la trayectoria. Relaciona la cantidad de bucles con el tamaño de los radios, sin indicar cómo es esa relación. Presta atención al aporte del punto al agregar cada vez más circunferencias.	Prestando atención al aporte del punto al agregar cada vez más circunferencias.	Relacionando con la conservación del momento angular. Prestando atención los cambios en el tamaño de la trayectoria y la velocidad de los puntos respecto del tiempo que tarda el planeta en completar la trayectoria.	Relacionando con la noción de fractal, sin explicar cómo es esa relación. Relaciona con la conservación del momento angular. Prestando atención los cambios en el tamaño de la trayectoria y la velocidad de los puntos respecto del tiempo que tarda el planeta en completar la trayectoria. Prestando atención al aporte del punto al agregar cada vez más circunferencias.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Al aumentar el número de circunferencias en el modelo, la distancia en la trayectoria es mayor, y por lo tanto, la rapidez con que se mueve tiene que aumentar para completar la trayectoria durante el ciclo. (A) Al aumentar el número de circunferencias el aporte del punto a la trayectoria es despreciable, por lo que toma una forma casi definida.	(A) Al aumentar el número de circunferencias el aporte del punto a la trayectoria es insignificante.	(A) Mientras más círculos más bucles tienen que dar los planetas y cada círculo añadido tiene un radio menor que el anterior, por lo que su bucle será de menor longitud que el del círculo anterior.	(A) Al aumentar el número de circunferencias, la distancia en la trayectoria es mayor, y por lo tanto, la rapidez con que se mueve tiene que aumentar para completar la trayectoria durante el ciclo. (A) Mientras más círculos más bucles se dan en la trayectoria, volviéndose cada vez más pequeñas y recurrentes. (A) Al aumentar el número de circunferencias el aporte del punto a la trayectoria es despreciable, por lo que toma una forma casi definida.	(A) Al aumentar el número de circunferencias el aporte del punto a la trayectoria es insignificante.	(A) La conservación del momento angular depende del radio y la velocidad angular del objeto, y en la situación se presentan los mismos parámetros y solamente se agrega la manera de la trayectoria del objeto. (A) Al aumentar el número de circunferencias, la distancia en la trayectoria es mayor, y por lo tanto, la rapidez con que se mueve tiene que aumentar para completar la trayectoria durante el ciclo.	(A) Puede ser como un fractal de los arcos que se van haciendo dependiendo de los radios que se tengan, para establecerlo matemáticamente, va a ser como la ecuación de un fractal. (A) La conservación del momento angular depende del radio y la velocidad angular del objeto, y en la situación se presentan los mismos parámetros y solamente se agrega la manera de la trayectoria del objeto. (A) Al aumentar el número de circunferencias, la distancia en la trayectoria es mayor, y por lo tanto, la rapidez con que se mueve tiene que aumentar para completar la trayectoria durante el ciclo. (A) Al aumentar el número de circunferencias el aporte del punto a la trayectoria es insignificante.

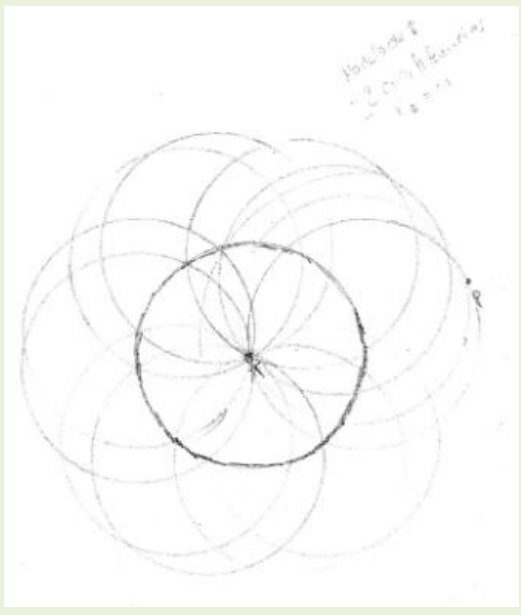
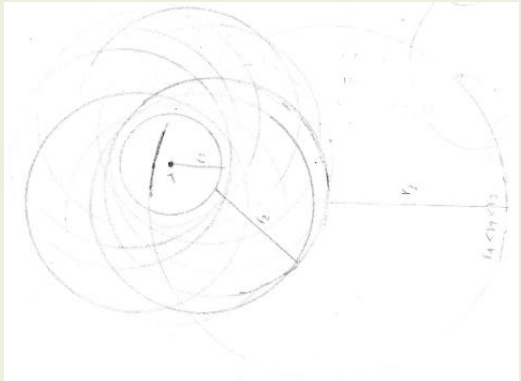
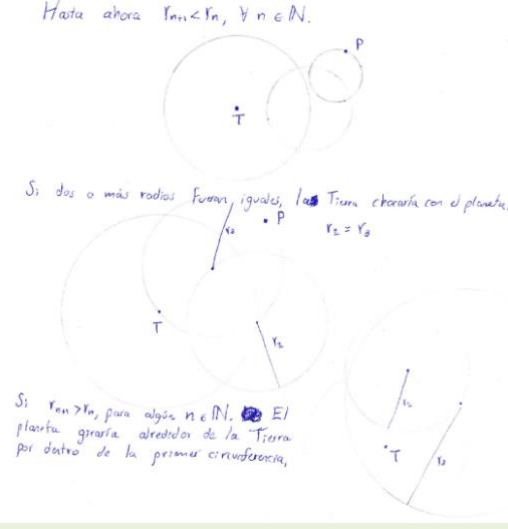
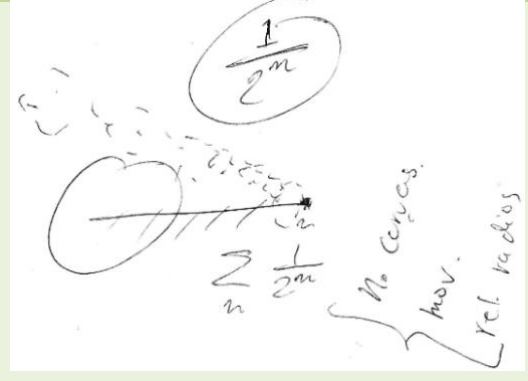
Tarea #1. Etapa 2: Identificación de los invariantes de las acciones

TAREA #1							
Objetivo de la Tarea: Caracterizar el comportamiento del sistema de forma cualitativa, lo que permitirá una comprensión más profunda del fenómeno y no solo aquello que detectan los sentidos a simple vista.							
Parte I. ¿Qué permite explicar este modelo?							
Intención: Comprender por qué el modelo de los alejandrinos permite explicar aquello que el modelo griego no permitía. Se busca propiciar una comprensión profunda del sistema, así como Fourier conocía el comportamiento del fenómeno de propagación del calor a través de la empiea antes de proponer su modelo matemático del fenómeno (Farfán y Romero, 2017).							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	La luminosidad es constante en el modelo con una sola circunferencia, ya que depende solamente de la distancia del planeta respecto a la Tierra, la cual es constante para una circunferencia de radio r ; se tiene un problema análogo para la explicación de las estaciones del año. El movimiento de P alrededor de una circunferencia no explica el movimiento de retrogradación debido a que la velocidad es constante y se mueve siguiendo la trayectoria circular .	Las estaciones del año se dan por el movimiento de traslación de la Tierra, al dejar en el modelo geocéntrico fija la Tierra pues no veían su comportamiento. Para la luminosidad de los planetas depende de cuanta cantidad de luz les llega del Sol pero al contemplar a la Tierra como el centro y al Sol como planeta por aparte al no estudiar al conjunto con el movimiento de traslación de los planetas no podían explicar la trayectoria de la luz. Ahora bien para el fenómeno de retrogradación el suponer el hecho de que se movían en una trayectoria circular es erróneo pues cada planeta tiene un distinto comportamiento.	Porque el brillo de un objeto aumenta conforme se acerca y disminuye conforme se aleja. Y si un planeta (con brillo constante) está a distancia constante con la Tierra, entonces su brillo sería constante. Porque si el Sol es quien da calor a la Tierra. El calor varía de la misma manera que el brillo. Así que con una órbita constante del Sol no podrían producirse los cambios de temperatura necesarios para producir las estaciones. Porque con una órbita de una circunferencia, los planetas siempre se mueven en un sentido. Por lo que no pueden parar y retroceder.	Debido a que se está suponiendo la Tierra al centro de la circunferencia, el hecho de que cambie la luminosidad de un astro no puede explicarse pues en este caso se tendría al astro a la misma distancia siempre respecto al centro, no teniendo sentido entonces que cambie la intensidad de la luz que se recibe de ahí. El fenómeno de retrogradación no podría explicarse pues el astro siempre se encontraría a la misma distancia del centro de la circunferencia si se moviera en un círculo. Las estaciones del año no tienen sentido si dejamos fija la Tierra como el centro de la circunferencia, pues debe haber un cambio en su posición respecto a otro lugar para explicar dicho fenómeno.	Si suponemos al punto P como el Sol, éste siempre se halla a la misma distancia de la Tierra. Las estaciones del año se dan cuando la tierra está a distintas distancias radiales del Sol. Por lo tanto falla la noción de las estaciones en el modelo con una circunferencia. Hablando de la retrogradación, como se cumplen las leyes de la física, el planeta sigue su propia trayectoria por efecto de inercia , lo cual impide que el planeta regrese sobre su propia trayectoria. Análogamente, al estar la tierra a la misma distancia del Sol, no hay acercamientos del mismo, por lo cual no se aprecia un efecto del aumento de la intensidad luminosa del Sol.	[VE3]-1-[00:15:16] M3: ¿Y las estaciones del año? H3: ¿Qué? (incomprensible, 8) M3: (incomprensible, 3) H3: Ah pues, es que imagínate que tienes una regla, ¿no? Entonces si se mueve, o sea si la dejas en el (incomprensible, 1, ¿punto aquí?). Tiene sentido si fuera como un planeta y si tienes un planeta a una distancia alrededor de una manera, pero si lo alejas o lo acercas le daría (x)más o menos intenso, ¿no? M3: A parte se supone que en este tiempo estudiaban como uno, ¿no? Por uno. Y aquí también contempl- no contemplaban la cantidad de los kilómetros o (incomprensible, 2) ¿Ay no? †¿Sí?† H3: Sí, creo yo que (incomprensible, 4) esta de aquí (incomprensible, 2) como siempre está a la misma distancia no tendría sentido si cambia.	[VG]-1-[00:41:46] H1: Yo podría ((levantando la mano)) con el primero de luminosidad. ¡Eh! Bueno (x)la luminosidad (x)de un objeto varía con el:: con la distancia, o sea si se acerca más recibimos más luz, si se aleja recibimos menos. Y con la órbita de una circunferencia es una distancia constante, es un círculo de radio constante. Así que, si el planeta no cambia su brillo por no cambiar la distancia, tampoco cambiaría el brillo que percibimos. Así que, debería ser una órbita que si cambie la distancia a la Tierra, que se acerque y se aleje para explicar cambios de brillo= P: Para explicar cambios de brillo ¿quién quiere opinar sobre el cambio de luminosidad? H8: Yo ((levantando la mano)) consideré que, si por esas mismas razones se puede explicar con la luminosidad, pero si consideramos planetas entre el Sol y la Tierra que estorbaran o hicieran una especie de sombra. P: ¡Ajá! H8: Para que la iluminación del Sol no llegara 100% a la Tierra, podría haber cambios en la luminosidad. P: ¡Ajá! ¿Cómo con eclipses? H8: ((Asiente con la cabeza)) [VG]-1-[00:44:10] H8: También podría ser como que las órbitas de los planetas se sincronizan cierto tiempo con el sol ((explica el movimiento con sus manos)) y al estar, pos tomando un cierto tiempo, paralelos con la, con la, del sol y podría mantenerse más tiempo el cambio de luminosidad, pero solo considerando un poquito ((se refiere a la duración del evento)). P: ¡Ajá! Yo tengo un comentario, pero me voy a esperar, sobre eso. Porque hoy en día sabemos (x)que es, los planetas lo que hacen es reflejar la luz del Sol, ¿verdad? Sí. ¿Y en la época de los alejandrinos se sabía eso? H4: ¡Eh:::! Prácticamente no, por que como no es un modelo heliocéntrico cada planeta tiene su propio brillo, en el modelo alejandrino.

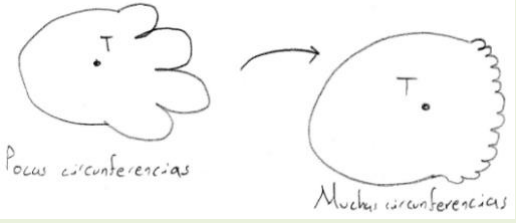
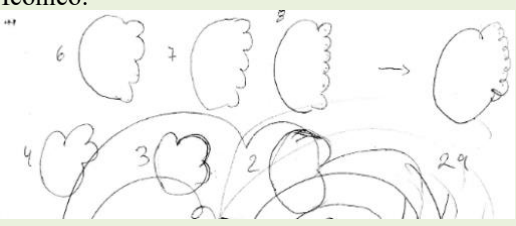
Parte I. ¿Qué permite explicar este modelo?							
Intención: Comprender por qué el modelo de los alejandrinos permite explicar aquello que el modelo griego no permitía. Se busca propiciar una comprensión profunda del sistema, así como Fourier conocía el comportamiento del fenómeno de propagación del calor a través de la empuera antes de proponer su modelo matemático del fenómeno (Farfán y Romero, 2017).							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							<p>P: ¡Ajá! Entonces eso, como que entonces no es el Sol el culpable de que cambien (x)de brillo ¿verdad? Tiene que ser el mismo planeta al que algo le pasa para que cambie de brillo.</p> <p>[VG]-1-[00:45:28]</p> <p>H1: Bueno, me surgió una idea, una idea, de una forma de:: pensar más, sería más antigua, más eh:: mística. Por ejemplo, decir que los planetas tienen almas o voluntades ¿no? Y que de repente puedan decir hoy quiero brillas más o hoy quiero brillar menos. Y:: igual el Sol, que yo me imagino que los alejandrinos si se imaginaban al Sol como una bola de fuego ¿no? Caliente, que era la que da el calor a la tierra y tal vez el Sol podía tener (x)una voluntad de decir eh tal año voy a calentar más, brillar más.</p> <p>P: De hecho los dioses están asociados a los planetas ¿verdad? Los dioses griegos, [los alejandrinos].</p> <p>H1: [Justamente por eso]. Si, (x)y eso todavía podía ser explicado con una circunferencia. O sea, eso del brillo y estaciones, o sea con las voluntades de los planetas, pero el problema yo creo que ya es la retrogradación=</p> <p>H4: =Perdón, yo creo que ahí te sales un poquito del marco contextual, porque:: tú lo único que estás analizando (x)son circunferencias. O sea, igual ponte en el en los zapatos de un astrofi- astrónomo alejandrino, o sea, también están como (x)a este midiendo, están experimentando, igual no todo (incomprensible, 3) de todo esto, entonces están a prueba y error. Por ejemplo, ubicate en un, en un, astrónomo frustrado alejandrino que no puede explicar el modelo (x)de luminosidad o de estaciones como un modelo de una, así que yo discrepo un poco contigo.</p> <p>H1: Sí, sí, por eso dije al final que la retrogradación es lo que mata al modelo de una circunferencia, porque eso de plano no podría explicarse con ese modelo ¿no? Que el planeta se salga de su órbita y haga lo que quiera, ya tendrían que aplicar un modelo matemático basado en los datos.</p> <p>[VG]-1-[00:48:35]</p> <p>P: Entonces de las estaciones, ya dijeron algo, pero para que quede así como tal vez de este grupo ((señala al equipo 3)) alguien, nos dice por qué no, ya lo mencionaron pero como para que lo dejemos.</p> <p>H1: Bueno, el calor también, bueno varía de la misma forma que el brillo, y si el calor se lo adjudicamos al sol, o sea un cambio de distancia bien podría, o sea si se disminuye la distancia va a recibir más calor la Tierra igual si se aleja va a recibir menos, y eso podría explicar estaciones. Por ejemplo, de la segunda circunferencia ahí podría verse un, en la parte derecha, por ejemplo que sea verano que el sol se acerca más, y luego seguiría arriba podría ser otoño y la parte izquierda el invierno y abajo la primavera. Digo como una idea de cuatro estaciones podrían (x)ser explicadas ahí por la segunda imagen.</p>
Pregunta b	<p>Los modelos 2, 3, y 4 permiten explicar el cambio en la luminosidad de los planetas y las estaciones del año, ya que la distancia entre P y T varía a lo largo de la trayectoria, entonces también la luminosidad.</p> <p>En los tres modelos se puede ver que la distancia entre P y T es mayor al radio de la primera circunferencia en parte de la trayectoria y menor al radio de la primera circunferencia en el resto de la trayectoria.</p> <p>Particularmente, el modelo con dos circunferencias explica de mejor manera el modelo de las estaciones que conocemos.</p>	<p>El modelo 2 explicaría perfectamente las estaciones del año, ya que suponiendo que el planeta es el Sol, en el punto más cerca de la Tierra sería donde mayor calor y luz le da a la Tierra que sería la estación del Verano, conforme se aleja el Sol sería otoño, cuando más lejos está sería invierno y cuando se vuelve a acercarse sería primavera.</p> <p>El modelo 2,3,4 explican la luminosidad de los planetas ya que entre más cerca estén más luminosos se ven y más alejados menos luminosos se notarán.</p> <p>Para las estaciones del año</p> 	<p>Los modelos 2, 3 y 4 pueden explicar el cambio de luminosidad de los planetas. Ya que en todos ellos varía la distancia a la Tierra (los planetas se acercan y luego se alejan). Por lo tanto también varía el brillo de los planetas.</p> <p>Los modelos 2, 3 y 4 pueden explicar las estaciones. Ya que si el Sol tiene una órbita de esos tipos, varía la distancia a la Tierra (el Sol se acerca y luego se aleja). Por lo que también varía el calor que le da a ella. Y así podrían explicarse las estaciones.</p> <p>Pero nuestras 4 estaciones podrían explicarse muy bien con el segundo modelo. Ya que en la parte derecha el Sol tendría un acercamiento máximo que correspondería al verano. Arriba al otoño. A la izquierda con el alejamiento máximo, el invierno. Y abajo la primavera.</p>	<p>Los modelos de 2, 3 y 4 circunferencias son capaces de explicar el cambio en la luminosidad de los planetas, dado que su trayectoria no describe un círculo perfecto alrededor del centro de la circunferencia, es decir, existen épocas del año en las que los astros se encuentran más alejados o menos alejados del centro de la circunferencia.</p> <p>Las estaciones del año pueden explicarse fácilmente usando el modelo de 2 circunferencias, teniéndose como circunferencia central a la Tierra y como aquella que gira alrededor de ella al Sol. Tendría sentido entonces que la parte más cercana de la trayectoria del Sol respecto a la Tierra produciría el verano y la más lejana el invierno.</p> 	<p>Se puede explicar a partir del modelo de 2 circunferencias pues la distancia del punto P a la tierra deja de ser igual radialmente en todos sus puntos, esto permite que haya un acercamiento y un alejamiento del planeta (puede tratarse del Sol), claro, el modelo de 4 circunferencias explica mejor los fenómenos de luminosidad y de cambio en las estaciones del año.</p>	<p>[VE3]-1-[00:16:49]</p> <p>M3: ¿Cuáles permiten explicar el cambio de luminosidad y las estaciones del año?</p> <p>H3: Pero, imagínate que uno de estos fuera el Sol, (2) [como que [Mmm]]</p> <p>M3: suena muy raro, ¿no?</p> <p>M3: Si es ra=</p> <p>H3: =O sea, imagínate que uno de estos fuera el Sol y es el que hace que nos de calor o frío. Yo creo que a lo mej- por muy antiguo que fuera (incomprensible, 2, ¿la gente?) padecía de frío. ((risas))</p> <p>M3: Entonces, tienen sentido que si uno de estos fuera el Sol y si fuera a describir una trayectoria rara, entonces se aleja y hace calor y hace frío (incomprensible, 2).</p> <p>M3: Entonces, esto también se puede explicar con cualquiera de estos.</p> <p>H3: Con cualquiera de estos tres.</p> <p>M3: O en específico con este, ¿no?</p> <p>H3: Con este, ¿con este se podrían explicar las estaciones?</p> <p>M3: Pues sí, porque podrías decir de que aquí es como el verano donde más tiene (incomprensible, 5) y entonces conforme se va alejando es como el otoño, ¿no?, (incomprensible, 2), el pinche invierno y te acercas y es primavera, ¿no?</p> <p>H3: ¿Y este no lo podría explicar? Igual=</p> <p>M3: =Tendría dos veranos, ¿no?</p> <p>H3: Tendría dos veranos.</p> <p>M3: ((risas)) Pues sí, ¿no? Porque mira tienes dos puntos a la misma distancia interviniendo. Entonces tendrías dos veranos. ((risas))</p> <p>H3: Y este tampoco podría, ni este.</p> <p>M3: Dos veranos, [dos ver- ((risas))</p> <p>H3: [Dos veranos y medio].</p> <p>M3: Tal vez el de la luminosidad podría ser.</p>	<p>[VG]-1-[00:50:24]</p> <p>P: De los modelos con dos, tres y cuatro circunferencias, entonces ¿cuál permite explicar el cambio de luminosidad de los planetas y las estaciones? Entonces vamos a escuchar de aquí, de este equipo ((señalando al Equipo 2)), alguien que nos comente.</p> <p>M1: ¿De luminosidad?</p> <p>P: ¡Ajá! ¿Cuál modelo te parece?</p> <p>M1: Mmm, yo creo que los tres.</p> <p>P: Los tres pueden explicar.</p> <p>M1: Porque, ya hay variación en la distancia entre, eh bueno la órbita ya no tiene radio constante, entonces ya hay variación entre la distancia del planeta y la Tierra, ya.</p> <p>P: Con eso explicamos cambios de distancia. ¿De acuerdo? ¿Todos de acuerdo? ((Los estudiantes asienten con la cabeza)) Entonces sí, los tres podrían ser luminosidad. ¿De las estaciones? ((M3 levanta la mano, pero H1 toma la palabra inmediatamente))</p> <p>H1: Si ponemos ahí en esa órbita el Sol, ya va a haber partes en las que de más calor y otras menos.</p> <p>P: ¿Sí? ¿Todos de acuerdo?</p> <p>H3: No exactamente, yo creo que, para lo que estamos acostumbrados nosotros aquí, el más sencillo sería el de dos circunferencias solamente, porque solamente tiene un punto en la órbita donde está, digamos, más cerca. O sea aquel planeta que rodea a la Tierra que está más cerca a nosotros, entonces tendría sentido que sólo en esa parte de la órbita hubiera más calor aquí en la Tierra y en la parte más alejada también tendría sentido decir que es aquella donde sentimos más frío. Sin embargo, las otras dos (refiriéndose a los modelos con tres y cuatro circunferencias)) tienen=</p> <p>M3: =Dos puntos cercanos.</p>

Parte I. ¿Qué permite explicar este modelo?							
Intención: Comprender por qué el modelo de los alejandrinos permite explicar aquello que el modelo griego no permitía. Se busca propiciar una comprensión profunda del sistema, así como Fourier conocía el comportamiento del fenómeno de propagación del calor a través de la empuera antes de proponer su modelo matemático del fenómeno (Farfán y Romero, 2017).							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta c	<p>El modelo 4 permite explicar el fenómeno de retrogradación. Dado que el vector velocidad es tangente a la trayectoria, en los modelos 2 y 3, dicho vector se mueve siempre en sentido horario visto desde T. En el modelo 4 se puede ver una retroceso al dar un giro completo y regresar al mismo punto.</p>	<p>El modelo 4 explica el fenómeno de retrogradación ya que es cuando se notaría más la presencia de que la trayectoria del planeta se regresa y vuelve a tomar su trayectoria original.</p> 	<p>El modelo 4 puede explicar el fenómeno de retrogradación. Ya que tiene una parte (la parte derecha de la imagen) en la que los círculos se desfasan. Provocando que el planeta gire en sentido opuesto (horario) al del círculo con centro en la Tierra. En las animaciones de los modelos 2 y 3 se aprecia que los planetas se frenan, pero no se ve que retrocedan.</p>	<p>El modelo que explica de manera más sencilla la retrogradación es el de 4 circunferencias, pues la curva descrita por el cuarto planeta se corta a sí misma en ciertos puntos de la trayectoria (ver figura). En los modelos de 2 y 3 circunferencias podríamos observar un cambio de velocidad aparente al acercarse los planetas más lejanos a su punto más cercano al centro de la circunferencia principal.</p> 	<p>Pienso que el modelo que mejor describe el proceso de retrogradación es el modelo de 4 circunferencias, pues hay partes de la trayectoria en las que la trayectoria pasada se cruza con la trayectoria presente, de hecho, hay dos secciones de este fenómeno.</p>	<p>[VE3]-1-[00:14:09] H3: ¿Cuál de estas (incomprensible, 4, ¿permite explicar?) el fenómeno de retrogradación? (2) M3: >Yo digo que sería el ¿cuatro?< H3: ¡Ajá!, está, así como [(incomprensible, 3)] H6: [Como que regresa y luego sigue con la misma.]</p>	<p>[VG]-1-[00:52:57] P: Y en la pregunta c, ya:: dice ¿cuáles permiten explicar el fenómeno de retrogradación? (3) Entonces ¿cuál o cuáles? M2: [El::: modelo 4] ((varios lo confirman)) H4: [El modelo 4] P: ¿El modelo 4? Bueno de este equipo ((refiriéndose al Equipo 3)), ya tu hablaste ((refiriéndose a H3)), entonces ehm, "M2" o::: "H6" ((llama a M2 y H6 por su nombre)). Coméntenos, del modelo todos coincidieron que el 4, entonces ¿en qué parte del trayecto? Bueno en la parte derecha, porque bueno, (incomprensible, 1) de hecho cualquier planeta. Realmente nada más se marca el rastro de uno de los puntos verdes, pero cualquiera de ellos si es observado desde la Tierra de alguna manera ((realiza el movimiento de un bucle con su mano e igual que H4)) se puede apreciar como hay un aparente cambio de dirección o de trayectoria. [VG]-1-[00:55:15] P: ¿Cuál modelo podría? M2: El cuatro. H6: Bueno, aun así considero que cualquier caso, porque en esta parte de aquí ((señalando la parte derecha de la imagen)) en el que hay dos circunferencias, esa parte aun observándola se podría ver aunque sea al menos uno, una regresión. ¿Están de acuerdo? P: No necesariamente, es que del dibujo pienso que seguramente se podría ver que el planeta se frena, o sea que va, de repente va muy lento, se para un instante y luego ya sigue, pero regresión como tal, bueno de la figura a mí no me parece que se, que se vea que se regrese, pero que si se frene, en el segundo y tercer modelo.</p>
Intencionalidad	En los incisos a, b y c, se espera que el estudiante relacione el cambio de luminosidad y las estaciones del año con la distancia que hay entre T y P, por tanto, el modelo de una circunferencia no permite explicar estos fenómenos ya que esta distancia nunca cambia, no así en el modelo con 2, 3 y 4 circunferencias en donde la distancia de P a T cambia durante la trayectoria. Respecto del fenómeno de retrogradación, su explicación estará en los bucles que se generan en el modelo con 4 circunferencias.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	<p>Comparar La Tierra y el planeta a lo largo de su trayectoria.</p> <p>Comparar El vector velocidad y la trayectoria de planeta.</p> <p>Observar El planeta y la trayectoria, vistos desde la Tierra.</p>	<p>Comparar La Tierra y el planeta a lo largo de su trayectoria.</p> <p>Observar El planeta y la trayectoria, vistos desde la Tierra.</p>	<p>Comparar La Tierra y el planeta a lo largo de su trayectoria.</p> <p>Observar El planeta y la trayectoria, vistos desde la Tierra.</p>	<p>Comparar La Tierra y el planeta a lo largo de su trayectoria.</p> <p>Observar El planeta y la trayectoria, vistos desde la Tierra.</p>	<p>Comparar La Tierra y el planeta a lo largo de su trayectoria.</p> <p>Observar El planeta y la trayectoria, vistos desde la Tierra.</p>	<p>Comparar La Tierra y el planeta a lo largo de su trayectoria.</p> <p>Observar El planeta y la trayectoria, vistos desde la Tierra.</p>	<p>Comparar La Tierra y el planeta a lo largo de su trayectoria.</p> <p>Comparar El Sol y otro planeta.</p> <p>Observar El planeta y la trayectoria, vistos desde la Tierra.</p>
¿Sobre qué relaciones lo hace?	<p>Comparar Distancia entre la Tierra y el planeta.</p> <p>Comparar El vector velocidad es tangente a la trayectoria.</p> <p>Observar El bucle que realiza el planeta sobre la trayectoria.</p>	<p>Comparar Distancia entre la Tierra y el planeta.</p> <p>Observar El bucle que realiza el planeta sobre la trayectoria.</p>	<p>Comparar Distancia entre la Tierra y el planeta.</p> <p>Observar El bucle que realiza el planeta sobre la trayectoria.</p>	<p>Comparar Distancia entre la Tierra y el planeta.</p> <p>Observar El bucle que realiza el planeta sobre la trayectoria.</p>	<p>Comparar Distancia entre la Tierra y el planeta.</p> <p>Observar El bucle que realiza el planeta sobre la trayectoria.</p>	<p>Comparar Distancia entre la Tierra y el planeta.</p> <p>Observar El bucle que realiza el planeta sobre la trayectoria.</p>	<p>Comparar Distancia entre la Tierra y el planeta.</p> <p>Comparar Las orbitas del Sol y del planeta se sincronizan durante cierto tiempo.</p> <p>Observar El bucle que realiza el planeta sobre la trayectoria.</p>
¿Por medio de qué lo hace?	<p>Comparar Verbal: Depende solamente de la distancia del planeta respecto a la Tierra. Algebraico: Constante para una circunferencia de radio r.</p> <p>Comparar Verbal: El vector velocidad es tangente a la trayectoria.</p> <p>Observar Verbal: En el modelo 4 se puede ver un retroceso al dar un giro completo y regresar al mismo punto.</p>	<p>Comparar Verbal: Suponiendo que el planeta es el Sol, en el punto más cerca de la Tierra es el verano, conforme se aleja el Sol es el otoño, cuando más lejos está es invierno y cuando se vuelve a acercar es primavera. Icónico: </p> <p>Verbal: Entre más cerca estén más luminosos se ven y entre más alejados menos luminosos.</p> <p>Observar Verbal: Entre más cerca estén más luminosos se ven y entre más alejados menos luminosos. Verbal: Se notaría más la presencia de que la trayectoria del planeta se regresa y vuelve a tomar su trayectoria original. Icónico: </p>	<p>Comparar Verbal: El brillo de un objeto aumenta conforme se acerca y disminuye conforme se aleja. Verbal: si un planeta está a distancia constante con la Tierra, entonces su brillo sería constante. Verbal: En todos ellos varía la distancia a la Tierra. Verbal: En la parte derecha el Sol tendría un acercamiento máximo que correspondería al verano. Arriba al otoño. A la izquierda con el alejamiento máximo, el invierno. Y abajo la primavera.</p> <p>Observar Verbal: Para el modelo 4, en la parte derecha de la imagen, en la que los círculos se desfasan, provoca que el planeta gire en sentido opuesto (horario) al del círculo con centro en la Tierra.</p>	<p>Comparar Verbal: Se tendría al astro a la misma distancia siempre respecto al centro. Verbal: Dado que su trayectoria no describe un círculo perfecto alrededor del centro de la circunferencia. Icónico: </p> <p>Verbal: Entre más cerca estén más luminosos se ven y entre más alejados menos luminosos.</p> <p>Observar Verbal: La curva descrita por el cuarto planeta se corta a sí misma en ciertos puntos de la trayectoria (ver figura). Icónico: </p>	<p>Comparar Verbal: El Sol siempre se halla a la misma distancia de la Tierra. Verbal: Las estaciones del año se dan cuando la tierra está a distintas distancias radiales del Sol. Verbal: pues la distancia del punto P a la tierra deja de ser igual radialmente en todos sus puntos.</p> <p>Observar Verbal: Hay partes de la trayectoria en las que la trayectoria pasada se cruza con la trayectoria presente.</p>	<p>Comparar Verbal: Siempre está a la misma distancia. Verbal: Si uno de estos fuera el Sol y si fuera a describir una trayectoria rara, entonces se aleja y hace calor y hace frío. Verbal: Podría decir que aquí es como el verano y entonces conforme se va alejando es como el otoño, el invierno, te acercas y es primavera.</p> <p>Observar Verbal: Como que regresa y luego sigue con la misma.</p>	<p>Comparar Verbal: La luminosidad de un objeto varía con la distancia. Algebraico: Si se disminuye la distancia la Tierra va a recibir más calor, si se aleja va a recibir menos. Verbal: La órbita ya no tiene radio constante Verbal: hay variación entre la distancia del planeta y la Tierra. Verbal: Aquel planeta que rodea a la Tierra que está más cerca de nosotros, entonces tendría sentido que sólo en esa parte de la órbita hubiera más calor aquí en la Tierra y en la parte más alejada también tendría sentido decir que es aquella donde sentimos más frío.</p> <p>Comparar Verbal: Planetas entre el Sol y la Tierra que estorbaran o hicieran una especie de sombra.</p> <p>Observar Verbal: Si es observado desde la Tierra de alguna manera ((realiza el movimiento de un bucle con su mano e igual que H4)) se puede apreciar como hay un aparente cambio de dirección o de trayectoria.</p>
Invariantes de las acciones	<ul style="list-style-type: none"> - Distancia entre la Tierra y el planeta. - El bucle que realiza el planeta sobre la trayectoria. 						

Parte II. ¿Y si aumentamos el número de epiciclos?							
Intención: Se busca, con apoyo de un applet, vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	<p>En la figura se puede ver que disminuyen. El número de bucles aumenta, teniendo uno de mayor tamaño y el resto disminuyendo en tamaño. Si consideramos un modelo en el que los radios de las circunferencias agregadas aumenten, se obtendría un modelo similar, pero la mayoría de</p>	<p>Solo van disminuyendo los radios.</p>	<p>$r_n > r_{n+1}$ para todo n natural. Datos curiosos: Si dos o más radios fueran iguales, el planeta eventualmente chocaría con la Tierra. Si r_n para algún n, las órbitas girarían alrededor de la Tierra por dentro de la primera circunferencia.</p>	<p>Solo se vuelven más pequeños.</p>	<p>A apreciación del dibujo, la variación del radio de las circunferencias conforme se añade otra es $\frac{r}{2^n}$, con respecto a la circunferencia original, R.</p>	<p>[VE3]-1-[01:01:55] H6: Cada circunferencia es la mitad de la anterior, tiene un radio de la mitad de la anterior. (4) Esta circunferencia tiene un radio de la mitad de esta. M3: Sí, creo que sí. Se van haciendo más chicos, o sea de mitad.</p>	<p>[VG]-1-[02:03:47] P: ¿Cómo cambian los radios de una circunferencia a otra conforme se van agregando? H4: Bueno, tal vez no importe tanto la expresión, eh, pero, eh, digamos que decrecían como uno en a la dos n.</p>

Parte II. ¿Y si aumentamos el número de epiciclos?							
Intención: Se busca, con apoyo de un applet, vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
<p>los bucles aumentarían su tamaño teniendo al final uno pequeño.</p> <p>Además, hay circunferencias donde la Tierra queda encerrada en dicha circunferencia o incluso chocan.</p>  			<p>Hasta ahora $r_{n+1} < r_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.</p>  <p>Si $r_{n+1} > r_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, el planeta genera órbitas de la Tierra por dentro de la primera circunferencia.</p>			<p>H6: ¡Ajá!</p> <p>H3: ¿Quieres <i>wachar</i> eso eh, si eso que dices es cierto sería interesante. ((Empieza a medir sobre la pantalla con el transportador))</p> <p>M3: ¿Y por qué con el transportador si tienes una regla? ((risas))</p> <p>H3: Porque está más chiquito el transportador "M3" (llama a M3 por su nombre).</p> <p>M3: ¡Ay! No lo he detenido, qué tonta. (16)</p> <p>H3: No m-, sí es cierto.</p> <p>H3: ¿En serio?</p> <p>M3: ¡Sí!</p> <p>[VE3]-1-01:03:11</p> <p>H6: Pos no jaló.</p> <p>H3: (Incomprensible, 1, ¿después?) del tercer círculo ya no jaló la idea de que disminuyen a la mitad.</p> <p>M3: ¿Uju?</p> <p>H3: Del tercer círculo ya no jaló eso de que disminuyan a la mitad.</p> <p>M3: Sí::</p> <p>H3: ¿En serio?</p> <p>M3: Mira aquí son como cuatro y medio=</p> <p>H3: =Tu tienes unas elipses=</p> <p>M3: Ah:::, mira y aquí son como dos veinticinco, y como uno y cacho. Son casi, sí son casi la mitad.</p> <p>H3: No mira, estos son dos cuatro, dos qué, dos siete, dos ocho, dos punto ocho ¡dos punto ocho! Este sí es de uno punto cuatro, (3) pero este es de (incomprensible, 2) y este es de seis milímetros=</p> <p>M3: =Bueno solo van disminuyendo ¿no? Ya.</p>	<p>P: >Ok< (3) Ok, entonces (3) ↑Ajá! No importa tanto la expresión matemática, pero uno como a la dos n, pero ¿cómo sabes que uno a la dos n?</p> <p>H4: Fue una suposición.</p> <p>P: Una suposición, un supuesto.</p> <p>H8: Ver-, bueno, de vista tiene varias (incomprensible, 1, ¿formas?).</p> <p>P: Ok, ¿quién más?</p> <p>H6: Yo llegué a la misma, a la misma conclusión.</p> <p>P: Llegaron a la misma conclusión.</p> <p>H6: ¡Ajá! Pero es que yo:: vi repetidas veces la animación.</p> <p>P: ¿Ajá?</p> <p>H6: Y siguiendo la trayectoria anaranjada, viendo las circunferencias, pues si pareciera que cada radio es la mitad del anterior.</p> <p>P: Ok, ¿pareciera que cada radio es la mitad del anterior?</p> <p>H6: Sí, la expresión es uno entre dos a la n.</p> <p>P: Ok, pero eso ¿pareciera? ¿Cierto?</p> <p>H6: ¡Ajá! (asiente con la cabeza)</p> <p>P: Pero, entonces, (x)si tienes que contestar algo así como con certeza ¿qué contestarían?</p> <p>M3: Pues que [se van haciendo más pequeños].</p> <p>H3: [Pos que se hacen más pequeños]</p> <p>H1: Que disminuyen.</p> <p>P: Van disminuyendo ¿verdad? Eso es como con certeza, eso. La expresión quien sabe, porque habría que tener como más informació::n. Bueno los compañeros ((señalando al equipo 2)) tal vez nos puedan compartir lo que estaban haciendo, al respecto, porque ellos si trataron de::: como que medirlo.</p> <p>H2: Bueno, digamos, los pi- la posición los pixeles que había entre cada, o sea la distancia entre:::, el radio, pero en pixeles. Y encontramos que la primera era la mitad, se aproximaba a la mitad del primer radio, y la tercera se aproximaba a la tercera parte del primer radio, pero la cuarta ya no nos coincidió que fuera la cuarta parte; o medimos mal, entonces podría ser uno en- n, o nosotros, bueno yo también había visto, pero nada más fue asumiendo que fuera la mitad cada radio, que también era uno entre dos a la n.</p> <p>P: Ah ok, pero en lo que coincidían todos es que disminuyen ¿verdad? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) En eso si coinciden todos.</p> <p>"H1" (refiriéndose por su nombre) me dijo por qué no podían aumentar, entonces no sé si quiera compartirlo con los compañeros su análisis de por qué no se pueden, por qué no pueden aumentar los radios.</p> <p>H1: Bueno primero me, eh, me fijé en el caso en que:: dos radios son iguales, ahí eventualmente se produciría un choque con la Tierra, porque (x)los círculos eh, no sé si se alcanza a ver ((mostrando su hoja de trabajo a los compañeros)).</p> <p>P: Si quieres lo haces en el, en el pintarrón. Ahí hay plumones</p> <p>H1: El círculo de la tierra y por acá voy a poner un círculo del mismo radio. Yo puedo encontrar un punto sobre esta circunferencia, en la que este, le voy a poner r dos ((se refiere al radio de la segunda circunferencia)), un punto sobre esta circunferencia en la que diste r dos de la Tierra, aquí voy a trazar otro círculo y esta que sea la trayectoria del planeta y se ve que eventualmente aquí chocaría con la Tierra, en algún punto ¿no? Podría ser cuando avance más, por acá, pero en algún punto chocaría con la Tierra. Y ahora se me ocurrió que, pues algo parecido, esta es la Tierra, con un r dos menor, que realmente podría ser un r n-ésimo en el caso general, pero que aquí hubiera un círculo mayor que r tres, o sea no pasaría algo trágico pero si serían órbitas interiores. Pero serían, bueno, le darían vuelta a la Tierra por dentro de la primera circunferencia, si fueran mayores. Pero el caso feo es que chocarían con tan solo dos circunferencias iguales eventualmente chocaría con la Tierra.</p>
Intencionalidad	Se busca concluir que los radios de las circunferencias tienden a cero en forma cualitativa, para esto los estudiantes podría usar frases como "disminuyen", "se hacen más pequeños", entre otras.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	<p>Observar</p> <p>Los radios de las circunferencias.</p> <p>Comparar</p> <p>Las oscilaciones y cantidad de circunferencias.</p>	<p>Observar</p> <p>Los radios de las circunferencias.</p>	<p>Observar</p> <p>Los radios de las circunferencias.</p>	<p>Observar</p> <p>Los radios de las circunferencias.</p>	<p>Estimar</p> <p>Los radios de las circunferencias.</p> <p>Comparar</p> <p>Los radios y el radio de la primera circunferencia.</p>	<p>Estimar</p> <p>Los radios de las circunferencias.</p> <p>Medir</p> <p>Los radios de las circunferencias.</p> <p>Observar</p> <p>Los radios de las circunferencias.</p>	<p>Observar</p> <p>Los radios de las circunferencias.</p> <p>Estimar</p> <p>Los radios de las circunferencias.</p> <p>Medir</p> <p>Los radios de las circunferencias.</p>
¿Sobre qué relaciones lo hace?	<p>Observar</p> <p>La medida de los radios disminuye.</p> <p>Comparar</p> <p>Aumento del número de oscilaciones de menor tamaño al agregar circunferencias.</p>	<p>Observar</p> <p>La medida de los radios disminuye.</p>	<p>Observar</p> <p>La medida de los radios disminuye.</p>	<p>Observar</p> <p>La medida de los radios disminuye.</p>	<p>Estimar</p> <p>La medida de los radios.</p> <p>Comparar</p> <p>La medida de los radios varía según $\frac{R}{2^n}$, donde R es el radio de la primera circunferencia.</p>	<p>Estimar</p> <p>La medida de los radios.</p> <p>Medir</p> <p>La medida de los radios disminuye.</p> <p>Observar</p> <p>La medida de los radios disminuye.</p>	<p>Observar</p> <p>La medida de los radios disminuye.</p> <p>Estimar</p> <p>La medida de los radios.</p> <p>Medir</p> <p>La medida de los radios disminuye.</p>
¿Por medio de qué lo hace?	<p>Observar</p> <p>Verbal: En la figura se puede ver que disminuyen.</p> <p>Comparar</p>	<p>Observar</p> <p>Verbal: Solo van disminuyendo los radios.</p>	<p>Observar</p> <p>Algebraico: $r_n > r_{n+1}$ para todo n natural.</p>	<p>Observar</p> <p>Verbal: Solo se vuelven más pequeños.</p>	<p>Estimar</p> <p>Verbal: A apreciación del dibujo la variación del radio de las circunferencias.</p> <p>Comparar</p> <p>Algebraico: $\frac{R}{2^n}$</p> <p>Iconico:</p>	<p>Estimar</p> <p>Verbal: Cada circunferencia es la mitad de la anterior, tiene un radio de la mitad de la anterior.</p> <p>Medir</p> <p>Numérico: Estos son 2.8, este sí es de 1.4 y este es de 6 milímetros.</p>	<p>Observar</p> <p>Verbal: Si pareciera que cada radio es la mitad del anterior.</p> <p>Estimar</p> <p>Algebraico: Digamos que decrecen como $\frac{1}{2^n}$.</p>

Parte II. ¿Y si aumentamos el número de epiciclos?							
Intención: Se busca, con apoyo de un applet, vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
	Verbal: El número de bucles aumenta, teniendo uno de mayor tamaño y el resto disminuyendo en tamaño.						Algebraico: Asumiendo que fuera la mitad cada radio, que también era uno entre dos a la n Medir Numérico: Encontramos que la primera era la mitad, se aproximaba a la mitad del primer radio, y la tercera se aproximaba a la tercera parte del primer radio, pero la cuarta ya no nos coincidió que fuera la cuarta parte; o medimos mal.
Invariantes de las acciones	- La medida de los radios disminuye.						
Pregunta b	La rapidez es mayor al aumentar las circunferencias. Además de que la trayectoria parece tomar una forma definida al aumentar el número de circunferencias.	Pues entre mas circunferencias se agreguen más rápido va el punto Q. 	Conforme se agregan más círculos los planetas tienen que recorrer mayor distancia y hacer más giros. Así que si tienen que mantener un periodo constante de rotación. Tendrían que moverse con más rapidez conforme se agregan círculos.	Se vuelve aparentemente más rápido en ciertos puntos de la órbita mientras el número de circunferencias aumenta. 	Conforme se agrega una circunferencia, la velocidad recorrida por el punto de la órbita, aumenta, esto pues las pendientes en la gráfica de los puntos de mayores circunferencias es mayor a las de menor número de circunferencias. 	[VE3]-1-[01:04:00] H6: Va aumentando la velocidad ¿no? M3: A no sé, no he vi- no he llegado a esa, pérame. (16) Es que ni sé. La siguiente gráfica muestra la distancia recorrida por el punto que se mueve sobre las circunferencias ((leyendo la pregunta)) H3: (Incomprensible, 2) La velocidad está aumentando. M3: Sí, es la, la pendiente es la velocidad. H3: ¿Entonces? M3: Entre más::: cerca esté del Y es más grande su velocidad ¿no? (4) Por que recorre mayor distancia en menos tiempo ¿no? H6: Exactamente. [VE3]-1-[02:25:10]- después de la puesta en común, H3 elimina una parte de su respuesta inicial, esta incluía «...aumenta, sin embargo, el tiempo que tarda un planeta en dar una vuelta completa permanece constante»	[VG]-1-[02:03:47] P: Ok, la siguiente gráfica muestra la distancia recorrida por un punto que se mueve sobre la circunferencia sexta, décima, vigésima y trigésima, entonces, ¿cómo cambia el movimiento de dichos puntos, (7) de una circunferencia a otra? H4: Bueno ((H7 levantó la mano, entonces H4 le cedió la palabra)). H7: Pues entre más aumenten el número de circunferencias, un punto sobre esa circunferencia va a ser, bueno digamos un planeta en esa circunferencia se va a mover a una velocidad mayor que un planeta en una circunferencia menor. Porque de la gráfica se ve que, por ejemplo, la amarilla es la es que es del mayor número de circunferencias, entonces quiere decir de la gráfica que recorre mayor, mayores distancias en menores tiempos y::: por eso sabemos que es mayor la velocidad comparada con la anterior. P: ¿Qué más? ¿(x)Quién está de acuerdo, no está de acuerdo? ¿Otro argumento? Pueden estar de acuerdo, pero tener otro argumento. H2: Lo mismo, pero nosotros nos fijamos en la pendiente. P: ¿Se fijaron en la pendiente? M3: Ajá ((varios estudiantes asienten con la cabeza)).
Intencionalidad	A través del estudio del cambio se pretende que los estudiantes infieran que la velocidad de los puntos sobre cada circunferencia sigue aumentando sin cota, para esto podría utilizar frases como “va más rápido”, “en el mismo tiempo recorre cada vez más distancia”, entre otras. Según la prueba piloto, es posible que para la pregunta b los estudiantes consideren que la gráfica se refiere a la trayectoria del planeta al agregar circunferencias, cuando en realidad se refiere al movimiento de cada punto sobre cada circunferencia.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	Observar Los puntos. Comparar Las trayectorias al agregar circunferencias.	Estimar El punto Q y la trayectoria.	Observar El punto Q y la trayectoria. Estimar El punto Q y la trayectoria.	Observar El punto Q y la trayectoria. Estimar El punto Q y la trayectoria.	Comparar Las pendientes. Estimar El punto Q y la trayectoria.	Observar Las gráficas.	Observar Las gráficas. Comparar Las pendientes.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	Observar Distancia recorrida en función del tiempo. Comparar La trayectoria va tomando una forma definida.	Estimar Distancia recorrida en función del tiempo.	Observar Distancia recorrida en función del tiempo. Estimar Distancia recorrida en función del tiempo.	Observar Distancia recorrida en función del tiempo. Estimar Distancia recorrida en función del tiempo.	Comparar A mayor pendiente mayor rapidez. Estimar Distancia recorrida en función del tiempo.	Observar Entre más cercana al eje Y mayor pendiente. Distancia recorrida en función del tiempo.	Observar Distancia recorrida en función del tiempo. Comparar A mayor pendiente mayor rapidez.
¿Por medio de qué lo hace?	Observar Verbal: La rapidez es mayor al aumentar las circunferencias. Comparar Verbal: La trayectoria parece tomar una forma definida al aumentar el número de circunferencias.	Estimar Verbal: Pues entre más circunferencias se agreguen más rápido va el punto Q. Icónico: 	Observar Verbal: Conforme se agregan más círculos los planetas tienen que recorrer mayor distancia en un mismo tiempo. Estimar Verbal: Tendrían que moverse con más rapidez conforme se agregan círculos.	Observar Verbal: Conforme se agregan más círculos los planetas tienen que recorrer mayor distancia en un mismo tiempo. Icónico: 	Comparar Verbal: La pendiente en la gráfica de los puntos de mayores circunferencias es mayor a las de menor número de circunferencias. Icónico: 	Observar Verbal: Entre más cerca esté del Y es mayor su velocidad. Verbal: Por que recorre mayor distancia en menos tiempo.	Observar Verbal: La gráfica recorre mayores distancias en menores tiempos y por eso sabemos que es mayor la velocidad comparada con la anterior. Comparar Verbal: Lo mismo, pero nosotros nos fijamos en la pendiente.
Invariantes de las acciones	- Distancia recorrida en función del tiempo. - A mayor pendiente mayor rapidez.						
Pregunta c	La distancia que recorre el planeta aumenta al aumentar el número de circunferencias, así como también aumenta el número de bucles.	Conforme mas circunferencias se agreguen la parte derecha se vuelve mas curvas cerradas y la parte izquierda se vuelve mas amplia y rápida. Además la parte derecha la recorre en un tiempo mas lento que la parte izquierda.	Los planetas van haciendo más bucles y cada vez más pequeños conforme se agregan círculos. Parece que la trayectoria tiende a una elipse con la Tierra en uno de los focos. La distancia máxima es la suma de los radios. Así que esta suma debe converger para que la figura converja.	Se observan deformaciones en la parte más cercana al centro de la trayectoria, las cuales aumentan cada vez más conforme se agregan más circunferencias. Por otra parte, la trayectoria en su punto más alejado describe una perturbación grande, la cual tiende a aumentar su tamaño conforme se agregan más circunferencias. Observe la simetría horizontal de la trayectoria y la aparente convergencia hacia una trayectoria muy bien definida. 	Se va haciendo más uniforme (suavemente continua) en su parte derecha, pues se van agregando cada vez más pequeños arcos que modelará una curva suave cuando el número de circunferencias agregadas sea muy grande. 	[VE3]-1-[01:05:54] H6: Agregamos dos circunferencias. M3: Teníamos tres circunferencias. H6: (Incomprensible, 1) la trayectoria fíjate, la trayectoria se va::: ¿deteriorando? ¿Se va haciendo discreta, no? M3: Oye H6: No sí, mira, aquí. Mira, ahorita vas a ver. Esta es un polígono discreto. M3: Pues porque va más rápido en ese punto. [VE3]-1-[01:07:13] H3: No te parece como una especie de elipse fea. M3: ((risas)) Parece un (2) gatito del cielo. H3: ¿Un qué? M3: Un gatito del cielo, una nube pues. H3: Ah::: [VE3]-1-[01:07:43] H3: ¿Cómo cambian las trayectorias mientras se agregan más? M3: Que se vuelve más como chicharrón, wey, la parte derecha. H3: ¡Ajá! M3: Y lo avienta más atrás. H3: Y si le pongo todos ((se refiere a todas las circunferencias que permite el applet)) M3: Ya ves se hace como chicharrón. [VE3]-1-[02:27:31]- después de la puesta en común, H3 le agrega argumentos a su respuesta inicial a la pregunta, la cual no incluía la frase cy la aparente convergencia hacia una trayectoria muy bien definida»	[VG]-1-[02:12:23] P: ¿Cómo cambia la trayectoria del planeta conforme se agregan más y más circunferencias? Ahora si estamos hablando de la trayectoria del planeta, entonces qué analizaron de ese. A ver, quién nos dice qué fue lo que hicieron para analizar ese. H2: Nosotros nos fijamos que el punto más alejado que estaba, la (incomprensible, 1) de T era la suma de todos, de todas las otras circunferencias. Entonces entre más circunferencias tuviera, más alejado iba a estar de T, entonces iba a recorrer una gran distancia en un y regreso, entre mayor fuera el número de radios iba a ser más grande, la trayectoria. P: ¿Siempre, siempre iba a ser más grande la trayectoria? ¿En todo momento? H1: Bueno, ahí también podríamos preguntarnos eh::: la relación entre, entre los radios. Porque si eh::: como si estuviéramos midiendo pixeles, si variara con uno en n no convergería, o sea la suma al infinito ser- haría una distancia máxima infinita. P: ¿Si fuera uno en n? ((H1 asiente con la cabeza)) ¿Los radios? H1: Sí, en el punto más alejado, que es la suma de todos los radios. P: Ah ok, entonces la suma de todos los radios sería la que no convergería, en ese caso= =En ese caso= P: =Si fuera uno entre n. H1: Sí. (3) Si fueran mitades si:::, si convergerían. P: Uno entre dos a la n. H1: ¡Ajá! Esa sí converge. H8: Aunque conforme más círculos se van agregando tiende a una forma::: ¿elíptica? Pero es que no sé

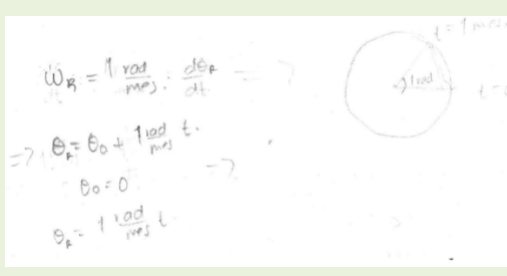
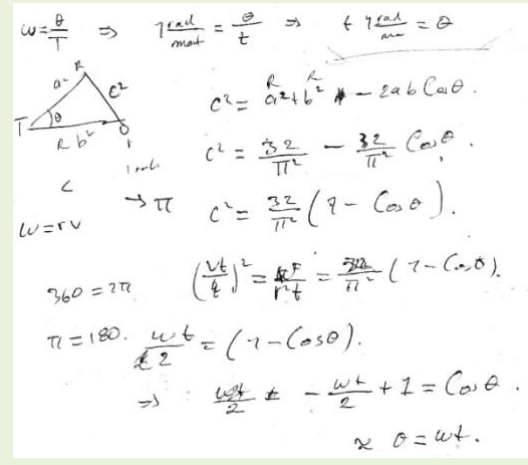
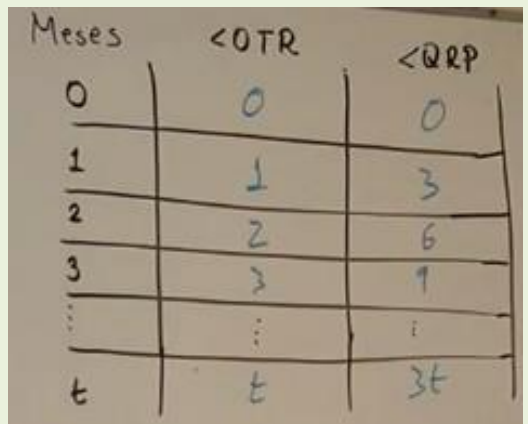
Parte II. ¿Y si aumentamos el número de epiciclos?							
Intención:	Se busca, con apoyo de un applet, vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.						
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Intencionalidad	La intención es que el estudiante identifique el carácter estable del sistema en forma cualitativa, esto a través de frases como “cuando hay muchas circunferencias casi no cambia la forma de la trayectoria conforme se agregan más”, “tiende a parecerse a una...”. Para esto se espera analice el cambio en la forma de la trayectoria conforme se agregan cada vez más circunferencias. Se espera que, expresen que “algo extraño pasaba con la parte izquierda de la trayectoria”, esto es importante, pues no toda la trayectoria es estable.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	<p>Comparar</p> <p>Las trayectorias.</p> <p>Observar</p> <p>Las trayectorias.</p>	<p>Observar</p> <p>Las trayectorias.</p> <p>Comparar</p> <p>Distintas partes de una misma trayectoria.</p>	<p>Observar</p> <p>Las trayectorias.</p> <p>Comparar</p> <p>Las trayectorias.</p>	<p>Observar</p> <p>Las trayectorias.</p> <p>Comparar</p> <p>Las trayectorias.</p>	<p>Observar</p> <p>Las trayectorias.</p> <p>Comparar</p> <p>Las trayectorias.</p>	<p>Observar</p> <p>Las trayectorias.</p> <p>Comparar</p> <p>Las trayectorias.</p>	<p>Observar</p> <p>Las trayectorias.</p> <p>Comparar</p> <p>Las trayectorias.</p> <p>Estimar</p> <p>La suma de los radios.</p>
¿Sobre qué relaciones lo hace?	<p>Comparar</p> <p>Distancia recorrida sobre la trayectoria.</p> <p>Observar</p> <p>La forma de la trayectoria.</p>	<p>Observar</p> <p>La forma de la trayectoria.</p> <p>Comparar</p> <p>Distancia recorrida en función del tiempo.</p>	<p>Observar</p> <p>La forma de la trayectoria.</p> <p>Comparar</p> <p>La forma de la trayectoria.</p>	<p>Observar</p> <p>La forma de la trayectoria.</p> <p>Comparar</p> <p>La forma de la trayectoria.</p>	<p>Observar</p> <p>La forma de la trayectoria.</p> <p>Comparar</p> <p>La forma de la trayectoria.</p>	<p>Observar</p> <p>La forma de la trayectoria.</p> <p>Comparar</p> <p>La forma de la trayectoria.</p>	<p>Observar</p> <p>La distancia recorrida.</p> <p>Comparar</p> <p>La forma de la trayectoria.</p> <p>Estimar</p> <p>La convergencia numérica.</p>
¿Por medio de qué lo hace?	<p>Comparar</p> <p>Verbal: La distancia que recorre el planeta aumenta al aumentar el número de circunferencias.</p> <p>Observar</p> <p>Verbal: El número de oscilaciones aumenta al aumentar el número de circunferencias.</p>	<p>Observar</p> <p>Verbal: El número de oscilaciones aumenta al aumentar el número de circunferencias.</p> <p>Comparar</p> <p>Verbal: La parte derecha la recorre en un tiempo más lento que la parte izquierda, en una misma trayectoria.</p>	<p>Observar</p> <p>Verbal: Los planetas van haciendo más oscilaciones y cada vez más pequeñas conforme se agregan círculos.</p> <p>Comparar</p> <p>Verbal: Parece que la trayectoria tiende a una elipse con la Tierra en uno de los focos.</p>	<p>Observar</p> <p>Verbal: Se observan deformaciones en la parte más cercana al centro de la trayectoria, las cuales aumentan cada vez más conforme se agregan más circunferencias.</p> <p>Comparar</p> <p>Verbal: Observe la simetría horizontal de la trayectoria y la aparente convergencia hacia una trayectoria muy bien definida.</p> <p>Iconico:</p> 	<p>Observar</p> <p>Verbal: Se va haciendo más uniforme (suavemente continua) en su parte derecha.</p> <p>Comparar</p> <p>Verbal: Se van agregando cada vez más pequeños arcos que modelará una curva suave cuando el número de circunferencias agregadas sea muy grande.</p> <p>Iconico:</p> 	<p>Observar</p> <p>Verbal: La trayectoria se va ¿deteriorando? ¿se va haciendo discreta?</p> <p>Verbal: La parte derecha vuelve más como chicharrón.</p> <p>Comparar</p> <p>Verbal: No te parece como una especie de elipse fea.</p>	<p>Observar</p> <p>Verbal: Entre mayor número de radios mayor distancia recorrida.</p> <p>Comparar</p> <p>Verbal: Conforme más círculos se van agregando tiende a una forma ¿elíptica?</p> <p>Estimar</p> <p>Numérico: Si estuviéramos midiendo pixeles, si variara con $\frac{1}{n}$ no convergería, o sea la suma al infinito haría una distancia máxima infinita. Si fueran mitades si convergerían.</p>
Invariantes de las acciones	<ul style="list-style-type: none"> - La forma de la trayectoria. - La distancia recorrida sobre la trayectoria. 						
Pregunta d	<p>Sí, dado que el modelo se plantea para un ciclo determinado para cada planeta, al aumentar el número de circunferencias en el modelo, la distancia en la trayectoria es mayor, y por lo tanto, la rapidez con que se mueve tiene que aumentar para completar la trayectoria durante el ciclo.</p> <p>Al aumentar el número de circunferencias, el punto se mueve mucho más rápido, y la aportación que realiza a la trayectoria puede ser despreciable, por lo que, se puede apreciar una forma casi definida.</p>	<p>Sí, entre mas circunferencias vamos agregando la forma de la trayectoria no se ve casi afectada ya que el radio vas disminuyendo tanto de tal forma que despues se vera que el movimiento del punto Q es insignificante.</p>	<p>Sí hay relación. Ya que de b) se tiene que mientras más círculos más bucles tienen que dar los planetas. Y de a) se tiene que cada círculo añadido tiene un radio menor que el anterior, por lo que su bucle será de menor longitud que el del círculo anterior.</p>	<p>Sí, el aumento en la velocidad aparente se explica por el hecho de que la trayectoria total del planeta ocurre en el mismo tiempo, sin depender del número de circunferencias, teniendo que recorrer una mayor distancia en un mismo tiempo (relación entre a) y b)).</p> <p>La observación de una mayor deformación en la trayectoria se relaciona con la cantidad de círculos porque al aumentar las circunferencias aumenta el número de deformaciones, volviéndose éstas más pequeñas y recurrentes en la trayectoria.</p> <p>Observemos que la forma de la trayectoria tiende a algo que nos recuerda a una elipse, conforme se agreguen más circunferencias esta forma se definirá cada vez más, siendo que los puntos tienden a girar sobre el radio más rápido y su radio tiende a ser cada vez más pequeño, concluyendo que su contribución a la distancia respecto al centro será cada vez más mínima.</p>	<p>Conforme se va agregando otra circunferencia, la contribución al giro se desplaza en torno al centro de masa del planeta, con lo que no se sale de la forma bien definida que se respondió en el inciso c)</p>	<p>[VE3]-1-[01:26:40]</p> <p>H3: Al final ¿qué contestaron?</p> <p>M3: Ah:::</p> <p>H6: ¿En cuál?</p> <p>M3: En la d.</p> <p>H6: Yo puse que sí, por la conservación del momento angular.</p> <p>M3: Sí, yo también, yo puse así ((risas)).</p> <p>H6: ¿La conservación del momento angular? Ok:::</p> <p>M3: ¿Tú qué le pusiste? ↑Ah caramba↑ si lo explicaste bien.</p> <p>H6: A mi me pareció trampa, pero.</p> <p>H3: ¡Ajá! (4) No sé (7)</p> <p>M3: (Incomprensible, 2) (5)</p> <p>H3: Es que no entiendo muy bien qué está pasando. O sea, le agregas un círculo ((realiza un sonido repetitivo al añadir circunferencias al applet))</p> <p>M3: Lo vas a bobiar como hace rato ((risas)).</p> <p>H3: Sí, pero le agregas un círculo, pero al final de cuentas tarda el mismo tiempo en dar una trayectoria=</p> <p>=Sí=</p> <p>H3: =Siempre ¿no?</p> <p>M3: No sé, es que. (13) Pero por las grafiquitas de aquí no parece que tardan el mismo tiempo, ¡mira!</p> <p>H3: Pero se refiere a distancia.</p> <p>M3: Con respecto al tiempo=</p> <p>H3: =Respecto al tiempo. (3)</p> <p>M3: Mmm:::</p> <p>H3: Tienes (x)un tiempo aquí, bueno entonces tiene sentido que hagan- que no hayan recorrido la misma distancia. Pero, en general, yo siento que::: aunque agregues más círculos tardan la misma cantidad de tiempo en dar la vuelta. Mira, lo que sí es que el punto parece moverse más rápido.</p> <p>M3: Ok:::</p> <p>[VE3]-1-[02:23:32]- después de la puesta en común, M3 cambia su respuesta inicial a la pregunta. Su respuesta inicial había sido «Sí, podría tener relación con la conservación del momento angular ya que esto depende del radio y la velocidad angular del objeto, y aquí se presentan los mismos parámetros solamente se agrega la manera de la trayectoria del objeto.»</p> <p>[VE3]-1-[02:25:10]- después de la puesta en común, H3 le agrega argumentos a su respuesta inicial a la pregunta, la cual no incluía el último párrafo.</p>	<p>[VG]-1-[02:19:09]</p> <p>P: Bueno, entonces esa es la pregunta interesante, eso que acabamos de responder acá de que va tomando como una forma definida, en este caso como un huevo, digamos ¿Cómo se relaciona con esas otras dos? Con que los radios se hacen cada vez más pequeños y con que la velocidad de los puntos es cada vez mayor. A ver.</p> <p>H8: Puede ser como un fractal de los arcos que se van haciendo dependiendo de los radios que se tengan, y esa es la relación que puede existir- bueno para ya establecerlo matemáticamente, va a ser como la ecuación de un fractal.</p> <p>P: ¿Parece como la ecuación de un fractal?</p> <p>H4: Eh, bueno yo entien-, bueno yo pensé que si los radios fueran iguales en todo momento, que no pudieran (incomprensible, 1) entonces ni siquiera tendríamos esa::: esa forma que nos plantea el modelado, tendríamos una forma más educada ¿no? Algo más concéntrico, pero siempre (incomprensible, 1). Entonces también tendríamos que la velocidad del punto más, más alejado con radios más o menos iguales, en caso de que no choquen, iría más lento. (x)el punto más alejado. Bueno, es lo que, lo que yo pude observar.</p> <p>P: Ok::: Eso fue lo que pudo observar ¿qué más?</p> <p>H6: Por la conservación del momento angular.</p> <p>P: ¿Ajá, qué?</p> <p>H6: Digamos en los puntos en esta parte ((se refiere a la parte izquierda de la trayectoria)) se dan radios mayores y estos más cercanos cercana los radios son menores y ya vimos que en las circunferencias pues la velocidad al parecer es mayor, entonces, hay una, buena la pregunta plantea si hay alguna relación, entonces yo creo que la relación es esa, bueno a parte de otras, pero sería visualmente la conservación del momento angular.</p> <p>[VG]-1-[02:21:39]</p> <p>P: Pero no me queda claro todavía cómo afecta eso el momento angular.</p> <p>H6: Porque se tiene que conservar, entonces, bueno, bueno es que no sé cómo plantearlo mejor, no sé cómo puedo explicarlo. Pero, pues sí, a la pregunta, de que si hay una relación yo creo que es el momento angú-, bueno la conservación del momento angular.</p> <p>H1: Es que sería con fuerzas, es decir si es una fuerza central sí, si se conserva, pero esto son solo trayectorias.</p> <p>P: ¿Ustedes qué contestaron, o qué:::?? ((refiriéndose al Equipo 2))</p> <p>H2: Pues bueno yo iba a argumentar que entre mayor número de órbitas la trayectoria total recorrida iba a ser mayor y, pues yo lo relacioné con eso, pero no (incomprensible, 2)</p> <p>P: Ahorita estás repensando el=</p> <p>M2: =Bueno considerando que::: ese movimiento es para un solo planeta (incomprensible, 2) la observación decía que pues todo ese planeta tenía un cierto ciclo, un cierto tiempo, y así como lo dice “H2” ((se refiere a H2 por su nombre)) si aumentas el número de</p>

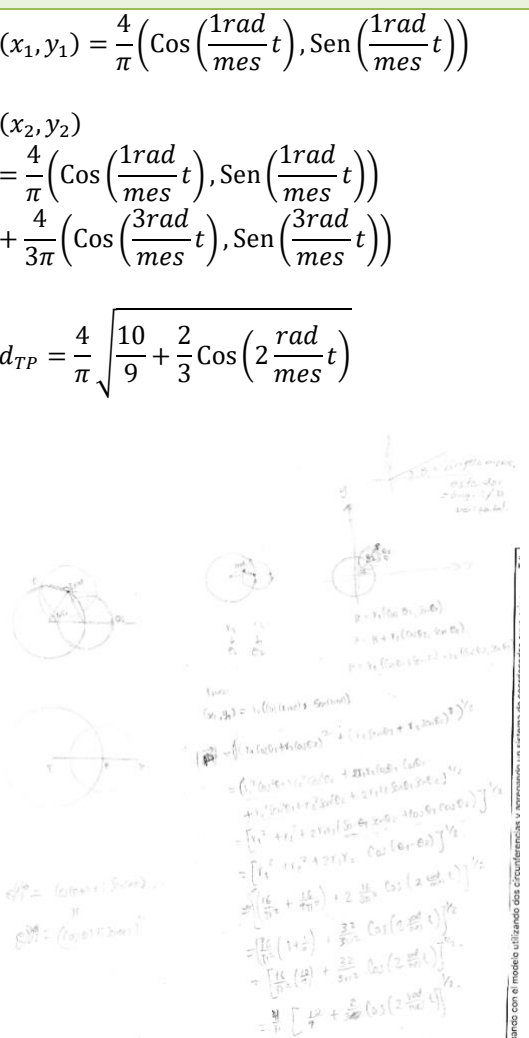
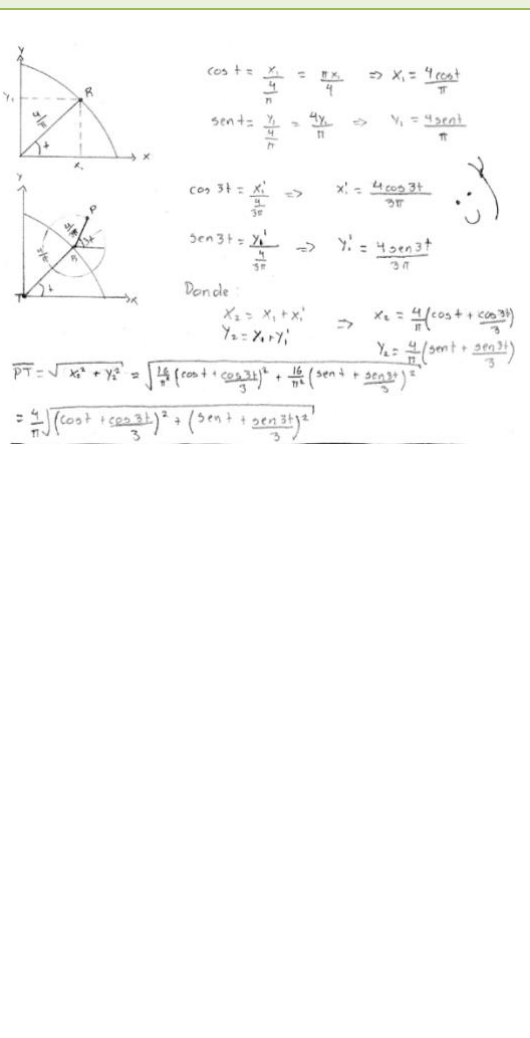

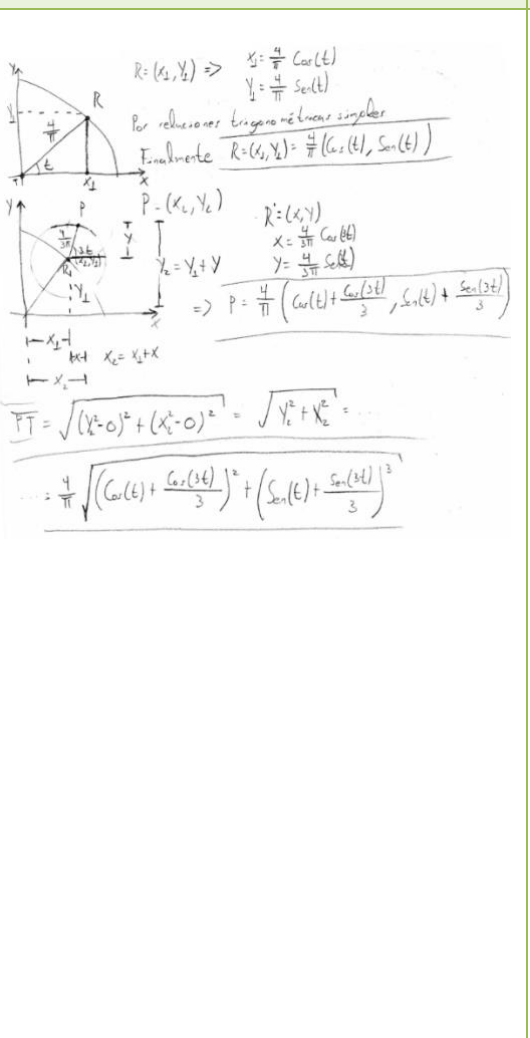
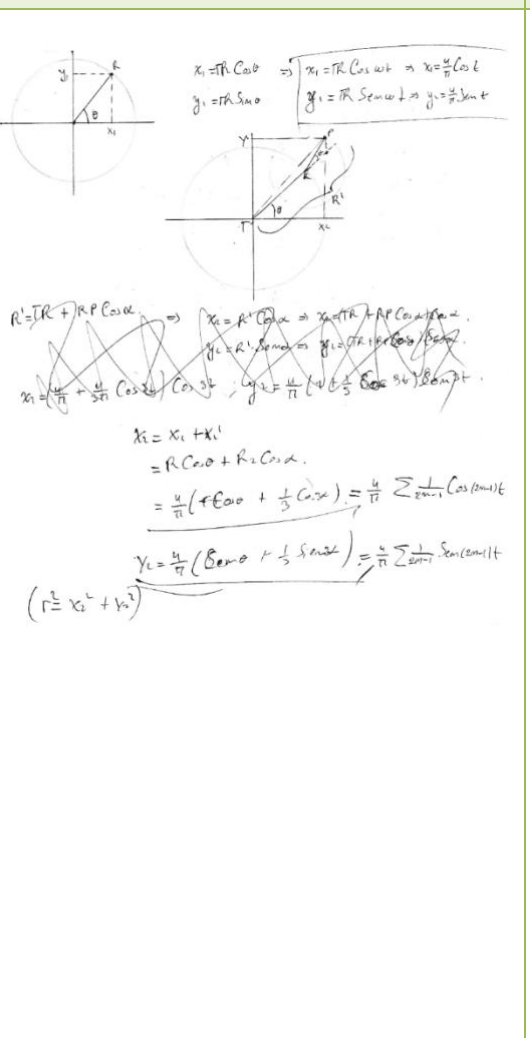
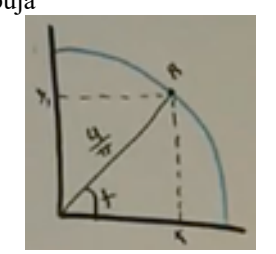
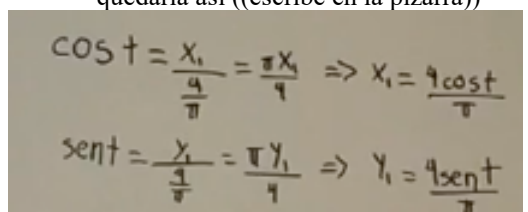
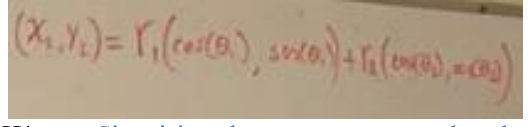
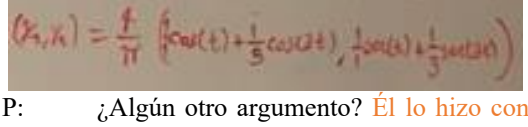
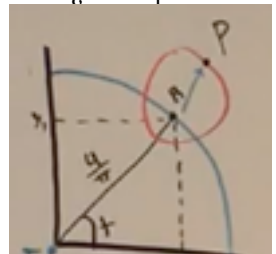
Parte II. ¿Y si aumentamos el número de epiciclos?							
Intención:	Se busca, con apoyo de un applet, vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.						
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							<p>circunferencias parece que la distancia es mayor entonces si dejas ese, ese tiempo fijo por eso también se determina que tiene que ir más rápido, la velocidad tiene que aumentar.</p> <p>[VG]-1-[02:23:14]</p> <p>P: Ahorita que dijeron, no es que como que va tomando ya una forma definida, se esperaría que esa forma definida sea la del planeta ¿cierto? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) ¿Por qué no cambia esa forma después? ¿O sea si yo sigo agregando circunferencias ustedes creen que esa forma cambie mucho?</p> <p>H4: (x)Va a converger, como a lo que va a ser ¿no? Si le sigue agregando pues cada vez se va haciendo más chiquito cada radio (x)que le va agregando entonces cada vez va contribuyendo menos al giro, y cada vez gira más entorno a su propio centro de masa, entonces ya no va a girar como que va a ser como diferencia sino en sí mismo, entonces pues ya no cambia tanto la forma definida.</p>
Intencionalidad	Se busca confrontar el cómo cambia la trayectoria del planeta (estabilidad) con lo que provoca el cambio. Sin embargo, determinar cómo cambia y qué produce el cambio es una tarea cognitivamente muy compleja para los fenómenos de determinación del estado estacionario (Farfán, 2012; Romero, 2016). Se espera que, con ayuda del docente y a partir de las ideas planteadas por los estudiantes, se acerquen a la idea de que al tender los radios de las circunferencias a cero y la velocidad de movimiento del punto al infinito esto provoca que se logre la estabilidad; es decir, agregar una circunferencia muy pequeña y un punto sobre esta que se mueve muy rápido no provoca cambios significativos en el sistema en general.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	<p>Comparar</p> <p>El periodo, el tamaño de la trayectoria y la rapidez. La trayectoria, los radios y la velocidad.</p>	<p>Comparar</p> <p>La trayectoria y los radios.</p>	<p>Comparar</p> <p>Los radios y las oscilaciones.</p>	<p>Comparar</p> <p>El periodo, el tamaño de la trayectoria y la rapidez. Los radios y las oscilaciones. La trayectoria, los radios y la velocidad.</p>	<p>Comparar</p> <p>La trayectoria, los radios y la velocidad.</p>	<p>Identificar</p> <p>Los parámetros</p> <p>Comparar</p> <p>El periodo, el tamaño de la trayectoria y la rapidez.</p>	<p>Identificar</p> <p>El comportamiento. Los parámetros.</p> <p>Comparar</p> <p>El periodo, el tamaño de la trayectoria y la rapidez. La trayectoria, los radios y la velocidad.</p>
¿Sobre qué relaciones lo hace?	<p>Comparar</p> <p>Dado un periodo fijo, si la trayectoria aumenta de tamaño también lo debe hacer la velocidad. Agregar una circunferencia muy pequeña y un punto sobre esta que se mueve muy rápido no provoca cambios significativos en la forma de la trayectoria.</p>	<p>Comparar</p> <p>Agregar una circunferencia muy pequeña no provoca cambios significativos en la forma de la trayectoria.</p>	<p>Comparar</p> <p>Más circunferencias, provoca más oscilaciones y como los radios son menores las oscilaciones con cada vez más pequeñas.</p>	<p>Comparar</p> <p>Dado un periodo fijo, si la trayectoria aumenta de tamaño también lo debe hacer la velocidad. Más circunferencias, provoca más oscilaciones y como los radios son menores las oscilaciones con cada vez más pequeñas. Agregar una circunferencia muy pequeña y un punto sobre esta que se mueve muy rápido no provoca cambios significativos en la forma de la trayectoria.</p>	<p>Comparar</p> <p>Agregar una circunferencia muy pequeña y un punto sobre esta que se mueve muy rápido no provoca cambios significativos en la forma de la trayectoria.</p>	<p>Identificar</p> <p>Conservación del momento angular.</p> <p>Comparar</p> <p>Dado un periodo fijo, si la trayectoria aumenta de tamaño también lo debe hacer la velocidad.</p>	<p>Identificar</p> <p>Fractal. Conservación del momento angular.</p> <p>Comparar</p> <p>Dado un periodo fijo, si la trayectoria aumenta de tamaño también lo debe hacer la velocidad. Agregar una circunferencia muy pequeña y un punto sobre esta que se mueve muy rápido no provoca cambios significativos en la forma de la trayectoria.</p>
¿Por medio de qué lo hace?	<p>Comparar</p> <p>Verbal: Al aumentar el número de circunferencias en el modelo, la distancia en la trayectoria es mayor, y por lo tanto, la rapidez con que se mueve tiene que aumentar para completar la trayectoria durante el ciclo. Verbal: Al aumentar el número de circunferencias, el punto se mueve mucho más rápido, y la aportación que realiza a la trayectoria puede ser despreciable, por lo que, se puede apreciar una forma casi definida.</p>	<p>Comparar</p> <p>Verbal: Entre más circunferencias vamos agregando la forma de la trayectoria no se ve casi afectada ya que el radio vas disminuyendo tanto de tal forma que después se verá que el movimiento del punto Q es insignificante.</p>	<p>Comparar</p> <p>Verbal: Ya que de b) se tiene que mientras más círculos más bucles tienen que dar los planetas. Y de a) se tiene que cada círculo añadido tiene un radio menor que el anterior, por lo que su bucle será de menor longitud que el del círculo anterior.</p>	<p>Comparar</p> <p>Verbal: El aumento en la velocidad aparente se explica por el hecho de que la trayectoria total del planeta ocurre en el mismo tiempo, sin depender del número de circunferencias, teniendo que recorrer una mayor distancia en un mismo tiempo. Verbal: Porque al aumentar las circunferencias aumenta el número de deformaciones, volviéndose éstas más pequeñas y recurrentes en la trayectoria. Verbal: Conforme se agreguen más circunferencias esta forma se definirá cada vez más, siendo que los puntos tienden a girar sobre el radio más rápido y su radio tiende a ser cada vez más pequeño, concluyendo que su contribución a la distancia respecto al centro será cada vez más mínima.</p>	<p>Comparar</p> <p>Verbal: Conforme se va agregando otra circunferencia, la contribución al giro se desplaza en torno al centro de masa del planeta, con lo que no se sale de la forma bien definida que se respondió en el inciso c).</p>	<p>Identificar</p> <p>Verbal: Podría tener relación con la conservación del momento angular ya que esto depende del radio y la velocidad angular del objeto, y aquí se presentan los mismos parámetros solamente se agrega la manera de la trayectoria del objeto.</p> <p>Comparar</p> <p>Verbal: Aunque agregues más círculos tardan la misma cantidad de tiempo en dar la vuelta. Mira, lo que sí es que el punto parece moverse más rápido.</p>	<p>Identificar</p> <p>Verbal: Puede ser como un fractal de los arcos que se van haciendo, dependiendo de los radios que se tengan. Verbal: Sería visualmente la conservación del momento angular.</p> <p>Comparar</p> <p>Verbal: Si aumentas el número de circunferencias parece que la distancia es mayor, entonces si dejas ese tiempo fijo la velocidad tiene que aumentar. Verbal: Va a converger, si le sigue agregando pues cada vez se va haciendo más chiquito cada radio entonces cada vez va contribuyendo menos al giro, y cada vez gira más entorno a su propio centro de masa, entonces ya no va a girar como que va a ser como diferencia sino en sí mismo, entonces pues ya no cambia tanto la forma definida.</p>
Invariantes de las acciones	<ul style="list-style-type: none"> - Agregar una circunferencia muy pequeña y un punto sobre esta que se mueve muy rápido no provoca cambios significativos en la forma de la trayectoria. - Dado un periodo fijo, si la trayectoria aumenta de tamaño también lo debe hacer la velocidad. - Más circunferencias, provoca más oscilaciones y como los radios son menores las oscilaciones con cada vez más pequeñas. 						

Tarea #2. Etapa 1: Identificación de acciones

TAREA #2

Objetivo de la Tarea: Significar la convergencia de series trigonométricas mediante la estabilidad de la trayectoria del planeta, caracterizándola mediante el límite de la sucesión de sumas parciales.

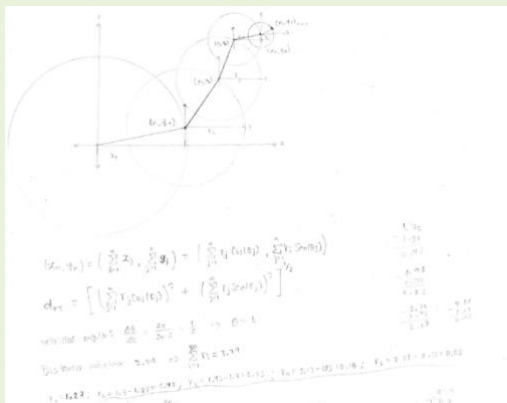
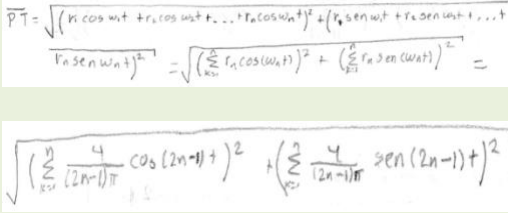
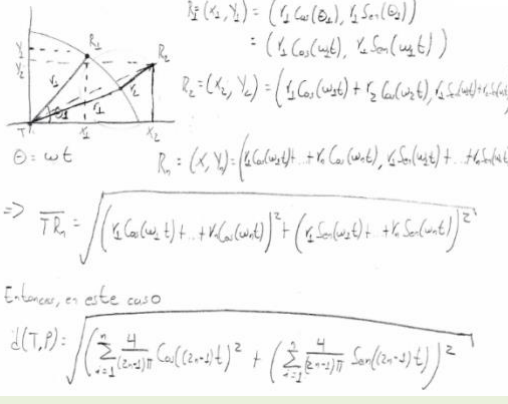
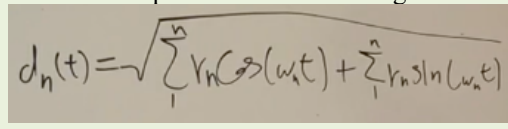
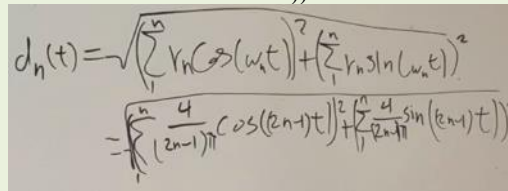
Parte I. Comprendiendo el modelo																																																																																														
Intención:	Se busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada.																																																																																													
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común																																																																																							
Pregunta a	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Meses</th> <th>OTR (Rad)</th> <th>QRP (Rad)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>9</td></tr> <tr><td>n</td><td>n</td><td>3n</td></tr> </tbody> </table> 	Meses	OTR (Rad)	QRP (Rad)	0	0	0	1	1	3	2	2	6	3	3	9	n	n	3n	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Meses</th> <th>Medidas de <math>\angle OTR</math> (en radianes)</th> <th>Medidas de <math>\angle QRP</math> (en radianes)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>9</td></tr> <tr><td>:</td><td>:</td><td>:</td></tr> <tr><td>t</td><td>t</td><td>3t</td></tr> </tbody> </table>	Meses	Medidas de $\angle OTR$ (en radianes)	Medidas de $\angle QRP$ (en radianes)	0	0	0	1	1	3	2	2	6	3	3	9	:	:	:	t	t	3t	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Meses</th> <th>OTR</th> <th>QRP</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>n</td><td>n</td><td>3n</td></tr> </tbody> </table>	Meses	OTR	QRP	0	0	0	1	1	3	n	n	3n	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Meses</th> <th>Medida de <math>\angle OTR</math> (rad)</th> <th>Medida de <math>\angle QRP</math> (rad)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>9</td></tr> <tr><td>:</td><td>:</td><td>:</td></tr> <tr><td>t</td><td>t</td><td>3t</td></tr> </tbody> </table>	Meses	Medida de $\angle OTR$ (rad)	Medida de $\angle QRP$ (rad)	0	0	0	1	1	3	2	2	6	3	3	9	:	:	:	t	t	3t	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Meses</th> <th>Medida OTR</th> <th>Medida QRP</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>t</td><td>t</td><td>3t</td></tr> </tbody> </table> <p>$w = \frac{r}{t} \Rightarrow \frac{1 \text{ rad}}{\text{mes}} = \frac{r}{t} \Rightarrow t = \frac{1 \text{ rad}}{w} = \theta$</p> 	Meses	Medida OTR	Medida QRP	0	0	0	1	1	3	2	2	6	t	t	3t	<p>[VE3]-2-[00:11:02]</p> <p>H3: ¿Cuánto crees que valga ese? Al inicio vale cero.</p> <p>M3: Pues:: ¡ajá!</p> <p>H3: Así inicia=</p> <p>M3: Ajá, inicia desde el cero, y llega mmm en un mes::</p> <p>H3: A un radián por mes, entonces sería uno.</p> <p>M3: ¿Cuánto es un radián por mes?</p> <p>H3: Pues un radian por mes ((risas)).</p> <p>H3: El ángulo, ¿no?</p> <p>M3: ¡Ajá! ¿Y el de Q?</p> <p>H3: Y el otro se mueve a tres radianes por mes.</p> <p>M3: Entonces serían tres, ¿no?</p> <p>H3: ¡Ajá! Y así ya.</p> <p>M3: Y luego entonces este es dos y este es (6) ¿cinco?</p> <p>H3: ¿Por qué cinco?</p> <p>M3: Porque van (incomprensible, 1) ¿no? Nada más.</p> <p>H3: Bueno por el tres radianes. Mira pasan dos meses entonces cada mes tu:: ángulo este son tres radianes veces, dos por tres son seis radianes ¿no?</p>	<p>[VE3]-2-[00:56:34]- H3 rellena la tabla en la pizarra.</p> <p>H3: Como estamos en el mes cero, tenemos un tiempo igual a cero, o sea estamos en la condición inicial, entonces ambos ángulos valdrían cero. Luego como estamos en el mes uno, el primer ángulo nos dice que avanza o se mueve un radian cada mes, entonces este va a valer uno, el otro nos dice que se mueve a una velocidad de tres radianes cada mes, entonces sería tres. Bueno aquí ya podemos continuar con este proceso sería un dos, aquí sería un seis, tres, nueve y, en general, ya serían t y tres veces t.</p> <p>P: ¿Sí? ¿Todos de acuerdo? ¿Alguien lo pensó diferente o todos lo pensaron de esa manera? ((los estudiantes asienten con la cabeza))</p> 
Meses	OTR (Rad)	QRP (Rad)																																																																																												
0	0	0																																																																																												
1	1	3																																																																																												
2	2	6																																																																																												
3	3	9																																																																																												
n	n	3n																																																																																												
Meses	Medidas de $\angle OTR$ (en radianes)	Medidas de $\angle QRP$ (en radianes)																																																																																												
0	0	0																																																																																												
1	1	3																																																																																												
2	2	6																																																																																												
3	3	9																																																																																												
:	:	:																																																																																												
t	t	3t																																																																																												
Meses	OTR	QRP																																																																																												
0	0	0																																																																																												
1	1	3																																																																																												
n	n	3n																																																																																												
Meses	Medida de $\angle OTR$ (rad)	Medida de $\angle QRP$ (rad)																																																																																												
0	0	0																																																																																												
1	1	3																																																																																												
2	2	6																																																																																												
3	3	9																																																																																												
:	:	:																																																																																												
t	t	3t																																																																																												
Meses	Medida OTR	Medida QRP																																																																																												
0	0	0																																																																																												
1	1	3																																																																																												
2	2	6																																																																																												
t	t	3t																																																																																												

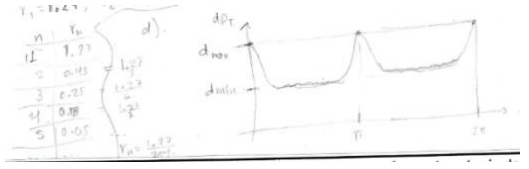
Parte I. Comprendiendo el modelo							
Intención:	Se busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada.						
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Intencionalidad	Se pretende reconocer el comportamiento del movimiento de los puntos sobre cada circunferencia. Para esta pregunta es probable que la idea de velocidad angular genere dificultades, esto se evidenció en el pilotaje y las diferentes puestas en escena; debido a que la concepción de radian en sí misma provoca dificultades según se ha reportado en distintas investigaciones (Akkoc, 2008; Moore, 2009).						
¿Qué hace?	Seriar los valores de los ángulos en la tabla suministrada. Comparar los valores siguientes con el estado inicial.	Seriar los valores de los ángulos en la tabla suministrada.	Seriar los valores de los ángulos en la tabla suministrada.	Seriar los valores de los ángulos en la tabla suministrada.	Seriar los valores de los ángulos en la tabla suministrada. Identificar los parámetros en una noción física conocida. Geometriz la relación entre el ángulo y la distancia recorrida.	Seriar los valores de los ángulos en la tabla suministrada.	Seriar los valores de los ángulos en la tabla suministrada.
¿Cómo hace?	Completando la tabla proporcionada Considerando que el ángulo es el resultado de un ángulo inicial más el resultado del movimiento respecto del tiempo.	Completando la tabla proporcionada.	Completando la tabla proporcionada.	Completando la tabla proporcionada.	Completando la tabla proporcionada Utilizando la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo. Identificando una figura geométrica conocida sobre la cual trabajar.	Completando la tabla proporcionada.	Completando la tabla proporcionada.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) El ángulo es la suma de un ángulo inicial más el cambio del ángulo, dicho cambio es la velocidad angular por el tiempo.	No presenta explicaciones.	No presenta explicaciones.	No presenta explicaciones.	(A) La velocidad es igual a la distancia (angular) recorrida dividida por el tiempo. (A) Considerando el sector circular como un triángulo equilátero y utilizando la ley de cosenos.	(A) Considerando la velocidad del punto y haciendo aumentos de uno en uno en el tiempo a partir de cero.	(A) Considerando la velocidad del punto y haciendo aumentos de uno en uno en el tiempo a partir de cero.
Pregunta b	$(x_1, y_1) = \frac{4}{\pi} \left(\cos\left(\frac{1rad}{mes}t\right), \text{Sen}\left(\frac{1rad}{mes}t\right) \right)$ $(x_2, y_2) = \frac{4}{\pi} \left(\cos\left(\frac{1rad}{mes}t\right), \text{Sen}\left(\frac{1rad}{mes}t\right) \right) + \frac{4}{3\pi} \left(\cos\left(\frac{3rad}{mes}t\right), \text{Sen}\left(\frac{3rad}{mes}t\right) \right)$ $d_{TP} = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{10}{9} + \frac{2}{3} \cos\left(2\frac{rad}{mes}t\right)}$ 					<p>[VE3]-2-[00:15:58] H3: Ya tienes el ángulo ese si lo tienes. Y lo tienes en radianes y ya con obtener (3) ¿el radio, no? M3: Sí, pero ya utilizar la distancia de (3) la::: ecuación de la distancia entre dos puntos (3) si tienes las coordenadas, ¿no? H3: ¿Y este si lo sabes? M3: ¿Qué? H3: Pues si supieras este entonces ya sabes x. M3: No, no la sé. H3: Sí, o sea imagínate que esto es R, y te pregunto que si sabes esto y esto, pero si sabes esto entonces ya sabes x_1 y y_1, porque son las coordenadas del punto R. M3: ¿La distancia? H3: Sabes las coordenadas del punto R respecto a t que está= [VE3]-2-[00:16:38]- M3 interrumpe a H3 y vuelve a leer en voz alta la pregunta planteada y continúan dialogando. [VE3]-2-[00:16:56] M3: O sea que esto es, el ángulo es t, y este es::: $3t$, ¿no? Ah::: H3: Pero primero hay que encontrar donde está este con las puras coordenadas. M3: En dónde estaría (incomprensible, 1, ¿R?) H3: ¡Ajá! Con las coordenadas. [VE3]-2-[00:17:40] M3: Ah::: tienes el radio, ¿no? H3: No. M3: Sí::: el radio de la circunferen= H3: =Sí, sí. M3: Ah::: entonces con eso sale. Mira, lo que decía Pachequito. H3: Todo lo haces triángulos rectángulos. M3: Ahí está. A poco no, a poco no lo estás haciendo triángulos rectángulos. H3: Sí, sí está bien triangulados, bien triangulados. [VE3]-2-[00:18:23] M3: Tienes los radios. H3: Oye, entonces el tiempo t (2) el tiempo t, este primero de aquí, bueno sí el tiempo t está en el lugar de t ¿no? Para el primer círculo y el radio siempre va a ser $\frac{4}{\pi}$ M3: ¡Ajá! H3: Entonces ¿qué sería aquí este? M3: Sería= H3: =x_1 sería [el seno] M3: [el coseno] si quieres para x_1 es el coseno de t. H3: Sí, es cierto. M3: Es igual a x_1 sobre $\frac{4}{\pi}$, ¿no? [VE3]-2-[00:28:51] H3: Ah entonces te digo que podríamos hacer un origen aquí y luego sacar las coordenadas aquí. M3: Respecto a ese origen. H3: ¡Ajá! Y ese sería respecto a x_1 y a x_2. Entonces lo que tú buscas es esto ¿no? M3: ¡A:::y! A ver. H3: Lo que se me ocurre es que tienes esto y si tu buscas estas coordenadas, ¿ajá? Ujú. M3: Entonces eso sería lo mismo que la componente de aquí más lo de aquí a aquí, ¿no? M3: Pero es que x_2 sería la componente de x_1 [más el cachito de este nuevo, ¿no?] H3: [Más el cachito, exacto] M3: Ahora sí, vamos. [VE3]-2-[00:33:24] M3: No, pero ya tienes de aquí, ¿no? x_2 y y_2, entonces con la de la distancia. H6: No, porque aquí tienes esta y este está chueco. M3: No, pero con la distancia entre dos puntos, ya conoces las coordenadas de esta y esta está en el origen. H6: ¿De T a P? M3: ¡Ujú! H6: Ah de T a P. H3: ¡Ajá! y eso ya te lo da para el tiempo t. H6: Pues sí, sí, sí. [VE3]-2-[00:34:33] H3: Sí, tiene sentido porque estás en la norma común. H6: Sí, sí, sí. H3: ¡Ah! tienes razón, entonces sería nada más este la norma= M3: x_2 al cuadrado menos, más= H3: =O sea la norma de este [vector] M3: [es más o menos, es más ¿no?</p>	<p>[VE3]-2-[01:00:18]- M3 pasa a la pizarra a responder respecto de las coordenadas de R. Primero dibuja</p>  <p>M3: Bueno, entonces, aquí dice que en un tiempo t, entonces ya sabemos va a ser un ángulo de t y además hasta arriba decía que el radio de::: la primera circunferencia es 4π, 4 sobre π, entonces utilizando trigonometría, entonces se puede calcular el de aquí ((señala la distancia en el eje X)) y el de acá ((señala la distancia en el eje Y)). Entonces quedaría así ((escribe en la pizarra))</p>  <p>P: ¡Ajá! ¿alguna otra idea? ¿algún otro argumento que permita hacer lo mismo? (7) ¿O usaron el mismo, exactamente el mismo argumento? H1: Yo tengo un comentario. P: ¿Ajá? H1: (x)Que el ángulo ahí si funciona con t porque la velocidad angular es uno y el tiempo es t meses, pero en general habría que poner ángulo θ, por ejemplo ¿no? Y θ sería igual a velocidad angular por el tiempo. [VE3]-2-[01:04:18]- H1 pasa a la pizarra a responder respecto de las coordenadas de P. Primero escribe:</p>  <p>H1: Si quisiera hacer esto en coordenadas polares. P: ¿Ujú? H1: (Incomprensible, 1) lo pone como vectores para especificar el punto (x,y) y en este caso el r n-ésimo sería igual a 4π por uno entre un número impar. ¿Ujú? P: Así nos lo dan al principio, dice que varía primero 4π, y luego 4 entre 3π, y 4 entre 5π, y en general sería sobre los impares, empezando desde el uno. Y el, vamos a ver la fórmula, el θ n-ésimo sería la velocidad angular n-ésima multiplicado por el tiempo, y es sustituyendo estos aquí ((señala la primera ecuación que escribió)), ah bueno, la velocidad angular es, varía con los impares, en el primero es uno, sigue tres y así. Sustituyendo aquí ((se refiere a la primera ecuación que escribió)), puedo sacar el 4π en::: todos. [VE3]-2-[01:04:18]- H1 pasa a la pizarra a responder respecto de las coordenadas de P. Primero escribe:</p>  <p>P: ¿Algún otro argumento? Él lo hizo con suma de vectores. ¿Sí ven el argumento? H3: (x)Tengo, no es exactamente una manera distinta, me voy a aprovechar aquí un poquito del dibujo de la compañera. Entonces, si suponemos que tenemos otro círculo aquí, para que ya sea el caso de las dos circunferencias, y un punto P sobre la circunferencia, entonces queremos ver sus coordenadas respecto al centro ¿no? Aquí donde está la T.</p>  <p>¡Ajá! Entonces yo noté, por ejemplo, que ya habíamos calculado esto ((se refiere a las coordenadas de R)), era sencillo, pero entonces si esto es este::: x_1 podemos ver que de aquí ((se refiere a la posición de x_1)) a::: el lugar donde está ubicado el punto del que queremos saber su distancia, es una pequeña distancia x, y tendríamos que la coordenada respecto al origen del punto que queremos sería x_2 igual a esta primer coordenada que ya</p>

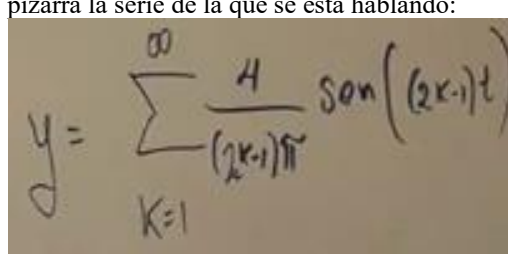
Parte I. Comprendiendo el modelo							
Intención: Se busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta c	<p>Se tienen las coordenadas:</p> $(x_1, y_1) = \frac{4}{\pi} \left(\cos\left(\frac{1\text{rad}}{\text{mes}}t\right), \text{Sen}\left(\frac{1\text{rad}}{\text{mes}}t\right) \right)$ $(x_2, y_2) = \frac{4}{\pi} \left(\cos\left(\frac{1\text{rad}}{\text{mes}}t\right), \text{Sen}\left(\frac{1\text{rad}}{\text{mes}}t\right) \right) + \frac{4}{3\pi} \left(\cos\left(\frac{3\text{rad}}{\text{mes}}t\right), \text{Sen}\left(\frac{3\text{rad}}{\text{mes}}t\right) \right)$ $(x_3, y_3) = \frac{4}{\pi} \left(\cos\left(\frac{1\text{rad}}{\text{mes}}t\right), \text{Sen}\left(\frac{1\text{rad}}{\text{mes}}t\right) \right) + \frac{4}{3\pi} \left(\cos\left(\frac{3\text{rad}}{\text{mes}}t\right), \text{Sen}\left(\frac{3\text{rad}}{\text{mes}}t\right) \right) + \frac{4}{5\pi} \left(\cos\left(\frac{5\text{rad}}{\text{mes}}t\right), \text{Sen}\left(\frac{5\text{rad}}{\text{mes}}t\right) \right)$ $r = \frac{4}{\pi} \sqrt{\left(\cos\left(\frac{1\text{rad}}{\text{mes}}t\right) + \frac{4}{3\pi} \cos\left(\frac{3\text{rad}}{\text{mes}}t\right) + \frac{4}{5\pi} \cos\left(\frac{5\text{rad}}{\text{mes}}t\right)\right)^2 + \left(\text{Sen}\left(\frac{1\text{rad}}{\text{mes}}t\right) + \frac{4}{3\pi} \text{Sen}\left(\frac{3\text{rad}}{\text{mes}}t\right) + \frac{4}{5\pi} \text{Sen}\left(\frac{5\text{rad}}{\text{mes}}t\right)\right)^2}$	<p>De manera análoga se repite el proceso de la pregunta b) se tiene:</p> $\vec{r} = \frac{4}{\pi} \left[\left(\cos t + \frac{\cos 3t}{3} + \frac{\cos 5t}{5} \right) \hat{i} + \left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} \right) \hat{j} \right]$	$d_{PT}(t) = \frac{4}{\pi} \sqrt{\left(\cos t + \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{1}{5} \cos 5t \right)^2 + \left(\text{sen} t \right)^2}$	<p>En la zona muy análoga al caso de los anteriores, observamos que hay que sumar los contributos de la misma componente</p> $x = \frac{4}{\pi} \cos(5t) \text{ o los componentes ya obtenidos}$ $\Rightarrow \vec{r} = \frac{4}{\pi} \left[\left(\cos t + \frac{\cos 3t}{3} + \frac{\cos 5t}{5} \right) \hat{i} + \left(\text{Sen} t + \frac{\text{Sen} 3t}{3} + \frac{\text{Sen} 5t}{5} \right) \hat{j} \right]$		<p>[VE3]-2-[00:40:06]</p> <p>H3: Aquí va a ser exactamente lo mismo.</p> <p>M3: Pero con más términos.</p> <p>H3: No..., exactamente lo mismo.</p> <p>(6)</p> <p>M3: Sólo que aquí van a haber tres.</p> <p>H3: Sí, pero ¿cuál va a ser el que sigue?</p> <p>M3: Cinco.</p> <p>H3: Coseno de 5t sobre 5.</p> <p>M3: Sí [(incomprensible, 4)]</p> <p>H6: [(Incomprensible, 2)]</p> <p>H3: Ya tienes esto, ahora le tienes que sumar=</p> <p>M3: =El otro y la coordenada=</p> <p>H3: Pero es cinco π:::</p> <p>M3: ¡Ajá!</p> <p>H3: Coseno de 5π es lo mismo.</p> <p>M3: ¡Ajá!</p> <p>H3: Entonces al final de cuentas tú vas a sacar el cuatro π::: y te va a quedar seno de cinco veces t.</p>	<p>No hubo discusión grupal respecto de esta pregunta.</p>
Intencionalidad	Se busca construir las primeras tres sumas parciales de dos series trigonométricas, pero con un significado asociado al fenómeno -las coordenadas del planeta- que permite determinar la distancia del planeta a la Tierra. Se espera que los estudiantes recurran a dibujar triángulos rectángulos sobre las figuras proporcionadas para identificar las razones trigonométricas involucradas, aunque para hacer la generalización a cualquier valor del tiempo se requiera que la función trigonométrica esté construida previamente (Montiel, 2011).						
¿Qué hace?	<p>Identificar un sistema de referencia adecuado.</p> <p>Comparar los casos conforme se agregan circunferencias.</p> <p>Medir la distancia del planeta a la tierra.</p>	<p>Geometrizar la posición del punto sobre la circunferencia.</p> <p>Comparar los casos conforme se agregan circunferencias.</p> <p>Medir la distancia del planeta a la tierra.</p>	<p>Identificar un sistema de referencia adecuado.</p> <p>Comparar los casos conforme se agregan circunferencias.</p> <p>Medir la distancia del planeta a la tierra.</p>	<p>Geometrizar la posición del punto sobre la circunferencia.</p> <p>Comparar los casos conforme se agregan circunferencias.</p> <p>Medir la distancia del planeta a la tierra.</p>	<p>Identificar un sistema de referencia adecuado.</p> <p>Comparar los casos conforme se agregan circunferencias.</p> <p>Geometrizar la posición del planeta respecto del sistema de coordenadas.</p> <p>Medir la distancia del planeta a la tierra.</p>	<p>Medir la distancia del planeta a la tierra.</p> <p>Geometrizar la posición del punto sobre la circunferencia.</p> <p>Identificar un sistema de referencia adecuado.</p> <p>Comparar los casos conforme se agregan circunferencias.</p>	<p>Geometrizar la posición del punto sobre la circunferencia.</p> <p>Comparar los casos conforme se agregan circunferencias.</p> <p>Identificar un sistema de referencia adecuado.</p> <p>Medir la distancia del planeta a la tierra.</p>
¿Cómo hace?	Utiliza coordenadas polares y considera los puntos como vectores en el plano. Considerando el caso como una suma de vectores. Utilizando la fórmula de norma de un vector.	Identificando una figura geométrica conocida sobre la cual trabajar. Considerando los cambios en las componentes del punto que representa al planeta. Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos.	Utiliza coordenadas polares y considera los puntos como vectores en el plano. Considerando el caso como una suma de vectores. Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos.	Identificando una figura geométrica conocida sobre la cual trabajar. Considerando los cambios en las componentes del punto que representa al planeta. Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos.	Utilizando coordenadas polares y considera los puntos como vectores en el plano. Considerando los cambios en las componentes del punto que representa al planeta. Identificando una figura geométrica conocida sobre la cual trabajar. Utilizando el teorema de Pitágoras.	Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos. Identificando una figura geométrica conocida sobre la cual trabajar. Utilizando un cambio de sistema coordenadas. Considerando los cambios en las componentes del punto que representa al planeta.	Identificando una figura geométrica conocida sobre la cual trabajar. Considerando los cambios en las componentes del punto que representa al planeta. Utilizando coordenadas polares y considera los puntos como vectores en el plano. Utilizando un cambio de coordenadas. Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Los puntos pueden considerarse vectores en el plano y parametrizarse utilizando coordenadas polares.	(A) Considerando el triángulo rectángulo que se forma y aplicando razones trigonométricas.	(A) Los puntos pueden considerarse vectores en el plano y parametrizarse utilizando coordenadas polares.	(A) Considerando el triángulo rectángulo que se forma y aplicando razones trigonométricas.	(A) Los puntos pueden considerarse vectores en el plano y parametrizarse utilizando coordenadas polares. (A) Considerando el triángulo rectángulo que se forma.	(A) Para utilizar la fórmula de la distancia entre dos puntos se necesitan las coordenadas. (A) Considerando el triángulo rectángulo que se forma y aplicando razones trigonométricas. (A) Para determinar el cambio se puede considerar un sistema de coordenadas centrado en el centro de la circunferencia que se agrega. (A) La componente siguiente es la componente anterior más una diferencia.	(A) Considerando el triángulo rectángulo que se forma y aplicando razones trigonométricas. (A) La componente siguiente es la componente anterior más una diferencia. (A) Para determinar el cambio se puede considerar un sistema de coordenadas centrado en el centro de la circunferencia que se agrega. (A) Los puntos pueden considerarse vectores en el plano y parametrizarse utilizando coordenadas polares. (A) Para utilizar la fórmula de la distancia entre dos puntos se necesitan las coordenadas.

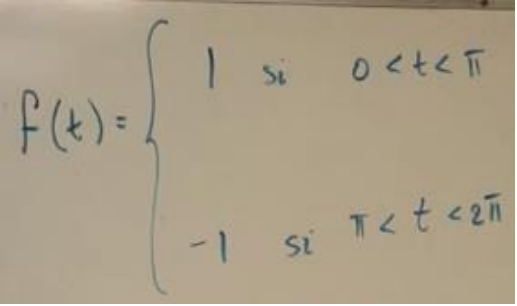
Parte II. ¿Y si agregamos más epiciclos?							
Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	<p>La trayectoria comienza a tomar una figura particular. El número de bucles aumenta al aumentar el número de circunferencias.</p> <p>En la parte central los bucles parecen juntarse más hasta formar dos líneas paralelas donde la distancia es mínima.</p> <p>La trayectoria en los laterales se alarga.</p>	<p>Conforme se le agregan mas circunferencias la parte central de la trayectoria se acerca a una recta y los extremos a circunferencias, ademas el tiempo en la parte central es mucho mas tardado que formar que los extremos.</p>	<p>Se tiende a formar una figura parecida a dos líneas paralelas unidas por arcos.</p>	<p>A medida que se agregan más circunferencias podemos observar una tendencia hacia una figura que recuerda a un "huesito", con una línea recta en la parte central y dos medios círculos en las partes extremas de la trayectoria que tienden a ser más grandes cuando agregamos más circunferencias.</p>	<p>Toman la forma definida de dos rectas secantes paralelas horizontales a la circunferencia.</p>	<p>[VE3]-2-[01:18:03]</p> <p>H3: ¿Cómo le llamarías tu a la forma? ¿qué parece?</p> <p>M3: No sé, yo le puse que en la parte central de la trayectoria se acerca ya casi a una línea recta y en los extremos como circunferencias, pues ni modo que le ponga hueso de perro (risas)).</p>	<p>[VG]-2-[01:58:28]</p> <p>P: ((Leyendo la pregunta)) ¿Cómo cambia la trayectoria del planeta conforme se agregan más y más circunferencias?</p> <p>H4: Toma una forma definida.</p> <p>P: Entonces, ¡ajá! Supuse que iban a pregunt- a explicar lo mismo, ¿verdad? ¿A qué se parece esa forma? Si claro, tiene una forma definida, pero no es la misma forma de la otra.</p> <p>H4: Como dos horizontales.</p> <p>P: Como dos horizontales:::les.</p> <p>M2: °Curva semiflor°. (21)</p>

Parte II. ¿Y si agregamos más epiciclos?							
Intención:	Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.						
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Intencionalidad	Se tiene como expectativa que el estudiante identifique que la trayectoria del planeta se estabiliza conforme se agregan más circunferencias. Se espera que la respuesta surja por sí sola con base en el trabajo realizado en la Tarea #1.						
¿Qué hace?	Comparar las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias. Observar los cambios en la forma de la trayectoria al agregar circunferencias.	Comparar las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias. Comparar el tiempo transcurrido en recorrer distintas partes de una misma trayectoria.	Comparar las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias.	Comparar las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias.	Comparar las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias.	Comparar las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias.	Comparar las diferencias en la trayectoria al agregar circunferencias.
¿Cómo hace?	Considerando los cambios en la forma de la trayectoria para diferentes partes de esta y en forma global.	Considerando los cambios en la forma de la trayectoria de forma global.	Considerando los cambios en la forma de la trayectoria de forma global.	Considerando los cambios en la forma de la trayectoria de forma global.	Considerando los cambios en la forma de la trayectoria de forma global.	Considerando los cambios en la forma de la trayectoria de forma global.	Considerando los cambios en la forma de la trayectoria de forma global.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) La trayectoria comienza a tomar una forma específica conforme se agregan más circunferencias. (A) Conforme se agregan más circunferencias las distintas partes de una misma trayectoria se modifican.	(A) La trayectoria comienza a tomar una forma específica conforme se agregan más circunferencias.	(A) La trayectoria comienza a tomar una forma específica conforme se agregan más circunferencias.	(A) La trayectoria comienza a tomar una forma específica conforme se agregan más circunferencias.	(A) La trayectoria comienza a tomar una forma específica conforme se agregan más circunferencias.	(A) La trayectoria comienza a tomar una forma específica conforme se agregan más circunferencias.	(A) La trayectoria comienza a tomar una forma específica conforme se agregan más circunferencias.
Pregunta b	<p>EL valor de la distancia del planeta P a la Tierra oscila al agregar más circunferencias para los valores de $t = \frac{\pi}{12}$, $t = \frac{3\pi}{4}$.</p> <p>El rango de oscilación va disminuyendo al agregar más circunferencias.</p> <p>Cuando P está en los puntos más alejados, es decir, en $t = \pi$ y $t = 2\pi$, la distancia aumenta al aumentar el número de circunferencias.</p>	<p>Para $t = \frac{\pi}{12}$ Entre más circunferencias se agregan la distancia PT va aumentando.</p> <p>Para $t = \frac{3\pi}{4}$ A un tiempo la distancia PT aumenta hasta 1.19 después bajan a 1.13 y toma valores de 1.11, 1.14 y 1.17 y se va a ir a ir al proceso volviendo a 1.13 y varían entre 1.14, 1.15 y así.</p> <p>Para $t = \pi$ Entre más circunferencias se agregan la distancia PT va aumentando.</p> <p>Para $t = 2\pi$ De igual forma entre más circunferencias se agregan más aumenta PT.</p> <p>En general en general en cada radio de t tiene un movimiento distinto.</p>	<p>En $t = \pi/12, 3\pi/4$ las funciones seno y coseno no alcanzan valores extremos ni 0. Pero la distancia converge.</p> <p>En $t = \pi, 4\pi$ la función seno vale 0 y coseno -1, 1 respectivamente. La función de distancia se maximiza.</p> <p>En general, hay 2 máximos y 2 mínimos de distancia según el tiempo.</p>	<p>Para $t = \frac{\pi}{12}$ observamos un fenómeno de la estabilidad, se agregan las circunferencias disminuye el planeta a un valor específico.</p> <p>Para $t = \frac{3\pi}{4}$ observamos una repetición de oscilación alrededor de un punto muy específico, observamos convergencia a un punto específico.</p> <p>Para $t = \pi$ observamos el punto P en la misma posición respecto a la horizontal, al girar el círculo P, $t = 2\pi$ es similar solo que al de los lados.</p> <p>Para $t = 2\pi$ observamos un fenómeno de convergencia a un punto específico.</p>	<p>$t = 2\pi$ para $t = \frac{\pi}{12}$, mientras más circunferencias se añaden, la sucesión de puntos P al tiempo t, forma una espiral hacia un cierto calor fijo (parecido a una serie de Fibonacci)</p> <p>Para $t = \frac{3\pi}{4}$, la sucesión de puntos vuelve a tomar el valor de una espiral, pero ahora el punto P, termina más cerca de la tierra y se acerca en menos puntos que en para el tiempo anterior.</p> <p>Para $t = \pi$ la sucesión de puntos P se aleja cada vez más del punto P, lo mismo para $t = 2\pi$.</p> <p>Así, para cualquier t, mientras más se aleje de $t = \pi$ y $t = 2\pi$, el punto P, mientras más circunferencias se agreguen, se acercará al punto P.</p>	<p>[VE3]-2-[01:29:44] M3: ¿En qué parámetro estás? H3: Ah, es $\frac{\pi}{12}$ M3: (Incomprensible, 2) H3: (incomprensible, 2) M3: Que aumenta como si fuera una (2) ¿es serie de Fibonacci? Porque va así (hace un sonido para explicar la forma).</p> <p>[VE3]-2-[01:31:34] H6: ¿Tú qué viste de esos? M3: Pues cómo va aumentando, pero cómo aumenta de distintos lados. H6: (x)Quiero encontrar algo analítico aquí, pero no me da.</p> <p>[VE3]-2-[01:31:34]- ¿refiriéndose a $t = \pi$ y $t = 2\pi$? M6: ¡Ay! Si es cierto, si oscila, con razón no estaba loca. En tres cuartos de π, es que se me hizo raro que ese no aumentaba tanto, oscilaba mira, y sí, solamente baila. H3: No es cierto, a ver.</p> <p>[VE3]-2-[01:34:56] H6: ¿No hay un patrón en general ahí? M3: No. H6: Como que va convergiendo a un punto. (10) Está oscilando más que todo, pero va de manera (2) uniforme.</p> <p>[VE3]-2-[01:37:11] H3: Y este 2π solo se alarga ¿verdad? M3: ¡Ajá! Por la, por la derecha H3: ¿Crees que tienda a algún punto en específico? Porque, por ejemplo, este, este que está aquí ya sabe que está en la parte que se hace una línea recta, ¿no? Esa casi no da (incomprensible, 1) Entonces este de acá, también tiende digamos a un punto, pero este de acá crees que también se acerque a un punto si agregaras una circunferencia. M3: No sé, yo creo que, yo siento que ese se va a seguir estirando, y estirando, y estirando. H3: ¿Mmm? M3: Yo siento que sí. H6: Huy mira, si está interesante esto, si es una serie de Fourier, ¿no? M3: ¿Eh? H6: Las series de= M3: =Es que es lo que le decía a él, que este se comporta de otra manera distinta. No sé si sea, la manera natural. H6: No, de hecho, si se comporta igual. Has de cuenta. M3: No, porque la otra hacía esto ((hace un sonido para hablar de la forma)). H6: No fijate, en un instante de t cualquiera agreguemos dos circunferencias, has de cuenta que es lo mismo, exactamente (incomprensible, 1) o tienes tres, tienes exactamente el mismo, entonces fijate este es el primer caso en el que estábamos, este es el caso que analizamos, ¿lo recuerdas? M3: Mmm, ah si tienes razón, sí es la misma.</p>	<p>[VG]-2-[02:02:31] P: ¿Qué fue lo que hicieron? (5) ¿Le movieron acá? ((Los alumnos responden afirmativamente)) Entonces por ejemplo para $t = \frac{\pi}{12}$ ¿qué respondieron? H4: Primero tiene como esa forma (x)de (x)espiral P: ¡Ajá! H4: Converge a un valor fijo. P: Y converge a un valor fijo, ajá ¿qué más? Entonces va tomando como esa forma de espiral y parece que converge a un valor. H6: Pues sí, como que va oscilando, ¿no? Oscila entre un valor y siempre va ((con su mano hace un movimiento con el dedo que va de un lado a otro)) H3: No::, porque ves que se forma una espiral ((hace el movimiento en espiral con su mano)) H6: O sea sí, pero si lo ves digamos en la manera lineal como que va oscilando hasta llegar a un valor. P: ¡Ujú! Ok, entonces sí, va formar como una espiral, pero se va moviendo como alrededor (x)de algún valor específico. ((Los estudiantes asienten con la cabeza)) Ok. ¿En $t = \frac{3\pi}{4}$ sucede lo mismo, o? ((Varios estudiantes dicen que No)) ¿No? Sucede otra cosa, vamos a ver, $\frac{3\pi}{4}$ a ver, qué pusieron que sucedía antes de que lo veamos. M3: Primero aumenta y luego se queda oscilando en un valor. P: $\frac{3\pi}{4}$ aquí está, es 2.36 más o menos, ok entonces veamos, entonces primero aumenta, empieza en 1.27. M3: ¡Ajá! Aumenta y ya después va, (x)se queda oscilando. H4: Pero eso es lo mismo que la otra, ¿no? H3: Sí, si es lo mismo. H6: Pero es diferente, a no sí. M3: No, es que se queda como en un parámetro. P: Como en un parámetro. Porque esta es como en uno uno, uno dieciocho, diecisiete M3: Y baja y sube, y oscila. P: Baja y sube, ¿Cómo que sí se comporta similar, no? ((varios estudiantes responden que sí)) Como que oscila también igual alrededor de algún, de un valor.</p> <p>[VG]-2-[02:04:44] P: ¿En $t = \pi$ y $t = 2\pi$? M2: Crecen (incomprensible, 1). M3: Crecen. H4: Crece a la suma del radio, los radios. H6: Ah, pero es máximo ¿verdad? P: Crecen lo mismo nada más que una está aquí y la otra está de este otro lado, ¿verdad? ¿Sí? ((H6 asiente con la cabeza)) ¿Entonces qué pasa ahí, entonces con la, con la distancia del planeta? M3: Aumenta= H6: =Se va haciendo más grande. P: ¿Siempre aumenta?</p>

Parte II. ¿Y si agregamos más epiciclos?							
Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
						<p>H6: Entonces fíjate al agregar cuatro, tendrías este (incomprensible, 1, ¿radio?) y obviamente converge a algún punto.</p>	<p>H6: ¡Ajá! Siempre se va a alejar. P: ¿Tendrá cota? ¿Será acotado o no? H1: ¡Sí! H3: Yo creo que sí. H1: Hay otra serie, para:::, bueno para valores finitos, como ahí lo aproxima. Eh, (x)la serie, cuál era, suma parcial. P: ¡Ujú! H1: La serie trigonométrica, de hecho, esta (x)no cumple aquí, pero para valores finitos si converge, se estaría estirando ((explica con el movimiento de sus manos)) P: Ok, otra vez, la convergencia es algo de infinitud, ¿sí? H1: ¡Ajá! (x)No converge. P: Entonces= H3: (Incomprensible, 1) H1: La horizontal H3: ¡Ajá! H1: O sea, la vertical sí, pero la horizontal se va estirando indefinidamente ((explica con el movimiento de sus manos)) H6: Pero es que van decreciendo los radios cada vez más, o sea (x)si hay un valor al que tienen que= H3: =Pero van a seguir sumando algo. H1: No, porque ya vieron (x)como definimos los radios. H6: Es como la serie $\frac{1}{2^n}$, o sea va creciendo va sumando algo, pero si hay un valor al que igual llegas H1: (x)En la tarea pasada definieron al radio como, o sea decrecía conforme a los impares, y la de suma de impares no converge, ni la de todos los naturales, ni pares ni impares converge. P: Entonces aquí lo que está pasando es que estamos sumando [los radios]. H1: [Los radios] y el siguiente es:::, decrece conforme impares, ¿no? P: Entonces, como que unos dicen que sí y otros dicen que no. H6: Pues yo digo que sí converge. P: Sigues convencido de que sí converge.</p> <p>[VG]-2-[02:07:10] H9: Si convergería, porque estaría acotada. P: ¿Por qué? H9: Porque:::, o sea, para valores ya muy grandes, el radio sería cada vez más pequeño, entonces llegaría a un punto en el que como que no estaría sumando nada, entonces, si le sumas algo más grande, ya estaría acotada y crecería siempre, entonces tiene que converger. P: OK= H9: =Bueno también dependería de la relación entre los radios, porque= H1: =Pero hay series decrecientes que no convergen. H3: ¡Ajá::! H1: Como la de los naturales, $\frac{1}{n}$ no converge. H9: No, sí, más bien dependería de la relación entre los radios, porque aquí en este ejercicio no te lo está especificando, que es igual al anterior, entonces podría converger o no converger.</p>
Intencionalidad	Se pretende propiciar un análisis numérico de la variación de una suma parcial a otra, se busca que el estudiante se percate que la trayectoria del planeta no es estable para todos los valores del tiempo.						
¿Qué hace?	Comparar la distancia del planeta a la Tierra al agregar circunferencias.	Comparar la distancia del planeta a la Tierra al agregar circunferencias.	Evaluar los valores del tiempo en los argumentos de seno y coseno.	Comparar la distancia del planeta a la Tierra al agregar circunferencias.	Comparar la distancia del planeta a la Tierra al agregar circunferencias.	Comparar la distancia del planeta a la Tierra al agregar circunferencias.	Comparar la distancia del planeta a la Tierra al agregar circunferencias.
¿Cómo hace?	Considera los cambios en el valor numérico de la distancia al agregar circunferencias.	Considera los cambios en el valor numérico de la distancia al agregar circunferencias.	Revisando si para dichos valores seno y coseno alcanzan valores críticos (-1 o 1) o cero.	Considera los cambios en la posición del punto al agregar circunferencias.	Considera los cambios en la posición del punto al agregar circunferencias.	Considera los cambios en la posición del punto al agregar circunferencias. Considera los cambios en el valor numérico de la distancia al agregar circunferencias.	Considera los cambios en la posición del punto al agregar circunferencias. Considera los cambios en el valor numérico de la distancia al agregar circunferencias.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Para cierto tiempo, el valor de la distancia oscila cada vez más cerca de un valor específico al agregar circunferencias. (A) Para cierto tiempo, el valor de la distancia aumenta conforme se agregan circunferencias.	(A) Para cierto tiempo, el valor de la distancia oscila alrededor de ciertos valores al agregar circunferencias. (A) Para cierto tiempo, el valor de la distancia aumenta conforme se agregan circunferencias.	(A) Si seno y coseno no toman valores críticos para valores específicos del tiempo, entonces la distancia converge. (A) Para un tiempo igual a los múltiplos de π la distancia se maximiza.	(A) Para cierto tiempo, el planeta oscila cada vez más cerca de un punto específico al agregar circunferencias. (A) Para cierto tiempo, el planeta se aleja del centro de la circunferencia conforme se agregan circunferencias.	(A) Para cierto tiempo, el planeta oscila cada vez más cerca de un punto específico al agregar circunferencias. (A) Para cierto tiempo, el planeta se aleja del centro de la circunferencia conforme se agregan circunferencias.	(A) Para cierto tiempo, el planeta oscila cada vez más cerca de un punto específico al agregar circunferencias. (A) Para cierto tiempo, el planeta se aleja del centro de la circunferencia conforme se agregan circunferencias. (A) Para cierto tiempo, el valor de la distancia oscila cada vez más cerca de un valor específico al agregar circunferencias.	(A) Para cierto tiempo, el planeta oscila cada vez más cerca de un punto específico al agregar circunferencias. (A) Para cierto tiempo, el planeta se aleja del centro de la circunferencia conforme se agregan circunferencias. (A) Para cierto tiempo, el valor de la distancia oscila cada vez más cerca de un valor específico al agregar circunferencias. (A) Para cierto tiempo, el valor de la distancia aumenta conforme se agregan circunferencias.
Pregunta c	$d_{PT} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n r_i \cos((2i-1)t)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n r_i \sin((2i-1)t)\right)^2}$ <p>Con $r_i = \frac{127}{2i-1}$</p> 	$d_{PT} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n r_i \cos((2i-1)t)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n r_i \sin((2i-1)t)\right)^2}$ 	$d_{PT}(t) = \frac{4}{\pi} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} \cos((2i-1)t)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} \sin((2i-1)t)\right)^2}$ <p>$i = 1, 2, \dots, n.$</p>		$r = \frac{4}{\pi} \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{\cos(2n-1)t}{2n-1}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$	<p>[VE3]-2-[01:55:57] H3: Pues sí, es lo que se me ocurre. Es hacer exactamente lo mismo, pero ahora con esa madre, el valor del radio y el valor de a velocidad angular. (incomprensible, 2) La velocidad es angular en términos generales, ¿no? M3: ¡Ujú! H3: Entonces la imagen respecto de la horizontal sería esta, sería velocidad por tiempo.</p> <p>[VE3]-2-[01:57:46] H3: Creo que ya "M3" ((se refiere a M3 por su nombre)). M3: A ver. H3: Sabemos. Tienes aquí el primer punto y eso es R_1. M3: ¡Ujú! H3: El coseno de la primera velocidad angular, que ya sabes quién es, igual trae el seno, ¿no? Aquí también este la coordenada luego de (incomprensible, 5) entonces eso, crearía tu primer punto aquí. Y luego como lo habíamos hecho la otra vez, bueno en el pasado, tienes que saber el otro radio, tienes que saber la velocidad angular, pero es el mismo tiempo, entonces vas a tener que sumar estos, lo mismo para los n. M3: Entonces nos quedaría la raíz.</p>	<p>[VG]-2-[02:09:26]- El estudiante H2 pasa a resolver en la pizarra. Y escribe lo siguiente:</p>  <p>Luego asegura: [VG]-2-[02:10:04] H2: Si no sabemos los radios ni su velocidad angular, esta es la forma general. H1: Dice que retomemos los ejercicios pasados. P: ¡Ajá! En este sí, en este, en este en particular cómo sería, digamos (la) fórmula. H9: Cuatro entre $2n-1$ ((sigue escribiendo en la pizarra la fórmula con ayuda de los demás estudiantes))</p>  <p>[VG]-2-[02:11:35] P: ¿Qué representarían estos $\frac{4}{(2n-1)\pi}$? M2: Los radios ((junto con M2 la mayoría indica que los radios)) P: El radio de la circunferencia (3) ¿Y lo que está adentro, el $(2n-1)t$? H3: Pos, el ángulo. P: El ángulo que va cambiando, ¿verdad? H1: Velocidad angular.</p>

Parte II. ¿Y si agregamos más epiciclos?							
Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Intencionalidad	Matematizar el fenómeno como una generalización de los resultados obtenidos en la Tarea #2 - Parte I.						
¿Qué hace?	Identificar la regularidad a partir de los primeros términos de la suma.	Identificar la regularidad a partir de los primeros términos de la suma.	Identificar la regularidad a partir de los primeros términos de la suma.	Identificar la regularidad a partir de los primeros términos de la suma.	Identificar la regularidad a partir de los primeros términos de la suma.	Identificar la regularidad a partir de los primeros términos de la suma.	Identificar la regularidad a partir de los primeros términos de la suma.
¿Cómo hace?	Aplicando la misma estrategia de solución que en los resultados obtenidos en la Tarea #2 – Parte I. Utilizando la fórmula de norma de un vector.	Agregando los términos necesarios a las fórmulas construidas en la Tarea #2 – Parte I.	Agregando los términos necesarios a las fórmulas construidas en la Tarea #2 – Parte I.	Aplicando la misma estrategia de solución que en los resultados obtenidos en la Tarea #2 – Parte I. Agregando los términos necesarios a las fórmulas construidas en la Tarea #2 – Parte I.	Agregando los términos necesarios a las fórmulas construidas en la Tarea #2 – Parte I.	Aplicando la misma estrategia de solución que en los resultados obtenidos en la Tarea #2 – Parte I. Agregando los términos necesarios a las fórmulas construidas en la Tarea #2 – Parte I.	Aplicando la misma estrategia de solución que en los resultados obtenidos en la Tarea #2 – Parte I. Agregando los términos necesarios a las fórmulas construidas en la Tarea #2 – Parte I.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Gráficamente muestra que extiende los casos con una, dos y tres circunferencias, para el resto de los términos.	No presenta argumentos.	No presenta argumentos.	(A) Gráficamente muestra que extiende los casos con una, dos y tres circunferencias, para el resto de los términos.	No presenta argumentos.	(A) Teniendo los datos de radio y velocidad, se hace lo mismo que cuando se calculó la fórmula para una, dos y tres circunferencias.	(A) Teniendo los datos de radio y velocidad, se hace lo mismo que cuando se calculó la fórmula para una, dos y tres circunferencias.
Pregunta d	Su comportamiento puede considerarse oscilatorio. Alcanza un valor máximo y un valor mínimo. 	Se debe conocer el radio de las circunferencias y su velocidad angular para poder determinar la distancia del punto P a la Tierra.	Es una función en la que los máximos y mínimos se pueden intuir sin mucha dificultad (múltiplos de pi y múltiplos impares de pi medios, respectivamente). Pero analíticamente es difícil de demostrar. Es una función periódica.	Es necesario conocer el radio de cada círculo utilizado en el modelado de la trayectoria, así como su velocidad angular para poder determinar la forma a la que tenderá la trayectoria cuando agreguemos más círculos, este hecho se sigue de que estos parámetros alteran la forma de la trayectoria final. Sería conveniente que tanto los radios como las velocidades formen una progresión para poder formar trayectorias interesantes.	Para empezar, siempre converge a un valor , y este valor es más pequeño conforme t se aleje que pi y 2pi, pues la parte sinusoidal se anula, la parte del coseno se vuelve 1 y sólo se suman los términos del numerador y P se aleja horizontalmente.	No hubo interacción al responder a esta pregunta.	[VG]-2-[02:14:19] P: Bueno entonces esa fórmula ¿Qué relación tendría con eso? Digamos, con la estabilidad y con la, y con eso que respondieron aquí arriba. H4: Nada más que lo describe= P: ¿Qué puedes decir del comportamiento de esta fórmula, a partir de eso que respondieron ahí en esas preguntas? H1: Ah:: Es que la fórmula explica::: la forma que toma la figura . P: ¡Ujú! ¿Y respecto de lo que respondieron arriba de va tomando una forma definida? H4: Habría que ver los valores de convergencia. Meter al t en la fórmula y averiguar la convergencia. P: ¡Ajá! Por ejemplo, una cosa que podrían decir es, si ponen $t = \frac{\pi}{12}$ ¿qué le pasaría a esa fórmula? ¿sería convergente o divergente? M2: Convergente. H3: Convergente. H1: ¿Cuál? P: A esta. M2: [Converge]. H1: [Convergente]. P: ¿Si ponen $t = \frac{3\pi}{4}$? H3: Converge. P: También. Donde no tenemos, este, un acuerdo es en $t = \pi$ y $t = 2\pi$, ¿cierto? ((H3 asiente con la cabeza))
Intencionalidad	Este inciso conduce hacia la interpretación de la matemática involucrada en el fenómeno físico, relacionar la estabilidad de la trayectoria el planeta con el límite de las sumas parciales involucradas en la fórmula calculada en el inciso c. Esto es de suma importancia, pues en el trabajo de Fourier siempre hubo un ir y venir entre el fenómeno físico y la matemática involucrada, para validar la segunda en la primera (Farfán, 2012; Farfán & Romero, 2017).						
¿Qué hace?	Graficar la distancia del planeta a la tierra respecto del tiempo. Reconocer valores máximos y mínimos.	Identificar los parámetros necesarios para matematizar.	Distinguir las características de la fórmula.	Identificar los parámetros necesarios para matematizar.	Distinguir las propiedades de la gráfica en la fórmula.		Distinguir las propiedades de la gráfica en la fórmula.
¿Cómo hace?	Considerando el movimiento oscilatorio y acotado.	Considerando los parámetros involucrados en la fórmula obtenida en la pregunta anterior.	Considerando la fórmula como una función.	Considerando los parámetros involucrados en la fórmula obtenida en la pregunta anterior.	Considerando la convergencia y la forma de la trayectoria.		Considerando la convergencia y la forma de la trayectoria.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Su comportamiento puede considerarse oscilatorio. Alcanza un valor máximo y un valor mínimo.	(A) Conociendo los radios y las velocidades de los puntos se puede calcular la fórmula de la distancia del planeta a la Tierra.	(A) Es una función acotada y periódica.	(A) Conociendo los radios y las velocidades de los puntos se puede determinar la forma de la trayectoria del planeta.	(A) Converge para cada valor de t, este valor es más pequeño conforme t se aleje que π y 2π , justo en esos valores P se aleja horizontalmente.		(A) Converge para cada valor de t, sin tener certeza de lo que sucede en $t = \pi$ y $t = 2\pi$.
Pregunta c.1	Tiene un valor mínimo en π que decrece cuando aumenta el número de circunferencias. En los valores de $t = 0$, $t = 2\pi$, crece cuando aumenta el número de circunferencias.	Se comporta como una serie de Fourier de Cosenos, que dependerá de la velocidad angular, ya que inicia en un punto máximo asclanza un mínimo y vuelve a recuperar un punto máximo en un determinado.	Conforme aumenta el número de círculos. Va desde el valor máximo hasta el mínimo dentro del intervalo $((2n - 2)\pi, (2n - 1)\pi)$ y del mínimo al máximo dentro del intervalo $((2n - 1)\pi, 2n\pi)$.	Como una especie de serie (suma infinita) de cosenos, esto se deduce de la expresión general calculada para la distancia de T a P y de la forma de la suma parcial de abscisas cuando se tiene una sola circunferencia, la serie se deforma hasta el punto en que parece formar una especie de señal con forma de V.	Toma un valor constante en npi	[VE3]-2-[02:14:20] M3: Dice abscisas primero, ¿no? H6: Las abscisas convergen a la función periódica, ¿no? M3: Ah::: no sé. [VE3]-2-[02:14:59] H3: ¿Será que esta es una serie de cosenos y la otra una serie de senos? M3: Tendría sentido. H3: Puramente de senos y una puramente de cosenos. M3: Una serie de (incomprensible, 1) en cosenos, tendría sentido. H3: Sí, ¿no? Porque, porque ve lo que tenemos aquí una suma pura de cosenos y acá una suma pura de senos. M3: ↑Pues es lo que te dije desde hace rato↑ [VE3]-2-[02:16:04] H6: ¿A dónde converge? M3: (risas) H6: Diverge, ¿no? M3: Ah, si es cierto. No sé, es que no hemos visto convergencias así. H6: ¿Qué te pasa “M3”? ((se refiere a M3 por su nombre)) H3: Pos ahorita tienes que ver a dónde converge, es como las otras dos, la de senos se ve muy clarito que se van (x) a un valor positivo y al otro se va a otro valor negativo nada más. H6: Una se va a= H3: =Ah bueno, pero eso no quiere decir que converja verdad. M3: No:: H3: O sea que se vuelve más bien como una función escalonada. M3: ¿Si:::? ((risas)) H3: Pero la serie es diferente, ¿no? H6: Es que no es una función escalonada. H3: Sí, ¿no? La otra, la del seno. M3: La de los senos. H6: No:::, (x)no es escalonada. Lo que pasa es que esta cosa está muy chiquita, pero aquí tienes el mismo comportamiento. M3: Es que parece un seno amortiguado.	[VG]-2-[02:16:46] H7: Pues que es una función oscilante y los máximos y mínimos son la suma de los radios. P: Ok. H4: Que toma también un valor constante, ¿no? Entre 0 y π (x)las sumas de las coordenadas. H7: Pero si las abscisas no son coordenadas. H4: Ah de las abscisas, pues como quiera es continua, ¿no? La gráfica que describe. P: Ok, ¿y en π ? H3: Parece una discontinuidad. P: ¿Parece una discontinuidad? ¿de qué tipo? H4: Una divergencia, ¿no? H7: Pero aquí toma el valor de la suma de los radios, ¿no? Y no sabemos si converge o diverge. P: Ajá verdad, está esa discrepancia. Entonces, si converge ¿qué debería pasar ahí? H4: Convergería a la suma de los radios. P: ¿Y si diverge? M2: Se va ((mueve sus manos de abajo hacia arriba para explicar el comportamiento)) P: Da infinito, ¿cierto? Pero la gráfica qué es sugiere ¿qué converge o que diverge? H4: No sé, la gráfica me indica que converge. M2: Es que ahí nada más estamos probando, bueno= P: Muy poquito ((hace referencia al número de circunferencias usadas para ver la gráfica)) M2: Y se va viendo que el mínimo va bajando cada vez más. P: Ok, conforme le agregó las:: otro n, otros n's, voy a ponerle otros. Ahí en 21, voy a ponerle bastantes ya, los 25. Y lo que hizo fue bajar más, ¿verdad? Entonces conforme le agrega el n, dice “M2” ((se refiere a M2 por su nombre)), entonces, este, como que se va haciendo más hacia abajo siempre. Entonces, si le ponemos $n = 50$ probablemente esté (x)más abajo, ¿verdad? Entonces qué les dice eso ¿que es acotado o no es acotado? H1: No parece. P: Parece que no es acotado, ¿verdad? Entonces ¿converge o diverge? M3: Diverge ((junto con M3 responden varios estudiantes)) P: Pareciera, ¿verdad? Que diverge entonces. Entones podemos volver a las preguntas anteriores ¿qué pasa en $t = \pi$, con la distancia?

Parte II. ¿Y si agregamos más epiciclos?							
Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta e.2	Al aumentar el número de circunferencias la suma se acerca a 1 en el rango $(0, \pi)$, mientras que en el rango $(\pi, 2\pi)$ la suma se acerca a -1.	Se comporta como una serie de Fourier de Senos, que dependerá de la velocidad angular, ya que inicia en un punto máximo se mantiene por un intervalo de tiempo y después alcanza un mínimo donde de igual manera se mantiene constante y el proceso se repite. Comportandose como un pulso.	Conforme aumenta el número de círculos. La suma de las abscisas se vuelve igual a 1 dentro del intervalo $((2n-2)\pi, (2n-1)\pi)$ $((2n-2) - 1$ dentro del intervalo $((2n-1)\pi, 2n\pi)$.	Como una especie de serie (suma infinita) de senos, esto se sigue de la expresión general calculada para la distancia de T a P y de la forma de la suma parcial de ordenadas cuando se tiene una sola circunferencia la cual es una función seno, con una cierta amplitud. La serie parece deformarse hasta el punto de formar una función pulsante y periódica.	Toma un valor constante en 1 y -1. y se mantiene por un intervalo de y -pi y pi	[VE3]-2-[02:07:56] H3: Entonces tiende a dos rectas ¿a la función escalonada? No, si brinca mucho ¿no? H6: Yo estoy analizando el coseno. M3: A ver. H3: No, pero es que si tiende a esa, ¿no? Si da la escalonada. M3: ¡Ash! H3: Pero si le agregas más puntos podríamos alinearlos. Mira, es como una recta no, pero es que esto no me gusta. M3: Pero es que salen picos. Más bien parece un seno, ¿no? H3: No, está raro, porque seno no (incomprensible, 1, ¿tiene picos?) M3: Pero yo creo que le metieron un::: una función exponencial, a lo mejor una composición entre el seno (incomprensible, 1) y una función expo- y una (incomprensible, 1) H3: ¿Qué está pasando? ((risas)) M3: Sí, ponle tú que el seno no tenga una (incomprensible, 1), da positivo de cero a pi y que el (incomprensible, 1) da negativo de pi a dos pi, ¿no? [VE3]-2-[02:22:51] H6: Tendría sentido considerar que esta tiene (incomprensible, 1), ¿no? H3: Si, sí, es una función escalonada, cómo se llama ese tipo de funciones. Es que hay un tipo de función, ¿no? Cuadradas o no sé cómo= =¿Cuál? H6: La que forma esta. H3: ¿A trozos? H6: (3) H3: ¡Ajá! Sí. M3: Pero es la función de escalón:: H3: Es que la función escalón es cero y luego de repente empieza a valer uno. M3: ¡Ajá! Y luego es discontinua en un punto, pero la puedes hacer continua sin retornos. H3: ¡Ajá! Es que aquí se ve que es más o menos algo así, pero es que no quiero decir que es justamente un escalón, porque no parece que valga lo mismo. M3: ¡Ajá! H3: Yo digo que es más bien como una especie de pulso o algo así. H6: O sea, es porque= M3: =Ah::: quizás pulsos. H6: (x)Es que realmente te faltan puntos, o sea por si, es que si, ese si va así. H3: Entonces tendría sentido decir que es cómo. M3: Un pulso. H6: Es periódica en esos intervalos. H3: ¡Ajá! Porque el pulso si es periódico::dico. H6: Y tienes puntos de discontinuidad.	[VG]-2-[02:23:48] H1: Esa sí converge. P: Esa sí converge ¿en todos los puntos? ¿En todo lado, para cualquier valor de t? H1: Bueno, para t igual múltiplos de $\frac{\pi}{2}$, bueno múltiplos impares. P: ¿Sólo para $t = \frac{\pi}{2}$ pasa eso? ¿Sólo aquí o aquí? (señalando el valor en la gráfica)) H1: Bueno sí, (x)es fácil demostrar ese, para otros valores (x)no se cómo se demuestra que converge. P: Pero ¿qué pueden ver de la gráfica? H1: Que sí. M2: Que converge. H1: Para intervalos de, si intervalos abiertos, ¿no? Que esté dentro del intervalo $(0, \pi)$. P: Ok. Y $2\pi =$ P: =¿Abiertos? H1: ¡Ajá! Intervalos abiertos. P: Entonces ¿qué pasa (x)en π ? H4: Se cancela (incomprensible, 1), porque [(x)ahí está la discontinuidad]. [¿Cuáles son las discontinuidades?] ¿las qué, las coordenadas? P: ¿Tendrá? ¿Qué había dicho? “H8” ((se refiere a H8 por su nombre)) me había dicho algo ahí de ¿cerca de π qué pasa o qué parecía que pasaba? M2: Las discontinuidades. H8: La trayectoria (x)de. Ya se me olvidó ((risas)) H1: Se hace cero, bueno (x)se ve (x)de la función y también de la gráfica que en π , la suma de las ordenadas es cero, porque solo, bueno está completamente estrado en X. P: Ok ¿qué opinan los demás? (6) “H8” ((se refiere a H8 por su nombre)) me había dicho que cerca de π , cerca, no me dijo en π , sino cerca de π , parece que diverge. ¿Vamos a ver qué opinan de eso? ¿Sí me habías dicho eso verdad “H8”? H8: Sí. P: Vamos a poner menos ((se refiere al número de circunferencias en el applet)) para ver qué se ve y vamos a quitar la de las abscisas. Así se ve con cinco (9). Entonces veámoslo con seis, voy a quitar el, a limpiar para que, así se ve con seis(9). Sí, ahora con siete (12). ¿Qué les parece que sucede ahí, converge o diverge? H1: Converge, simplemente que cambia muy rápido al otro valor de convergencia. P: ¿Qué opinan los demás? H7: Que diverge. P: Que diverge. H2: Pero es que del movimiento del Planeta se ve que da cero. (Incomprensible, 1) es continuo porque da así como saltitos, tendría que pasar por cero. H1: Sí. Bueno, en el tiempo se ve que por ahí tiene que pasar más rápido, por eso se ve la caída abrupta. Pero en la figura simplemente tendría que pasar por el cero, porque hay un punto en que los::: la cadenita de círculos está completamente horizontal, no hay ningún termino en Y, o sea en π , y en, ajá, todos los múltiplos de π .
Pregunta e.3	En la respuesta (a) menciono que la trayectoria se vuelve más alargada en π y en 2π , lo cual concuerda con ésta gráfica donde podemos ver mínimo y máximo respectivamente. (Máximos si se toma el cuadrado de las sumas). La parte de la trayectoria donde los bucles parecen formar dos líneas paralelas se observa en la última gráfica donde la suma de las ordenadas se vuelve constante.	Que ambas se comportan como funciones periódicas y dependeran de la velocidad angular que tengan y los radios de la circunferencias que se van agregando.	En múltiplos de pi las abscisas están completamente estiradas, por lo que ahí son los máximos o mínimos en los que alterna la función. Luego los círculos se enciman sobre las líneas, por lo que las ordenadas suman casi una constante.	No cabe duda de que la relación existente es aquella que produce el hecho de que las coordenadas del planeta respecto al tiempo están expresadas como sumas de senos y cosenos, mismos términos que se ven alterados a causa de constantes tales como el radio de cada circunferencia y la velocidad angular de cada una de estas, esto produce la forma de la trayectoria y la altera conforme se agregan más círculos.	Concuerdan con las respuestas en a) y b)	No hubo interacción al responder esta pregunta.	[VG]-2-[02:28:08]- el profesor indica que lo discutido en las dos preguntas anteriores ya incluye la respuesta a esta pregunta.
Pregunta f	Sí converge, su comportamiento se aproxima a una constante. Converge a una función escalonada	La serie de la ordenadas converge y su valor de convergencia es la coordenada "y" de la posición del planeta con respecto a la Tierra.	La serie de ordenadas $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} \sin((2i-1)t)$ con $t = \pi/2$, es igual a $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{1}{2i-1}$ $i=1,2,\dots$ La cual, por la propiedad telescópica tiende a $\pi/4$. Y con $0 = -\pi/2$ tiende a $-\pi/4$. Por lo que la serie no converge ya que tiene dos puntos de acumulación.	La serie de las ordenadas converge, aseguramos que esta serie converge al valor de la componente "y" del vector de posición del planeta respecto a T.	Parace que converge en intervalos abierto de 0 y pi y diverge cuando se acerca a los valores de 0 y múltiplos de pi	[VE3]-2-[02:29:50] H6: Según yo, el valor de convergencia es el mismo. H3: Entonces sí converge. H6: Sí conver- tiene que converger. M3: ¿A qué converge? H6: Yo le puse que converge a, bueno le puse que conociendo más acerca del movimiento se puede obtener la serie de Fourier en cada valor de convergencia y converge a la función. H3: Converge a la función. H6: A una función periódica. H3: Mmm sí. H6: Porque lo que tienes al final es una serie de funciones, tiene que converger a una función. H3: Ah, sí. H6: Y esa función tiene que ser periódica. (8) De hecho, converge uniformemente.	[VG]-2-[02:29:32]- El profesor especifica en la pizarra la serie de la que se está hablando:  H1: La figura sugiere que a uno. (4) P: ¡Ujú! ¿qué más? ¿converge o diverge? ¿quiénes dicen que converge? ((cinco estudiantes levantan la mano)) ¿quién dice que diverge? ((ninguno levanta la mano)) ¿quién se abstiene de votar? ((risas)) Ok, bueno de converge “H1” ((se refiere a H1 por su nombre)) dice que a 1 ¿pero aquí da -1? H1: Ah bueno, sí, entonces depende del valor (x)de t.
						[VE3]-2-[02:30:58]	

Parte II. ¿Y si agregamos más epiciclos?							
Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
						<p>H3: Esta converge a la función pulso, uno, menos uno.</p> <p>M3: ¿Mmm?</p> <p>H3: Esta converge a esta función pulso uno y menos uno.</p>	<p>P: ¡Ajá! Pero yo estoy preguntando de toda la serie, o sea ahí van incluidos todos los valores que pueda tomar t.</p> <p>H1: Ah bueno de todos=</p> <p>H4: =Convergería como al radio de::</p> <p>H1: Del todo no converge porque siempre va a ir, es como una onda cuadrada ¿no? Siempre hace ((realiza un movimiento con sus manos para explicar))</p> <p>P: ¿Entonces? [¿converge o]</p> <p>H4: [Convergería] como al radio de la segunda circunferencia.</p> <p>P: Converge como al radio, pero si converge al radio, como puede dar, porque parece que se acerca a -1, ¿verdad? Ustedes me lo habían dicho. Entonces ¿cómo podría converger a -1, si converge a un radio? ¿Converge o diverge?</p> <p>H4: Bueno, si lo pone en esos términos, entonces diverge.</p> <p>P: Vean que lo único que hago es hacerlos dudar. ((risas))</p> <p>H1: Es como la solución 1, -1, 1, -1, ... esa no es convergente.</p> <p>P: ¡Ajá!</p> <p>H1: (x)Se parece a::: esa función a::: digo a esa sucesión.</p> <p>P: ¿Quién está de acuerdo? ¿quién no? (6)</p> <p>¿Están con crisis existencial?</p> <p>H2: El factor=</p> <p>P: =Voy a hacer una aclaración importante ¿cuál es la naturaleza de esto que está aquí? Es un número, una matriz, un polinomio, una función ¿qué es?</p> <p>H2: Todas son funciones.</p> <p>P: Función, ¿verdad? Sí, es una función. Si yo sumo funciones ¿el resultado que a de ser? ((Una función dicen los estudiantes)) Una función, ¿sí? O eso me diría el sentido común, ¿verdad? Si yo sumo funciones mi resultado es una función. Entonces ¿una función podría tomar valor de 1 y -1? ((H1 asiente con la cabeza))</p> <p>H4: Sí, a no, ¿cómo es que dijo?</p> <p>P: O sea ¿una función podría hacer eso?</p> <p>H1: Sí.</p> <p>P: ¿Cuál función?</p> <p>H1: La de escalón.</p> <p>P: Una de escalón, ¿converge o diverge?</p> <p>H1: Bueno, es que sería no converge, bueno</p> <p>H3: Ajá, no converge.</p> <p>H4: Es que divergir es que se va a infinito.</p> <p>P: Puede ser eso, bueno es que depende de qué estemos hablando de convergencia, por ejemplo, ahorita que lo dijiste con sucesiones, lo dijiste bien, si una sucesión da -1 y da 1, entonces tiene dos puntos de acumulación, entonces diverge ¿verdad? La sucesión.</p> <p>H1: Bueno, entonces diverger significa no converger.</p> <p>P: ¡Ajá! Diverger es no converger, no quiere decir que de infinito, ¿sí? Por ejemplo esa sucesión que va a -1 y a 1 esa, este:::, diverge porque tiene dos puntos de acumulación hay dos subsucesiones que convergen a valores distintos, por ejemplo. Pero ahí estamos hablando de número, en cambio aquí estamos hablando de funciones, entonces ¿el resultado de esto puede ser una función o no?</p> <p>H1: Es una función.</p> <p>P: Por la naturaleza, ¿verdad? De los términos, si yo sumo funciones, como que es natural que la respuesta sea función.</p> <p>H1: Sí.</p> <p>P: Entonces ahora otra vez la pregunta ¿podría haber una función que haga esto? Pues sí, la función escalón ¿cierto? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Entonces ¿podría esto converger a la función escalón? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) ¿Si o no? ((la mayoría responde que sí))</p> <p>[VG]-2-[02:34:44]- Con la guía de los estudiantes el profesor escribe en la pizarra el valor de convergencia.</p> 
Intencionalidad	Se espera con los incisos e y f la interpretación de la matemática involucrada en el fenómeno físico, relacionar la estabilidad de la trayectoria del planeta con la convergencia de las series involucradas en la fórmula calculada para la distancia de planeta P a la Tierra. Se espera que se percaten de que la suma parcial de las abscisas no siempre es divergente y que la suma parcial de las ordenadas es siempre convergente. En particular para el inciso f, se tiene como hipótesis que los estudiantes respondan que la serie de las ordenadas diverge, cuando en realidad es convergente. Esto lo sabemos gracias a la prueba piloto y las diferentes puestas en escena, ya que el argumento principal utilizado fue que “la gráfica se está acercando a dos valores 1 y -1”, lo que da evidencia de la concepción de límite funcional como obstáculo para comprender la convergencia de series. Si bien sabemos que en $t=\pi$, la serie converge a cero —de hecho, en todas las discontinuidades considerando a $t \in \mathbb{R}$ — aquellos estudiantes que vislumbren la convergencia podrían pensar que cerca de $t = \pi$ —las discontinuidades— la serie de las ordenadas de P es divergente, pues ya está reportado que los estudiantes consideran convergente solo aquello que converge uniformemente y lo demás es divergente (Albert, 1996).						
¿Qué hace?	<p>Reconocer valores en los que se alcanzan máximos y mínimos de las sumas parciales.</p> <p>Comparar los valores máximos y mínimos de una suma parcial a otra.</p> <p>Comparar las diferencias en las gráficas de una suma parcial a otra.</p>	<p>Reconocer valores en los que se alcanzan máximos y mínimos de las sumas parciales.</p> <p>Comparar los valores máximos y mínimos de una suma parcial a otra.</p> <p>Comparar las diferencias en las gráficas de una suma parcial a otra.</p>	<p>Reconocer valores en los que se alcanzan máximos y mínimos de las sumas parciales.</p> <p>Comparar las diferencias en las gráficas de una suma parcial a otra.</p> <p>Evaluar en la fórmula para valores del tiempo específicos.</p>	<p>Comparar las diferencias en las gráficas de una suma parcial a otra.</p> <p>Identificar los parámetros que afectan la forma de la trayectoria.</p>	<p>Comparar las diferencias en las gráficas de una suma parcial a otra.</p>	<p>Comparar las diferencias en las gráficas de una suma parcial a otra.</p>	<p>Reconocer valores en los que se alcanzan máximos y mínimos de las sumas parciales.</p> <p>Comparar las diferencias en las gráficas de una suma parcial a otra.</p> <p>Evaluar en la fórmula para valores del tiempo específicos.</p>
¿Cómo hace?	Considerando los cambios en las gráficas en forma puntual y en forma global. Relacionando las gráficas con la trayectoria del planeta.	Considerando los cambios en las gráficas en forma puntual y en forma global. Relacionando las gráficas con la trayectoria del planeta.	Considerando los cambios en las gráficas en forma puntual y en forma global. Relacionando las gráficas con la trayectoria del planeta. Calculando la convergencia de la serie para valores del tiempo específicos.	Considerando los cambios en las gráficas en forma puntual y en forma global. Considerando los parámetros involucrados en la fórmula obtenida en la pregunta anterior.	Considerando los cambios en las gráficas en forma puntual y en forma global.	Considerando los cambios en las gráficas en forma puntual y en forma global.	Considerando los cambios en las gráficas en forma puntual y en forma global. Relacionando las gráficas con la trayectoria del planeta. Calculando la convergencia de la serie para valores del tiempo específicos.

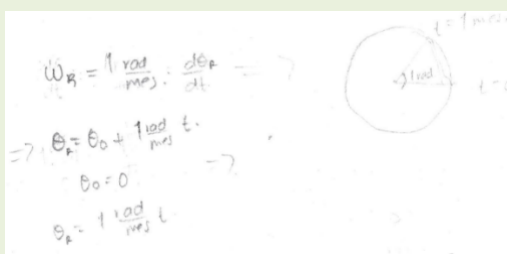
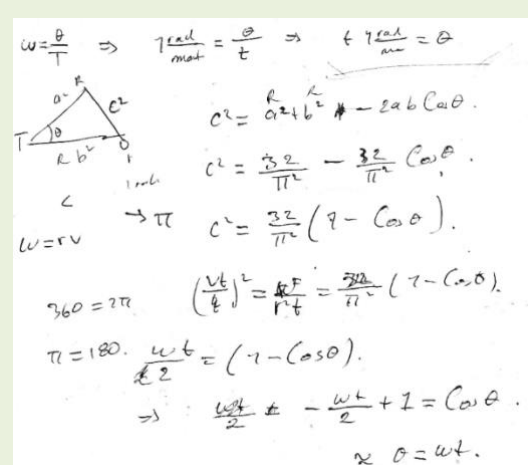
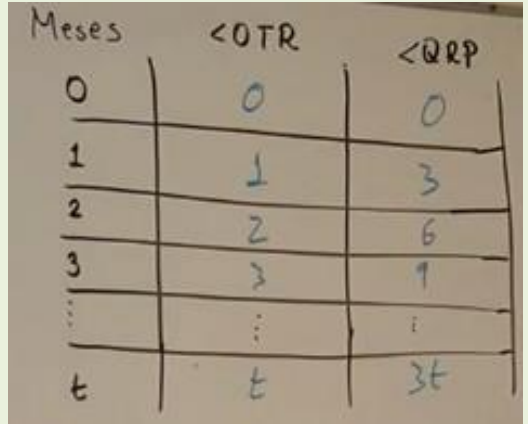
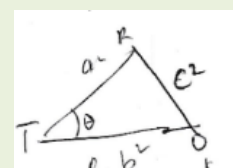
Parte II. ¿Y si agregamos más epiciclos?							
Intención:	Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.						
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) En $t = 0$, $t = \pi$ y $t = 2\pi$ se alcanzan máximos y mínimos que crecen y decrecen, respectivamente, al agregar más circunferencias. (A) Explicando la forma de la trayectoria con la forma que toman las gráficas. (A) El comportamiento de la gráfica se aproxima a una constante, por lo que converge.	(A) Se alcanzan máximos y mínimos que crecen y decrecen, respectivamente, al agregar más circunferencias. (A) El valor de convergencia corresponde a la ordenada del planeta respecto de la Tierra.	(A) Se alcanzan máximos y mínimos que crecen y decrecen, respectivamente, al agregar más circunferencias. (A) Explicando la forma de la trayectoria con la forma que toman las gráficas. (C) Diverge, pues la serie, para dos valores distintos del tiempo, converge a valores distintos.	(A) La serie de las abscisas se deforma hasta el punto en que parece formar una especie de señal con forma de V. (A) La serie de las ordenadas se deforma hasta el punto de formar una función pulsante y periódica. (A) El valor de convergencia corresponde a la ordenada del planeta respecto de la Tierra. (A) Las coordenadas del planeta respecto al tiempo están expresadas como sumas de senos y cosenos, mismos términos que se ven alterados a causa de constantes tales como el radio de cada circunferencia y la velocidad angular de cada una de estas, esto produce la forma de la trayectoria y la altera conforme se agregan más circunferencias.	(A) La serie de ordenadas toma un valor constante en 1 y -1. Se mantiene por un intervalo de $-\pi$ y π . (A) la serie de abscisas parece que converge en $(0, \pi)$ (C) la serie de abscisas toma un valor constante en π . (C) La serie de ordenadas diverge cuando se acerca a los valores de 0 y múltiplos de π .	(A) La serie de ordenadas se va a un valor positivo y a uno negativo. (A) La serie de ordenadas es la función escalonada o un pulso. (C) La serie de ordenadas se acerca a dos valores distintos, por tanto, diverge. (C) La función resultante de la serie de ordenadas tiene picos, pero los senos no tienen picos. (C) La serie de abscisas diverge, nunca hemos visto convergencias así.	(A) La serie de las abscisas alcanza su máximo y mínimo y estos corresponden a la suma de los radios de las circunferencias. (A) La serie de las abscisas diverge al evaluar en $t = \pi$, pues corresponde a una serie armónica. (A) La serie de las ordenadas converge para todo valor en $(0, \pi)$ y $(\pi, 2\pi)$. (A) La serie de ordenadas en $t = \pi$ debe dar cero por que así se ve en la trayectoria del planeta. (C) La serie de las ordenadas diverge en $t = \pi$. (C) La serie de las ordenadas diverge porque se parece a la sucesión 1, -1, 1, -1, ... y esa diverge.
Pregunta g	Converge a una función escalonada	Converge al mismo valor que en la respuesta anterior, ya que se estaba trabajando con valores de t positivos.	Según la applet, la suma de ordenadas converge a 1. Tiene sentido ya que la coordenada y es igual a $y_n = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} \sin((2i-1)t)$ para $t = \pi/2$ $y_n \rightarrow 1, i \rightarrow \infty$.	Convergería al mismo valor, dado que hemos estado trabajando todo el tiempo con t's positivas. En caso de t=0 el valor de cada función seno será cero, provocando así la convergencia de la serie a la suma de todos los radios de las circunferencias.	converge a una función	[VE3]-2-[02:44:08] H3: No entiendo. M3: ¿Qué? H3: Dice, si se cambia en rango de valores de t para todos aquellos en los que t es mayor o igual que cero ¿cuál es el valor de convergencia de la serie de las ordenadas del planeta? ¿Cómo si se cambia el valor? H6: Es lo que les dije, o sea que se van a tomar valores de t positivos. H3: ¿Qué solo toma valores positivos? H6: Sí, es lo que estás haciendo. H3: ¿Cómo? H6: Los valores, estás tomando t, posiciones de t positivos. [VE3]-2-[02:48:14] M3: Oye y si le cambiamos ahí ¿qué pasa? (se refiere al rango de valores de t dado en el applet) H6: No hay nada. Estás tomando t (incomprensible, 1). M3: Y si le pongo. H6: No va a salir nada porque= M3: =No:: H3: Algo raro pasó ahí. H6: Realmente no pasa mucho, porque si= M3: =¿Cómo no? H6: Sí la gráfica de aquí, la función esa es simétrica o antisimétrica esto (incomprensible, 2). (3) Pero limpia el rastro, ¿no? M3: Ya me regañó, que exigente pues. Y si lo quiero mover, no puedo mover los ejes. H6: ¡Ajá! simplemente mueves la gráfica, la función es, en este caso la función es antisimétrica, es una función impar, son senos. Si fueran cosenos, esto continuaría aquí. M3: Ok, entonces para valores positivos la gráfica son se-, ah ok a ver. H3: Ah ya entendí, aquí es como que (incomprensible, 2) se acota en ciertos lugares. M3: ¿Eh? H3: Sí es como que la acotas entre ciertos lugares. M3: ¡Ajá! [VE3]-2-[02:53:07] H6: No pasaría nada porque está considerando valores positivos (incomprensible, 1). M3: Pues simón no pasa nada. H3: No sé qué está pasando. M3: Pues es que sí mira, porque hemos trabajado hasta ahorita con t's positivos, entonces, entonces no pasa nada sigue convergiendo. H3: Sí, si es el mismo. M3: Sí:::, es lo mismo que la f, y ya.	[VG]-2-[02:36:33] P: ¿Qué pasaría si t es mayor que cero, verdad? (7) ¿Cuál es el valor de convergencia de la serie de las ordenadas? H3: Sería 1. P: Ahora con t > 0, ahí podían cambiar el rango, ¿verdad? De t. Qué se yo, le podemos poner 8π, no se va a ver todo, pero (11). Entonces ¿converge o diverge? (3) H2: Converge a la función, definida por partes. P: Converge a la función definida por partes. O sea, le harían otra listota aquí ((se refiere a la función definida a trozos de la pregunta anterior)) (x)más grande, o ¿qué diríamos? H3: Sí::: ((risas)) P: Es una manera, ¿verdad? Podríamos poner, 1 si t está entre 2π y 3π, -1 si, y ahí. (Incomprensible, 1) ((hablan varios a la vez, H2 sugiere trabajar con los intervalos)) H1: Sí, podemos poner que t exista, por ejemplo, en ese sería desde el límite derecho, múltiplo impar de π y al izquierdo le restamos uno, y el de abajo serán múltiplos pares y al izquierdo le restamos uno. P: Ok, ujú, es una manera de hacerlo ¿sí? ¿Sí está clara la idea? ((los estudiantes asienten con la cabeza))
Pregunta h	Valores de t<0 indican planetas moviéndose en sentido horario, lo cual no tiene sentido en el modelo propuesto.	Si tiene sentido pero no es necesario ya que al ser funciones pares e impares lo único que provoca son reflexiones.	Tiene sentido matemáticamente, ya que equivale a invertir el sentido de giro. Y ahí sólo cambiaría el signo de los términos de la serie, la cual convergería a -pi/4. Pero físicamente no tiene sentido el tiempo negativo.	En efecto, tiene sentido, aunque es probable que las expresiones solo acaben por reflejar la trayectoria formada, esto dada la simetría de la misma respecto al eje horizontal, la paridad del coseno y la no paridad del seno.	No tiene sentido considerarlos, porque ni siquiera implican un retroceso. En caso de converger, convergería al mismo valor en las ordenadas.	[VE3]-2-[02:53:45] H3: No, pero es que yo creo que sí pasa algo por que vea, aquí te dice que estás acotando t entre a y b. H6: ¡Ajá! H3: Entonces= H3: =Pero, entonces a y b ahí son positivos. H6: ¡Ajá! Pero sería solo en este pedacito. M3: Sólo convergen más lentamente, ¿no? Porque cuando variábamos b te acuerdas que iba más lento. H6: No, es que la t (x)solo son los valores que tu metes, tu (incomprensible, 1), y como tal, esa cosa solo tiene senos y cosenos, funciones pares e impares. Con t negativo lo único que tienes es la misma gráfica en el caso de senos invertida, en el caso de cosenos la tienes completamente reflejada porque es una función par, en caso del seno como es impar simplemente se voltea así. Lo único que haces es, es (incomprensible, 1), pero sigue siendo periódico, no pasa mucho. Pero la pregunta que te pre-, en la siguiente que te pregunta de que si tiene algún sentido evaluar t's [Negativos] H6: [Negativos], pues tiene sentido, pero realmente es innecesario porque tu gráfica es completamente simétrica o antisimétrica. Bueno yo puse eso. Tiene sentido. M3: Tiene sentido. [VE3]-2-[02:57:47] H3: Realmente un t negativo sería, sería en sentido antihorario. M3: [No:::, horario] H6: [Más bien sería en sentido horario] M3: Antihorario es positivo.	[VG]-2-[02:40:02] P: ¿Y qué pasa si t es::: negativo? ¿tiene sentido (x)en el problema hablar de valores de t negativos? H6: [Pues::: sí] M2: [Sería un:::] movimiento en sentido horario. H1: Sí, sería cambiar el sentido de giro. P: ¡Ajá! ¿Pero qué es t en el sistema inicial? H6: El tiempo. P: El tiempo. H1: Ajá, el tiempo. P: ¿Tiene sentido hablar de tiempo negativo? H3: No ((varios estudiantes mueven su cabeza para indicar que no)) P: O sea, matemáticamente pasan cosas, ¿sí? O sea, el ángulo sería verlo en sentido antihorario, por eje- eh en sentido horario, por ejemplo. O sea, matemáticamente pasan cosas, solamente que digamos que (x)en el modelo no tiene sentido de hablar de valores de t negativos, ¿sí? [VG]-2-[02:43:29] P: Bueno, entonces ¿qué pasaría con la convergencia? ¿sigue siendo convergente? H4: Sí, solo cambia la paridad de la función, ¿no? H1: Se voltea (incomprensible, 1) P: ¿Se voltea? H1: Bueno (x)los valores, o sea donde había 1 ahora sería -1. P: ¿Seguros? H1: Bueno sería continuar la gráfica, pero para el ((con la mano señala que hacia la izquierda))
Intencionalidad	Se pretende provocar que la periodicidad sea un resultado de la serie y no una condición de la función que se está representando. Pues la serie, como objeto matemático, posee ciertas características que no tienen sentido en el fenómeno que se está modelando. En este caso dicha característica es la condición de periodicidad, la cual se da en toda la recta real, pero el fenómeno no tiene sentido al hablar de valores negativos del tiempo. Para concluir con esta tarea, se espera que los estudiantes no sepan escribir en forma analítica una función periódica en el inciso h, ya que no es usual hacerlo en la escuela, posiblemente escriban la función para un intervalo y escriban con palabras que se repite de manera periódica.						

Parte II. ¿Y si agregamos más epiciclos?							
Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
¿Qué hace?	Identificar el tipo de función a la que se converge. Observar el movimiento del planeta.	Extender el valor de convergencia dado en la pregunta anterior. Comparar el movimiento del planeta.	Evaluar la serie en un tiempo determinado para determinar la convergencia. Observar el movimiento del planeta.	Extender el valor de convergencia dado en la pregunta anterior. Comparar el movimiento del planeta.	Identificar la naturaleza del valor de convergencia. Observar el movimiento del planeta.	Extender el valor de convergencia dado en la pregunta anterior. Comparar el movimiento del planeta. Observar el movimiento del planeta.	Extender el valor de convergencia dado en la pregunta anterior. Comparar el movimiento del planeta. Observar el movimiento del planeta.
¿Cómo hace?	Considerando lo realizado en la pregunta anterior. Considerando ángulos negativos.	Considerando que se sigue trabajando con valores del tiempo positivos. Considerando el cambio respecto del movimiento para tiempo positivo.	Considerando un valor del tiempo en que sea más directo determinar la convergencia de la serie. Considerando ángulos negativos.	Considerando que se sigue trabajando con valores del tiempo positivos. Considerando el cambio respecto del movimiento para tiempo positivo.	Considerando lo realizado en la pregunta anterior. Considerando ángulos negativos.	Considerando que se sigue trabajando con valores del tiempo positivos. Considerando el cambio respecto del movimiento para tiempo positivo. Considerando ángulos negativos.	Considerando que se sigue trabajando con valores del tiempo positivos. Considerando el cambio respecto del movimiento para tiempo positivo. Considerando ángulos negativos.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Converge a una función escalonada. (A) Considerando el tiempo negativo el planeta se movería en sentido horario.	(A) Converge a la misma función, pues se sigue trabajando con valores del tiempo positivos. (A) Al ser funciones pares e impares solo provoca reflexiones.	(C) La serie converge a 1, porque para $t = \frac{\pi}{2}$ converge a 1. (A) Considerando el tiempo negativo el planeta se movería en sentido horario.	(A) Converge a la misma función, pues se sigue trabajando con valores del tiempo positivos. (A) Al ser funciones pares e impares solo provoca reflexiones. (C) Para $t = 0$ la serie converge a la suma de los radios de las circunferencias.	(A) Converge a una función. (A) Considerando el tiempo negativo el planeta se movería en sentido horario.	(A) Converge a la misma función, pues se sigue trabajando con valores del tiempo positivos. (A) Al ser funciones impares solo provoca reflexiones. (A) Considerando el tiempo negativo el planeta se movería en sentido horario.	(A) Converge a la misma función, pues se sigue trabajando con valores del tiempo positivos. (A) Al ser funciones impares solo provoca reflexiones. (A) Considerando el tiempo negativo el planeta se movería en sentido horario. (A) Sería extender la gráfica en forma periódica hacia la izquierda.

Tarea #2. Etapa 2: Identificación de los invariantes de las acciones

TAREA #2

Objetivo de la Tarea: Significar la convergencia de series trigonométricas mediante la estabilidad de la trayectoria del planeta, caracterizándola mediante el límite de la sucesión de sumas parciales.

Parte I. Comprendiendo el modelo																																																																																																				
Intención: Se busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada.																																																																																																				
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común																																																																																													
Pregunta a	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Meses</th> <th>OTR (Rad)</th> <th>QRP (Rad)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>9</td></tr> <tr><td>n</td><td>n</td><td>3n</td></tr> </tbody> </table> 	Meses	OTR (Rad)	QRP (Rad)	0	0	0	1	1	3	2	2	6	3	3	9	n	n	3n	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Meses</th> <th>Medidas de $\angle OTR$ (en radianes)</th> <th>Medidas de $\angle QRP$ (en radianes)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>9</td></tr> <tr><td>:</td><td>:</td><td>:</td></tr> <tr><td>t</td><td>t</td><td>3t</td></tr> </tbody> </table>	Meses	Medidas de $\angle OTR$ (en radianes)	Medidas de $\angle QRP$ (en radianes)	0	0	0	1	1	3	2	2	6	3	3	9	:	:	:	t	t	3t	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Meses</th> <th>OTR</th> <th>QRP</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>n</td><td>n</td><td>3n</td></tr> </tbody> </table>	Meses	OTR	QRP	0	0	0	1	1	3	n	n	3n	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Meses</th> <th>Medida de $\angle OTR$ (rad)</th> <th>Medida de $\angle QRP$ (rad)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>9</td></tr> <tr><td>:</td><td>:</td><td>:</td></tr> <tr><td>t</td><td>t</td><td>3t</td></tr> </tbody> </table>	Meses	Medida de $\angle OTR$ (rad)	Medida de $\angle QRP$ (rad)	0	0	0	1	1	3	2	2	6	3	3	9	:	:	:	t	t	3t	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Meses</th> <th>Medida OTR</th> <th>Medida QRP</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>9</td></tr> <tr><td>t</td><td>wt</td><td>wt</td></tr> <tr><td></td><td>$= 1 \frac{rad}{mes} t$</td><td>$= 3 \frac{rad}{mes} t$</td></tr> </tbody> </table> 	Meses	Medida OTR	Medida QRP	0	0	0	1	1	3	2	2	6	3	3	9	t	wt	wt		$= 1 \frac{rad}{mes} t$	$= 3 \frac{rad}{mes} t$	<p>[VE3]-2-00:11:02]</p> <p>H3: ¿Cuánto crees que valga ese? Al inicio vale cero.</p> <p>M3: Pues::: ¡ajá!</p> <p>H3: Así inicia=</p> <p>M3: Ajá, inicia desde el cero, y llega mmm en un mes:::</p> <p>H3: A un radián por mes, entonces sería uno.</p> <p>M3: ¿Cuánto es un radián por mes?</p> <p>H3: Pues un radián por mes ((risas)).</p> <p>M3: ¡Ay! si es cierto ((risas)).</p> <p>H3: El ángulo, ¿no?</p> <p>M3: ¡Ajá! ¿Y el de Q?</p> <p>H3: Y el otro se mueve a tres radianes por mes.</p> <p>M3: Entonces serían tres, ¿no?</p> <p>H3: ¡Ajá! Y así ya.</p> <p>M3: Y luego entonces este es dos y este es (6) ¿cinco?</p> <p>H3: ¿Por qué cinco?</p> <p>M3: Porque van (incomprensible, 1) ¿no? Nada más.</p> <p>H3: Bueno por el tres radianes. Mira pasan dos meses entonces cada mes tu::: ángulo este son tres radianes veces, dos por tres son seis radianes ¿no?</p>	<p>[VE1]-2-00:56:34- H3 rellena la tabla en la pizarra.</p> <p>H3: Como estamos en el mes cero, tenemos un tiempo igual a cero, o sea estamos en la condición inicial, entonces ambos ángulos valdrían cero. Luego como estamos en el mes uno, el primer ángulo nos dice que avanza o se mueve un radian cada mes, entonces este va a valer uno, el otro nos dice que se mueve a una velocidad de tres radianes cada mes, entonces sería tres. Bueno aquí ya podemos continuar con este proceso sería un dos, aquí sería un seis, tres, nueve y, en general, ya serían t y tres veces t.</p> <p>P: ¿Sí? ¿Todos de acuerdo? ¿Alguien lo pensó diferente o todos lo pensaron de esa manera? ((los estudiantes asienten con la cabeza))</p> 
Meses	OTR (Rad)	QRP (Rad)																																																																																																		
0	0	0																																																																																																		
1	1	3																																																																																																		
2	2	6																																																																																																		
3	3	9																																																																																																		
n	n	3n																																																																																																		
Meses	Medidas de $\angle OTR$ (en radianes)	Medidas de $\angle QRP$ (en radianes)																																																																																																		
0	0	0																																																																																																		
1	1	3																																																																																																		
2	2	6																																																																																																		
3	3	9																																																																																																		
:	:	:																																																																																																		
t	t	3t																																																																																																		
Meses	OTR	QRP																																																																																																		
0	0	0																																																																																																		
1	1	3																																																																																																		
n	n	3n																																																																																																		
Meses	Medida de $\angle OTR$ (rad)	Medida de $\angle QRP$ (rad)																																																																																																		
0	0	0																																																																																																		
1	1	3																																																																																																		
2	2	6																																																																																																		
3	3	9																																																																																																		
:	:	:																																																																																																		
t	t	3t																																																																																																		
Meses	Medida OTR	Medida QRP																																																																																																		
0	0	0																																																																																																		
1	1	3																																																																																																		
2	2	6																																																																																																		
3	3	9																																																																																																		
t	wt	wt																																																																																																		
	$= 1 \frac{rad}{mes} t$	$= 3 \frac{rad}{mes} t$																																																																																																		
Intencionalidad	Se pretende reconocer el comportamiento del movimiento de los puntos sobre cada circunferencia. Para esta pregunta es probable que la idea de velocidad angular genere dificultades, esto se evidenció en el pilotaje y las diferentes puestas en escena; debido a que la concepción de radian en sí misma provoca dificultades según se ha reportado en distintas investigaciones (Akkoc, 2008; Moore, 2009).																																																																																																			
¿Sobre qué objetos lo hace?	<p>Seriar</p> <p>El tiempo y la medida del ángulo.</p> <p>Comparar</p> <p>El ángulo con el valor inicial.</p>	<p>Seriar</p> <p>El tiempo y la medida del ángulo.</p>	<p>Seriar</p> <p>El tiempo y la medida del ángulo.</p>	<p>Seriar</p> <p>El tiempo y la medida del ángulo.</p>	<p>Seriar</p> <p>El tiempo y la medida del ángulo.</p> <p>Identificar</p> <p>Parámetros velocidad, distancia y tiempo.</p> <p>Geometrizar</p> <p>El ángulo, los radios y la secante.</p>	<p>Seriar</p> <p>El tiempo y la medida del ángulo.</p>	<p>Seriar</p> <p>El tiempo y la medida del ángulo.</p>																																																																																													
¿Sobre qué relaciones lo hace?	<p>Seriar</p> <p>Para cada incremento de una unidad en el tiempo, la medida del ángulo aumenta la cantidad de unidades dada por la velocidad angular. Para un tiempo dado el valor del ángulo es igual a la velocidad por el tiempo.</p> <p>Comparar</p> <p>El ángulo en el tiempo t es igual al ángulo inicial más la velocidad por el tiempo.</p>	<p>Seriar</p> <p>Para cada incremento de una unidad en el tiempo, la medida del ángulo aumenta la cantidad de unidades dada por la velocidad angular. Para un tiempo dado el valor del ángulo es igual a la velocidad por el tiempo.</p>	<p>Seriar</p> <p>Para cada incremento de una unidad en el tiempo, la medida del ángulo aumenta la cantidad de unidades dada por la velocidad angular. Para un tiempo dado el valor del ángulo es igual a la velocidad por el tiempo.</p>	<p>Seriar</p> <p>Para cada incremento de una unidad en el tiempo, la medida del ángulo aumenta la cantidad de unidades dada por la velocidad angular. Para un tiempo dado el valor del ángulo es igual a la velocidad por el tiempo.</p>	<p>Seriar</p> <p>Para cada incremento de una unidad en el tiempo, la medida del ángulo aumenta la cantidad de unidades dada por la velocidad angular. Para un tiempo dado el valor del ángulo es igual a la velocidad por el tiempo.</p> <p>Identificar</p> <p>La velocidad es igual a la distancia entre el tiempo.</p> <p>Geometrizar</p> <p>Ley de cosenos sobre el triángulo isósceles.</p>	<p>Seriar</p> <p>Para cada incremento de una unidad en el tiempo, la medida del ángulo aumenta la cantidad de unidades dada por la velocidad angular. Para un tiempo dado el valor del ángulo es igual a la velocidad por el tiempo.</p>	<p>Seriar</p> <p>Para cada incremento de una unidad en el tiempo, la medida del ángulo aumenta la cantidad de unidades dada por la velocidad angular. Para un tiempo dado el valor del ángulo es igual a la velocidad por el tiempo.</p>																																																																																													
¿Por medio de qué lo hace?	<p>Seriar</p> <p>Numérico: Rellenando la tabla. Algebraico: Para el mes n, los valores de los ángulos en la primera y segunda circunferencia son n y $3n$, respectivamente.</p> <p>Comparar</p> <p>Algebraico: $\theta_k = \theta_0 + 1 \frac{rad}{mes} t$</p>	<p>Seriar</p> <p>Numérico: Rellenando la tabla. Algebraico: Para el mes t, los valores de los ángulos en la primera y segunda circunferencia son t y $3t$, respectivamente.</p>	<p>Seriar</p> <p>Numérico: Rellenando la tabla. Algebraico: Para el mes t, los valores de los ángulos en la primera y segunda circunferencia son t y $3t$, respectivamente.</p>	<p>Seriar</p> <p>Numérico: Rellenando la tabla. Algebraico: Para el mes t, los valores de los ángulos en la primera y segunda circunferencia son t y $3t$, respectivamente.</p>	<p>Seriar</p> <p>Numérico: Rellenando la tabla. Algebraico: Para el mes t, los valores de los ángulos en la primera y segunda circunferencia son t y $3t$, respectivamente.</p> <p>Identificar</p> <p>Algebraico: $\omega = \frac{\theta}{t} \Rightarrow 1 \frac{rad}{mes} = \frac{\theta}{t} \Rightarrow t 1 \frac{rad}{mes} = \theta$.</p> <p>Geometrizar</p> <p>Iconico:</p>  <p>Algebraico: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$</p>	<p>Seriar</p> <p>Numérico: Rellenando la tabla. Algebraico: Para el mes t, los valores de los ángulos en la primera y segunda circunferencia son t y $3t$, respectivamente.</p>	<p>Seriar</p> <p>Numérico: Rellenando la tabla. Algebraico: Para el mes t, los valores de los ángulos en la primera y segunda circunferencia son t y $3t$, respectivamente.</p>																																																																																													
Invariantes de Acciones	<ul style="list-style-type: none"> - Para cada incremento de una unidad en el tiempo, la medida del ángulo aumenta la cantidad de unidades dada por la velocidad angular. - Para un tiempo dado el valor del ángulo es igual a la velocidad por el tiempo. 																																																																																																			
Pregunta b	$(x_1, y_1) = \frac{4}{\pi} \left(\cos \left(\frac{1rad}{mes} t \right), \text{Sen} \left(\frac{1rad}{mes} t \right) \right)$ $(x_2, y_2) = \frac{4}{\pi} \left(\cos \left(\frac{1rad}{mes} t \right), \text{Sen} \left(\frac{1rad}{mes} t \right) \right) + \frac{4}{3\pi} \left(\cos \left(\frac{3rad}{mes} t \right), \text{Sen} \left(\frac{3rad}{mes} t \right) \right)$					<p>[VE3]-2-00:15:58]</p> <p>H3: Ya tienes el ángulo ese si lo tienes. Y lo tienes en radianes y ya con obtener (3) ¿el radio, no?</p> <p>M3: Sí, pero ya utilizar la distancia de (3) la::: ecuación de la distancia entre dos puntos (3) si tienes las coordenadas, ¿no?</p> <p>H3: ¿Y este si lo sabes?</p> <p>M3: ¿Qué?</p>	<p>[VE1]-2-01:00:18- M3 pasa a la pizarra a responder respecto de las coordenadas de R. Primero dibuja</p>																																																																																													

Parte I. Comprendiendo el modelo

Intención: Se busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada.

Estudiante M2

$$d_{TP} = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{10}{9} + \frac{2}{3} \cos\left(2 \frac{\text{rad}}{\text{mes}} t\right)}$$

M3

H1

H3

H4

Equipo 3

H3: Pues si supieras este entonces ya sabes x.
M3: No, no la sé.
H3: Sí, o sea imaginate que esto es R, y te pregunto que si sabes esto y esto, pero si sabes esto entonces ya sabes x_1 y y_1 , porque son las coordenadas del punto R.
M3: ¿La distancia?
H3: Sabes las coordenadas del punto R respecto a t que está=
[VE3]-2-[00:16:38]- M3 interrumpe a H3 y vuelve a leer en voz alta la pregunta planteada y continúa dialogando.
[VE3]-2-[00:16:56]
M3: O sea que esto es, el ángulo es t, y este es: $3t$, ¿no? Ah:::
H3: Pero primero hay que encontrar donde está este con las puras coordenadas.
M3: En dónde estaría (incomprensible, 1, ¿R?)
H3: ¡Ajá! Con las coordenadas.
[VE3]-2-[00:17:40]
M3: Ah::: tienes el radio, ¿no?
H3: No.
M3: Sí::: el radio de la circunferen=
H3: =Sí, sí.
M3: Ah::: entonces con eso sale. Mira, lo que decía Pachequito.
H3: **Todo lo haces triángulos rectángulos.**
M3: **Ahí está. A poco no, a poco no lo estás haciendo triángulos rectángulos.**
H3: **Sí, si está bien triangulados, bien triangulados.**
[VE3]-2-[00:18:23]
M3: Tienes los radios.
H3: Oye, entonces el tiempo t (2) el tiempo t, este primero de aquí, bueno sí el tiempo t está en el lugar de t ¿no? Para el primer círculo y el radio siempre va a ser $\frac{4}{\pi}$
M3: ¡Ajá!
H3: Entonces ¿qué sería aquí este?
M3: Sería=
H3: = x_1 sería [el seno]
M3: [el coseno] si quieres para x_1 es el coseno de t.
H3: Sí, es cierto.
M3: Es igual a x_1 sobre $\frac{4}{\pi}$, ¿no?

Puesta en común

M3: Bueno, entonces, aquí dice que en un tiempo t, entonces ya sabemos va a ser un ángulo de t y además hasta arriba decía que el radio de::: la primera circunferencia es 4π , 4 sobre π , entonces utilizando trigonometría, entonces se puede calcular el de aquí (señala la distancia en el eje X) y el de acá (señala la distancia en el eje Y). Entonces quedaría así ((escribe en la pizarra))

Estudiante M2

M3

H1

H3

H4

Equipo 3

H3: ¡Ajá! ¿alguna otra idea? ¿algún otro argumento que permita hacer lo mismo? (7) ¿O usaron el mismo, exactamente el mismo argumento?
H1: Yo tengo un comentario.
P: ¿Ajá?
H1: (x)Que el ángulo ahí si funciona con t porque la velocidad angular es uno y el tiempo es t meses, pero en general habría que poner ángulo θ , por ejemplo ¿no? Y θ sería igual a velocidad angular por el tiempo.
[VE1]-2-[01:04:18]- H1 pasa a la pizarra a responder respecto de las coordenadas de P. Primero escribe:

H1: Si quisiera hacer esto en coordenadas polares.
P: ¿Ujú?
H1: (Incomprensible, 1) lo pone como vectores para especificar el punto (x,y) y en este caso el r n-ésimo sería igual a 4π por uno entre un número impar.
P: ¿Ujú?
H1: Así nos lo dan al principio, dice que varía primero 4π , y luego 4 entre 3π , y 4 entre 5π , y en general sería sobre los impares, empezando desde el uno. Y el, vamos a ver la fórmula, el θ n-ésimo sería la velocidad angular n-ésima multiplicado por el tiempo, y es sustituyendo estos aquí ((señala la primera ecuación que escribió)), ah bueno, la velocidad angular es, varía con los impares, en el primero es uno, sigue tres y así. Sustituyendo aquí ((se refiere a la primera ecuación que escribió)), puedo sacar el 4π en::: todos.

P

¿Ajá! Entonces yo noté, por ejemplo, que ya habíamos calculado esto ((se refiere a las coordenadas de R)), era sencillo, pero entonces si esto es este::: x_1 podemos ver que de aquí ((se refiere a la posición de x_1)) a::: el lugar donde está ubicado el punto del que queremos saber su distancia, es una pequeña distancia x, y tendríamos que la coordenada respecto al origen del punto que queremos sería x_2 igual a esta primer coordenada que ya habíamos calculado más esta pequeña distancia. Lo mismo para la altura en la que está ubicado, sería una pequeña y.

Estudiante M2

M3

H1

H3

H4

Equipo 3

[VE3]-2-[00:28:51]
H3: **Ah entonces te digo que podríamos hacer un origen aquí y luego sacar las coordenadas aquí.**
M3: Respecto a ese origen.
H3: ¡Ajá! Y ese sería respecto a x_1 y a x_2 . Entonces lo que tú buscas es esto ¿no?
M3: ¡A:::!! A ver.
H3: Lo que se me ocurre es que tienes esto y si tú buscas estas coordenadas, ¿ajá? Ujú.
H3: Entonces eso sería lo mismo que la componente de aquí más lo de aquí a aquí, ¿no?
M3: **Pero es que x_2 sería la componente de x_1 [más el cachito de este nuevo, ¿no?]**
H3: [Más el cachito, exacto]
M3: Ahora sí, vamos.
[VE3]-2-[00:33:24]
M3: No, pero ya tienes de aquí, ¿no? x_2 y y_2 , entonces con la de la distancia.
H6: No, porque aquí tienes esta y este está chueco.
M3: **No, pero con la distancia entre dos puntos, ya conoces las coordenadas de esta y esta está en el origen.**
H6: ¿De T a P?
M3: ¡Ujú!
H6: Ah de T a P.
H3: ¡Ajá! y eso ya te lo da para el tiempo t.
H6: Pues sí, sí, sí.

P

¿Ajá! Entonces yo noté, por ejemplo, que ya habíamos calculado esto ((se refiere a las coordenadas de R)), era sencillo, pero entonces si esto es este::: x_1 podemos ver que de aquí ((se refiere a la posición de x_1)) a::: el lugar donde está ubicado el punto del que queremos saber su distancia, es una pequeña distancia x, y tendríamos que la coordenada respecto al origen del punto que queremos sería x_2 igual a esta primer coordenada que ya habíamos calculado más esta pequeña distancia. Lo mismo para la altura en la que está ubicado, sería una pequeña y.

Estudiante M2

M3

H1

H3

H4

Equipo 3

[VE3]-2-[00:34:33]
H3: Sí, tiene sentido porque estás en la norma común.
H6: Sí, sí, sí.
H3: ¡Ah! tienes razón, entonces sería nada más este la norma=
M3: x_2 al cuadrado menos, más=
H3: =O sea la norma de este [vector]
M3: [es más o menos, es más ¿no?

P

¿Ajá! Entonces yo noté, por ejemplo, que ya habíamos calculado esto ((se refiere a las coordenadas de R)), era sencillo, pero entonces si esto es este::: x_1 podemos ver que de aquí ((se refiere a la posición de x_1)) a::: el lugar donde está ubicado el punto del que queremos saber su distancia, es una pequeña distancia x, y tendríamos que la coordenada respecto al origen del punto que queremos sería x_2 igual a esta primer coordenada que ya habíamos calculado más esta pequeña distancia. Lo mismo para la altura en la que está ubicado, sería una pequeña y.

Estudiante M2

M3

H1

H3

H4

Equipo 3

[VE3]-2-[00:34:33]
H3: Sí, tiene sentido porque estás en la norma común.
H6: Sí, sí, sí.
H3: ¡Ah! tienes razón, entonces sería nada más este la norma=
M3: x_2 al cuadrado menos, más=
H3: =O sea la norma de este [vector]
M3: [es más o menos, es más ¿no?

P

¿Ajá! Entonces yo noté, por ejemplo, que ya habíamos calculado esto ((se refiere a las coordenadas de R)), era sencillo, pero entonces si esto es este::: x_1 podemos ver que de aquí ((se refiere a la posición de x_1)) a::: el lugar donde está ubicado el punto del que queremos saber su distancia, es una pequeña distancia x, y tendríamos que la coordenada respecto al origen del punto que queremos sería x_2 igual a esta primer coordenada que ya habíamos calculado más esta pequeña distancia. Lo mismo para la altura en la que está ubicado, sería una pequeña y.

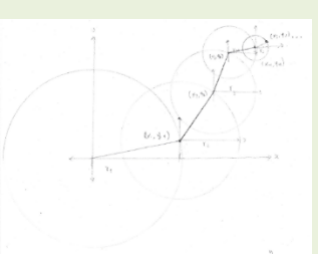
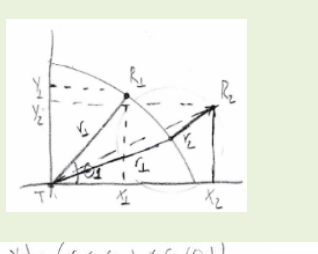
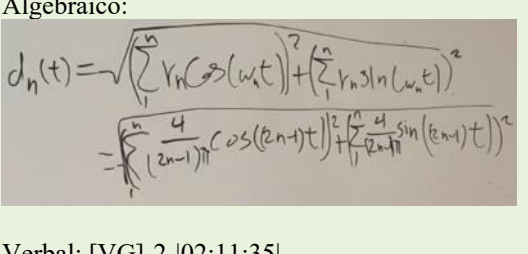
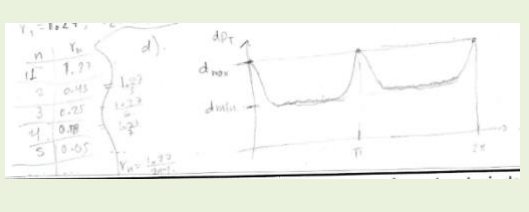
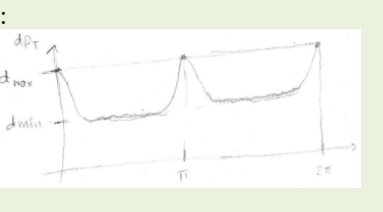
Parte I. Comprendiendo el modelo							
Intención:	Se busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada.						
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta c	<p>Se tienen las coordenadas:</p> $(x_1, y_1) = \frac{4}{\pi} \left(\cos\left(\frac{1\text{rad}}{\text{mes}}t\right), \text{Sen}\left(\frac{1\text{rad}}{\text{mes}}t\right) \right)$ $(x_2, y_2) = \frac{4}{\pi} \left(\cos\left(\frac{3\text{rad}}{\text{mes}}t\right), \text{Sen}\left(\frac{3\text{rad}}{\text{mes}}t\right) \right)$ $(x_3, y_3) = \frac{4}{\pi} \left(\cos\left(\frac{5\text{rad}}{\text{mes}}t\right), \text{Sen}\left(\frac{5\text{rad}}{\text{mes}}t\right) \right)$ $\overline{PT} = \frac{4}{\pi} \sqrt{\left(\cos\left(\frac{1\text{rad}}{\text{mes}}t\right) + \cos\left(\frac{3\text{rad}}{\text{mes}}t\right) + \cos\left(\frac{5\text{rad}}{\text{mes}}t\right)\right)^2 + \left(\text{Sen}\left(\frac{1\text{rad}}{\text{mes}}t\right) + \text{Sen}\left(\frac{3\text{rad}}{\text{mes}}t\right) + \text{Sen}\left(\frac{5\text{rad}}{\text{mes}}t\right)\right)^2}$	<p>De manera análoga se repite el proceso de la pregunta b) se tiene:</p> $\overline{PT} = \frac{4}{\pi} \sqrt{\left(\cos\left(\frac{1\text{rad}}{\text{mes}}t\right) + \cos\left(\frac{3\text{rad}}{\text{mes}}t\right) + \cos\left(\frac{5\text{rad}}{\text{mes}}t\right)\right)^2 + \left(\text{Sen}\left(\frac{1\text{rad}}{\text{mes}}t\right) + \text{Sen}\left(\frac{3\text{rad}}{\text{mes}}t\right) + \text{Sen}\left(\frac{5\text{rad}}{\text{mes}}t\right)\right)^2}$	$d_{PT}(t) = \frac{4}{\pi} \sqrt{\left(\cos(t) + \frac{1}{3}\cos(3t) + \frac{1}{5}\cos(5t)\right)^2 + \left(\text{sen}(t) + \frac{1}{3}\text{sen}(3t) + \frac{1}{5}\text{sen}(5t)\right)^2}$	<p>De forma muy análoga al caso en el que observamos, se tiene que sumar la contribución de la nueva componente $x'_i = \frac{4}{5\pi} \cos(5t)$ y $y'_i = \frac{4}{5\pi} \text{sen}(5t)$ a las componentes ya obtenidas.</p> $\Rightarrow \overline{PT} = \frac{4}{\pi} \sqrt{\left(\cos(t) + \frac{1}{3}\cos(3t) + \frac{1}{5}\cos(5t)\right)^2 + \left(\text{sen}(t) + \frac{1}{3}\text{sen}(3t) + \frac{1}{5}\text{sen}(5t)\right)^2}$		<p>[VE3]-2-[00:40:06]</p> <p>H3: Aquí va a ser exactamente lo mismo.</p> <p>M3: Pero con más términos.</p> <p>H3: No!!!, exactamente lo mismo. (6)</p> <p>M3: Sólo que aquí van a haber tres.</p> <p>H3: Sí, pero ¿cuál va a ser el que sigue?</p> <p>M3: Cinco.</p> <p>H3: Coseno de 5t sobre 5.</p> <p>M3: Sí [(incomprensible, 4)]</p> <p>H6: [(Incomprensible, 2)]</p> <p>H3: Ya tienes esto, ahora le tienes que sumar =</p> <p>M3: =El otro y la coordenada =</p> <p>H3: Pero es cinco π:::</p> <p>M3: ¡Ajá!</p> <p>H3: Coseno de 5π es lo mismo.</p> <p>M3: ¡Ajá!</p> <p>H3: Entonces al final de cuentas tú vas a sacar el cuatro π::: y te va a quedar seno de cinco veces t.</p>	<p>y la otra horizontal, para poder sumarla, o sea me refiero a encontrar x y a encontrar y. Y bueno, como hizo la compañera antes con relaciones trigonométricas se puede obtener entonces el valor de x y el valor de y, que sería este:::</p> $y = \frac{4}{3\pi} \text{Sen}(3t)$ $x = \frac{4}{3\pi} \text{Cos}(3t)$ <p>Y luego vemos que habría que sumar x_1 más x, y_1 más y, y nos daría exactamente el mismo resultado.</p> <p>P: Y en esas x y y ¿$\frac{4}{3\pi}$ qué representa?</p> <p>M3: El radio de la circunferencia chiquita.</p> <p>P: El radio de la segunda circunferencia. (x)Y el 3t que está dentro de los argumentos de seno y coseno.</p> <p>M3: Es el ángulo que va.</p> <p>[VE1]-2-[01:10:22]- H1 indica que para calcular la distancia se utiliza el teorema de Pitágoras y que sería lo mismo que calcular la norma del vector.</p>
Intencionalidad	Se busca construir las primeras tres sumas parciales de dos series trigonométricas, pero con un significado asociado al fenómeno -las coordenadas del planeta- que permite determinar la distancia del planeta a la Tierra. Se espera que los estudiantes recurran a dibujar triángulos rectángulos sobre las figuras proporcionadas para identificar las razones trigonométricas involucradas, aunque para hacer la generalización a cualquier valor del tiempo se requiera que la función trigonométrica esté construida previamente (Montiel, 2011).						
¿Sobre qué objetos lo hace?	<p>Identificar</p> <p>El ángulo y los radios.</p> <p>Comparar</p> <p>Las coordenadas de los puntos.</p> <p>Medir</p> <p>El planeta y la Tierra.</p>	<p>Geometrizarse</p> <p>La circunferencia, su centro y un punto sobre ella.</p> <p>Comparar</p> <p>Las coordenadas de los puntos.</p> <p>Medir</p> <p>El planeta y la Tierra.</p>	<p>Identificar</p> <p>El ángulo y los radios.</p> <p>Comparar</p> <p>Las coordenadas de los puntos.</p> <p>Medir</p> <p>El planeta y la Tierra.</p>	<p>Geometrizarse</p> <p>La circunferencia, su centro y un punto sobre ella.</p> <p>Comparar</p> <p>Las coordenadas de los puntos.</p> <p>Medir</p> <p>El planeta y la Tierra.</p>	<p>Identificar</p> <p>El ángulo y los radios.</p> <p>Comparar</p> <p>Las coordenadas de los puntos.</p> <p>Geometrizarse</p> <p>El planeta y la Tierra, en el sistema de coordenadas.</p> <p>Medir</p> <p>El planeta y la Tierra.</p>	<p>Medir</p> <p>El planeta y la Tierra.</p> <p>Geometrizarse</p> <p>El planeta y la Tierra, en el sistema de coordenadas.</p> <p>Identificar</p> <p>Centro de cada circunferencia.</p> <p>Comparar</p> <p>Las coordenadas de los puntos.</p>	<p>Geometrizarse</p> <p>La circunferencia, su centro y un punto sobre ella.</p> <p>Comparar</p> <p>Las coordenadas de los puntos.</p> <p>Identificar</p> <p>El ángulo y los radios.</p> <p>Identificar</p> <p>Centro de cada circunferencia.</p> <p>Medir</p> <p>El planeta y la Tierra.</p>
¿Sobre qué relaciones lo hace?	<p>Identificar</p> <p>Parametrizar utilizando coordenadas polares.</p> <p>Comparar</p> <p>Considerando los puntos como vectores, para determinar las coordenadas del punto siguiente basta con sumar el vector del punto que se agrega.</p> <p>Medir</p> <p>La norma del vector.</p>	<p>Geometrizarse</p> <p>El triángulo rectángulo cuya hipotenusa corresponde al segmento cuyos extremos son el centro y el punto sobre la circunferencia, y cuyos catetos corresponden a las coordenadas de ese punto sobre la circunferencia (considerando un sistema de coordenadas cuyo origen sea el centro de la circunferencia).</p> <p>Comparar</p> <p>Para determinar las coordenadas del punto siguiente basta con sumar en cada coordenada la diferencia aportada por la nueva circunferencia.</p> <p>Medir</p> <p>Fórmula de la distancia de un punto al origen.</p>	<p>Identificar</p> <p>Parametrizar utilizando coordenadas polares.</p> <p>Comparar</p> <p>Considerando los puntos como vectores, para determinar las coordenadas del punto siguiente basta con sumar el vector del punto que se agrega.</p> <p>Medir</p> <p>La norma del vector.</p>	<p>Geometrizarse</p> <p>El triángulo rectángulo cuya hipotenusa corresponde al segmento cuyos extremos son el centro y el punto sobre la circunferencia, y cuyos catetos corresponden a las coordenadas de ese punto sobre la circunferencia (considerando un sistema de coordenadas cuyo origen sea el centro de la circunferencia).</p> <p>Comparar</p> <p>Para determinar las coordenadas del punto siguiente basta con sumar en cada coordenada la diferencia aportada por la nueva circunferencia.</p> <p>Medir</p> <p>Fórmula de la distancia entre dos puntos.</p>	<p>Identificar</p> <p>Parametrizar utilizando coordenadas polares.</p> <p>Comparar</p> <p>Para determinar las coordenadas del punto siguiente basta con sumar en cada coordenada la diferencia aportada por la nueva circunferencia.</p> <p>Geometrizarse</p> <p>El triángulo rectángulo cuya hipotenusa corresponde al segmento cuyos extremos son el planeta y la Tierra, y cuyos catetos corresponden a las coordenadas del planeta (considerando un sistema de coordenadas cuyo origen sea la Tierra).</p> <p>Medir</p> <p>Teorema de Pitágoras.</p>	<p>Medir</p> <p>Fórmula de la distancia entre dos puntos.</p> <p>Geometrizarse</p> <p>El triángulo rectángulo cuya hipotenusa corresponde al segmento cuyos extremos son el centro y el punto sobre la circunferencia, y cuyos catetos corresponden a las coordenadas de ese punto sobre la circunferencia (considerando un sistema de coordenadas cuyo origen sea el centro de la circunferencia).</p> <p>Identificar</p> <p>Cambio de sistema coordenadas, a uno cuyo origen sea el centro de la última circunferencia.</p> <p>Comparar</p> <p>Para determinar las coordenadas del punto siguiente basta con sumar en cada coordenada la diferencia aportada por la nueva circunferencia.</p>	<p>Geometrizarse</p> <p>El triángulo rectángulo cuya hipotenusa corresponde al segmento cuyos extremos son el centro y el punto sobre la circunferencia, y cuyos catetos corresponden a las coordenadas de ese punto sobre la circunferencia (considerando un sistema de coordenadas cuyo origen sea el centro de la circunferencia).</p> <p>Comparar</p> <p>Para determinar las coordenadas del punto siguiente basta con sumar en cada coordenada la diferencia aportada por la nueva circunferencia.</p> <p>Identificar</p> <p>Parametrizar utilizando coordenadas polares.</p> <p>Identificar</p> <p>Cambio de sistema coordenadas, a uno cuyo origen sea el centro de la última circunferencia.</p> <p>Medir</p> <p>Norma de un vector y Teorema de Pitágoras.</p>
¿Por medio de qué lo hace?	<p>Identificar</p> <p>Iconico:</p> <p>Algebraico: $R = r_1(\cos\theta_1, \text{sen}\theta_1)$</p> <p>Comparar</p> <p>Algebraico: $P = R + r_2(\cos\theta_2, \text{sen}\theta_2)$.</p> <p>Medir</p> <p>Algebraico: $\vec{P} = ((r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2)^2 + (r_1 \text{sen}\theta_1 + r_2 \text{sen}\theta_2)^2)^{1/2}$.</p>	<p>Geometrizarse</p> <p>Iconico:</p> <p>Algebraico: $\cos t = \frac{x_1}{R}$ $\text{sen} t = \frac{y_1}{R}$</p> <p>Algebraico: $\cos 3t = \frac{x_1'}{R}$ $\text{sen} t = \frac{y_1'}{R}$</p> <p>Comparar</p> <p>Algebraico: $x_2 = x_1 + x_1'$ $y_2 = y_1 + y_1'$</p> <p>Medir</p> <p>Algebraico: $\overline{PT} = \sqrt{x^2 + y^2}$.</p>	<p>Identificar</p> <p>Algebraico: $(x_1, y_1) = r_1(\cos(\theta_1), \text{sen}(\theta_1))$, $(x_2, y_2) = r_1(\cos(\theta_1), \text{sen}(\theta_1)) + r_2(\cos(\theta_2), \text{sen}(\theta_2))$</p> <p>Comparar</p> <p>Algebraico: $(x_n, y_n) = \frac{4}{\pi} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} \cos((2i-1)t), \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} \text{sen}((2i-1)t) \right)$.</p> <p>Medir</p> <p>Algebraico: $d_{PT}(t) = \sqrt{x^2 + y^2}$.</p>	<p>Geometrizarse</p> <p>Iconico:</p> <p>Algebraico: $x_1 = \frac{4}{\pi} \cos(t)$ $y_1 = \frac{4}{\pi} \text{sen}(t)$</p> <p>Algebraico: $x = \frac{4}{3\pi} \cos(3t)$ $y = \frac{4}{3\pi} \text{sen}(3t)$ $x' = \frac{4}{5\pi} \cos(5t)$ $y' = \frac{4}{5\pi} \text{sen}(5t)$</p> <p>Comparar</p> <p>Algebraico: $x_2 = x_1 + x$ $y_2 = y_1 + y$</p> <p>Verbal: De forma muy análoga al caso de dos circunferencias, observamos que hay que sumar la contribución de la nueva componente.</p> <p>Medir</p> <p>Algebraico: $\overline{PT} = \sqrt{(y_2^2 - 0)^2 + (x_2^2 - 0)^2} = \sqrt{y_2^2 + x_2^2}$.</p>	<p>Identificar</p> <p>Iconico:</p> <p>Algebraico: $x_1 = TR \cos\theta$ $x_1 = TR \text{Sen}\theta$</p> <p>Comparar</p> <p>Algebraico: $x_2 = x_1 + x_2'$</p> <p>Geometrizarse</p> <p>Iconico:</p> <p>Medir</p> <p>Algebraico: $r^2 = x_2^2 + y_2^2, A^2 = x_3^2 + y_3^2$.</p>	<p>Medir</p> <p>Verbal: [VE3]-2-[00:16:05]</p> <p>M3: Sí, pero ya utilizar la distancia de (3) la ecuación de la distancia entre dos puntos (3) si tienes las coordenadas, ¿no?</p> <p>[VE3]-2-[00:33:24]</p> <p>M3: No, pero ya tienes de aquí, ¿no? x_2 y y_2, entonces con la de la distancia.</p> <p>H6: No, porque aquí tienes esta y este está chueco.</p> <p>M3: No, pero con la distancia entre dos puntos, ya conoces las coordenadas de esta y esta está en el origen.</p> <p>[VE3]-2-[00:34:41]</p> <p>M3: x_2 al cuadrado menos, más =</p> <p>H3: =O sea la norma de este [vector]</p> <p>M3: [es más o menos, es más ¿no?</p> <p>Geometrizarse</p> <p>Verbal: [VE3]-2-[00:17:53]</p> <p>H3: Todo lo haces triángulos rectángulos.</p> <p>M3: Ahí está. A poco no, a poco no lo estás haciendo triángulos rectángulos.</p> <p>H3: Sí, si está bien triangulados, bien triangulados.</p> <p>[VE3]-2-[00:18:23]</p> <p>M3: Tienes los radios.</p>	<p>Geometrizarse</p> <p>Iconico:</p> <p>Algebraico: $\cos t = \frac{x_1}{R}$ $\text{sen} t = \frac{y_1}{R}$</p> <p>$y = \frac{4}{3\pi} \text{Sen}(3t)$ $x = \frac{4}{3\pi} \text{Cos}(3t)$</p> <p>Comparar</p> <p>Iconico:</p> <p>Algebraico:</p>

Parte I. Comprendiendo el modelo							
Intención: Se busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Invariantes de Acciones	<ul style="list-style-type: none"> - Parametrizar utilizando coordenadas polares. - Cambio de sistema coordenadas, a uno cuyo origen sea el centro de la última circunferencia. - Considerando los puntos como vectores, para determinar las coordenadas del punto siguiente basta con sumar el vector del punto que se agrega. - Para determinar las coordenadas del punto siguiente basta con sumar en cada coordenada la diferencia aportada por la nueva circunferencia. - El triángulo rectángulo cuya hipotenusa corresponde al segmento cuyos extremos son el centro y el punto sobre la circunferencia, y cuyos catetos corresponden a las coordenadas de ese punto sobre la circunferencia (considerando un sistema de coordenadas cuyo origen sea el centro de la circunferencia). - Norma de un vector. Fórmula de Distancia entre dos puntos. Teorema de Pitágoras. 						

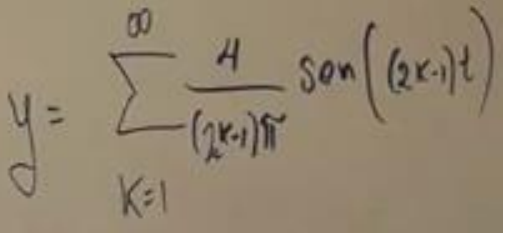
Parte II. ¿Y si agregamos más epiciclos?							
Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	<p>La trayectoria comienza a tomar una figura particular. El número de bucles aumenta al aumentar el número de circunferencias.</p> <p>En la parte central los bucles parecen juntarse más hasta formar dos líneas paralelas donde la distancia es mínima.</p> <p>La trayectoria en los laterales se alarga.</p>	<p>Conforme se le agregan mas circunferencias la parte central de la trayectoria se acerca a una recta y los extremos a circunferencias, ademas el tiempo en la parte central es mucho mas tardado que formar que los extremos.</p>	<p>Se tiende a formar una figura parecida a dos líneas paralelas unidas por arcos.</p>	<p>A medida que se agregan más circunferencias podemos observar una tendencia hacia una figura que recuerda a un "huesito", con una línea recta en la parte central y dos medios círculos en las partes extremas de la trayectoria que tienden a ser más grandes cuando agregamos más circunferencias.</p>	<p>Toman la forma definida de dos rectas secantes paralelas horizontales a la circunferencia.</p>	<p>[VE3]-2-[01:18:03]</p> <p>H3: ¿Cómo le llamarías tu a la forma? ¿qué parece?</p> <p>M3: No sé, yo le puse que en la parte central de la trayectoria se acerca ya casi a una línea recta y en los extremos como circunferencias, pues ni modo que le ponga hueso de perro ((risas)).</p>	<p>[VG]-2-[01:58:28]</p> <p>P: ((Leyendo la pregunta)) ¿Cómo cambia la trayectoria del planeta conforme se agregan más y más circunferencias?</p> <p>H4: Toma una forma definida.</p> <p>P: Entonces, ¡ajá! Supuse que iban a pregunt- a explicar lo mismo, ¿verdad? ¿A qué se parece esa forma? Si claro, tiene una forma definida, pero no es la misma forma de la otra.</p> <p>H4: Como dos horizontales.</p> <p>P: Como dos horizonta::les.</p> <p>M2: °Curva semiflor°. (21)</p> <p>P: Como dos horizontales ¿qué más? ¿qué forma le ven?</p> <p>H6: Pos parece una=</p> <p>P: =¿O le vieron?</p> <p>H6: Especie de mancuerna, como siempre hay dos circunferencias, bueno a partir de dos, siempre están esas dos circunferencias ((con sus manos hace referencia a los extremos de la trayectoria)) nada más que parece que están agregando más.</p> <p>H3: Se están separando más ((con sus manos hace referencia a que los extremos de la trayectoria se separan))</p> <p>M3: ¡Ajá!</p> <p>P: Ah ok, si vemos menos, entonces algo como que se va a ir separando. Vamos a ver eso.</p> <p>H3: Al revés, (x)si ponemos menos entonces se juntarian.</p> <p>P: ¡Ajá, eso!</p> <p>H6: ¡Ajá! Puede ser con cuatro, pero salen como más pequeñas y así ((con sus manos hace referencia a que están los extremos de la trayectoria juntos))</p> <p>P: Entonces, otra vez, como que esto y esto se va separando y aquí en medio qué pasa, como que se agregan de estos brinquitos o qué.</p> <p>M2: [¡Ajá!]</p> <p>H3: [¡Ajá!], sí.</p> <p>P: ¿Eso es más o menos lo que pasa? ((los alumnos asienten con la cabeza))</p>

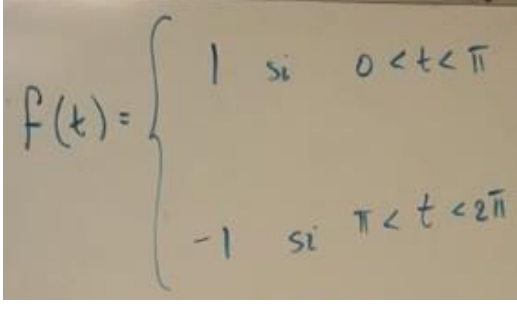
Intencionalidad	Se tiene como expectativa que el estudiante identifique que la trayectoria del planeta se estabiliza conforme se agregan más circunferencias. Se espera que la respuesta surja por sí sola con base en el trabajo realizado en la Tarea #1.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	<p>Comparar</p> <p>Las trayectorias.</p> <p>Observar</p> <p>Las trayectorias.</p>	<p>Comparar</p> <p>Las trayectorias.</p> <p>Comparar</p> <p>Distintas partes de una misma trayectoria.</p>	<p>Comparar</p> <p>Las trayectorias.</p>	<p>Comparar</p> <p>Las trayectorias.</p>	<p>Comparar</p> <p>Las trayectorias.</p>	<p>Comparar</p> <p>Las trayectorias.</p>	<p>Comparar</p> <p>Las trayectorias.</p>
¿Sobre qué relaciones lo hace?	<p>Comparar</p> <p>La forma de la trayectoria.</p> <p>Observar</p> <p>La forma de la trayectoria.</p>	<p>Comparar</p> <p>La forma de la trayectoria.</p> <p>Comparar</p> <p>Distancia recorrida en función del tiempo.</p>	<p>Comparar</p> <p>La forma de la trayectoria.</p>	<p>Comparar</p> <p>La forma de la trayectoria.</p>	<p>Comparar</p> <p>La forma de la trayectoria.</p>	<p>Comparar</p> <p>La forma de la trayectoria.</p>	<p>Comparar</p> <p>La forma de la trayectoria.</p>
¿Por medio de qué lo hace?	<p>Comparar</p> <p>Verbal: La trayectoria comienza a tomar una figura particular.</p> <p>Verbal: En la parte central los bucles parecen juntarse más hasta formar dos líneas paralelas.</p> <p>Observar</p> <p>Verbal: El número de bucles aumenta al aumentar el número de circunferencias.</p> <p>Verbal: En la parte central los bucles parecen juntarse más hasta formar dos líneas paralelas.</p> <p>Verbal: La trayectoria en los laterales se alarga.</p>	<p>Comparar</p> <p>Verbal: Conforme se le agregan mas circunferencias la parte central de la trayectoria se acerca a una recta y los extremos a circunferencias.</p> <p>Comparar</p> <p>Verbal: El tiempo en la parte central es mucho mas tardado que formar que los extremos.</p>	<p>Comparar</p> <p>Verbal: Se tiende a formar una figura parecida a dos líneas paralelas unidas por arcos.</p>	<p>Comparar</p> <p>Verbal: A medida que se agregan más circunferencias podemos observar una tendencia hacia una figura que recuerda a un "huesito", con una línea recta en la parte central y dos medios círculos en las partes extremas de la trayectoria.</p>	<p>Comparar</p> <p>Verbal: Toman la forma definida de dos rectas secantes paralelas horizontales a la circunferencia.</p>	<p>Comparar</p> <p>Verbal: [VE3]-2-[01:18:03]</p> <p>H3: ¿Cómo le llamarías tu a la forma? ¿qué parece?</p> <p>M3: No sé, yo le puse que en la parte central de la trayectoria se acerca ya casi a una línea recta y en los extremos como circunferencias, pues ni modo que le ponga hueso de perro ((risas)).</p>	<p>Comparar</p> <p>Verbal: [VG]-2-[01:58:28]</p> <p>P: ((Leyendo la pregunta)) ¿Cómo cambia la trayectoria del planeta conforme se agregan más y más circunferencias?</p> <p>H4: Toma una forma definida.</p> <p>P: Entonces, ¡ajá! Supuse que iban a pregunt- a explicar lo mismo, ¿verdad? ¿A qué se parece esa forma? Si claro, tiene una forma definida, pero no es la misma forma de la otra.</p> <p>H4: Como dos horizontales.</p> <p>P: Como dos horizonta::les.</p> <p>M2: °Curva semiflor°. (21)</p> <p>P: Como dos horizontales ¿qué más? ¿qué forma le ven?</p>

Parte II. ¿Y si agregamos más epiciclos?							
Intención:	Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.						
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Invariantes de Acciones	- La forma de la trayectoria.						
Pregunta b	<p>EL valor de la distancia del planeta P a la Tierra oscila al agregar más circunferencias para los valores de $t = \frac{\pi}{12}$, $t = \frac{3\pi}{4}$.</p> <p>El rango de oscilación va disminuyendo al agregar más circunferencias.</p> <p>Cuando P está en los puntos más alejados, es decir, en $t = \pi$ y $t = 2\pi$, la distancia aumenta al aumentar el número de circunferencias.</p>	<p>Para $t = \frac{\pi}{12}$</p> <p>Entre más circunferencias se agregan la distancia PT va aumentando</p> <p>Para $t = \frac{3\pi}{4}$</p> <p>A un mismo la distancia PT aumenta hasta 1.19 después baja a 1.13 y toma valores de 1.11, 1.14 y 1.17 y se vuelve a repetir el proceso volviendo a 1.13 y variando entre 1.14, 1.15 y así.</p> <p>Para $t = \pi$</p> <p>Entre más circunferencias se agregan la distancia PT va aumentando.</p> <p>Para $t = 2\pi$</p> <p>De igual forma entre más circunferencias agregamos más aumenta PT.</p> <p>Entonces en general en cada rotación t tiene un comportamiento distinto</p>	<p>En $t = \pi/12$, $3\pi/4$ las funciones seno y coseno no alcanzan valores extremos ni 0. Pero la distancia converge.</p> <p>En $t = \pi$, 4π las función seno vale 0 y coseno -1, l respectivamente. La función de distancia se maximiza.</p> <p>En general, hay 2 máximos y 2 mínimos de distancia según el tiempo.</p>	<p>Para $t = \frac{\pi}{12}$ observamos una tendencia a la estabilidad, convergiendo la distancia al planeta a un valor específico</p> <p>Para $t = \frac{3\pi}{4}$ observamos una proporción de oscilación alrededor de un punto muy específicas, observando convergencia a un punto específico</p> <p>Para $t = \pi$ observamos el punto P en la misma posición respecto a la horizontal del eje del círculo. En $t = 2\pi$ es similar solo que al lado contrario</p> <p>Conforme $t = \pi$ y $t = 2\pi$, todos los puntos convergen a un valor.</p> <p>Comportamiento de P en $t = 2\pi$</p>	<p>$t = 2\pi$ para $t = \frac{\pi}{12}$ mientras más circunferencias se añaden, la sucesión de puntos P al tiempo t, forma una espiral hacia un cierto calor fijo (parecido a una serie de Fibonacci)</p> <p>Para $t = \frac{3\pi}{4}$, la sucesión de puntos vuelve a tomar el valor de una espiras, pero ahora el punto P, termina más cerca de la tierra y se acerca en menos puntos que en para el tiempo anterior.</p> <p>Para $t = \pi$ la sucesión de puntos P se aleja cada vez más del punto P, lo mismo para $t = 2\pi$.</p> <p>Así, para cualquier t, mientras más se aleje de $t = \pi$ y $t = 2\pi$, el punto P, mientras más circunferencias se agreguen, se acercará al punto P.</p>	<p>[VE3]-2-[01:29:44]</p> <p>M3: ¿En qué parámetro estás?</p> <p>H3: Ah, es $\frac{\pi}{12}$</p> <p>M3: (Incomprensible, 2)</p> <p>H3: (incomprensible, 2)</p> <p>M3: Que aumenta como si fuera una (2) ¿es serie de Fibonacci? Porque va así ((hace un sonido para explicar la forma)).</p> <p>[VE3]-2-[01:31:34]</p> <p>H6: ¿Tú qué viste de esos?</p> <p>M3: Pues cómo va aumentando, pero cómo aumenta de distintos lados.</p> <p>H6: (x)Quiero encontrar algo analítico aquí, pero no me da.</p> <p>[VE3]-2-[01:31:34]- ¿refiriéndose a $t = \pi$ y $t = 2\pi$?</p> <p>M6: ¡Ay! Si es cierto, si oscila, con razón no estaba loca. En tres cuartos de π, es que se me hizo raro que ese no aumentaba tanto, oscilaba mira, y sí, solamente baila.</p> <p>H3: No es cierto, a ver.</p> <p>[VE3]-2-[01:34:56]</p> <p>H6: ¿No hay un patrón en general ahí?</p> <p>M3: No.</p> <p>H6: (6)</p> <p>H6: Como que va convergiendo a un punto. (10)</p> <p>Está oscilando más que todo, pero va de manera (2) uniforme.</p> <p>[VE3]-2-[01:37:11]</p> <p>H3: Y este 2π solo se alarga ¿verdad?</p> <p>M3: ¡Ajá! Por la, por la derecha</p> <p>H3: ¿Crees que tienda a algún punto en específico? Porque, por ejemplo, este, este que está aquí ya sabe que está en la parte que se hace una línea recta, ¿no? Esa casi no da (incomprensible, 1)</p> <p>Entonces este de acá, también tiende digamos a un punto, pero este de acá crees que también se acerque a un punto si agregaras una circunferencia.</p> <p>M3: No sé, yo creo que, yo siento que ese se va a seguir estirando, y estirando, y estirando.</p> <p>H3: ¿Mmm?</p> <p>M3: Yo siento que sí. (13)</p> <p>H6: ¡Huy mira, si está interesante esto, si es una serie de Fourier, ¿no?</p> <p>M3: ¿Eh?</p> <p>H6: Las series de=</p> <p>M3: =Es que es lo que le decía a él. que este se comporta de otra manera distinta. No sé si sea, la manera natural.</p> <p>H6: No, de hecho, si se comporta igual. Has de cuenta.</p> <p>M3: No, porque la otra hacia esto ((hace un sonido para hablar de la forma)).</p> <p>H6: No fijate, en un instante de t cualquiera agreguemos dos circunferencias, has de cuenta que es lo mismo, exactamente (incomprensible, 1) o tienes tres, tienes exactamente el mismo, entonces fijate este es el primer caso en el que estábamos, este es el caso que analizamos, ¿lo recuerdas?</p> <p>M3: Mmm, ah si tienes razón, sí es la misma.</p> <p>H6: Entonces fijate al agregar cuatro, tendrías este (incomprensible, 1, ¿radio?) y obviamente converge a algún punto.</p>	<p>[VG]-2-[02:02:31]</p> <p>P: ¿Qué fue lo que hicieron? (5)</p> <p>¿Le movieron acá? ((Los alumnos responden afirmativamente)) Entonces por ejemplo para $t = \frac{\pi}{12}$ ¿qué respondieron?</p> <p>H4: Primero tiene como esa forma (x)de (x)espiral</p> <p>P: ¡Ajá!</p> <p>H4: Converge a un valor fijo.</p> <p>P: Y converge a un valor fijo, ajá ¿qué más? Entonces va tomando como esa forma de espiral y parece que converge a un valor. Pues sí, como que va oscilando, ¿no? Oscila entre un valor y siempre va ((con su mano hace un movimiento con el dedo que va de un lado a otro))</p> <p>H3: No::, porque ves que se forma una espiral ((hace el movimiento en espiral con su mano))</p> <p>H6: O sea sí, pero si lo ves digamos en la manera lineal como que va oscilando hasta llegar a un valor.</p> <p>P: ¡Ujú! Ok, entonces sí, va formar como una espiral, pero se va moviendo como alrededor (x)de algún valor específico. ((Los estudiantes asienten con la cabeza)) Ok. ¿En $t = \frac{3\pi}{4}$ sucede lo mismo, o? ((Varios estudiantes dicen que No))</p> <p>¿No? Sucede otra cosa, vamos a ver, $\frac{3\pi}{4}$ a ver, qué pusieron que sucedía antes de que lo veamos.</p> <p>M3: Primero aumenta y luego se queda oscilando en un valor.</p> <p>P: $\frac{3\pi}{4}$ aquí está, es 2.36 más o menos, ok entonces veamos, entonces primero aumenta, empieza en 1.27.</p> <p>M3: ¡Ajá! Aumenta y ya después va, (x)se queda oscilando.</p> <p>H4: Pero eso es lo mismo que la otra, ¿no?</p> <p>H3: Sí, si es lo mismo.</p> <p>H6: Pero es diferente, a no sí.</p> <p>M3: No, es que se queda como en un parámetro.</p> <p>P: Como en un parámetro. Porque esta es como en uno uno, uno dieciocho, diecisiete</p> <p>M3: Y baja y sube, y oscila.</p> <p>P: Baja y sube. ¿Cómo que sí se comporta similar, no? ((varios estudiantes responden que sí)) Como que oscila también igual alrededor de algún, de un valor.</p> <p>[VG]-2-[02:04:44]</p> <p>P: ¿En $t = \pi$ y $t = 2\pi$?</p> <p>M2: Crecen (incomprensible, 1).</p> <p>M3: Crecen.</p> <p>H4: Crece a la suma del radio, los radios.</p> <p>H6: Ah, pero es máximo ¿verdad?</p> <p>P: Crecen lo mismo nada más que una está aquí y la otra está de este otro lado, ¿verdad? ¿Sí? ((H6 asiente con la cabeza)) ¿Entonces qué pasa ahí, entonces con la, con la distancia del planeta?</p> <p>M3: Aumenta=</p> <p>H6: =Se va haciendo más grande.</p> <p>P: ¿Siempre aumenta?</p> <p>H6: ¡Ajá! Siempre se va a alejar.</p> <p>P: ¿Tendrá cota? ¿Será acotado o no?</p> <p>H1: ¡Sí!</p> <p>H3: Yo creo que sí.</p> <p>H1: Hay otra serie, para:::, bueno para valores finitos, como ahí lo aproximaba. Eh, (x)la serie, cuál era, suma parcial.</p> <p>P: ¡Ujú!</p> <p>H1: La serie trigonométrica, de hecho, esta (x)no cumple aquí, pero para valores finitos si converge, se estaría estirando ((explica con el movimiento de sus manos))</p> <p>P: Ok, otra vez, la convergencia es algo de infinitud, ¿sí?</p> <p>H1: ¡Ajá! (x)No converge.</p> <p>P: Entonces=</p> <p>H3: (Incomprensible, 1)</p> <p>H1: La horizontal</p> <p>H3: ¡Ajá!</p> <p>H1: O sea, la vertical sí, pero la horizontal se va estirando indefinidamente ((explica con el movimiento de sus manos))</p> <p>H6: Pero es que van decreciendo los radios cada vez más, o sea (x)si hay un valor al que tienen que=</p> <p>H3: =Pero van a seguir sumando algo.</p> <p>H1: No, porque ya vieron (x)como definimos los radios.</p> <p>H6: Es como la serie $\frac{1}{2^n}$, o sea va creciendo va sumando algo, pero si hay un valor al que igual llegas</p> <p>H1: (x)En la tarea pasada definieron al radio como, o sea decrecía conforme a los impares, y la de suma de impares no converge, ni la de todos los naturales, ni pares ni impares converge.</p> <p>P: Entonces aquí lo que está pasando es que estamos sumando [los radios].</p>

Parte II. ¿Y si agregamos más epiciclos?								
Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.								
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común	
¿Sobre qué relaciones lo hace?	<p>Identificar</p> <p>La abscisa del planeta corresponde a una suma de cosenos y ordenada corresponde a una suma de senos.</p> <p>El coeficiente del término <i>n-ésimo</i> corresponde al radio de la circunferencia <i>n-ésima</i>.</p> <p>El argumento para el término <i>n-ésimo</i> corresponde a la velocidad del punto sobre la circunferencia <i>n-ésima</i> multiplicada por el tiempo.</p>	<p>Identificar</p> <p>La abscisa del planeta corresponde a una suma de cosenos y ordenada corresponde a una suma de senos.</p> <p>El coeficiente del término <i>n-ésimo</i> corresponde al radio de la circunferencia <i>n-ésima</i>.</p> <p>El argumento para el término <i>n-ésimo</i> corresponde a la velocidad del punto sobre la circunferencia <i>n-ésima</i> multiplicada por el tiempo.</p>	<p>Identificar</p> <p>La abscisa del planeta corresponde a una suma de cosenos y ordenada corresponde a una suma de senos.</p> <p>El coeficiente del término <i>n-ésimo</i> corresponde al radio de la circunferencia <i>n-ésima</i>.</p> <p>El argumento para el término <i>n-ésimo</i> corresponde a la velocidad del punto sobre la circunferencia <i>n-ésima</i> multiplicada por el tiempo.</p>	<p>Identificar</p> <p>La abscisa del planeta corresponde a una suma de cosenos y ordenada corresponde a una suma de senos.</p> <p>El coeficiente del término <i>n-ésimo</i> corresponde al radio de la circunferencia <i>n-ésima</i>.</p> <p>El argumento para el término <i>n-ésimo</i> corresponde a la velocidad del punto sobre la circunferencia <i>n-ésima</i> multiplicada por el tiempo.</p>	<p>Identificar</p> <p>La abscisa del planeta corresponde a una suma de cosenos y ordenada corresponde a una suma de senos.</p> <p>El coeficiente del término <i>n-ésimo</i> corresponde al radio de la circunferencia <i>n-ésima</i>.</p> <p>El argumento para el término <i>n-ésimo</i> corresponde a la velocidad del punto sobre la circunferencia <i>n-ésima</i> multiplicada por el tiempo.</p>	<p>Identificar</p> <p>La abscisa del planeta corresponde a una suma de cosenos y ordenada corresponde a una suma de senos.</p> <p>El coeficiente del término <i>n-ésimo</i> corresponde al radio de la circunferencia <i>n-ésima</i>.</p> <p>El argumento para el término <i>n-ésimo</i> corresponde a la velocidad del punto sobre la circunferencia <i>n-ésima</i> multiplicada por el tiempo.</p>	<p>Identificar</p> <p>La abscisa del planeta corresponde a una suma de cosenos y ordenada corresponde a una suma de senos.</p> <p>El coeficiente del término <i>n-ésimo</i> corresponde al radio de la circunferencia <i>n-ésima</i>.</p> <p>El argumento para el término <i>n-ésimo</i> corresponde a la velocidad del punto sobre la circunferencia <i>n-ésima</i> multiplicada por el tiempo.</p>	<p>Identificar</p> <p>La abscisa del planeta corresponde a una suma de cosenos y ordenada corresponde a una suma de senos.</p> <p>El coeficiente del término <i>n-ésimo</i> corresponde al radio de la circunferencia <i>n-ésima</i>.</p> <p>El argumento para el término <i>n-ésimo</i> corresponde a la velocidad del punto sobre la circunferencia <i>n-ésima</i> multiplicada por el tiempo.</p>
¿Por medio de qué lo hace?	<p>Identificar</p> <p>Iconico:</p>  <p>Algebraico:</p> $(x_n, y_n) = \left(\sum_{j=1}^n x_j, \sum_{j=1}^n y_j \right) = \left(\sum_{j=1}^n r_j \cos(\theta_j), \sum_{j=1}^n r_j \sin(\theta_j) \right)$ $d_{PT} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n r_i \cos((2i-1)t) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n r_i \sin((2i-1)t) \right)^2}$ <p>Con $r_1 = \frac{1.27}{2i-1}$</p>	<p>Identificar</p> <p>Algebraico:</p> $\vec{P} = \sqrt{\left(r_1 \cos \omega t + r_2 \cos 3\omega t + \dots + r_n \cos (2n-1)\omega t \right)^2 + \left(r_1 \sin \omega t + r_2 \sin 3\omega t + \dots + r_n \sin (2n-1)\omega t \right)^2}$ $= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n r_i \cos(2i-1)t \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n r_i \sin(2i-1)t \right)^2}$	<p>Identificar</p> <p>Algebraico:</p> $d_{PT}(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} \cos((2i-1)t) \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} \right]^2$ $i = 1, 2, \dots, n.$	<p>Identificar</p> <p>Iconico:</p>  <p>Algebraico:</p> $\vec{r}_i = (r_i \cos(\omega_i t), r_i \sin(\omega_i t))$ $\vec{R}_i = (R_i \cos(\omega_i t), R_i \sin(\omega_i t))$ $\vec{R}_i = (R_i \cos(\omega_i t) + r_i \cos(\omega_i t), R_i \sin(\omega_i t) + r_i \sin(\omega_i t))$ $\vec{R}_i = (R_i \cos(\omega_i t) + r_i \cos(\omega_i t), R_i \sin(\omega_i t) + r_i \sin(\omega_i t))$ $\vec{R}_i = (R_i \cos(\omega_i t) + r_i \cos(\omega_i t), R_i \sin(\omega_i t) + r_i \sin(\omega_i t))$ $\vec{R}_i = (R_i \cos(\omega_i t) + r_i \cos(\omega_i t), R_i \sin(\omega_i t) + r_i \sin(\omega_i t))$	<p>Identificar</p> <p>Algebraico:</p> $r = \frac{4}{\pi} \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{\cos(2n-1)t}{2n-1} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$	<p>Identificar</p> <p>Verbal: [VE3]-2-[01:55:57]</p> <p>H3: Pues sí, es lo que se me ocurre. Es hacer exactamente lo mismo, pero ahora con esa madre, el valor del radio y el valor de a velocidad angular. (incomprensible, 2) La velocidad es angular en términos generales, ¿no?</p> <p>M3: ¡Ujú!</p> <p>H3: Entonces la imagen respecto de la horizontal sería esta, sería velocidad por tiempo.</p> <p>Verbal: [VE3]-2-[01:57:46]</p> <p>H3: Creo que ya "M3" ((se refiere a M3 por su nombre)).</p> <p>M3: A ver.</p> <p>H3: Sabemos. Tienes aquí el primer punto y eso es R_1.</p> <p>M3: ¡Ujú!</p> <p>H3: El coseno de la primera velocidad angular, que ya sabes quién es, igual trae el seno, ¿no? Aquí también este la coordenada luego de (incomprensible, 5) entonces eso, crearía tu primer punto aquí. Y luego como lo habíamos hecho la otra vez, bueno en el pasado, tienes que saber el otro radio, tienes que saber la velocidad angular, pero es el mismo tiempo, entonces vas a tener que sumar estos, lo mismo para los n.</p>	<p>Identificar</p> <p>Algebraico:</p>  <p>Verbal: [VG]-2-[02:11:35]</p> <p>P: ¿Qué representarían estos $\frac{4}{(2n-1)\pi}$?</p> <p>M2: Los radios ((junto con M2 la mayoría indica que los radios))</p> <p>P: El radio de la circunferencia (3) ¿Y lo que está adentro, el $(2n-1)t$?</p> <p>H3: Pos, el ángulo.</p> <p>P: El ángulo que va cambiando, ¿verdad?</p> <p>H1: Velocidad angular.</p> <p>P: El $2n-1$ sería la velocidad angular ¿Y el $(2n-1)t$?</p> <p>H1: El ángulo.</p> <p>P: La medida del ángulo en radianes.</p>	
Invariantes de Acciones	<ul style="list-style-type: none"> - La abscisa del planeta corresponde a una suma de cosenos y ordenada corresponde a una suma de senos. - El coeficiente del término <i>n-ésimo</i> corresponde al radio de la circunferencia <i>n-ésima</i>. - El argumento para el término <i>n-ésimo</i> corresponde a la velocidad del punto sobre la circunferencia <i>n-ésima</i> multiplicada por el tiempo. 							
Pregunta d	<p>Su comportamiento puede considerarse oscilatorio. Alcanza un valor máximo y un valor mínimo.</p> 	<p>Se debe conocer el radio de las circunferencias y su velocidad angular para poder determinar la distancia del punto P a la Tierra.</p>	<p>Es una función en la que los máximos y mínimos se pueden intuir sin mucha dificultad (múltiplos de pi y múltiplos impares de pi medios, respectivamente). Pero analíticamente es difícil de demostrar.</p> <p>Es una función periódica.</p>	<p>Es necesario conocer el radio de cada círculo utilizado en el modelado de la trayectoria, así como su velocidad angular para poder determinar la forma a la que tenderá la trayectoria cuando agreguemos más círculos, este hecho se sigue de que estos parámetros alteran la forma de la trayectoria final.</p> <p>Sería conveniente que tanto los radios como las velocidades formen una progresión para poder formar trayectorias interesantes.</p>	<p>Para empezar, siempre converge a un valor, y este valor es más pequeño conforme t se aleje que pi y 2pi, pues la parte sinusoidal se anula, la parte del coseno se vuelve 1 y sólo se suman los términos del numerador y P se aleja horizontalmente.</p>	No hubo interacción al responder a esta pregunta.	<p>[VG]-2-[02:14:19]</p> <p>P: Bueno entonces esa fórmula ¿Qué relación tendría con eso? Digamos, con la estabilidad y con la, y con eso que respondieron aquí arriba.</p> <p>H4: Nada más que lo describe=</p> <p>P: ¿Qué puedes decir del comportamiento de esta fórmula, a partir de eso que respondieron ahí en esas preguntas?</p> <p>H1: Ah:: Es que la fórmula explica:: la forma que toma la figura.</p> <p>P: ¡Ujú! ¿Y respecto de lo que respondieron arriba de va tomando una forma definida?</p> <p>H4: Habría que ver los valores de convergencia. Meter al t en la fórmula y averiguar la convergencia.</p> <p>P: ¡Ajá! Por ejemplo, una cosa que podrían decir es, si ponen $t = \frac{\pi}{12}$ ¿qué le pasaría a esa fórmula? ¿sería convergente o divergente?</p> <p>M2: Convergente.</p> <p>H3: Convergente.</p> <p>H1: ¿Cuál?</p> <p>P: A esta.</p> <p>M2: [Converge].</p> <p>H1: [Convergente].</p> <p>P: ¿Si ponen $t = \frac{3\pi}{4}$?</p> <p>H3: Converge.</p> <p>P: También. Donde no tenemos, este, un acuerdo es en $t = \pi$ y $t = 2\pi$, ¿cierto? ((H3 asiente con la cabeza))</p>	
Intencionalidad	Este inciso conduce hacia la interpretación de la matemática involucrada en el fenómeno físico, relacionar la estabilidad de la trayectoria el planeta con el límite de las sumas parciales involucradas en la fórmula calculada en el inciso c. Esto es de suma importancia, pues en el trabajo de Fourier siempre hubo un ir y venir entre el fenómeno físico y la matemática involucrada, para validar la segunda en la primera (Farfán, 2012; Farfán & Romero, 2017).							
¿Sobre qué objetos lo hace?	<p>Graficar</p> <p>El planeta, la Tierra y el tiempo transcurrido.</p>	<p>Identificar</p> <p>Radio de la circunferencia y velocidad angular.</p>	<p>Distinguir</p> <p>Máximos, mínimos y periodicidad.</p>	<p>Identificar</p> <p>Radio de la circunferencia y velocidad angular.</p>	<p>Distinguir</p> <p>Fórmula evaluada en $t = \pi$ y $t = 2\pi$.</p>		<p>Distinguir</p> <p>Fórmula evaluada en valores específicos del tiempo.</p>	
¿Sobre qué relaciones lo hace?	<p>Graficar</p> <p>Distancia del planeta a la Tierra respecto del tiempo.</p>	<p>Identificar</p> <p>Distancia del planeta a la tierra.</p>	<p>Distinguir</p> <p>La fórmula.</p>	<p>Identificar</p> <p>Forma de la trayectoria.</p>	<p>Distinguir</p> <p>Forma de la trayectoria (convergencia).</p>		<p>Distinguir</p> <p>Forma de la trayectoria (convergencia).</p>	
¿Por medio de qué lo hace?	<p>Graficar</p> <p>Iconico:</p> 	<p>Identificar</p> <p>Verbal: Se debe conocer el radio de las circunferencias y su velocidad angular para poder determinar la distancia del punto P a la Tierra.</p>	<p>Distinguir</p> <p>Verbal: Es una función en la que los máximos y mínimos se pueden intuir sin mucha dificultad (múltiplos de pi y múltiplos impares de pi medios, respectivamente). Pero analíticamente es difícil de demostrar. Es una función periódica.</p>	<p>Identificar</p> <p>Verbal: Es necesario conocer el radio de cada círculo utilizado en el modelado de la trayectoria, así como su velocidad angular para poder determinar la forma a la que tenderá la trayectoria cuando agreguemos más círculos, este hecho se sigue de que estos parámetros alteran la forma de la trayectoria final.</p>	<p>Distinguir</p> <p>Verbal: Siempre converge a un valor, y este valor es más pequeño conforme t se aleje que pi y 2pi, pues la parte sinusoidal se anula, la parte del coseno se vuelve 1 y sólo se suman los términos del numerador y P se aleja horizontalmente.</p>		<p>Distinguir</p> <p>Verbal: [VG]-2-[02:14:45]</p> <p>H1: Ah:: Es que la fórmula explica:: la forma que toma la figura.</p> <p>P: ¡Ujú! ¿Y respecto de lo que respondieron arriba de va tomando una forma definida?</p> <p>H4: Habría que ver los valores de convergencia. Meter al t en la fórmula y averiguar la convergencia.</p>	
Invariantes de Acciones	- Forma de la trayectoria (convergencia).							
Pregunta e.1	<p>Tiene un valor mínimo en π que decrece cuando aumenta el número de circunferencias. En los valores de $t = 0$, $t = 2\pi$, crece cuando aumenta el número de circunferencias.</p>	<p>Se comporta como una serie de Fourier de Cosenos, que dependerá de la velocidad angular, ya que inicia en un punto máximo alcanza un mínimo y vuelve a recuperar un punto máximo en un determinado.</p>	<p>Conforme aumenta el número de círculos. Va desde el valor máximo hasta el mínimo dentro del intervalo $((2n-2)\pi, (2n-1)\pi)$ y del mínimo al máximo dentro del intervalo $((2n-1)\pi, 2n\pi)$.</p>	<p>Como una especie de serie (suma infinita) de cosenos, esto se deduce de la expresión general calculada para la distancia de T a P y de la forma de la suma parcial de abscisas cuando se tiene una sola circunferencia, la serie se deforma hasta el punto en que parece formar una especie de señal con forma de V.</p>	Toma un valor constante en π	<p>[VE3]-2-[02:14:20]</p> <p>M3: Dice abscisas primero, ¿no?</p> <p>H6: Las abscisas convergen a la función periódica, ¿no?</p> <p>M3: Ah:: no sé.</p> <p>[VE3]-2-[02:14:59]</p> <p>H3: ¿Será que esta es una serie de cosenos y la otra una serie de senos?</p> <p>M3: Tendría sentido.</p> <p>H3: Puramente de senos y una puramente de cosenos.</p> <p>M3: Una serie de (incomprensible, 1) en cosenos, tendría sentido.</p> <p>H3: Sí, ¿no? Porque, porque ve lo que tenemos aquí una suma pura de cosenos y acá una suma pura de senos.</p> <p>M3: ¡Pues es lo que te dije desde hace rato!</p> <p>[VE3]-2-[02:16:04]</p> <p>H6: ¿A dónde converge?</p>	<p>[VG]-2-[02:16:46]</p> <p>H7: Pues que es una función oscilante y los máximos y mínimos son la suma de los radios.</p> <p>P: Ok.</p> <p>H4: Que toma también un valor constante, ¿no? Entre 0 y π (x)las sumas de las coordenadas.</p> <p>H7: Pero si las abscisas no son coordenadas.</p> <p>H4: Ah de las abscisas, pues como quiera es continua, ¿no? La gráfica que describe. Ok, ¿y en π?</p> <p>P: Parece una discontinuidad.</p> <p>P: ¿Parece una discontinuidad? ¿de qué tipo?</p> <p>H4: Una divergencia, ¿no?</p> <p>H7: Pero aquí toma el valor de la suma de los radios, ¿no? Y no sabemos si converge o diverge.</p>	

Parte II. ¿Y si agregamos más epiciclos?							
Intención:	Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.						
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
						<p>M3: ((risas))</p> <p>H6: Diverge, ¿no?</p> <p>M3: Ah, si es cierto. No sé, es que no hemos visto convergencias así.</p> <p>H6: ¿Qué te pasa "M3"? ((se refiere a M3 por su nombre))</p> <p>H3: Pos ahorita tienes que ver a dónde converge, es como las otras dos, la de senos se ve muy clarito que se van (x) a un valor positivo y al otro se va a otro valor negativo nada más.</p> <p>H6: Una se va a =</p> <p>H3: =Ah bueno, pero eso no quiere decir que converja verdad.</p> <p>M3: No:::</p> <p>H3: O sea que se vuelve más bien como una función escalonada.</p> <p>M3: ¿Sí:::? ((risas))</p> <p>H3: Pero la serie es diferente, ¿no?</p> <p>H6: Es que no es una función escalonada.</p> <p>H3: Sí, ¿no? La otra, la del seno.</p> <p>M3: La de los senos.</p> <p>H6: No:::, (x) no es escalonada. Lo que pasa es que esta cosa está muy chiquita, pero aquí tienes el mismo comportamiento.</p> <p>M3: Es que parece un seno amortiguado.</p>	<p>P: Ajá verdad, está esa discrepancia. Entonces, si converge ¿qué debería pasar ahí?</p> <p>H4: Convergería a la suma de los radios.</p> <p>P: ¿Y si diverge?</p> <p>M2: Se va ((mueve sus manos de abajo hacia arriba para explicar el comportamiento))</p> <p>P: Da infinito, ¿cierto? Pero la gráfica qué es sugiere ¿qué converge o que diverge?</p> <p>H4: No sé, la gráfica me indica que converge.</p> <p>M2: Es que ahí nada más estamos probando, bueno=</p> <p>P: Muy poquito ((hace referencia al número de circunferencias usadas para ver la gráfica))</p> <p>M2: Y se va viendo que el mínimo va bajando cada vez más.</p> <p>P: Ok, conforme le agregó las::: otro n, otros n's, voy a ponerle otros. Ahí en 21, voy a ponerle bastantes ya, los 25. Y lo que hizo fue bajar más, ¿verdad? Entonces conforme le agrega el n, dice "M2" ((se refiere a M2 por su nombre)), entonces, este, como que se va haciendo más hacia abajo siempre. Entonces, si le ponemos n = 50 probablemente esté (x) más abajo, ¿verdad? Entonces qué les dice eso ¿que es acotado o no es acotado?</p> <p>H1: No parece.</p> <p>P: Parece que no es acotado, ¿verdad? Entonces ¿converge o diverge?</p> <p>M3: Diverge ((junto con M3 responden varios estudiantes))</p> <p>P: Pareciera, ¿verdad? Que diverge entonces. Entonces podemos volver a las preguntas anteriores ¿qué pasa en t = π, con la distancia?</p> <p>H1: (Incomprensible, 2, ¿Sería evaluando en la serie?) ((señala la fórmula de la distancia escrita en la pizarra)) Pues el seno se cancela, en todos los múltiplos de π se hace 0.</p> <p>P: Se hace 0, ¡ajá!</p> <p>H1: Y el coseno son múltiplos impares de π o de -π y eso siempre va a dar, por ejemplo, el de da -1 con os de -π, ¿no? Digo con los de π da -1 y con los de -π.</p> <p>M2: Lo mismo.</p> <p>H1: También, así que sería la suma de, bueno más bien la serie que suma los inversos de los impares y eso diverge.</p>
Pregunta c.2	Al aumentar el número de circunferencias la suma se acerca a 1 en el rango (0, π), mientras que en el rango (π, 2π) la suma se acerca a -1.	Se comporta como una serie de Fourier de Senos, que dependerá de la velocidad angular, ya que inicia en un punto máximo se mantiene por un intervalo de tiempo y después alcanza un mínimo donde de igual manera se mantiene constante y el proceso se repite. Comportandose como un pulso.	Conforme aumenta el número de círculos. La suma de las abscisas se vuelve igual a 1 dentro del intervalo ((2n - 2)π, (2n - 1)π) ((2n-2) y -1 dentro del intervalo ((2n - 1)π, 2nπ).	Como una especie de serie (suma infinita) de senos, esto se sigue de la expresión general calculada para la distancia de T a P y de la forma de la suma parcial de ordenadas cuando se tiene una sola circunferencia la cual es una función seno, con una cierta amplitud. La serie parece deformarse hasta el punto de formar una función pulsante y periódica.	Toma un valor constante en 1 y -1. y se mantiene por un intervalo de y -pi y pi	<p>[VE3]-2-[02:07:56]</p> <p>H3: Entonces tiende a dos rectas ¿a la función escalonada? No, si brinca mucho ¿no?</p> <p>H6: Yo estoy analizando el coseno.</p> <p>M3: A ver.</p> <p>H3: No, pero es que si tiende a esa, ¿no? Sí da la escalonada.</p> <p>M3: ¡Ash!</p> <p>H3: Pero si le agregas más puntos podríamos alinearlos. Mira, es como una recta no, pero es que esto no me gusta.</p> <p>M3: Pero es que salen picos. Más bien parece un seno, ¿no?</p> <p>H3: No, está raro, porque seno no (incomprensible, 1, ¿tiene picos?)</p> <p>M3: Pero yo creo que le metieron un::: una función exponencial, a lo mejor una composición entre el seno (incomprensible, 1) y una función expo- y una (incomprensible, 1)</p> <p>H3: ¿Qué está pasando? ((risas))</p> <p>M3: Sí, ponle tú que el seno no tenga una (incomprensible, 1), da positivo de cero a pi y que el (incomprensible, 1) da negativo de pi a dos pi, ¿no?</p> <p>[VE3]-2-[02:22:51]</p> <p>H6: Tendría sentido considerar que esta tiene (incomprensible, 1), ¿no?</p> <p>H3: Sí, sí, es una función escalonada, cómo se llama ese tipo de funciones. Es que hay un tipo de función, ¿no? Cuadradas o no sé cómo=</p> <p>H6: ¿Cuál?</p> <p>H3: La que forma esta.</p> <p>H6: ¿A trozos?</p> <p>(3)</p> <p>H3: ¡Ajá! Sí.</p> <p>M3: Pero es la función de escalón:::</p> <p>H3: Es que la función escalón es cero y luego de repente empieza a valer uno.</p> <p>M3: ¡Ajá! Y luego es discontinua en un punto, pero la puedes hacer continua sin retornos.</p> <p>H3: ¡Ajá! Es que aquí se ve que es más o menos algo así, pero es que no quiero decir que es justamente un escalón, porque no parece que valga lo mismo.</p> <p>M3: ¡Ajá!</p> <p>H3: Yo digo que es más bien como una especie de pulso o algo así.</p> <p>H6: O sea, es porque=</p> <p>M3: =Ah::: quizás pulsos.</p> <p>H6: (x) Es que realmente te faltan puntos, o sea por si, es que si, ese si va así.</p> <p>H3: Entonces tendría sentido decir que es cómo.</p> <p>M3: Un pulso.</p> <p>H6: Es periódica en esos intervalos.</p> <p>H3: ¡Ajá! Porque el pulso si es perió::: dico.</p> <p>H6: Y tienes puntos de discontinuidad.</p>	<p>[VG]-2-[02:23:48]</p> <p>H1: Esa sí converge.</p> <p>P: Esa sí converge ¿en todos los puntos? ¿En todo lado, para cualquier valor de t?</p> <p>H1: Bueno, para t igual múltiplos de $\frac{\pi}{2}$, bueno múltiplos impares.</p> <p>P: ¿Sólo para t = $\frac{\pi}{2}$ pasa eso? ¿Sólo aquí o aquí? ((señalando el valor en la gráfica))</p> <p>H1: Bueno sí, (x) es fácil demostrar ese, para otros valores (x) no se cómo se demuestra que converge.</p> <p>P: Pero ¿qué pueden ver de la gráfica? Que sí.</p> <p>H1: Que converge.</p> <p>M2: Para intervalos de, si intervalos abiertos, ¿no? Que esté dentro del intervalo (0, π).</p> <p>P: Ok.</p> <p>H1: Y 2π=</p> <p>P: =¿Abiertos?</p> <p>H1: ¡Ajá! Intervalos abiertos.</p> <p>P: Entonces ¿qué pasa (x) en π?</p> <p>H4: Se cancela (incomprensible, 1), porque [(x) ahí está la discontinuidad].</p> <p>H1: ¿Cuáles son las discontinuidades?] ¿las qué, las coordenadas?</p> <p>P: ¿Tendrá? ¿Qué había dicho? "H8" ((se refiere a H8 por su nombre)) me había dicho algo ahí de ¿cerca de π qué pasa o qué parecía que pasaba?</p> <p>M2: Las discontinuidades.</p> <p>H8: La trayectoria (x) de. Ya se me olvidó ((risas))</p> <p>H1: Se hace cero, bueno (x) se ve (x) de la función y también de la gráfica que en π, la suma de las ordenadas es cero, porque solo, bueno está completamente estrado en X.</p> <p>P: Ok ¿qué opinan los demás? (6) "H8" ((se refiere a H8 por su nombre)) me había dicho que cerca de π, cerca, no me dijo en π, sino cerca de π, parece que diverge. ¿Vamos a ver qué opinan de eso? ¿Sí me habías dicho eso verdad "H8"?</p> <p>H8: Sí.</p> <p>P: Vamos a poner menos ((se refiere al número de circunferencias en el applet)) para ver qué se ve y vamos a quitar la de las abscisas. Así se ve con cinco (9). Entonces veámoslo con seis, voy a quitar el, a limpiar para que, así se ve con seis(9). Sí, ahora con siete (12). ¿Qué les parece que sucede ahí, converge o diverge?</p> <p>H1: Converge, simplemente que cambia muy rápido al otro valor de convergencia.</p> <p>P: ¿Qué opinan los demás?</p> <p>H7: Que diverge.</p> <p>P: Que diverge.</p> <p>H2: Pero es que del movimiento del Planeta se ve que da cero. (Incomprensible, 1) es continuo porque da así como saltitos, tendría que pasar por cero.</p> <p>H1: Sí. Bueno, en el tiempo se ve que por ahí tiene que pasar más rápido, por eso se ve la caída abrupta. Pero en la figura</p>

Parte II. ¿Y si agregamos más epiciclos?							
Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							simplemente tendría que pasar por el cero, porque hay un punto en que los::: la cadenita de círculos está completamente horizontal, no hay ningún término en Y, o sea en π , y en, ajá, todos los múltiplos de π .
Pregunta e.3	En la respuesta (a) menciono que la trayectoria se vuelve más alargada en π y en 2π , lo cual concuerda con esta gráfica donde podemos ver mínimo y máximo respectivamente. (Máximos si se toma el cuadrado de las sumas). La parte de la trayectoria donde los bucles parecen formar dos líneas paralelas se observa en la última gráfica donde la suma de las ordenadas se vuelve constante.	Que ambas se comportan como funciones periódicas y dependerán de la velocidad angular que tengan y los radios de las circunferencias que se van agregando.	En múltiplos de pi las abscisas están completamente estiradas, por lo que ahí son los máximos o mínimos en los que alterna la función. Luego los círculos se enciman sobre las líneas, por lo que las ordenadas suman casi una constante.	No cabe duda de que la relación existente es aquella que produce el hecho de que las coordenadas del planeta respecto al tiempo están expresadas como sumas de senos y cosenos, mismos términos que se ven alterados a causa de constantes tales como el radio de cada circunferencia y la velocidad angular de cada una de estas, esto produce la forma de la trayectoria y la altera conforme se agregan más círculos.	Concuerdan con las respuestas en a) y b)	No hubo interacción al responder esta pregunta.	[VG]-2-[02:28:08]- el profesor indica que lo discutido en las dos preguntas anteriores ya incluye la respuesta a esta pregunta.
Pregunta f	Sí converge, su comportamiento se aproxima a una constante. Converge a una función escalonada	La serie de la ordenadas converge y su valor de convergencia es la coordenada "y" de la posición del planeta con respecto a la Tierra.	La serie de ordenadas $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} \sin((2i-1)t)$ con $t=\pi/2$, es igual a $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{2i-1}$ $i=1,2,\dots$ La cual, por la propiedad telescópica tiende a $\pi/4$. Y con $0=\pi/2$ tiende a $-\pi/4$. Por lo que la serie no converge ya que tiene dos puntos de acumulación.	La serie de las ordenadas converge, aseguramos que esta serie converge al valor de la componente "y" del vector de posición del planeta respecto a T.	Parace que converge en intervalos abierto de 0 y pi y diverge cuando se acerca a los valores de 0 y múltiplos de pi	[VE3]-2-[02:29:50] H6: Según yo, el valor de convergencia es el mismo. H3: Entonces sí converge. H6: Sí conver- tiene que converger. M3: ¿A qué converge? H6: Yo le puse que converge a, bueno le puse que conociendo más acerca del movimiento se puede obtener la serie de Fourier en cada valor de convergencia y converge a la función. H3: Converge a la función. H6: A una función periódica. H3: Mmm sí. H6: Porque lo que tienes al final es una serie de funciones, tiene que converger a una función. H3: Ah, sí. H6: Y esa función tiene que ser periódica. (8) De hecho, converge uniformemente. [VE3]-2-[02:30:58] H3: Esta converge a la función pulso, uno, menos uno. M3: ¿Mmm? H3: Esta converge a esta función pulso uno y menos uno.	[VG]-2-[02:29:32]- El profesor especifica en la pizarra la serie de la que se está hablando:  H1: La figura sugiere que a uno. (4) P: ¡Ujú! ¿qué más? ¿converge o diverge? ¿quiénes dicen que converge? ((cinco estudiantes levantan la mano)) ¿quién dice que diverge? ((ninguno levanta la mano)) ¿quién se abstiene de votar? ((risas)) Ok, bueno de converge "H1" ((se refiere a H1 por su nombre)) dice que a 1 ¿pero aquí da -1? H1: Ah bueno, sí, entonces depende del valor (x) de t. P: ¡Ajá! Pero yo estoy preguntando de toda la serie, o sea ahí van incluidos todos los valores que pueda tomar t. H1: Ah bueno de todos= H4: =Convergería como al radio de::: H1: Del todo no converge porque siempre va a ir, es como una onda cuadrada ¿no? Siempre hace ((realiza un movimiento con sus manos para explicar)) P: ¿Entonces? [¿converge o] H4: [Convergería] como al radio de la segunda circunferencia. P: Converge como al radio, pero si converge al radio, como puede dar, porque parece que se acerca a -1, ¿verdad? Ustedes me lo habían dicho. Entonces ¿cómo podría converger a -1, si converge a un radio? ¿Converge o diverge? H4: Bueno, si lo pone en esos términos, entonces diverge. P: Vean que lo único que hago es hacerlos dudar. ((risas)) H1: Es como la sucesión 1, -1, 1, -1, ... esa no es convergente. P: ¡Ajá! H1: (x)Se parece a::: esa función a::: digo a esa sucesión. P: ¿Quién está de acuerdo? ¿quién no? (6) ¿Están con crisis existencial? H2: El factor= P: =Voy a hacer una aclaración importante ¿cuál es la naturaleza de esto que está aquí? Es un número, una matriz, un polinomio, una función ¿qué es? H2: Todas son funciones. P: Función, ¿verdad? Sí, es una función. Si yo sumo funciones ¿el resultado que a de ser? ((Una función dicen los estudiantes)) Una función, ¿sí? O eso me diría el sentido común, ¿verdad? Si yo sumo funciones mi resultado es una función. Entonces ¿una función podría tomar valor de 1 y -1? ((H1 asiente con la cabeza)) H4: Sí, a no, ¿cómo es que dijo? P: O sea ¿una función podría hacer eso? H1: Sí. P: ¿Cuál función? H1: La de escalón. P: Una de escalón, ¿converge o diverge? H1: Bueno, es que sería no converge, bueno H3: Ajá, no converge. H4: Es que divergir es que se va a infinito. P: Puede ser eso, bueno es que depende de qué estemos hablando de convergencia, por ejemplo, ahorita que lo dijiste con sucesiones, lo dijiste bien, si una sucesión da -1 y da 1, entonces tiene dos puntos de acumulación, entonces diverge ¿verdad? La sucesión. H1: Bueno, entonces diverger significa no converger. P: ¡Ajá! Diverger es no converger, no quiere decir que de infinito, ¿sí? Por ejemplo esa sucesión que va a -1 y a 1 esa, este:::, diverge porque tiene dos puntos de acumulación hay dos subsucesiones que convergen a valores distintos, por ejemplo. Pero ahí estamos hablando de número, en cambio aquí estamos hablando de funciones, entonces ¿el resultado de esto puede ser una función o no? H1: Es una función. P: Por la naturaleza, ¿verdad? De los términos, si yo sumo funciones, como que es natural que la respuesta sea función. H1: Sí. P: Entonces ahora otra vez la pregunta ¿podría haber una función que haga esto? Pues sí, la función escalón ¿cierto? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Entonces ¿podría esto converger a la función escalón? ((los

Parte II. ¿Y si agregamos más epiciclos?							
Intención:	Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.						
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Intencionalidad	Se espera con los incisos e y f la interpretación de la matemática involucrada en el fenómeno físico, relacionar la estabilidad de la trayectoria del planeta con la convergencia de las series involucradas en la fórmula calculada para la distancia de planeta P a la Tierra. Se espera que se percaten de que la suma parcial de las abscisas no siempre es divergente y que la suma parcial de las ordenadas es siempre convergente. En particular para el inciso f, se tiene como hipótesis que los estudiantes respondan que la serie de las ordenadas diverge, cuando en realidad es convergente. Esto lo sabemos gracias a la prueba piloto y las diferentes puestas en escena, ya que el argumento principal utilizado fue que “la gráfica se está acercando a dos valores 1 y -1”, lo que da evidencia de la concepción de límite funcional como obstáculo para comprender la convergencia de series. Si bien sabemos que en $t=\pi$, la serie converge a cero —de hecho, en todas las discontinuidades considerando a $t \in \mathbb{R}$ — aquellos estudiantes que vislumbren la convergencia podrían pensar que cerca de $t = \pi$ —las discontinuidades— la serie de las ordenadas de P es divergente, pues ya está reportado que los estudiantes consideran convergente solo aquello que converge uniformemente y lo demás es divergente (Albert, 1996).						
¿Sobre qué objetos lo hace?	<p>Reconocer</p> <p>El valor de la suma parcial para diferentes tiempos.</p> <p>Comparar</p> <p>El valor del mínimo para distintas sumas parciales.</p> <p>Comparar</p> <p>Las gráficas de una suma parcial a otra.</p>	<p>Reconocer</p> <p>El valor de la suma parcial para diferentes tiempos.</p> <p>Comparar</p> <p>Los valores máximo y mínimo para distintas sumas parciales.</p> <p>Comparar</p> <p>Las gráficas de una suma parcial a otra.</p>	<p>Reconocer</p> <p>El valor de la suma parcial para diferentes tiempos.</p> <p>Comparar</p> <p>Las gráficas de una suma parcial a otra.</p> <p>Evaluar</p> <p>La serie y un tiempo específico.</p>	<p>Comparar</p> <p>Las gráficas de una suma parcial a otra.</p> <p>Identificar</p> <p>Radio de los planetas y velocidad de los puntos.</p>	<p>Comparar</p> <p>Las gráficas de una suma parcial a otra.</p>	<p>Comparar</p> <p>Las gráficas de una suma parcial a otra.</p>	<p>Reconocer</p> <p>El valor de la suma parcial para diferentes tiempos.</p> <p>Comparar</p> <p>Las gráficas de una suma parcial a otra.</p> <p>Evaluar</p> <p>La serie y un tiempo específico.</p>
¿Sobre qué relaciones lo hace?	<p>Reconocer</p> <p>En $t = \pi$ se alcanza un mínimo.</p> <p>Comparar</p> <p>En $t = \pi$ el mínimo es cada vez menor conforme se agregan circunferencias.</p> <p>Comparar</p> <p>En $t = \pi$ y $t = 2\pi$ se alcanzan mínimo y máximo, respectivamente.</p> <p>La serie converge a una función escalonada.</p>	<p>Reconocer</p> <p>La serie de cosenos inicia en un máximo y alcanza un mínimo.</p> <p>La serie de senos inicia en un punto máximo y alcanza un mínimo.</p> <p>Comparar</p> <p>La serie de cosenos inicia en un máximo y alcanza un mínimo.</p> <p>La serie de senos inicia en un punto máximo y alcanza un mínimo.</p> <p>Comparar</p> <p>Las funciones son periódicas.</p> <p>La serie converge a una función escalonada.</p>	<p>Reconocer</p> <p>En la suma de las abscisas la función varía de un máximo a un mínimo y luego del mínimo al máximo.</p> <p>En los múltiplos de $t = \pi$ se alcanza máximos y mínimos.</p> <p>Comparar</p> <p>La serie converge a una función escalonada.</p> <p>Evaluar</p> <p>La serie de las ordenadas diverge, pues para dos valores de t distintos converge a valores distintos.</p>	<p>Comparar</p> <p>La serie converge a una función con una forma específica.</p> <p>Identificar</p> <p>El radio de las circunferencias que se agregan y la velocidad de los puntos, es lo que produce la forma de la trayectoria (convergencia).</p>	<p>Comparar</p> <p>La serie es convergente.</p>	<p>Comparar</p> <p>La serie converge a una función escalonada.</p>	<p>Reconocer</p> <p>Los máximos y los mínimos son la suma de los radios.</p> <p>Comparar</p> <p>La serie converge a una función escalonada.</p> <p>Evaluar</p> <p>La serie de las ordenadas diverge, pues para dos valores de t distintos converge a valores distintos.</p>
¿Por medio de qué lo hace?	<p>Reconocer</p> <p>Verbal: Tiene un valor mínimo en π.</p> <p>Comparar</p> <p>Verbal: Tiene un valor mínimo en π que decrece cuando aumenta el número de circunferencias. En los valores de $t = 0$, $t = 2\pi$, crece cuando aumenta el número de circunferencias.</p> <p>Comparar</p> <p>Verbal: La trayectoria se vuelve más alargada en π y en 2π, lo cual concuerda con la gráfica donde podemos ver mínimo y máximo respectivamente.</p> <p>Verbal: La parte de la trayectoria donde los bucles parecen formar dos líneas paralelas se observa en la última gráfica donde la suma de las ordenadas se vuelve constante.</p> <p>Verbal: Al aumentar el número de circunferencias la suma se acerca a 1 en el rango $(0, \pi)$, mientras que en el rango $(\pi, 2\pi)$ la suma se acerca a -1.</p> <p>Verbal: Sí converge, su comportamiento se aproxima a una constante. Converge a una función escalonada.</p>	<p>Reconocer</p> <p>Verbal: Tienen puntos máximos y mínimos.</p> <p>Comparar</p> <p>Verbal: La serie de cosenos inicia en un punto máximo alcanza un mínimo y vuelve a recuperar un punto máximo en un determinado.</p> <p>Verbal: La serie de senos inicia en un punto máximo se mantiene por un intervalo de tiempo y después alcanza un mínimo donde de igual manera se mantiene constante y el proceso se repite.</p> <p>Comparar</p> <p>Verbal: Ambas se comportan como funciones periódicas.</p> <p>Verbal: La serie de las ordenadas converge y su valor de convergencia es la coordenada "y" de la posición del planeta con respecto a la Tierra.</p>	<p>Reconocer</p> <p>Verbal: Conforme aumenta el número de círculos. Va desde el valor máximo hasta el mínimo dentro del intervalo $((2n-2)\pi, (2n-1)\pi)$ y del mínimo al máximo dentro del intervalo $((2n-1)\pi, 2n\pi)$.</p> <p>Verbal: En múltiplos de π las abscisas están completamente estiradas, por lo que ahí son los máximos o mínimos en los que alterna la función.</p> <p>Comparar</p> <p>Verbal: Conforme aumenta el número de círculos. La suma de las abscisas se vuelve igual a 1 dentro del intervalo $((2n-2)\pi, (2n-1)\pi)$ $((2n-2)$ y -1 dentro del intervalo $((2n-1)\pi, 2n\pi)$.</p> <p>Verbal: Los círculos se enciman sobre las líneas, por lo que las ordenadas suman casi una constante.</p> <p>Evaluar</p> <p>Algebraico: La serie de ordenadas $\sum_{2i-1}^1 \text{sen}((2i-1)t)$ con $t = \frac{\pi}{2}$, es igual a $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum (-1)^{i+1} \frac{1}{2i-1}$ $i = 1, 2, \dots$ La cual, por la propiedad telescópica tiende a $\frac{\pi}{4}$. Y con $t = -\frac{\pi}{2}$ tiende a $-\frac{\pi}{4}$. Por lo que la serie no converge ya que tiene dos puntos de acumulación.</p>	<p>Comparar</p> <p>Verbal: La serie se deforma hasta el punto en que parece formar una especie de señal con forma de V.</p> <p>Verbal: La serie parece deformarse hasta el punto de formar una función pulsante y periódica.</p> <p>Verbal: La serie de las ordenadas converge, aseguramos que esta serie converge al valor de la componente "y" del vector de posición del planeta respecto a T.</p> <p>Identificar</p> <p>Verbal: Las coordenadas del planeta respecto al tiempo están expresadas como sumas de senos y cosenos, mismos términos que se ven alterados a causa de constantes tales como el radio de cada circunferencia y la velocidad angular de cada una de estas, esto produce la forma de la trayectoria y la altera conforme se agregan más círculos.</p>	<p>Comparar</p> <p>Verbal: Toma un valor constante en $n\pi$.</p> <p>Verbal: Toma un valor constante en 1 y -1, y se mantiene por un intervalo de $-\pi$ y π.</p> <p>Verbal: Parece que converge en intervalos abierto de 0 y π y diverge cuando se acerca a los valores de 0 y múltiplos de π.</p>	<p>Comparar</p> <p>Verbal: [VE3]-2-[02:16:04]</p> <p>H6: ¿A dónde converge?</p> <p>M3: ((risas))</p> <p>H6: Diverge, ¿no?</p> <p>M3: Ah, sí es cierto. No sé, es que no hemos visto convergencias así.</p> <p>H6: ¿Qué te pasa "M3"? ((se refiere a M3 por su nombre))</p> <p>H3: Pos ahorita tienes que ver a dónde converge, es como las otras dos, la de senos se ve muy clarito que se van (x) a un valor positivo y al otro se va a otro valor negativo nada más.</p> <p>H6: Una se va a=</p> <p>H3: =Ah bueno, pero eso no quiere decir que converja verdad.</p> <p>M3: No:::</p> <p>H3: O sea que se vuelve más bien como una función escalonada.</p>	<p>Reconocer</p> <p>Verbal: [VG]-2-[02:16:46]</p> <p>H7: Pues que es una función oscilante y los máximos y mínimos son la suma de los radios.</p> <p>P: Ok.</p> <p>H4: Que toma también un valor constante, ¿no? Entre 0 y π (x) las sumas de las coordenadas.</p> <p>Comparar</p> <p>Verbal: [VG]-2-[02:30:57]</p> <p>H1: Es como la sucesión 1, -1, 1, -1, ... esa no es convergente.</p> <p>P: ¡Ajá!</p> <p>H1: (x) Se parece a::: esa función a::: digo a esa sucesión.</p> <p>Algebraico:</p>  <p>Evaluar</p> <p>Verbal: [VG]-2-[02:19:06]</p> <p>H1: (Incomprensible, 2, ¿Sería evaluando en la serie?) ((señala la fórmula de la distancia escrita en la pizarra)) Pues el seno se cancela, en todos los múltiplos de π se hace 0.</p> <p>P: Se hace 0, ¡ajá!</p> <p>H1: Y el coseno son múltiplos impares de π o de $-\pi$ y eso siempre va a dar, por ejemplo, el de da -1 con os de $-\pi$, ¿no? Digo con los de π da -1 y con los de $-\pi$.</p> <p>M2: Lo mismo.</p> <p>H1: También, así que sería la suma de, bueno más bien la serie que suma los inversos de los impares y eso diverge.</p> <p>Verbal: [VG]-2-[02:23:48]</p> <p>H1: Esa sí converge.</p> <p>P: Esa sí converge ¿en todos los puntos? ¿En todo lado, para cualquier valor de t?</p> <p>H1: Bueno, para t igual múltiplos de $\frac{\pi}{2}$, bueno múltiplos impares.</p> <p>P: ¿Sólo para $t = \frac{\pi}{2}$ pasa eso? ¿Sólo aquí o aquí? ((señalando el valor en la gráfica))</p> <p>H1: Bueno sí, (x) es fácil demostrar ese, para otros valores (x) no se cómo se demuestra que converge.</p>
Invariantes de Acciones	- La serie converge a una función escalonada.						
Pregunta g	Converge a una función escalonada	Converge al mismo valor que en la respuesta anterior, ya que se estaba trabajando con valores de t positivos.	Según la applet, la suma de ordenadas converge a 1. Tiene sentido ya que la coordenada y es igual a $y_n = \frac{1}{\pi} \sum_{2i-1}^1 \text{sen}((2i-1)t)$ para $t = \pi/2$ $y_n \rightarrow 1, i \rightarrow \infty$.	Convergería al mismo valor, dado que hemos estado trabajando todo el tiempo con t's positivas. En caso de t=0 el valor de cada función seno será cero, provocando así la convergencia de la serie a la suma de todos los radios de las circunferencias.	converge a una función	[VE3]-2-[02:44:08]	[VG]-2-[02:36:33]
						H3: No entiendo. M3: ¿Qué? H3: Dice, si se cambia en rango de valores de t para todos aquellos en los que t es mayor o igual que cero ¿cuál es el valor de convergencia de la serie de las ordenadas del planeta? ¿Cómo si se cambia el valor? H6: Es lo que les dije, o sea que se van a tomar valores de t positivos.	P: ¿Qué pasaría si t es mayor que cero, verdad? (7) ¿Cuál es el valor de convergencia de la serie de las ordenadas? H3: Sería 1. P: Ahora con t > 0, ahí podían cambiar el rango, ¿verdad? De t. Qué se yo, le podemos poner 8pi, no se va a ver todo, pero (11). Entonces ¿converge o diverge?

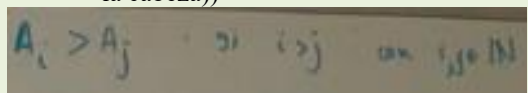
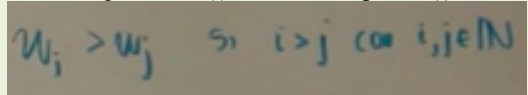
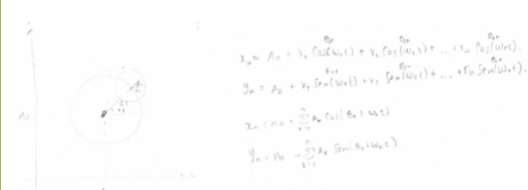
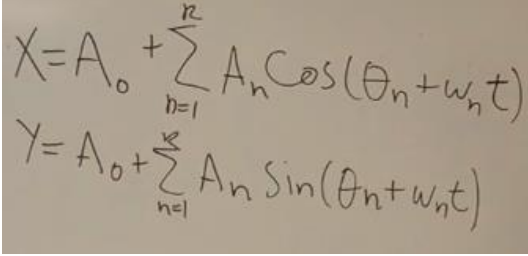
Parte II. ¿Y si agregamos más epiciclos?							
Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
						<p>H3: ¿Qué solo toma valores positivos?</p> <p>H6: Sí, es lo que estás haciendo.</p> <p>H3: ¿Cómo?</p> <p>H6: Los valores, estás tomando t, posiciones de t positivos.</p> <p>[VE3]-2-[02:48:14]</p> <p>M3: Oye y si le cambiamos ahí ¿qué pasa? ((se refiere al rango de valores de t dado en el applet))</p> <p>H6: No hay nada. Estás tomando t (incomprensible, 1).</p> <p>M3: Y si le pongo.</p> <p>H6: No va a salir nada porque=</p> <p>M3: =No:::</p> <p>H3: Algo raro pasó ahí.</p> <p>H6: Realmente no pasa mucho, porque si=</p> <p>M3: =¿Cómo no?</p> <p>H6: Si la gráfica de aquí, la función esa es simétrica o antisimétrica esto (incomprensible, 2).</p> <p>(3)</p> <p>Pero limpia el rastro, ¿no?</p> <p>M3: Ya me regañó, que exigente pues. Y si lo quiero mover, no puedo mover los ejes.</p> <p>H6: ¡Ajá! simplemente mueves la gráfica, la función es, en este caso la función es antisimétrica, es una función impar, son senos. Si fueran cosenos, esto continuaría aquí.</p> <p>M3: Ok, entonces para valores positivos la gráfica son se-, ah ok a ver.</p> <p>H3: Ah ya entendí, aquí es como que (incomprensible, 2) se acota en ciertos lugares.</p> <p>M3: ¿Eh?</p> <p>H3: Si es como que la acotas entre ciertos lugares.</p> <p>M3: ¡Ajá!</p> <p>[VE3]-2-[02:53:07]</p> <p>H6: No pasaría nada porque está considerando valores positivos (incomprensible, 1).</p> <p>M3: Pues simón no pasa nada.</p> <p>H3: No sé qué está pasando.</p> <p>M3: Pues es que si mira, porque hemos trabajado hasta ahorita con t's positivos, entonces, entonces no pasa nada sigue convergiendo.</p> <p>H3: Sí, si es el mismo.</p> <p>M3: Sí:::, es lo mismo que la f, y ya.</p>	<p>(3)</p> <p>H2: Converge a la función, definida por partes.</p> <p>P: Converge a la función definida por partes. O sea, le harían otra listota aquí ((se refiere a la función definida a trozos de la pregunta anterior)) (x) más grande, o ¿qué diríamos?</p> <p>H3: Sí::: ((risas))</p> <p>P: Es una manera, ¿verdad? Podríamos poner, 1 si t está entre 2π y 3π, -1 si, y ahí.</p> <p>(Incomprensible, 1) ((hablan varios a la vez, H2 sugiere trabajar con los intervalos))</p> <p>H1: Sí, podemos poner que t exista, por ejemplo, en ese sería desde el límite derecho, múltiplo impar de π y al izquierdo le restamos uno, y el de abajo serán múltiplos pares y al izquierdo le restamos uno.</p> <p>P: Ok, ujú, es una manera de hacerlo ¿sí? ¿Sí está clara la idea? ((los estudiantes asienten con la cabeza))</p>
Pregunta h	Valores de $t < 0$ indican planetas moviéndose en sentido horario, lo cual no tiene sentido en el modelo propuesto.	Si tiene sentido pero no es necesario ya que al ser funciones pares e impares lo único que provoca son reflexiones.	Tiene sentido matemáticamente, ya que equivale a invertir el sentido de giro. Y ahí sólo cambiaría el signo de los términos de la serie, la cual convergería a $-\pi/4$. Pero físicamente no tiene sentido el tiempo negativo.	En efecto, tiene sentido, aunque es probable que las expresiones solo acaben por reflejar la trayectoria formada, esto dada la simetría de la misma respecto al eje horizontal, la paridad del coseno y la no paridad del seno.	No tiene sentido considerarlos, porque ni siquiera implican un retroceso. En caso de converger, convergería al mismo valor en las ordenadas.	<p>[VE3]-2-[02:53:45]</p> <p>H3: No, pero es que yo creo que si pasa algo por que vea, aquí te dice que estás acotando t entre a y b.</p> <p>H6: ¡Ajá!</p> <p>H3: Entonces=</p> <p>H3: =Pero, entonces a y b ahí son positivos.</p> <p>H6: ¡Ajá! Pero sería solo en este pedacito.</p> <p>M3: Sólo convergen más lentamente, ¿no? Porque cuando variábamos b te acuerdas que iba más lento.</p> <p>H6: No, es que la $t(x)$ solo son los valores que tu metes, tu (incomprensible, 1), y como tal, esa cosa solo tiene senos y cosenos, funciones pares e impares. Con t negativo lo único que tienes es la misma gráfica en el caso de senos invertida, en el caso de cosenos la tienes completamente reflejada porque es una función par, en caso del seno como es impar simplemente se voltea así. Lo único que haces es, es (incomprensible, 1), pero sigue siendo periódico, no pasa mucho. Pero la pregunta que te pre-, en la siguiente que te pregunta de que si tiene algún sentido evaluar t's</p> <p>H3: [Negativos]</p> <p>H6: [Negativos], pues tiene sentido, pero realmente es innecesario porque tu gráfica es completamente simétrica o antisimétrica. Bueno yo puse eso.</p> <p>M3: Tiene sentido.</p> <p>[VE3]-2-[02:57:47]</p> <p>H3: Realmente un t negativo sería, sería en sentido antihorario.</p> <p>M3: [No:::, horario]</p> <p>H6: [Más bien sería en sentido horario]</p> <p>M3: Antihorario es positivo.</p>	<p>[VG]-2-[02:40:02]</p> <p>P: ¿Y qué pasa si t es::: negativo? ¿tiene sentido (x) en el problema hablar de valores de t negativos?</p> <p>H6: [Pues::: sí]</p> <p>M2: [Sería un:::] movimiento en sentido horario.</p> <p>H1: Sí, sería cambiar el sentido de giro.</p> <p>P: ¡Ajá! ¿Pero qué es t en el sistema inicial?</p> <p>H6: El tiempo.</p> <p>P: El tiempo.</p> <p>H1: Ajá, el tiempo.</p> <p>P: ¿Tiene sentido hablar de tiempo negativo?</p> <p>H3: No ((varios estudiantes mueven su cabeza para indicar que no))</p> <p>P: O sea, matemáticamente pasan cosas, ¿sí? O sea, el ángulo sería verlo en sentido antihorario, por eje- eh en sentido horario, por ejemplo. O sea, matemáticamente pasan cosas, solamente que digamos que (x) en el modelo no tiene sentido de hablar de valores de t negativos, ¿sí?</p> <p>[VG]-2-[02:43:29]</p> <p>P: Bueno, entonces ¿qué pasaría con la convergencia? ¿sigue siendo convergente?</p> <p>H4: Sí, solo cambia la paridad de la función, ¿no?</p> <p>H1: Se voltea (incomprensible, 1)</p> <p>P: ¿Se voltea?</p> <p>H1: Bueno (x) los valores, o sea donde había 1 ahora sería -1.</p> <p>P: ¿Seguros?</p> <p>H1: Bueno sería continuar la gráfica, pero para el ((con la mano señala que hacia la izquierda))</p>
Intencionalidad	Se pretende provocar que la periodicidad sea un resultado de la serie y no una condición de la función que se está representando. Pues la serie, como objeto matemático, posee ciertas características que no tienen sentido en el fenómeno que se está modelando. En este caso dicha característica es la condición de periodicidad, la cual se da en toda la recta real, pero el fenómeno no tiene sentido al hablar de valores negativos del tiempo. Para concluir con esta tarea, se espera que los estudiantes no sepan escribir en forma analítica una función periódica en el inciso h, ya que no es usual hacerlo en la escuela, posiblemente escriban la función para un intervalo y escriban con palabras que se repite de manera periódica.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	<p>Identificar</p> <p>El valor de convergencia.</p> <p>Observar</p> <p>El planeta.</p>	<p>Extender</p> <p>El valor de convergencia para un intervalo.</p> <p>Comparar</p> <p>La trayectoria y las funciones.</p>	<p>Evaluar</p> <p>La serie y un tiempo específico.</p> <p>Observar</p> <p>El planeta.</p>	<p>Extender</p> <p>El valor de convergencia para un intervalo.</p> <p>Comparar</p> <p>La trayectoria y las funciones.</p>	<p>Identificar</p> <p>El valor de convergencia.</p> <p>Observar</p> <p>El planeta.</p>	<p>Extender</p> <p>El valor de convergencia para un intervalo.</p> <p>Comparar</p> <p>La trayectoria y las funciones.</p> <p>Observar</p> <p>El planeta.</p>	<p>Extender</p> <p>El valor de convergencia para un intervalo.</p> <p>Comparar</p> <p>La trayectoria y las funciones.</p> <p>Observar</p> <p>El planeta.</p>
¿Sobre qué relaciones lo hace?	<p>Identificar</p> <p>El valor de convergencia es una función escalonada.</p> <p>Observar</p> <p>El movimiento del planeta sobre la trayectoria.</p>	<p>Extender</p> <p>El valor de convergencia para $t \geq 0$.</p> <p>Comparar</p> <p>Son funciones pares e impares.</p>	<p>Evaluar</p> <p>La serie de las ordenadas converge a 1.</p> <p>Observar</p> <p>El movimiento del planeta sobre la trayectoria.</p>	<p>Extender</p> <p>El valor de convergencia para $t \geq 0$.</p> <p>Comparar</p> <p>Son funciones pares e impares.</p>	<p>Identificar</p> <p>El valor de convergencia es una función.</p> <p>Observar</p> <p>El movimiento del planeta sobre la trayectoria.</p>	<p>Extender</p> <p>El valor de convergencia para $t \geq 0$.</p> <p>Comparar</p> <p>Son funciones pares e impares.</p> <p>Observar</p> <p>El movimiento del planeta sobre la trayectoria.</p>	<p>Extender</p> <p>El valor de convergencia para $t \geq 0$.</p> <p>Comparar</p> <p>Son funciones pares e impares.</p> <p>Observar</p> <p>El movimiento del planeta sobre la trayectoria.</p>
¿Por medio de qué lo hace?	<p>Identificar</p> <p>Verbal: Converge a una función escalonada.</p> <p>Observar</p> <p>Verbal: Valores de $t < 0$ indican planetas moviéndose en sentido horario, lo cual no tiene sentido en el modelo propuesto.</p>	<p>Extender</p> <p>Verbal: Converge al mismo valor que en la respuesta anterior, ya que se estaba trabajando con valores de t positivos.</p> <p>Comparar</p> <p>Verbal: Si tiene sentido, pero no es necesario ya que al ser funciones pares e impares lo único que provoca son reflexiones.</p>	<p>Evaluar</p> <p>Algebraico: Según el applet, la suma de ordenadas converge a 1. Tiene sentido ya que la coordenada y es igual a $y_n = \frac{1}{\pi} \sum_{2i-1} \text{sen}((2i-1)t)$ para $t = \frac{\pi}{2}$, $y_n \rightarrow 1$, $i \rightarrow \infty$.</p> <p>Observar</p> <p>Verbal: Tiene sentido matemáticamente, ya que equivale a invertir el sentido de giro. Y ahí sólo</p>	<p>Extender</p> <p>Verbal: Convergencia al mismo valor, dado que hemos estado trabajando todo el tiempo con t's positivas.</p> <p>Comparar</p> <p>Verbal: En efecto, tiene sentido, aunque es probable que las expresiones solo acaben por reflejar la trayectoria formada, esto dada la</p>	<p>Identificar</p> <p>Verbal: Converge a una función.</p> <p>Observar</p> <p>Verbal: No tiene sentido considerarlos, porque ni siquiera implican un retroceso. En caso de converger, convergería al mismo valor en las ordenadas.</p>	<p>Extender</p> <p>Verbal: [VE3]-2-[02:53:07]</p> <p>H6: No pasaría nada porque está considerando valores positivos (incomprensible, 1).</p> <p>M3: Pues simón no pasa nada.</p> <p>H3: No sé qué está pasando.</p> <p>M3: Pues es que si mira, porque hemos trabajado hasta ahorita con t's positivos,</p>	<p>Extender</p> <p>Verbal: [VG]-2-[02:36:33]</p> <p>P: ¿Qué pasaría si t es mayor que cero, verdad? (7) ¿Cuál es el valor de convergencia de la serie de las ordenadas?</p> <p>H3: Sería 1.</p> <p>P: Ahora con $t > 0$, ahí podían cambiar el rango, ¿verdad? De t. Qué se yo, le podemos poner 8π, no se va a ver todo,</p>

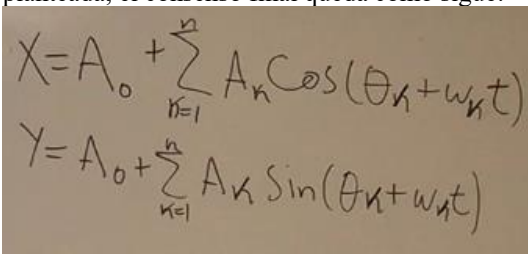
Parte II. ¿Y si agregamos más epiciclos?							
Intención: Se proporciona un applet con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
			cambiaría el signo de los términos de la serie, la cual convergería a $-\frac{\pi}{4}$. Pero físicamente no tiene sentido el tiempo negativo.	simetría de la misma respecto al eje horizontal, la paridad del coseno y la no paridad del seno.		<p>entonces, entonces no pasa nada sigue convergiendo.</p> <p>H3: Sí, si es el mismo.</p> <p>M3: Sí:::, es lo mismo que la f, y ya.</p> <p style="text-align: center;">Comparar</p> <p>Verbal: [VE3]-2-[02:48:31]</p> <p>H6: Realmente no pasa mucho, porque si=</p> <p>M3: =¿Cómo no?</p> <p>H6: Si la gráfica de aquí, la función esa es simétrica o antisimétrica esto (incomprensible, 2).</p> <p>(3)</p> <p>Pero limpia el rastro, ¿no?</p> <p>M3: Ya me regañó, que exigente pues. Y si lo quiero mover, no puedo mover los ejes.</p> <p>H6: ¡Ajá! simplemente mueves la gráfica, la función es, en este caso la función es antisimétrica, es una función impar, son senos. Si fueran cosenos, esto continuaría aquí.</p> <p>Verbal: [VE3]-2-[02:54:02]</p> <p>H6: No, es que la t (x)solo son los valores que tu metes, tu (incomprensible, 1), y como tal, esa cosa solo tiene senos y cosenos, funciones pares e impares. Con t negativo lo único que tienes es la misma gráfica en el caso de senos invertida, en el caso de cosenos la tienes completamente reflejada porque es una función par, en caso del seno como es impar simplemente se voltea así. Lo único que haces es, es (incomprensible, 1), pero sigue siendo periódico, no pasa mucho. Pero la pregunta que te pre-, en la siguiente que te pregunta de que si tiene algún sentido evaluar t's</p> <p>H3: [Negativos]</p> <p>H6: [Negativos], pues tiene sentido, pero realmente es innecesario porque tu gráfica es completamente simétrica o antisimétrica. Bueno yo puse eso.</p> <p>M3: Tiene sentido.</p> <p style="text-align: center;">Observar</p> <p>Verbal: [VE3]-2-[02:57:47]</p> <p>H3: Realmente un t negativo sería, sería en sentido antihorario.</p> <p>M3: [No:::, horario]</p> <p>H6: [Más bien sería en sentido horario]</p> <p>M3: Antihorario es positivo.</p>	<p>pero (11). Entonces ¿converge o diverge?</p> <p>(3)</p> <p>H2: Converge a la función, definida por partes.</p> <p style="text-align: center;">Comparar</p> <p>Verbal: [VG]-2-[02:43:29]</p> <p>P: Bueno, entonces ¿qué pasaría con la convergencia? ¿sigue siendo convergente?</p> <p>H4: Sí, solo cambia la paridad de la función, ¿no?</p> <p>H1: Se voltea (incomprensible, 1)</p> <p>P: ¿Se voltea?</p> <p>H1: Bueno (x)los valores, o sea donde había 1 ahora sería -1.</p> <p>P: ¿Seguros?</p> <p>H1: Bueno sería continuar la gráfica, pero para el ((con la mano señala que hacia la izquierda))</p> <p style="text-align: center;">Observar</p> <p>Verbal: [VG]-2-[02:40:02]</p> <p>P: ¿Y qué pasa si t es::: negativo? ¿tiene sentido (x)en el problema hablar de valores de t negativos?</p> <p>H6: [Pues::: sí]</p> <p>M2: [Sería un:::] movimiento en sentido horario.</p> <p>H1: Sí, sería cambiar el sentido de giro.</p>
Invariantes de Acciones	<ul style="list-style-type: none"> - El valor de convergencia es una función. - El valor de convergencia para $t \geq 0$. - Son funciones pares e impares. - El movimiento del planeta sobre la trayectoria. 						

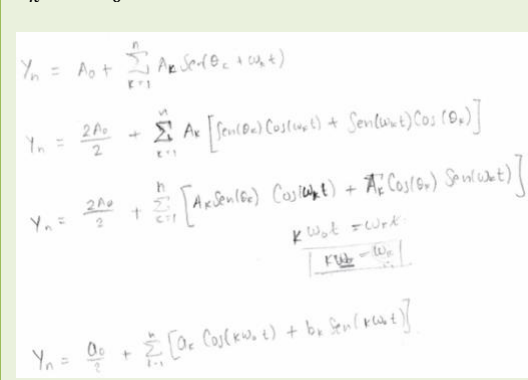
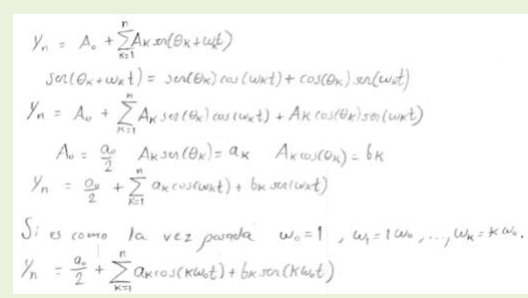
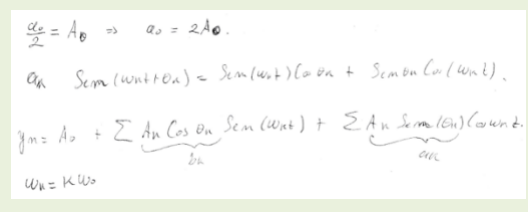
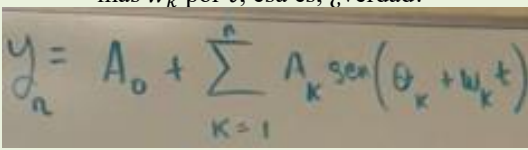
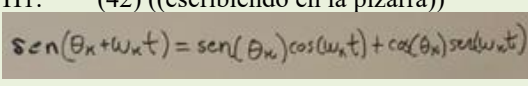
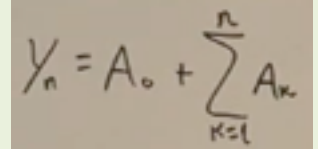
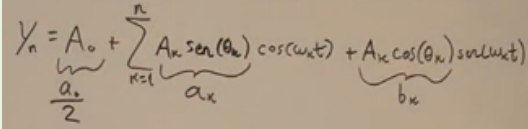
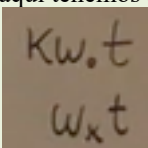
Tarea #5. Etapa 1: Identificación de acciones

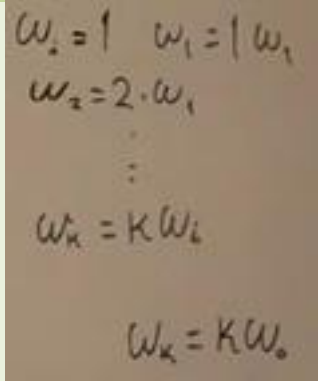
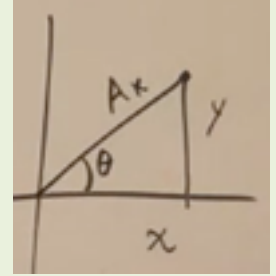
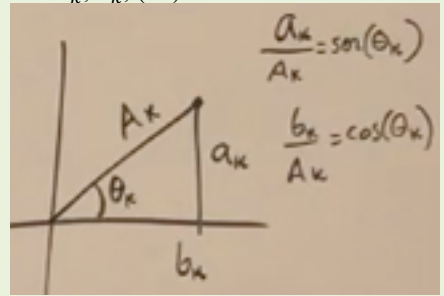
TAREA #5	
Objetivo de la Tarea:	Significar los elementos presentes en la serie trigonométrica que emerge al matematizar el modelo del movimiento planetario de los alejandrinos en forma general.

Parte I. Generando el modelo							
Intención: Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	$A_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ Las velocidades aumentan al agregar más circunferencias y $w_k \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$ Así se formarán trayectorias con formas definidas al agregar más circunferencias.	Debe cumplirse que los radios de las circunferencias vayan disminuyendo y las velocidades angulares vayan aumentando, además que las series de las componentes sean convergentes. Donde los radios tienden a cero y las velocidades angulares a infinito.	Se debe cumplir $r_{k+1} < r_k$ y $\omega_k \rightarrow \infty$ para que la trayectoria no se desborde. Y $\omega_{k+1} > \omega_k$ y $\omega_k \rightarrow \infty$ para que se complete el recorrido en un tiempo finito.	Debe cumplirse que al ir agregando más y más circunferencias, estas decrezcan en radio y el punto o planeta P aumente su velocidad angular, para completar un giro cada vez más rápido, observándose como si el planeta ya no girara en torno al centro de cada nueva circunferencia. Con los radios tendiendo a cero y las velocidades angulares tendiendo a infinito.	Los radios de las circunferencias agregadas deben de ser menores que respecto al anterior, pero es necesario que $A_n \rightarrow 0$. A su vez, la velocidad angular del punto P en cada nueva circunferencia debe de aumentar (esto como consecuencia de la disminución de las circunferencias) y es necesario que $w_n \rightarrow \infty$	No hubo interacción al responder esta pregunta. [VE3]-5-[00:56:50]- H3 agrega a su respuesta el último párrafo después de la puesta en común "Con los radios tendiendo a cero y las velocidades angulares tendiendo a infinito" [VE3]-5-[01:01:03]- M3 agrega a su respuesta el último párrafo después de la puesta en común. "Donde los radios tienden a cero y las velocidades angulares a infinito."	[VG]-5-[01:08:15] P: Con base en los modelos particulares estudiados en las Tareas 1, 2 y 3 ¿qué condiciones deben cumplirse en el modelo general para que la trayectoria del planeta se establezca conforme se agreguen cada vez más circunferencias? ((Leyendo la pregunta)) ¿Qué escribieron por ahí? ((señalando al Equipo 1)) H4: Que todas las circunferencias deben ser cada vez menores. P: Los radios de las circunferencias deben ser cada vez menores ¿qué otro? M3: Y las velocidades tienen que ir aumentando. H1: Las angulares. M3: Las angulares. P: Las velocidades angulares tienen que ir aumentando. ¿Y eso cómo lo escribieron, matema-? ¿cómo se escribe matemáticamente? Digamos que ahí está como cualitativo, ¿verdad? Los radios cada vez más chicos y las velocidades cada vez mayores ¿cómo escribirían eso? Qué sería, en este caso los radios son A_1, A_2 ¿verdad? H4: A1 menor que::: P: Los radios son A_1, A_2, A_3 y así ¿verdad? Y las velocidades w_1, w_2, w_3 y así ¿verdad? ((escribe en la pizarra))  Ustedes lo que dicen es que estos ((señalando los radios)) tienen que ir, eh. H3: Decreciendo. P: Ir decreciendo y estos ((señalando las velocidades)) deben de ir. H3: Aumentando. P: Aumentando ¿cómo lo escribirían matemáticamente? H6: A_i es mayor que A_j , si i es mayor que j . P: Ok, Entonces aquí ((escribiendo en la pizarra)) H6: A_i es mayor que A_j . P: Mayor. H6: Si i es mayor que j . Con i, j en (\mathbb{N})

Parte I. Generando el modelo							
Intención: Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							<p>P: ¿Así? ((varios estudiantes asientan con la cabeza))</p>  <p>Dice que uno es menor que otro, ¿sí?</p> <p>M3: ¡Ujú!</p> <p>P: ¿Pero es suficiente con que sea uno menor que otro? (8)</p> <p>M2: Y consecutivos también deben ser, ¿no?</p> <p>H1: Poner consecutivo, ¿no?</p> <p>P: Bueno, ahí incluye digamos, ya eso incluye que los consecutivos, ¿no? (5) Por ejemplo, a ver, el primero podría ser 10 000, ¿cierto?</p> <p>M2: Sí.</p> <p>P: ¿Sí? ((varios estudiantes asientan con la cabeza)) Y que vayan decreciendo, pero que estén acotados por 9000, ¿sí? Y entonces igual, va a ser siempre esto ((señalando la desigualdad $A_i > A_j$)), pero (x)se hará la estabilidad, por que, qué habíamos dicho (x)que provocaba la estabilidad, los radios al final, cuando era infinito eran tan chiquititos, tan pequeñitos, ¿verdad? Entonces ¿será que ser decreciente es suficiente? (Incomprensible, 1) que converja.</p> <p>H6: Tendría que tender a cero.</p> <p>H3: ¿Verdad? Es como necesaria esa condición, ¿cierto? ((los estudiantes asientan con la cabeza)) Que esta ((señalando la desigualdad $A_i > A_j$)) no es suficiente.</p> <p>H1: nada más que, está al revés, ¿no? Debería ser el signo de desigualdad, el signo de desigualdad debería ser al revés.</p> <p>P: ¿Este?</p> <p>H1: Sí.</p> <p>P: ((Cambia $A_i > A_j$ por $A_i < A_j$)) Para una circunferencia con un radio mayor, debe ser menor que el otro, en una posición mayor tiene que ser menor que el otro. Entonces ¿cómo escribirían eso otro?</p> <p>H1: Eh, A_n diverge a 0, tiene a cero ((los estudiantes asientan con la cabeza))</p> <p>[VG]-5-[01:13:23]</p> <p>P: ¿Y ahora con los w? Digamos que la idea es similar, lo que habían dicho era que tenían que ir creciendo ¿cierto? Entonces eso ¿cómo lo escribirían? w_i es la misma idea verdad, nada más que aquí si se mantienen las desigualdades ¿verdad? ((escribe en la pizarra))</p>  <p>Pero otra vez la pregunta es si eso es suficiente.</p> <p>H4: Debe tender a::: [a infinito].</p> <p>M3: [a infinito].</p> <p>P: Debe tender a infinito, ¿verdad? ((los estudiantes asientan con la cabeza))</p>
Intencionalidad	Se espera que el estudiante identifique que para garantizar la estabilidad del sistema se debe cumplir que $A_n \rightarrow 0$ y $w_n \rightarrow \infty$, es importante resaltar que estas condiciones son necesarias para la convergencia, pero no suficientes.						
¿Qué hace?	Establecer las condiciones necesarias para la estabilidad del sistema.	Establecer las condiciones necesarias para la estabilidad del sistema.	Establecer las condiciones necesarias para la estabilidad del sistema.	Establecer las condiciones necesarias para la estabilidad del sistema.	Establecer las condiciones necesarias para la estabilidad del sistema.		Establecer las condiciones necesarias para la estabilidad del sistema.
¿Cómo hace?		Extendiendo los resultados de las tareas anteriores.	Extendiendo los resultados de las tareas anteriores.	Extendiendo los resultados de las tareas anteriores.	Extendiendo los resultados de las tareas anteriores.		Extendiendo los resultados de las tareas anteriores.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger.	(A) Para que la trayectoria tome formas definidas la sucesión de los radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger. (C) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe ser decreciente y la sucesión de las velocidades angulares debe ser creciente.	(C) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe ser decreciente y la sucesión de las velocidades angulares debe ser creciente. (C) Para que se complete el recorrido en un tiempo finito la sucesión de las velocidades angulares debe diverger.	(A) Para que la trayectoria tome formas definidas la sucesión de los radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger. (C) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe ser decreciente y la sucesión de las velocidades angulares debe ser creciente.	(A) Para que la trayectoria tome formas definidas la sucesión de los radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger. (C) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe ser decreciente y la sucesión de las velocidades angulares debe ser creciente.		(A) Para que la trayectoria tome formas definidas la sucesión de los radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger. (C) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe ser decreciente y la sucesión de las velocidades angulares debe ser creciente.
Pregunta b	$x_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(\theta_k + w_k t)$ $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin(\theta_k + w_k t)$ 	$x_i = A_0 + A_1 \cos(\theta_1 + w_1 t)$ $x_2 = A_0 + A_2 \cos(\theta_2 + w_2 t) + A_1 \cos(\theta_1 + w_1 t)$ \vdots $x_n = A_0 + A_n \cos(\theta_n + w_n t) + A_{n-1} \cos(\theta_{n-1} + w_{n-1} t) + \dots + A_1 \cos(\theta_1 + w_1 t)$ $y_1 = A_0 + A_1 \sin(\theta_1 + w_1 t)$ $y_2 = A_0 + A_1 \sin(\theta_1 + w_1 t) + A_2 \cos(\theta_2 + w_2 t)$ \vdots $y_n = A_0 + A_1 \sin(\theta_1 + w_1 t) + A_2 \cos(\theta_2 + w_2 t) + \dots + A_n \sin(\theta_n + w_n t)$ $(x_n, y_n) = \left(A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(\theta_k + w_k t), A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin(\theta_k + w_k t) \right)$	$(x_n, y_n) = (A_0, A_0) + \left(\sum_{k=1}^n A_k \cos(\theta_k + w_k t), \sum_{k=1}^n A_k \sin(\theta_k + w_k t) \right)$ $k = 1, 2, \dots, n.$	$(x_i, y_i) = \left(A_0 + A_1 \cos(\theta_1 + w_1 t), A_0 + A_1 \sin(\theta_1 + w_1 t) \right)$ $(x_2, y_2) = \left(A_0 + A_2 \cos(\theta_2 + w_2 t) + A_1 \cos(\theta_1 + w_1 t), A_0 + A_2 \sin(\theta_2 + w_2 t) + A_1 \sin(\theta_1 + w_1 t) \right)$ \vdots $(x_n, y_n) = \left(A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(\theta_k + w_k t), A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin(\theta_k + w_k t) \right)$	$(x_n, y_n) = \left(A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(\omega_k t + \theta_k), A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin(\omega_k t + \theta_k) \right)$	<p>[VE3]-5-[00:02:46]</p> <p>M3: ¿No sería la suma de los radios? O sea $A_1, A_2, A_3 =$ =No "M3" ((se refiere a M3 por su nombre)).</p> <p>H3: [Ah no:::]</p> <p>M3: [Porque los radios] van a estar multiplicando</p> <p>H3: Sí, exacto. Ya, ya.</p> <p>H3: Entonces.</p> <p>M3: Bueno, pero para las (x)de x serían, [los radios]</p> <p>H3: [(Incomprensible, 2)] ahora sí que para este. Sería A_0 más A_1 ¿por qué? Por el coseno del ángulo.</p> <p>M3: Para x, sí para x, sí para x, ¿para el otro?</p> <p>M3: Sería:::=</p> <p>H3: =Seno, ¿no?</p> <p>M3: Seno.</p> <p>H3: ¿Pero de qué ángulo?</p> <p>M3: Pues de θ_1.</p> <p>H3: ¿Más qué?</p> <p>M3: Má:::s, ay::: la coordenada.</p> <p>H3: Te falta algo.</p> <p>M3: Ah::: sí, [esa cosa].</p> <p>H3: [¿Por qué?]</p> <p>M3: Más la velocidad angular.</p> <p>H3: ¿Por qué?</p> <p>M3: Por el tiempo.</p>	<p>[VG]-5-[01:14:33]</p> <p>P: Considere el modelo utilizando n circunferencias. Determine las coordenadas x_n, y_n del punto P en el tiempo t ((leyendo la pregunta)). ¿Qué escribieron por ahí? ((señalando al Equipo 1)) Entonces ya eso es como general, ¿verdad? ¿Quién lo quiere escribir? (18) ¿quién quiere escribir ese? ((H2 pasa a la pizarra))</p> <p>H2: Serían estas ((señalando lo que escribió en la pizarra)).</p>  <p>P: Entonces, cuántanos ¿de dónde sale? ¿qué significa cada cosa?</p> <p>H2: Ésta ((señalando los A_0)) pues la, eje de las coordenadas donde está el planeta. Esta ((señalando los A_n)) pues ya después de que hicimos el análisis de realimentación pues vimos que prácticamente eran los radios de las circunferencias por su componente ((señalando la componente x)) que contribuya en X, el ángulo inicial ((señalando el θ_n del coseno)) de cada circunferencia más la velocidad angular ((señalando el ω_n)).</p> <p>P: Y en Y similar nada más que ahora es la contribución sen en y, ¿verdad? Ok ¿sí están de acuerdo? ((los estudiantes asientan con la cabeza))</p>

Parte I. Generando el modelo							
Intención: Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							[VG]-5-[01:16:45]- Se hace la corrección respecto de los subíndices elegidos respecto de la pregunta planteada, el consenso final queda como sigue: 
Intencionalidad	Se espera que no haya problema con el establecimiento de las relaciones, y que el argumento para dar su respuesta sea bajo lo construido en las tareas anteriores, así sucedió en la prueba piloto, concluyendo que las coordenadas del planeta son: $\begin{cases} x_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos[w_k t + \theta_k] \\ y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin[w_k t + \theta_k] \end{cases}$						
¿Qué hace?	Seriar los términos de la suma.	Seriar los términos de la suma.	Seriar los términos de la suma.	Seriar los términos de la suma.	Seriar los términos de la suma.	Seriar los términos de la suma.	Seriar los términos de la suma.
¿Cómo hace?		Identificando la regularidad en los términos que se agregan.					Identificando la regularidad en los términos que se agregan.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Las fórmulas presentadas.	(A) Las fórmulas presentadas.	(A) Las fórmulas presentadas.	(A) Las fórmulas presentadas.	(A) Las fórmulas presentadas.	(A) La descripción de la fórmula presentada.	(A) Las fórmulas presentadas con su descripción.
Pregunta c	$w_k \rightarrow \infty$ al agregar más circunferencias, y los radios son menores, por lo que, las contribuciones A_k son cada vez menores.	Que de acuerdo a las condiciones obtenidas y la fórmula describen la trayectoria que forma el planeta conforme se agregan mas circunferencias.	Según las características del radio y de la velocidad angular, la fórmula anterior debería converger a una función definida.	Las condiciones de que los radios decrezcan y las velocidades angulares aumenten asegura la convergencia de las expresiones obtenidas a una función, misma que modela la forma final de la trayectoria. Se observa que los coeficientes a_k y b_k representan las condiciones iniciales del sistema cuando se tienen n circunferencias.	Las condiciones de la respuesta en a) dan una descripción de la fórmula en b), por ejemplo, al disminuir los radios, las coordenadas se desplazan cada vez en una valor más pequeño.	No hubo interacción al responder esta pregunta.	[VG]-5-[01:17:34] P: ¿Cómo se relaciona su respuesta a la pregunta a con la fórmula obtenida en la pregunta anterior? ((leyendo la pregunta)). ¿Qué escribieron por ahí? ((señalando al Equipo 1)) Entonces ya eso es como general, ¿verdad? ¿Quién lo quiere escribir? (18) ¿quién quiere escribir ese? ((H2 pasa a la pizarra)) H2: ¿Cómo se relacionan? Los A_k tendrían que ser, que correspondan al radio, tendrían que ser decrecientes y a parte converger a 0. P: Converger a 0, ajá. H2: Y el ωt , ese tendría que diverger y nosotros también pusimos que ese tenía que ser creciente. P: ¿El $w_k t$? H2: El w , el ω_k . P: ¿Ese tiene que diverger? H2: Sí. P: ¿Y el θ_k ? H2: Pues ((gesto de negación con la cabeza)) P: ¿Qué pasa con ese? M2: (incomprensible, 4) H3: Yo siento que a medida que vamos aumentando el número de circunferencias, como se va haciendo más pequeño el radio, pues igual no parece muy importante dónde comencemos, por que eso es lo que representa ese ángulo, entonces como es más pequeño básicamente no se nota. P: Pero ya para muchos, ¿verdad? H3: ¡Ajá! P: ((Hablandole a M2)) No necesariamente disminuye por que si recuerdas (x)la Tarea 3, en el primer caso el ángulo era $\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right)$ y en (x)el, para la siguiente circunferencia era 0, y para la siguiente era $\arctan\left(\frac{3}{\pi}\right)$, y para la siguiente 0, entonces iba aumentando y 0, aumentando y 0, entonces no necesariamente es decreciente. No, es un constante, ¿verdad? para cada circunferencia es un constante, ¿sí? ((los estudiantes asienten con la cabeza))
Pregunta c	a_k, b_k también tienden a cero kw_0 también tiende a infinito	La fórmula describe una serie de Fourier la cual se aproxima a una función periódica, que dependa de nuestras condiciones para aproximarse a la forma de la trayectoria.	Es una nueva forma de expresar la fórmula de b). Permite ver más fácilmente la condición de convergencia ya que a_k, b_k tienden a 0.	Observamos que la expresión obtenida tiene la forma de una serie de Fourier, confirmando que nos estamos aproximando a una función capaz de describir la trayectoria del planeta conforme se agregan más circunferencias, por otra parte, en la expresión obtenida siguen siendo necesarias las condiciones presentadas en a) para poder asegurar la convergencia de la serie.	La ecuación anterior describe la convergencia y forma definida de la trayectoria al disminuir los radios de las circunferencias que se agregan cada vez más, tal como se trata en el inciso c)	[VE3]-5-[00:16:08] H3: ¿Qué opinas de este? M3: ¿Cómo se relaciona tu respuesta a la pregunta c con esta nueva fórmula? H3: ¿Qué le ves a la de aquí? M3: @No manches@ H3: ¿Cómo se relacionan eh "M3"? ((se refiere a M3 por su nombre)) M3: Se supone que esto que está acá. (Incomprensible, 4) Es nada más de verificarlo ¿no? H3: ¡Ujú! M3: Te acuerdas que había partes en donde iba más rápido la trayectoria y esto es lo de movimiento, ¿no? Pues eso describe la forma de la trayectoria. [VE3]-5-[00:18:54] M3: Como que modela (x)la rapidez con la que (incomprensible, 1, ¿se mueve sobre la trayectoria?), por así decirlo. Por que ya ves que (incomprensible, 2) en donde va más rápido era donde se tenían más puntos que creíamos discontinuo, ¿no? H3: Eso estoy wachando. O sea, tu dices que estas cosas te determinan qué tan rápido converge. M3: ¡Ujú! H3: ¿Por qué? M3: ¿Eh? H3: ¿Por qué? M3: Ahí si no sabría decirte cuate. (15) Porque::: modela:::, porque >depende de los radios y la velocidad angular<. [VE3]-5-[00:20:12] H3: ¿Qué respondiste en c, tú? M3: Que, ah:::, que describe la trayectoria que forma el planeta conforme se agregan más circunferencias. H3: Mmm ¿qué puse yo? Que los radios= M3: =¿Describe qué tan rápido converge esta trayectoria o (incomprensible, 1)? H3: Sí converge. M3: Pues ya.	[VG]-5-[01:28:56] P: ¿Cómo se relaciona tu respuesta a la pregunta c con? ((leyendo la pregunta)) O sea, en la pregunta c, qué es lo que habíamos dicho, que este::: esto debe tender a cero, ¿verdad? ((señalando el A_k)) Y esto debe tener a infinito ((señalando el w_k)), y esto es una constante ((señalando el θ_k)), entonces cómo se relaciona eso, con ahora esto otro ((señalando la fórmula construida en la pregunta d)). H1: Que las contribuciones (x)que da cada término siguiente se van disminuyendo, por que se ve que los, por ejemplo, están multiplicados por A_k y esos tienen a cero, o sea que para una contribución de un k cada vez mayor eso se va, va disminuyendo. P: ¿Si entienden la idea? H1: Eso sería una condición de convergencia. P: Parece verdad una condición de convergencia. Entonces ¿qué le debe pasar a este a_k , este minúscula, y al b_k , minúscula? M2: Tender a cero. P: Deberían verdad, se ve de acá, ¿cierto?

Parte I. Generando el modelo							
Intención: Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
						<p>H3: Es que no sé, creo que por ahí va la cosa. (15)</p> <p>"M3" (se refiere a M3 por su nombre) también tiene que ver aquí con la, de las condiciones, que tiene que cumplir esto para que esta trayectoria se establezca.</p> <p>M3: Ajá.</p> <p>H3: Y eso de que se establezca tiene que ver con estas cosas, que tiene que ver las condiciones para que se establezca con esto.</p> <p>[VE3]-5-[00:22:51]</p> <p>M3: Yo siento que esto, esta describe la manera en la que va a converger la trayectoria, o sea entre más le agregas, o sea primero no va tomando forma, pero ya luego te vas acercando y se empieza a ver la forma de Fourier, que en este caso (incomprensible, 1).</p> <p>H3: Entonces en general sí, pero (incomprensible, 1).</p> <p>M3: Por que se supone que se hace periódica por el hecho de que, pues en un mes uno sustituye los senos no, sin mover la trayectoria en uno, recorriendo 2π, por eso dice entonces ahí viene el otro periodo, entonces conforme vas agregándole se va acercando a la trayectoria, que se podría retomar como (incomprensible, 1) porque ya los radios y las velocidades ya, o sea, el radio ya no contribuye tanto en distancia, entonces nada más se ve como un puntito oscilando.</p> <p>H3: Un ϵ.</p> <p>M3: Un ϵ de distancia.</p>	
Intencionalidad	Se busca que se interprete el modelo matemático en el fenómeno físico.						
¿Qué hace?	Establecer las condiciones necesarias para la convergencia de la serie.	Interpretar el modelo en el fenómeno.	Establecer las condiciones necesarias para la convergencia de la serie.	Establecer las condiciones necesarias para la convergencia de la serie. Interpretar el modelo en el fenómeno.	Establecer las condiciones necesarias para la convergencia de la serie. Interpretar el modelo en el fenómeno.	Establecer las condiciones necesarias para la convergencia de la serie. Interpretar el modelo en el fenómeno.	Establecer las condiciones necesarias para la convergencia de la serie.
¿Cómo hace?		Asignando significados a los resultados obtenidos en el modelo.		Asignando significados a los resultados obtenidos en el modelo.	Asignando significados a los resultados obtenidos en el modelo.	Extendiendo los resultados de las tareas anteriores. Asignando significados a los resultados obtenidos en el modelo.	Extendiendo los resultados de las tareas anteriores.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger. (A) Para que la trayectoria tome una forma definida las sucesiones a_k y b_k deben tender a cero, $k\omega_0$ también tiende a infinito.	(A) Para que la trayectoria tome una forma definida se deben cumplir ciertas condiciones.	(A) Para que la trayectoria tome una forma definida se deben cumplir ciertas condiciones sobre los radios y la velocidad angular. (A) Para que la trayectoria tome una forma definida las sucesiones a_k y b_k deben tender a cero.	(C) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe decrecer y la sucesión de las velocidades angulares debe crecer.	(A) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe ir disminuyendo.	(A) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger.	(A) Para que la trayectoria tome una forma definida la sucesión de los radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger. (A) Para que la trayectoria tome una forma definida las sucesiones a_k y b_k deben tender a cero.
Pregunta d	$a_0 = 2A_0$ $a_k = A_k \text{Sen}(\theta_k)$ $b_k = A_k \text{Cos}(\theta_k)$ $\omega_k = k\omega_0$ 	$\text{sen}(\theta_k + \omega_k t) = \text{sen}(\theta_k) \cos(\omega_k t) + \text{cos}(\theta_k) \text{sen}(\omega_k t)$ Así: $a_k = 2A_k$ $a_k = A_k \text{sen}(\theta_k) \Rightarrow A_k = \frac{a_k}{2 \text{sen}(\theta_k)}$ $b_k = A_k \text{cos}(\theta_k)$ $\omega_k = k\omega_0$ donde a_k es la componente en "y" y b_k la componente en "x"	$a_0 = 2A_0, \omega_k = k\omega_0, a_k = A_k \text{sen}(\theta_k), b_k = A_k \text{cos}(\theta_k)$ 	Claramente $a_k = 2A_k$. Por identidad de ángulos: $\text{sen}(\theta_k + \omega_k t) = \text{sen}(\theta_k) \cos(\omega_k t) + \text{cos}(\theta_k) \text{sen}(\omega_k t)$ Luego: $\sum_{k=1}^n A_k \text{sen}(\theta_k + \omega_k t) = \sum_{k=1}^n A_k [\text{sen}(\theta_k) \cos(\omega_k t) + \text{cos}(\theta_k) \text{sen}(\omega_k t)] =$ $= \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2} \left[\frac{\text{sen}(\theta_k)}{a_k} \cos(\omega_k t) + \frac{\text{cos}(\theta_k)}{b_k} \text{sen}(\omega_k t) \right]$ $\Rightarrow \frac{a_0}{2} = A_0 \text{sen}(\theta_0) \quad \text{y} \quad \frac{b_0}{2} = A_0 \text{cos}(\theta_0)$	Desarrollando al seno de la suma de dos ángulos, se obtiene que $a_0 = 2A_0$ $a_k = A_k \text{Sen}(\theta_k)$ $b_k = A_k \text{Cos}(\theta_k)$ $\omega_k = k\omega_0$ 	<p>[VE3]-5-[00:11:29]</p> <p>M3: ¿Qué vamos a hacer? (13)</p> <p>H3: Hay que desarrollar esta suma.</p> <p>M3: Ah, si es cierto.</p>	<p>[VG]-5-[01:20:25]</p> <p>P: Note nuevamente que y_n representa la n-ésima suma parcial de una serie trigonométrica. Utilice identidades trigonométricas para reescribirla (leyendo la pregunta)</p> <p>Voy a, voy a hacerles espacio (5) ((borrando la pizarra)) Entonces ya estamos hablando de y_n, entonces sería ((escribiendo en la pizarra)) A_0 más la serie desde $k = 1$ hasta n, dijimos de A_n por el, de A_k perdón, de A_k por sen de θ_k más ω_k por t, esa es, ¿verdad?</p>  <p>Entonces bueno ¿quién quiere venir a reescribir con todos los pasitos eso ((la igualdad de la pizarra)) en esta forma ((la que pide la pregunta))? Ya lo habíamos hecho en la Tarea 3, ¿verdad? Entonces ahora sí como en forma general ((H1 levanta la mano)) Pase.</p> <p>H1: (42) ((escribiendo en la pizarra))</p>  <p>Este es el primer paso, aplicar la identidad de la suma de ángulos, tendría que::</p> <p>(17) ((sigue escribiendo))</p>  <p>k por, quiere que empiece por coseno, ¿no? Entonces sería esto de aquí (38) ((sigue escribiendo))</p>  <p>Por lo pronto aquí estaría el a_0 ((entre dos le indican los compañeros)) ah si es cierto, a_0 medios, este sería el a_k, por que depende de k y también el b_k. Solo que, un problemita es que ahí nos lo piden de la forma ((escribe en la pizarra)) $k\omega_0 t$, y aquí tenemos $\omega_k t$.</p>  <p>Y aquí lo que pensamos hace es, eh recordamos como fue en la forma anterior, que había un omega inicial o no se como le llamaban, que valía 1 ((escribe en la pizarra)) y el siguiente valía, voy a poner inicial, y por ejemplo el siguiente valía así, (8) y así sucesivamente esto es un ω_k.</p>

Parte I. Generando el modelo							
Intención: Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							 <p>Pero esto es, es de la, lo que recordamos de la actividad anterior, por que las condiciones a las que llegamos es que simplemente eh:: estas velocidades tienen que ir aumentando sucesivamente y tendiendo a infinito, pero para ponerlas de esta forma, creo que esto fue la que se nos ocurrió, de la vez pasada que las velocidades angulares crecían con k.</p> <p>[VG]-5-[01:25:55]</p> <p>P: Y entonces, ¿ese $\frac{a_0}{2}$ qué representaría en el fenómeno?</p> <p>H1: Condición, posición inicial.</p> <p>P: La posición inicial ¿y el a_k y el b_k?</p> <p>H1: El a_k son, ¿minúsculas verdad?</p> <p>P: Ajá, minúsculas.</p> <p>H1: Pues son los coeficientes de esta suma, ¿no?</p> <p>P: ¿Pero en el fenómeno?</p> <p>H1: Ah:: en el fenómeno.</p> <p>P: ¿En el sistema?</p> <p>H1: Bueno ((señalando el coeficiente $A_k \text{ sen}(\theta_k)$)) seno del ángulo inicial k-ésimo y radio k-ésimo, ¿no?</p> <p>P: Pero que representan enton-, eso representan A_k y θ_k, pero ¿todo el a_k qué representaría?</p> <p>H1: Posición inicial (x) en x, radio (x) por, bueno sí de las ecuaciones polares, ¿no? r componente en x, o sea es posición inicial en x.</p> <p>P: ¿(x) Sí o ven? Si haces un dibujito del caso.</p> <p>H1: (16) ((dibujando en la pizarra))</p> <p>P: ¿Ahí θ_k verdad sería?</p> <p>H1: (17) ((sigue dibujando)) ¿Algo así?</p>  <p>P: ¿Sí, lo ven? Entonces quien sería, puedes poner ahí en el dibujo de una vez quién es a_k más bien, quién es a_k y quién es b_k.</p> <p>H1: ((escribiendo en la pizarra)) x entre A_k es igual a sen, aquí era θ_k, les voy a llamar $0k$</p>  <p>P: Pero ya tienen nombre.</p> <p>H1: Ah no, (x) pero estas de aquí ((señalando a x_{0k} y y_{0k}))</p> <p>M2: Ya ese es el a_k.</p> <p>H1: Ah, sí es cierto::</p> <p>P: Es el a_k, ¿no?</p> <p>H1: Ya tiene nombre, sí, sí, sí, sí.</p> <p>P: Ya tienen nombre.</p> <p>H1: ((Escribe en la pizarra)) Entonces aquí va a_k, b_k, (15)</p>  <p>Bueno de aquí se ve.</p>
Intencionalidad	Se establezcan las condiciones para que el modelo sea equivalente con la serie trigonométrica de Fourier.						
¿Qué hace?	Reescribir las fórmulas construidas.	Reescribir las fórmulas construidas.	Reescribir las fórmulas construidas.	Reescribir las fórmulas construidas.	Reescribir las fórmulas construidas.	Reescribir las fórmulas construidas.	Reescribir las fórmulas construidas.
¿Cómo hace?	Utilizando la identidad trigonométrica para $\text{sen}(\alpha + \beta)$.	Utilizando la identidad trigonométrica para $\text{sen}(\alpha + \beta)$.	Utilizando la identidad trigonométrica para $\text{sen}(\alpha + \beta)$.	Utilizando la identidad trigonométrica para $\text{sen}(\alpha + \beta)$.	Utilizando la identidad trigonométrica para $\text{sen}(\alpha + \beta)$.	Desarrollando la suma.	Utilizando la identidad trigonométrica para $\text{sen}(\alpha + \beta)$.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha$.	(A) $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha$.	(A) $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha$.	(A) $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha$.	(A) $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha$.		(A) $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha$.

Parte II. Otra forma de interpretar w_0							
Intención: Encontrar condiciones para que el modelo sea equivalente a la STF.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	$t = \frac{d}{v} = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$v = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{v} = \frac{2\pi A_1}{A_1 \omega_0} \quad t = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$t = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{2\pi}{\omega_0}$	E_1 efecto, $v = \frac{z}{t}$, $\frac{z}{t} = \frac{v}{A_1 \omega_0}$ y $x = \pi A_1 z \Rightarrow A_1 \omega_0 = \frac{2\pi A_1}{t} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$t = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{t} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega_0}$	[VE3]-5-[01:11:02] M3: Pues no sería el su- H3: Ah sí (incomprensible, 1) M3: El ω_0 = H3: =Pues sabemos la distancia que da ¿no? Es el primer radio. M3: >La distancia<, pero es del punto P, o sea la distancia que recorre es el perímetro de un círculo. H3: ¡A ver! Considere el movimiento del punto sobre, es decir aquella donde el punto se mueve a una= M3: =Y es π por radio, ¿no? Y sabemos los radios. H3: Y por el π , esto sería π por A_1 .	[VG]-5-[02:17:07] P: Determine el tiempo t que tarda el punto P en dar un giro completo ((leyendo la pregunta)) Entonces ¿(x) quién quiere hacer esa? ¿o me dicen? H1: La distancia sería la circunferencia, $2\pi r$. P: 2π . H1: Por el radio= P: =Entonces la distancia sería la circunferencia. H1: Sí ((los estudiantes asienten con la cabeza)) P: Entonces 2π . H1: Y el radio de A_1 .

Parte II. Otra forma de interpretar ω_0							
Intención: Encontrar condiciones para que el modelo sea equivalente a la STF.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
						<p>M3: Sí, sabemos los radios. H3: Sería la distancia. M3: ¡Ajá! H3: Ya. M3: ¿El tiempo? H3: En que recorre aquí ((silbido)) M3: Y la velocidad también la conocemos. H3: (Incomprensible, 2, ¿por qué la conocemos?) M3: Por los:: angular. H3: La velocidad angular no se define también en términos de= =De la velocidad por el radio. M3: ¿La velocidad por el radio? M3: Sí, ¿no? H3: (Incomprensible, 1, ¿por) qué la velocidad por el radio? M3: Es que eso me confundió. H3: ¿Sería la velocidad entre el radio, no? M3: No era, ¿hay que buscarlo por aquí? A ver. H3: Si pones velocidad por distancia, o velocidad por radio, te queda metros cuadrados sobre segundos. M3: Ahí no dice velocidad angular. (13) Ah no, sí, la velocidad es ω (x)por radio, ¿no? Para que ω sea velocidad entre ese.</p> <p>[VE3]-5-[01:13:31] M3: Sí ¿ya ves? Es ω por el radio, bueno estoy haciendo vectorialmente. Sin wache ¿ya ves? H3: A mí algo me decía que ω era ángulo inicial sobre el radio.</p>	<p>P: Y el radio de A_1, ok. H1: Y el tiempo sería:: M2: Entre la velocidad. H1: Ah velocidad, tenemos distancia entre velocidad, y la velocidad es ω_0. P: Entre tiempo, ¿verdad? Sería ahí. H1: Esa es velocidad angular, ese es ω_0. M2: No, es que ahí nos piden el tiempo. H1: Ajá, ese es igual ω_0, solo que ahí nos están pidiendo el tiempo, y luego ahí despejaríamos.</p>
Pregunta b	$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$	$p = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{p}$	$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$	$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$	$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$	<p>No hubo interacción al responder esta pregunta. [VE3]-5-[02:01:50]- H3 agrega a su respuesta el número 2 en el numerador.</p>	<p>[VG]-5-[02:18:35] P: Si llamamos p al tiempo que tarda el punto P para dar exactamente una vuelta. ¿Cuál es el valor de ω_0 en términos de p? ((leyendo la pregunta)) H1: Pues habría que, es como un cambio de variable, nos dice que t lo cambiemos por p. Yo me imagino que es el periodo. P: Puede ser. Entonces para la pregunta b nada más. H1: Es la primera cuestión que se me ocurrió, el periodo. P: Ajá. H1: t igual a p. [VG]-5-[02:19:30] P: Hay un detalle ahí que no han notado. H6: El A_1. P: Ajá ¿por qué el A_1? H6: Por que:::, bueno yo con lo, con lo que es el seno y coseno contiene, lo que es el argumento de seno y coseno tiene que ser de dimensión. H9: Este::: viendo las tareas tiene que ser más bien la rapidez, ¿no? (x)Del punto. P: O sea, es algo que viene desde la anterior, lo estoy dejando aquí, pero (2) Velocidad igual distancia en tiempo, entonces la velocidad es distancia sobre unidad de tiempo, ¿cierto? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Sí, ¿verdad? Se ha dicho que es radianes por unidad de tiempo, entonces la distancia es angular, y esa distancia que está ahí es trayectoria, ¿cierto? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Sí, ahí sería, más bien, metros o unidad de medida lineal, sobre unidad de tiempo. Entonces este A_1= =No va. H1: ¿Verdad que no va? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) por que esto me está hablando de distancia y esta velocidad es ángulo por unidad de tiempo, entonces sería ángulo por unidad de tiempo ¿estamos claros?</p>
Pregunta c	$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) + b_k \sin\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) \right]$	$y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin(\theta_k) \cos\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) + A_k \cos(\theta_k) \sin\left(k \frac{2\pi}{p} t\right)$	$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) + b_k \sin\left(k \frac{2\pi}{p} t\right)$	$y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin(\theta_k) \cos\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) + A_k \cos(\theta_k) \sin\left(k \frac{2\pi}{p} t\right)$	$y_n = A_0 + \sum \left[A_k \sin(\theta_k) \cos\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) + A_k \cos(\theta_k) \sin\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) \right]$	<p>[VE3]-5-[01:25:04] M3: Entonces k veces π sobre p por t. Ah no, pero ese ya es un tiempo específico, ¿verdad? Ah no, si se tiene que tomar el t, ¿verdad? Por que este es el tiempo específico para los ω_0. Sí, ¿no? H3: Pero aquí esto toma (incomprensible, 1). M3: Sí, sí, sí, por eso tenía que ser, entonces si es $k\pi$ veces sobre p por t.</p>	<p>[VG]-5-[02:21:27] P: Reescribe la fórmula que obtuviste en la pregunta d de la Parte I, ahí la dejé arriba verdad, utilizando este nuevo valor de ω_0. ((leyendo la pregunta)) Entonces me imagino que nada más cambiaron, ¿verdad? ((asienten con la cabeza))</p>
Pregunta d	Constante para todo t y k . P es el periodo de la trayectoria, determina cuántas vueltas darán los puntos de las siguientes circunferencias.	Como el periodo temporal de la grafica de la funcion limite ya que cada que pasa p , el planeta P da una vuelta completa a la Tierra.	Constante porque el que cuenta es el periodo de la primera circunferencia. Ya que los demás dan cierta cantidad de vueltas por cada vuelta de la primera circunferencia.	Como el periodo temporal de la gráfica de la función límite, esto, pues cada que transcurre el tiempo p el planeta completa una vuelta, lo que se ve reflejado en el periodo temporal del resto de las circunferencias.	Como el periodo de la función	<p>[VE3]-5-[01:30:48] H3: Sería el periodo, ¿no? M3: Ah, ok. H3: Sería el periodo (incomprensible, 1). M3: ¡Ujú! (9) Ah::: pues sí:::, porque sería (3) Sí, porque la velocidad también la puedes describir como 2π por el periodo, ¿no? (4) La velocidad la puedes ver 2π por t, o 2π (incomprensible, 1). H3: ¿Dónde está ese 2π? Tendría que wacharlo. M3: Ah no, me refería a que (4) es manera de entención. H3: Entonces estás de acuerdo que sería como una especie de periodo. [VE3]-5-[01:33:44] H3: Sabes qué, cada vez que pasa el tiempo p va a salir ((realiza un silbido explicando)), sería el periodo, ¿no? M3: Sí. [VE3]-5-[02:14:18]- H3 agrega a su respuesta después de la puesta en común "lo que se ve reflejado en el periodo temporal del resto de las circunferencias"</p>	<p>[VG]-5-[02:22:26] P: Dado que el valor p es el tiempo que tarda el planeta P en completar una vuelta alrededor de la Tierra T. ¿Cómo se observaría ese valor en la gráfica de la función límite? ((leyendo la pregunta)) H6: Su periodo. H6: ¿Su periodo? P: Ajá, como se va repitiendo la gráfica en la función límite. P: ¿Seguros? ¿totalmente? H6: ©No totalmente© P: Por que aquí habla, digamos que p es completar una vuelta, pero::: H6: Para una [circunferencia] P: [Para la primera] circunferencia. Ese mismo p es si tengo dos, tres o cuatro. H6: No, eso no estaba viendo. (9) P: ¿Cómo lo podrían analizar? (4) Nos podemos devolver a los casos particulares y ver. Veámoslo en la Tarea 1 que no tiene radios ni nada a ver qué. (16) ((buscando el applet de la Tarea 1 – Parte 2 en la computadora)) Aquí está el, entonces digamos que, en este caso, p sería lo que tarda ese planeta Q en dar esa vuelta, ¿cierto? La pregunta es, ¿si le agrego más circunferencias tarda eso mismo? ¿verdad? Esa es la pregunta. Pongámosle dos a ver.</p>

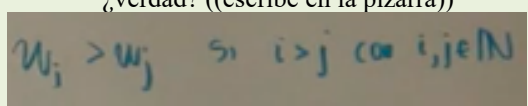
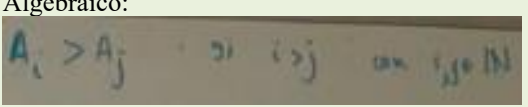
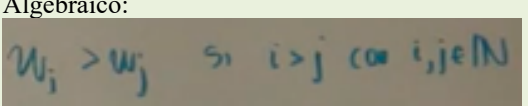
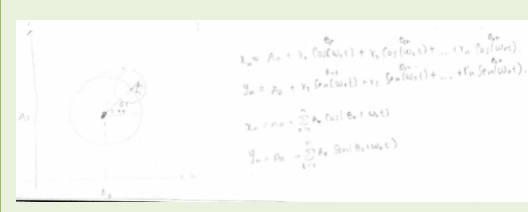
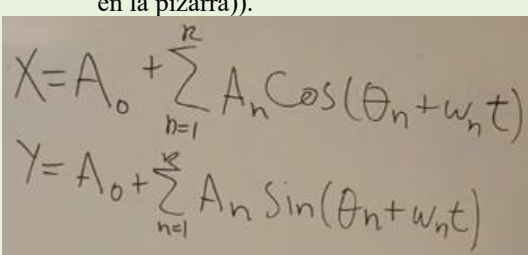
Parte II. Otra forma de interpretar w_0							
Intención:	Encontrar condiciones para que el modelo sea equivalente a la STF.						
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							<p>(6) ¿Qué dicen? ¿Si se tarda lo mismo? En completar la trayectoria, completa ((risas)). Si se nota (incomprensible, 2), Si ¿cómo lo notan?</p> <p>H4: Nos fijamos en el centro de la circunferencia más pequeña.</p> <p>P: Ajá.</p> <p>H4: Y cuando esta se completa, eh::: también completa el punto Q.</p> <p>P: También completa el punto Q la trayectoria ¿cierto? ((los estudiantes asientan con la cabeza)) Y le podemos agregar más, pues agreguemosle, yo creo que aquí podemos agre- pongámosle unas 9, 10. Está un poquito difícil ver ¿verdad? Pero estamos comparando este ¿verdad? El de la primera con la trayectoria ¿cierto?</p> <p>H4: Como que todos (x) van a volver, todos se alinean en el punto de partida.</p> <p>[VG]-5-[02:26:11]- El profesor termina explicando algebraicamente cómo se ve en la fórmula que el periodo efectivamente es p.</p>
Intencionalidad	Se pretende que el estudiante reconozca a p como el periodo de la función límite cuando se considera la variable t un número real. Esto es importante para la Tarea #6, pues se espera que el estudiante realice su estudio en un intervalo de tamaño p , el cual es representativo del comportamiento general de la serie.						
¿Qué hace?	Identificar los parámetros en una noción física conocida. Sustituir los valores dados en las relaciones construidas. Reconocer la periodicidad en el fenómeno.	Identificar los parámetros en una noción física conocida. Sustituir los valores dados en las relaciones construidas. Reconocer la periodicidad en el fenómeno.	Identificar los parámetros en una noción física conocida. Sustituir los valores dados en las relaciones construidas. Reconocer la periodicidad en el fenómeno.	Identificar los parámetros en una noción física conocida. Sustituir los valores dados en las relaciones construidas. Reconocer la periodicidad en el fenómeno.	Identificar los parámetros en una noción física conocida. Sustituir los valores dados en las relaciones construidas. Reconocer la periodicidad en el fenómeno.	Identificar los parámetros en una noción física conocida. Sustituir los valores dados en las relaciones construidas. Reconocer la periodicidad en el fenómeno.	Identificar los parámetros en una noción física conocida. Sustituir los valores dados en las relaciones construidas. Reconocer la periodicidad en el fenómeno.
¿Cómo hace?	Utilizando la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo. Cambiando los valores dados en las relaciones construidas. Identificando la repetición regular del comportamiento.	Utilizando la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo. Cambiando los valores dados en las relaciones construidas. Identificando la repetición regular del comportamiento.	Utilizando la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo. Cambiando los valores dados en las relaciones construidas. Identificando la repetición regular del comportamiento.	Utilizando la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo. Cambiando los valores dados en las relaciones construidas. Identificando la repetición regular del comportamiento.	Utilizando la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo. Cambiando los valores dados en las relaciones construidas. Identificando la repetición regular del comportamiento.	Utilizando la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo. Cambiando los valores dados en las relaciones construidas. Identificando la repetición regular del comportamiento.	Utilizando la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo. Cambiando los valores dados en las relaciones construidas. Identificando la repetición regular del comportamiento.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) El tiempo es igual a la distancia (angular) recorrida dividida por la velocidad. (A) Dada la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo, se sustituyen los valores dados. (A) p es el periodo de la trayectoria.	(A) El tiempo es igual a la distancia (sobre la circunferencia) recorrida dividida por la velocidad (sobre la circunferencia). (A) Dada la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo, se sustituyen los valores dados. (A) p es el periodo temporal de la gráfica.	(A) El tiempo es igual a la distancia (angular) recorrida dividida por la velocidad. (A) Dada la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo, se sustituyen los valores dados. (A) p es el periodo de la primera circunferencia.	(A) El tiempo es igual a la distancia (sobre la circunferencia) recorrida dividida por la velocidad (sobre la circunferencia). (A) Dada la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo, se sustituyen los valores dados. (A) p es el periodo temporal de la gráfica.	(A) El tiempo es igual a la distancia (angular) recorrida dividida por la velocidad. (A) Dada la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo, se sustituyen los valores dados. (A) p es el periodo de la función.	(C) Considera la distancia recorrida de P como el perímetro de la circunferencia, al relacionarlo que lo velocidad que es dada en radianes por unidad de tiempo. (A) El tiempo es igual a la distancia (angular) recorrida dividida por la velocidad. (A) Dada la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo, se sustituyen los valores dados. (A) p es el periodo de tiempo en que la trayectoria se repite.	(C) Considera la distancia recorrida de P como el perímetro de la circunferencia, al relacionarlo que lo velocidad que es dada en radianes por unidad de tiempo. (A) El tiempo es igual a la distancia (angular) recorrida dividida por la velocidad. (A) Dada la relación física, velocidad es igual a distancia entre tiempo, se sustituyen los valores dados. (A) p es el periodo de tiempo en que la trayectoria se repite.

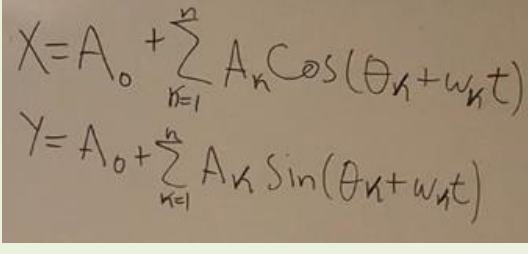

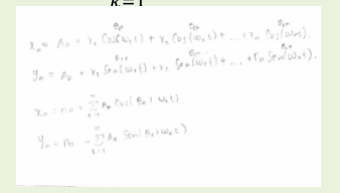
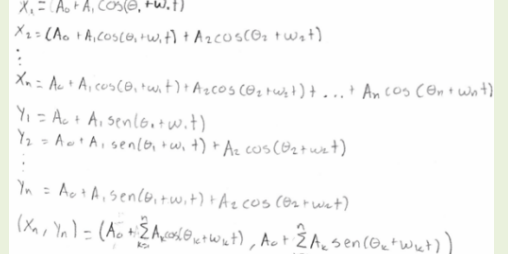
Tarea #5. Etapa 2: Identificación de los invariantes de las acciones

TAREA #5

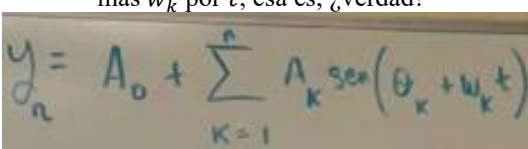
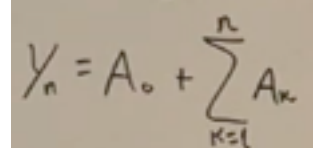
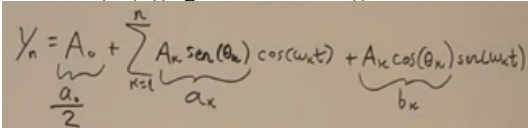
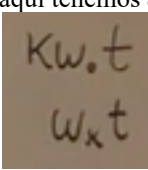
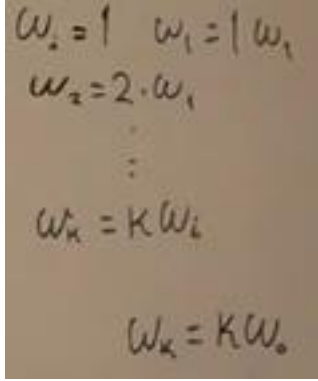
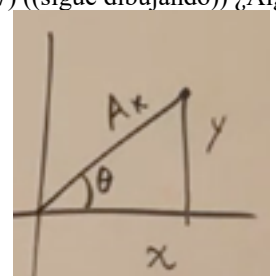
Objetivo de la Tarea: Significar los elementos presentes en la serie trigonométrica que emerge al matematizar el modelo del movimiento planetario de los alejandrinos en forma general.

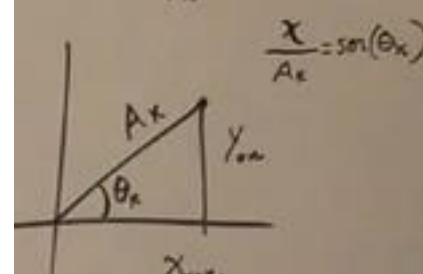
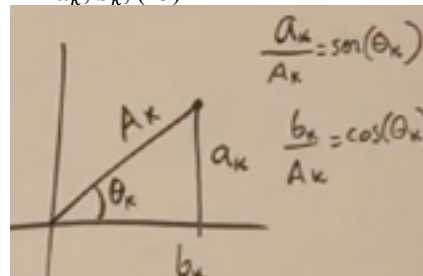
Parte I. Generando el modelo							
Intención:	Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.						
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	$A_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ Las velocidades aumentan al agregar más circunferencias y $w_k \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$ Así se formarán trayectorias con formas definidas al agregar más circunferencias.	Debe cumplirse que los radios de las circunferencias vayan disminuyendo y las velocidades angulares vayan aumentando, además que las series de las componentes sean convergentes. Donde los radios tienden a cero y las velocidades angulares a infinito.	Se debe cumplir $r_{k+1} < r_k$ y $\omega_k > \omega_{k+1}$ para que la trayectoria no se desborde. Y $\omega_{k+1} > \omega_k$ y $\omega_k \rightarrow \infty$ para que se complete el recorrido en un tiempo finito.	Debe cumplirse que al ir agregando más y más circunferencias, estas decrezcan en radio y el punto o planeta P aumente su velocidad angular, para completar un giro cada vez más rápido, observándose como si el planeta ya no girara en torno al centro de cada nueva circunferencia. Con los radios tendiendo a cero y las velocidades angulares tendiendo a infinito.	Los radios de las circunferencias agregadas deben de ser menores con respecto al anterior, pero es necesario que $A_n \rightarrow 0$. A su vez, la velocidad angular del punto P en cada nueva circunferencia debe de aumentar (esto como consecuencia de la disminución de las circunferencias) y es necesario que $w_n \rightarrow \infty$	No hubo interacción al responder esta pregunta. [VE3]-5-[00:56:50]- H3 agrega a su respuesta el último párrafo después de la puesta en común “Con los radios tendiendo a cero y las velocidades angulares tendiendo a infinito” [VE3]-5-[01:01:03]- M3 agrega a su respuesta el último párrafo después de la puesta en común. “Donde los radios tienden a cero y las velocidades angulares a infinito.”	[VG]-5-[01:08:15] P: Con base en los modelos particulares estudiados en las Tareas 1, 2 y 3 ¿qué condiciones deben cumplirse en el modelo general para que la trayectoria del planeta se establezca conforme se agreguen cada vez más circunferencias? ((Leyendo la pregunta)) ¿Qué escribirían por ahí? ((señalando al Equipo 1)) H4: Que todas las circunferencias deben ser cada vez menores. P: Los radios de las circunferencias deben ser cada vez menores ¿qué otro? M3: Y las velocidades tienen que ir aumentando. H1: Las angulares. M3: Las angulares. P: Las velocidades angulares tienen que ir aumentando. ¿y eso cómo lo escribirían, matemática-? ¿cómo se escribe matemáticamente? Digamos que ahí está como cualitativo, ¿verdad? Los radios cada vez más chicos y las velocidades cada vez mayores ¿cómo escribirían eso? Qué sería, en este caso los radios son A_1, A_2 ¿verdad? H4: A1 menor que::: P: Los radios son A_1, A_2, A_3 y así ¿verdad? Y las velocidades w_1, w_2, w_3 y así ¿verdad? ((escribe en la pizarra))  Ustedes lo que dicen es que estos ((señalando los radios)) tienen que ir, eh. H3: Decreciendo. P: Ir decreciendo y estos ((señalando las velocidades)) deben de ir. H3: Aumentando. P: Aumentando ¿cómo lo escribirían matemáticamente? H6: A_i es mayor que A_j , si i es mayor que j . P: Ok, Entonces aquí ((escribiendo en la pizarra)) H6: A_i es mayor que A_j . P: Mayor. H6: Si i es mayor que j . Con i, j en (x)uno en N. P: ¿Así? ((varios estudiantes asientan con la cabeza))  Dice que uno es menor que otro, ¿sí? M3: ¡Ujú!

Parte I. Generando el modelo							
Intención: Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							<p>P: ¿Pero es suficiente con que sea uno menor que otro? (8)</p> <p>M2: Y consecutivos también deben ser, ¿no?</p> <p>H1: Poner consecutivo, ¿no?</p> <p>P: Bueno, ahí incluye digamos, ya eso incluye que los consecutivos, ¿no? (5) Por ejemplo, a ver, el primero podría ser 10 000, ¿cierto?</p> <p>M2: Sí.</p> <p>P: ¿Sí? ((varios estudiantes asienten con la cabeza)) Y que vayan decreciendo, pero que estén acotados por 9000, ¿sí? Y entonces igual, va a ser siempre esto ((señalando la desigualdad $A_i > A_j$)), pero (x)se hará la estabilidad, por que, qué habíamos dicho (x)que provocaba la estabilidad, los radios al final, cuando era infinito eran tan chiquititos, tan pequeñitos, ¿verdad? Entonces ¿será que ser decreciente es suficiente?</p> <p>H6: (Incomprensible, 1) que converja.</p> <p>H3: Tendría que tender a cero.</p> <p>P: ¿Verdad? Es como necesaria esa condición, ¿cierto? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Que esta ((señalando la desigualdad $A_i > A_j$)) no es suficiente.</p> <p>H1: nada más que, está al revés, ¿no? Debería ser el signo de desigualdad, el signo de desigualdad debería ser al revés.</p> <p>P: ¿Este?</p> <p>H1: Sí.</p> <p>P: ((Cambia $A_i > A_j$ por $A_i < A_j$)) Para una circunferencia con un radio mayor, debe ser menor que el otro, en una posición mayor tiene que ser menor que el otro. Entonces ¿cómo escribirían eso otro?</p> <p>H1: Eh, A_n diverge a 0, tiene a cero ((los estudiantes asienten con la cabeza))</p> <p>[VG]-5-[01:13:23]</p> <p>P: ¿Y ahora con los w? Digamos que la idea es similar, lo que habían dicho era que tenían que ir creciendo ¿cierto? Entonces eso ¿cómo lo escribirían? w_i es la misma idea verdad, nada más que aquí si se mantienen las desigualdades ¿verdad? ((escribe en la pizarra))</p>  <p>Pero otra vez la pregunta es si eso es suficiente.</p> <p>H4: Debe tender a:: [a infinito].</p> <p>M3: [a infinito].</p> <p>P: Debe tender a infinito, ¿verdad? ((los estudiantes asienten con la cabeza))</p>
Intencionalidad	Se espera que el estudiante identifique que para garantizar la estabilidad del sistema se debe cumplir que $A_n \rightarrow 0$ y $w_n \rightarrow \infty$, es importante resaltar que estas condiciones son necesarias para la convergencia, pero no suficientes.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	Las sucesiones de radios y de velocidades angulares.	Las sucesiones de radios y de velocidades angulares.	Las sucesiones de radios y de velocidades angulares.	Las sucesiones de radios y de velocidades angulares.	Las sucesiones de radios y de velocidades angulares.	Las sucesiones de radios y de velocidades angulares.	Las sucesiones de radios y de velocidades angulares.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	Para que la forma de la trayectoria sea definida, la sucesión de radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger.	Para que la forma de la trayectoria sea definida, la sucesión de radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger.	Para que la forma de la trayectoria sea definida, la sucesión de radios debe ser decreciente y la sucesión de las velocidades angulares debe ser creciente y divergente.	Para que la forma de la trayectoria sea definida, la sucesión de radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger.	Para que la forma de la trayectoria sea definida, la sucesión de radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger.	Para que la forma de la trayectoria sea definida, la sucesión de radios debe decrecer y converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe ser creciente y debe diverger.	Para que la forma de la trayectoria sea definida, la sucesión de radios debe decrecer y converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe ser creciente y debe diverger.
¿Por medio de qué lo hace?	Algebraico: $A_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ Verbal: Las velocidades aumentan al agregar más circunferencias Algebraico: $w_k \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$ Verbal: Así se formarán trayectorias con formas definidas al agregar más circunferencias.	Verbal: Debe cumplirse que los radios de las circunferencias vayan disminuyendo y las velocidades angulares vayan aumentando. Verbal: Las series de las componentes sean convergentes. Verbal: Los radios tienden a cero y las velocidades angulares a infinito.	Verbal/Algebraico: Se debe cumplir $r_{k+1} < r_k$ para que la trayectoria no se desborde. Verbal/Algebraico: $\omega_{k+1} > \omega_k$ y $\omega_k \rightarrow \infty$ para que se complete el recorrido en un tiempo finito.	Verbal: Debe cumplirse que al ir agregando más y más circunferencias, estas decrezcan en radio y el punto o planeta P aumente su velocidad angular. Verbal: Con los radios tendiendo a cero y las velocidades angulares tendiendo a infinito.	Verbal/Algebraico: Los radios de las circunferencias agregadas deben de ser menores con respecto al anterior, pero es necesario que $A_n \rightarrow 0$. Verbal/Algebraico: La velocidad angular del punto P en cada nueva circunferencia debe de aumentar y es necesario que $w_n \rightarrow \infty$.		Algebraico:  Verbal: A_n tiende a cero. Algebraico:  Verbal: Debe tender a infinito.
Invariantes de Acciones	- Para que la forma de la trayectoria sea definida, la sucesión de radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger.						
Pregunta b	$x_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(\theta_k + w_k t)$ $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin(\theta_k + w_k t)$ 	$x_i = A_0 + A_1 \cos(\theta_1 + w_1 t)$ $x_2 = A_0 + A_1 \cos(\theta_1 + w_1 t) + A_2 \cos(\theta_2 + w_2 t)$ \vdots $x_n = A_0 + A_1 \cos(\theta_1 + w_1 t) + A_2 \cos(\theta_2 + w_2 t) + \dots + A_n \cos(\theta_n + w_n t)$ $y_1 = A_0 + A_1 \sin(\theta_1 + w_1 t)$ $y_2 = A_0 + A_1 \sin(\theta_1 + w_1 t) + A_2 \cos(\theta_2 + w_2 t)$ \vdots $y_n = A_0 + A_1 \sin(\theta_1 + w_1 t) + A_2 \cos(\theta_2 + w_2 t)$ $(x_n, y_n) = (A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(\theta_k + w_k t), A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin(\theta_k + w_k t))$	$(x_n, y_n) = (A_0, A_0)$ $+ \left(\sum_{k=1}^n A_k \cos(\theta_k + w_k t), \sum_{k=1}^n A_k \sin(\theta_k + w_k t) \right)$ $k = 1, 2, \dots, n.$	$(x_i, y_i) = (A_0 + A_1 \cos(\theta_1 + w_1 t), A_0 + A_1 \sin(\theta_1 + w_1 t))$ $(x_2, y_2) = (A_0 + A_1 \cos(\theta_1 + w_1 t) + A_2 \cos(\theta_2 + w_2 t), A_0 + A_1 \sin(\theta_1 + w_1 t) + A_2 \sin(\theta_2 + w_2 t))$ \vdots $(x_n, y_n) = (A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(\theta_k + w_k t), A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin(\theta_k + w_k t))$	$(x_n, y_n) = \left(A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(\omega_k t + \theta_k), A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin(\omega_k t + \theta_k) \right)$	<p>[VE3]-5-[00:02:46]</p> <p>M3: ¿No sería la suma de los radios? O sea $A_1, A_2, A_3 =$</p> <p>H3: =No "M3" ((se refiere a M3 por su nombre)).</p> <p>M3: [Ah no::]</p> <p>H3: [Porque los radios] van a estar multiplicando</p> <p>M3: Sí, exacto. Ya, ya.</p> <p>H3: Entonces.</p> <p>M3: Bueno, pero para las (x)de x serían, [los radios]</p> <p>H3: [(Incomprensible, 2)] ahora si que para este. Sería A_0 más A_1 ¿por qué?</p> <p>M3: Por el coseno del ángulo.</p> <p>H3: Para x, sí para x, sí para x, ¿para el otro?</p> <p>M3: Sería::=</p> <p>H3: =Seno, ¿no?</p> <p>M3: Seno.</p> <p>H3: ¿Pero de qué ángulo?</p> <p>M3: Pues de θ_1.</p> <p>H3: ¿Más qué?</p> <p>M3: Má::s, ay::: la coordenada.</p> <p>H3: Te falta algo.</p> <p>M3: Ah::: sí, [esa cosa].</p> <p>H3: [¿Por qué?]</p> <p>M3: Más la velocidad angular.</p> <p>H3: ¿Por qué?</p> <p>M3: Por el tiempo.</p>	<p>[VG]-5-[01:14:33]</p> <p>P: Considere el modelo utilizando n circunferencias. Determine las coordenadas x_n, y_n del punto P en el tiempo t (leyendo la pregunta). ¿Qué escribieron por ahí? ((señalando al Equipo 1)) Entonces ya eso es como general, ¿verdad? ¿Quién lo quiere escribir? (18) ¿quién quiere escribir ese? ((H2 pasa a la pizarra))</p> <p>H2: Serían estas ((señalando lo que escribió en la pizarra)).</p>  <p>P: Entonces, cuéntanos ¿de dónde sale? ¿qué significa cada cosa?</p> <p>H2: Esta ((señalando los A_0)) pues la, eje de las coordenadas donde está el planeta. Esta ((señalando los A_n)) pues ya después de que hicimos el análisis de realimentación pues vimos que prácticamente eran los radios de las circunferencias por su componente ((señalando la componente x)) que contribuya en X, el ángulo inicial ((señalando el θ_n del coseno)) de cada circunferencia más la velocidad angular ((señalando el ω_n)).</p> <p>P: Y en Y similar nada más que ahora es la contribución sen en y, ¿verdad? Ok ¿sí están de acuerdo? ((los estudiantes asienten con la cabeza))</p>

Parte I. Generando el modelo							
Intención:	Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.						
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							[VG]-5-[01:16:45]- Se hace la corrección respecto de los subíndices elegidos respecto de la pregunta planteada, el consenso final queda como sigue: 
Intencionalidad	Se espera que no haya problema con el establecimiento de las relaciones, y que el argumento para dar su respuesta sea bajo lo construido en las tareas anteriores, así sucedió en la prueba piloto, concluyendo que las coordenadas del planeta son: $\begin{cases} x_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos[w_k t + \theta_k] \\ y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin[w_k t + \theta_k] \end{cases}$						
¿Sobre qué objetos lo hace?	Seriar Cada término de la suma.	Seriar Cada término de la suma.	Seriar Cada término de la suma.	Seriar Cada término de la suma.	Seriar Cada término de la suma.	Seriar Cada término de la suma.	Seriar Cada término de la suma.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	Seriar La componente x_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \cos[w_k t + \theta_k]$. La componente y_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \sin[w_k t + \theta_k]$.	Seriar La componente x_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \cos[w_k t + \theta_k]$. La componente y_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \sin[w_k t + \theta_k]$.	Seriar La componente x_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \cos[w_k t + \theta_k]$. La componente y_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \sin[w_k t + \theta_k]$.	Seriar La componente x_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \cos[w_k t + \theta_k]$. La componente y_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \sin[w_k t + \theta_k]$.	Seriar La componente x_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \cos[w_k t + \theta_k]$. La componente y_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \sin[w_k t + \theta_k]$.	Seriar La componente x_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \cos[w_k t + \theta_k]$. La componente y_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \sin[w_k t + \theta_k]$.	Seriar La componente x_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \cos[w_k t + \theta_k]$. La componente y_n del punto corresponde a la suma de A_0 y de los términos de la forma $A_k \sin[w_k t + \theta_k]$.
¿Por medio de qué lo hace?	Seriar Icónico:  Algebraico: $x_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(\theta_k + w_k t)$ $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin(\theta_k + w_k t)$ 	Seriar Algebraico: $x_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(\theta_k + w_k t)$ $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin(\theta_k + w_k t)$ 	Seriar Algebraico: $(x_n, y_n) = (A_0, A_0)$ $+ \left(\sum_{k=1}^n A_k \cos(\theta_k + \omega_k t), \sum_{k=1}^n A_k \sin(\theta_k + \omega_k t) \right)$ $k = 1, 2, \dots, n.$	Seriar Algebraico: $(x_n, y_n) = \left(A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(\omega_k t + \theta_k), A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin(\omega_k t + \theta_k) \right)$	Seriar Algebraico: $(x_n, y_n) = \left(A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(\omega_k t + \theta_k), A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin(\omega_k t + \theta_k) \right)$	Seriar Verbal: [VE3]-5-[00:02:46] M3: ¿No sería la suma de los radios? O sea $A_1, A_2, A_3 =$ H3: =No "M3" ((se refiere a M3 por su nombre)). M3: [Ah no:..] H3: [Porque los radios] van a estar multiplicando M3: Sí, exacto. Ya, ya. H3: Entonces. M3: Bueno, pero para las (x)de x serían, [los radios] H3: [(Incomprensible, 2)] ahora sí que para este. Sería A_0 más A_1 ¿por qué? M3: Por el coseno del ángulo. H3: Para x, sí para x, sí para x, ¿para el otro? M3: Sería::= H3: =Seno, ¿no? M3: Seno. H3: ¿Pero de qué ángulo? M3: Pues de θ_1 . H3: ¿Más qué? M3: Má:::s, ay::: la coordenada. H3: Te falta algo. M3: Ah::: sí, [esa cosa]. H3: [¿Por qué?] M3: Más la velocidad angular. H3: ¿Por qué? M3: Por el tiempo.	Seriar Algebraico: $X = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(\theta_k + w_k t)$ $Y = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin(\theta_k + w_k t)$
Invariantes de Acciones	$\begin{cases} x_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(w_k t + \theta_k) \\ y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin(w_k t + \theta_k) \end{cases}$						
Pregunta c	$w_k \rightarrow \infty$ al agregar más circunferencias, y los radios son menores, por lo que, las contribuciones A_k son cada vez menores.	Que de acuerdo a las condiciones obtenidas y la fórmula describen la trayectoria que forma el planeta conforme se agregan mas circunferencias.	Según las características del radio y de la velocidad angular, la fórmula anterior debería converger a una función definida.	Las condiciones de que los radios decrezcan y las velocidades angulares aumenten asegura la convergencia de las expresiones obtenidas a una función, misma que modela la forma final de la trayectoria. Se observa que los coeficientes a_k y b_k representan las condiciones iniciales del sistema cuando se tienen n circunferencias.	Las condiciones de la respuesta en a) dan una descripción de la fórmula en b), por ejemplo, al disminuir los radios, las coordenadas se desplazan cada vez en una valor más pequeño.	No hubo interacción al responder esta pregunta. [VE3]-5-[01:09:53]- H3 agrega a su respuesta el último párrafo después de la puesta en común "Se observa que los coeficientes a_k y b_k representan las condiciones iniciales del sistema cuando se tienen n circunferencias"	[VG]-5-[01:17:34] P: ¿Cómo se relaciona su respuesta a la pregunta a con la fórmula obtenida en la pregunta anterior? ((leyendo la pregunta)). ¿Qué escribieron por ahí? ((señalando al Equipo 1)) Entonces ya eso es como general, ¿verdad? ¿Quién lo quiere escribir? (18) ¿quién quiere escribir ese? ((H2 pasa a la pizarra)) H2: ¿Cómo se relacionan? Los A_k tendrían que ser, que correspondan al radio, tendrían que ser decrecientes y a parte converger a 0. P: Converger a 0, ajá. H2: Y el ωt , ese tendría que diverger y nosotros también pusimos que ese tenía que ser creciente. P: ¿El $w_k t$? H2: El w , el ω_k . P: ¿Ese tiene que diverger? H2: Sí. P: ¿Y el θ_k ? H2: Pues ((gesto de negación con la cabeza)) P: ¿Qué pasa con ese? M2: (incomprensible, 4) H3: Yo siento que a medida que vamos aumentando el número de circunferencias, como se va haciendo más pequeño el radio, pues igual no parece muy importante dónde comencemos, por que eso es lo que representa ese ángulo, entonces como es más pequeño básicamente no se nota. Pero ya para muchos, ¿verdad? P: ¡Ajá! H3: (Hablandole a M2) No necesariamente disminuye por que si recuerdas (x)la Tarea 3, en el primer caso el ángulo era $\arctan(\frac{2}{\pi})$ y en (x)el, para la siguiente circunferencia era 0, y para la siguiente era $\arctan(\frac{3}{\pi})$, y para la siguiente 0, entonces iba aumentando y 0, aumentando y 0, entonces no necesariamente es decreciente. No, es un constante, ¿verdad? Para cada circunferencia es un constante, no depende del tiempo. ¿sí? ((los estudiantes asienten con la cabeza))
Pregunta e	a_k, b_k también tienden a cero $k w_0$ también tiende a infinito	La fórmula describe una serie de Fourier la cual se aproxima a una función periódica, que dependerá de nuestras condiciones para aproximarse a la forma de la trayectoria.	Es una nueva forma de expresar la fórmula de b). Permite ver más fácilmente la condición de convergencia ya que a_k, b_k tienden a 0.	Observamos que la expresión obtenida tiene la forma de una serie de Fourier, confirmando que nos estamos aproximando a una función capaz de describir la trayectoria del planeta conforme se agregan más circunferencias, por otra parte, en la expresión obtenida siguen siendo necesarias las condiciones presentadas en a) para poder asegurar la convergencia de la serie.	La ecuación anterior describe la convergencia y forma definida de la trayectoria al disminuir los radios de las circunferencias que se agregan cada vez más, tal como se trata en el inciso c)	[VE3]-5-[00:16:08] H3: ¿Qué opinas de este? M3: ¿Cómo se relaciona tu respuesta a la pregunta c con esta nueva fórmula? H3: ¿Qué le ves a la de aquí? M3: ©No manches© H3: ¿Cómo se relacionan eh "M3"? ((se refiere a M3 por su nombre)) M3: Se supone que esto que está acá.	[VG]-5-[01:28:56] P: ¿Cómo se relaciona tu respuesta a la pregunta c con? ((leyendo la pregunta)) O sea, en la pregunta c, qué es lo que habíamos dicho, que este::: esto debe tender a cero, ¿verdad? ((señalando el A_k)) Y esto debe tener a infinito ((señalando el w_k)), y esto es una constante ((señalando el θ_k)), entonces

Parte I. Generando el modelo							
Intención: Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
						<p>(Incomprensible, 4) Es nada más de verificarlo ¿no?</p> <p>H3: ¡Ujú!</p> <p>M3: Te acuerdas que había partes en donde iba más rápido la trayectoria y esto es lo de movimiento, ¿no? Pues eso describe la forma de la trayectoria.</p> <p>[VE3]-5-[00:18:54]</p> <p>M3: Como que modela (x)la rapidez con la que (incomprensible, 1, ¿se mueve sobre la trayectoria?), por así decirlo. Por que ya ves que (incomprensible, 2) en donde va más rápido era donde se tenían más puntos que creíamos discontinuo, ¿no?</p> <p>H3: Eso estoy <i>wachando</i>. O sea, tu dices que estas cosas te determinan qué tan rápido converge.</p> <p>M3: ¡Ujú!</p> <p>H3: ¿Por qué?</p> <p>M3: ¿Eh?</p> <p>H3: ¿Por qué?</p> <p>M3: Ahí si no sabría decirte cuate. (15)</p> <p>Porque::: modela:::, porque >depende de los radios y la velocidad angular<.</p> <p>[VE3]-5-[00:20:12]</p> <p>H3: ¿Qué respondiste en c, tú?</p> <p>M3: Que, ah:::, que describe la trayectoria que forma el planeta conforme se agregan más circunferencias.</p> <p>H3: Mmm ¿qué puse yo? Que los radios=</p> <p>M3: =¿Describe qué tan rápido converge esta trayectoria o (incomprensible, 1)?</p> <p>H3: Sí converge.</p> <p>M3: Pues ya.</p> <p>H3: Es que no sé, creo que por ahí va la cosa. (15)</p> <p>“M3” ((se refiere a M3 por su nombre)) también tiene que ver aquí con la, de las condiciones, que tiene que cumplir esto para que esta trayectoria se estabilice.</p> <p>M3: Ajá.</p> <p>H3: Y eso de que se estabilice tiene que ver con estas cosas, que tiene que ver las condiciones para que se estabilice con esto.</p> <p>[VE3]-5-[00:22:51]</p> <p>M3: Yo siento que esto, esta describe la manera en la que va a converger la trayectoria, o sea entre más le agregas, o sea primero no va tomando forma, pero ya luego te vas acercando y se empieza a ver la forma de Fourier, que en este caso (incomprensible, 1).</p> <p>H3: Entonces en general sí, pero (incomprensible, 1).</p> <p>M3: Por que se supone que se hace periódica por el hecho de que, pues en un mes uno sustituye los senos no, sin mover la trayectoria en uno, recorriendo 2π, por eso dice entonces ahí viene el otro periodo, entonces conforme vas agregándole se va acercando a la trayectoria, que se podría retomar como (incomprensible, 1) porque ya los radios y las velocidades ya, o sea, el radio ya no contribuye tanto en distancia, entonces nada más se ve como un puntito oscilando.</p> <p>H3: Un ϵ.</p> <p>M3: Un ϵ de distancia.</p>	<p>cómo se relaciona eso, con ahora esto otro ((señalando la fórmula construida en la pregunta d)).</p> <p>H1: Que las contribuciones (x)que da cada término siguiente se van disminuyendo, por que se ve que los, por ejemplo, están multiplicados por A_k y esos tienen a cero, o sea que para una contribución de un k cada vez mayor eso se va, va disminuyendo.</p> <p>P: ¿Sí entienden la idea?</p> <p>H1: Eso sería una condición de convergencia.</p> <p>P: Parece verdad una condición de convergencia. Entonces ¿qué le debe pasar a este a_k, este minúscula, y al b_k, minúscula?</p> <p>M2: Tender a cero.</p> <p>P: Deberían verdad, se ve de acá, ¿cierto?</p>
Intencionalidad	Se busca que se interprete el modelo matemático en el fenómeno físico.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	<p>Establecer</p> <p>Las sucesiones de radios y de velocidades angulares.</p>	<p>Interpretar</p> <p>El modelo y el fenómeno.</p>	<p>Establecer</p> <p>Las sucesiones de radios y de velocidades angulares.</p>	<p>Establecer</p> <p>Las sucesiones de radios y de velocidades angulares.</p>	<p>Establecer</p> <p>La sucesión de radios.</p>	<p>Establecer</p> <p>Las sucesiones de radios y de velocidades angulares.</p>	<p>Establecer</p> <p>Las sucesiones de radios y de velocidades angulares.</p>
¿Sobre qué relaciones lo hace?	<p>Establecer</p> <p>Para que se de la convergencia de la serie de las ordenadas, la sucesión de radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger.</p> <p>Para que se de la convergencia de la serie de las ordenadas las sucesiones de los coeficientes deben converger a cero.</p>	<p>Interpretar</p> <p>La fórmula describe la trayectoria del planeta.</p>	<p>Establecer</p> <p>Para que se de la convergencia de la serie de las ordenadas, la sucesión de radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger.</p> <p>Para que se de la convergencia de la serie de las ordenadas las sucesiones de los coeficientes deben converger a cero.</p>	<p>Establecer</p> <p>Para que se de la convergencia de la serie de las ordenadas, la sucesión de radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger.</p>	<p>Establecer</p> <p>Para que se de la convergencia de la serie de las ordenadas, la sucesión de radios debe converger a cero.</p>	<p>Establecer</p> <p>Para que se de la convergencia de la serie de las ordenadas, la sucesión de radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger.</p>	<p>Establecer</p> <p>Para que se de la convergencia de la serie de las ordenadas, la sucesión de radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger.</p>
¿Por medio de qué lo hace?	<p>Establecer</p> <p>Algebraico: $w_k \rightarrow \infty$</p> <p>Verbal: Los radios son menores, por lo que, las contribuciones A_k son cada vez menores.</p> <p>Verbal: a_k, b_k tienden a cero.</p>	<p>Interpretar</p> <p>Verbal: De acuerdo con las condiciones obtenidas, la fórmula describen la trayectoria del planeta.</p> <p>Verbal: Dependerá de nuestras condiciones para aproximarse a la forma de la trayectoria.</p>	<p>Establecer</p> <p>Verbal: Según las características del radio y de la velocidad angular, la fórmula anterior debería converger a una función definida.</p> <p>Verbal: Es una nueva forma de expresar la fórmula de b). Permite ver más fácilmente la condición de convergencia ya que a_k y b_k tienden a 0.</p>	<p>Establecer</p> <p>Verbal: Las condiciones de que los radios decrezcan y las velocidades angulares aumenten asegura la convergencia de las expresiones obtenidas a una función, misma que modela la forma final de la trayectoria.</p> <p>Verbal: En la expresión obtenida siguen siendo necesarias las condiciones presentadas en a) para poder asegurar la convergencia de la serie.</p>	<p>Establecer</p> <p>Verbal: Al disminuir los radios, las coordenadas se desplazan cada vez en un valor más pequeño.</p>	<p>Establecer</p> <p>Verbal: [VE3]-5-[00:23:37]</p> <p>M3: Los radios y las velocidades ya, o sea, el radio ya no contribuye tanto en distancia, entonces nada más se ve como un puntito oscilando.</p> <p>H3: Un ϵ.</p> <p>M3: Un ϵ de distancia.</p>	<p>Establecer</p> <p>Verbal: [VG]-5-[01:17:45]</p> <p>H2: Los A_k tendrían que ser, que correspondan al radio, tendrían que ser decrecientes y a parte converger a 0.</p> <p>P: Converger a 0, ajá.</p> <p>H2: Y el ωt, ese tendría que diverger y nosotros también pusimos que ese tenía que ser creciente.</p> <p>P: ¿El $w_k t$?</p> <p>H2: El w, el ω_k.</p> <p>P: ¿Ese tiene que diverger?</p> <p>H2: Sí.</p> <p>Verbal: [VG]-5-[01:29:30]</p> <p>H1: Que las contribuciones (x)que da cada término siguiente se van disminuyendo, por que se ve que los, por ejemplo, están multiplicados por A_k y esos tienen a cero, o sea que para una contribución de un k cada vez mayor eso se va, va disminuyendo.</p> <p>P: ¿Sí entienden la idea?</p> <p>H1: Eso sería una condición de convergencia.</p> <p>P: Parece verdad una condición de convergencia. Entonces ¿qué le debe pasar a este a_k, este minúscula, y al b_k, minúscula?</p> <p>M2: Tender a cero.</p>
Invariantes de Acciones	<ul style="list-style-type: none"> - Para que se de la convergencia de la serie de las ordenadas, la sucesión de radios debe converger a cero y la sucesión de las velocidades angulares debe diverger. - Para que se de la convergencia de la serie de las ordenadas las sucesiones de los coeficientes deben converger a cero. - La fórmula describe la trayectoria del planeta. 						

Parte I. Generando el modelo							
Intención:	Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.						
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta d	$a_0 = 2A_0$ $a_k = A_k \text{Sen}(\theta_k)$ $b_k = A_k \text{Cos}(\theta_k)$ $\omega_k = k\omega_0$ $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \text{Sen}(\theta_k + \omega_k t)$ $y_n = \frac{2A_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k [\text{Sen}(\theta_k) \text{Cos}(\omega_k t) + \text{Cos}(\theta_k) \text{Sen}(\omega_k t)]$ $y_n = \frac{2A_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[A_k \text{Sen}(\theta_k) \text{Cos}(\omega_k t) + A_k \text{Cos}(\theta_k) \text{Sen}(\omega_k t) \right]$ $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \text{Cos}(\omega_k t) + b_k \text{Sen}(\omega_k t) \right]$	$\text{Sen}(\theta_k + \omega_k t) = \text{Sen}(\theta_k) \text{Cos}(\omega_k t) + \text{Cos}(\theta_k) \text{Sen}(\omega_k t)$ Así: $a_k = 2A_k$ $b_k = A_k \text{Cos}(\theta_k)$ $\omega_k = k\omega_0$ donde a_k es la componente en y y b_k la componente en x	$a_0 = 2A_0, \omega_k = k\omega_0, a_k = A_k \text{sen}(\theta_k), b_k = A_k \text{cos}(\theta_k)$ $y_k = A_k + \sum_{i=1}^k A_i \text{sen}(\theta_i + \omega_i t)$ $\text{sen}(\theta_i + \omega_i t) = \text{sen}(\theta_i) \text{cos}(\omega_i t) + \text{cos}(\theta_i) \text{sen}(\omega_i t)$ $y_k = A_k + \sum_{i=1}^k A_i [\text{sen}(\theta_i) \text{cos}(\omega_i t) + \text{cos}(\theta_i) \text{sen}(\omega_i t)]$ $A_k = \frac{a_k}{2}, A_i \text{sen}(\theta_i) = a_i, A_i \text{cos}(\theta_i) = b_i$ $y_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^k [a_i \text{cos}(\omega_i t) + b_i \text{sen}(\omega_i t)]$ Si es como la vez pasada $\omega_0 = 1, \omega_1 = 2\omega_0, \dots, \omega_k = k\omega_0$. $y_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^k [a_i \text{cos}(i\omega_0 t) + b_i \text{sen}(i\omega_0 t)]$	Claramente $\frac{a_k}{2} = b_k$. Por idénticos los signos de los términos. $\text{Sen}(\theta_k + \omega_k t) = \text{Sen}(\theta_k) \text{Cos}(\omega_k t) + \text{Cos}(\theta_k) \text{Sen}(\omega_k t)$ Luego $\sum_{k=1}^n A_k \text{Sen}(\theta_k + \omega_k t) = \sum_{k=1}^n A_k [\text{Sen}(\theta_k) \text{Cos}(\omega_k t) + \text{Cos}(\theta_k) \text{Sen}(\omega_k t)] =$ $= \sum_{k=1}^n \frac{A_k \text{Sen}(\theta_k)}{a_k} a_k \text{Cos}(\omega_k t) + \sum_{k=1}^n \frac{A_k \text{Cos}(\theta_k)}{b_k} b_k \text{Sen}(\omega_k t)$ $\Rightarrow \frac{a_k - A_k \text{Sen}(\theta_k)}{b_k = A_k \text{Cos}(\theta_k)}$	Desarrollando al seno de la suma de dos ángulos, se obtiene que $a_0 = 2A_0$ $a_k = A_k \text{Sen}(\theta_k)$ $b_k = A_k \text{Cos}(\theta_k)$ $\omega_k = k\omega_0$ $\frac{a_k}{2} = A_k \Rightarrow a_k = 2A_k$ $A_k \text{Sen}(\theta_k + \omega_k t) = \text{Sen}(\theta_k) \text{Cos}(\omega_k t) + \text{Cos}(\theta_k) \text{Sen}(\omega_k t)$ $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \text{Cos}(\theta_k) \text{Sen}(\omega_k t) + \sum_{k=1}^n A_k \text{Sen}(\theta_k) \text{Cos}(\omega_k t)$ $\omega_0 = k\omega_0$	[VE3]-5-[00:11:29] M3: ¿Qué vamos a hacer? H3: Hay que desarrollar esta suma. M3: Ah, si es cierto.	[VG]-5-[01:20:25] P: Note nuevamente que y_n representa la n -ésima suma parcial de una serie trigonométrica. Utilice identidades trigonométricas para reescribirla ((leyendo la pregunta)) Voy a, voy a hacerles espacio (5) ((borrando la pizarra)) Entonces ya estamos hablando de y_n , entonces sería ((escribiendo en la pizarra)) A_0 más la serie desde $k = 1$ hasta n , dijimos de A_n por el, de A_k perdón, de A_k por sen de θ_k más ω_k por t , esa es, ¿verdad?  Entonces bueno ¿quién quiere venir a reescribir con todos los pasitos eso ((la igualdad de la pizarra)) en esta forma ((la que pide la pregunta))? Ya lo habíamos hecho en la Tarea 3, ¿verdad? Entonces ahora sí como en forma general ((H1 levanta la mano)) Pase. H1: (42) ((escribiendo en la pizarra)) $\text{sen}(\theta_k + \omega_k t) = \text{sen}(\theta_k) \text{cos}(\omega_k t) + \text{cos}(\theta_k) \text{sen}(\omega_k t)$ Este es el primer paso, aplicar la identidad de la suma de ángulos, tendría que::: (17) ((sigue escribiendo))  k por, quiere que empiece por coseno, ¿no? Entonces sería esto de aquí (38) ((sigue escribiendo))  Por lo pronto aquí estaría el a_0 ((entre dos le indican los compañeros)) ah si es cierto, a_0 medios, este sería el a_k , por que depende de k y también el b_k . Solo que, un problemita es que ahí nos lo piden de la forma ((escribe en la pizarra)) $k\omega_0 t$, y aquí tenemos $\omega_k t$.  Y aquí lo que pensamos hace es, eh recordamos como fue en la forma anterior, que había un omega inicial o no se como le llamaban, que valía 1 ((escribe en la pizarra)) y el siguiente valía, voy a poner inicial, y por ejemplo el siguiente valía así, (8) y así sucesivamente esto es un ω_k .  Pero esto es, es de la, lo que recordamos de la actividad anterior, por que las condiciones a las que llegamos es que simplemente eh::: estas velocidades tienen que ir aumentando sucesivamente y tendiendo a infinito, pero para ponerlas de esta forma, creo que esto fue la que se nos ocurrió, de la vez pasada que las velocidades angulares crecían con k . [VG]-5-[01:25:55] P: Y entonces, ¿ese $\frac{a_0}{2}$ qué representaría en el fenómeno? H1: Condición, posición inicial. P: La posición inicial ¿y el a_k y el b_k ? H1: El a_k son, ¿minúsculas verdad? P: Ajá, minúsculas. H1: Pues son los coeficientes de esta suma, ¿no? P: ¿Pero en el fenómeno? H1: Ah::: en el fenómeno. P: ¿En el sistema? H1: Bueno ((señalando el coeficiente $A_k \text{sen}(\theta_k)$)) seno del ángulo inicial k -ésimo y radio k -ésimo, ¿no? P: Pero que representan enton-, eso representan A_k y θ_k , pero ¿todo el a_k qué representaría? H1: Posición inicial (x) en x , radio (x) por, bueno sí de las ecuaciones polares, ¿no? r componente en x , o sea es posición inicial en x . P: ¿(x) Sí o ven? Si haces un dibujito del caso. H1: (16) ((dibujando en la pizarra)) P: ¿Ahí θ_k verdad sería? H1: (17) ((sigue dibujando)) ¿Algo así? 

Parte I. Generando el modelo							
Intención: Se pretende con esta generalización que el estudiante identifique las condiciones para que el modelo sea estable.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							<p>P: ¿Sí, lo ven? Entonces quien sería, puedes poner ahí en el dibujo de una vez quién es a_k más bien, quién es a_k y quién es b_k.</p> <p>H1: ((escribiendo en la pizarra)) x entre A_k es igual a sen, aquí era θ_k, les voy a llamar $0k$</p>  <p>P: Pero ya tienen nombre.</p> <p>H1: Ah no, (x)pero estas de aquí ((señalando a x_{0k} y y_{0k}))</p> <p>M2: Ya ese es el a_k.</p> <p>H1: Ah, sí es cierto::</p> <p>P: Es el a_k, ¿no?</p> <p>H1: Ya tiene nombre, sí, sí, sí, sí.</p> <p>P: Ya tienen nombre.</p> <p>H1: ((Escribe en la pizarra)) Entonces aquí va a_k, b_k. (15)</p>  <p>Bueno de aquí se ve.</p>
Intencionalidad	Se establezcan las condiciones para que el modelo sea equivalente con la serie trigonométrica de Fourier.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	La expresión $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \text{sen}(w_k t + \theta_k)$.	La expresión $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \text{sen}(w_k t + \theta_k)$.	La expresión $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \text{sen}(w_k t + \theta_k)$.	La expresión $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \text{sen}(w_k t + \theta_k)$.	La expresión $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \text{sen}(w_k t + \theta_k)$.	La expresión $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \text{sen}(w_k t + \theta_k)$.	La expresión $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \text{sen}(w_k t + \theta_k)$.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kw_0 t) + b_k \text{sen}(kw_0 t)$, donde $\frac{a_0}{2} = A_0$, $a_k = A_k \text{sen}(\theta_k)$, $b_k = A_k \cos(\theta_k)$ y $\omega_k = k\omega_0$.	$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kw_0 t) + b_k \text{sen}(kw_0 t)$, donde $\frac{a_0}{2} = A_0$, $a_k = A_k \text{sen}(\theta_k)$, $b_k = A_k \cos(\theta_k)$ y $\omega_k = k\omega_0$.	$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kw_0 t) + b_k \text{sen}(kw_0 t)$, donde $\frac{a_0}{2} = A_0$, $a_k = A_k \text{sen}(\theta_k)$, $b_k = A_k \cos(\theta_k)$ y $\omega_k = k\omega_0$.	$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kw_0 t) + b_k \text{sen}(kw_0 t)$, donde $\frac{a_0}{2} = A_0$, $a_k = A_k \text{sen}(\theta_k)$, $b_k = A_k \cos(\theta_k)$ y $\omega_k = k\omega_0$.	$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kw_0 t) + b_k \text{sen}(kw_0 t)$, donde $\frac{a_0}{2} = A_0$, $a_k = A_k \text{sen}(\theta_k)$, $b_k = A_k \cos(\theta_k)$ y $\omega_k = k\omega_0$.	$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kw_0 t) + b_k \text{sen}(kw_0 t)$, donde $\frac{a_0}{2} = A_0$, $a_k = A_k \text{sen}(\theta_k)$, $b_k = A_k \cos(\theta_k)$ y $\omega_k = k\omega_0$.	$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kw_0 t) + b_k \text{sen}(kw_0 t)$, donde $\frac{a_0}{2} = A_0$, $a_k = A_k \text{sen}(\theta_k)$, $b_k = A_k \cos(\theta_k)$ y $\omega_k = k\omega_0$.
¿Por medio de qué lo hace?	Reescribir Algebraico: $a_0 = 2A_0$, $a_k = A_k \text{Sen}(\theta_k)$, $b_k = A_k \text{Cos}(\theta_k)$ y $\omega_k = k\omega_0$. $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \text{sen}(\theta_k + kw_0 t)$ $y_n = \frac{2A_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k [\text{sen}(\theta_k) \cos(kw_0 t) + \text{sen}(kw_0 t) \cos(\theta_k)]$ $y_n = \frac{2A_0}{2} + \sum_{k=1}^n [A_k \text{sen}(\theta_k) \cos(kw_0 t) + A_k \cos(\theta_k) \text{sen}(kw_0 t)]$ $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kw_0 t) + b_k \text{sen}(kw_0 t)]$	Reescribir Algebraico: $a_0 = 2A_0$, $\omega_k = k\omega_0$, $a_k = A_k \text{Sen}(\theta_k)$ y $b_k = A_k \text{Cos}(\theta_k)$. $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \text{sen}(\theta_k + kw_0 t)$ $\text{sen}(\theta_k + kw_0 t) = \text{sen}(\theta_k) \cos(kw_0 t) + \cos(\theta_k) \text{sen}(kw_0 t)$ $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k [\text{sen}(\theta_k) \cos(kw_0 t) + \cos(\theta_k) \text{sen}(kw_0 t)]$ $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kw_0 t) + b_k \text{sen}(kw_0 t)]$	Reescribir Algebraico: $a_0 = 2A_0$, $\omega_k = k\omega_0$, $a_k = A_k \text{Sen}(\theta_k)$ y $b_k = A_k \text{Cos}(\theta_k)$. $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \text{sen}(\theta_k + kw_0 t)$ $\text{sen}(\theta_k + kw_0 t) = \text{sen}(\theta_k) \cos(kw_0 t) + \cos(\theta_k) \text{sen}(kw_0 t)$ $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k [\text{sen}(\theta_k) \cos(kw_0 t) + \cos(\theta_k) \text{sen}(kw_0 t)]$ $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kw_0 t) + b_k \text{sen}(kw_0 t)]$	Reescribir Algebraico: $a_0 = 2A_0$, $\omega_k = k\omega_0$, $a_k = A_k \text{Sen}(\theta_k)$ y $b_k = A_k \text{Cos}(\theta_k)$. $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \text{sen}(\theta_k + kw_0 t)$ $\text{sen}(\theta_k + kw_0 t) = \text{sen}(\theta_k) \cos(kw_0 t) + \cos(\theta_k) \text{sen}(kw_0 t)$ $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k [\text{sen}(\theta_k) \cos(kw_0 t) + \cos(\theta_k) \text{sen}(kw_0 t)]$ $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kw_0 t) + b_k \text{sen}(kw_0 t)]$	Reescribir Verbal: Desarrollando al seno de la suma de dos ángulos. Algebraico: $a_0 = 2A_0$ $a_k = A_k \text{Sen}(\theta_k)$ $b_k = A_k \text{Cos}(\theta_k)$ $\omega_k = k\omega_0$ $\frac{a_0}{2} = A_0 \Rightarrow a_0 = 2A_0$ $a_k \text{Sen}(\theta_k + kw_0 t) = \text{sen}(\theta_k) \cos(kw_0 t) + \cos(\theta_k) \text{sen}(kw_0 t)$ $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k [\text{sen}(\theta_k) \cos(kw_0 t) + \cos(\theta_k) \text{sen}(kw_0 t)]$ $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kw_0 t) + b_k \text{sen}(kw_0 t)]$	Reescribir Verbal: [VE3]-5-[00:11:29] M3: ¿Qué vamos a hacer? (13) H3: Hay que desarrollar esta suma. M3: Ah, sí es cierto.	Reescribir Algebraico: $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kw_0 t) + b_k \text{sen}(kw_0 t)]$
Invariantes de Acciones	- $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kw_0 t) + b_k \text{sen}(kw_0 t)$, donde $\frac{a_0}{2} = A_0$, $a_k = A_k \text{sen}(\theta_k)$, $b_k = A_k \cos(\theta_k)$ y $\omega_k = k\omega_0$.						

Parte II. Otra forma de interpretar w_0							
Intención: Encontrar condiciones para que el modelo sea equivalente a la STF.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	$t = \frac{d}{v} = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$v = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{v} = \frac{2\pi A_1}{A_1 \omega_0} \quad t = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$t = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$t = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$t = \frac{2\pi}{\omega_0}$	<p>[VE3]-5-[01:11:02] M3: Pues no sería el su- H3: Ah sí (incomprensible, 1) M3: El $\omega_0 =$ H3: =Pues sabemos la distancia que da ¿no? Es el primer radio. M3: >La distancia<, pero es del punto P, o sea la distancia que recorre es el perímetro de un círculo. H3: ¡A ver! Considere el movimiento del punto sobre, es decir aquella donde el punto se mueve a una= M3: =Y es π por radio, ¿no? Y sabemos los radios. H3: Y por el π, esto sería π por A_1. M3: Sí, sabemos los radios. H3: Sería la distancia. M3: ¡Ajá! H3: Ya. M3: ¿El tiempo? H3: En que recorre aquí ((silbido)) M3: Y la velocidad también la conocemos. H3: (Incomprensible, 2, ¿por qué la conocemos?) M3: Por los:: angular. H3: La velocidad angular no se define también en términos de= M3: =De la velocidad por el radio. H3: ¿La velocidad por el radio? M3: Sí, ¿no? H3: (Incomprensible, 1, ¿por) qué la velocidad por el radio? M3: Es que eso me confundió. H3: ¿Sería la velocidad entre el radio, no? M3: No era, ¿hay que buscarlo por aquí? A ver. H3: Si pones velocidad por distancia, o velocidad por radio, te queda metros cuadrados sobre segundos. M3: Ahí no dice velocidad angular. (13) Ah no, sí, la velocidad es ω (x)por radio, ¿no? Para que ω sea velocidad entre ese.</p> <p>[VE3]-5-[01:13:31] M3: Sí ¿ya ves? Es ω por el radio, bueno estoy haciendo vectorialmente. Sin wache ¿ya ves? H3: A mí algo me decía que ω era ángulo inicial sobre el radio.</p>	<p>[VG]-5-[02:17:07] P: Determine el tiempo t que tarda el punto P en dar un giro completo ((leyendo la pregunta)) Entonces ¿(x)quién quiere hacer esa? ¿o me dicen? H1: La distancia sería la circunferencia, $2\pi r$. P: 2π. H1: Por el radio= P: =Entonces la distancia sería la circunferencia. H1: Sí ((los estudiantes asienten con la cabeza)) P: Entonces 2π. H1: Y el radio de A_1. P: Y el radio de A_1, ok. H1: Y el tiempo sería:: M2: Entre la velocidad. H1: Ah velocidad, tenemos distancia entre velocidad, y la velocidad es ω_0. P: Entre tiempo, ¿verdad? Sería ahí. H1: Esa es velocidad angular, ese es ω_0. M2: No, es que ahí nos piden el tiempo. H1: Ajá, ese es igual ω_0, solo que ahí nos están pidiendo el tiempo, y luego ahí despejaríamos.</p>
Pregunta b	$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$		$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$	$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$	$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$	No hubo interacción al responder esta pregunta.	<p>[VG]-5-[02:18:35] P: Si llamamos p al tiempo que tarda el punto P para dar exactamente una vuelta. ¿Cuál es el valor de ω_0 en términos de p? ((leyendo la pregunta))</p>

Parte II. Otra forma de interpretar ω_0							
Intención: Encontrar condiciones para que el modelo sea equivalente a la STF.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
		$p = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{p}$					<p>H1: Pues habría que, es como un cambio de variable, nos dice que t lo cambiemos por p. Yo me imagino que es el periodo.</p> <p>P: Puede ser. Entonces para la pregunta b nada más.</p> <p>H1: Es la primera cuestión que se me ocurrió, el periodo.</p> <p>P: Ajá.</p> <p>H1: t igual a p.</p> <p>[VG]-5-[02:19:30]</p> <p>P: Hay un detalle ahí que no han notado.</p> <p>H6: El A_1.</p> <p>P: Ajá ¿por qué el A_1?</p> <p>H6: Por que:::, bueno yo con lo, con lo que es el seno y coseno contiene, lo que es el argumento de seno y coseno tiene que ser de dimensión.</p> <p>H9: Este::: viendo las tareas tiene que ser más bien la rapidez, ¿no? (x)Del punto.</p> <p>P: O sea, es algo que viene desde la anterior, lo estoy dejando aquí, pero (2) Velocidad igual distancia en tiempo, entonces la velocidad es distancia sobre unidad de tiempo, ¿cierto? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Sí, ¿verdad? Se ha dicho que es radianes por unidad de tiempo, entonces la distancia es angular, y esa distancia que está ahí es trayectoria, ¿cierto? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Sí, ahí sería, más bien, metros o unidad de medida lineal, sobre unidad de tiempo. Entonces este A_1=</p> <p>H1: =No va.</p> <p>P: ¿Verdad que no va? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) por que esto me está hablando de distancia y esta velocidad es ángulo por unidad de tiempo, entonces sería ángulo por unidad de tiempo ¿estamos claros?</p>
Pregunta c	$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) + b_k \sin\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) \right]$	$y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin(\theta_k) \cos\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) + A_k \cos(\theta_k) \sin\left(k \frac{2\pi}{p} t\right)$	$y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) + b_k \sin\left(k \frac{2\pi}{p} t\right)$	$y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin(\theta_k) \cos\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) + A_k \cos(\theta_k) \sin\left(k \frac{2\pi}{p} t\right)$	$y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n \left[A_k \sin(\theta_k) \cos\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) + A_k \cos(\theta_k) \sin\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) \right]$	<p>[VE3]-5-[01:25:04]</p> <p>M3: Entonces k veces π sobre p por t. Ah no, pero ese ya es un tiempo específico, ¿verdad? Ah no, si se tiene que tomar el t, ¿verdad? Por que este es el tiempo específico para los ω_0. Sí, ¿no?</p> <p>H3: Pero aquí esto toma (incomprensible, 1).</p> <p>M3: Sí, sí, sí, por eso tenía que ser, entonces si es $k\pi$ veces sobre p por t.</p>	<p>[VG]-5-[02:21:27]</p> <p>P: Reescribe la fórmula que obtuviste en la pregunta d de la Parte 1, ahí la dejé arriba verdad, utilizando este nuevo valor de ω_0. ((leyendo la pregunta)) Entonces me imagino que nada más cambiaron, ¿verdad? ((asienten con la cabeza))</p>
Pregunta d	Constante para todo t y k . P es el periodo de la trayectoria, determina cuántas vueltas darán los puntos de las siguientes circunferencias.	Como el periodo temporal de la grafica de la funcion limite ya que cada que pasa p , el planeta P da una vuelta completa a la Tierra.	Constante porque el que cuenta es el periodo de la primera circunferencia. Ya que los demás dan cierta cantidad de vueltas por cada vuelta de la primera circunferencia.	Como el periodo temporal de la gráfica de la función límite, esto, pues cada que transcurre el tiempo p el planeta completa una vuelta, lo que se ve reflejado en el periodo temporal del resto de las circunferencias.	Como el periodo de la función	<p>[VE3]-5-[01:30:48]</p> <p>H3: Sería el periodo, ¿no?</p> <p>M3: Ah, ok.</p> <p>H3: Sería el periodo (incomprensible, 1).</p> <p>M3: ¡Ujú! (9) Ah::: pues sí:::, porque sería (3) Sí, porque la velocidad también la puedes describir como 2π por el periodo, ¿no? (4) La velocidad la puedes ver 2π por t, o 2π (incomprensible, 1).</p> <p>H3: ¿Dónde está ese 2π? Tendría que wacharlo.</p> <p>M3: Ah no, me refería a que (4) es manera de entendición.</p> <p>H3: Entonces estás de acuerdo que sería como una especie de periodo.</p> <p>[VE3]-5-[01:33:44]</p> <p>H3: Sabes qué, cada vez que pasa el tiempo p va a salir ((realiza un silbido explicando)), sería el periodo, ¿no?</p> <p>M3: Sí.</p> <p>[VE3]-5-[02:14:18]- H3 agrega a su respuesta después de la puesta en común "lo que se ve reflejado en el periodo temporal del resto de las circunferencias"</p>	<p>[VG]-5-[02:22:26]</p> <p>P: Dado que el valor p es el tiempo que tarda el planeta P en completar una vuelta alrededor de la Tierra T. ¿Cómo se observaría ese valor en la gráfica de la función límite? ((leyendo la pregunta))</p> <p>H6: Su periodo.</p> <p>P: ¿Su periodo?</p> <p>H6: Ajá, como se va repitiendo la gráfica en la función límite.</p> <p>P: ¿Seguros? ¿totalmente?</p> <p>H6: ☹️No totalmente☹️</p> <p>P: Por que aqui habla, digamos que p es completar una vuelta, pero:::</p> <p>H6: Para una [circunferencia]</p> <p>P: [Para la primera] circunferencia. Ese mismo p es si tengo dos, tres o cuatro.</p> <p>H6: No, eso no estaba viendo. (9)</p> <p>P: ¿Cómo lo podrían analizar? (4)</p> <p>Nos podemos devolver a los casos particulares y ver. Veámoslo en la Tarea 1 que no tiene radios ni nada a ver qué. (16) ((buscando el applet de la Tarea 1 – Parte 2 en la computadora)) Aquí está el, entonces digamos que, en este caso, p sería lo que tarda ese planeta Q en dar esa vuelta, ¿cierto? La pregunta es, ¿si le agrego más circunferencias tarda eso mismo? ¿verdad? Esa es la pregunta. Pongámosle dos a ver. (6)</p> <p>¿Qué dicen? ¿Si se tarda lo mismo? En completar la trayectoria, completa ((risas)). Si se nota (incomprensible, 2). Si ¿cómo lo notan?</p> <p>H4: Nos fijamos en el centro de la circunferencia más pequeña.</p> <p>P: Ajá.</p> <p>H4: Y cuando esta se completa, eh::: también completa el punto Q.</p> <p>P: También completa el punto Q la trayectoria ¿cierto? ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Y le podemos agregar más, pues agreguemosle, yo creo que aquí podemos agre- pongámosle unas 9, 10. Está un poquito difícil ver ¿verdad? Pero estamos comparando este ¿verdad? El de la primera con la trayectoria ¿cierto?</p> <p>H4: Como que todos (x)van a volver, todos se alinean en el punto de partida.</p> <p>[VG]-5-[02:26:11]- El profesor termina explicando algebraicamente cómo se ve en la fórmula que el periodo efectivamente es p.</p>
Intencionalidad	Se pretende que el estudiante reconozca a p como el periodo de la función límite cuando se considera la variable t un número real. Esto es importante para la Tarea #6, pues se espera que el estudiante realice su estudio en un intervalo de tamaño p , el cual es representativo del comportamiento general de la serie.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	<p>Identificar</p> <p>Parámetros velocidad, distancia y tiempo.</p> <p>Sustituir</p> $t = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)$ <p>Reconocer</p> <p>El estado estable del sistema.</p>	<p>Identificar</p> <p>Parámetros velocidad, distancia y tiempo.</p> <p>Sustituir</p> $t = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)$ <p>Reconocer</p> <p>El valor de convergencia.</p>	<p>Identificar</p> <p>Parámetros velocidad, distancia y tiempo.</p> <p>Sustituir</p> $t = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)$ <p>Reconocer</p> <p>El valor de convergencia.</p>	<p>Identificar</p> <p>Parámetros velocidad, distancia y tiempo.</p> <p>Sustituir</p> $t = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)$ <p>Reconocer</p> <p>El valor de convergencia.</p>	<p>Identificar</p> <p>Parámetros velocidad, distancia y tiempo.</p> <p>Sustituir</p> $t = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)$ <p>Reconocer</p> <p>El valor de convergencia.</p>	<p>Identificar</p> <p>Parámetros velocidad, distancia y tiempo.</p> <p>Sustituir</p> $t = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)$ <p>Reconocer</p> <p>El valor de convergencia.</p>	<p>Identificar</p> <p>Parámetros velocidad, distancia y tiempo.</p> <p>Sustituir</p> $t = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)$ <p>Reconocer</p> <p>El valor de convergencia.</p>

Parte II. Otra forma de interpretar ω_0								
Intención:	Encontrar condiciones para que el modelo sea equivalente a la STF.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común	
¿Sobre qué relaciones lo hace?	<p>Identificar</p> <p>La velocidad es igual a la distancia entre el tiempo.</p> <p>Sustituir</p> $t = p$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$ <p>Reconocer</p> <p>El valor de convergencia debe ser periódico debido al comportamiento del fenómeno.</p>	<p>Identificar</p> <p>La velocidad es igual a la distancia entre el tiempo.</p> <p>Sustituir</p> $t = p$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$ <p>Reconocer</p> <p>El valor de convergencia debe ser periódico debido al comportamiento del fenómeno.</p>	<p>Identificar</p> <p>La velocidad es igual a la distancia entre el tiempo.</p> <p>Sustituir</p> $t = p$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$ <p>Reconocer</p> <p>El valor de convergencia debe ser periódico debido al comportamiento del fenómeno.</p>	<p>Identificar</p> <p>La velocidad es igual a la distancia entre el tiempo.</p> <p>Sustituir</p> $t = p$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$ <p>Reconocer</p> <p>El valor de convergencia debe ser periódico debido al comportamiento del fenómeno.</p>	<p>Identificar</p> <p>La velocidad es igual a la distancia entre el tiempo.</p> <p>Sustituir</p> $t = p$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$ <p>Reconocer</p> <p>El valor de convergencia debe ser periódico debido al comportamiento del fenómeno.</p>	<p>Identificar</p> <p>La velocidad es igual a la distancia entre el tiempo.</p> <p>Sustituir</p> $t = p$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$ <p>Reconocer</p> <p>El valor de convergencia debe ser periódico debido al comportamiento del fenómeno.</p>	<p>Identificar</p> <p>La velocidad es igual a la distancia entre el tiempo.</p> <p>Sustituir</p> $t = p$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$ <p>Reconocer</p> <p>El valor de convergencia debe ser periódico debido al comportamiento del fenómeno.</p>	<p>Identificar</p> <p>La velocidad es igual a la distancia entre el tiempo.</p> <p>Sustituir</p> $t = p$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$ <p>Reconocer</p> <p>El valor de convergencia debe ser periódico debido al comportamiento del fenómeno.</p>
¿Por medio de qué lo hace?	<p>Identificar</p> <p>Algebraico: $t = \frac{d}{v} = \frac{2\pi}{\omega_0}$</p> <p>Sustituir</p> <p>Algebraico: $\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$</p> <p>Algebraico:</p> $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) + b_k \sin\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) \right]$ <p>Reconocer</p> <p>Verbal: p es el periodo de la trayectoria.</p>	<p>Identificar</p> <p>Algebraico:</p> $v = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{v} = \frac{2\pi A_1}{A_1 \omega_0} \quad t = \frac{2\pi}{\omega_0}$ <p>Sustituir</p> <p>Algebraico:</p> $p = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{p}$ <p>Reconocer</p> <p>Algebraico:</p> $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin \theta_k \cos\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) + A_k \cos \theta_k \sin\left(k \frac{2\pi}{p} t\right)$ <p>Reconocer</p> <p>Verbal: Como el periodo temporal de la grafica de la función limite ya que cada que pasa p, el planeta P da una vuelta completa a la Tierra.</p>	<p>Identificar</p> <p>Algebraico: $t = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{2\pi}{\omega_0}$</p> <p>Sustituir</p> <p>Algebraico: $\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$.</p> <p>Reconocer</p> <p>Algebraico:</p> $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) + b_k \sin\left(k \frac{2\pi}{p} t\right)$ <p>Reconocer</p> <p>Verbal: Constante porque el que cuenta es el periodo de la primera circunferencia. Ya que los demás dan cierta cantidad de vueltas por cada vuelta de la primera circunferencia.</p> <p>Algebraico:</p> $p = \frac{2\pi A}{\omega_0}$ $k = \frac{2\pi A v}{R \omega_0} \quad \frac{k \pi \omega_0}{A \omega_0} = 0 \quad \text{Periodo del } k\text{-ésimo ciclo.}$ $t_{\text{tempo}} = \sum_{k=1}^n p_k \quad \text{No es cierto.}$	<p>Identificar</p> <p>Algebraico:</p> $t = \frac{d}{v} = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{p}$ <p>Sustituir</p> <p>Algebraico: $\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$.</p> <p>Reconocer</p> <p>Algebraico:</p> $y_n = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin(\theta_k) \cos\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) + A_k \cos(\theta_k) \sin\left(k \frac{2\pi}{p} t\right)$ <p>Reconocer</p> <p>Verbal: Como el periodo temporal de la gráfica de la función limite, esto, pues cada que transcurre el tiempo p el planeta completa una vuelta, lo que se ve reflejado en el periodo temporal del resto de las circunferencias.</p>	<p>Identificar</p> <p>Algebraico: $t = \frac{2\pi}{\omega_0}$</p> <p>Sustituir</p> <p>Algebraico: $\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$.</p> <p>Algebraico:</p> $y_n = A_0 + \sum \left[A_k \sin(\theta_k) \cos\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) + A_k \cos(\theta_k) \sin\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) \right]$ <p>Reconocer</p> <p>Verbal: Como el periodo de la función.</p>	<p>Identificar</p> <p>Verbal: [VE3]-5- 01:11:02]</p> <p>M3: Pues no sería el su-</p> <p>H3: Ah sí (incomprensible, 1)</p> <p>M3: El ω_0=</p> <p>H3: =Pues sabemos la distancia que da ¿no? Es el primer radio.</p> <p>M3: >La distancia<, pero es del punto P, o sea la distancia que recorre es el perimetro de un círculo.</p> <p>H3: ¡A ver! Considere el movimiento del punto sobre, es decir aquella donde el punto se mueve a una=</p> <p>M3: =Y es π por radio, ¿no? Y sabemos los radios.</p> <p>H3: Y por el π, esto sería π por A_1.</p> <p>M3: Sí, sabemos los radios.</p> <p>H3: Sería la distancia.</p> <p>Sustituir</p> <p>Verbal: [VE3]-5- 01:25:04]</p> <p>M3: Entonces k veces π sobre p por t. Ah no, pero ese ya es un tiempo específico, ¿verdad? Ah no, sí se tiene que tomar el t, ¿verdad? Por que este es el tiempo específico para los ω_0. Sí, ¿no?</p> <p>H3: Pero aquí esto toma (incomprensible, 1).</p> <p>M3: Sí, sí, sí, por eso tenía que ser, entonces si es $k\pi$ veces sobre p por t.</p> <p>Reconocer</p> <p>Verbal: Como el periodo de la función.</p>	<p>Identificar</p> <p>Verbal: [VG]-5- 02:17:07]</p> <p>P: Determine el tiempo t que tarda el punto P en dar un giro completo ((leyendo la pregunta))</p> <p>Entonces ¿(x)quién quiere hacer esa? ¿o me dicen?</p> <p>H1: La distancia sería la circunferencia, $2\pi r$.</p> <p>H1: Por el radio=</p> <p>P: =Entonces la distancia sería la circunferencia.</p> <p>H1: Sí ((los estudiantes asienten con la cabeza))</p> <p>P: Entonces 2π.</p> <p>H1: Y el radio de A_1.</p> <p>P: Y el radio de A_1, ok.</p> <p>H1: Y el tiempo sería::</p> <p>M2: Entre la velocidad.</p> <p>H1: Ah velocidad, tenemos distancia entre velocidad, y la velocidad es ω_0.</p> <p>P: Entre tiempo, ¿verdad? Sería ahí.</p> <p>H1: Esa es velocidad angular, ese es ω_0.</p> <p>M2: No, es que ahí nos piden el tiempo.</p> <p>H1: Ajá, ese es igual ω_0, solo que ahí nos están pidiendo el tiempo, y luego ahí despejaríamos.</p> <p>Sustituir</p> <p>Verbal: [VG]-5- 02:18:35]</p> <p>P: Si llamamos p al tiempo que tarda el punto P para dar exactamente una vuelta. ¿Cuál es el valor de ω_0 en términos de p? ((leyendo la pregunta))</p> <p>H1: Pues habría que, es como un cambio de variable, nos dice que t lo cambiemos por p. Yo me imagino que es el periodo.</p> <p>P: Puede ser. Entonces para la pregunta b nada más.</p> <p>H1: Es la primera cuestión que se me ocurrió, el periodo.</p> <p>P: Ajá.</p> <p>H1: t igual a p.</p> <p>Verbal: [VG]-5- 02:21:27]</p> <p>P: Reescribe la fórmula que obtuviste en la pregunta d de la Parte I, ahí la dejé arriba verdad, utilizando este nuevo valor de ω_0. ((leyendo la pregunta)) Entonces me imagino que nada más cambiaron, ¿verdad? ((asienten con la cabeza))</p> <p>Reconocer</p> <p>Verbal: [VG]-5- 02:22:26]</p> <p>P: Dado que el valor p es el tiempo que tarda el planeta P en completar una vuelta alrededor de la Tierra T. ¿Cómo se observaría ese valor en la gráfica de la función limite? ((leyendo la pregunta))</p> <p>H6: Su periodo.</p> <p>P: ¿Su periodo?</p> <p>H6: Ajá, como se va repitiendo la gráfica en la función limite.</p> <p>P: ¿Seguros? ¿totalmente?</p> <p>H6: ☹️No totalmente☹️</p> <p>P: Por que aqui habla, digamos que p es completar una vuelta, pero::</p> <p>H6: Para una circunferencia.</p>	
Invariantes de Acciones	<ul style="list-style-type: none"> - La velocidad es igual a la distancia entre el tiempo. - $\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$ - $y_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) + b_k \sin\left(k \frac{2\pi}{p} t\right) \right]$ - El valor de convergencia debe ser periódico debido al comportamiento del fenómeno. 							

Tarea #6. Etapa 1: Identificación de acciones

TAREA #6

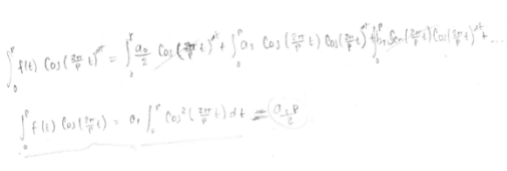
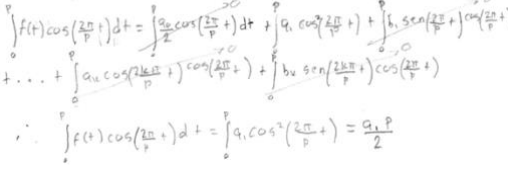
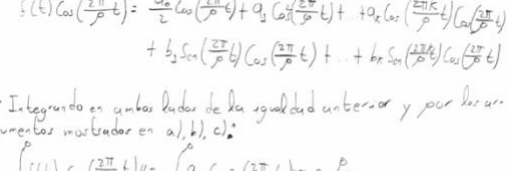
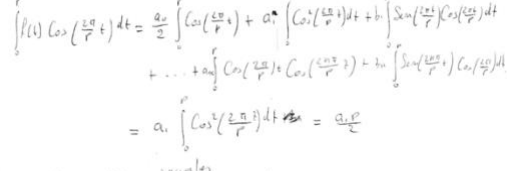
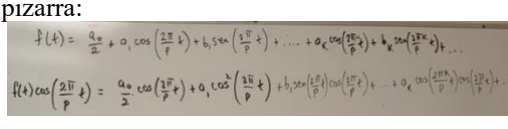

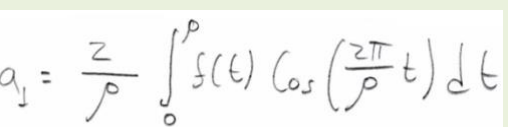
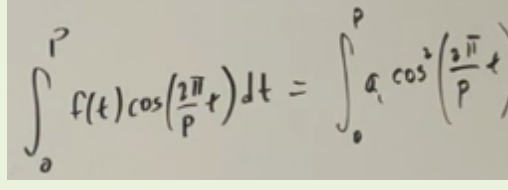
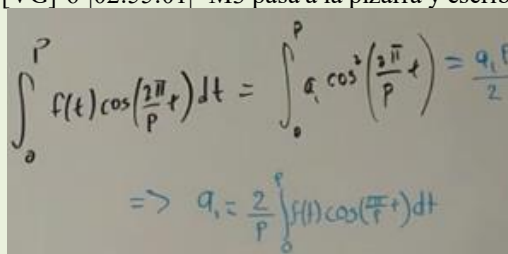
Objetivo de la Tarea: Significar el cálculo de los coeficientes de Fourier utilizando argumentaciones gráficas y geométricas, tal y como lo hizo Fourier.

Parte I. El cálculo de a_0							
Intención:	Significar el cálculo del coeficiente de Fourier a_0 , a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.						
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	<p>El valor de cada área sombreada es la misma</p> <p>[VG]-6- 01:21:14 - el profesor pregunta quien dio respuesta solo a partir de ver la gráfica, M2 levanta la mano.</p>	<p>Que ambas regiones en el intervalo de p, sus áreas son 0. Ya que tienen simetría.</p>	<p>Todas las regiones sombreadas tienen la misma área.</p>	<p>Representan áreas bajo la curva semejantes, para saber en que medida se relacionan es necesario conocer la relación entre a_1 y b_1.</p> <p>Para cada una, es claro de la gráfica que el valor de las áreas es igual.</p>	<p>En cada región se representa un cuarto del periodo. El área bajo la curva de cada una es un cuarto del área bajo la curva de toda la sección.</p>	<p>[VE3]-6- 00:00:36]</p> <p>M3: ¿Cuál es la relación entre las regiones sombreadas de cada gráfica?</p> <p>(8) (realiza un sonido con la boca)</p> <p>Tienen la misma área, ¿no?</p> <p>H3: Es la misma área, ¿no?</p> <p>M3: ¡Ajá! Pues sí, ¿no? Pues sí, ¿no? Por que ahí está (hace un silbido)</p> <p>H3: Además creo que tienen la misma, la [misma magnitud]</p> <p>M3: [El mismo periodo]</p> <p>[VE3]-6- 01:18:47]- después de la puesta en común M3 agrega a su respuesta "Ya que tienen simetría", y H3 agrega a su respuesta "Para cada una, es claro de la gráfica que el valor de las áreas es igual"</p>	<p>[VG]-6- 01:18:28]</p> <p>H6: (x)Es una proporción. Lo que hice fue integrar.</p> <p>P: ¿Proporción de qué con qué?</p> <p>H6: De la amplitud del área de una región pequeña, una de las (incomprensible, 1)</p> <p>P: Ok, entonces viste una de las coloreadas, ¿una nada más?</p> <p>H6: No, bueno, integré todo.</p> <p>P: Ajá, integraste todo.</p> <p>H6: Ajá, bueno, primero noté que son, que están divididas en partes iguales p entre 4, p entre 4, p entre 4, p entre 4.</p> <p>Ok.</p> <p>H6: Si saco el área total, bueno eso permite decir que cada uno de esos tiene la misma área.</p> <p>P: Ujú.</p> <p>H6: Entonces calculé el área total de esta ((señalando la curva coseno)), y el área total de esta ((señalando la curva seno)) eso da una expresión, se igualan y al final da llegas a conseguir una proporción.</p>

Parte I. El cálculo de a_0								
Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier a_0 , a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.								
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común	
							<p>P: Ah, o sea, igualaste el área de esta con la de esta (refiriéndose a ambas curvas)).</p> <p>H6: No, no las igualé, o sea como tal encontré una proporción, o sea, hay una proporción que siguen.</p> <p>[VG]-6-[01:21:14]- el profesor pregunta quien dio respuesta solo a partir de ver la gráfica, M2 levanta la mano, luego pregunta quien respondió a partir de calcular las integrales y el resto de los estudiantes levantan la mano.</p>	
Pregunta b			<p>Hay que hacer varias integrales de la forma $\int a \cos t dt$</p> $\int_0^p a \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt = \frac{2k\pi}{p} a \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \Big _0^p = \frac{2k\pi}{p} a (\sin(2k\pi) - \sin(0)) = 0$ $\int_0^p b \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt = -\frac{2k\pi}{p} b \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \Big _0^p = -\frac{2k\pi}{p} b (\cos(2k\pi) - \cos(0)) = 0$ $A = \int_0^p \left[a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \right) \right] dt = \int_0^p a_0 dt = a_0 p$	<p>Hay que hacer varias integrales de la forma $\int a \cos t dt$</p> $\int_0^p a \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt = \frac{2k\pi}{p} a \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \Big _0^p = \frac{2k\pi}{p} a (\sin(2k\pi) - \sin(0)) = 0$ $\int_0^p b \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt = -\frac{2k\pi}{p} b \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \Big _0^p = -\frac{2k\pi}{p} b (\cos(2k\pi) - \cos(0)) = 0$		$A_0 = \int_0^p a_0 dt = a_0 p$	<p>[VE3]-6-[00:02:02]</p> <p>H3: ¿Cuál es el área bajo la curva de cada término de la serie en un intervalo de tamaño p?</p> <p>M3: O sea, vamos a calcular primero y_0, ¿no?</p> <p>H3: Ah... (6) ¿cómo, cómo, cómo?</p> <p>M3: Ajá, mira te da la función y el intervalo en donde la tienes que integrar. (3) aquí sería como un rectángulo. Entonces sería la integral, uh... de cero a la mitad del periodo.</p> <p>H3: Ah... el área bajo la, sí.</p> <p>M3: Pues sí, ¿no?</p> <p>H3: Pero aquí está de cero a p.</p> <p>M3: Ajá...m</p> <p>H3: Ujú, entonces integras esta constante, de cero a p.</p> <p>M3: [A p].</p> <p>H3: Entonces te queda p veces esto.</p> <p>M3: ¡Ajá!</p> <p>[VE3]-6-[00:13:52]</p> <p>M3: Coseno de cero es uno, ¿no?</p> <p>H3: ¡Ajá!</p> <p>M3: Y el coseno de 2π, (5) huy no me voy a matar, este también da cero, ¿no?</p> <p>H3: Sí, da cero, ¿no?</p> <p>M3: Sí, porque esta área menos esta área también da cero.</p> <p>[VE3]-6-[00:42:06]</p> <p>H3: También lo puedes obtener como un rectángulo, de base p y altura a_0</p> <p>M3: ¡Ujú!</p> <p>H3: Entonces el área vale a_0 sobre 2 por p, y eso es igual a esta integral.</p> <p>M3: ¡Ujú!</p>	<p>[VG]-6-[01:22:28]</p> <p>P: ¿Para $\frac{a_0}{2}$ cuál es el área?</p> <p>M3: a_0 sobre 2 por p (junto con ella H1, H3, H6 y M1 dan la respuesta)</p> <p>H6: Puedo integrar o es un rectángulo.</p> <p>[VG]-6-[01:22:28]- para $y = \frac{a_0}{2}$ el profesor pregunta quien usó primero el argumento del rectángulo, levantaron la mano M1, M2, H1, H6, H7 y H9. Luego preguntó quienes de primero utilizaron el argumento de integrar, M3, H2, H3 y H4 levantaron la mano.</p> <p>[VG]-6-[01:23:49]</p> <p>P: ¿Cuánto da el área, bajo la curva? (refiriéndose a $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$)</p> <p>H3: Cero.</p> <p>P: Cero, ¿por qué?</p> <p>H1: Dos argumentos (x) uno geométrico que son áreas de misma magnitud, pero ajá áreas sobre la curva es positivo y bajo la curva negativa, o ya haciendo integrales.</p> <p>[VG]-6-[01:25:59]- el profesor pregunta qué sucede con los demás y los estudiantes responden que lo mismo y que los argumentos son los mismos, uno geométrico y el otro con integrales definidas.</p>
	$y = \frac{a_0}{2}$ $A = \frac{a_0}{2} p$ <p>[VG]-6-[01:22:28]- $y = \frac{a_0}{2}$ el profesor pregunta quien usó primero el argumento del rectángulo, M2 levantó la mano.</p>		$A = p \frac{a_0}{2}$ En la hoja hice las integrales <p>[VG]-6-[01:22:28]- $y = \frac{a_0}{2}$ el profesor pregunta quien usó primero el argumento del rectángulo, H1 levantó la mano, e indicó que terminó calculando la integral porque los demás casos eran más complejos.</p>		$A_0 = \frac{a_0}{2} \int_0^p dt = \frac{a_0}{2} p$			
	$y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ $A = 0$ (argumentación en la hoja)		$A = 0$ En la hoja hice las integrales		$A_1 = a_1 \int_0^p \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) dt = 0$			
	$y = b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ $A = 0$		$A = 0$		$A_2 = b_1 \int_0^p \sin\left(\frac{2\pi}{p}t\right) dt = 0$			
	$y = a_2 \cos\left(\frac{4\pi}{p}t\right)$ $A = 0$		$A = 0$		$A_3 = a_2 \int_0^p \cos\left(\frac{4\pi}{p}t\right) dt = 0$			
	$y = b_2 \sin\left(\frac{4\pi}{p}t\right)$ $A = 0$		$A = 0$		$A_4 = b_2 \int_0^p \sin\left(\frac{4\pi}{p}t\right) dt = 0$			
	$y = a_3 \cos\left(\frac{6\pi}{p}t\right)$ $A = 0$		$A = 0$		$A_5 = a_3 \int_0^p \cos\left(\frac{6\pi}{p}t\right) dt = 0$			
	$y = b_3 \sin\left(\frac{6\pi}{p}t\right)$ $A = 0$		$A = 0$		$A_6 = b_3 \int_0^p \sin\left(\frac{6\pi}{p}t\right) dt = 0$			
Intencionalidad	Se busca que el estudiante se percate de que el área bajo la curva de los términos de la serie son todos iguales a cero, salvo el del término constante $\frac{a_0}{2}$, que tiene área $\frac{a_0 p}{2}$ en un intervalo de tamaño p .							
¿Qué hace?	<p>Comparar las regiones sombreadas.</p> <p>Geometrizarse el área bajo la curva.</p> <p>Calcular el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.</p>	<p>Comparar las regiones sombreadas.</p> <p>Calcular el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.</p>	<p>Comparar las regiones sombreadas.</p> <p>Geometrizarse el área bajo la curva.</p> <p>Calcular el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.</p>	<p>Comparar las regiones sombreadas.</p> <p>Calcular el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.</p>	<p>Comparar las regiones sombreadas.</p> <p>Calcular el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.</p>	<p>Comparar las regiones sombreadas.</p> <p>Geometrizarse el área bajo la curva.</p> <p>Calcular el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.</p>	<p>Comparar las regiones sombreadas.</p> <p>Geometrizarse el área bajo la curva.</p> <p>Calcular el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.</p>	
¿Cómo hace?	Observando las regiones sombreadas en las gráficas. Identificando una figura geométrica conocida. Calculando las integrales definidas correspondientes.	Observando las regiones sombreadas en las gráficas. Calculando las integrales definidas correspondientes.	Observando las regiones sombreadas en las gráficas. Identificando una figura geométrica conocida. Calculando las integrales definidas correspondientes.	Observando las regiones sombreadas en las gráficas. Calculando las integrales definidas correspondientes.	Observando las regiones sombreadas en las gráficas. Calculando las integrales definidas correspondientes.	Observando las regiones sombreadas en las gráficas. Identificando una figura geométrica conocida. Calculando las integrales definidas correspondientes.	Observando las regiones sombreadas en las gráficas. Identificando una figura geométrica conocida. Calculando las integrales definidas correspondientes.	
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	<p>(A) El valor de cada área sombreada es la misma.</p> <p>(A) Para $y = \frac{a_0}{2}$ el área en un intervalo de tamaño p corresponde al área de un rectángulo.</p> <p>(A) El cálculo de los casos generales $\int_0^p c \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$ y $\int_0^p b \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$, con $m, n \in \mathbb{N}$.</p>	<p>(A) El valor de cada área sombreada es la misma.</p> <p>(A) El cálculo de las integrales en cada caso.</p>	<p>(A) El valor de cada área sombreada es la misma.</p> <p>(A) Para $y = \frac{a_0}{2}$ el área en un intervalo de tamaño p corresponde al área de un rectángulo.</p> <p>(A) El cálculo de los casos generales $\int_0^p a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$ y $\int_0^p b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$, con $m, n \in \mathbb{N}$.</p>	<p>(A) El valor de cada área sombreada es la misma.</p> <p>(A) El cálculo de las integrales en cada caso.</p>	<p>(A) El valor de cada área sombreada es la misma.</p> <p>(A) El cálculo de las integrales en cada caso.</p>	<p>(A) El valor de cada área sombreada es la misma.</p> <p>(A) Para $y = \frac{a_0}{2}$ el área en un intervalo de tamaño p corresponde al área de un rectángulo.</p> <p>(A) Para las integrales que tienen senos o cosenos se pueden observar las regiones con área positiva y negativa.</p> <p>(A) El cálculo de las integrales en cada caso.</p>	<p>(A) El valor de cada área sombreada es la misma.</p> <p>(A) Para $y = \frac{a_0}{2}$ el área en un intervalo de tamaño p corresponde al área de un rectángulo.</p> <p>(A) Para las integrales que tienen senos o cosenos se pueden observar las regiones con área positiva y negativa.</p> <p>(A) El cálculo de las integrales en cada caso.</p>	
Pregunta c	<p>Las áreas son iguales.</p>	<p>En efecto el área de $f(t)$ y de $y = \frac{a_0}{2}$ son la misma ya que si notamos el caso desde:</p> $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = A_9 = A_{10} = A_{11} = A_{12} = A_{13} = A_{14} = A_{15} = A_{16} = A_{17} = A_{18} = A_{19} = A_{20} = A_{21} = A_{22} = A_{23} = A_{24} = A_{25} = A_{26} = A_{27} = A_{28} = A_{29} = A_{30} = A_{31} = A_{32} = A_{33} = A_{34} = A_{35} = A_{36} = A_{37} = A_{38} = A_{39} = A_{40} = A_{41} = A_{42} = A_{43} = A_{44} = A_{45} = A_{46} = A_{47} = A_{48} = A_{49} = A_{50} = A_{51} = A_{52} = A_{53} = A_{54} = A_{55} = A_{56} = A_{57} = A_{58} = A_{59} = A_{60} = A_{61} = A_{62} = A_{63} = A_{64} = A_{65} = A_{66} = A_{67} = A_{68} = A_{69} = A_{70} = A_{71} = A_{72} = A_{73} = A_{74} = A_{75} = A_{76} = A_{77} = A_{78} = A_{79} = A_{80} = A_{81} = A_{82} = A_{83} = A_{84} = A_{85} = A_{86} = A_{87} = A_{88} = A_{89} = A_{90} = A_{91} = A_{92} = A_{93} = A_{94} = A_{95} = A_{96} = A_{97} = A_{98} = A_{99} = A_{100} = A_{101} = A_{102} = A_{103} = A_{104} = A_{105} = A_{106} = A_{107} = A_{108} = A_{109} = A_{110} = A_{111} = A_{112} = A_{113} = A_{114} = A_{115} = A_{116} = A_{117} = A_{118} = A_{119} = A_{120} = A_{121} = A_{122} = A_{123} = A_{124} = A_{125} = A_{126} = A_{127} = A_{128} = A_{129} = A_{130} = A_{131} = A_{132} = A_{133} = A_{134} = A_{135} = A_{136} = A_{137} = A_{138} = A_{139} = A_{140} = A_{141} = A_{142} = A_{143} = A_{144} = A_{145} = A_{146} = A_{147} = A_{148} = A_{149} = A_{150} = A_{151} = A_{152} = A_{153} = A_{154} = A_{155} = A_{156} = A_{157} = A_{158} = A_{159} = A_{160} = A_{161} = A_{162} = A_{163} = A_{164} = A_{165} = A_{166} = A_{167} = A_{168} = A_{169} = A_{170} = A_{171} = A_{172} = A_{173} = A_{174} = A_{175} = A_{176} = A_{177} = A_{178} = A_{179} = A_{180} = A_{181} = A_{182} = A_{183} = A_{184} = A_{185} = A_{186} = A_{187} = A_{188} = A_{189} = A_{190} = A_{191} = A_{192} = A_{193} = A_{194} = A_{195} = A_{196} = A_{197} = A_{198} = A_{199} = A_{200} = A_{201} = A_{202} = A_{203} = A_{204} = A_{205} = A_{206} = A_{207} = A_{208} = A_{209} = A_{210} = A_{211} = A_{212} = A_{213} = A_{214} = A_{215} = A_{216} = A_{217} = A_{218} = A_{219} = A_{220} = A_{221} = A_{222} = A_{223} = A_{224} = A_{225} = A_{226} = A_{227} = A_{228} = A_{229} = A_{230} = A_{231} = A_{232} = A_{233} = A_{234} = A_{235} = A_{236} = A_{237} = A_{238} = A_{239} = A_{240} = A_{241} = A_{242} = A_{243} = A_{244} = A_{245} = A_{246} = A_{247} = A_{248} = A_{249} = A_{250} = A_{251} = A_{252} = A_{253} = A_{254} = A_{255} = A_{256} = A_{257} = A_{258} = A_{259} = A_{260} = A_{261} = A_{262} = A_{263} = A_{264} = A_{265} = A_{266} = A_{267} = A_{268} = A_{269} = A_{270} = A_{271} = A_{272} = A_{273} = A_{274} = A_{275} = A_{276} = A_{277} = A_{278} = A_{279} = A_{280} = A_{281} = A_{282} = A_{283} = A_{284} = A_{285} = A_{286} = A_{287} = A_{288} = A_{289} = A_{290} = A_{291} = A_{292} = A_{293} = A_{294} = A_{295} = A_{296} = A_{297} = A_{298} = A_{299} = A_{300} = A_{301} = A_{302} = A_{303} = A_{304} = A_{305} = A_{306} = A_{307} = A_{308} = A_{309} = A_{310} = A_{311} = A_{312} = A_{313} = A_{314} = A_{315} = A_{316} = A_{317} = A_{318} = A_{319} = A_{320} = A_{321} = A_{322} = A_{323} = A_{324} = A_{325} = A_{326} = A_{327} = A_{328} = A_{329} = A_{330} = A_{331} = A_{332} = A_{333} = A_{334} = A_{335} = A_{336} = A_{337} = A_{338} = A_{339} = A_{340} = A_{341} = A_{342} = A_{343} = A_{344} = A_{345} = A_{346} = A_{347} = A_{348} = A_{349} = A_{350} = A_{351} = A_{352} = A_{353} = A_{354} = A_{355} = A_{356} = A_{357} = A_{358} = A_{359} = A_{360} = A_{361} = A_{362} = A_{363} = A_{364} = A_{365} = A_{366} = A_{367} = A_{368} = A_{369} = A_{370} = A_{371} = A_{372} = A_{373} = A_{374} = A_{375} = A_{376} = A_{377} = A_{378} = A_{379} = A_{380} = A_{381} = A_{382} = A_{383} = A_{384} = A_{385} = A_{386} = A_{387} = A_{388} = A_{389} = A_{390} = A_{391} = A_{392} = A_{393} = A_{394} = A_{395} = A_{396} = A_{397} = A_{398} = A_{399} = A_{400} = A_{401} = A_{402} = A_{403} = A_{404} = A_{405} = A_{406} = A_{407} = A_{408} = A_{409} = A_{410} = A_{411} = A_{412} = A_{413} = A_{414} = A_{415} = A_{416} = A_{417} = A_{418} = A_{419} = A_{420} = A_{421} = A_{422} = A_{423} = A_{424} = A_{425} = A_{426} = A_{427} = A_{428} = A_{429} = A_{430} = A_{431} = A_{432} = A_{433} = A_{434} = A_{435} = A_{436} = A_{437} = A_{438} = A_{439} = A_{440} = A_{441} = A_{442} = A_{443} = A_{444} = A_{445} = A_{446} = A_{447} = A_{448} = A_{449} = A_{450} = A_{451} = A_{452} = A_{453} = A_{454} = A_{455} = A_{456} = A_{457} = A_{458} = A_{459} = A_{460} = A_{461} = A_{462} = A_{463} = A_{464} = A_{465} = A_{466} = A_{467} = A_{468} = A_{469} = A_{470} = A_{471} = A_{472} = A_{473} = A_{474} = A_{475} = A_{476} = A_{477} = A_{478} = A_{479} = A_{480} = A_{481} = A_{482} = A_{483} = A_{484} = A_{485} = A_{486} = A_{487} = A_{488} = A_{489} = A_{490} = A_{491} = A_{492} = A_{493} = A_{494} = A_{495} = A_{496} = A_{497} = A_{498} = A_{499} = A_{500} = A_{501} = A_{502} = A_{503} = A_{504} = A_{505} = A_{506} = A_{507} = A_{508} = A_{509} = A_{510} = A_{511} = A_{512} = A_{513} = A_{514} = A_{515} = A_{516} = A_{517} = A_{518} = A_{519} = A_{520} = A_{521} = A_{522} = A_{523} = A_{524} = A_{525} = A_{526} = A_{527} = A_{528} = A_{529} = A_{530} = A_{531} = A_{532} = A_{533} = A_{534} = A_{535} = A_{536} = A_{537} = A_{538} = A_{539} = A_{540} = A_{541} = A_{542} = A_{543} = A_{544} = A_{545} = A_{546} = A_{547} = A_{548} = A_{549} = A_{550} = A_{551} = A_{552} = A_{553} = A_{554} = A_{555} = A_{556} = A_{557} = A_{558} = A_{559} = A_{560} = A_{561} = A_{562} = A_{563} = A_{564} = A_{565} = A_{566} = A_{567} = A_{568} = A_{569} = A_{570} = A_{571} = A_{572} = A_{573} = A_{574} = A_{575} = A_{576} = A_{577} = A_{578} = A_{579} = A_{580} = A_{581} = A_{582} = A_{583} = A_{584} = A_{585} = A_{586} = A_{587} = A_{588} = A_{589} = A_{590} = A_{591} = A_{592} = A_{593} = A_{594} = A_{595} = A_{596} = A_{597} = A_{598} = A_{599} = A_{600} = A_{601} = A_{602} = A_{603} = A_{604} = A_{605} = A_{606} = A_{607} = A_{608} = A_{609} = A_{610} = A_{611} = A_{612} = A_{613} = A_{614} = A_{615} = A_{616} = A_{617} = A_{618} = A_{619} = A_{620} = A_{621} = A_{622} = A_{623} = A_{624} = A_{625} = A_{626} = A_{627} = A_{628} = A_{629} = A_{630} = A_{631} = A_{632} = A_{633} = A_{634} = A_{635} = A_{636} = A_{637} = A_{638} = A_{639} = A_{640} = A_{641} = A_{642} = A_{643} = A_{644} = A_{645} = A_{646} = A_{647} = A_{648} = A_{649} = A_{650} = A_{651} = A_{652} = A_{653} = A_{654} = A_{655} = A_{656} = A_{657} = A_{658} = A_{659} = A_{660} = A_{661} = A_{662} = A_{663} = A_{664} = A_{665} = A_{666} = A_{667} = A_{668} = A_{669} = A_{670} = A_{671} = A_{672} = A_{673} = A_{674} = A_{675} = A_{676} = A_{677} = A_{678} = A_{679} = A_{680} = A_{681} = A_{682} = A_{683} = A_{684} = A_{685} = A_{686} = A_{687} = A_{688} = A_{689} = A_{690} = A_{691} = A_{692} = A_{693} = A_{694} = A_{695} = A_{696} = A_{697} = A_{698} = A_{699} = A_{700} = A_{701} = A_{702} = A_{703} = A_{704} = A_{705} = A_{706} = A_{707} = A_{708} = A_{709} = A_{710} = A_{711} = A_{712} = A_{713} = A_{714} = A_{715} = A_{716} = A_{717} = A_{718} = A_{719} = A_{720} = A_{721} = A_{722} = A_{723} = A_{724} = A_{725} = A_{726} = A_{727} = A_{728} = A_{729} = A_{730} = A_{731} = A_{732} = A_{733} = A_{734} = A_{735} = A_{736} = A_{737} = A_{738} = A_{739} = A_{740} = A_{741} = A_{742} = A_{743} = A_{744} = A_{745} = A_{746} = A_{747} = A_{748} = A_{749} = A_{750} = A_{751} = A_{752} = A_{753} = A_{754} = A_{755} = A_{756} = A_{757} = A_{758} = A_{759} = A_{760} = A_{761} = A_{762} = A_{763} = A_{764} = A_{765} = A_{766} = A_{767} = A_{768} = A_{769} = A_{770} = A_{771} = A_{772} = A_{773} = A_{774} = A_{775} = A_{776} = A_{777} = A_{778} = A_{779} = A_{780} = A_{781} = A_{782} = A_{783} = A_{784} = A_{785} = A_{786} = A_{787} = A_{788} = A_{789} = A_{790} = A_{791} = A_{792} = A_{793} = A_{794} = A_{795} = A_{796} = A_{797} = A_{798} = A_{799} = A_{800} = A_{801} = A_{802} = A_{803} = A_{804} = A_{805} = A_{806} = A_{807} = A_{808} = A_{809} = A_{810} = A_{811} = A_{812} = A_{813} = A_{814} = A_{815} = A_{816} = A_{817} = A_{818} = A_{819} = A_{820} = A_{821} = A_{822} = A_{823} = A_{824} = A_{825} = A_{826} = A_{827} = A_{828} = A_{829} = A_{830} = A_{831} = A_{832} = A_{833} = A_{834} = A_{835} = A_{836} = A_{837} = A_{838} = A_{839} = A_{840} = A_{841} = A_{842} = A_{843} = A_{844} = A_{845} = A_{846} = A_{847} = A_{848} = A_{849} = A_{850} = A_{851} = A_{852} = A_{853} = A_{854} = A_{855} = A_{856} = A_{857} = A_{858} = A_{859} = A_{860} = A_{861} = A_{862} = A_{863} = A_{864} = A_{865} = A_{866} = A_{867} = A_{868} = A_{869} = A_{870} = A_{871} = A_{872} = A_{873} = A_{874} = A_{875} = A_{876} = A_{877} = A_{878} = A_{879} = A_{880} = A_{881} = A_{882} = A_{883} = A_{884} = A_{885} = A_{886} = A_{887} = A_{888} = A_{889} = A_{890} = A_{891} = A_{892} = A_{893} = A_{894} = A_{895} = A_{896} = A_{897} = A_{898} = A_{899} = A_{900} = A_{901} = A_{902} = A_{903} = A_{904} = A_{905} = A_{906} = A_{907} = A_{908} = A_{909} = A_{910} = A_{911} = A_{912} = A_{913} = A_{914} = A_{915} = A_{916} = A_{917} = A_{918} = A_{919} = A_{920} = A_{921} = A_{922} = A_{923} = A_{924} = A_{925} = A_{926} = A_{927} = A_{928} = A_{929} = A_{930} = A_{931} = A_{932} = A_{933} = A_{934} = A_{935} = A_{936} = A_{937} = A_{938} = A_{939} = A_{940} = A_{941} = A_{942} = A_{943} = A_{944} = A_{945} = A_{946} = A_{947} = A_{948} = A_{949} = A_{950} = A_{951} = A_{952} = A_{953} = A_{954} = A_{955} = A_{956} = A_{957} = A_{958} = A_{959} = A_{960} = A_{961} = A_{962} = A_{963} = A_{964} = A_{965} = A_{966} = A_{967} = A_{968} = A_{969} = A_{970} = A_{971} = A_{972} = A_{973} = A_{974} = A_{975} = A_{976} = A_{977} = A_{978} = A_{979} = A_{980} = A_{981} = A_{982} = A_{983} = A_{984} = A_{985} = A_{986} = A_{987} = A_{988} = A_{989} = A_{990} = A_{991} = A_{992} = A_{993} = A_{994} = A_{995} = A_{996} = A_{997} = A_{998} = A_{999} = A_{1000} = A_{1001} = A_{1002} = A_{1003} = A_{1004} = A_{1005} = A_{1006} = A_{1007} = A_{1008} = A_{1009} = A_{1010} = A_{1011} = A_{1012} = A_{1013} = A_{1014} = A_{1015} = A_{1016} = A_{1017} = A_{1018} = A_{1019} = A_{1020} = A_{1021} = A_{1022} = A_{1023} = A_{1024} = A_{1025} = A_{1026} = A_{1027} = A_{1028} = A_{1029} = A_{1030} = A_{1031} = A_{1032} = A_{1033} = A_{1034} = A_{1035} = A_{1036} = A_{1037} = A_{1038} = A_{1039} = A_{1040} = A_{1041} = A_{1042} = A_{1043} = A_{1044} = A_{1045} = A_{1046} = A_{1047} = A_{1048} = A_{1049} = A_{1050} = A_{1051} = A_{1052} = A_{1053} = A_{1054} = A_{1055$						

Parte I. El cálculo de a_0							
Intención:	Significar el cálculo del coeficiente de Fourier a_0 , a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.						
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta d	$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) dt$		$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) dt$ 		$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) dt$	[VE3]-6-[00:26:19] H3: Eso significa que el área bajo la curva, de que esta área es igual a esta. Ese sería el argumento geométrico, creo yo. M3: Tiene sentido.	[VG]-6-[01:28:35]- H4 para a escribir a la pizarra su respuesta.
Intencionalidad	Se pretende que el estudiante utilice argumentos geométricos y sus conocimientos sobre integral definida para decir que el área bajo la curva de la función $f(t)$ es igual a la suma de las áreas bajo la curva de los términos de la serie. De esta manera el estudiante puede construir la fórmula para el cálculo con un significado asociado a la noción de área bajo la curva.						
¿Qué hace?	Equivaler el área bajo la curva de la función con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica.	Equivaler el área bajo la curva de la función con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica.	Equivaler el área bajo la curva de la función con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica.	Equivaler el área bajo la curva de la función con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica.	Equivaler el área bajo la curva de la función con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica.	Equivaler el área bajo la curva de la función con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica.	Equivaler el área bajo la curva de la función con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica.
¿Cómo hace?	Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Si A representa la función área, $A(f(t)) = A\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\right)$.	(A) Si A representa la función área, $A(f(t)) = A\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\right)$.	(A) Si A representa la función área, $A(f(t)) = A\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\right)$.	(A) Si A representa la función área, $A(f(t)) = A\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\right)$.	(A) Si A representa la función área, $A(f(t)) = A\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\right)$.	(A) Si A representa la función área, $A(f(t)) = A\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\right)$.	(A) Si A representa la función área, $A(f(t)) = A\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)\right)$.

Parte II. El cálculo de a_k																			
Intención:	Significar el cálculo del coeficiente de Fourier a_k , a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.																		
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común												
Pregunta a	Las áreas sombreadas son iguales. El área bajo la curva de la función $y = a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ es $A = \frac{a_1^2}{2}p$ 	El área es la misma. El valor de la integral esta en la tarea 6, parte 2, hoja 11. 	Son iguales las área por simetría. $A = \frac{a_1 p}{2}$ 	Tienen el mismo valor. 	La suma de las áreas del doble asurado es la misma que la suma de las áreas del asurado simple. 	[VE3]-6-[01:28:48] M3: ¿Cuál es la relación entre las áreas sombreadas? Eh::: el área es la misma, ¿no? [VE3]-6-[01:29:41] M3: ¿Cuál es el valor del área bajo la cur-? Uh::: a ver, vamos a integrar. [VE3]-6-[01:31:06]- entre M3 y H3 discuten la resolución algebraica-analítica de la integral, primero consideran aplicar el método de integración por partes para tratar de observar una integral cíclica. Se deciden al final por utilizar la identidad $\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$ para reescribir la expresión y calcular la integral de forma directa, concluyendo que el área bajo la curva es igual a $\frac{a_1 p}{2}$.	[VG]-6-[02:43:02] P: ¿Cuál es la relación entre las áreas sombreadas? Acá está esta rayadita así y la cuadrícula, ¿verdad? Entonces cuál es la relación. H4: La cuadrícula es la misma que la rayadita. P: Son lo mismo, ¿verdad? (los estudiantes asienten con la cabeza) Ahí lo pueden ver, ¿verdad? Como que este con este es uno de estos, ¿verdad? (señalando las regiones sombreadas) H6: Por simetría. P: Y este es el otro, por simetría, ¿verdad? Y luego pregunta cuál es el valor del área bajo la curva y igual a_1 coseno cuadrado, en un intervalo de longitud p . H4: a_1 por $\frac{p}{2}$. P: a_1 por $\frac{p}{2}$ y cómo lo:: M2: Integrando. P: Hicieron la integral ((los estudiantes asienten con la cabeza) de coseno cuadrado ¿Quién quiere venir a hacerla? ((M2 pasa y escribe en la pizarra)) 												
Pregunta b	Por simetría, el área bajo la curva en cada caso es cero. 		En cada caso el área es 0. 			[VE3]-6-[01:36:26]- M3 y H3 empiezan la resolución algebraica-analítica de la integral, al parecer de forma individual. [VE3]-6-[01:39:43] M3: A mí no me daba cero. H3: ¿La de coseno por seno? Mira es esto, esto, esto y esto (señalando las regiones de la gráfica)). El argumento lo de los valores geométricos se ve que da cero. M3: Déjame hacerlo (incomprensible, 1) H3: "M3" (se refiere a M3 por su nombre) checa la grafiquirri. M3: Sí, ahorita veo la grafiquirri (3) sí, sí da cero. H3: (Incomprensible, 2) es que mira, aquí también se ve, ¿no? Aquí está ((se escucha un sonido como señalando en la pantalla de la computadora)) M3: Sí, esa madre. H3: Y la otra también ((se escucha un sonido como señalando en la pantalla de la computadora))	[VG]-6-[02:48:23] H3: Cero. P: Cero ¿qué estrategia usaron? H1: Integrales (varios estudiantes responden a la vez)). P: Integraron directo, ¿verdad? ¿Cómo lo pueden ver con la gráfica? [VG]-6-[02:48:33]- los estudiantes, varios a la vez, explica que se pueden hacer corresponder las regiones para darse cuenta que el área bajo la curva es igual a cero, en ambos casos.												
Pregunta c	Según la applet, y la función $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, el área bajo la curva es $A = a_1 \frac{p}{2}$ para el caso $k=1$, luego, para $k>1$, el área es cero. Mientras que para la función $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ el área bajo la curva es cero para todo k .		<table border="1"> <tr> <th>k</th> <th>cos cos</th> <th>cos sen</th> </tr> <tr> <td>1</td> <td>$\frac{a_1 p}{2}$</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </table>	k	cos cos	cos sen	1	$\frac{a_1 p}{2}$	0	2	0	0	3	0	0	En todos los casos valen cero, excepto por el área bajo la curva de $y = a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, este razonamiento incluye literalmente a todos los demás términos.	De acuerdo al Applet, para $k \neq 1$ en los términos del Cose, todas las áreas son cero. Para la gráfica de Seno y Coseno, las áreas son cero $\forall k \in \mathbb{Z}$	[VE3]-6-[01:44:39]- Se ve en la pantalla de H3 que para responder primero manipula el applet variando los valores de k y en algunos casos se nota como el cursor va sobre las áreas sombreadas comparando unas con otras. [VE3]-6-[01:46:55] M3: Todos valen cero. (6) H3: Ah no manches, es que por ejemplo, esta ((se ve en la pantalla de M3 que colocan $k = 1$)), esta área no vale cero.	[VG]-6-[02:49:53] H6: Pues, cuando k es igual a 1 da lo mismo, a_1 sobre 2 por p . Y para k distinto, bueno los demás k eson ser cero. En P: Todos son cero. H6: En el caso de la morada es cero para cualquier k . [VG]-6-[02:50:31] P: ¿Calcularon las integrales? H6: No ((la mayoría responden lo mismo)). P: ¿O lo vieron con el:::
k	cos cos	cos sen																	
1	$\frac{a_1 p}{2}$	0																	
2	0	0																	
3	0	0																	

Parte II. El cálculo de a_k							
Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier a_k , a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
						<p>M3: ¿Porqué no vale cero?</p> <p>H3: Mira=</p> <p>M3: =Ah:: por que esta no tiene parte negativa. En todas las demás ya sí.</p> <p>(8) ((se ve en la pantalla de H3 que cambia los valores de k))</p> <p>H3: Ah si es cierto, mira en esta ((se refiere a la curva se coseno por seno)) también.</p> <p>M3: No esa desde ahí ((se ve en la pantalla de H3 que colocan k = 1)) ya daba cero.</p>	<p>H3: Lo vimos de ahí ((señalando el applet))</p>
Pregunta d	<p>Las áreas son iguales</p> 		<p>Las áreas son iguales. Ya que los demás términos de la expansión trigonométrica se anulan.</p>			<p>[VE3]-6-[01:51:57]</p> <p>M3: Estas se van a ir a cero, ¿no?</p> <p>H3: Todas menos esta.</p> <p>M3: Menos esta y la de a_0 dos.</p> <p>H3: Esa tampoco.</p> <p>M3: Ah no, sí, esta también vale cero, por que es el coseno de:::</p> <p>H3: De una función entre el periodo, ¿no? Digo, de un coseno en su periodo.</p> <p>M3: A parte no hemos calculado el coseno de esta, ¿no?</p> <p>H3: ¿A poco?</p> <p>M3: Sí, a bueno eso da cero.</p> <p>[VE3]-6-[01:51:57]</p> <p>M3: Estas se van a ir a cero, ¿no?</p> <p>H3: Todas menos esta.</p>	<p>[VG]-6-[02:51:49]- el profesor escribe en la pizarra:</p>  <p>[VG]-6-[02:53:18]</p> <p>P: A partir de eso, dice ¿cuál es la relación entre el área bajo la curva de esta ((señalando el $f(t) \cos(\frac{2\pi}{p}t)$)) y el área bajo la curva de esta ((señalando el $a_1 \cos^2(\frac{2\pi}{p}t)$))?</p> <p>M2: Es la misma ((varios alumnos responden junto con ella)).</p> <p>P: Es la misma, ¿por qué?</p> <p>H6: Porque las áreas se hacen cero.</p> <p>H4: Si uno lo integra, se van anulando los términos que no tienen coseno cuadrado. O sea, todos los que no tiene coseno cuadrado se anulan, por todo lo que ya vimos arriba.</p>
Pregunta e	$a_1 = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) dt$		$a_1 = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) dt$		$a_1 = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) dt$	<p>No hubo interacción al responder esta pregunta.</p>	<p>[VG]-6-[02:51:49]- el profesor indica que a partir de la pregunta anterior se tiene lo siguiente:</p>  <p>[VG]-6-[02:55:01]- M3 pasa a la pizarra y escribe:</p>  <p>[VG]-6-[02:55:53]- el profesor plantea la pregunta de cómo se interpreta el coeficiente a_1 geoméricamente.</p> <p>[VG]-6-[02:57:08]</p> <p>H4: Con las gráficas.</p> <p>P: Ujú, ¿qué?</p> <p>H4: Por ejemplo, tendríamos la gráfica de $f(t)$ por $\cos(\frac{2\pi}{p}t)$ y medimos el área de esa gráfica y luego tenemos la gráfica de a_1 por $\cos^2(\frac{2\pi}{p}t)$ (x) de p, ¿no? Entonces medimos el área, las comparamos.</p>
Intencionalidad	<p>Se espera que el estudiante signifique geoméricamente la ortogonalidad de las funciones trigonométricas y que utilice este hecho para calcular el valor de a_1 pues, será capaz de identificar que la multiplicación de $\cos(\frac{2\pi}{p}t)$ por cualquier otro término de la serie —excepto el término $a_1 \cos(\frac{2\pi}{p}t)$— tendrá área bajo la curva igual a cero, y a partir de ellos que el valor de $\frac{a_1 p}{2}$ corresponde al área bajo la curva que resulta de multiplicar la función $f(t)$ por $\cos(\frac{2\pi}{p}t)$. Lo que permite determinar el valor de a_1 en términos de $f(t)$, la función conocida.</p>						
¿Qué hace?	<p>Comparar las regiones sombreadas.</p> <p>Calcular el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.</p> <p>Observar el valor del área bajo la curva para distintos valores de k.</p> <p>Equivaler el área bajo la curva de la función $f(t) \cos(\frac{2\pi}{p}t)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos(\frac{2\pi}{p}t)$.</p>	<p>Comparar las regiones sombreadas.</p> <p>Calcular el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.</p> <p>Observar el valor del área bajo la curva para distintos valores de k.</p> <p>Equivaler el área bajo la curva de la función $f(t) \cos(\frac{2\pi}{p}t)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos(\frac{2\pi}{p}t)$.</p>	<p>Comparar las regiones sombreadas.</p> <p>Calcular el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.</p> <p>Observar el valor del área bajo la curva para distintos valores de k.</p> <p>Equivaler el área bajo la curva de la función $f(t) \cos(\frac{2\pi}{p}t)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos(\frac{2\pi}{p}t)$.</p>	<p>Comparar las regiones sombreadas.</p> <p>Calcular el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.</p> <p>Observar el valor del área bajo la curva para distintos valores de k.</p> <p>Equivaler el área bajo la curva de la función $f(t) \cos(\frac{2\pi}{p}t)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos(\frac{2\pi}{p}t)$.</p>	<p>Comparar las regiones sombreadas.</p> <p>Calcular el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.</p> <p>Observar el valor del área bajo la curva para distintos valores de k.</p> <p>Equivaler el área bajo la curva de la función $f(t) \cos(\frac{2\pi}{p}t)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos(\frac{2\pi}{p}t)$.</p>	<p>Comparar las regiones sombreadas.</p> <p>Calcular el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.</p> <p>Observar el valor del área bajo la curva para distintos valores de k.</p> <p>Equivaler el área bajo la curva de la función $f(t) \cos(\frac{2\pi}{p}t)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos(\frac{2\pi}{p}t)$.</p>	<p>Comparar las regiones sombreadas.</p> <p>Geometrizar el área bajo la curva.</p> <p>Calcular el valor de las áreas bajo la curva solicitadas.</p> <p>Observar el valor del área bajo la curva para distintos valores de k.</p> <p>Equivaler el área bajo la curva de la función $f(t) \cos(\frac{2\pi}{p}t)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos(\frac{2\pi}{p}t)$.</p>
¿Cómo hace?	<p>Observando las regiones sombreadas en la gráfica.</p> <p>Calculando las integrales definidas correspondientes e identificando simetrías entre las regiones.</p> <p>Analizando el applet suministrado.</p> <p>Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.</p>	<p>Observando las regiones sombreadas en la gráfica.</p> <p>Calculando las integrales definidas correspondientes.</p> <p>Analizando el applet suministrado.</p> <p>Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.</p>	<p>Observando las regiones sombreadas en la gráfica.</p> <p>Calculando las integrales definidas correspondientes e identificando simetrías entre las regiones.</p> <p>Analizando el applet suministrado.</p> <p>Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.</p>	<p>Observando las regiones sombreadas en la gráfica.</p> <p>Calculando las integrales definidas correspondientes e identificando simetrías entre las regiones.</p> <p>Analizando el applet suministrado.</p> <p>Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.</p>	<p>Observando las regiones sombreadas en la gráfica.</p> <p>Calculando las integrales definidas correspondientes e identificando simetrías entre las regiones.</p> <p>Analizando el applet suministrado.</p> <p>Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.</p>	<p>Observando las regiones sombreadas en la gráfica.</p> <p>Calculando las integrales definidas correspondientes e identificando simetrías entre las regiones.</p> <p>Analizando el applet suministrado.</p> <p>Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.</p>	<p>Observando las regiones sombreadas en la gráfica.</p> <p>Identificando una figura geométrica concoida.</p> <p>Calculando las integrales definidas correspondientes e identificando simetrías entre las regiones.</p> <p>Analizando el applet suministrado.</p> <p>Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.</p>
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	<p>(A) El valor de cada área sombreada es la misma.</p> <p>(A) El cálculo de la integral $\int_0^p a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right) dt = \frac{a_1}{2} p$.</p> <p>(A) Por simetría el área bajo la curva en cada caso es cero.</p> <p>(A) Según el applet, se observan los valores de las áreas bajo la curva.</p> <p>(A) Si A representa la función área, $A\left(f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right) = A\left(\frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right)$.</p>	<p>(A) El valor de cada área sombreada es la misma.</p> <p>(A) El cálculo de la integral $\int_0^p a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right) dt = \frac{a_1}{2} p$.</p> <p>(A) Según el applet, se observan los valores de las áreas bajo la curva.</p> <p>(A) Si A representa la función área, $A\left(f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right) = A\left(\frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right)$.</p>	<p>(A) El valor de cada área sombreada es la misma, por simetría.</p> <p>(A) El cálculo de las integrales $\int_0^p a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right) dt = \frac{a_1}{2} p$, $\int_0^p \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt = 0$.</p> <p>(A) Según el applet, se observan los valores de las áreas bajo la curva.</p> <p>(A) Si A representa la función área, $A\left(f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right) = A\left(\frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right)$.</p>	<p>(A) El valor de cada área sombreada es la misma.</p> <p>(A) El cálculo de las integrales $\int_0^p a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right) dt = \frac{a_1}{2} p$, $\int_0^p \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt = 0$.</p> <p>(A) Según el applet, se observan los valores de las áreas bajo la curva.</p> <p>(A) Si A representa la función área, $A\left(f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right) = A\left(\frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right)$.</p>	<p>(A) El valor de cada área sombreada es la misma.</p> <p>(A) El cálculo de las integrales $\int_0^p a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right) dt = \frac{a_1}{2} p$, $\int_0^p \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \sin\left(\frac{2\pi}{p}t\right) dt = 0$, $\int_0^p \cos\left(\frac{4\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) dt = 0$.</p> <p>(A) Según el applet, se observan los valores de las áreas bajo la curva.</p> <p>(A) Si A representa la función área, $A\left(f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right) = A\left(\frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right)$.</p>	<p>(A) El valor de cada área sombreada es la misma.</p> <p>(A) El cálculo de las integrales.</p> <p>(A) Por simetría el área bajo la curva en cada caso es cero.</p> <p>(A) Según el applet, se observan los valores de las áreas bajo la curva.</p> <p>(A) Si A representa la función área, $A\left(f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right) = A\left(\frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right)$.</p>	<p>(A) El valor de cada área sombreada es la misma.</p> <p>(A) Si es por simetría queda el área igual a la misma, entonces calcular nada más el área del rectángulo y lo dividís entre 2.</p> <p>(A) El cálculo de la integral $\int_0^p a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right) dt = \frac{a_1}{2} p$.</p> <p>(A) Por simetría el área bajo la curva en cada caso es cero.</p> <p>(A) Según el applet, se observan los valores de las áreas bajo la curva.</p> <p>(A) Si A representa la función área, $A\left(f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right) = A\left(\frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\right)$.</p>
Pregunta f	<p>Para la función $y = a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$, según la applet, el área bajo la curva es $A = a_k \frac{p}{2}$ cuando $k=m$, y cero en cualquier otro caso.</p> <p>Para la función $y = a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \sin\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$, el área bajo la curva es cero en cualquier caso.</p>	<p>En la primera expresión de "y" si $k=m$ el valor del área bajo la curva es $a_k \frac{p}{2}$.1, mientras que en la segunda expresión de "y" si $k \neq m$ el valor del área bajo la curva es 0.</p> <p>Ahora bien para la primera expresión de "y" si k y m son distintos el valor del área bajo la curva es 0, mientras que en la segunda expresión de "y" si k y m son distintos el área bajo la curva es 0.</p>	<p>En y cos cos el área es $\frac{a_k p}{2}$ si $m=k$ y 0 si m diferente de k.</p> <p>En y sen cos el área siempre es 0 para todo m y k.</p>	<p>La función que contiene el seno por el coseno siempre tiene un área de bajo de ella igual a cero en un periodo.</p> <p>La función coseno por coseno tiene un área bajo la curva igual a cero si $m \neq n$.</p> <p>Solo cuando $m = n$ el área bajo la curva tiene un valor distinto de cero, más aun, para cualquier $k \in \mathbb{N}$ el área bajo la curva queda dada por $a_k \frac{p}{2}$</p>	<p>Cuando $k = m \forall k, m \in \mathbb{Z}$, el área es $A = \frac{a_k p}{2}$, en el caso contrario $k \neq m, A = 0$, siendo A el área bajo las curvas</p>	<p>[VE3]-6-[01:59:39]- Se ve en las pantallas de M3 y H3 que para responder primero manipulan el applet variando los valores de m y k.</p> <p>[VE3]-6-[02:00:22]</p> <p>H3: Cuando son iguales eso, solo cuando no se vale tu camote ((refiriéndose al valor de k)), ¿no? Cuando son distintas siempre vale cero.</p> <p>M3: Ah no ma-, a ver, dices tu que cuando son iguales es cuando si va, hay valor principal, ¿no? No ma-, y ya ¿y todas valen 2.1 te has dado cuenta?</p>	<p>[VG]-6-[02:59:20]</p> <p>P: Hablemos de esta primero, coseno por coseno.</p> <p>H6: Si k es igual a m, el área es a_m sobre 2 por p.</p> <p>[VG]-6-[03:00:22]</p> <p>P: ¿Y si son distintos k y m?</p> <p>H3: Cero ((varios estudiantes responden con él)).</p> <p>P: Y lo vieron del:::</p> <p>H3: De ahí ((señalando el applet))</p> <p>[VG]-6-[03:01:01]</p>

Parte II. El cálculo de a_k							
Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier a_k , a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
	Equivaler el área bajo la curva de la función $f(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	Equivaler el área bajo la curva de la función $f(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	Equivaler el área bajo la curva de la función $f(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	Equivaler el área bajo la curva de la función $f(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	Equivaler el área bajo la curva de la función $f(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.		Equivaler el área bajo la curva de la función $f(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.
¿Cómo hace?	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Analizando el applet suministrado.	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.

Parte III. El cálculo de b_k							
Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier b_k , a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	Para la función $y = b_k \text{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \text{Sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ el área bajo la curva es $A = \frac{p}{2} b_k$ cuando $k=m$, y cero en otro caso, mientras que para la función $y = b_k \text{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \text{Cos}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es cero para cualquier	En la primera expresión de "y" si $k=m$ el valor del área bajo la curva es $b_k \cdot 3.16$, mientras que en la segunda expresión de "y" si $k=m$ el valor del área bajo la curva es 0. Ahora bien para la primera expresión de "y" si k y m son distintos el valor del área bajo la curva es 0, mientras que en la segunda expresión de "y" si k y m son distintos el área bajo la curva es 0.	Para $y = \text{sen sen}$ el área es $\frac{b_k p}{2} \delta_{km}$. Para $y = \text{sen cos}$ el área es 0 para toda k, m .	En esta ocasión, la función que contiene seno por seno es cero siempre que $m \neq k$ y el área bajo la curva vale $a_k \frac{p}{2}$ cuando $m = n$. El el caso de las funciones que contienen seno por coseno, de nuevo, el valor del área bajo la curva es igual a cero en todos los casos.	Para el caso de $k = m$, $A = \frac{b_k p}{2}$, en el caso en que $k \neq m \forall k, m \in \mathbb{Z}$, $A=0$, donde A es el área bajo las curvas.	[VE3]-6-[02:15:20] M3: Ay va a ser lo mismo, seguramente va a dar. H3: Lo mismo, pero con seno, ¿no? M3: No tiene sentido. Ay, ya sé que voy a hacer ((se va a la Parte II pregunta f)), porque me da weba escribir todo esto otra vez, lo voy a copiar y después le voy a cambiar eso. [VE3]-6-[02:15:55] M3: Es lo mismo, ¿no? (Incomprensible, 1) Se ve claramente.	[VG]-6-[03:12:47] P: Entonces cuando k igual a m , ¿entonces el área da? H3: b_k P: b_k H3: Periodo p entre 2. P: Por p entre 2. Ajá, por el periodo entre 2. ¿Y cuando k es distinto de m ? M3: Cero. P: Cero ¿y en el caso de sen por coseno? H3: Siempre vale cero.
Pregunta b	$b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \text{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$ $\int_0^p f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt = \frac{b_k p}{2} \Rightarrow b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$	$b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \text{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$ $\int_0^p f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt = \frac{b_k p}{2} \Rightarrow b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$	$b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \text{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$	$b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$	$b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \text{Sen}\left(\frac{2\pi k}{p}t\right) dt$	[VE3]-6-[01:31:06]- M3 revisa la identidad $\text{sen}^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2}$ y le indica a M3 que va a valer lo mismo (refiriéndose a lo obtenido en la Parte II).	[VG]-6-[03:13:20]- se pone en común que el razonamiento es similar al utilizado en la Parte II para calcular a_k , con la diferencia de que se debe multiplicar por $\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ para luego integrar de 0 a p . Al final se despeja el valor de b_k para obtener la fórmula solicitada.
Intencionalidad	Se busca que el estudiante utilice estrategias similares a las utilizadas para calcular a_k , y de esta manera concluir que $b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$.						

¿Qué hace?	Observar el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m . Equivaler el área bajo la curva de la función $f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	Observar el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m . Equivaler el área bajo la curva de la función $f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	Observar el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m . Equivaler el área bajo la curva de la función $f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	Observar el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m . Equivaler el área bajo la curva de la función $f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	Observar el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m . Equivaler el área bajo la curva de la función $f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	Observar el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m . Equivaler el área bajo la curva de la función $f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	Observar el valor del área bajo la curva para distintos valores de k y m . Equivaler el área bajo la curva de la función $f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ con el área bajo la curva de su expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.
¿Cómo hace?	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.	Analizando el applet suministrado.	Analizando el applet suministrado. Utilizando la integral definida sobre la igualdad presentada.
Argumentos (A) y confrontaciones (C) presentados.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero.	(A) Se nota a partir del applet, que el área bajo la curva en cada caso es cero. (A) El área bajo la curva de la función $f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva de la expansión en serie trigonométrica de $f(t)$ multiplicada por $\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.

Tarea #6. Etapa 2: Identificación de los invariantes de las acciones

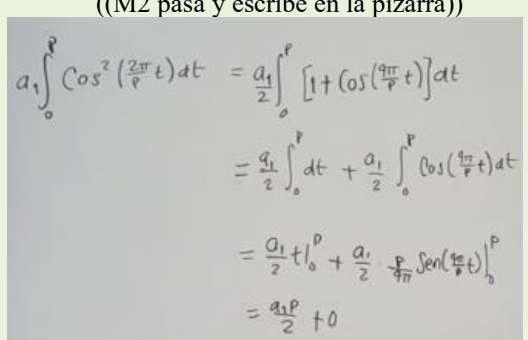
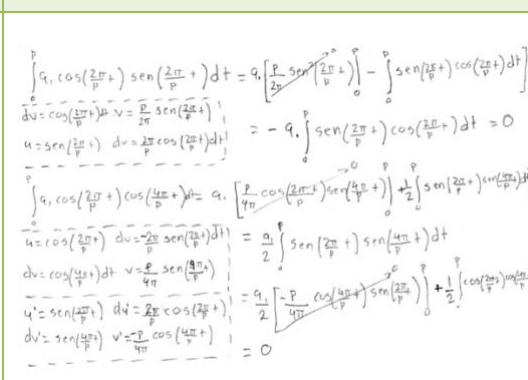
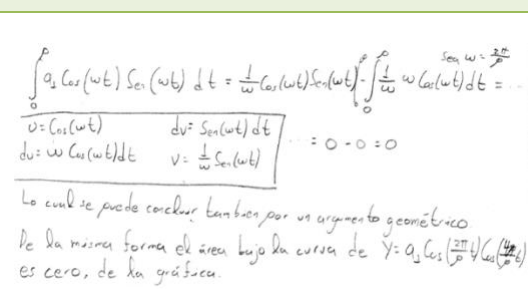
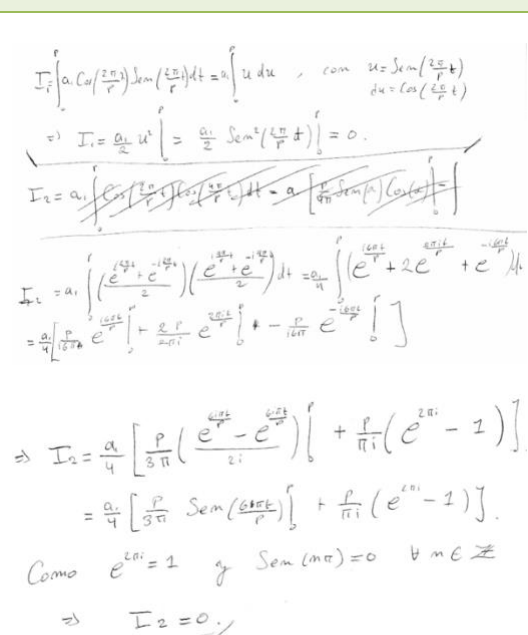
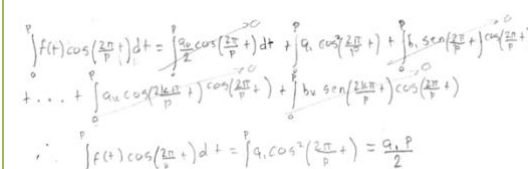
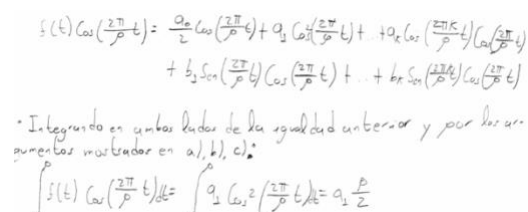
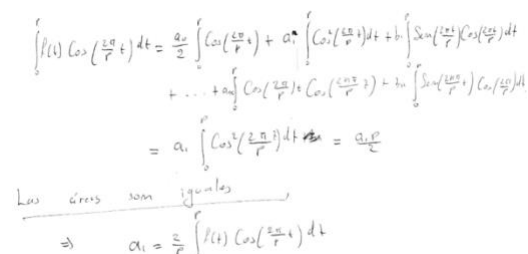
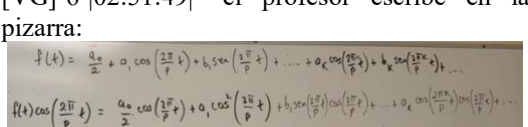

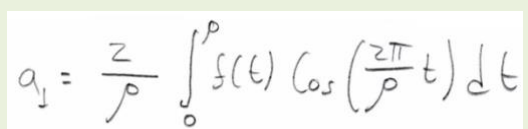
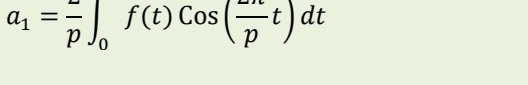
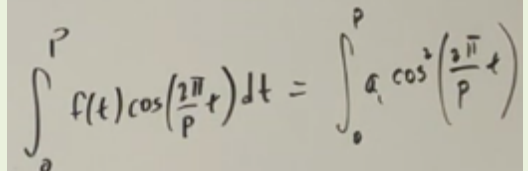
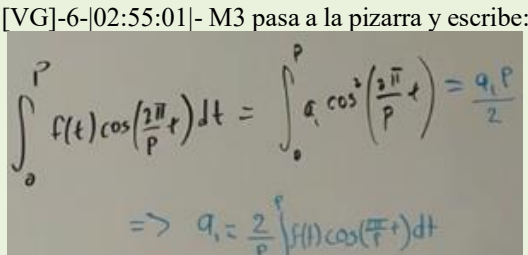
TAREA #6	
Objetivo de la Tarea:	Significar el cálculo de los coeficientes de Fourier utilizando argumentaciones gráficas y geométricas, tal y como lo hizo Fourier.

Parte I. El cálculo de a_0							
Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier a_0 , a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	El valor de cada área sombreada es la misma [VG]-6-[01:21:14]- el profesor pregunta quien dio respuesta solo a partir de ver la gráfica, M2 levanta la mano.	Que ambas regiones en el intervalo de p , sus áreas son 0. Ya que tienen simetría.	Todas las regiones sombreadas tienen la misma área.	Representan áreas bajo la curva semejantes, para saber en que medida se relacionan es necesario conocer la relación entre a_1 y b_1 . Para cada una, es claro de la gráfica que el valor de las áreas es igual.	En cada región se representa un cuarto del periodo. El área bajo la curva de cada una es un cuarto del área bajo la curva de toda la sección.	[VE3]-6-[00:00:36] M3: ¿Cuál es la relación entre las regiones sombreadas de cada gráfica? (8) ((realiza un sonido con la boca)) Tienen la misma área, ¿no? H3: Es la misma área, ¿no? M3: ¡Ajá! Pues sí, ¿no? Pues sí, ¿no? Por que ahí está ((hace un silbido)) H3: Además creo que tienen la misma, la [misma magnitud] M3: [El mismo periodo] [VE3]-6-[01:18:47]- después de la puesta en común M3 agrega a su respuesta "Ya que tienen simetría", y H3 agrega a su respuesta "Para cada una, es claro de la gráfica que el valor de las áreas es igual"	[VG]-6-[01:18:28] H6: (x)Es una proporción. Lo que hice fue integrar. P: ¿Proporción de qué con qué? H6: De la amplitud del área de una región pequeña, una de las (incomprensible, 1) P: Ok, entonces viste una de las coloreadas, ¿una nada más? H6: No, bueno, integré todo. P: Ajá, integraste todo. H6: Ajá, bueno, primero note que son, que están divididas en partes iguales p entre 4, p entre 4, p entre 4, p entre 4. P: Ok. H6: Si saco el área total, bueno eso permite decir que cada uno de esos tiene la misma área. P: Ujú. H6: Entonces calculé el área total de esta ((señalando la curva coseno)), y el área total de esta ((señalando la curva seno)) eso da una expresión, se igualan y al final da llegas a conseguir una proporción. P: Ah, o sea, igualaste el área de esta con la de esta ((refiriéndose a ambas curvas)). H6: No, no las igualé, o sea como tal encontré una proporción, o sea, hay una proporción que siguen. [VG]-6-[01:21:14]- el profesor pregunta quien dio respuesta solo a partir de ver la gráfica, M2 levanta la mano, luego pregunta quien respondió a partir de calcular las integrales y el resto de los estudiantes levantan la mano.
Pregunta b			Hay que hacer varias integrales de la forma $\int_0^p f(x) dx$ $\int_0^p \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x \Big _0^p = \frac{1}{2} p$ $\int_0^p a_n \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt = a_n \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \Big _0^p = a_n \sin(2\pi k) = 0$ $\int_0^p b_n \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt = -b_n \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \Big _0^p = -b_n [\cos(2\pi k) - \cos(0)] = 0$			[VE3]-6-[00:02:02] H3: ¿Cuál es el área bajo la curva de cada término de la serie en un intervalo de tamaño p ? M3: O sea, vamos a calcular primero y_0 , ¿no? H3: Ah::: (6) ¿cómo, cómo? M3: Ajá, mira te da la función y el intervalo en donde la tienes que integrar. (3) aquí	[VG]-6-[01:22:28] P: ¿Para $\frac{a_0}{2}$ cuál es el área? M3: a_0 sobre 2 por p ((junto con ella H1, H3, H6 y M1 dan la respuesta)) H6: Puedo integrar o es un rectángulo.

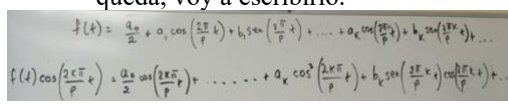
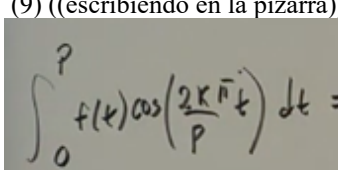
Parte I. El cálculo de a_0							
Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier a_0 , a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
$y = \frac{a_0}{2}$	$A = \frac{a_0}{2} p$ [VG]-6-[01:22:28]- $y = \frac{a_0}{2}$ el profesor pregunta quién usó primero el argumento del rectángulo, M2 levantó la mano.		$A = p \frac{a_0}{2}$ En la hoja hice las integrales	[VG]-6-[01:22:28]- $y = \frac{a_0}{2}$ el profesor pregunta quién usó primero el argumento del rectángulo, H1 levantó la mano, e indicó que terminó calculando la integral porque los demás casos eran más complejos.		$A_0 = \frac{a_0}{2} \int_0^p dt = \frac{a_0}{2} p$	[VG]-6-[01:22:28]- para $y = \frac{a_0}{2}$ el profesor pregunta quién usó primero el argumento del rectángulo, levantaron la mano M1, M2, H1, H6, H7 y H9. Luego preguntó quienes de primero utilizaron el argumento de integrar, M3, H2, H3 y H4 levantaron la mano. [VG]-6-[01:23:49] ¿Cuánto da el área, bajo la curva? (refiriéndose a $y = a_1 \cos(\frac{2\pi}{p}t)$) H3: Cero. P: Cero, ¿por qué? H1: Dos argumentos (x) uno geométrico que son áreas de misma magnitud, pero ajá áreas sobre la curva es positivo y bajo la curva negativa, o ya haciendo integrales.
$y = a_1 \cos(\frac{2\pi}{p}t)$	$A = 0$ (argumentación en la hoja)		$A = 0$ En la hoja hice las integrales		$A_1 = a_1 \int_0^p \cos(\frac{2\pi}{p}t) dt = 0$	[VE3]-6-[00:13:52] M3: Coseno de cero es uno, ¿no? H3: ¡Ajá! M3: Y el coseno de 2π , (5) huy no me voy a matar, este también da cero, ¿no? H3: Sí, da cero, ¿no? M3: Sí, porque esta área menos esta área también da cero. [VE3]-6-[00:42:06] H3: También lo puedes obtener como un rectángulo, de base p y altura a_0 ¡Ujú! H3: Entonces el área vale a_0 sobre 2 por p , y eso es igual a esta integral. M3: ¡Ujú!	[VG]-6-[01:25:59]- el profesor pregunta qué sucede con los demás y los estudiantes responden que lo mismo y que los argumentos son los mismos, uno geométrico y el otro con integrales definidas.
$y = b_1 \sin(\frac{2\pi}{p}t)$	$A = 0$		$A = 0$		$A_2 = b_1 \int_0^p \sin(\frac{2\pi}{p}t) dt = 0$		
$y = a_2 \cos(\frac{4\pi}{p}t)$	$A = 0$		$A = 0$		$A_3 = a_2 \int_0^p \cos(\frac{4\pi}{p}t) dt = 0$		
$y = b_2 \sin(\frac{4\pi}{p}t)$	$A = 0$		$A = 0$		$A_4 = b_2 \int_0^p \sin(\frac{4\pi}{p}t) dt = 0$		
$y = a_3 \cos(\frac{6\pi}{p}t)$	$A = 0$		$A = 0$		$A_5 = a_3 \int_0^p \cos(\frac{6\pi}{p}t) dt = 0$		
$y = b_3 \sin(\frac{6\pi}{p}t)$	$A = 0$		$A = 0$		$A_6 = b_3 \int_0^p \sin(\frac{6\pi}{p}t) dt = 0$		
Intencionalidad	Se busca que el estudiante se percate de que el área bajo la curva de los términos de la serie son todos iguales a cero, salvo el del término constante $\frac{a_0}{2}$, que tiene área $\frac{a_0 p}{2}$ en un intervalo de tamaño p .						
¿Sobre qué objetos lo hace?	Comparar Las regiones sombreadas. Geometrizar La región bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$ en el intervalo $[0, p]$. Calcular El área bajo la curva.	Comparar Las regiones sombreadas. Calcular El área bajo la curva.	Comparar Las regiones sombreadas. Geometrizar La región bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$ en el intervalo $[0, p]$. Calcular El área bajo la curva.	Comparar Las regiones sombreadas. Calcular El área bajo la curva.	Comparar Las regiones sombreadas. Calcular El área bajo la curva.	Comparar Las regiones sombreadas. Geometrizar La región bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$ en el intervalo $[0, p]$. Calcular El área bajo la curva.	Comparar Las regiones sombreadas. Geometrizar La región bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$ en el intervalo $[0, p]$. Calcular El área bajo la curva.
¿Sobre qué relaciones lo hace?	Comparar Las regiones sombreadas tienen la misma área. Geometrizar El área de la región bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$ en el intervalo $[0, p]$ es igual al área del rectángulo cuyos lados miden p y $\frac{a_0}{2}$. Calcular El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada.	Comparar Las regiones sombreadas tienen la misma área. Calcular El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada.	Comparar Las regiones sombreadas tienen la misma área. Geometrizar El área de la región bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$ en el intervalo $[0, p]$ es igual al área del rectángulo cuyos lados miden p y $\frac{a_0}{2}$. Calcular El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada.	Comparar Las regiones sombreadas tienen la misma área. Calcular El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada.	Comparar Las regiones sombreadas tienen la misma área. Calcular El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada.	Comparar Las regiones sombreadas tienen la misma área. Geometrizar El área de la región bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$ en el intervalo $[0, p]$ es igual al área del rectángulo cuyos lados miden p y $\frac{a_0}{2}$. Calcular El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada.	Comparar Las regiones sombreadas tienen la misma área. Geometrizar El área de la región bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$ en el intervalo $[0, p]$ es igual al área del rectángulo cuyos lados miden p y $\frac{a_0}{2}$. Calcular El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada.
¿Por medio de qué lo hace?	Comparar Verbal: El valor de cada área sombreada es la misma. Geometrizar Verbal: [VG]-6-[01:22:28]- $y = \frac{a_0}{2}$ el profesor pregunta quién usó primero el argumento del rectángulo, M2 levantó la mano. Calcular Algebraico: 	Comparar Verbal: Que ambas regiones en el intervalo de p , sus áreas son 0. Ya que tienen simetría. Calcular Algebraico: 	Comparar Verbal: Todas las regiones sombreadas tienen la misma área. Geometrizar Verbal: [VG]-6-[01:22:28]- $y = \frac{a_0}{2}$ el profesor pregunta quién usó primero el argumento del rectángulo, H1 levantó la mano. Calcular Algebraico: 	Comparar Verbal: Para cada una, es claro de la gráfica que el valor de las áreas es igual. Calcular Algebraico: 	Comparar Verbal: El área bajo la curva de cada una es un cuarto del área bajo la curva de toda la sección. Calcular Algebraico: 	Comparar Verbal: Tienen la misma área. Geometrizar Verbal: [VE3]-6-[00:02:20] M3: Ajá, mira te da la función y el intervalo en donde la tienes que integrar, (3) aquí sería como un rectángulo. Entonces sería la integral. Calcular Verbal: [VE3]-6-[00:42:06] H3: También lo puedes obtener como un rectángulo, de base p y altura a_0 M3: ¡Ujú! H3: Entonces el área vale a_0 sobre 2 por p , y eso es igual a esta integral. M3: ¡Ujú!	Comparar Verbal: [VG]-6-[01:18:50] H6: Ajá, bueno, primero noté que son, que están divididas en partes iguales p entre 4, p entre 4, p entre 4, p entre 4. Ok. H6: Si saco el área total, bueno eso permite decir que cada uno de esos tiene la misma área. Geometrizar Verbal: [VG]-6-[01:22:28] P: ¿Para $\frac{a_0}{2}$ cuál es el área? M3: a_0 sobre 2 por p (junto con ella H1, H3, H6 y M1 dan la respuesta) H6: Puedo integrar o es un rectángulo. Calcular Verbal: [VG]-6-[01:23:49] P: ¿Cuánto da el área, bajo la curva? (refiriéndose a $y = a_1 \cos(\frac{2\pi}{p}t)$) H3: Cero. P: Cero, ¿por qué? H1: Dos argumentos (x) uno geométrico que son áreas de misma magnitud, pero ajá áreas sobre la curva es positivo y bajo la curva negativa, o ya haciendo integrales.
Invariantes de Acciones	<ul style="list-style-type: none"> - Las regiones sombreadas tienen la misma área. - El área de la región bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$ en el intervalo $[0, p]$ es igual al área del rectángulo de cuyos lados miden p y $\frac{a_0}{2}$. - El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada. - El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual a la suma de las áreas de las regiones sobre el eje X, menos la suma de las áreas de las regiones bajo el eje X, en ese intervalo. 						
Pregunta c	Las áreas son iguales.					[VE3]-6-[00:21:51]	[VG]-6-[01:26:36] M2: Son iguales

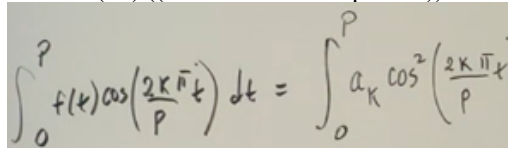
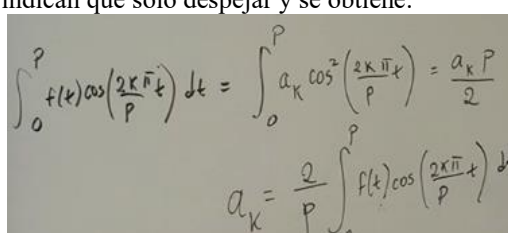
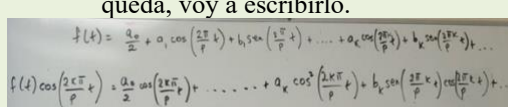
Parte I. El cálculo de a_0							
Intención:	Significar el cálculo del coeficiente de Fourier a_0 , a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.						
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta d			$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^3 a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + \sum_{k=1}^3 b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ <p>Y las áreas de los términos trigonométricos son 0 ya que se anulan por simetría al sumar las áreas superiores y restar las inferiores.</p>			<p>M3: Pues solamente sería el área de esta, ¿no? Porque todas las demás áreas van a ser cero.</p> <p>H3: Pero no sé si te pregunta por este $f(t)$, porque todas las demás son y.</p> <p>M3: No:::, o sea sí, pero son componentes en X y en Y.</p> <p>H3: Ya vi, la siguien- no, la secuencia muestra los términos de la serie (3) ¿a poco valen lo mismo?</p> <p>M3: ¿Qué? Esta y esta.</p> <p>H3: Pos al parecer, ¿no? Tiene sentido por que al sumar esta cosa (hace un sonido para expresarse))</p> <p>[VE3]-6-[00:23:00]</p> <p>M3: Aquí dice explique su respuesta de forma geométrica. Eso no lo wacho, es que de manera algebraica el $f(t)$ se escribe como $\frac{a_0}{2}$ más la sumatoria, ¿no? Pero esa sumatoria suma dio A cero.</p> <p>H3: Esa sumatoria vale cero.</p> <p>M3: Ajá, eso es por que siempre están en cero entonces no importa cuántos existen, van a seguir valiendo cero, entonces solamente el área sería la integral de esta.</p> <p>H3: Pero de forma geométrica.</p> <p>M3: Como (incomprensible, 1)</p> <p>H3: ¿Qué sería eso? Sería como dibujarlo, ¿no?</p> <p>[VE3]-6-[00:26:19]</p> <p>H3: Eso significa que el área bajo la curva, de que esta área es igual a esta. Ese sería el argumento geométrico, creo yo.</p> <p>M3: Tiene sentido.</p>	<p>P: Ajá ¿por qué?</p> <p>H4: Se supone que $f(t)$ es la, con expansión de senos y cosenos, bueno esta expandida en senos y cosenos.</p> <p>P: Ujú.</p> <p>H4: Entonces integramos en un ciclo y todas la integrales son cero, menos (x)la primera [la de a_0]. Entonces ya solo queda la integral de $f(t)$ es igual a a_0 por p entre 2. Y geoméricamente, pues ya vimos que todas las demás son cero, ¿no? Porque simétricamente se van anulando sus áreas y solo queda que el área del rectángulo es igual al área de la curva $f(t)$.</p>
Intencionalidad	Se pretende que el estudiante utilice argumentos geométricos y sus conocimientos sobre integral definida para decir que el área bajo la curva de la función $f(t)$ es igual a la suma de las áreas bajo la curva de los términos de la serie. De esta manera el estudiante puede construir la fórmula para el cálculo con un significado asociado a la noción de área bajo la curva.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	<p>Equivaler</p> <p>La igualdad:</p> $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	<p>Equivaler</p> <p>La igualdad:</p> $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	<p>Equivaler</p> <p>La igualdad:</p> $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	<p>Equivaler</p> <p>La igualdad:</p> $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	<p>Equivaler</p> <p>La igualdad:</p> $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	<p>Equivaler</p> <p>La igualdad:</p> $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	<p>Equivaler</p> <p>La igualdad:</p> $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$
¿Sobre qué relaciones lo hace?	<p>Equivaler</p> <p>El área bajo la curva $y = f(t)$ es igual al área bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$, en un intervalo de tamaño p.</p>	<p>Equivaler</p> <p>El área bajo la curva $y = f(t)$ es igual al área bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$, en un intervalo de tamaño p.</p>	<p>Equivaler</p> <p>El área bajo la curva $y = f(t)$ es igual al área bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$, en un intervalo de tamaño p.</p>	<p>Equivaler</p> <p>El área bajo la curva $y = f(t)$ es igual al área bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$, en un intervalo de tamaño p.</p>	<p>Equivaler</p> <p>El área bajo la curva $y = f(t)$ es igual al área bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$, en un intervalo de tamaño p.</p>	<p>Equivaler</p> <p>El área bajo la curva $y = f(t)$ es igual al área bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$, en un intervalo de tamaño p.</p>	<p>Equivaler</p> <p>El área bajo la curva $y = f(t)$ es igual al área bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$, en un intervalo de tamaño p.</p>
¿Por medio de qué lo hace?	<p>Equivaler</p> <p>Verbal: Las áreas son iguales.</p> <p>Iconico:</p> <p>Algebraico:</p> $a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) dt$	<p>Equivaler</p> <p>Verbal/Iconico/Algebraico:</p> <p>En efecto el área de $f(t)$ y de $y = \frac{a_0}{2}$ son la misma ya que si notamos el caso donde:</p> <p>Algebraico:</p> <p>Se tiene que $\frac{a_0}{2} p = \int_0^p f(t) dt \Rightarrow a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) dt$</p>	<p>Equivaler</p> <p>Verbal: Las áreas son iguales, ya que los términos trigonométricos se anulan por simetría.</p> <p>Iconico/Algebraico:</p> <p>Algebraico:</p> $a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) dt$	<p>Equivaler</p> <p>Verbal/Iconico/Algebraico:</p> <p>Notamos que el área bajo la curva de $y = \frac{a_0}{2}$ es igual a la de la función $f(t)$.</p> <p>En efecto, en períodos de generalidad, considero $y = a_0 \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$.</p> <p>El área bajo la curva puesta en color azul, no es el mismo valor que el área sombreada en color rojo. Esto permite observar que el área bajo la curva total de la función $f(t)$ es el mismo que el área bajo la curva de $y = \frac{a_0}{2}$.</p> <p>Algebraico:</p> <p>Se tiene que $\frac{a_0}{2} p = \int_0^p f(t) dt \Rightarrow a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) dt$</p>	<p>Equivaler</p> <p>Algebraico:</p> <p>Si $f(t)$ es una serie con la fórmula de Fourier:</p> $f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi}{p}t\right) + b_2 \sin\left(\frac{4\pi}{p}t\right) + \dots$ <p>Integramos en un intervalo de longitud p:</p> $\int_0^p f(t) dt = \int_0^p \left[\frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + \dots \right] dt$ <p>Geoméricamente tenemos lo siguiente:</p> <p>Iconico:</p>	<p>Equivaler</p> <p>Verbal: [VE3]-6-[00:21:51]</p> <p>M3: Pues solamente sería el área de esta, ¿no? Porque todas las demás áreas van a ser cero.</p> <p>Verbal: [VE3]-6-[00:23:00]</p> <p>M3: Aquí dice explique su respuesta de forma geométrica. Eso no lo wacho, es que de manera algebraica el $f(t)$ se escribe como $\frac{a_0}{2}$ más la sumatoria, ¿no? Pero esa sumatoria suma dio A cero.</p> <p>H3: Esa sumatoria vale cero.</p> <p>M3: Ajá, eso es por que siempre están en cero entonces no importa cuántos existen, van a seguir valiendo cero, entonces solamente el área sería la integral de esta.</p> <p>Algebraico:</p> $\int_0^p f(t) dt = \int_0^p \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \right] dt$	
Invariantes de Acciones	- El área bajo la curva $y = f(t)$ es igual al área bajo la curva $y = \frac{a_0}{2}$, en un intervalo de tamaño p.						


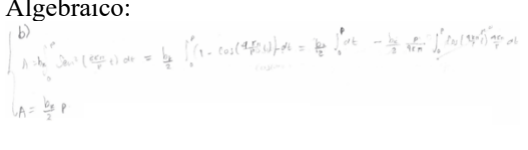
Parte II. El cálculo de a_k							
Intención:	Significar el cálculo del coeficiente de Fourier a_k , a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.						
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	<p>Las áreas sombreadas son iguales.</p> <p>El área bajo la curva de la función $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ es $A = \frac{a_1 p}{2}$</p>	<p>El área es la misma. El valor de la integral esta en la tarea 6, parte 2, hoja 11.</p>	<p>Son iguales las área por simetría. $A = \frac{a_1 p}{2}$</p>	<p>Tienen el mismo valor.</p>	<p>La suma de las áreas del doble asurado es la misma que la suma de las áreas del asurado simple.</p>	<p>[VE3]-6-[01:28:48]</p> <p>M3: ¿Cuál es la relación entre las áreas sombreadas? Eh::: el área es la misma, ¿no?</p> <p>[VE3]-6-[01:29:41]</p> <p>M3: ¿Cuál es el valor del área bajo la cur-? Uh::: a ver, vamos a integrar.</p> <p>[VE3]-6-[01:31:06]- entre M3 y H3 discuten la resolución algebraica-analítica de la integral, primero consideran aplicar el método de integración por partes para tratar de observar una integral cíclica. Se deciden al final por utilizar la identidad $\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$ para reescribir la expresión y calcular la integral de forma directa, concluyendo que el área bajo la curva es igual a $\frac{a_1 p}{2}$.</p>	<p>[VG]-6-[02:43:02]</p> <p>P: ¿Cuál es la relación entre las áreas sombreadas? Acá está esta rayadita así y la cuadrícula, ¿verdad? Entonces cuál es la relación.</p> <p>H4: La cuadrícula es la misma que la rayadita.</p> <p>P: Son lo mismo, ¿verdad? (los estudiantes asientan con la cabeza) Ahí lo pueden ver, ¿verdad? Como que este con este es uno de estos, ¿verdad? ((señalando las regiones sombreadas))</p> <p>H6: Por simetría.</p> <p>P: Y este es el otro, por simetría, ¿verdad? Y luego pregunta cuál es el valor del área bajo la curva y igual a_1 coseno cuadrado, en un intervalo de longitud p.</p> <p>H4: a_1 por $\frac{p}{2}$.</p> <p>P: a_1 por $\frac{p}{2}$ y cómo lo:::</p> <p>M2: Integrando.</p> <p>Algebraico:</p> $\int_0^p f(t) dt = \int_0^p \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \right] dt$

Parte II. El cálculo de a_k																			
Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier a_k , a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.																			
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común												
							<p>P: Hicieron la integral ((los estudiantes asienten con la cabeza)) de coseno cuadrado ¿Quién quiere venir a hacerla? ((M2 pasa y escribe en la pizarra))</p>  <p>[VG]-6-[02:45:19]- M2 explica que utilizó la identidad $\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$ para resolver la integral, además explica el resto de la solución.</p> <p>[VG]-6-[02:45:54] P: ¿Todos lo hicieron de esa manera? H9: También se::, si es por simetría queda el área igual a la misma, entonces calcular nada más el área del rectángulo y lo dividís entre 2.</p>												
Pregunta b	Por simetría, el área bajo la curva en cada caso es cero.		En cada caso el área es 0.			<p>[VE3]-6-[01:36:26]- M3 y H3 empiezan la resolución algebraica-analítica de la integral, al parecer de forma individual.</p> <p>[VE3]-6-[01:39:43] M3: A mí no me daba cero. H3: ¿La de coseno por seno? Mira es esto, esto y esto ((señalando las regiones de la gráfica)). El argumento lo de los valores geométricos se ve que da cero. M3: Déjame hacerlo (incomprensible, 1) H3: "M3" (se refiere a M3 por su nombre) checa la grafiquirri. M3: Sí, ahorita veo la grafiquirri (3) sí, sí da cero. H3: (Incomprensible, 2) es que mira, aquí también se ve, ¿no? Aquí está ((se escucha un sonido como señalando en la pantalla de la computadora)) M3: Sí, esa madre. H3: Y la otra también ((se escucha un sonido como señalando en la pantalla de la computadora))</p>	<p>[VG]-6-[02:48:23] H3: Cero. P: Cero ¿qué estrategia usaron? H1: Integrales ((varios estudiantes responden a la vez)). P: Integraron directo, ¿verdad? ¿Cómo lo pueden ver con la gráfica?</p> <p>[VG]-6-[02:48:33]- los estudiantes, varios a la vez, explica que se pueden hacer corresponder las regiones para darse cuenta que el área bajo la curva es igual a cero, en ambos casos.</p>												
Pregunta c	Según la applet, y la función $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, el área bajo la curva es $A = a_1 \frac{p}{2}$ para el caso $k=1$, luego, para $k>1$, el área es cero. Mientras que para la función $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ el área bajo la curva es cero para todo k .	<p>• Para $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ donde $k=1$ el área bajo la curva es $\frac{a_1 p}{2}$ pero para $k>1$ el área bajo la curva es 0</p> <p>• Para $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ $\forall k=1, 2, 3, \dots$ el área bajo la curva es 0</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>k</th> <th>cos cos</th> <th>cos sen</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>$\frac{a_1 p}{2}$</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	k	cos cos	cos sen	1	$\frac{a_1 p}{2}$	0	2	0	0	3	0	0	En todos los casos valen cero, excepto por el área bajo la curva de $y = a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, este razonamiento incluye literalmente a todos los demás términos.	De acuerdo al Applet, para $k \neq 1$ en los términos del Cose, todas las áreas son cero. Para la gráfica de Seno y Coseno, las áreas son cero $\forall k \in \mathbb{Z}$	<p>[VE3]-6-[01:44:39]- Se ve en la pantalla de H3 que para responder primero manipula el applet variando los valores de k y en algunos casos se nota como el cursor va sobre las áreas sombreadas comparando unas con otras.</p> <p>[VE3]-6-[01:46:55] M3: Todos valen cero. H3: Ah no manches, es que por ejemplo, esta ((se ve en la pantalla de M3 que colocan $k=1$)), esta área no vale cero. M3: ¿Porqué no vale cero? H3: Mira= M3: =Ah:: por que esta no tiene parte negativa. En todas las demás ya sí. (8) ((se ve en la pantalla de H3 que cambia los valores de k)) H3: Ah sí es cierto, mira en esta ((se refiere a la curva se coseno por seno)) también. M3: No esa desde ahí ((se ve en la pantalla de H3 que colocan $k=1$)) ya daba cero.</p>	<p>[VG]-6-[02:49:53] H6: Pues, cuando k es igual a 1 da lo mismo, a_1 sobre 2 por p. Y para k distinto, bueno los demás k esos son cero. En P: Todos son cero. H6: En el caso de la morada es cero para cualquier k.</p> <p>[VG]-6-[02:50:31] P: ¿Calcularon las integrales? H6: No ((la mayoría responde lo mismo)). P: ¿O lo vieron con el:: H3: Lo vimos de ahí ((señalando el applet)).</p>
k	cos cos	cos sen																	
1	$\frac{a_1 p}{2}$	0																	
2	0	0																	
3	0	0																	
Pregunta d	Las áreas son iguales		Las áreas son iguales. Ya que los demás términos de la expansión trigonométrica se anulan.			<p>[VE3]-6-[01:51:57] M3: Estas se van a ir a cero, ¿no? H3: Todas menos esta. M3: Menos esta y la de a_0 dos. H3: Esa tampoco. M3: Ah no, sí, esta también vale cero, por que es el coseno de:: H3: De una función entre el periodo, ¿no? H3: Digo, de un coseno en su periodo. M3: A parte no hemos calculado el coseno de esta, ¿no? H3: ¿A poco? M3: Sí, a bueno eso da cero.</p> <p>[VE3]-6-[01:51:57] M3: Estas se van a ir a cero, ¿no? H3: Todas menos esta.</p>	<p>[VG]-6-[02:51:49]- el profesor escribe en la pizarra:</p>  <p>[VG]-6-[02:53:18] P: A partir de eso, dice ¿cuál es la relación entre el área bajo la curva de esta ((señalando el $f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$)) y el área bajo la curva de esta ((señalando el $a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$))? M2: Es la misma ((varios alumnos responden junto con ella)). P: Es la misma, ¿por qué? H6: Porque las áreas se hacen cero. H4: Si uno los integra, se van anulando los términos que no tienen coseno cuadrado. O sea, todos los que no tiene coseno cuadrado se anulan, por todo lo que ya vimos arriba.</p>												
Pregunta e	$a_1 = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) dt$		$a_1 = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) dt$			No hubo interacción al responder esta pregunta.	<p>[VG]-6-[02:51:49]- el profesor indica que a partir de la pregunta anterior se tiene lo siguiente:</p>  <p>[VG]-6-[02:55:01]- M3 pasa a la pizarra y escribe:</p>  <p>[VG]-6-[02:55:53]- el profesor plantea la pregunta de cómo se interpreta el coeficiente a_1 geométricamente.</p> <p>[VG]-6-[02:57:08] H4: Con las gráficas. P: Ujú, ¿qué? H4: Por ejemplo, tendríamos la gráfica de $f(t)$ por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ y medimos el área de</p>												

Parte II. El cálculo de a_k																			
Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier a_k , a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.																			
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común												
Intencionalidad	Se espera que el estudiante signifique geoméricamente la ortogonalidad de las funciones trigonométricas y que utilice este hecho para calcular el valor de a_1 pues, será capaz de identificar que la multiplicación de $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ por cualquier otro término de la serie —excepto el término $a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ — tendrá área bajo la curva igual a cero, y a partir de ellos que el valor de $\frac{a_1 p}{2}$ corresponde al área bajo la curva que resulta de multiplicar la función $f(t)$ por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$. Lo que permite determinar el valor de a_1 en términos de $f(t)$, la función conocida.																		
¿Sobre qué objetos lo hace?	<p>Comparar</p> <p>Las regiones sombreadas.</p> <p>Calcular</p> <p>El área bajo la curva.</p> <p>Observar</p> <p>Las gráficas para distintos valores de k en los applets.</p> <p>Equivaler</p> <p>La igualdad:</p> $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	<p>Comparar</p> <p>Las regiones sombreadas.</p> <p>Calcular</p> <p>El área bajo la curva.</p> <p>Observar</p> <p>Las gráficas para distintos valores de k en los applets.</p> <p>Equivaler</p> <p>La igualdad:</p> $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	<p>Comparar</p> <p>Las regiones sombreadas.</p> <p>Calcular</p> <p>El área bajo la curva.</p> <p>Observar</p> <p>Las gráficas para distintos valores de k en los applets.</p> <p>Equivaler</p> <p>La igualdad:</p> $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	<p>Comparar</p> <p>Las regiones sombreadas.</p> <p>Calcular</p> <p>El área bajo la curva.</p> <p>Observar</p> <p>Las gráficas para distintos valores de k en los applets.</p> <p>Equivaler</p> <p>La igualdad:</p> $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	<p>Comparar</p> <p>Las regiones sombreadas.</p> <p>Calcular</p> <p>El área bajo la curva.</p> <p>Observar</p> <p>Las gráficas para distintos valores de k en los applets.</p> <p>Equivaler</p> <p>La igualdad:</p> $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	<p>Comparar</p> <p>Las regiones sombreadas.</p> <p>Calcular</p> <p>El área bajo la curva.</p> <p>Observar</p> <p>Las gráficas para distintos valores de k en los applets.</p> <p>Equivaler</p> <p>La igualdad:</p> $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	<p>Comparar</p> <p>Las regiones sombreadas.</p> <p>Geometrizar</p> <p>La región bajo la curva $y = a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ en el intervalo $[0, p]$.</p> <p>Calcular</p> <p>El área bajo la curva.</p> <p>Observar</p> <p>Las gráficas para distintos valores de k en los applets.</p> <p>Equivaler</p> <p>La igualdad:</p> $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$												
¿Sobre qué relaciones lo hace?	<p>Comparar</p> <p>Las regiones sombreadas tienen la misma área.</p> <p>Calcular</p> <p>El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada.</p> <p>El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual a la suma de las áreas de las regiones sobre el eje X, menos la suma de las áreas de las regiones bajo el eje X, en ese intervalo.</p> <p>Observar</p> <p>Cuando $k = 1$, la curva $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula. cuando $k > 1$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k.</p> <p>Equivaler</p> <p>El área bajo la curva $y = f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.</p>	<p>Comparar</p> <p>Las regiones sombreadas tienen la misma área.</p> <p>Calcular</p> <p>El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada.</p> <p>Observar</p> <p>Cuando $k = 1$, la curva $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula. cuando $k > 1$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k.</p> <p>Equivaler</p> <p>El área bajo la curva $y = f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.</p>	<p>Comparar</p> <p>Las regiones sombreadas tienen la misma área.</p> <p>Calcular</p> <p>El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada.</p> <p>Observar</p> <p>Cuando $k = 1$, la curva $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula. cuando $k > 1$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k.</p> <p>Equivaler</p> <p>El área bajo la curva $y = f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.</p>	<p>Comparar</p> <p>Las regiones sombreadas tienen la misma área.</p> <p>Calcular</p> <p>El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada.</p> <p>Observar</p> <p>Cuando $k = 1$, la curva $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula. cuando $k > 1$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k.</p> <p>Equivaler</p> <p>El área bajo la curva $y = f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.</p>	<p>Comparar</p> <p>Las regiones sombreadas tienen la misma área.</p> <p>Calcular</p> <p>El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada.</p> <p>Observar</p> <p>Cuando $k = 1$, la curva $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula. cuando $k > 1$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k.</p> <p>Equivaler</p> <p>El área bajo la curva $y = f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.</p>	<p>Comparar</p> <p>Las regiones sombreadas tienen la misma área.</p> <p>Calcular</p> <p>El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada.</p> <p>Observar</p> <p>Cuando $k = 1$, la curva $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula. cuando $k > 1$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k.</p> <p>Equivaler</p> <p>El área bajo la curva $y = f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.</p>	<p>Comparar</p> <p>Las regiones sombreadas tienen la misma área.</p> <p>Geometrizar</p> <p>La región bajo la curva $y = a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ en el intervalo $[0, p]$ es igual a la mitad del área del rectángulo cuyos lados miden p y a_1.</p> <p>Calcular</p> <p>El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual a la suma de las áreas de las regiones sobre el eje X, menos la suma de las áreas de las regiones bajo el eje X, en ese intervalo.</p> <p>Observar</p> <p>Cuando $k = 1$, la curva $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula. cuando $k > 1$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k.</p> <p>Equivaler</p> <p>El área bajo la curva $y = f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p.</p>												
¿Por medio de qué lo hace?	<p>Comparar</p> <p>Verbal: Las áreas sombreadas son iguales.</p> <p>Calcular</p> <p>Verbal: Por simetría, el área bajo la curva en cada caso es cero.</p> <p>Algebraico:</p> <p>Observar</p> <p>Verbal: Según el applet, para la función $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, el área bajo la curva es $A = a_1 \frac{p}{2}$ para el caso $k=1$, luego, para $k>1$, el área es cero. Mientras que para la función $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ el área bajo la curva es cero para todo k.</p> <p>Equivaler</p> <p>Verbal: Las áreas son iguales.</p> <p>Algebraico:</p>	<p>Comparar</p> <p>Verbal: El área es la misma.</p> <p>Calcular</p> <p>Algebraico:</p> <p>Observar</p> <p>Verbal:</p> <ul style="list-style-type: none"> Para $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ donde $k=1$ su área bajo la curva es de $\frac{p a_1}{2}$ pero para $k>1$ su área bajo la curva es 0 Para $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ $\forall k=1, 2, 3, \dots$ su área bajo la curva es 0 <p>Equivaler</p> <p>Algebraico:</p>	<p>Comparar</p> <p>Verbal: Las áreas sombreadas son iguales, por simetría.</p> <p>Calcular</p> <p>Algebraico:</p> <p>Observar</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>k</th> <th>cos cos</th> <th>cos sen</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>$\frac{a_1 p}{2}$</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table> <p>Equivaler</p> <p>Verbal: Las áreas son iguales. Ya que los demás términos de la expansión trigonométrica se anulan.</p>	k	cos cos	cos sen	1	$\frac{a_1 p}{2}$	0	2	0	0	3	0	0	<p>Comparar</p> <p>Verbal: Tienen el mismo valor.</p> <p>Calcular</p> <p>Algebraico:</p> <p>Observar</p> <p>Verbal: En todos los casos valen cero, excepto por el área bajo la curva de $y = a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, este razonamiento incluye literalmente a todos los demás términos.</p> <p>Equivaler</p> <p>Algebraico:</p>	<p>Comparar</p> <p>Verbal: La suma de las áreas del doble achurado es la misma que la suma de las áreas del achurado simple.</p> <p>Calcular</p> <p>Algebraico:</p> <p>Observar</p> <p>Verbal: De acuerdo con el applet, para $k \neq 1$ en los términos del coseno, todas las áreas son cero. Para la gráfica de seno y coseno, las áreas son cero $\forall k \in \mathbb{Z}$.</p> <p>Equivaler</p> <p>Algebraico:</p>	<p>Comparar</p> <p>Verbal: [VE3]-6-[01:28:48]</p> <p>M3: ¿Cuál es la relación entre las áreas sombreadas? Eh::: el área es la misma, ¿no?</p> <p>Calcular</p> <p>Verbal: [VE3]-6-[01:29:41]</p> <p>M3: ¿Cuál es el valor del área bajo la cur-? Uh::: a ver, vamos a integrar.</p> <p>Verbal: [VE3]-6-[01:39:43]</p> <p>M3: A mi no me daba cero.</p> <p>H3: ¿La de coseno por seno? Mira es esto, esto, esto y esto (señalando las regiones de la gráfica). El argumento lo de los valores geométricos se ve que da cero.</p> <p>Observar</p> <p>Verbal: [VE3]-6-[01:46:55]</p> <p>M3: Todos valen cero.</p> <p>H3: Ah no manches, es que por ejemplo, esta ((se ve en la pantalla de M3 que colocan $k = 1$)), esta área no vale cero.</p> <p>M3: ¿Porqué no vale cero?</p> <p>H3: Mira=</p> <p>M3: =Ah::: por que esta no tiene parte negativa. En todas las demás ya sí.</p> <p>H3: ((se ve en la pantalla de H3 que cambia los valores de k))</p> <p>H3: Ah sí es cierto, mira en esta ((se refiere a la curva se coseno por seno)) también.</p> <p>M3: No esa desde ahí ((se ve en la pantalla de H3 que colocan $k = 1$)) ya daba cero.</p> <p>Equivaler</p> <p>Verbal: [VE3]-6-[01:51:57]</p> <p>M3: Estas se van a ir a cero, ¿no?</p> <p>H3: Todas menos esta.</p> <p>M3: Menos esta y la de a_0 dos.</p> <p>H3: Esa tampoco.</p> <p>M3: Ah no, sí, esta también vale cero, por que es el coseno de:::</p> <p>H3: De una función entre el periodo, ¿no?</p> <p>M3: Digo, de un coseno en su periodo.</p> <p>M3: A parte no hemos calculado el coseno de esta, ¿no?</p> <p>H3: ¿A poco?</p> <p>M3: Sí, a bueno eso da cero.</p>	<p>Comparar</p> <p>Verbal: [VG]-6-[02:43:02]</p> <p>P: ¿Cuál es la relación entre las áreas sombreadas? Acá está esta rayadita así y la cuadrículada, ¿verdad? Entonces cuál es la relación.</p> <p>H4: La cuadrículada es la misma que la rayadita.</p> <p>P: Son lo mismo, ¿verdad? (los estudiantes asienten con la cabeza) Ahí lo pueden ver, ¿verdad? Como que este con este es uno de estos, ¿verdad? (señalando las regiones sombreadas)</p> <p>H6: Por simetría.</p> <p>Geometrizar</p> <p>Verbal: [VG]-6-[02:45:54]</p> <p>P: ¿Todos lo hicieron de esa manera?</p> <p>H9: También se:::, si es por simetría queda el área igual a la misma, entonces calcular nada más el área del rectángulo y lo dividís entre 2.</p> <p>Calcular</p> <p>Verbal: [VG]-6-[02:43:25]</p> <p>P: ¿Cuál es el valor del área bajo la curva y igual a_1 coseno cuadrado, en un intervalo de longitud p?</p> <p>H4: a_1 por $\frac{p}{2}$.</p> <p>P: a_1 por $\frac{p}{2}$ y cómo lo:::</p> <p>M2: Integrando.</p> <p>Algebraico:</p> <p>Verbal: [VG]-6-[02:48:23]</p> <p>H3: Cero.</p> <p>P: Cero ¿qué estrategia usaron?</p> <p>H1: Integrales ((varios estudiantes responden a la vez)).</p> <p>Verbal: [VG]-6-[02:48:33]- los estudiantes, varios a la vez, explica que se pueden hacer corresponder las regiones para darse cuenta que el área bajo la curva es igual a cero, en ambos casos.</p> <p>Observar</p> <p>Verbal: [VG]-6-[02:49:53]</p> <p>H6: Pues, cuando k es igual a 1 da lo mismo, a_1 sobre 2 por p. Y para k distinto, bueno los demás k esos son cero. En</p> <p>P: Todos son cero.</p> <p>H6: En el caso de la morada es cero para cualquier k.</p>
k	cos cos	cos sen																	
1	$\frac{a_1 p}{2}$	0																	
2	0	0																	
3	0	0																	

Parte II. El cálculo de a_k							
Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier a_k , a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Invariantes de Acciones	<ul style="list-style-type: none"> - Las regiones sombreadas tienen la misma área. - El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual al valor de la integral definida sobre ese intervalo de la curva dada. - El valor del área bajo la curva en un intervalo de tamaño p es igual a la suma de las áreas de las regiones sobre el eje X, menos la suma de las áreas de las regiones bajo el eje X, en ese intervalo. - Cuando $k = 1$, la curva $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva nula. cuando $k > 1$ su área bajo la curva es 0. - El área bajo la curva $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k. - El área bajo la curva $y = f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p. 						
Pregunta f	<p>Para la función $y = a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \cos\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$, según la applet, el área bajo la curva es $A = a_k \frac{p}{2}$ cuando $k=m$, y cero en cualquier otro caso.</p> <p>Para la función $y = a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \sin\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$, el área bajo la curva es cero en cualquier caso.</p>	<p>En la primera expresión de "y" si $k=m$ el valor del área bajo la curva es $a_k \frac{p}{2}$. 1, mientras que en la segunda expresión de "y" si $k \neq m$ el valor del área bajo la curva es 0.</p> <p>Ahora bien para la primera expresión de "y" si k y m son distintos el valor del área bajo la curva es 0, mientras que en la segunda expresión de "y" si k y m son distintos el área bajo la curva es 0.</p>	<p>En y cos cos el área es $\frac{a_k p}{2}$ si $m=k$ y 0 si m diferente de k.</p> <p>En y sen cos el área siempre es 0 para todo m y k.</p>	<p>La función que contiene el seno por el coseno siempre tiene un área de bajo de ella igual a cero en un periodo.</p> <p>La función coseno por coseno tiene un área bajo la curva igual a cero si $m \neq n$.</p> <p>Solo cuando $m = n$ el área bajo la curva tiene un valor distinto de cero, más aun, para cualquier $k \in \mathbb{N}$ el área bajo la curva queda dada por $a_k \frac{p}{2}$.</p>	<p>Cuando $k = m \forall k, m \in \mathbb{Z}$, el área es $A = \frac{a_k p}{2}$, en el caso contrario $k \neq m$, $A = 0$, siendo A el área bajo las curvas</p>	<p>[VE3]-6-[01:59:39]- Se ve en las pantallas de M3 y H3 que para responder primero manipulan el applet variando los valores de m y k.</p> <p>[VE3]-6-[02:00:22]</p> <p>H3: Cuando son iguales eso, solo cuando no se vale tu camote ((refiriéndose al valor de k)), ¿no? Cuando son distintas siempre vale cero.</p> <p>M3: Ah no ma-, a ver, dices tu que cuando son iguales es cuando sí va, hay valor principal, ¿no? No ma-, y ya ¿y todas valen 2.1 te has dado cuenta?</p> <p>H3: ¡Ajá::! Valen lo mismo, entonces valen lo mismo que la que habíamos calculado, ¿no? Ah, sabiendo que (incomprensible, 3)</p> <p>M3: O sea, podríamos decir que, ah bueno, pero ¿y de esto? ((se refiere a las funciones que son coseno por seno))</p> <p>[VE3]-6-[02:01:12]</p> <p>H3: Para la del coseno por seno, siempre están, ese siempre vale cero.</p> <p>M3: Sí.</p> <p>[VE3]-6-[02:05:10]</p> <p>H3: Pero:: por ejemplo cuando k tenga un valor mayor que 1, esto valga exactamente a_k's por p's.</p> <p>M3: ¿En dónde?</p> <p>H3: Aquí. (Incomprensible, 1) Cuando son iguales, si vale lo mismo, pero estas viendo la pura cantidad, te falta multiplicar por la amplitud.</p> <p>M3: Pero es una constante. Cuando integras al fina de cuentas la amplitud siempre la sacas.</p> <p>H3: Entonces si queda (x)el coeficiente a subíndice k por p sobre 2, ¿no?</p> <p>M3: Pues sí, es una constante esto. Acuérdate que la, que integrar es una transformada bilineal.</p> <p>H3: O sea, sí, sí, sí, pero lo que digo es que integrando coseno cuadrado de cualquier cosa siempre te va a dar esto, p sobre 2. No lo wacho. Eso es lo que no wacho.</p>	<p>[VG]-6-[02:59:20]</p> <p>P: Hablemos de esta primero, coseno por coseno.</p> <p>H6: Si k es igual a m, el área es a_m sobre 2 por p.</p> <p>[VG]-6-[03:00:22]</p> <p>P: ¿Y si son distintos k y m?</p> <p>H3: Cero ((varios estudiantes responden con él)).</p> <p>P: Y lo vieron del::</p> <p>H3: De ahí ((señalando el applet))</p> <p>[VG]-6-[03:01:01]</p> <p>P: ¿Con este qué pasa? ((refiriéndose a las curvas coseno por seno))</p> <p>M3: Cero ((varios estudiantes responden con ella)).</p> <p>P: Siempre es cero, ¿verdad? ((los estudiantes asienten con la cabeza))</p>
Pregunta g	$a_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$	$\int_0^p f(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt = \frac{a_k p}{2} \Rightarrow a_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$	$a_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$	$a_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$	$a_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$	No hubo interacción al responder esta pregunta.	<p>[VG]-6-[03:01:45]</p> <p>P: ¿Qué argumento utilizaron?</p> <p>M2: Lo hicimos similar a como lo hicimos para calcular a_1.</p> <p>P: Ujú, entonces ¿qué habría que hacer?</p> <p>H6: Multiplicar por $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ ((los estudiantes asienten con la cabeza)).</p> <p>P: Ajá. Entonces sí, cómo que si quiero encontrar el coeficiente de a_k multiplico por::</p> <p>M2: El coseno.</p> <p>P: Su respectivo coseno ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Entonces e queda, voy a escribirlo.</p>  <p>[VG]-6-[03:02:54]</p> <p>P: ¿Y ahora?</p> <p>M2: Ahora integra todos, bueno integramos (incomprensible, 2).</p> <p>P: ¿Solo integramos así? (3) ¿o integramos de 0 a p? ((los alumnos asienten con la cabeza y ríen)) Si, el área bajo la curva, ¿verdad? Entonces sería aquí integral de 0 a p de $f(t)$ (9) ((escribiendo en la pizarra))</p>  <p>¿Y entonces qué pasa con estos, los que son seno por coseno?</p> <p>H3: Cero ((varios estudiantes responden junto con él)).</p> <p>P: Todos dan cero, por lo anterior. ¿Y los que son coseno por coseno?</p> <p>M2: Cero ((varios estudiantes asienten con la cabeza)).</p> <p>P: Todos dan cero, salvo el caso de coseno cuadrado que es el k por k, ¿verdad? k</p>

Parte II. El cálculo de a_k							
Intención: Significar el cálculo del coeficiente de Fourier a_k , a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.							
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
							<p>igual m. ¿Y este? ((señalando el término $a_0 \cos(\frac{2k\pi}{p}t)$)).</p> <p>M3: Da cero ((varios estudiantes responden junto con ella)).</p> <p>P: También da cero, ¿verdad? Entonces nos queda de este lado (11) ((escribiendo en la pizarra))</p>  <p>¿Si? ((los alumnos asienten con la cabeza))</p> <p>¿Y esta da?</p> <p>M3: $a_k p$ sobre 2 ((H3 responde junto con ella)).</p> <p>[VG]-6-[03:04:22]- el profesor pregunta que falta para dar la fórmula solicitada y los alumnos indican que solo despejar y se obtiene:</p> 
Pregunta h	Si tomamos $k=0$ se llega a la fórmula propuesta anteriormente.	Se puede decir que la fórmula de a_k es la generalidad y la fórmula de a_0 es una particularidad.	Es más general la última que la primera.	El caso de a_0 , se observa que es un caso específico de la expresión encontrada en el inciso anterior cuando $k = 0$.	Esta necesita que se le multiplique el término $\cos(\frac{2k\pi}{p}t)$.	[VE3]-6-[02:11:48] H3: Lo que sí se vale es que es casi lo mismo, encuentras el área bajo la curva, pero de esta función. Es el área bajo la curva de la función, pero multiplicada por la función coseno. M3: Sí, echémosle eso ((no muy convencida)).	[VG]-6-[03:04:59] M2: Es un caso particular, cuando k igual a cero.
Intencionalidad	Las preguntas de esta parte tienen la misma intención que las propuestas para el cálculo de a_1 , la idea es que utilicen argumentos similares para concluir que el valor de a_k está dado por la fórmula: $\frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t) dt$, cuyo significado esté asociado al área bajo la curva.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	<p>Observar</p> <p>Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets.</p> <p>Equivaler</p> <p>La igualdad:</p> $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	<p>Observar</p> <p>Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets.</p> <p>Equivaler</p> <p>La igualdad:</p> $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	<p>Observar</p> <p>Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets.</p> <p>Equivaler</p> <p>La igualdad:</p> $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	<p>Observar</p> <p>Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets.</p> <p>Equivaler</p> <p>La igualdad:</p> $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	<p>Observar</p> <p>Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets.</p> <p>Equivaler</p> <p>La igualdad:</p> $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	<p>Observar</p> <p>Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets.</p> <p>Equivaler</p> <p>La igualdad:</p> $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	<p>Observar</p> <p>Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets.</p> <p>Equivaler</p> <p>La igualdad:</p> $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$
¿Sobre qué relaciones lo hace?	<p>Observar</p> <p>Cuando $k = m$, la curva $y = a_k \cos(\frac{2k\pi}{p}t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0.</p> <p>El área bajo la curva $y = b_k \cos(\frac{2k\pi}{p}t) \sin(\frac{2m\pi}{p}t)$ es 0, para cualquier valor de k y m.</p> <p>Equivaler</p> <p>El área bajo la curva $y = f(t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t)$ es igual al área bajo la curva $y = a_k \cos^2(\frac{2k\pi}{p}t)$, en un intervalo de tamaño p.</p>	<p>Observar</p> <p>Cuando $k = m$, la curva $y = a_k \cos(\frac{2k\pi}{p}t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0.</p> <p>El área bajo la curva $y = b_k \cos(\frac{2k\pi}{p}t) \sin(\frac{2m\pi}{p}t)$ es 0, para cualquier valor de k y m.</p> <p>Equivaler</p> <p>El área bajo la curva $y = f(t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t)$ es igual al área bajo la curva $y = a_k \cos^2(\frac{2k\pi}{p}t)$, en un intervalo de tamaño p.</p>	<p>Observar</p> <p>Cuando $k = m$, la curva $y = a_k \cos(\frac{2k\pi}{p}t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0.</p> <p>El área bajo la curva $y = b_k \cos(\frac{2k\pi}{p}t) \sin(\frac{2m\pi}{p}t)$ es 0, para cualquier valor de k y m.</p> <p>Equivaler</p> <p>El área bajo la curva $y = f(t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t)$ es igual al área bajo la curva $y = a_k \cos^2(\frac{2k\pi}{p}t)$, en un intervalo de tamaño p.</p>	<p>Observar</p> <p>Cuando $k = m$, la curva $y = a_k \cos(\frac{2k\pi}{p}t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0.</p> <p>El área bajo la curva $y = b_k \cos(\frac{2k\pi}{p}t) \sin(\frac{2m\pi}{p}t)$ es 0, para cualquier valor de k y m.</p> <p>Equivaler</p> <p>El área bajo la curva $y = f(t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t)$ es igual al área bajo la curva $y = a_k \cos^2(\frac{2k\pi}{p}t)$, en un intervalo de tamaño p.</p>	<p>Observar</p> <p>Cuando $k = m$, la curva $y = a_k \cos(\frac{2k\pi}{p}t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0.</p> <p>El área bajo la curva $y = b_k \cos(\frac{2k\pi}{p}t) \sin(\frac{2m\pi}{p}t)$ es 0, para cualquier valor de k y m.</p> <p>Equivaler</p> <p>El área bajo la curva $y = f(t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t)$ es igual al área bajo la curva $y = a_k \cos^2(\frac{2k\pi}{p}t)$, en un intervalo de tamaño p.</p>	<p>Observar</p> <p>Cuando $k = m$, la curva $y = a_k \cos(\frac{2k\pi}{p}t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0.</p> <p>El área bajo la curva $y = b_k \cos(\frac{2k\pi}{p}t) \sin(\frac{2m\pi}{p}t)$ es 0, para cualquier valor de k y m.</p> <p>Equivaler</p> <p>El área bajo la curva $y = f(t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t)$ es igual al área bajo la curva $y = a_k \cos^2(\frac{2k\pi}{p}t)$, en un intervalo de tamaño p.</p>	<p>Observar</p> <p>Cuando $k = m$, la curva $y = a_k \cos(\frac{2k\pi}{p}t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0.</p> <p>El área bajo la curva $y = b_k \cos(\frac{2k\pi}{p}t) \sin(\frac{2m\pi}{p}t)$ es 0, para cualquier valor de k y m.</p> <p>Equivaler</p> <p>El área bajo la curva $y = f(t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t)$ es igual al área bajo la curva $y = a_k \cos^2(\frac{2k\pi}{p}t)$, en un intervalo de tamaño p.</p>
¿Por medio de qué lo hace?	<p>Observar</p> <p>Verbal/Algebraico: Para la función $y = a_k \cos(\frac{2k\pi}{p}t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t)$, según el applet, el área bajo la curva es $A = a_k \frac{p}{2}$ cuando $k = m$, y cero en cualquier otro caso. Para la función $y = a_k \cos(\frac{2k\pi}{p}t) \sin(\frac{2m\pi}{p}t)$, el área bajo la curva es cero, en cualquier caso.</p> <p>Equivaler</p> <p>Algebraico: $a_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t) dt$.</p>	<p>Observar</p> <p>Verbal/Algebraico: En la primera expresión de "y" si $k=m$ el valor del área bajo la curva es $a_k \frac{p}{2}$, mientras que en la segunda expresión de "y" si $k \neq m$ el valor del área bajo la curva es 0. Ahora bien, para la primera expresión de "y" si k y m son distintos el valor del área bajo la curva es 0, mientras que en la segunda expresión de "y" si k y m son distintos el área bajo la curva es 0.</p> <p>Equivaler</p> <p>Algebraico:</p> $\int_0^p f(t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t) dt = \frac{a_k p}{2} \Rightarrow a_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t) dt$	<p>Observar</p> <p>Verbal/Algebraico: En y cos cos el área es $\frac{akp}{2}$ si $m = k$ y 0 si m diferente de k. En y sen cos el área siempre es 0 para todo m y k.</p> <p>Equivaler</p> <p>Algebraico:</p> $\int_0^p f(t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t) dt = \int_0^p a_k \cos^2(\frac{2k\pi}{p}t) dt = \frac{a_k p}{2}$	<p>Observar</p> <p>Verbal/Algebraico: La función que contiene el seno por el coseno siempre tiene un área de bajo de ella igual a cero en un periodo. La función coseno por coseno tiene un área bajo la curva igual a cero si $m \neq n$, solo cuando $m = n$ el área bajo la curva tiene un valor distinto de cero, más aún, para cualquier $k \in \mathbb{N}$ el área bajo la curva queda dada por $a_k \frac{p}{2}$.</p> <p>Equivaler</p> <p>Algebraico:</p> $a_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t) dt$	<p>Observar</p> <p>Verbal/Algebraico: Cuando $k = m \forall k, m \in \mathbb{Z}$, el área es $A = \frac{akp}{2}$, en el caso contrario $k \neq m$, $A = 0$, siendo A el área bajo las curvas.</p> <p>Equivaler</p> <p>Algebraico: $a_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t) dt$.</p>	<p>Observar</p> <p>Verbal: [VE3]-6-[02:00:22] H3: Cuando son iguales eso, solo cuando no se vale tu camote ((refiriéndose al valor de k)), ¿no? Cuando son distintas siempre vale cero.</p> <p>Verbal: [VE3]-6-[02:01:12] H3: Para la del coseno por seno, siempre están, ese siempre vale cero.</p> <p>M3: Sí.</p>	<p>Observar</p> <p>Verbal: [VG]-6-[02:59:20] P: Hablemos de esta primero, coseno por coseno. H6: Si k es igual a m, el área es a_m sobre 2 por p.</p> <p>Verbal: [VG]-6-[03:00:22] P: ¿Y si son distintos k y m? H3: Cero ((varios estudiantes responden con él)). P: Y lo vieron del::: H3: De ahí ((señalando el applet))</p> <p>Verbal: [VG]-6-[03:01:01] P: ¿Con este qué pasa? ((refiriéndose a las curvas coseno por seno)) M3: Cero ((varios estudiantes responden con ella)). P: Siempre es cero, ¿verdad? ((los estudiantes asienten con la cabeza))</p> <p>Equivaler</p> <p>Verbal: [VG]-6-[03:01:45] P: ¿Qué argumento utilizaron? M2: Lo hicimos similar a como lo hicimos para calcular a_1. P: Ujú, entonces ¿qué habría que hacer? H6: Multiplicar por $\cos(\frac{2k\pi}{p}t)$ ((los estudiantes asienten con la cabeza)). P: Ajá. Entonces sí, cómo que si quiero encontrar el coeficiente de a_k multiplico por::: M2: El coseno. P: Su respectivo coseno ((los estudiantes asienten con la cabeza)) Entonces e queda, voy a escribirlo.</p>  <p>Verbal: [VG]-6-[03:02:54] P: ¿Y ahora? M2: Ahora integra todos, bueno integramos (incomprensible, 2).</p>
Invariantes de Acciones	<ul style="list-style-type: none"> - Cuando $k = m$, la curva $y = a_k \cos(\frac{2k\pi}{p}t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0. - El área bajo la curva $y = b_k \cos(\frac{2k\pi}{p}t) \sin(\frac{2m\pi}{p}t)$ es 0, para cualquier valor de k y m. - El área bajo la curva $y = f(t) \cos(\frac{2k\pi}{p}t)$ es igual al área bajo la curva $y = a_k \cos^2(\frac{2k\pi}{p}t)$, en un intervalo de tamaño p. 						

Parte III. El cálculo de b_k							
Intención:	Significar el cálculo del coeficiente de Fourier b_k , a partir de la articulación de los registros geométrico-analítico y algebraico, para validar el segundo en el primero.						
Estudiante	M2	M3	H1	H3	H4	Equipo 3	Puesta en común
Pregunta a	Para la función $y = b_k \text{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \text{Sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ el área bajo la curva es $A = \frac{p}{2} b_k$ cuando $k=m$, y cero en otro caso, mientras que para la función $y = b_k \text{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \text{Cos}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es cero para cualquier	En la primera expresión de "y" si $k=m$ el valor del área bajo la curva es $b_k \cdot 3.16$, mientras que en la segunda expresión de "y" si $k=m$ el valor del área bajo la curva es 0. Ahora bien para la primera expresión de "y" si k y m son distintos el valor del área bajo la curva es 0, mientras que en la segunda expresión de "y" si k y m son distintos el área bajo la curva es 0.	Para $y = \text{sen} \text{ sen}$ el área es $\frac{b_k p}{2} \delta_{km}$. Para $y = \text{sen} \text{ cos}$ el área es 0 para toda k, m .	En esta ocasión, la función que contiene seno por seno es cero siempre que $m \neq k$ y el área bajo la curva vale $a_k \frac{p}{2}$ cuando $m = n$. El el caso de las funciones que contienen seno por coseno, de nuevo, el valor del área bajo la curva es igual a cero en todos los casos.	Para el caso de $k = m$, $A = \frac{b_k p}{2}$, en el caso en que $k \neq m \forall k, m \in \mathbb{Z}$, $A=0$, donde A es el área bajo las curvas.	[VE3]-6-[02:15:20] M3: Ay va a ser lo mismo, seguramente va a dar. H3: Lo mismo, pero con seno, ¿no? M3: No tiene sentido. Ay, ya sé que voy a hacer ((se va a la Parte II pregunta f)), porque me da weba escribir todo esto otra vez, lo voy a copiar y después le voy a cambiar eso. [VE3]-6-[02:15:55] M3: Es lo mismo, ¿no? (Incomprensible, 1) Se ve claramente.	[VG]-6-[03:12:47] P: Entonces cuando k igual a m , ¿entonces el área da? H3: b_k P: b_k H3: Periodo p entre 2. P: Por p entre 2. Ajá, por el periodo entre 2. ¿Y cuando k es distinto de m ? M3: Cero. P: Cero ¿y en el caso de sen por coseno? H3: Siempre vale cero.
Pregunta b	$b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \text{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$ 	$\int_0^p f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt = \frac{b_k p}{2} \Rightarrow b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$	$b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$	$b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \text{cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$	$b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \text{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$	[VE3]-6-[01:31:06]- M3 revisa la identidad $\text{sen}^2 u = \frac{1-\text{cos}(2u)}{2}$ y le indica a M3 que va a valer lo mismo (refiriéndose a lo obtenido en la Parte II).	[VG]-6-[03:13:20]- se pone en común que el razonamiento es similar al utilizado en la Parte II para calcular a_k , con la diferencia de que se debe multiplicar por $\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ para luego integrar de 0 a p . Al final se despeja el valor de b_k para obtener la fórmula solicitada.
Intencionalidad	Se busca que el estudiante utilice estrategias similares a las utilizadas para calcular a_k , y de esta manera concluir que $b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$.						
¿Sobre qué objetos lo hace?	Observar Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets. Equivaler La igualdad: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	Observar Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets. Equivaler La igualdad: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	Observar Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets. Equivaler La igualdad: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	Observar Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets. Equivaler La igualdad: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	Observar Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets. Equivaler La igualdad: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	Observar Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets. Equivaler La igualdad: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$	Observar Las gráficas para distintos valores de k y m en los applets. Equivaler La igualdad: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$
¿Sobre qué relaciones lo hace?	Observar Cuando $k = m$, la curva $y = b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y = b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \text{cos}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m . Equivaler El área bajo la curva $y = f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = b_k \text{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p .	Observar Cuando $k = m$, la curva $y = b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y = b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \text{cos}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m . Equivaler El área bajo la curva $y = f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = b_k \text{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p .	Observar Cuando $k = m$, la curva $y = b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y = b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \text{cos}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m . Equivaler El área bajo la curva $y = f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = b_k \text{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p .	Observar Cuando $k = m$, la curva $y = b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y = b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \text{cos}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m . Equivaler El área bajo la curva $y = f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = b_k \text{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p .	Observar Cuando $k = m$, la curva $y = b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y = b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \text{cos}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m . Equivaler El área bajo la curva $y = f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = b_k \text{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p .	Observar Cuando $k = m$, la curva $y = b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y = b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \text{cos}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m . Equivaler El área bajo la curva $y = f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = b_k \text{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p .	Observar Cuando $k = m$, la curva $y = b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0. El área bajo la curva $y = b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \text{cos}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m . Equivaler El área bajo la curva $y = f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = b_k \text{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p .
¿Por medio de qué lo hace?	Observar Verbal/Algebraico: Para la función $y = b_k \text{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \text{Sen}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ el área bajo la curva es $A = \frac{p}{2} b_k$ cuando $k = m$, y cero en otro caso, mientras que para la función $y = b_k \text{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \text{Cos}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es cero para cualquier. Equivaler Algebraico: 	Observar Verbal/Algebraico: En la primera expresión de "y" si $k = m$ el valor del área bajo la curva es $b_k \cdot 3.16$, mientras que en la segunda expresión de "y" si $k = m$ el valor del área bajo la curva es 0. Ahora bien, para la primera expresión de "y" si k y m son distintos el valor del área bajo la curva es 0, mientras que en la segunda expresión de "y" si k y m son distintos el área bajo la curva es 0. Equivaler Algebraico: $\int_0^p f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt = \frac{b_k p}{2} \Rightarrow b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$	Observar Verbal/Algebraico: Para $y = \text{sen} \text{ sen}$ el área es $\frac{b_k p}{2} \delta_{km}$. Para $y = \text{sen} \text{ cos}$ el área es 0 para toda k, m . Equivaler Algebraico: $b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$.	Observar Verbal/Algebraico: En esta ocasión, la función que contiene seno por seno es cero siempre que $m \neq k$ y el área bajo la curva vale $a_k \frac{p}{2}$ cuando $m = n$. El el caso de las funciones que contienen seno por coseno, de nuevo, el valor del área bajo la curva es igual a cero en todos los casos. Equivaler Algebraico: $b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \text{cos}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$.	Observar Verbal/Algebraico: Para el caso de $k = m$, $A = \frac{b_k p}{2}$, en el caso en que $k \neq m \forall k, m \in \mathbb{Z}$, $A=0$, donde A es el área bajo las curvas. Equivaler Algebraico: $b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \text{Sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) dt$.	Observar Verbal: [VE3]-6-[02:15:20] M3: Ay va a ser lo mismo, seguramente va a dar. H3: Lo mismo, pero con seno, ¿no? [VE3]-6-[02:15:55] M3: Es lo mismo, ¿no? (Incomprensible, 1) Se ve claramente.	Observar Verbal: [VG]-6-[03:12:47] P: Entonces cuando k igual a m , ¿entonces el área da? H3: b_k P: b_k H3: Periodo p entre 2. P: Por p entre 2. Ajá, por el periodo entre 2. ¿Y cuando k es distinto de m ? M3: Cero. P: Cero ¿y en el caso de sen por coseno? H3: Siempre vale cero. Equivaler Verbal: [VG]-6-[03:13:20]- se pone en común que el razonamiento es similar al utilizado en la Parte II para calcular a_k , con la diferencia de que se debe multiplicar por $\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ para luego integrar de 0 a p . Al final se despeja el valor de b_k para obtener la fórmula solicitada.
Invariantes de Acciones	<ul style="list-style-type: none"> - Cuando $k = m$, la curva $y = b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, tiene área bajo la curva no nula, cuando $k \neq m$ su área bajo la curva es 0. - El área bajo la curva $y = b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) \text{cos}\left(\frac{2m\pi}{p}t\right)$ es 0, para cualquier valor de k y m. - El área bajo la curva $y = f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ es igual al área bajo la curva $y = b_k \text{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de tamaño p. 						