Tres caminos hacia la geometría elemental

Joseph C. Várilly

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

Agosto del 2012

Resumen

La enseñanza de la geometría a nivel preuniversitaria suscita debates sobre su fundamentación, su puesta en práctica y su engranaje con otros áreas de la matemática. Aquí se ofrecen algunas ideas para explorar de qué manera el desarrollo histórico y actual de la geometría puede iluminar su práctica docente.

Abstract

The teaching of geometry at the preuniversity level is cause for much debate about its foundations, its practice and its interface with other areas of mathematics. Here we put forward some ideas to explore how the historical and current development of geometry may throw some light on teaching practice.

1 El arranque: fundamentos de la geometría plana

Quizás el paso más difícil para enseñar la geometría es el primer paso: ¿cómo declarar el ámbito del tema? Una vez establecidos los conceptos de número natural e incógnita algebraica, se procede rápidamente a desarrollar algoritmos de multiplicación y división, soluciones de ecuaciones, factorización de polinomios; y los mil y uno quehaceres de la aritmética y del álgebra. En cambio, los objetos geométricos (desde los humildes triángulos y círculos a los cuerpos geométricos más complejos) requieren de una introducción más cuidadosa.

Tan es así que muchas veces se ha oído decir que el papel de la geometría es la formación lógica de la mente del educando. Este autor no comparte un punto de vista tan estrecha: un matemático concibe la geometría como un jardín floreciente, apto para la percepción visual, que sin embargo hay que regar y cultivar con cuidado.

Por geometría elemental, entiéndase ante todo la geometría llamada euclidiana, principalmente del plano y del espacio tridimensional. Las teorías más intrincadas, como la llamada geometría "no euclidiana" y el estudio de curvas y superficies en general, requieren un buen entendimiento de los planos y espacios sin curvatura. Históricamente, la geometría tuvo un enorme desarrollo en la Grecia antigua, después del ocaso del poder imperial de Atenas.[1]

1.1 Bosquejo histórico de los fundamentos

Los avances del cuarto siglo a.C. fueron codificados en un enorme tratado por Euclides de Alejandría, llamado simplemente Στοιχεῖα, es decir, *Elementos*, que culmina con la construcción de los cinco poliedros regulares. Sus primeras hojas están dedicadas a ciertos detalles introductorios; hay 23 *definiciones* (ὅροι), 5 *postulados* (αἰτήματα) y 5 *nociones comunes* (κοιναὶ ἔννοιαι).[2]

Vale la pena citar sus primeros cuatro postulados:

1. *Sea postulado trazar una línea recta desde cualquier punto a cualquier [otro] punto;*

2. *y prolongar una línea recta continuamente en línea recta;*

3. *y describir un círculo con cualquier centro y radio;*

4. *y que todos los ángulos rectos son iguales entre sí;*

y también la primera noción común:

⋆ *las cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.*

Euclides en su obra contempla varios tipos de igualdad; por ejemplo, dos rectángulos son "iguales" en el Libro 2 si —en términos modernos— tienen la misma área, aunque no sean congruentes. Al proclamar cosas *iguales entre sí* (ἴσας ἀλλήλαις) está diciendo —de nuevo, en términos modernos— que la *igualdad* (ἴσος) es alguna *relación de equivalencia*.

El quinto postulado (no citado) es mucho más largo y complicado que los otros; pero establece, esencialmente, que el ámbito de esta geometría no tiene curvatura. Durante la época medioeval y hasta los principios del siglo XIX, hubieron muchos intentos no exitosos

[1] En los dos siglos anteriores, la escuela pitagórica impulsó la matemática de los números enteros (ἀρίθμοι). La crisis que surgió con la inconmensurabilidad del lado y la diagonal del cuadrado ocurrió en la década de 420–410 a.C., es decir, hacia el final de la guerra del Peloponesio. Véase: W. R. Knorr, *The Evolution of the Euclidean Elements*, D. Reidel, Dordrecht, 1975.

[2] Las hojas originales, de papiro comprimido, todas han perecido. Sin embargo, la obra fue copiada y traducida tantas veces en los dos milenios siguientes que hoy en día tenemos un buen simulacro del contenido original. Al final del siglo XIX, Johan Heiberg editó una versión en griego, con dibujos modernos. Para una excelente versión de esa obra, con traducción paralela al inglés, véase: R. Fitzpatrick, *Euclid's Elements of Geometry*, Lulu.com, 2008.

de demostrarlo, hasta que en la década de los 1820 varias personas (Bolyai, Lobachevsky, Gauss) se dieron cuenta de que los primeros cuatro postulados son compatibles con curvatura no nula: la superficie de una esfera, por ejemplo.

En las décadas siguientes, con el creciente rigor sobre las ideas de continuidad y convergencia, y la axiomatización de los números reales, se buscó un mejor fundamentación para la geometría de Euclides. El mayor exponente de esta tendencia fue Moritz Pasch, quien criticó los procedimientos euclidianos y propuso algunas mejoras en 1882. Su esquema dio fruto con un curso de David Hilbert en 1897, quien propuso un juego de 20 axiomas para la geometría plana euclidiana, simplificado posteriormente por Oswald Veblen y Robert L. Moore. Sin embargo, reconstruir la geometría plana a partir de tales axiomas fue una tarea ardua y difícil, finalmente logrado por Henry Forder en 1927.[3]

Un nuevo enfoque fue introducido en 1932 por George David Birkhoff, quien propuso una versión métrica de la geometría euclidiana, basada en la *medición* de segmentos y ángulos con una escala (una regla marcada) y un transportador.[4] De este modo la geometría plana queda ligada con el sistema numérico de los números reales. Los postulados de Birkhoff fueron adoptados por el *School Mathematics Study Group* (SMSG) alrededor de 1960 en su reforma de la enseñanza media en los Estados Unidos.

Los sistemas axiomáticos de Hilbert, Veblen y Moore, por un lado; y de Birkhoff, por otro lado; hacen ver que *no hay un único modo* de introducir los fundamentos de la geometría. (En 1959, Alfred Tarski introdujo una tercera axiomatización, usando la lógica de primer orden.) Subsiste un problema práctico: ¿cómo sentar las bases de la geometría para luego desarrollar su plétora de teoremas y resultados de un modo eficiente y ameno?

1.2 Orden y longitud: un enfoque alternativo

A continuación voy a proponer otro enfoque, que no pretende ser algo novedoso, sino que hace una hibridación entre los dos aproximaciones ya mencionados, basado en dos conceptos básicos: *orden* y *longitud*. La relación de orden entre *tres* puntos distintos se toma de Veblen[5] y la medición de longitudes de Birkhoff. El resultado, a mi ver, es una fundamentación de la geometría plana que captura algo del espíritu de la obra de Euclides.

[3] Los trabajos de Pasch están en el libro: M. Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, 1882. Hilbert publicó una versión extendida de su curso en: D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, 1899. Los trabajos de Veblen y Moore están resumidos en: O. Veblen, "The Foundations of Geometry", en el libro *Monographs on Topics of Modern Mathematics*, editado por J. W. Young, New York, 1911. Véase también: H. G. Forder, *The Foundations of Euclidean Geometry*, New York, 1927.

[4] El artículo original es: G. D. Birkhoff, *A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor*, Annals of Mathematics **33** (1932), 329–345. En 1940, Birkhoff y R. Beatley publicaron un texto, *Basic Geometry*, basado en este esquema.

[5] O. Veblen, "The Foundations of Geometry", *op. cit.*

▶ Antes de explicar su contenido, una paréntesis sobre la notación. Los seguidores del SMSG denotan un *segmento* con extremos A y B con la notación $\overline{AB}$, pero la *distancia* entre A y B por la notación AB, sin adornos. No hay una organización mundial, que yo sepa, que impone este protocolo en forma obligatoria; y me parecen contraintuitivo. En este documento, el par de letras AB, sin adorno, denotará el *segmento* con extremos A y B; pero la *longitud* de ese segmento se denotará $|AB|$. En breve: la presencia de barras $|\cdot|$ debe señalar un número real no negativo.

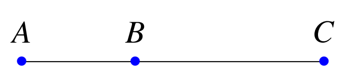
Para evitar malentendidos, he aquí un pequeño glosario de notaciones:

- ⋆ AB es el **segmento** con extremos A y B.
- ⋆ $\overrightarrow{AB}$ es el **rayo** o *semirrecta* desde A, pasando por B.
- ⋆ $\overleftrightarrow{AB}$ es la **recta** que pasa por A y B.
- ⋆ $|AB|$ es la **longitud** del segmento AB.
- ⋆ $\angle ABC$ es el **ángulo** con vértice B y brazos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$.
- ⋆ $\triangle ABC$ es el **triángulo** con vértices A, B, C, tomados en ese orden.
- ⋆ A-B-C significa que B está **entre** A y C.
- ⋆ $\text{Area}(ABC)$ es el **área** del triángulo $\triangle ABC$.
- ⋆ $AB : BC$ es la **razón** de división del segmento AC por el punto B.

▶ El **plano euclidiano** es un conjunto $\mathcal{E}$, cuyos elementos $A, B, C, \dots$ se llaman **puntos**. Para aclarar la estructura de este conjunto, se declara que algunos juegos de *tres puntos distintos* A, B, C están "en orden"; y en tal caso se escribe A-B-C. En otras palabras, para tres puntos cualesquiera, A-B-C es una proposición que podría ser verdadero o falso; en particular, es falso si dos (o tres) de estos puntos coinciden.

En seguida, hay que *postular las propiedades* de esta **relación de orden**, tal y como hacía Euclides. Las condiciones obligatorias son las 5 afirmaciones siguientes.

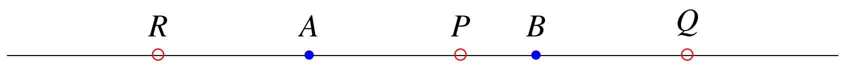
1. Si A-B-C es cierto, entonces B-C-A *no* es cierto.



Informalmente: si B queda entre A y C, entonces C *no queda* entre A y B.

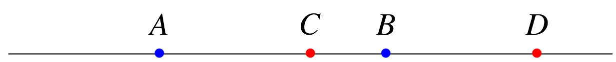
2. Si A y B son puntos distintos, hay un punto C que cumple A-B-C.

Este es el Postulado 2 de Euclides: “prolongar una línea recta continuamente en línea recta”.



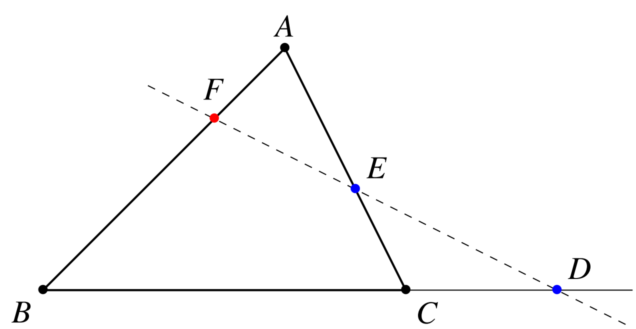
Ahora se define el **segmento** AB, si A y B son puntos *distintos*, como el conjunto formado por A y B junto con todos los puntos P que cumplen A-P-B. El **rayo** $\overrightarrow{AB}$ es el segmento AB junto con todos los puntos Q que cumplen A-B-Q. La **recta** $\overleftrightarrow{AB}$ consta del rayo $\overrightarrow{AB}$ junto con todos los puntos R que cumplen R-A-B.

$$
\begin{aligned}
&AB := \{A\} \cup \{\,P : A\text{-}P\text{-}B\,\} \cup \{B\},\\
&\overrightarrow{AB} := \{A\} \cup \{\,P : A\text{-}P\text{-}B\,\} \cup \{B\} \cup \{\,Q : A\text{-}B\text{-}Q\,\},\\
&\overleftrightarrow{AB} := \{\,R : R\text{-}A\text{-}B\,\} \cup \{A\} \cup \{\,P : A\text{-}P\text{-}B\,\} \cup \{B\} \cup \{\,Q : A\text{-}B\text{-}Q\,\}.
\end{aligned}
$$



3. Si C y D son puntos distintos de la recta $\overleftrightarrow{AB}$, entonces A es un punto de la recta $\overleftrightarrow{CD}$.

La condición 3 establece la *unicidad de la recta* $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por dos puntos distintos A y B. Además, dos rectas distintas pueden cortarse una sola vez, o bien son paralelos.



4. *El axioma de Pasch*: si C no queda sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y si B-C-D y C-E-A son ciertos, entonces hay un punto F sobre la recta $\overleftrightarrow{DE}$ que cumple A-F-B.

5. Existen tres puntos distintos X, Y, Z en $\mathcal{E}$ que no cumplen X-Y-Z ni Z-X-Y ni Y-Z-X.

La condición 5 dice que en el conjunto $\mathcal{E}$ *hay más de una sola recta*. Entonces puede haber triángulos $\triangle ABC$ con vértices no colineales, así que la condición 4 es capaz de producir gran cantidad de otros puntos en el plano.

El axioma de Pasch dice que una *recta transversal* a los tres lados de un triángulo, que corte un lado externamente y otro lado internamente, *debe cortar el tercer lado internamente*.

▶ Cabe mencionar dos consecuencias inmediatas de estos postulados. En primer lugar, A-B-C implica C-B-A (y viceversa).

En efecto, A-B-C implica que A queda sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$; por la condición 3, B queda sobre la recta $\overleftrightarrow{CA}$. Como A, B, C son distintos, hay tres posibilidades para la posición de B en esa recta: B-C-A o C-A-B o C-B-A. Las primeras dos opciones quedan descartadas por la condición 1.

Por lo tanto, los *segmentos* AB y BA coinciden; y las *rectas* $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BA}$ coinciden. Sin embargo, el rayo $\overrightarrow{AB}$ no es lo mismo que el rayo $\overrightarrow{BA}$.

La segunda consecuencia es de igual importancia: dados dos puntos distintos A y B, *siempre hay un tercer punto* intermedio F en el segmento AB (es decir, vale A-F-B). Se deja como ejercicio llenar los detalles: basta mencionar que en el diagrama de la condición 4, se usan las otras condiciones para obtener sucesivamente los puntos E, C y D; para terminar, el axioma de Pasch produce el punto F.

Hay que enfatizar un corolario: hay *una infinitud de puntos en cada segmento* del plano $\mathcal{E}$. Esto deja por fuera las llamadas "geometrías finitas".

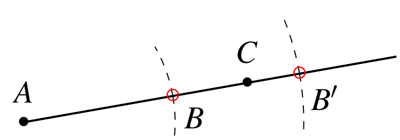
▶ El otro concepto básico del esquema aquí propuesto es la noción de la *longitud* de un segmento, o bien, si se quiere, de la *distancia* entre dos puntos. En contraste con el carácter "posicional" de la relación de orden, aquí se involucra directamente a los números reales como protagonista de la geometría del plano.

A cada par de puntos A, B del plano $\mathcal{E}$ se le asigna un número real $|AB|$, positivo o cero, llamado la **longitud** del segmento AB si $A \neq B$. Esta asignación debe satisfacer 5 condiciones.

6. $|AB| = 0$ si y sólo si $A = B$.

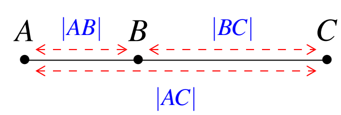
7. $|AB| = |BA|$ para dos puntos A, B cualesquiera.

8. Si A es un punto y si r es un número real positivo, en cada rayo desde A hay un único punto B tal que $|AB| = r$.



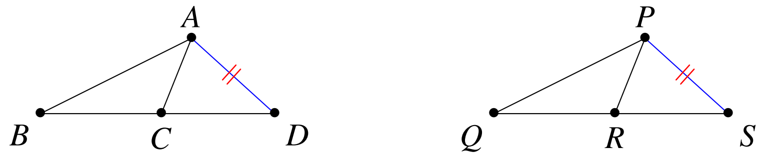
Informalmente: con un compás de radio r cualquiera, apoyado en A, se puede cortar el rayo $\overrightarrow{AC}$ en el punto B.

9. Si se cumple A-B-C, entonces $|AC| = |AB| + |BC|$.



Informalmente: las longitudes de segmentos colineales se suman.

10. Si se cumplen B-C-D y Q-R-S, si A no queda sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$ ni P sobre la recta $\overleftrightarrow{QR}$, y si además valen $|AB| = |PQ|$; $|BC| = |QR|$; $|AC| = |PR|$; y $|BD| = |QS|$, entonces vale $|AD| = |PS|$.



Por un lado, esto establece la *rigidez* del “triángulo con rabo” $ABCD$: si hay dos copias de esta figura en las cuales las longitudes correspondientes son iguales, entonces los segmentos transversales correspondientes, AD y PS, deben tener la misma longitud.[6]

Es más o menos claro que la condición 10 anticipa uno de los criterios de congruencia de triángulos, LAL o bien LLL.[7] En cierta forma, esta condición formaliza el procedimiento de Euclides de “aplicar” un triángulo sobre otro triángulo. Su Proposición I.4 usa esta “aplicabilidad” para concluir lo que hoy en día es el criterio de congruencia LAL para dos triángulos, $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.

En efecto, la condición 10 permite *establecer la igualdad* de dos ángulos *sin apelar a sus medidas* por medio de un transportador. Dícese que *dos ángulos son iguales*,[8]

$$\angle ABC = \angle PQR, \quad \text{si} \quad \left\{ \begin{matrix} |AB| = |PQ| \\ |BC| = |QR| \end{matrix} \right\} \implies |AC| = |PR|.$$

La condición 10 dice que esta conclusión no depende de la posición del punto A en el rayo $\overrightarrow{BA}$ ni de la posición de C en $\overrightarrow{BC}$. En consecuencia, la frase “el ángulo $\angle ABC$ sólo depende de los rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$” adquiere sentido (y además, es cierto).

A partir de este concepto de igualdad de ángulos, el criterio LAL para la congruencia de triángulos es una tautología; y el criterio LLL es fácil de demostrar. No tienen la calidad de axiomas en el esquema actual.

1.3 Otros considerandos sobre la geometría plana

Los conceptos de orden y longitud no son suficientes para precisar el plano euclidiano. Por ejemplo, no se ha hablado aun del paralelismo de rectas. Hay que imponer algunos postulados suplementarios.

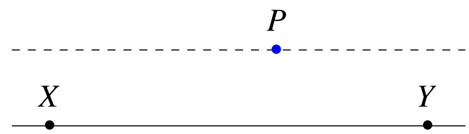
---

[6] La condición 10 está tomado de Veblen, *op. cit.* No pertenece al esquema de Birkhoff.

[7] Las abreviaturas LAL: *lado-ángulo-lado* y LLL: *lado-lado-lado* se suponen bien conocidas.

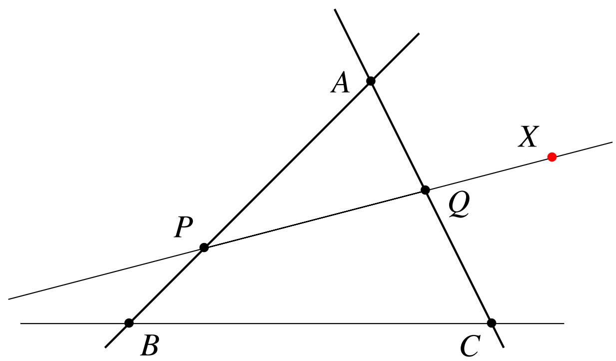
[8] Algunos autores prefieren hablar de ángulos *congruentes* en vez de *iguales*. Aquí se topa con una barrera lingüística: aunque debe haber una palabra distinta para denominar cada relación de equivalencia, el idioma es finito. Hay que respetar la sabiduría de Euclides, quien habló de muchas “igualdades” pero dejó claro que al final, todo lo que importa es su simetría y su transitividad. *De gustibus non disputandum est*, como decían nuestros antepasados.

Postulado A Si P es un punto que no queda sobre una recta $\overleftrightarrow{XY}$, hay una sola recta que pasa por P sin cortar la recta $\overleftrightarrow{XY}$.



Este no es la forma original del quinto postulado de Euclides, por es un axioma equivalente (en la presencia de los demás postulados). El Postulado A es conocido como el *axioma de Playfair*.[9]

Postulado B Si A, B, C son puntos no colineales, todo punto de $\mathcal{E}$ es colineal con un par de puntos sobre la unión de las dos rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$.



Informalmente: cada punto X del plano queda sobre una recta $\overleftrightarrow{PQ}$ transversal a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$.

Aun más informalmente, el Postulado B dice que en el conjunto $\mathcal{E}$ *no puede haber cuatro puntos no coplanarios*. En efecto, sin referirse al Postulado B, se puede definir el *plano ABC* como la unión de todas las posibles rectas transversales $\overleftrightarrow{PQ}$. Entonces este postulado dice que $\mathcal{E}$ es un plano.

A la luz de las condiciones antedichas, cabe mencionar algunos conceptos más.

► El **círculo** con centro O y radio $r > 0$ es la totalidad de puntos P tales que $|OP| = r$, denotado por[10]

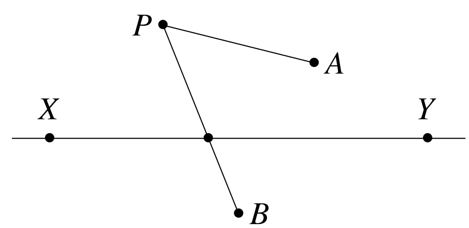
$$\odot(O\,|\,r) := \{\,P : |OP| = r\,\}.$$

[9]Esta versión del postulado de las paralelas es atribuido al matemático escocés John Playfair (1795), pero aparece ya en un comentario sobre los *Elementos* de Euclides escrito por Proclos de Alejandría en el siglo V d.C.

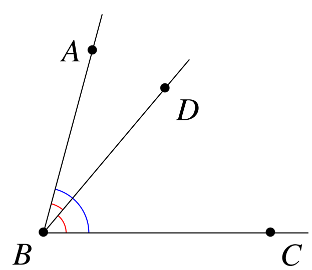
[10]En español, se usa con frecuencia la palabra *circunferencia* para referirse al borde de un disco redondo; y la palabra *círculo* para referirse al disco. Aquí el término *círculo* denota siempre la curva y nunca el disco encerrado por ella. Por ejemplo, a la curva redonda que pasa por los tres vértices de un triángulo se le llama *circuncírculo*; nadie habla de una *circuncircunferencia*.

La condición 8 anterior garantiza que cualquier círculo tiene una infinitud de puntos. Además, si la distancia entre los centros de dos círculos es menor que la suma de sus radios, la condición 8 garantiza que los dos círculos tienen un punto (de hecho, dos puntos) de intersección. Este es uno de los detalles que Euclides dejó escapar en su Proposición I.1 (la construcción de un triángulo equilátero sobre un lado dado).

► Una recta *separa el plano* en dos semiplanos, informalmente llamados **los dos lados de la recta**. ¿Cómo saber si dos puntos (fuera de la recta misma) están al mismo lado o bien en lados opuestos? Considérese el *segmento* que une los dos puntos. Entonces la recta puede cortar este segmento internamente o no cortarlo del todo. Si lo corta, los puntos están a lados opuestos de la recta; y si no lo corta, están al mismo lado; como indica el diagrama siguiente.



Nótese que no hay preferencia absoluta de un lado sobre el otro; es inadmisible hablar del "lado superior" y del "lado inferior", hasta que se toma un punto de referencia P en uno de los dos lados.[11]



► La **suma de dos ángulos colindantes** ahora se define fácilmente. Si A y D son dos puntos al mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{BC}$ y si A y C están en lados opuestos de la recta $\overleftrightarrow{BD}$, entonces los ángulos $\angle ABD$ y $\angle DBC$ comparten el brazo $\overrightarrow{BD}$; su *suma* es el ángulo

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC.$$

Ahora bien: ¿qué garantiza que las *medidas* del ángulo $\angle ABC$ será igual a la suma de las

[11] La separación del plano en dos semiplanos (no vacíos) por cualquier recta es considerado como postulado por algunos autores. Aquí no es necesario hacerlo, porque es esencialmente equivalente al axioma de Pasch. Véase el libro: G. A. Venema, *Foundations of Geometry* (Prentice-Hall, 2005) para una comparación de diversos sistemas de axiomas.

otras medidas? Es muy deseable obtener la igualdad[12]

$$m(\angle ABC) = m(\angle ABD) + m(\angle DBC),$$

pero el signo $+$ en la segunda ecuación es una suma de números reales, mientras que el signo $+$ de la primera ecuación denota una combinación abstracta de ángulos. Para compaginar esos dos nociones distintas de suma, hay que declarar un último postulado, indicado por el “postulado del transportador” de Birkhoff.

Postulado C Si $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ y $\angle PQR = \angle PQS + \angle SQR$ son sumas de ángulos colindantes, con $\angle ABD = \angle PQS$; entonces $\angle ABC = \angle PQR$ si y sólo si $\angle DBC = \angle SQR$.

► Al final de este esquema de definición, cabe preguntar si el plano euclidiano $\mathcal{E}$ existe; es decir, si hay un conjunto conocido que cumple con las 10 condiciones y con los 3 postulados? Para responder, es suficiente ofrecer un *modelo*, es decir, un conjunto apropiado en donde todos los requisitos están satisfechos.

Este será el tema de la segunda parte: el tratamiento de la geometría con coordenadas. Por ahora, basta con *exhibir el modelo*:

- $\star$ $\mathcal{E}' := \mathbb{R}^2 = \{\,(x,y) : x,y \text{ son números reales}\,\}$.
- $\star$ Si $(x,y) \neq (z,w)$, vale (x,y)-(u,v)-(z,w) si y sólo si hay $t \in \mathbb{R}$ con $0 < t < 1$ tal que

$$\begin{aligned} u &= (1-t)x + tz, \\ v &= (1-t)y + tw. \end{aligned}$$

- $\star$ La longitud de un segmento es $\big|(x,y)\,(z,w)\big| := \sqrt{(x-z)^2 + (y-w)^2}$.

► Para abordar *la geometría del espacio* euclidiano tridimensional, sólo hace falta reemplazar los Postulados A y B por otros. Hay que permitir varios planos en el conjunto de puntos; y el paralelismo de rectas cede el lugar al paralelismo de planos.

Postulado A′ Si P es un punto que no queda sobre un plano $\mathcal{F}$, hay un único plano que pasa por P sin cortar el plano $\mathcal{F}$.

En el espacio tridimensional, dos *planos* se dicen *paralelos* si no se cortan. Dos *rectas* son paralelas si no se cortan y si además pertenecen a un mismo plano. Hay una nueva posibilidad: dos rectas que no sean coplanarios y por ende no se cortan, sin ser paralelas: a estas se les llaman *rectas sesgadas*.

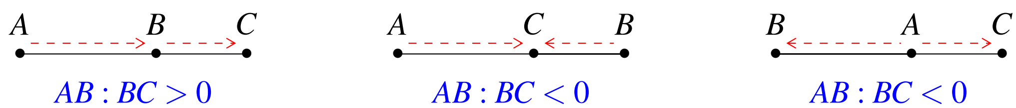
[12] La **medida** de un ángulo, en radianes, es la longitud de un arco cortado por sus brazos de un círculo de radio 1 centrado en su vértice. Es fácil mostrar que dos ángulos de igual medida son iguales; y con el teorema de Thales, se puede mostrar que dos ángulos iguales deben tener igual medida.

Postulado B′ Hay cuatro puntos que no quedan en un mismo plano; y si dos planos distintos se cortan, su intersección es una recta.

La primera frase del Postulado B′ dice que la dimensión es al menos 3. La segunda frase garantiza que la dimensión sea a lo sumo 3, porque en un mundo cuadridimensional habrá pares de planos cuyas intersecciones son puntos.

▶ Hay un último punto de *notación* que vale la pena examinar. A la hora de hablar de los teoremas de Thales, hay que considerar la razón o proporción entre dos segmentos, admitiendo la posibilidad de que esta proporción sea *negativa* en algunos casos. Una posibilidad es la de reemplazar segmentos por vectores, como sugirió Michel Chasles en 1837; pero esto sería incompatible con la igualdad de los segmentos AB y BA.

Otra posibilidad es la de definir la **razón** de *tres puntos colineales* distintos, como sigue.



En primer, si A, B, C son tres puntos colineales y distintos, se define la razón $AB : BC$ por

$$AB : BC = \pm \frac{|AB|}{|BC|} \quad \text{con signo } \textit{positivo} \text{ si y sólo si se cumple} \quad A\text{-}B\text{-}C.$$

La razón es un número real, positivo o negativo (los valores 0 y -1 quedan excluidos).

Las otras razones determinados por estos tres puntos son

$$AB : CB = -AB : BC, \qquad BA : BC = -AB : BC, \qquad BA : CB = AB : BC.$$

Es decir: el intercambio de dos letras cambia el signo de la razón. Informalmente, se ve que la razón es positiva si y sólo si los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ apuntan en el mismo sentido.

La geometría plana euclidiana puede ser desarrollada de modo "sintético" a partir de los conceptos expuestos en esta parte. Véase, por ejemplo, el libro *Elementos de Geometría Plana* del autor. La segunda edición (en preparación) está disponible en la página `http://claroline.emate.ucr.ac.cr/claroline/course/index.php?cid=MA370`.

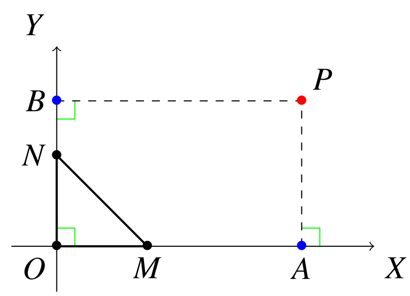
2 La práctica: el uso de las coordenadas

La geometría al estilo de Euclides tiene muchas virtudes: es un sistema lógico y deductivo (¡una vez establecidas las bases!) con una alta dosis de percepción visual, que permite usar la intuición para adivinar posibles soluciones a sus problemas. Sin embargo, tiene una clara limitación: es difícil *calcular* la respuesta a un problema cuando la intuición no es suficiente.

En un famoso apéndice a su *Discours de la méthode* (1637), René DesCartes propuso estudiar la geometría con sólo "conocer la longitud de algunas líneas rectas" y luego ejecutar cálculos con estas longitudes. Al seguir la costumbre de designar una longitud por una sola letra, introducida unas décadas antes por François Viète —por ejemplo, la letra x para identificar una longitud incógnita— DesCartes redujo muchos problemas geométricos a la resolución de ciertas ecuaciones algebraicas. Para resolver un problema de lugares geométricos, tomó dos segmentos perpendiculares y llamó sus longitudes x, y; luego, logró expresar el lugar geométrico como una ecuación (cuadrática, en el ejemplo) entre estas dos variables.[13]

2.1 Las coordenadas cartesianas

En términos de la geometría euclidiana, para introducir las coordenadas hay que fijar un *triángulo rectángulo isósceles* $\triangle OMN$ (con el ángulo recto en el vértice O), que puede llamarse el **triángulo fundamental**. Al tomar un punto X en el rayo $\overrightarrow{OM}$ —que luego será el rayo $\overrightarrow{OX}$— y un punto Y en el rayo $\overrightarrow{ON}$, se obtiene un par de rectas $\overleftrightarrow{OX}$ y $\overleftrightarrow{OY}$, que son los **ejes** de un **marco de referencia cartesiano** (OX, OY).



Si P es un punto cualquiera (inicialmente, fuera de los ejes), sean PA y PB las perpendiculares desde P a los ejes $\overleftrightarrow{OX}$, $\overleftrightarrow{OY}$, respectivamente. Las coordenadas cartesianas de P son las *razones* siguientes:

$$x = OA : OM, \qquad y = OB : ON.$$

Escríbase $P = (x, y)$. Es evidente que $O = (0,0)$, $M = (1,0)$ y $N = (0,1)$, una vez que se extiende el concepto de razón para admitir los casos $O = A$ y $O = B$.

Si $Q = (z, w)$ es otro punto del plano, el teorema de Pitágoras, aplicado a un triángulo rectángulo con hipotenusa PQ y catetos paralelos a los ejes, da la fórmula para la **longitud** del segmento PQ, esto es, la *distancia* entre los puntos P y Q:

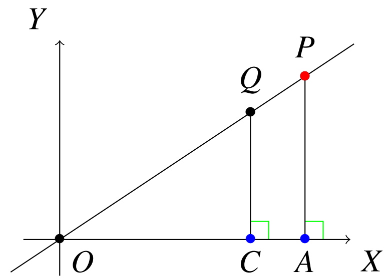
$$|PQ| = \sqrt{(x-z)^2 + (y-w)^2}.$$

Una *traslación* de ejes corresponde a mover el triángulo fundamental $\triangle OMN$ a otro triángulo congruente $\triangle O'M'N'$ que será el triángulo fundamental para un nuevo marco de referencia $(O'X', O'Y')$. Si $O' = (x_0, y_0)$ en marco original, las nuevas coordenadas son

$$x' = x - x_0, \qquad y' = y - y_0.$$

[13]Véase la discusión de la geometría de DesCartes en el libro: A. Ostermann y G. Wanner, *Geometry by Its History*, Springer, Berlin, 2012.

► Para obtener *la ecuación de una recta*, es útil empezar con el caso más fácil: una recta que pasa por el origen O. Sea $Q = (x_1, y_1)$ otro punto de la recta, de modo que la recta sea $\overleftrightarrow{OQ}$. Sea $P = (x, y)$ un punto "cualquiera" de esta recta. Según DesCartes, hay que hallar una ecuación que relaciona x, y con las coordenadas de O y Q.



Si $A = (x, 0)$ y $C = (x_1, 0)$, los segmentos PA y QC son paralelos (o iguales). El teorema de Thales[14] muestra que

$$OA : OC = OP : OQ = \pm|AP| : |CQ|,$$

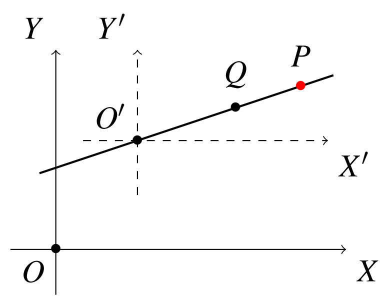
así que

$$x : x_1 = y : y_1 \qquad \text{o bien, lo que es lo mismo,} \qquad y_1 x - x_1 y = 0.$$

Esta es la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{OQ}$.

Nota En la notación anterior, se ha comparado una *razón* de segmentos $OA : OC$ con un *cociente* de longitudes $|AP| : |CQ| = |AP|/|CQ|$. Si se *define* $x : a = y : b$ como sinónimo de $bx = ay$, esta notación es consistente,[15] aunque un "denominador" sea igual a 0.

La recta general, que no necesariamente pasa por el origen, puede obtenerse por una traslación de ejes.



Si $O' = (x_0, y_0)$ es un punto de la recta, distinto de $Q = (x_1, y_1)$, y si $P = (x, y)$ es cualquier punto de la recta $\overleftrightarrow{O'Q}$, el párrafo anterior dice que la ecuación buscada es $y_1' x' - x_1' y' = 0$ en

[14] Hay al menos tres proposiciones diferentes con el nombre de **teorema de Thales**: (1) que tres rectas paralelas cortan dos transversales en la misma razón; (2) que una recta paralela a la base de un triángulo corta los otros dos lados en la misma razón; (3) que dos triángulos son semejantes si y sólo si sus lados son proporcionales. Aquí se emplea la tercera opción.

[15] Sin embargo, *no se define* $0 : 0$, ya que la ecuación $0x = 0y$ no aporta información alguna.

las nuevas coordenadas. En las coordenadas originales, esto es

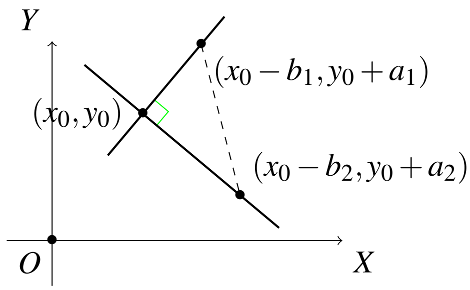
$$(y_1 - y_0)(x - x_0) - (x_1 - x_0)(y - y_0) = 0.$$

Esta es una *ecuación de primer grado*,[16] que pasa por (x_0, y_0) [sustitución] y por (x_1, y_1) [cancelación]. Así la forma general de la *ecuación de una recta* en el plano euclidiano es

$$ax + by + c = 0, \quad \text{donde} \quad a^2 + b^2 \neq 0.$$

Todo esto es archiconocido; pero obsérvese que es una consecuencia directa de las bases de geometría euclidiana de la parte anterior.

▶ Los coeficientes a, b, c de la ecuación $ax + by + c = 0$ determinan la recta, pero no al revés: la ecuación $5ax + 5by + 5c = 0$, por ejemplo, tiene las mismas soluciones (x, y), así que representa la misma recta. Lo que caracteriza la recta es la **proporción** $a : b : c$.



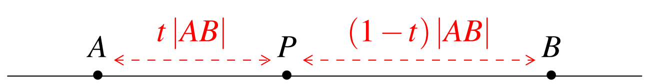
Es fácil mostrar dos proposiciones claves. Si $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ son dos rectas cualesquiera del plano, entonces:

- ⋆ estas rectas son *paralelas o iguales* si y sólo si $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$, pero
- ⋆ estas rectas son *perpendiculares* si y sólo si $a_1 : b_1 = -b_2 : a_2$.

▶ Dos puntos distintos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ determinan una recta. El "punto típico" $P = (x, y)$ de esta recta tiene coordenadas de la forma:

$$x = (1 - t)x_1 + tx_2,$$
$$y = (1 - t)y_1 + ty_2,$$

y la razón de división del segmento AB por el punto P es $AP : PB = t : (1 - t)$.



$$AP : PB = t : (1 - t)$$

[16] Los coeficientes de x, y son $y_1 - y_0$, $x_1 - x_0$ respectivamente. No son cero simultáneamente porque $O' \neq Q$.

Para comprobarlo, fíjese que si P tiene las coordenadas indicadas, entonces

$$|AP|^2 = (tx_1 - tx_2)^2 + (ty_1 - ty_2)^2 = t^2\,|AB|^2$$

y de igual manera $|PB|^2 = (1-t)^2|AB|^2$, lo cual implica que $(AP : PB)^2 = t^2 : (1-t)^2$.

Ahora bien: en el orden A-P-B (ilustrado en el diagrama) la razón $AP : PB$ es *positiva*; y la igualdad $|AB| = |AP| + |PB|$ se reduce a $1 = t + (1-t)$ si y sólo si tanto t como $(1-t)$ son *números positivos*, es decir, si y sólo si $0 < t < 1$.

Está claro que $t = 0$ corresponde al punto A, en donde $(x,y) = (x_1,y_1)$. Además, $t = 1$ corresponde al punto B, en donde $(x,y) = (x_2,y_2)$. Entonces el *segmento* AB corresponde al intervalo $0 \leq t \leq 1$ de números reales.

Los otros valores de t marcan puntos de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ fuera del segmento AB. El orden A-B-P corresponde a $t > 1$; el orden P-A-B corresponden a $t < 0$. Nótese que $AP : PB < 0$ y también $t : (1-t) < 0$ en ambos casos.

► Un punto importante en la recta $\overleftrightarrow{AB}$ es el **punto medio** M del *segmento* AB, que obedece $|AM| = |MB| = \frac{1}{2}|AB|$. Dicho de otro modo, el punto medio se caracteriza por la proporción $AM : MB = \frac{1}{2} : \frac{1}{2}$. Este es el caso $t = \frac{1}{2}$ del párrafo anterior, así que

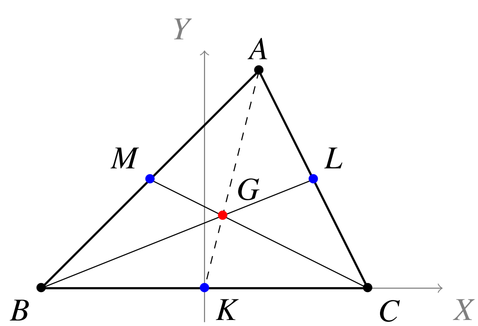
$$M = \left(\tfrac{1}{2}(x_1+x_2), \tfrac{1}{2}(y_1+y_2)\right).$$

2.2 Uso de las coordenadas para demostrar teoremas

El uso cotidiano de las coordenadas es apodado *geometría analítica*, en contraste con la geometría *sintética* de la obra de Euclides.[17] Como bien señaló DesCartes, el método analítico permite averiguar una solución por cálculos, sin conocer el resultado de antemano.

También es posible emplear el método analítico para probar proposiciones geométricas con resultados conocidos. Vale la pena explorar algunos ejemplos.

Proposición 1. *Las medianas de un triángulo son concurrentes y su punto de intersección divide a cada mediana en la razón* $2 : 1$.



[17]Los griegos distinguían entre dos métodos para resolver problemas: *análisis* (ἀνάλυσις) o "desenlace hacia atrás" al descomponer un asunto en sus partes; y *síntesis* (σύνθεσις) o "composición" al ensamblar las partes en un todo.

Proof. Una **mediana** de un triángulo es un segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Si K, L, M son los puntos medios respectivos de los segmentos BC, CA, AB, hay que demostrar que las rectas $\overleftrightarrow{AK}$, $\overleftrightarrow{BL}$ y $\overleftrightarrow{CM}$ pasan por un punto común.

De hecho, es posible mostrar que los *segmentos* AK, BL y CM tienen un punto en común.

Ahora bien: el álgebra que sigue puede simplificarse considerablemente *con una elección astuta de los ejes coordenados*. Tómese el origen en $K = (0,0)$ y colóquese el rayo $\overrightarrow{OX}$ en la dirección del rayo $\overrightarrow{KC}$, como indica el diagrama.

Entonces los vértices tienen las coordenadas:

$$A = (p,q), \qquad B = (-r,0), \qquad C = (r,0), \quad \text{con} \quad r > 0.$$

Los puntos medios respectivos de los lados son:

$$K = (0,0), \qquad L = \Big(\frac{p+r}{2}, \frac{q}{2}\Big), \qquad M = \Big(\frac{p-r}{2}, \frac{q}{2}\Big).$$

Las rectas $\overleftrightarrow{BL}$ y $\overleftrightarrow{CM}$ tienen las ecuaciones respectivas

$$\overleftrightarrow{BL} \;:\; \frac{q}{2}(x+r) - \frac{1}{2}(p+3r)y = 0, \qquad \overleftrightarrow{CM} \;:\; \frac{q}{2}(x-r) - \frac{1}{2}(p-3r)y = 0.$$

Si el punto de intersección $G = \overleftrightarrow{BL} \cap \overleftrightarrow{CM}$ de estas dos rectas tiene coordenadas $G = (x,y)$, entonces —al sumar y restar las dos ecuaciones anteriores— también debe cumplir

$$qx - py = 0, \qquad qr - 3ry = 0,$$

cuya solución es $G = \Big(\dfrac{p}{3}, \dfrac{q}{3}\Big)$. Este punto G es el **centroide** (o el **baricentro**) de $\triangle ABC$.

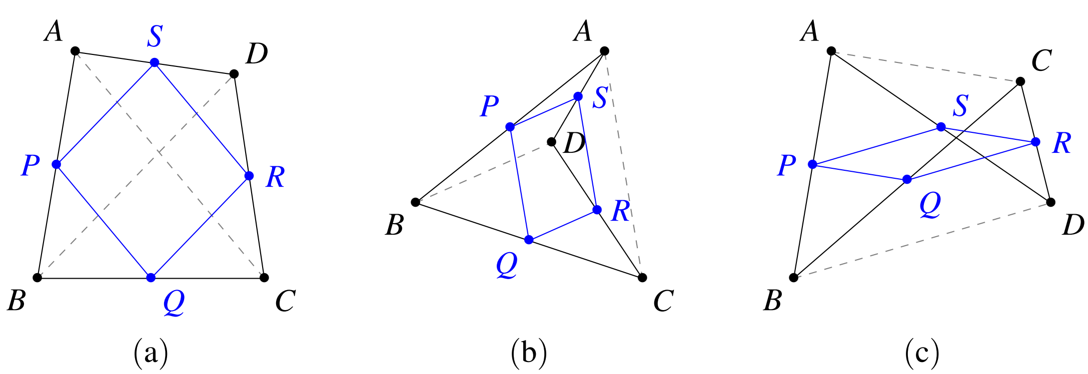
Pero este es un punto del segmento AK, con $t = \frac{2}{3}$ y $(1-t) = \frac{1}{3}$, porque

$$G = \big(\tfrac{1}{3}p, \tfrac{1}{3}q\big) = \big(\tfrac{1}{3}(p) + \tfrac{2}{3}(0), \tfrac{1}{3}(q) + \tfrac{2}{3}(0)\big).$$

Las fórmulas anteriores dan, inmediatamente, la relación $AG : GK = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1$.

Un cálculo sencillo comprueba que $BG : GL = CG : GM = \frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ también. $\square$

Proposición 2 (Teorema de Varignon)**.** *Los puntos medios de los lados de un cuadrángulo, tomados en orden, son vértices de un paralelogramo cuya área es la mitad del área del cuadrángulo.*



Proof. En el cuadrángulo $ABCD$, sean P, Q, R, S los puntos medios de los lados respectivos AB, BC, CD, DA. Hay que mostrar que el cuadrángulo $PQRS$ es un paralelogramo, que cumple $\operatorname{Area}(PQRS) = \frac{1}{2}\operatorname{Area}(ABCD)$.

Los segmentos AC y BD son las *diagonales* del cuadrángulo $ABCD$. La proposición tiene una demostración "sintética" no muy difícil, al aplicar el teorema de Thales[18] a los triángulos $\triangle ABD$, $\triangle BCA$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$ sucesivamente.

Si $A = (x_1,y_1)$, $B = (x_2,y_2)$, $C = (x_3,y_3)$, $D = (x_4,y_4)$, las coordenadas de los puntos medios de los lados son:

$$\begin{aligned} P &= \bigl(\tfrac{1}{2}(x_1+x_2), \tfrac{1}{2}(y_1+y_2)\bigr), & Q &= \bigl(\tfrac{1}{2}(x_2+x_3), \tfrac{1}{2}(y_2+y_3)\bigr), \\ R &= \bigl(\tfrac{1}{2}(x_3+x_4), \tfrac{1}{2}(y_3+y_4)\bigr), & S &= \bigl(\tfrac{1}{2}(x_4+x_1), \tfrac{1}{2}(y_4+y_1)\bigr). \end{aligned}$$

De ahí, es fácil calcular que $|PQ| = \frac{1}{2}|AC|$, $|QR| = \frac{1}{2}|BD|$, $|RS| = \frac{1}{2}|AC|$, $|SP| = \frac{1}{2}|BD|$.

En particular, se ve que $|PQ| = |RS|$ y $|QR| = |SP|$. Entonces $PQRS$ es un cuadrángulo cuyos lados opuestos son iguales, y por tanto es un paralelogramo.

La fórmula para el área de un triángulo con vértices A, B, C, *tomados en ese orden*, es:

$$\operatorname{Area}(ABC) = \tfrac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2).$$

⟦ Para verificarlo, primero hay que verificar que conserva su forma bajo traslaciones y rotaciones de los ejes (un paso que aquí se omite). Entonces, se puede elegir los ejes, como antes, para que $A = (p,q)$, $B = (-r,0)$ y $C = (r,0)$. En este caso, el lado derecho vale rq: media base por altura, si $q > 0$. ⟧

La fórmula análoga para el área de un cuadrángulo $ABCD$ es:

$$\operatorname{Area}(ABCD) = \tfrac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_1y_4 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3).$$

Al sustituir las coordenadas de los vértices de $PQRS$, un cálculo tedioso pero sencillo comprueba que $\operatorname{Area}(PQRS) = \frac{1}{2}\operatorname{Area}(ABCD)$. $\square$

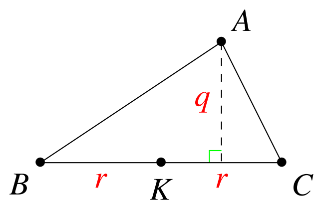
Nota Una mirada al caso (a) del diagrama anterior sugiere que el área del cuadrángulo podría definirse como

$$\operatorname{Area}(ABCD) = \operatorname{Area}(ABC) + \operatorname{Area}(CDA) = \operatorname{Area}(BCD) + \operatorname{Area}(DAB).$$

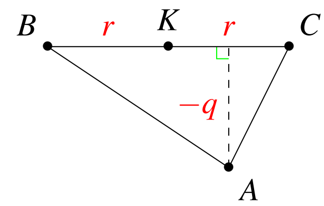
En efecto, así es cómo se obtiene la fórmula cartesiana para el $\operatorname{Area}(ABCD)$. Pero una ligera inspección de los casos (b) y (c) del diagrama sugiere que, para calcular el valor de $2\operatorname{Area}(PQRS)$, algunas hay que *restar* en vez de *sumar* áreas de estos triángulos. De hecho,

[18] Basta con aplicar un caso particular del teorema de Thales, llamado el *teorema de las medias paralelas*: el segmento que une dos puntos medios de lados de un triángulo es paralela a la base y mide la mitad de su longitud.

en el caso (c) de un *cuadrángulo cruzado*, si los dos alas de esta “mariposa” son congruentes, el paralelogramo $PQRS$ degenera en una figura de área nula.



$\mathrm{Area}(ABC) > 0$



$\mathrm{Area}(ABC) < 0$

Resulta que la fórmula dada para el $\mathrm{Area}(ABC)$ puede tomar *valores positivos o negativos* según las circunstancias. En el caso simplificado en donde $A = (p,q)$, $B = (-r,0)$, $C = (r,0)$ y por ende $\mathrm{Area}(ABC) = rq$, se puede tomar $r > 0$ pero el signo de q no está determinado. Resulta que $q > 0$ si y sólo si *el recorrido de los vértices* $A \to B \to C \to A$ es contrario a reloj. El signo del área, según la fórmula cartesiana, está determinado por la *orientación* del recorrido de los vértices.

2.3 Uso de las coordenadas trilineales

Para estudiar la geometría del triángulo, a veces resulta útil tomar un triángulo fijo $\triangle ABC$ como objeto de referencia, en vez de los ejes cartesianos. La idea es *prolongar los lados* del triángulo $\triangle ABC$ en las tres rectas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{AB}$, que no son concurrentes; y de usar estas tres rectas como sustituto para los dos ejes cartesianos $\overleftrightarrow{OX}$, $\overleftrightarrow{OY}$. Obviamente, hay cierta redundancia en esta descripción; pero es manejable.

Cualquier recta tiene una ecuación de la forma $ax + by + c = 0$ donde $a^2 + b^2 > 0$. La distancia desde el punto $P = (x,y)$ a esta recta está dada por la fórmula

$$d = \pm \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

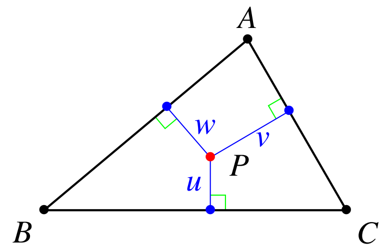
con signo $-$ si el numerador de la fracción es negativa. (Ese numerador es 0 si y sólo la distancia es 0, para los puntos de la propia recta.) Al dividir $(ax + by + c)$ por el denominador $\sqrt{a^2 + b^2}$, la ecuación de la recta toma la forma

$$x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha - k = 0.$$

La fórmula de la distancia del punto (x,y) a la recta es entonces

$$\boxed{d = \pm(x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha - k).}$$

La cantidad $(x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha - k)$ *es* >0 *a un lado de la recta* y es <0 al otro lado.[19] Además, es posible *predeterminar el lado positivo de la recta*, al elegir α y k correctamente.[20]



► Dado un triángulo fijo $\triangle ABC$, es posible encontrar ángulos α, β, γ y números k, l, m, tales que las tres expresiones

$$u = x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha - k,$$
$$v = x\cos\beta + y\,\mathrm{sen}\,\beta - l,$$
$$w = x\cos\gamma + y\,\mathrm{sen}\,\gamma - m,$$

representan **coordenadas trilineales** con respecto a $\triangle ABC$. En otras palabras, los tres lados están dados por

$$\overleftrightarrow{BC} : \underline{u = 0}, \qquad \overleftrightarrow{CA} : \underline{v = 0}, \qquad \overleftrightarrow{AB} : \underline{w = 0},$$

y además los tres números u, v, w *son positivos en el interior* del triángulo. Ellos son las distancias del punto $P = (x, y)$ a los tres lados de $\triangle ABC$.

Las coordenadas trilineales u, v, w del punto P no son independientes; a final de cuentas, reemplazan las dos coordenadas (x, y). Están ligadas por una relación lineal[21]

$$u\,\mathrm{sen}\,A + v\,\mathrm{sen}\,B + w\,\mathrm{sen}\,C \;\equiv\; \text{constante},$$

donde $\mathrm{sen}\,A = \mathrm{sen}(\angle CAB)$, $\mathrm{sen}\,B = \mathrm{sen}(\angle ABC)$, $\mathrm{sen}\,C = \mathrm{sen}(\angle BCA)$ son los senos de los tres ángulos del triángulo. Es importante notar que *hay libertad de elegir la unidad de longitud* en el plano cartesiano, porque la geometría euclidiana es insensible a un cambio de escala global. No se pierde nada al tomar la constante igual a 1; lo importante es la *proporción* entre las tres coordenadas, que se escribe $(u : v : w)$.

[19] Para comprobarlo, imagínese un punto (x, y) que se mueve de un extremo al otro de un segmento PQ. La cantidad $(x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha - k)$ cambia continuamente en el trayecto; tendrá signos opuestos en los dos extremos del segmento si y sólo si toma el valor 0 en algún punto intermedio. Esto ocurre si y sólo si el segmento PQ corta la recta, si y sólo si Q está al otro lado de la recta que P.

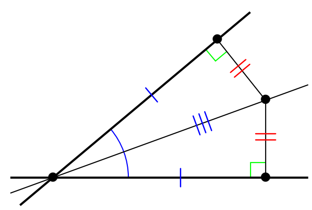
[20] Por trigonometría, se sabe que $\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha$ y $\mathrm{sen}(\alpha \pm \pi) = -\,\mathrm{sen}\,\alpha$; si se reemplazan α y k por $\alpha \pm \pi$ por $-k$, la expresión $(x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha - k)$ cambia de signo.

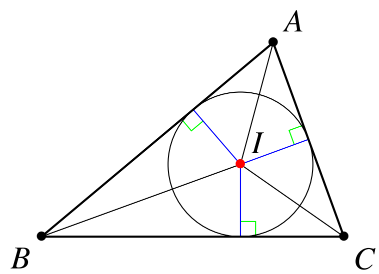
[21] La constante es $\mathrm{Area}(ABC)/R$, donde R es el radio del circuncírculo. Esto se verifica con de la *ley de senos*, $|BC| : \mathrm{sen}\,A = |CA| : \mathrm{sen}\,B = |AB| : \mathrm{sen}\,C = 2R$; usando $\mathrm{Area}(ABC) = \mathrm{Area}(PBC) + \mathrm{Area}(PCA) + \mathrm{Area}(PAB)$.

Otra cosa: cualquier ecuación de la forma $\underline{pu+qv+rw=0}$, donde p,q,r son constantes (no todas cero), *representa una recta*. De hecho, si se sustituye las fórmulas para u,v,w en esta relación, se obtiene una *ecuación de primer grado* en las variables cartesianas x,y, que corresponde a una recta.

► Ahora bien: cualquier proposición acerca de la geometría de triángulos puede plantearse en términos de las coordenadas (u,v,w), habida cuenta de la ligadura anterior.

Proposición 3. *Las bisectrices internas de los ángulos de un triángulo son concurrentes en un punto que es equidistante de los tres lados.*





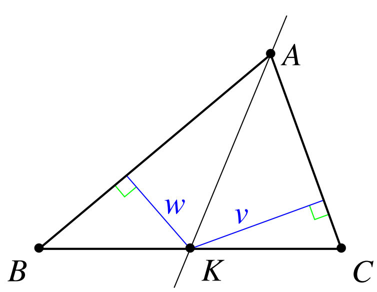
Proof. Cualquier punto de recta bisectriz de un ángulo guarda la misma distancia desde los dos rectas que incluyen el ángulo: esto se verifica fácilmente usando el criterio LAL de congruencia de triángulos.

En el triángulo $\triangle ABC$, la bisectriz del ángulo $\angle ABC$, delimitado por las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$, entonces cumple la relación $\underline{w=u}$. De igual manera, las otras bisectrices de ángulos son $\underline{u=v}$ y $\underline{v=w}$. Estas tres ecuaciones tiene una solución en común, dada por $u=v=w$.

El valor común de $u=v=w$ puede obtenerse al usar la ligadura antes mencionada. No hace falta calcularlo; basta notar las proporciones $(u:v:w)=(1:1:1)$. El punto con estas coordenadas es el **incentro** I del triángulo $\triangle ABC$. Las bisectrices internas son, entonces:

$$\overleftrightarrow{AI} : \underline{v=w}, \qquad \overleftrightarrow{BI} : \underline{w=u}, \qquad \overleftrightarrow{CI} : \underline{u=v}.$$

El punto I es el centro del círculo que toca los tres lados del triángulo internamente. □



La *concurrencia de la medianas* (la Proposición 1 anterior) se demuestra rápidamente también, usando las coordenadas trilineales. En el punto medio K del lado BC cumple la ecuación $\underline{u = 0}$ de la recta $\overleftrightarrow{BC}$; y las perpendiculares a los otros lados satisfacen

$$\frac{v}{\operatorname{sen} C} = |KC| = |BK| = \frac{w}{\operatorname{sen} B}$$

por trigonometría, como indica el diagrama. Al simplificar, K satisface la ecuación

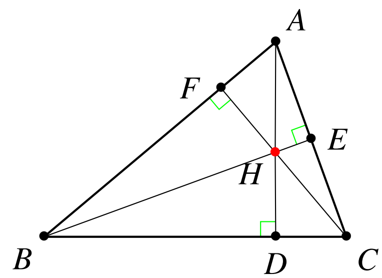
$$v \operatorname{sen} B = w \operatorname{sen} C.$$

Pero esta ecuación también es válida en el punto en donde $v = w = 0$. Este punto es el vértice A, el cual es la intersección de las dos rectas $\overleftrightarrow{AB}$ ($w = 0$) y $\overleftrightarrow{AC}$ ($v = 0$). Se ha identificado la ecuación de una recta que pasa por los puntos A y K, la cual debe ser, naturalmente, la recta $\overleftrightarrow{AK}$.

Entonces las tres medianas (prolongadas en rectas) tiene las ecuaciones:

$$\overleftrightarrow{AK}: \ \ v \operatorname{sen} B = w \operatorname{sen} C, \qquad \overleftrightarrow{BL}: \ \ w \operatorname{sen} C = u \operatorname{sen} A, \qquad \overleftrightarrow{CM}: \ \ u \operatorname{sen} A = v \operatorname{sen} B.$$

Es evidente que hay una solución común, en donde $(u : v : w) = (\csc A : \csc B : \csc C)$. Este es el centroide G. Fíjese que $\csc A = 1/(\operatorname{sen} A) > 0$; luego, las tres coordenadas trilineales de G son positivos, así que G queda en el interior del triángulo, como era de esperar.



Proposición 4. *Las tres alturas de un triángulo son concurrentes.*

Las **alturas** de una triángulo son las perpendiculares AD, BE y CF desde cada vértice al lado opuesto. Se deja como ejercicio comprobar que las ecuaciones de las alturas son:

$$\overleftrightarrow{AD}: \ \ v \cos B = w \cos C, \qquad \overleftrightarrow{BE}: \ \ w \cos C = u \cos A, \qquad \overleftrightarrow{CF}: \ \ u \cos A = v \cos B.$$

Es evidente que hay una solución común, en donde $(u : v : w) = (\sec A : \sec B : \sec C)$. Este es el **ortocentro** H de $\triangle ABC$.

2.4 Uso de las coordenadas areales

Un sistema diferente de coordenadas redundantes para el plano es el sistema de coordenadas *areales* o *baricéntricas*. Anteriormente, se había parametrizado la recta $\overleftrightarrow{AB}$, donde

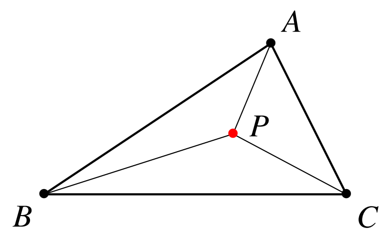
$A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, por un parámetro real t. Al poner $s = (1 - t)$, esa fórmula se reescribe así:

$$\begin{aligned} x &= sx_1 + tx_2, \\ y &= sy_1 + ty_2, \end{aligned} \qquad \text{con} \quad s + t = 1.$$

El punto $P = (x, y)$ divide el segmento AB en la razón $AP : PB = t : s$.

Para parametrizar el plano, se puede usar un **triángulo de referencia** $\triangle ABC$, con vértices $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$. Esta vez, hacen falta *tres* números reales r, s, t, ligados por la relación $r + s + t = 1$, para expresar las coordenadas de un punto cualquiera del plano:[22]

$$\begin{aligned} x &= rx_1 + sx_2 + tx_3, \\ y &= ry_1 + sy_2 + ty_3, \end{aligned} \qquad \text{con} \quad r + s + t = 1.$$



Entonces (r, s, t) son las **coordenadas areales** del punto P con coordenadas cartesianas (x, y). Sus valores están dadas por ciertos cocientes de áreas:[23]

$$r = \frac{\mathrm{Area}(PBC)}{\mathrm{Area}(ABC)}, \qquad s = \frac{\mathrm{Area}(PCA)}{\mathrm{Area}(ABC)}, \qquad t = \frac{\mathrm{Area}(PAB)}{\mathrm{Area}(ABC)}.$$

Al declarar el triángulo de referencia, se puede asegurar que el recorrido de sus vértices $A \to B \to C \to A$ sea contrario a reloj, de modo que el denominador $\mathrm{Area}(ABC)$ sea positivo. Entonces los tres numeradores son positivos si y sólo si P es un punto del interior del triángulo. Dicho de otro modo, el **interior** del triángulo $\triangle ABC$ está dado por los valores

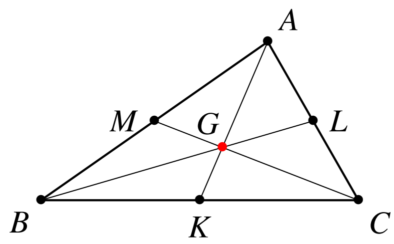
$$0 < r < 1, \quad 0 < s < 1, \quad 0 < t < 1; \quad \text{con} \quad r + s + t = 1.$$

Físicamente, si se cuelgan masas en los tres vértices de $\triangle ABC$ en la proporción $r : s : t$, el punto P del interior es el *baricentro* (o centro de gravedad) resultante. De ahí viene el nombre alternativo de *coordenadas baricéntricas*.[24]

[22] Si P es un punto distinto de A, sea Q el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{BC}$. Los coeficientes r, s, t están determinados por las razones $AP : PQ = (1 - r) : r$ y además $BQ : QC = t : s$.

[23] Para una exposición más detallada de las coordenadas areales, véase el apéndice del libro: C. J. Bradley, *Challenges in Geometry*, Oxford University Press, 2005.

[24] Así es como fueron introducidos por August Möbius en 1827. Véase la sección 13.7 del libro: H. S. M. Coxeter, *Fundamentos de Geometría*, Limusa-Wiley, México, 1971.



Las coordenadas areales no coinciden con los coordenadas trilineales. Por ejemplo, se sabe que las medianas dividen un triángulo en 6 porciones de igual área. Esto dice que las coordenadas areales del centroide son $(r,s,t) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, o bien $(r:s:t) = (1:1:1)$. En cambio, ya se ha visto que el punto $(u:v:w) = (1:1:1)$ es el incentro en vez del centroide.[25]

► Si $\triangle PQR$ es un triángulo con vértices (r,s,t), (a,b,c), (d,e,f) en coordenadas areales, hay una fórmula para el área de $\triangle PQR$, comparado con el área del triángulo de referencia:[26]

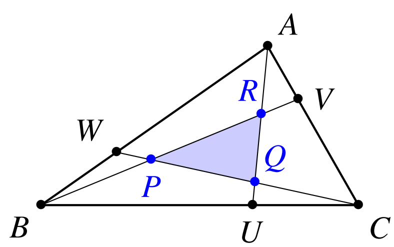
$$\frac{\mathrm{Area}(PQR)}{\mathrm{Area}(ABC)} = (bf - ce)r + (cd - af)s + (ae - bd)t.$$

En particular, los tres puntos P, Q, R son *colineales* cuando $\mathrm{Area}(PQR) = 0$. Entonces la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{QR}$ es:

$$(bf - ce)r + (cd - af)s + (ae - bd)t = 0.$$

Por ejemplo, una recta $\overleftrightarrow{AQ}$ que pasa por el vértice $A = (1,0,0)$ tiene ecuación $cs - bt = 0$.

Con esta información, algunos problemas que serían difíciles con coordenadas cartesianas o trilineales se resuelven fácilmente con coordenadas areales.



Proposición 5 (Teorema de Routh)**.** *Si tres puntos U,V,W dividen los lados respectivos del triángulos $\triangle ABC$ en las razones $BU : UC = CV : VA = AW : WB = 2:1$, los tres segmentos AU, BV, CW encierran un triángulo cuya área es $1/7$ de* $\mathrm{Area}(ABC)$.

[25] El incentro y el centroide sólo coinciden si el triángulo es equilátero. El teorema de Guinand (1984) dice que el incentro I queda en el interior del círculo de diámetro GH.

[26] Este es el determinante de la matriz 3×3 formado por las coordenadas areales de los vértices. Véase Bradley, *op. cit.*

Proof. Las coordenadas areales de los puntos dados son

$$U = (0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}), \qquad V = (\tfrac{2}{3}, 0, \tfrac{1}{3}), \qquad W = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 0).$$

Por tanto, la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{AU}$ es $2s - t = 0$. De igual manera, se obtienen las ecuaciones de $\overleftrightarrow{BV}$ y $\overleftrightarrow{CW}$:

$$\overleftrightarrow{AU}: \ 2s = t, \qquad \overleftrightarrow{BV}: \ 2t = r, \qquad \overleftrightarrow{CW}: \ 2r = s.$$

Tomando en cuenta la ligadura $r + s + t = 1$, sus puntos de intersección son

$$P = \overleftrightarrow{BV} \cap \overleftrightarrow{CW} = (\tfrac{2}{7}, \tfrac{4}{7}, \tfrac{1}{7}), \quad Q = \overleftrightarrow{CW} \cap \overleftrightarrow{AU} = (\tfrac{1}{7}, \tfrac{2}{7}, \tfrac{4}{7}), \quad R = \overleftrightarrow{AU} \cap \overleftrightarrow{BV} = (\tfrac{4}{7}, \tfrac{1}{7}, \tfrac{2}{7}).$$

La fórmula para el área relativa de $\triangle PQR$ entonces da

$$\frac{\text{Area}(PQR)}{\text{Area}(ABC)} = \left(\frac{4-4}{49}\right)\frac{2}{7} + \left(\frac{16-2}{49}\right)\frac{4}{7} + \left(\frac{1-8}{49}\right)\frac{1}{7} = \frac{0+56-7}{7^3} = \frac{49}{7^3} = \frac{1}{7}. \qquad \square$$

Este resultado es atribuido a Edward Routh (1897), quien dio la fórmula para el área de $\triangle PQR$ para tres razones $BU : UC$, $CV : VA$, $AW : WB$ cualesquiera. El caso particular de razones $2 : 1$ tiene soluciones anteriores.[27]

3 Una alternativa moderna: la trigonometría racional

El método de coordenadas ha sido tan exitoso que en el siglo XX surgieron varios movimientos para eliminar la geometría euclidiana del currículo escolar, en favor de la manipulación de expresiones algebraicas o bien el uso de vectores. Este fue un tema de debate en el primer congreso interamericano de educación matemática en Bogotá (diciembre de 1961) y en otros posteriores.[28]

En este parte, se presenta una nueva propuesta de retomar el método de coordenadas, no para desplazar su contenido geométrico sino para aumentarlo, con una pretendida simplificación de sus aspectos trigonométricos. Como subproducto, este nuevo enfoque abre un camino hacia la aritmética, al permitir la consideración de las geometrías finitas.

Estas ideas han sido desarrolladas en los últimos diez años por el matemático canadiense-australiano Norman Wildberger y sus estudiantes.[29]

[27] Parece que fue un problema favorito de la escuela pedagógica de Pestalozzi, según su egresado ilustre Jakob Steiner, quien tuvo que resolverlo como alumno en 1814. Véase Ostermann y Wanner, *op. cit.*

[28] En el libro: A. Campos, *La Educación Geométrica*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1981, el autor hace una excelente recopilación de las opiniones sobre el papel de la geometría euclidiana en la enseñanza media, a la luz de esos congresos. En Bogotá, el norteamericano Howard Fehr abogó fuertemente para extirpar el corpus euclidiano de la enseñanza superior y para reducir su bulto en la enseñanza media. Su postura fue contestada por el brasileño Omar Catunda quien reclamó que, para Brasil en todo caso, el eslogan no debería de ser *"Euclide à bas!"* sino *"Ao menos Euclides!"* Véase el libro: H. F. Fehr, ed., *Mathematical Education in the Americas*, Teachers College, Columbia University, New York, 1962.

[29] El breviario del enfoque racional sobre la trigonometría es el libro: N. J. Wildberger, *Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry*, Wild Egg Books, Sydney, 2005. Contiene un tratamiento detallado de los fundamentos y diversos aplicaciones a la geometría plana, la mecánica y la geodesia.

3.1 Medición de segmentos y ángulos

El cálculo de la longitud de un segmento mediante coordenadas cartesianas sufre de una leve incomodidad: se requiere evaluar raíces cuadradas. Si $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, entonces

$$|AB| = |BA| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

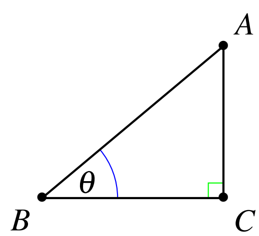
Así, por ejemplo, la distancia entre los puntos $(3,5)$ y $(7,4)$ es $\sqrt{17} \doteq 4{\cdot}1231056256\ldots$. Para superar este pequeño obstáculo, se podría reemplazar la *longitud* del segmento AB por la **cuadrancia** del par de puntos A y B:

$$Q_{AB} = Q_{BA} := (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Informalmente, se reemplaza la longitud $|AB|$ por su cuadrado $Q_{AB} = |AB|^2$.

La medición de ángulos presenta una dificultad mayor. Es deseable asignar un valor numérico a cada ángulo para poder comparar dos ángulos desiguales que no comparten un vértice. Hay dos soluciones conocidas, no muy satisfactorias. Una de ellas es medir el ángulo en *radianes*, es decir, hallar la longitud del arco circular subtendido por el ángulo desde el centro de un círculo de radio 1. Aparte de la dificultad de calcular la longitud de esta curva, hay que tomar en cuenta que el ángulo determina *dos* arcos, uno "menor" y otro "mayor".

La segunda opción es mucho más antigua: se observa su uso en el siglo II d.C. por el astrónomo Claudius Tolomeo,[30] es usar el *seno* del ángulo. Si $\triangle ABC$ tiene un ángulo recto en el vértice C, el seno del ángulo en B es $\operatorname{sen}(\angle ABC) = |AC| : |AB|$. De nuevo, la necesidad de calcular la longitud de la hipotenusa introduce raíces cuadradas.

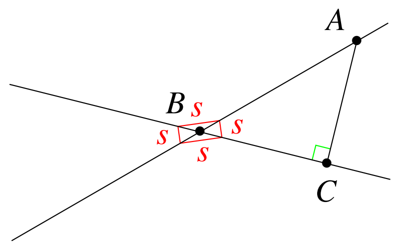


Hay otro problema: como $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$ según el formulario trigonométrico conocido, el uso del seno implicaría distinguir entre el ángulo $\angle ABC$ y el ángulo $\angle CBA$ ya que sus senos tendrían signos opuestos. La solución a esta dificultad, una vez más, es reemplazar el seno por su cuadrado, porque $\operatorname{sen}^2(-\theta) = \operatorname{sen}^2\theta$. En vista de las relaciones

$$\operatorname{sen}^2(-\theta) = \operatorname{sen}^2\theta = \operatorname{sen}^2(\pi - \theta) = \operatorname{sen}^2(\theta - \pi),$$

[30]Tolomeo, en sus tablas astronómicas, usó la *media cuerda* subtendido por un ángulo periférico en un círculo de radio 1; esta longitud coincide con el seno, por la llamada "ley de senos". En las traducciones árabes de sus obras, este término fue mal traducido y regresó al medioevo europeo en latín como la palabra *sinus*: un pecho.

a los cuatro ángulos formados en la intersección de dos rectas se les asigna el mismo valor. Entonces, esta cantidad no depende del ángulo propiamente, sino del par de rectas formadas al prolongar los brazos del ángulo.



Conclusión: en vez de medir ángulos, se trata de *asignar un número a la abertura entre dos rectas* que se cortan. Este número será llamado el **despliegue** de las dos rectas.[31] Dadas dos rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ que se cortan en el punto B, de manera que el segmento AC es la perpendicular desde A a $\overleftrightarrow{BC}$, el despliegue de las dos rectas es

$$s_B = s(BA, BC) := \frac{|AC|^2}{|AB|^2} = \frac{Q_{AC}}{Q_{AB}}.$$

Este cociente no depende de la posición de A (por el teorema de Thales) y es fácil mostrar que $s(BA, BC) = s(BC, BA)$.

► El uso de las cantidades cuadráticas Q y s elimina las raíces cuadráticas del juego y también suprime algunas ambigüedades de signos. El *teorema de Pitágoras* para el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ se convierte en *una ecuación de primer grado* entre cuadrancias:

$$Q_{BC} + Q_{AC} = Q_{AB} \quad \text{si y sólo si} \quad AC \perp BC.$$

En un triángulo rectángulo cuyos lados tiene longitudes 12, 5 y 13, por ejemplo, las cuadrancias de lados y los despliegues en los vértices son:

$$Q_{BC} = 144, \quad Q_{AC} = 25, \quad Q_{AB} = 169; \qquad s_A = \frac{144}{169}, \quad s_B = \frac{25}{169}, \quad s_C = 1.$$

En fin: la trigonometría se vuelve *racional*: los cálculos con cuadrancias y despliegues sólo involucran números racionales.

► Al no usar más que las cuatro operaciones básicas de la aritmética (suma, resta, producto y cociente) este enfoque permite hacer geometría con otros sistemas de números que los reales. En particular, *permite el uso de coordenadas tomados de un cuerpo finito*, lo cual abre una puerta de acceso a las *geometrías finitas*.

[31] Los términos *cuadrancia* y *despliegue* son traducciones de las palabras ingleses **quadrance** y **spread** empleados por Wildberger. A decir verdad, el vocablo *spread* no tiene traducción exacta al español: tiene connotaciones de extensión, amplitud, separación —o despliegue.

Un **cuerpo finito** es un sistema cerrado de aritmética[32] que sólo admite un número finito de números. Si p es un número entero primo, los *residuos* bajo división por p forman un cuerpo finito. Por ejemplo, los residuos bajo división por 13 son

$$\mathbb{F}_{13} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\text{A},\text{B},\text{C}\},$$

donde se emplea tres "dígitos" adicionales: $\text{A} =$ diez, $\text{B} =$ once, $\text{C} =$ doce.

Algunos cálculos válidos en este sistema son los siguientes:

$$\begin{aligned} 4 - \text{B} &= \text{“}(-7)\text{”} = \text{“}13-7\text{”} = 6, \\ 7 \times 8 &= \text{“}56\text{”} = \text{“}52+4\text{”} = 4, \\ 9 \times 3 &= \text{“}27\text{”} = \text{“}26+1\text{”} = 1. \end{aligned}$$

En cada caso, se efectúa la operación con los enteros usuales (entre comillas), sumando o restando múltiplos de 13 a gusto, hasta llegar a un residuo en la lista. En este sistema aritmético, por ejemplo, $1/3$ es igual a 9.

El cuerpo finito $\mathbb{F}_{13}$ esconde una sorpresa desagradable: la suma de dos cuadrados puede ser cero.[33] En efecto, se ve que

$$5^2 + \text{C}^2 = \text{“}25+144\text{”} = \text{“}169\text{”} = 0.$$

3.2 Elementos de geometría en un plano finito

Conviene ahora dejar la geometría euclidiana atrás *para empezar de nuevo con coordenadas solamente*. Pero el objetivo no es suprimir la intuición ni el aspecto visual, sino ampliar el horizonte. En breve, la geometría del plano volverá a aparecer.

► Las coordenadas $x,y,a,b,c,\dots$ se tomarán de un cuerpo de números $\mathbb{F}$ cualquiera: podría ser los números reales, o bien los números racionales, o bien un cuerpo finito $\mathbb{F}_p$ donde p es un número primo impar.[34]

---

[32] Por "sistema cerrado" se entiende, de manera más precisa, que hay un conjunto finito dotado con adición y multiplicación, que obedece las reglas aritméticas usuales, tal que cada elemento no nulo posee un recíproco: si $x \neq 0$, hay un (único) elemento y tal que $xy = 1$. El nombre técnico para tal sistema es **cuerpo**; algunas regiones usan el anglicismo *campo* en vez de "cuerpo".

[33] Si $p \neq 2$ y si $m^2 + n^2 = p$ para dos números enteros m y n, uno de ellos debe ser par y el otro impar. Si $m = 2k$ y $n = 2l+1$, entonces $p = 4k^2 + 4l^2 + 4l + 1$. Esto muestra que este fenómeno no puede ocurrir si $p = 4r+3$ para algún entero r, así que $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_7$, $\mathbb{F}_{11}$ no admiten este fenómeno. Sin embargo, si p es de la forma $4r+1$, como en $\mathbb{F}_5$, $\mathbb{F}_{13}$, $\mathbb{F}_{17}$, siempre hay pares de cuadrados cuya suma es cero.

[34] En lo que sigue, habrá muchas instancias de división por 2; por ejemplo, para buscar el punto medio entre dos puntos dados. El número $2 = 1+1$ entonces debe tener un recíproco. Por tanto, hay que excluir cuerpos como $\mathbb{F}_2$ en donde $1+1 = 0$. Es sabido que estos "cuerpos de característica 2" son bastante inmanejables en la teoría de números.

Un **punto** será un par ordenado de números (x,y). El **plano** será la totalidad de estos puntos, a veces denotado por $\mathbb{F}^2$. (También es posible hacer geometría en tres o más dimensiones, pero aquí se considera el caso de un solo plano.)

Una **recta** es una *proporción* $\langle a:b:c\rangle$ de tres números, donde *se excluye* el caso $a=b=0$. La igualdad de dos proporciones se define por

$$a:b:c=p:q:r \quad \text{si y sólo si} \quad aq=bp,\ ar=cp,\ br=cq.$$

Dícese que el punto (x,y) queda sobre la recta $\langle a:b:c\rangle$, o bien, lo que es lo mismo, que la recta $\langle a:b:c\rangle$ pasa por el punto (x,y), si y sólo si se cumple la ecuación

$$ax+by+c=0.$$

El manejo de puntos y rectas se basa en las fórmulas siguientes:

⋆ La recta que pasa por dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) es

$$\langle y_1-y_2 : x_2-x_1 : x_1y_2-x_2y_1\rangle.$$

⋆ Los tres puntos (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) son colineales si y sólo si

$$x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_2y_1-x_3y_2=0.$$

⋆ Las tres rectas $\langle a_1:b_1:c_1\rangle$, $\langle a_2:b_2:c_2\rangle$, $\langle a_3:b_3:c_3\rangle$ son concurrentes si y sólo si

$$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1=0.$$

Al igual que en el plano cartesiano, hay que dar criterios numéricos para el *paralelismo* y la *perpendicularidad* de rectas. El concepto de paralelismo es sencillo: dos rectas distintas se llaman **rectas paralelas** si no se cortan; es decir, si no tienen un punto en común.[35]

Es fácil verificar que las rectas $\mathbf{r}_1=\langle a_1:b_1:c_1\rangle$ y $\mathbf{r}_2=\langle a_2:b_2:c_2\rangle$ son *paralelas o iguales* si y sólo si

$$a_1:b_1=a_2:b_2, \quad \text{o lo que es lo mismo, si y sólo si} \quad a_1b_2-a_2b_1=0.$$

El *axioma de Playfair* es entonces un *teorema* en este enfoque: dados un punto (x,y) y una recta $\langle a:b:c\rangle$, hay exactamente una recta que pasa por (x,y) y es paralela o igual a la recta dada. Esta es la recta $\langle a:b:-ax-by\rangle$.

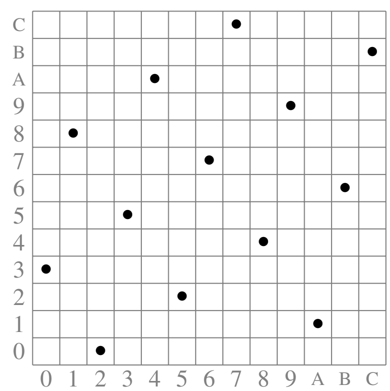
[35] Las llamadas geometrías *no euclidianas* no están contempladas en este esbozo. Sin embargo, es posible incorporarlas fácilmente en el enfoque, *al variar la definición de perpendicularidad*. Si se reemplaza la forma bilineal definida $a_1a_2+b_1b_2$ por cualquiera de las dos formas indefinidas $a_1a_2-b_1b_2$ o bien $a_1b_2+a_2b_1$, se obtiene dos geometrías no euclidianas. Las tres versiones, bautizadas *azul* (la euclidiana), *rojo* y *verde*, están descritas y comparadas en el artículo: N. J. Wildberger, *Chromogeometry*, Mathematical Intelligencer **32** (2010), 26–32.

▶ El concepto de perpendicularidad es menos inmediato. Lo que hay que hacer es *tomar como definición* el criterio cartesiano de perpendicularidad. Manos a la obra: dícese que dos rectas $\mathbf{r}_1 = \langle a_1 : b_1 : c_1 \rangle$ y $\mathbf{r}_2 = \langle a_2 : b_2 : c_2 \rangle$ son **perpendiculares** si y sólo si

$$a_1 : b_1 = -b_2 : a_2, \quad \text{o lo que es lo mismo, si y sólo si} \quad \boxed{a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0}\,.$$

De nuevo, una sorpresa desagradable: con coordenadas generales, la recta $\langle a : b : c \rangle$ podría ser *perpendicular a sí misma*. Esto ocurre si y sólo si $a^2 + b^2 = 0$. Tales rectas se llaman **rectas nulas**. No hay rectas nulas en el plano si se usan coordenadas reales o racionales, o elementos de $\mathbb{F}_{11}$; pero los hay si las coordenadas vienen de $\mathbb{F}_{13}$ o son complejos.[36]

Para exhibir una recta nula, considérese el plano finito con coordenadas en $\mathbb{F}_{13}$. El plano es un tablero con 169 puntos. Una recta corresponde con un juego de 13 puntos que repiten un "movimiento de ajedrez" en el tablero, dado por $(x,y) \mapsto (x+b, y-a)$, porque este movimiento conserva la ecuación de la recta $ax + by + c = 0$. Para modelar los residuos de división por 13 en las dos coordenadas, se identifican los lados izquierdo y derecho del tablero, como también los lados superior e inferior.

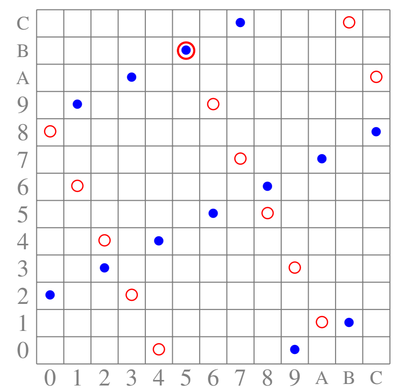


En el diagrama se exhibe la recta nula $\langle 6 : 4 : 1 \rangle$ —pues $6^2 + 4^2 = \text{“}36+16\text{”} = \text{“}52\text{”} = 0$ en $\mathbb{F}_{13}$— que pasa por el punto $(2,0)$ porque $6(2) + 4(0) + 1 = \text{“}13\text{”} = 0$; y sigue en incrementos de $(3,2)$, porque $6(3) + 4(2) = \text{“}18+8\text{”} = \text{“}26\text{”} = 0$, dando vuelta al tablero en forma cíclica, hasta volver a $(2,0)$ en trece pasos. La autoperpendicularidad de esta recta salta a la vista.[37]

[36] En los números complejos, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene dos soluciones i, $-i$. La recta $\langle 1 : i : 0 \rangle$ es nula.

[37] El diagrama está tomado de la Figura 3.6 del libro de Wildberger, *op. cit.*

El siguiente diagrama ilustra la intersección de dos rectas perpendiculares, no nulas, en el plano con coordenadas en $\mathbb{F}_{13}$.



► La **cuadrancia** de un par de puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ se define, como ya se había anticipado, por

$$\boxed{Q_{AB} := (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.}$$

Está claro que $Q_{AB} = Q_{BA}$. Con números reales o racionales, Q_{AB} es *positiva* si $A \neq B$.

Sin embargo, en un cuerpo finito *no es posible definir un orden* lineal, por su naturaleza cíclica ilustrada en el diagrama anterior. En tal caso, no se puede hablar de "positividad". Resulta que $Q_{AB} = 0$ si y sólo si la recta AB es una recta nula.

Nota En esta parte, las rectas no se adornan con flechas, porque sería irrelevante, por la (posible) falta de un orden lineal. Ahora se escribe "la recta AB" para denotar la recta que pasa por A y B. De hecho, sin un orden lineal no tiene sentido hablar del "segmento" AB. Aun así, el *punto medio M entre A y B* conserva un sentido; es simplemente el punto con coordenadas $M = \bigl(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\bigr)$.

► El **despliegue** de un par de rectas no nulas $\mathbf{r}_1 = \langle a_1 : b_1 : c_1 \rangle$ y $\mathbf{r}_2 = \langle a_2 : b_2 : c_2 \rangle$ se define por la fórmula

$$\boxed{s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) := \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}\,.}$$

No se define el despliegue de dos rectas si cualquiera de ellas es *nula*, para evitar denominadores de valor 0.

Si las coordenadas son racionales o reales, resulta que $0 \leq s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \leq 1$, en vista de la identidad de Fibonacci:[38]

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 a_2 + b_1 b_2)^2.$$

[38] La fórmula $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad - bc)^2 + (ac + bd)^2$ aparece en el *Liber Quadratorum* de Leonardo Fibonacci (1225). Anteriormente fue mencionado por Diofanto (siglo III) y por Brahmagupta (siglo VII).

Entre las consecuencias de esta identidad, nótese que $s(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=1$ si y sólo si $a_1a_2+b_1b_2=0$, si y sólo si las rectas $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son perpendiculares.

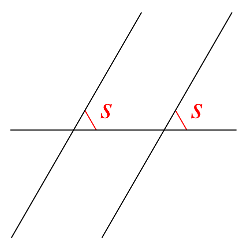
La trigonometría racional también saca provecho de otras dos funciones:

$$c(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) := \frac{(a_1a_2+b_1b_2)^2}{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)} \qquad t(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) := \frac{(a_1b_2-a_2b_1)^2}{(a_1a_2+b_1b_2)^2}\,,$$

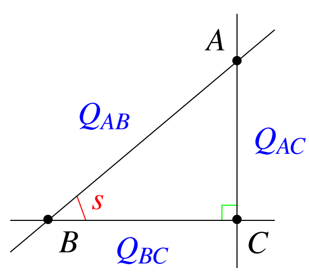
donde t no se define si $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son perpendiculares. La "formula de Pitágoras" es simplemente

$$s+c=1, \quad \text{o lo que es lo mismo,} \quad c=1-s.$$

Además, se ve que $t=s/c$ por definición, así que $t=s/(1-s)$.



Fíjese que la fórmula para s no involucra los parámetros c_1 y c_2 de las rectas, el desplazamiento paralelo de una de las rectas no cambia el despliegue.



Es un ejercicio de álgebra verificar que si las rectas AB y BC forman la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo (vale decir, si las rectas AC y BC son perpendiculares), donde ninguna de las tres rectas es nula, entonces

$$s(AB,BC)=\frac{Q_{AC}}{Q_{AB}}\,.$$

► Vale la pena observar que $s(1-s)$ es un cuadrado:

$$s(1-s)=sc=\left(\frac{(a_1b_2-a_2b_1)\,(a_1a_2+b_1b_2)}{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)}\right)^2.$$

Para números racionales o reales, los cuadrados son no negativos: $s(1-s) \geq 0$, así que $0 \leq s \leq 1$, como ya se ha notado. En cambio, en el cuerpo finito $\mathbb{F}_p$, exactamente la mitad de los números no ceros son cuadrados, por un teorema básico de la teoría de números.[39]

Inversamente, si $s(1-s) = r^2$ para algún número r, entonces las rectas $\mathbf{r}_1 = \langle 0 : 1 : 0 \rangle$ y $\mathbf{r}_2 = \langle r : 1-s : 0 \rangle$ tienen despliegue igual a

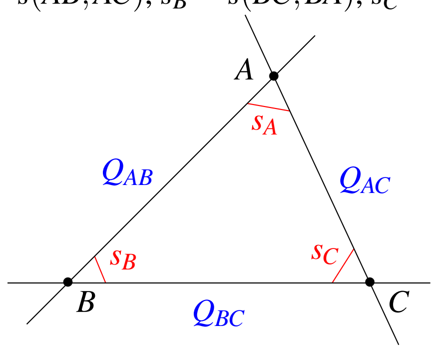
$$s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{r^2}{(1)(r^2 + (1-s)^2)} = \frac{s(1-s)}{s(1-s) + (1-s)^2} = \frac{s(1-s)}{1-s} = s.$$

3.3 Reglas para la trigonometría racional

La trigonometría, expresada en términos de coordenadas, puede ser resumida en un juego de fórmulas algebraicas, entre ellas la fórmula de Pitágoras y las leyes de senos y cosenos para triángulos. Estas fórmulas involucran las longitudes de ciertos segmentos y los senos y cosenos de ciertos ángulos.

En el sistema de trigonometría racional, hay *cinco reglas básicas* de las cuales se derivan sus teoremas.

El contexto de cada regla es un conjunto de tres puntos A, B, C (si no son colineales, ellos forman un triángulo $\triangle ABC$). Estos puntos determinan tres cuadrancias Q_{BC}, Q_{CA}, Q_{AB} y también tres despliegues $s_A = s(AB, AC)$, $s_B = s(BC, BA)$, $s_C = s(CA, CB)$.



Regla 1. *Los tres puntos A, B, C son colineales si y sólo si*

$$(Q_{BC} + Q_{CA} + Q_{AB})^2 = 2(Q_{BC}^2 + Q_{CA}^2 + Q_{AB}^2).$$

Proof. Conviene reorganizar la diferencia entre las dos lados de la fórmula, así:

$$(Q_{BC} + Q_{CA} + Q_{AB})^2 - 2(Q_{BC}^2 + Q_{CA}^2 + Q_{AB}^2) = 4\,Q_{BC}Q_{CA} - (Q_{BC} + Q_{CA} - Q_{AB})^2.$$

Si $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$, un cálculo algebraico muestra que

$$4\,Q_{BC}Q_{CA} - (Q_{BC} + Q_{CA} - Q_{AB})^2 = 4(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2)^2.$$

La última expresión entre paréntesis es cero si y sólo si los puntos A, B, C son colineales. $\square$

[39] Los elementos de $\mathbb{F}_p$ (residuos bajo división por p) que son de la forma r^2 se llaman **residuos cuadráticos**. Por ejemplo, en $\mathbb{F}_{13}$ los residuos cuadráticos son $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $3 = 4^2$, $\mathrm{C} = 5^2$ y $\mathrm{A} = 6^2$. Al calcular los cuadrados de $7, 8, \dots, \mathrm{C}$, la lista de cuadrados se repite.

Del último cálculo, se ve que la diferencia

$$(Q_{BC}+Q_{CA}+Q_{AB})^2-2(Q_{BC}^2+Q_{CA}^2+Q_{AB}^2)$$

es positiva en el contexto euclidiano —cuando las coordenadas son racionales o reales— y además representa 16 *veces el cuadrado del área* del triángulo $\triangle ABC$. En el contexto de las geometrías finitas, no tiene sentido hablar del área de un triángulo: esta diferencia asume su papel. Obsérvese que en todo caso la diferencia es un cuadrado.[40]

Regla 2. *Las rectas AC y BC son perpendiculares si y sólo si*

$$Q_{BC}+Q_{AC}=Q_{AB}.$$

Proof. Esta es la fórmula de Pitágoras. Un cálculo con coordenadas muestra que

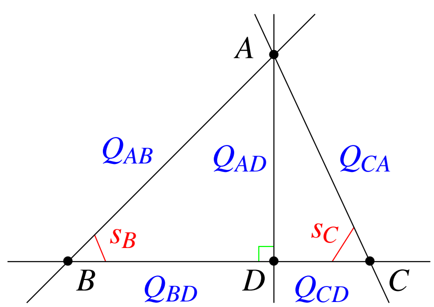
$$Q_{BC}+Q_{AC}-Q_{AB}=2\big((x_1-x_3)(x_2-x_3)+(y_1-y_3)(y_2-y_3)\big).$$

Al dividir el lado derecho por 2, se obtiene una expresión que se anula cuando y sólo cuando AC y BC son perpendiculares. [Si se efectúa una traslación de origen al punto C, tal que $(x_3',y_3')=(0,0)$, esta expresión es $x_1'x_2'+y_1'y_2'$.] $\square$

Regla 3. *Si las rectas BC, CA y AB no son nulas, los despliegues y las cuadrancias están ligadas por las igualdades:*

$$\frac{s_A}{Q_{BC}}=\frac{s_B}{Q_{CA}}=\frac{s_C}{Q_{AB}}.$$

Proof. Como las tres rectas no son nulas, las tres cuadrancias no son ceros, así que pueden aparecer en denominadores de fracciones.



Hay una sola recta que pasa por A, perpendicular a BC; esta es la recta

$$\langle x_2-x_3 : y_2-y_3 : x_1(x_3-x_2)+y_1(y_3-y_2)\rangle.$$

[40]Wildberger llama *quadrea* a esta diferencia; un término inelegante, inclusive en inglés. Si las cuadrancias de $\triangle ABC$ son números cuadrados: $Q_{BC}=d_1^2$, etc., entonces esta "cuádrea" cumple la fórmula de Arquímedes y Herón: es igual al producto $(d_1+d_2+d_3)(d_2+d_3-d_1)(d_3+d_1-d_2)(d_1+d_2-d_3)$. [Al dividir cada factor por 2 y al tomar la raíz cuadrada, se recupera la conocida fórmula del área.]

Esta recta corta BC en un única punto D porque BC no es nula. (Se deja como ejercicio calcular las coordenadas del punto de intersección.) En el diagrama se muestra esta **altura** AD junto con el triángulo $\triangle ABC$.

Como AD es perpendicular a BC, los despliegues s_B y s_C obedecen

$$s_B = \frac{Q_{AD}}{Q_{AB}}, \qquad s_C = \frac{Q_{AD}}{Q_{CA}}.$$

Esto implica que $s_B\,Q_{AB} = Q_{AD} = s_C\,Q_{CA}$ y por lo tanto, vale $s_B/Q_{CA} = s_C/Q_{AB}$.

La otra relación $s_A/Q_{BC} = s_B/Q_{CA}$ se obtiene de modo similar. □

Debe de estar claro que la Regla 3 es simplemente una versión cuadrática de la *ley de senos* de la trigonometría usual.

Regla 4. *Si las rectas BC y CA no son nulas, el despliegue s_C y las cuadrancias están ligadas por la igualdad:*

$$(Q_{BC} + Q_{CA} - Q_{AB})^2 = 4\,Q_{BC}\,Q_{CA}\,(1 - s_C).$$

Proof. Si los puntos A, B, C son colineales, entonces las rectas BC y CA coinciden y su cuadrancia es cero: $s_C = 0$ y por ende $(1 - s_C) = 1$. En este caso, la demostración de la Regla 1 muestra que $4\,Q_{BC}\,Q_{CA} - (Q_{BC} + Q_{CA} - Q_{AB})^2 = 0$, en efecto.

En cambio, si A, B, C forman un triángulo $\triangle ABC$, tómese la altura AD como antes (ya que BC no es nula). La fórmula de Pitágoras (la Regla 2), aplicada en el diagrama anterior, muestra que

$$Q_{AB} = Q_{AD} + Q_{BD}, \qquad Q_{CA} = Q_{AD} + Q_{CD}.$$

Entonces $Q_{CA} - Q_{AB} = Q_{CD} - Q_{BD}$.

Por otro lado, la perpendicularidad de AD con CD muestra que

$$1 - s_C = 1 - s(CD, CA) = s(AD, CA) = \frac{Q_{CD}}{Q_{CA}},$$

y por ende $Q_{CD} = Q_{CA}(1 - s_C)$.

La colinealidad de los puntos B, D, C y la Regla 1 muestra que

$$(Q_{BC} + Q_{CD} - Q_{BD})^2 = 4\,Q_{BC}\,Q_{CD}.$$

Al sustituir las relaciones anteriores para eliminar las cuadrancias Q_{CD} y Q_{BD}, se obtiene, en efecto:

$$(Q_{BC} + Q_{CA} - Q_{AB})^2 = 4\,Q_{BC}\,Q_{CA}(1 - s_C). \qquad \square$$

La Regla 4 es una versión cuadrática de la *ley de cosenos* de la trigonometría usual.

► La última regla incorpora la propiedad euclidiana de que la suma de los tres ángulos en un triángulo es igual al ángulo directo π. Esta es una consecuencia inmediata del postulado de las paralelas; por tanto, excluye las geometrías "no euclidianas". En la trigonometría usual, esta circunstancia queda plasmada en la fórmula

$$\operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B = \operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen}(\pi - C) = \operatorname{sen} C.$$

Al reemplazar $\operatorname{sen}^2 A$ por s_A, $\cos^2 B$ por $(1 - s_B)$, etc., después de un cálculo algebraico bastante largo, se llega a la fórmula simétrica de la regla siguiente.[41]

Regla 5. *Si las rectas BC, CA, AB no son nulas, sus despliegues están ligados por la igualdad:*

$$(s_A + s_B + s_C)^2 = 2(s_A^2 + s_B^2 + s_C^2) + 4\, s_A s_B s_C.$$

Proof. La fórmula de la Regla 4 se puede reorganizar así:

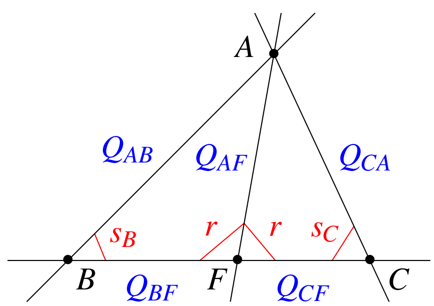
$$(Q_{BC} + Q_{CA} + Q_{AB})^2 = 2(Q_{BC}^2 + Q_{CA}^2 + Q_{AB}^2) + 4\, Q_{BC}\, Q_{CA}\, s_C.$$

La Regla 3 muestra que hay un número $k \neq 0$ tal que

$$Q_{BC} = k\, s_A, \qquad Q_{CA} = k\, s_B, \qquad Q_{AB} = k\, s_C.$$

Al dividir la primera fórmula por k^2, se obtiene la igualdad deseada.[42] □

► Un ejemplo de la aplicabilidad des estas reglas es el siguiente *teorema de Stewart* (1746).



Proposición 6. *Si $\triangle ABC$ es un triángulo con lados no nulos y si F es un punto de la recta BC, entonces*[43]

$$Q_{CF}(Q_{AF} + Q_{BF} - Q_{AB})^2 = Q_{BF}(Q_{AF} + Q_{CF} - Q_{CA})^2.$$

[41] Se invita al lector comprobar que la fórmula de la Regla 5 es equivalente a la siguiente fórmula asimétrica: $(s_C - (s_A + s_B - 2s_A s_B))^2 = 4 s_A s_B (1 - s_A)(1 - s_B)$. Al expresar ésta en términos trigonométricos, se llega a $\operatorname{sen}^2 C = \operatorname{sen}^2(A+B)$.

[42] La fórmula de la Regla 5 es aplicable a tres rectas no nulas cualesquiera, aunque no formen un triángulo. En efecto, tres rectas no nulas, tomados de dos en dos, definen tres despliegues. Si dos de las rectas son paralelas, uno de los despliegues es cero y los otros dos son iguales. Si las tres rectas son concurrentes, se puede reemplazar una de ellas por una copia paralela. Véase el capítulo 7 del libro de Wildberger, *op. cit.*

[43] Esta versión "cuadrática" del teorema de Stewart es la de Wildberger, *op. cit.*, p. 136. La versión euclidiana sería $|BC|(|AF|^2 + |BF|\,|FC|) = |BF|\,|CA|^2 + |CF|\,|AB|^2$, para puntos en el orden B-F-C. Véase, por ejemplo: H. S. M. Coxeter y S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA, Washington, 1967.

Proof. Si la recta AF no es nula, escríbase $r = s(AF, BF)$. Como las rectas BF y CF coinciden, la Regla 4 dice que

$$(Q_{AF} + Q_{BF} - Q_{AB})^2 = 4\,Q_{AF}\,Q_{BF}\,(1-r), \quad (Q_{AF} + Q_{CF} - Q_{AC})^2 = 4\,Q_{AF}\,Q_{CF}\,(1-r).$$

Las dos lados de la igualdad deseada coinciden con $4\,Q_{AF}\,Q_{BF}\,Q_{CF}\,(1-r)$; luego, son iguales entre sí.

En cambio, si la recta AF es nula, de modo que $Q_{AF} = 0$, la Regla 4, reorganizada como en la demostración de la Regla 5 para el triángulo $\triangle AFC$, muestra que

$$(Q_{CF} + Q_{CA})^2 = 2(Q_{CF}^2 + Q_{CA}^2) + 4\,Q_{CF}\,Q_{CA}\,s_C,$$

y por tanto $4\,Q_{CF}\,Q_{CA}\,s_C = -(Q_{CF} - Q_{CA})^2$. Del mismo modo, se obtiene la fórmula análoga $4\,Q_{BF}\,Q_{AB}\,s_B = -(Q_{BF} - Q_{AB})^2$. Entonces

$$\begin{aligned} Q_{CF}(Q_{BF} - Q_{AB})^2 &= -4\,Q_{BF}\,Q_{CF}\,Q_{AB}\,s_B \\ &= -4\,Q_{BF}\,Q_{CF}\,Q_{CA}\,s_C = Q_{BF}(Q_{CF} - Q_{CA})^2, \end{aligned}$$

al usar la Regla 3 para obtener $Q_{AB}\,s_B = Q_{CA}\,s_C$. □

La demostración euclidiana del teorema de Stewart usa la ley de cosenos, reemplazada acá por la Regla 4. Hay que distinguir varios órdenes de los puntos B, F, C, o bien emplear una notación vectorial, en el caso euclidiano.[44] Nótese que, en general, la posible presencia de rectas nulas obliga a la consideración de varios casos también. De todos modos, las cinco reglas dadas son suficientes para cualquier problema de la trigonometría racional.

► Todos las proposiciones “clásicas” de la geometría de triángulos y círculos pueden ser abordados en el enfoque geométrico aquí expuesto. Por ejemplo, un **círculo** de centro O y *cuadrancia* k es un conjunto[45]

$$\odot(O\,||k) := \{\,P : Q_{OP} = k\,\}.$$

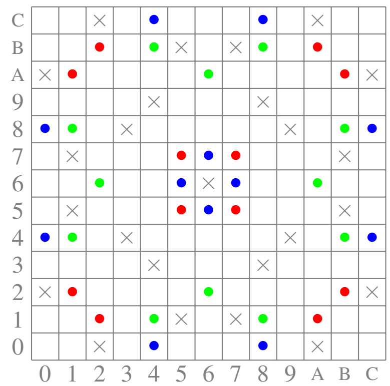
La ecuación del círculo con centro $O = (x_0, y_0)$ y cuadrancia k es

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = k.$$

[44] Consúltese la demostración del teorema de Stewart en el libro: N. A. Court, *College Geometry*, Barnes & Noble, New York, 1952; inciso 308.

[45] En términos euclidianos, un círculo de centro O y radio r se denota $\odot(O\,|\,r)$; su cuadrancia es r^2. La notación de doble barra se usa para distinguir los casos; con coordenadas racionales o reales, el conjunto $\odot(O\,|\,r)$ coincide con $\odot(O\,||r^2)$.

No se excluye el caso $k = 0$, un **círculo nulo**. En cuerpos finitos que admiten rectas nulas, también habrá círculos nulos que contienen puntos distintos del centro.



En el diagrama anterior,[46] quedan ilustrados los círculos con centro $(6,6)$ y cuadrancias 1 (puntos azules), 2 (puntos rojos) y 3 (puntos verdes). Cada uno de estos círculos pasa por 12 puntos. Las cruces $\times$ marcan los 25 puntos del círculo nulo $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 0$.

► Cualquier triángulo $\triangle ABC$ tiene un único **circuncírculo**, es decir, un círculo que pasa por sus A, B y C. Su centro es el punto común de las mediatrices (bisectrices perpendiculares) de sus lados. En más detalle: cada par de puntos A y B tiene un punto medio M; hay una única recta que pasa por M perpendicular a la recta AB: es es la **mediatriz** de A y B. Como A, B y C no son colineales, las tres mediatrices no son todas paralelas. Es posible mostrar que son concurrentes —es cuestión de calcular las coordenadas del punto de intersección común. Este punto común O es el **circuncentro** de $\triangle ABC$. Se comprueba que $Q_{OA} = Q_{OB} = Q_{OC}$; y si K denota el valor común de estas cuadrancias, el círculo $\odot(O \,||\, K)$ pasa por A, B, C.

Fíjese que esta construcción del circuncentro es válida aunque alguna de las rectas BC, CA o AB sea nula.

En el caso de un triángulo no nulo, es posible extender la Regla 3 al dar el valor común de los tres cocientes. Este es análogo a la extensión de la ley de senos euclidiano:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{|BC|} = \frac{\operatorname{sen} B}{|CA|} = \frac{\operatorname{sen} C}{|AB|} = \frac{1}{2R},$$

donde R es el radio del circuncírculo de $\triangle ABC$. Su versión cuadrática es:[47]

$$\frac{s_A}{Q_{BC}} = \frac{s_B}{Q_{CA}} = \frac{s_C}{Q_{AB}} = \frac{1}{4K}.$$

[46] El diagrama fue tomado de la Figura 15.3 del libro de Wildberger.

[47] Este es un ejercicio no trivial. Véase el libro de Wildberger, *op. cit.*, p. 144.

► El sistema de *trigonometría racional* no ha tomado gran popularidad, hasta ahora, en buena parte por su aspecto novedoso. Nadie (con la excepción de sus creadores) propone pasar al olvido el enorme formulario sobre senos, cosenos y tangentes al cual nos hemos acostumbrado. Pero el futuro es abierto: es muy posible que un estudio serio de esta materia conduzca, tarde o temprano, a su incorporación en los estudios de las generaciones que vienen.

Mi punto de vista personal es que la trigonometría racional debe tener mayor difusión, por ser un ejemplo magistral de *la fecundación de la enseñanza por ideas matemáticas modernas*, impulsadas por un matemático de primera línea. (Me refiero a Norman Wildberger.) En este sentido, se enmarca en el espíritu de Royaumont y de Bogotá, para refrescar y renovar la práctica docente con las matemáticas de hoy en día.

Contenido

1 El arranque: fundamentos de la geometría plana **1**

1.1 Bosquejo histórico de los fundamentos 2
1.2 Orden y longitud: un enfoque alternativo 3
1.3 Otros considerandos sobre la geometría plana 7

2 La práctica: el uso de las coordenadas **11**

2.1 Las coordenadas cartesianas 12
2.2 Uso de las coordenadas para demostrar teoremas 15
2.3 Uso de las coordenadas trilineales 18
2.4 Uso de las coordenadas areales 21

3 Una alternativa moderna: la trigonometría racional **24**

3.1 Medición de segmentos y ángulos 25
3.2 Elementos de geometría en un plano finito 27
3.3 Reglas para la trigonometría racional 32