

Introducción a la lógica matemática

EMALCA

Turrialba, 2019

Introducción

La lógica matemática es el estudio del lenguaje formal matemático y sus interacciones propias con los objetos matemáticos. Como tal, los temas centrales están ligados a la capacidad expresiva del lenguaje, así como a la capacidad deductiva formal de este.

Posiblemente cuando oyes lógica, piensas en silogismos del tipo "Todos los hombres son mortales, Sócrates es hombre; entonces Sócrates es mortal". Esta forma de pensar la lógica, fue por mucho tiempo la forma usual, sin embargo, hubo esfuerzos por muchos de formalizarla y crea una especie de cálculo formal lógico. Estos fueron particularmente concretados en el siglo XIX por George Boole y Augustus de Morgan.

Por otro lado, la matemática siempre se desarrolló bajo el modelo euclideo: aceptamos como verdadero ciertos enunciados "evidentes" y a partir de estos desarrollamos usando las reglas de deducción lógicas el resto de verdades que podemos decir.

Sin embargo, ¿qué es "evidente"? ¿Cómo podríamos asegurarnos de que realmente algo debería ser un axioma básico y que no podría deducirse de otros? Estas preguntas fueron hechas en específico sobre el quinto postulado de las paralelas, y fue Lobachevsky el primero en mostrar que efectivamente existen "**modelos**" geométricos de los primeros cuatro axiomas, donde no se cumple el quinto. Claramente, esto causó un temblor en las bases de la matemática. ¿Qué es real y qué no? ¿Cómo saber que realmente nuestros enunciados evidentes lo son?

Por otro lado, muchos matemáticos querían hacer lo que Euclides hizo en otras áreas. Por ejemplo, Giuseppe Peano sentó una serie de axiomas básicos para la aritmética.

Otro ejemplo notable fue Georg Cantor, que estudiando ciertas series trigonométricas terminó estudiando el infinito. Su teoría formó la base de lo que ahora es la teoría de conjuntos. Rápidamente, se notó que esta teoría podría formar una base teórico-formal para el resto de la matemática.

Pero rápidamente la teoría de conjuntos tuvo un primer y fuerte golpe. Bertrand Russell encontró que la forma de pensar en los conjuntos entraña parado-

jas. Considere el conjunto:

$$A = \{B : B \notin B\}.$$

Entonces que es cierto: $A \in A$ o $A \notin A$.

Era evidente: si queremos hacer matemática, deberíamos asegurarnos que nuestras bases no contengan paradojas o contradicciones. David Hilbert propuso un programa, ahora conocido por su nombre, en el cual la matemática fuese axiomatizada y además se probara con métodos finitistas su propia consistencia.

No mucho después, en 1931, Kurt Gödel muestra que esto no es posible. El mostró que cualquier sistema suficientemente de deducción suficientemente robusto para contener la aritmética no podría probar ciertos enunciados. Incluso, el fue más allá: ningún sistema de deducción podría probar su propia consistencia.

Posteriormente, Alfred Tarski junto a muchos otros deciden estudiar las estructuras usuales algebraicas desde el punto de vista de la lógica. Se crea aquí la teoría de modelos y una de las interacciones más fructíferas de la matemática contemporánea.

Estas notas fueron creadas en el marco de la EMALCA 2019 en la sede del Atlántico de la Universidad de Costa Rica. Su objetivo principal es dar una introducción rápida pero rigurosa a la lógica matemática para que los asistentes puedan aprovechar completamente los cursos más avanzados de teoría de modelos y sus interacciones con otras áreas, en particular con la teoría de números.

Lenguaje y estructura

Poco a poco vamos a ir definiendo lo que es un lenguaje de primer orden y sus estructuras asociadas.

Definición. Un lenguaje es un conjunto de símbolos

$$\mathcal{L} := \{c_i\}_{i \in I_C} \cup \{f_i\}_{i \in I_F} \cup \{R_i\}_{i \in I_R}.$$

A los c_i se les llama símbolos de constantes. A los f_i se les llama símbolos de función y cada símbolo f_i tiene asociado un número natural m_i que se le llama su aridad. De igual forma, a los R_i se les llama símbolos de relación y cada símbolo R_i tiene asociado un número natural n_i que se le llama su aridad.

Ejemplo 1. 1. $\mathcal{L}_o = \{<\}$ con $<$ un símbolo de relación binario.

2. $\mathcal{L}_{Gr} = \{*, ^{-1}, e\}$ con $*$ un símbolo de función binario, $^{-1}$ un símbolo de función unario y e un símbolo de constante.

3. $\mathcal{L}_A = \{+, -, *, 0, 1\}$ con $+$ y $*$ símbolos de función binarios, $-$ símbolo de función unario y $0, 1$ constantes.

Cuando pensamos en estos símbolos, posiblemente ya tenemos una idea clara de que significan. Sin embargo, uno de los puntos principales es que estos son

solo objetos sintácticos, sin un significado asignado a priori. Por otro lado, no queremos quedarnos así, si no más bien quisiéramos interpretar estos símbolos para que signifiquen algo. Haciendo una analogía con la geometría euclídea, los conceptos de punto, línea y plano no están definidos. Cuando Lobachevsky muestra que existen geometrías euclídeas, justamente el reinterpreta los puntos, líneas y planos de forma distinta (ver figura 1).

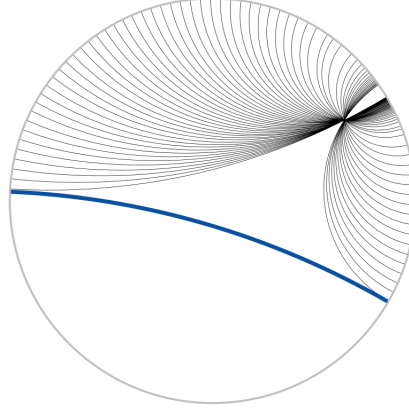


Figura 1: Disco de Poincaré

Entonces tenemos que definir exactamente como vamos a interpretar estos símbolos. La gran ventaja es que podemos hacerlo de muchas formas distintas.

Definición. Sea \mathcal{L} un lenguaje. Una \mathcal{L} -estructura es una cuádrupla

$$\mathcal{A} = (A, \{R_i^A\}_{i \in I_R}, \{f_i^A\}_{i \in I_F}, \{c_i^A\}_{i \in I_C}),$$

tal que

- Si R_i es un símbolo de relación m-ario, entonces $R_i^A \subseteq A^m$,
- Si f_i es un símbolo de función m-ario, entonces $f_i^A : A^m \rightarrow A$,
- Si c_i es un símbolo de constante, entonces $c_i^A \in A$.

Ejemplo 2. 1. \mathcal{L}_0 -estructuras: $(\mathbb{N}, =)$, $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{N}, |)$, donde $p|q$ si p divide a q .

2. \mathcal{L}_{G_r} -estructura $(\mathbb{N}, +, -, 0)$, $(\mathbb{N}^*, 2 * \cdot, 3)$, $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$, $(\mathbb{C}^*, *,^{-1}, 1)$.

3. \mathcal{L}_A -estructuras: $(\mathbb{N}, +, -, *, 0, 1)$, $(\mathbb{Q}, +, -, *, 0, 1)$, $(\mathbb{R}, +, -, *, 0, 1)$.

Note que estamos abusando un poco del lenguaje. Propiamente deberíamos escribir todas estas estructuras como cuádruplas que contengan los conjuntos de las interpretaciones, pero si no hay confusión y hay una cantidad finita de

símbolos, es usual escribirlo como una n -tupla donde n es la cantidad de símbolos. Además, a veces estamos escribiendo el mismo símbolo que aparece en el lenguaje y en la interpretación. Entender la diferencia es esencial, pero no es necesario ser tan estricto.

Otra cosa que es importante notar es que las \mathcal{L} -estructuras no tiene por que coincidir con nuestra idea original de lo que el símbolo significa. En el ejemplo 1, vemos que estamos interpretando el símbolo $<$ como la igualdad, el orden y la relación de divisibilidad. Entonces, el único requisito para una estructura es interpretas los símbolos como una constante, relación o función de la aridad correcta según sea el caso.

Un caso especial de estructuras son estructuras que estan contenidas” dentro de otras.

Definición. Sean \mathcal{L} un lenguaje y sean $\mathcal{A} = (A, \dots)$ y $\mathcal{B} = (B, \dots)$ dos \mathcal{L} -estructuras. Decimos que \mathcal{A} es subestructura de \mathcal{B} si

1. $A \subseteq B$,
2. para todo símbolo de relación R n -ario, $R^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{B}} \cap A^n$.
3. para todo símbolo de función f n -ario, $f^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{B}}|_{A^n}$.
4. para todo símbolo de constante c , $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$.

Homomorfismos

Considere las \mathcal{L}_{Gr} -estructuras $(S_3, \circ, {}^{-1}, \text{id})$ de las permutaciones de un conjunto con 3 elementos y $(D_3, \circ, {}^{-1}, \text{id})$ de las simetrías de un triángulo equilátero. Sabemos de álgebra que estas dos estructuras ”funcionan igual, a pesar de ser distintas. Queremos hacer preciso esto, independiente de cual sea el lenguaje.

Definición. Sean $\mathcal{A} = (A, \dots)$ y $\mathcal{B} = (B, \dots)$ dos \mathcal{L} -estructuras. Un homomorfismo de \mathcal{A} en \mathcal{B} es una función $h : A \rightarrow B$ tal que:

1. para todo R , símbolo de relación m -ario,

$$\text{si } (a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathcal{A}} \text{ entonces } (h(a_1), \dots, h(a_m)) \in R^{\mathcal{B}},$$

2. para todo f , símbolo de función m -ario,

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_m)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_m)),$$

3. para todo c , símbolo de constante,

$$h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}.$$

Si además pedimos que en 1 la implicación se revierta entonces decimos que es un homomorfismo fuerte. Un homomorfismo fuerte inyectivo se llama inmersión, un homomorfismo fuerte biyectivo se llama isomorfismo. Un isomorfismo de una estructura en sí misma se llama automorfismo.

Ejercicio. Muestre que la relación de isomorfismo es una relación de equivalencia entre estructuras, es decir, que es simétrica, reflexiva y transitiva.

Ejemplo 3. 1. $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ con $i(n) = n$ es un homomorfismo entre las \mathcal{L}_O -estructuras $(\mathbb{Z}, <)$ y $(\mathbb{R}, <)$ y, entre las \mathcal{L}_{Gr} -estructuras $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ y $(\mathbb{R}, +, -, 0)$.

2. $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dado por $h(n) = 2n$ es un homomorfismo de la \mathcal{L}_{Gr} -estructura $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ en si misma, pero note que no es un automorfismo, pues no es biyectiva. En cambio, $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $h(n) = -n$ si es un automorfismo.

Ejercicio. Muestre que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ si y solo si $A \subseteq B$ e $i : A \rightarrow B$ dada por $i(a) = a$ es inmersión.

Ejercicio. Sean \mathcal{L} un lenguaje y $\mathcal{A} = (A, \dots), \mathcal{B} = (B, \dots)$ dos \mathcal{L} -estructuras. Defina una \mathcal{L} -estructura $\mathcal{C} = (C, \dots)$ tal que

- $C = A \times B$,
- las proyecciones π_A, π_B de $A \times B$ en A y en B son homomorfismos.

Pruebe además que si se tiene un homomorfismo h de otra \mathcal{L} -estructura \mathcal{D} en \mathcal{C} , entonces $\pi_A \circ h$ y $\pi_B \circ h$ son homomorfismos de \mathcal{D} en \mathcal{A} y \mathcal{B} respectivamente.

Opcional: ¿Puede hacer lo mismo para un producto arbitrario de estructuras?

Términos y fórmulas

Normalmente, un lenguaje "natural" tiene una base (las palabras) a partir de las cuales se construyen frases más complejas. Siguiendo esta analogía, queremos poco a poco construir frases más complejas a partir de los símbolos de nuestro lenguaje.

Vamos a empezar por los términos. Estos no son propiamente frases, si no son formas de construir naturalmente "funciones" más complicadas, para poder incorporar estas a las frases que construiremos.

De aquí en adelante fijamos un lenguaje \mathcal{L} . Propiamente, uno debería decir \mathcal{L} -términos y \mathcal{L} -fórmulas, pero salvo que pueda prestarse a confusión, omitiremos \mathcal{L} .

Escribimos $\text{Var} := \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. Si $x_i \in \text{Var}$, decimos que x_i es una variable. Decimos que una palabra es una concatenación de los símbolos en \mathcal{L} , de las variables y de los símbolos lógicos $=, \neg, \vee, \exists$ y los símbolos sintácticos de parentesis y coma. En alguna literatura, los últimos signos no se incluyen.

Definición. El conjunto de términos es el menor conjunto \mathcal{T} de palabras tal que:

1. $\text{Var} \in \mathcal{T}$,

2. los símbolos de constantes estan en \mathcal{T} ,
3. si $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$ y f es símbolo de función n -ario, entonces $f(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{T}$.

Note que hay muchos conjuntos que satisfacen esto, como el conjunto de todas las palabras, y que cualquier intersección de conjuntos con esta propiedad también la tiene. En particular, existe efectivamente un menor conjunto con esta propiedad. Esta es una forma de arriba hacia abajo de construir el conjunto. Uno puede también pensar en una forma de abajo hacia arriba de construirlo.

Ejercicio. Sea $\mathcal{T}_0 := \{c_i \mid c_i \text{ es símbolo de constante}\} \cup \text{Var}$. Defina por inducción

$$\mathcal{T}_{n+1} := \mathcal{T}_n \cup \{f(t_0, \dots, t_m) \mid (t_0, \dots, t_m \in \mathcal{T}_n) \wedge f \text{ es símbolo de función } m\text{-ario}\}.$$

Muestre que $\mathcal{T} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$.

Veamos algunos ejemplos de términos:

Ejemplo 4. 1. Sea \mathcal{L} un lenguaje con solo relaciones. Entonces $\mathcal{T} = \text{Var}$.

2. En \mathcal{L}_A , dado un término, uno puede asociarle un polinomio con coeficientes en \mathbb{Z} . Por ejemplo, si t es $+(*(x_1, x_1), *(*(1+1, x_1), x_2)), *(x_1, x_1))$, le asociamos naturalmente el polinomio $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$.

Como se puede notar, la lectura del término en el ejemplo dos se ve un poco complicada. Es usual representar los términos con funciones binarias $f(x_1, x_2)$ por $(x_1 f x_2)$. entonces el término se reescribiría como $((x_1 * x_1) + (((1 + 1) * x_1) * x_2)) + (x_2 * x_2)$.

Teorema 5 (Lectura única de términos). Sea \mathcal{L} un lenguaje y t un término. Ocurre exactamente una de las siguientes opciones:

1. t es una constante.
2. t es una variable
3. existe un único símbolo de función m -ario f y términos únicos t_1, \dots, t_m tal que t es $f(t_1, \dots, t_m)$.

De ahora en adelante, escribimos que $t = t(x_1, \dots, x_n)$ para decir que las variables que aparecen en t se encuentran en x_1, \dots, x_n .

El ejemplo 2 anterior nos sugiere que los términos se asocian a funciones.

Definición. Sea \mathcal{L} un lenguaje, y $\mathcal{A} = (A, \dots)$ una \mathcal{L} -estructura. Sea t un término tal que $t = t(x_1, \dots, x_n)$.

1. Si t es la variable x_i , definimos $t^{\mathcal{A}} : A^n \rightarrow A$ por $t^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = a_i$.
2. Si t es la constante c_i , definimos $t^{\mathcal{A}} : A^n \rightarrow A$ por $t^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = c_i^{\mathcal{A}}$.

3. Si t es $f(t_1, \dots, t_m)$, definimos $t^A : A^n \rightarrow A$ por $t^A(a_1, \dots, a_n) = f^A \circ (t_1^A, \dots, t_m^A)(a_1, \dots, a_n)$.

Note que por la definición de \mathcal{T} , tenemos una forma de probar que todos los términos satisfacen una propiedad P cualquiera. Esencialmente, si uno muestra:

1. Las variables satisfacen P .
2. Las constantes satisfacen P .
3. Si t_1, \dots, t_n son términos que satisfacen P , y f es un símbolo de función n -ario, entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ satisface P .

Entonces uno puede concluir que todos los términos satisfacen P . Para ver por que, considere $\mathcal{P} = \{w : w \text{ es término y satisface } P\}$. Entonces \mathcal{P} satisface 1,2,3 en la definición de \mathcal{T} , pero este era el menor conjunto que satisface estas. A esto se le llama inducción sobre formulas.

Ejercicio. Sea \mathcal{L} un lenguaje y sea \mathcal{A} una \mathcal{L} -subestructura de \mathcal{B} . Si $t(x_1, \dots, x_n)$ es un término y $a_1, \dots, a_n \in A$, muestre que

$$t^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = t^{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_n).$$

Finalmente, llegamos a nuestro interés principal, poder escribir frases complicadas a partir de nuestros símbolos y además saber como interpretarlas.

Definición. ■ Una fórmula atómica es una palabra de la forma $t_1 = t_2$ con t_1 y t_2 términos, o de la forma $R(t_1 \dots t_n)$ para t_1, \dots, t_n términos. Al conjunto de formulas atómicas lo denotamos por \mathcal{F}_0

- El conjunto de fórmulas es el menor conjunto \mathcal{F} tal que
 1. $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$,
 2. si $\varphi \in \mathcal{F}$ entonces $\neg\varphi \in \mathcal{F}$,
 3. si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}$ entonces $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in \mathcal{F}$,
 4. si $\varphi \in \mathcal{F}$ y $x_i \in \text{Var}$ entonces $\exists x_i \varphi \in \mathcal{F}$.

De igual forma que con los términos, es claro que existe efectivamente un menor conjunto que tiene esta propiedad.

Note que no estamos utilizando $\forall, \wedge, \rightarrow$ o \leftrightarrow . Estos se consideran abreviaciones de la siguiente forma

- $\varphi \wedge \psi$ es $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,
- $\varphi \rightarrow \psi$ es $\neg\varphi \vee \psi$,
- $\varphi \leftrightarrow \psi$ es $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$,
- $\forall x_i \varphi$ es $\neg \exists x_i \neg\varphi$.

De forma análoga con los términos, obtenemos de igual forma los siguientes resultados.

Ejercicio. Sea F_0 el conjunto de fórmulas atómicas. Defina por inducción

$$F_{n+1} := F_n \cup \{\neg\phi \mid \phi \in F_n\} \cup \{\phi \vee \psi \mid \phi, \psi \in F_n\} \cup \{\exists x_i \phi \mid \phi \in F_n \wedge x_i \in \text{Var}\}.$$

Muestre que $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Teorema 6 (Lectura única de fórmulas). *Sea ψ una fórmula. Ocurre exactamente una de las siguientes opciones:*

1. ψ es atómica.
2. existe una única $\varphi \in \mathcal{F}$ tal que ψ es $\neg\varphi$,
3. existen únicas $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}$ tal que ψ es $\varphi_1 \vee \varphi_2$,
4. existen únicas $\varphi \in \mathcal{F}$ y $x_i \in \text{Var}$ tal que ψ es $\exists x_i \varphi$.

Veamos algunos ejemplos de fórmulas.

Ejemplo 7. 1. En \mathcal{L}_0

- $x_1 < x_2$ es fórmula atómica.
- $x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3$
- $\forall x \forall y (x < y \leftrightarrow x = y)$.

2. En \mathcal{L}_G

- $x_1 * x_2^{-1}$ es fórmula atómica.
- $\forall x_1 (x_1 * x_2^{-1} = e)$

Algunas de las variables anteriores presentaban una cuantificación, y otras no. Para poder darle significado a estas frases debemos poder diferenciar estos casos.

Definición. Sea \mathcal{L} un lenguaje, φ una fórmula y x_i una variable. Definimos que las ocurrencias de x_i en φ son libres por recurrencia sobre las fórmulas:

1. Si φ es atómica, decimos que todas las ocurrencias de x_i en φ son libres.
2. Si φ es $\neg\psi$ todas las ocurrencias libres de x_i en φ son las mismas de ψ .
3. Si φ es $\psi_1 \vee \psi_2$ todas las ocurrencias libres de x_i en φ son las de ψ_1 y las de ψ_2 .
4. Si φ es $\exists x_j \psi$ hay dos casos:
 - Si $j \neq i$ todas las ocurrencias libres de x_i en φ son las mismas de ψ .
 - Si $j = i$ ninguna ocurrencia de x_i es libre en φ .

Decimos que x_i es libre en φ si tiene al menos una ocurrencia libre en φ . Escribiremos $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ para denotar que las variables libres de φ están dentro de x_1, \dots, x_n , con el entendido de que pueden haber x_i dentro de estos que no tengan ocurrencias libres.

Note que aunque los símbolos nos hacen pensar en sus usos usuales, por sí mismos están desprovistos de significado. Pero dado una \mathcal{L} -estructura podemos asignarles no solo un significado si no establecer si la fórmula es satisfecha o no en dicha \mathcal{L} -estructura.

Definición. Sea \mathcal{L} un lenguaje y $\mathcal{M} = (M, \dots)$ una \mathcal{L} -estructura. Sea $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, y (a_1, \dots, a_n) . Definimos por recurrencia sobre fórmulas que \mathcal{M} satisfaga φ en (a_1, \dots, a_n) , lo cual denotamos por $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$.

1. Si φ es fórmula atómica hay dos casos:
 - Si φ es la fórmula $t_1(x_1, \dots, x_n) = t_2(x_1, \dots, x_n)$ entonces $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ si y solo si $t_1^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = t_2^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)$.
 - Si φ es la fórmula $R(t_1(x_1, \dots, x_n), \dots, t_n(x_1, \dots, x_n))$ entonces $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ si y solo si $(t_1^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_n^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)) \in R^{\mathcal{M}}$.
2. Si φ es $\neg\psi$ entonces $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ si y solo si $\mathcal{M} \not\models \psi(a_1, \dots, a_n)$, es decir, si \mathcal{M} no satisface $\psi(a_1, \dots, a_n)$.
3. Si φ es $\psi_1 \vee \psi_2$ entonces $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ si y solo si $\mathcal{M} \models \psi_1(a_1, \dots, a_n)$, o $\mathcal{M} \models \psi_2(a_1, \dots, a_n)$.
4. Si φ es $\exists x_j \psi$ entonces $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ si y solo si existe un $a \in M$ tal que $\mathcal{M} \models \psi(a_1, \dots, a_n, a)$.

Se debe aclarar un detalle en el último caso, pues si $j \leq n$ hay un problema con interpretación de $\psi(a, a_1, \dots, a_n)$. Note que en este caso, ninguna ocurrencia de x_j era libre, por lo que si $j \leq n$, podríamos pensar en $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ como $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$. Entonces, intuitivamente, si hay alguna ocurrencia libre de x_j en ψ , podemos simplemente sustituir el a por esas ocurrencias sin preocuparnos por el elemento a_j .

Hay formas de formalizar esto para evitar los problemas pero se salen del alcance de estas notas. Esencialmente la idea es sustituir las ocurrencias libres de la variable x_j en ψ por una variable extra x y que esta nueva variable tome el valor de a en todas sus ocurrencias libres.

Ejemplo 8. 1. En \mathcal{L}_O , considere la fórmula $\varphi(x, y)$ que es $\exists z(x < z \wedge z < y)$. Si consideramos distintas \mathcal{L} -estructuras, la fórmula se interpreta de formas distintas:

- $(\mathbb{N}, =)$ La fórmula se interpreta como existe un z igual a x y a y . Es fácil encontrar instancias falsas y verdaderas: $(\mathbb{N}, =) \models \varphi(0, 0)$ pero $(\mathbb{N}, =) \not\models \varphi(0, 1)$

- $(\mathbb{N}, <)$ La fórmula se interpreta como existe un z mayor que x y menor que y . Es fácil encontrar instancias falsas y verdaderas, por ejemplo $(\mathbb{N}, <) \models \varphi(0, 2)$ pero $(\mathbb{N}, <) \not\models \varphi(0, 1)$.

2. En \mathcal{L}_G , considere la fórmula φ que es $\exists x(x \neq e \wedge x * x = e)$. Si consideramos distintas \mathcal{L} -estructuras, la fórmula se interpreta de formas distintas:

- $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$: Note que en este caso, la estructura es un grupo. La fórmula se interpreta como que existen elementos de orden 2. En este caso, la fórmula siempre es falsa, por lo que $(\mathbb{Z}, +, -, 0) \not\models \varphi$.
- $(GL(2), *, -, I)$. La estructura es de nuevo un grupo, el de matrices 2×2 invertibles. En este caso, si existe elementos de orden 2, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto $(GL(2), *, -, I) \models \varphi$.

En el segundo ejemplo, la fórmula no tiene variables libres, por lo que no hay instancias que sea verdaderas o falsas nunca. Si una fórmula φ no tiene variables libres la llamamos enunciado (o sentencia). Además, si $\mathcal{M} \models \varphi$, decimos que \mathcal{M} es un modelo de φ .

Ejercicio. Para los siguientes \mathcal{L}_0 -estructuras, de un ejemplo de un enunciado que se satisfaga en la segunda y no en la primera

- $(\mathbb{N}, |)$, $(\mathbb{N}, <)$, donde $q|r$ si q divide a r .
- $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$.
- $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Q}, <)$.

Ejercicio. Se dice que una fórmula es libre de cuantificadores si no tiene instancias de \exists (ni de \forall). Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ son \mathcal{L} -estructuras. Muestre que si $a_1, \dots, a_n \in A$ y $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ es una \mathcal{L} -fórmula libre de cuantificadores, entonces $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ si y solo si $\mathcal{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$

¿Qué sigue?

Completitud y compacidad

Llamamos teoría a un conjunto de enunciados T . En particular, denotamos por $\mathcal{M} \models T$ si $\mathcal{M} \models \varphi$ para todo $\varphi \in T$. También decimos que \mathcal{M} es un modelo de T . Si T tiene un modelo, decimos que T es consistente. También, decimos que T es completa si para todo enunciado φ , $\varphi \in T$ o $\neg\varphi \in T$. Note que si T es completa y consistente, no puede ocurrir que $\varphi \in T$ y $\neg\varphi \in T$.

A veces, una fórmula se sigue de otra de forma “lógica”. De hecho, hay dos formas precisas de definir esto, una sintáctica y otra semántica. Poder definir

la forma sintactica se sale de los alcances de estas notas. Sin embargo, intuitivamente es que puedo hacer un cálculo formal con los símbolos que no tome en cuenta interpretaciones. Un buen ejemplo de un paso en esto es el modus ponens: si tengo $\varphi \leftrightarrow \psi$ y φ , entonces puedo deducir ψ . A este calculo formal se le llama deducción.

Definición. 1. Decimos que $T \vdash \varphi$ si existe una deducción (finita) de φ a partir de los enunciados en T .

2. Decimos que $T \models \varphi$ si para toda \mathcal{L} -estructura \mathcal{M} , si $\mathcal{M} \models T$ entonces $\mathcal{M} \models \varphi$.

El teorema de completitud de Gödel nos liga estos dos conceptos:

Teorema 9 (Completitud). $T \models \varphi$ si y solo si $T \vdash \varphi$.

Teorema 10 (Compacidad). T es consistente si y solo si $T_0 \subseteq T$ finito es consistente.