

Introducción a la
Prueba de

Habilidades **Cuantitativas**

Leiner Víquez García
Mónica Mora Badilla

Graciela Ordóñez Gutiérrez
Luis Rojas Torres




EDITORIAL
UCR

Introducción a la
Prueba de
Habilidades
Cuantitativas

Leiner Víquez García
Mónica Mora Badilla

Graciela Ordóñez Gutiérrez
Luis Rojas Torres



**EDITORIAL**
UCR

Las opciones de resaltado del texto, anotaciones o comentarios dependerán de la aplicación y dispositivo en que se realice la lectura de este libro digital.

CC.SIBDI.UCR - CIP/4042

Nombres: Víquez García, Leiner, 1972- , autor. | Mora Badilla, Mónica, 1989- , autora. | Ordóñez Gutiérrez, Graciela, 1982- , autora. | Rojas Torres, Luis, 1986- , autor.
Título: Introducción a la prueba de habilidades cuantitativas / Leiner Víquez García, Mónica Mora Badilla, Graciela Ordóñez Gutiérrez, Luis Rojas Torres.
Descripción: Primera edición digital. | San José, Costa Rica : Editorial UCR., 2023.

Identificadores: **ISBN 978-9968-02-113-5** (PDF)

Materias: LEMB: Exámenes Universitarios. | Razonamiento – Exámenes, preguntas, etc.
| Matemáticas – Exámenes, preguntas, etc.
| Solución de Problemas – Exámenes, preguntas, etc.
Clasificación: CDD 378.166.2 –ed. 23

Edición aprobada por la Comisión Editorial de la Universidad de Costa Rica.

Primera edición impresa: 2021.

Primera edición digital (PDF): 2023.

© Editorial Universidad de Costa Rica,
Ciudad Universitaria Rodrigo Facio. San José, Costa Rica.
Apdo.: 11501-2060 • Tel.: 2511 5310 • Fax: 2511 5257
administracion.siedin@ucr.ac.cr
www.editorial.ucr.ac.cr

Todos los derechos reservados. Prohibida la reproducción de la obra o parte de ella, bajo cualquier forma o medio, así como el almacenamiento en bases de datos, sistemas de recuperación y repositorios, sin la autorización escrita del editor.
Hecho el depósito de ley.

Contenido

Introducción	ix
I. Prueba de Habilidades Cuantitativas (PHC)	1
II. Estructura de la PHC	3
III. ¿Cómo resolver un ítem de la PHC?	7
IV. Solución de los ejercicios de práctica para la PHC	11
Aritmética.	12
Geometría.	43
Álgebra	69
Análisis de datos	95
Referencias bibliográficas.	123
Índice de cuadros	125
Índice de figuras	127
Acerca de los autores	129

Introducción

El objetivo de este libro es brindar una explicación sencilla de qué es la Prueba de Habilidades Cuantitativas (PHC) y cómo se resuelven los ítems de esta prueba. El texto va dirigido a los aspirantes que desean ingresar a las carreras de la Universidad de Costa Rica (UCR) que utilizan la PHC en su proceso de admisión. Para el público que guste profundizar en los elementos y fundamentos técnicos de la prueba, se recomienda consultar la literatura científica existente sobre la PHC (Rojas, 2013; Bolaños y Rojas, 2013; Rojas, 2014; Rojas, Mora y Ordóñez, 2018, y Rojas y Ordóñez, 2019).

Con este texto se pretende ampliar la gama de oportunidades para que cada vez más personas tengan acceso a una preparación idónea para la PHC. Dicho propósito se lograría mediante la presentación de estrategias para resolver los ítems de esa prueba y, posteriormente, la explicación detallada de la solución de cada uno de los ejercicios que aparecen en el folleto de práctica de la PHC.

El folleto de práctica de la PHC y este libro fueron elaborados por el mismo equipo que trabaja en la construcción de la prueba mencionada. El proceso de construcción de los ítems se realizó con base en los mismos criterios que se utilizan para desarrollar la PHC. Lo anterior implica que estos documentos reflejan los procesos evaluados en la propia PHC, que se aplica con fines de admisión a las carreras de la UCR que tienen la prueba como requisito.

Es importante destacar que este equipo está conformado por profesionales en la enseñanza de la matemática, con diversos estudios de posgrado, tales como didáctica de la matemática, evaluación, estadística y ciencias cognoscitivas. El perfil profesional del equipo facilita que la PHC se encuentre en un proceso de evaluación constante desde distintos enfoques, lo cual posibilita que esta prueba cumpla con los estándares de calidad esperados para pruebas de altas consecuencias.

El equipo desarrollador de la PHC espera que este libro sea de ayuda para todas las personas aspirantes a ingresar a carreras con un perfil cuantitativo en la UCR. Por último, es importante mencionar que este libro se basó en la estructura presentada en la obra *Resolvamos la PAA* (Brizuela *et al.*, 2015).

I. Prueba de Habilidades Cuantitativas (PHC)

La PHC está dirigida a medir el razonamiento cuantitativo de los aspirantes a carreras de la UCR, que requieren de la matemática en diferentes cursos incluidos en sus programas y planes de estudio. El razonamiento cuantitativo, en palabras sencillas, es la capacidad de realizar razonamientos complejos con contenidos matemáticos sencillos (Steen, 2004). De forma más amplia, es “la habilidad para analizar información cuantitativa y determinar cuáles destrezas y procedimientos pueden ser aplicados para obtener la solución de un problema particular” (Dwyer *et al.*, 2003, p. 1).

La definición anterior indica que el razonamiento cuantitativo está conformado por los procesos de razonamiento con contenidos matemáticos, que se deben realizar para llegar a la solución de un problema específico. Esto implica que el razonamiento cuantitativo no es equivalente al conocimiento matemático, pues el primero le da más importancia a los procesos de análisis que a la repetición de un conjunto de algoritmos complejos. No obstante, para resolver un problema de razonamiento cuantitativo es necesario que el examinado domine una base de contenidos matemáticos (Rojas y Ordóñez, 2019). Así, en el caso de la PHC, se consideran conceptos básicos del plan de estudios de secundaria de Costa Rica (estos contenidos se desglosan en la siguiente sección).

Para quienes cursen carreras relacionadas con la matemática, el razonamiento cuantitativo será indispensable cuando se inserten en el mercado laboral y deban resolver problemas reales. Rojas y Ordóñez (2019) lo explican como sigue:

El razonamiento cuantitativo es necesario para desenvolverse exitosamente en las profesiones que requieren de la matemática en su quehacer [...] dado que los especialistas en estas áreas deben determinar cómo utilizar la matemática para resolver un problema determinado. Contrario a los ejercicios matemáticos clásicos, en muchas tareas laborales no se indica qué algoritmo matemático se debe emplear y, por tanto, será el profesional quien deba construir una estrategia eficiente y pertinente que permita el éxito en cada tarea. Con este fin, los especialistas de diversas áreas deben atender interrogantes utilizando gran variedad de información cuantitativa; esto los obliga a tomar decisiones sobre cuáles estadísticos brindan la información más adecuada a la pregunta atendida. En otros casos, se debe comparar fenómenos modelados por medio de expresiones algebraicas, lo cual demanda que el profesional distinga cuál es la estrategia que le permite realizar la comparación solicitada [...] Es por esto que se considera que los estudiantes de los programas de estudio que utilizan la matemática en su campo laboral deben poseer un nivel aceptable de razonamiento cuantitativo (Rojas y Ordóñez, 2019, p. 22).

II. Estructura de la PHC

Esta prueba está conformada por 40 ítems de selección única con cuatro opciones de respuesta, que se agrupan en secciones de 10 preguntas según el área de contenido. Las secciones son las siguientes: aritmética, geometría, álgebra y análisis de datos.

Para resolver la prueba se dispone de dos horas. En ese tiempo se incluye la labor de rellenar la hoja para respuestas. En cuanto a los materiales necesarios, solo se requieren los siguientes: lápiz, borrador y sacapuntas. El uso de calculadora y hojas adicionales no está permitido durante la ejecución de la PHC.

Los contenidos matemáticos que se abordan en la prueba, con los cuales se debe estar familiarizado para resolverla, se anotan a continuación.

Aritmética

Conjuntos numéricos

- Números naturales (propiedades y operaciones).
- Números enteros (propiedades y operaciones).
- Números racionales (propiedades y operaciones).
- Números reales (propiedades y operaciones).

Teoría de números naturales

- Divisibilidad.
- Múltiplos.
- Números primos.
- Números compuestos.
- Descomposición prima.
- Mínimo común múltiplo.
- Máximo común divisor.
- Secuencias numéricas.

Geometría

Geometría plana

- Elementos básicos de geometría (punto, recta, plano, rectas paralelas, perpendiculares y concurrentes, clasificación y medida de ángulos, ángulos entre rectas paralelas y transversales, teoremas relacionados con rectas paralelas y perpendiculares).
- Triángulos (desigualdad triangular, ángulos internos y externos, semejanza, congruencia, teorema de Pitágoras).
- Cuadriláteros (propiedades).
- Elementos básicos del círculo y la circunferencia.
- Polígonos regulares (ángulo central, radio, apotema, área y perímetro).
- Razones trigonométricas (definición, ley de senos y ángulos de elevación y depresión).

Geometría analítica

- Coordenadas de puntos en el plano.
- Distancia entre puntos.
- Ecuaciones de rectas.
- Ecuación de la parábola.

Cuerpos sólidos

- Prismas rectos (área y volumen).
- Pirámide recta (área y volumen).
- Cilindro circular recto (volumen).
- Cono circular recto (volumen).
- Esfera (volumen).

Álgebra

Operaciones fundamentales con expresiones algebraicas

- Expresiones algebraicas.
- Valor numérico de una expresión algebraica.
- Operaciones con polinomios (suma, resta, multiplicación, división).

Simplificación y factorización de expresiones algebraicas Ecuaciones e inecuaciones

- Ecuaciones de primer grado.
- Ecuaciones de segundo grado.
- Inecuaciones de primer grado.

Análisis de datos

Descripción de datos

- Variables cuantitativas y cualitativas.
- Análisis de gráficos estadísticos: barras, circulares, lineales y de puntos.
- Frecuencias relativas y absolutas de datos.

Medidas de posición

- Moda.
- Media aritmética (promedio).
- Recorrido.
- Máximo.
- Mínimo.
- Mediana.

Probabilidad

- Eventos aleatorios.
- Espacio muestral.
- Eventos simples y compuestos.
- Probabilidad frecuencial.
- Definición clásica de probabilidad.
- Eventos seguros, probables e imposibles.
- Introducción a la ley de los grandes números.

III. ¿Cómo resolver un ítem de la PHC?

Con base en Polya (1965), Mayer, Larkin y Kadane (1984) y Embretson y Daniel (2008), se recomienda seguir estos pasos para resolver un ítem de la PHC:

- Leer detenidamente el ítem e identificar de forma clara cuál es la incógnita que se debe encontrar para resolver el problema planteado. Este paso permitirá que el examinado tenga claro cuál es la ruta que se debe seguir, así como el punto al que se quiere llegar para la solución del ítem.
- Identificar los datos que proporciona el ítem: hipótesis, constantes, variables, relaciones, etc. La mayoría de estos datos tendrán una función en el proceso de resolución y por eso es importante identificarlos de forma exhaustiva. Es posible que algunos datos no sean necesarios en la solución, debido a que un elemento fundamental en el razonamiento cuantitativo es la capacidad de discriminar entre la información relevante y la que no lo es.
- Ordenar la información que se genera con los datos por medio de una representación: una ecuación, un diagrama, una figura geométrica, etc. Representar la información de esta manera permite visualizar los datos para identificar relaciones que podrían estar ocultas en una primera lectura.

- Plantear una estrategia que permita utilizar la información representada para obtener una solución. Se recomienda que antes de elaborar algoritmos matemáticos con la información, se realice un análisis sobre el aporte de esos algoritmos a la obtención de la respuesta para el enunciado. La creación de una estrategia apropiada de resolución es el elemento central del razonamiento cuantitativo. Entre las estrategias de resolución destacan las siguientes:
 - Plantear una relación que conecte los datos representados con la incógnita del ejercicio (puede ser una fórmula conocida o una ecuación).
 - Establecer relaciones entre datos brindados en el ítem con datos no proporcionados explícitamente, de manera que se vuelva posible la obtención de la incógnita que permite resolver el problema.
 - En problemas que requieren determinar la veracidad de una proposición, se pueden buscar casos específicos que invaliden la proposición o se deben analizar todos los casos posibles. Si la proposición no se cumple para uno de los casos contemplados, entonces es falsa; por el contrario, es verdadera si se cumple para todos los casos contemplados. La frase *con certeza* recalca que se debe analizar la veracidad de la proposición en todos los casos posibles.
 - Las proposiciones que hacen referencia a casos diversos o a totalidades que pueden ser divididas en categorías, por lo general, pueden ser verificadas por medio de casos genéricos. Por ejemplo,

una proposición para todos los reales se puede evaluar para un " x " real cualquiera. También, se podría dividir el conjunto en algunos subconjuntos específicos, de tal forma que queden representados los casos con comportamientos distintos para la proposición de análisis. De esta forma, una proposición que se enuncia para todos los reales puede ser verificada analizando si se cumple (o no) para todos los reales según sea su signo (negativo, nulo y positivo) o, dependiendo de lo que se enuncie, se puede verificar si se cumple simultáneamente (o no) para los valores reales racionales y los valores reales irracionales.

- En problemas que demandan determinar si un objeto matemático es de un tipo específico, se debe analizar si el objeto cumple las propiedades que permiten que sea clasificado de tal forma. Por ejemplo, para determinar si un número es par se debe analizar si al dividirlo entre 2 el cociente es un entero.
 - En la presencia de secuencias, se puede buscar una fórmula matemática que permita determinar el término n ésimo.
 - Generar ejemplos específicos sobre el problema planteado y determinar un patrón de las soluciones para dichos ejemplos.
- Ejecutar el proceso de solución. Esto conlleva aplicar correctamente la estrategia de resolución planteada en el paso previo. Durante esta ejecución es que se realizan

los algoritmos matemáticos. La PHC está diseñada para que este paso sea de complejidad baja para los estudiantes de último año de secundaria.

- Verificar la solución. El último paso de la solución de los ítems de la PHC consiste en buscar la respuesta encontrada en la etapa anterior entre las opciones propuestas por el ítem. En caso de que la solución no coincida con ninguna de las cuatro opciones, se debe verificar que los datos iniciales hayan sido anotados correctamente y que el proceso de solución haya sido ejecutado de forma precisa. Asimismo, se debe verificar si se contestó efectivamente la incógnita demandada por el ítem. A su vez, se debe considerar que una misma expresión (numérica o algebraica) puede ser representada de diferentes maneras, por lo que es posible que la respuesta encontrada sea equivalente con alguna de las alternativas.

En los ítems en los que se solicita analizar cada opción, se recomienda plantear una estrategia de resolución para cada una de las opciones (por lo general, son muy similares). En estos ítems, lo mejor es analizar las cuatro opciones. Si el planteamiento está bien realizado, la primera opción que sea verdadera efectivamente será la clave; no obstante, si se cometió un error en el análisis de la opción que aparenta ser la clave, este error puede ser detectado al encontrar que otra opción también es verdadera.

IV. Solución de los ejercicios de práctica para la PHC

A continuación se presentan los enunciados de los ítems del Folleto de Práctica para la PHC, así como la clave (A, B, C o D) correspondiente a la respuesta correcta. Inmediatamente después de la clave, se brinda un listado con los contenidos que un estudiante debe dominar para contestar de forma adecuada la pregunta planteada en el enunciado.

Por último, en cada ítem se explica con detalle una estrategia de solución para el ejercicio. La estrategia descrita no necesariamente es la única. En muchos ejercicios existen otros procedimientos y razonamientos que son válidos para llegar a la respuesta correcta. De hecho, en algunos ejercicios, para los cuales se ha considerado pertinente, se incluye una estrategia adicional que también conduce a la respuesta correcta.

Cabe resaltar que en algunas de las soluciones se destacan en cursiva algunas palabras claves, que permiten a cada estudiante o lector identificar procesos importantes para la resolución del ítem, tales como *comparar* o *relacionar*, *validar*, *ejemplificar*, *clasificar* o *generalizar*. Además, en los enunciados de las preguntas, debido al protocolo de formato que está establecido para la PHC, la expresión **con certeza** se escribe en negrita (como se muestra), y la palabra **no** se escribe en negrita y subrayada (como se muestra).

Sin más preámbulo, se procede a las soluciones de los ejercicios.

Aritmética

1. Al dividir 14 505 por un número natural n , el residuo es 25. Con base en lo anterior, ¿cuál de los siguientes números naturales podría ser el valor de n ?
- A) 7 240
 - B) 7 241
 - C) 7 242
 - D) 7 245

Clave

La respuesta correcta es la opción A.

Conocimientos previos requeridos

- Números naturales (propiedades y operaciones).
- Divisibilidad.
- Múltiplos.

Estrategia de resolución

Estrategia 1

Una manera de determinar la respuesta correcta consiste en efectuar la división de 14 505 por cada uno de los valores de n presentados en las opciones, hasta encontrar el que dé como residuo 25.

En la opción A, se cumple que al dividir $14\,505 \div 7\,240$ se obtiene cociente 2 y residuo 25, con lo que se concluye que esta opción es la respuesta correcta.

Aunque ya se evidenció que la opción A es correcta, una simple inspección visual de la división ya efectuada y de los otros posibles divisores permite inferir que si se procede a efectuar las divisiones correspondientes en las opciones B, C y D se generarían los residuos 23, 21 y 15, respectivamente. De lo anterior, se concluye que las opciones B, C y D no son respuestas correctas.

Estrategia 2

Al leer la situación planteada, se observa que hace referencia a una división de números naturales. Como además se hace mención de las partes de esa operación, la estrategia para trabajar requiere que se *establezcan relaciones* entre las partes de la división y el algoritmo o procedimiento establecido para resolverla.

En ese sentido, se debe considerar que al dividir el número 14 505 (dividendo) por un número natural n (divisor) se obtiene un cociente también natural (por el momento desconocido) y como residuo 25.

Entonces, como el algoritmo de la división garantiza que:

$$\text{Dividendo} = \text{divisor} \cdot \text{cociente} + \text{residuo}$$

Se tendría lo siguiente:

$$14\,505 = n \cdot \text{cociente} + 25$$

A partir del razonamiento anterior se puede despejar:

$$14\,505 - 25 = n \cdot \text{cociente}$$

Esto permite deducir que el cociente, que también debe ser entero positivo, cumple lo que sigue:

$$\text{cociente} = \frac{14\,480}{n}$$

Por lo tanto, 14 480 debe ser divisible por n , pues el cociente es entero. Al analizar las opciones, la única que corresponde a un divisor exacto de 14 480 es 7 240.

2. ¿Cuál de los siguientes números es un divisor de $78^2 + 2 \cdot 78 \cdot 14 + 14^2$?

- A) 15
- B) 46
- C) 64
- D) 78

Clave

La respuesta correcta es la opción B.

Conocimientos previos requeridos

- Números naturales (propiedades y operaciones).
- Múltiplos.
- Descomposición prima.
- Divisibilidad.
- El conocimiento de la primera fórmula notable facilita la identificación de la respuesta correcta.

Estrategia de resolución

Inicialmente, cuando se lee el ejercicio, se observa que el único que se da es la cantidad $78^2 + 2 \cdot 78 \cdot 14 + 14^2$, y se pide identificar un divisor de la misma. Un camino que podría utilizarse consiste en efectuar las operaciones planteadas para obtener el valor específico de dicha expresión. Sin embargo, esto generaría un valor muy elevado y se requeriría un trabajo algo largo para poder identificar cuál de las opciones es un divisor de esa cantidad. Por lo tanto, la situación planteada requiere de un análisis más práctico que permita llegar a la solución.

Una estrategia que podría facilitar ese análisis consiste en emplear herramientas de factorización, para encontrar una expresión equivalente a la cantidad dada y que, a la vez, sea más fácil de analizar. Para eso, se puede utilizar el hecho de que la expresión $78^2 + 2 \cdot 78 \cdot 14 + 14^2$ corresponde al desarrollo de una suma elevada al cuadrado, es decir, la fórmula notable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. De lo anterior, se puede concluir que:

$$\begin{aligned}78^2 + 2 \cdot 78 \cdot 14 + 14^2 &= (78 + 14)^2 \\ &= (92)^2 \\ &= (2^2 \cdot 23)^2 \\ &= 2^4 \cdot 23^2\end{aligned}$$

Ahora bien, un divisor exacto de esta cantidad debe tener los mismos factores primos 2 y 23, aunque con exponentes menores o iguales a 4 y 2, respectivamente. Al comparar las opciones, se tiene

- Opción A: $15 = 3 \cdot 5$ no divide a $2^4 \cdot 23^2$
- Opción B: $46 = 2 \cdot 23$ sí divide a $2^4 \cdot 23^2$
- Opción C: $64 = 2^6$ no divide a $2^4 \cdot 23^2$
- Opción D: $78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$ no divide a $2^4 \cdot 23^2$

De ahí que la cantidad $78^2 + 2 \cdot 78 \cdot 14 + 14^2$ se puede *clasificar* como un múltiplo de 46. Lo anterior es equivalente a decir que 46 se *clasifica* como un divisor de $78^2 + 2 \cdot 78 \cdot 14 + 14^2$. De esta forma, la respuesta correcta es la opción B.

3. Si n es un número natural impar mayor que 1, ¿por cuál de los siguientes valores es divisible, **con certeza**, la expresión $4^n + 6^n$?
- A) 6
 - B) 7
 - C) 8
 - D) 11

Clave

La respuesta correcta es la opción C.

Conocimientos previos requeridos

- Números naturales (propiedades y operaciones). Particularmente, las potencias y sus leyes son importantes para la resolución de este ítem.
- Divisibilidad.
- Múltiplos.
- Descomposición prima.
- El conocimiento de la técnica de factor común para factorizar es útil para una manipulación de las expresiones que se dan en este ítem. Sin embargo, el conocimiento de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma es suficiente para llegar a la respuesta correcta.

Estrategia de resolución

Se comienza organizando los datos incluidos para visualizar mejor la situación descrita. De esta manera, se tiene lo siguiente:

- Como “ n es un impar mayor que 1”, se cumple que $n \in \{3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$
- Se busca un valor que sea, *con certeza*, divisor de la expresión $4^n + 6^n$

Estrategia 1

Dada la información, es necesario expresar la cantidad proporcionada como un producto de factores para identificar los divisores conocidos. Por lo tanto, se replantea la expresión dada de manera conveniente, mediante la factorización de las bases de las potencias que aparecen en cada término. Luego, aplicando leyes de potencias es posible establecer lo que sigue:

$$\begin{aligned}4^n + 6^n &= (2^2)^n + (2 \cdot 3)^n \\ &= 2^{2n} + 2^n \cdot 3^n \\ &= 2^n (2^n + 3^n), \text{ con } n \text{ impar, } n \geq 3\end{aligned}$$

Al comparar el primero y el último miembro de la igualdad, se tiene que:

$$4^n + 6^n = 2^n (2^n + 3^n)$$

De ahí se puede deducir que $4^n + 6^n$ es divisible por 2^n , con n impar y $n \geq 3$. Empero, observe que, a su vez, para todo n impar, $n \geq 3$, se cumple que 2^n es divisible por $2^3 = 8$.

Lo anterior permite concluir que para los valores de n impares mayores o iguales que 3 se tiene que $4^n + 6^n$ es divisible por 2^n . Como, simultáneamente, se cumple que 2^n es divisible por 8, entonces también $4^n + 6^n$ será divisible por $2^3 = 8$. Así, se tiene la *certeza* de que $4^n + 6^n$ se puede *clasificar* como un múltiplo de $2^3 = 8$.

Estrategia 2

Un método alternativo para llegar a la respuesta consiste en construir casos particulares de la situación, asignando valores naturales a la variable n y tomando en cuenta que deben ser impares mayores que 1, es decir, $n \geq 3$. Después, se *clasifican* los valores numéricos dependiendo de si son o no múltiplos de los valores en las opciones.

El procedimiento anterior permite encontrar *contraejemplos*, es decir, un ejemplo particular que contradice la veracidad del principio que se está tratando de generalizar *con certeza*. Este proceso posibilita descartar opciones y así llegar a identificar la respuesta correcta. Entonces, se podrían plantear los siguientes casos específicos:

- Si $n = 3$, se tendría $4^3 + 6^3 = 280$, que no es divisible por 6 (lo que descarta la opción A), sí es divisible por 7 y 8, pero no es divisible por 11 (lo que descarta la opción D).
- Si $n = 5$, se tendría $4^5 + 6^5 = 8800$, que es divisible por 8 pero no es divisible por 7 (con lo que se descarta la opción B).

Así, a partir de los ejemplos construidos, se concluye que la respuesta correcta corresponde a la opción C.

4. Considere las siguientes cantidades:

I. 0,2% de 100

II. 95 % de $\frac{1}{5}$

III. $\frac{2^2}{20}$

Con base en lo anterior, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es, **con certeza**, verdadera?

- A) La cantidad I es igual que la cantidad II.
- B) La cantidad II es igual que la cantidad III.
- C) La cantidad I es menor que la cantidad II y III.
- D) La cantidad II es menor que la cantidad I y III.

Clave

La respuesta correcta es la opción D.

Conocimientos previos requeridos

- Números racionales (propiedades y operaciones). En particular, para resolver este ítem es importante dominar el concepto de números racionales en distintas notaciones y que corresponden a porcentajes, la amplificación y simplificación de números expresados en notación fraccionaria, la multiplicación de números racionales y las relaciones de orden entre números racionales dados en notación fraccionaria o decimal.

Estrategia de resolución

Los datos consisten en tres cantidades (una en cada proposición), dos de ellas expresadas como porcentajes (I y II) y la otra como razón de dos cantidades (III). Por lo tanto, un plan adecuado para establecer si lo que indican las afirmaciones es correcto o no consiste en calcular el valor numérico correspondiente a las relaciones indicadas en cada una de las cantidades dadas como referencia.

I. El 0,2 % de 100 corresponde a la expresión

$$\frac{0,2}{100} \cdot 100 = 0,2.$$

II. El 95 % de $\frac{1}{5}$ corresponde a la expresión

$$\frac{95}{100} \cdot \frac{1}{5} = \frac{19}{100} = 0,19.$$

III. $\frac{2^2}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0,2.$

Se procede a *validar* las afirmaciones expuestas en cada una de las opciones, mediante la comparación de las cantidades obtenidas. Las opciones A, B y C se descartan de inmediato porque las cantidades I y III son iguales entre sí, pero diferentes con la cantidad II. También, se puede concluir la veracidad de la opción D, puesto que, en efecto $0,19 < 0,2$.

5. Si m es un número entero que satisface la desigualdad $-2 < m + 5 < 2$, ¿cuál es la cantidad de posibles valores de m ?
- A) 2
 - B) 3
 - C) 4
 - D) 5

Clave

La respuesta correcta es la opción B.

Conocimientos previos requeridos

- Números enteros (propiedades y operaciones).
- Inecuaciones de primer grado.
- Valor numérico de una expresión algebraica.

Estrategia de resolución

Para determinar la cantidad de todos los posibles valores para m , es necesario analizar la desigualdad dada y, a partir de las *relaciones establecidas* entre los valores proporcionados, identificar un intervalo de pertenencia para m . Se tienen dos alternativas para realizar el análisis de dicha desigualdad:

Estrategia 1

La primera opción para analizar la desigualdad corresponde a separarla en dos desigualdades simples y despejar el valor de m en cada una de ellas.

De la primera parte de la desigualdad se tiene

$$\begin{aligned} \underbrace{-2 < m + 5 < 2}_{-2 < m + 5} \\ -2 - 5 < m \\ -7 < m \end{aligned}$$

De la segunda parte de la desigualdad se tiene

$$\begin{aligned} -2 < \underbrace{m + 5 < 2}_{m + 5 < 2} \\ m < 2 - 5 \\ m < -3 \end{aligned}$$

A partir de las dos anteriores, se obtiene que m debe estar entre -7 y -3 , es decir, $-7 < m < -3$. Al considerar, además, que m es un número entero, *las únicas posibilidades se reducen a* $-6, -5, -4$, para un total de tres posibles valores.

Estrategia 2

Otra manera de trabajar este ejercicio consiste en darle posibles valores a m e ir *verificando* cuáles satisfacen la desigualdad. Si se decide iniciar probando con números enteros positivos, después de analizar unos cuantos casos se observa que, al sustituir el valor de m por dichos valores, se generan desigualdades cuyo valor de verdad es falso. Esto seguirá sucediendo indefinidamente, pues entre mayor sea el valor para m , también será mayor el valor de $m + 5$, ya que al ser una expresión lineal no llegaría a ser menor que 2. Lo mismo sucede si se asigna como valor de m el cero. Al probar con enteros negativos, si se asignan los valores de m en el orden $-1, -2, -3, -4, -5, -6, \dots$, se observa que los primeros tres enteros negativos ($-1, -2, -3$) generan desigualdades falsas, los siguientes tres ($-4, -5, -6$) desigualdades verdaderas y con los enteros negativos subsiguientes ($-7, -8, -9, \dots$) se vuelven a obtener desigualdades falsas. Esto se aprecia en el Cuadro 1:

Cuadro 1*Datos auxiliares para el ítem 5*

Valor para m	$-2 < m + 5 < 2$	Condición de verdad
2	$-2 < 7 < 2$	Falso
1	$-2 < 6 < 2$	Falso
0	$-2 < 5 < 2$	Falso
-1	$-2 < 4 < 2$	Falso
-2	$-2 < 3 < 2$	Falso
-3	$-2 < 2 < 2$	Falso
-4	$-2 < 1 < 2$	Verdadero
-5	$-2 < 0 < 2$	Verdadero
-6	$-2 < -1 < 2$	Verdadero
-7	$-2 < -2 < 2$	Falso

Condición de verdad para la desigualdad con algunos valores enteros m .

Luego de probar con, a lo sumo, ocho casos, se deduce que solo tres valores satisfacen la desigualdad planteada en el enunciado. Este razonamiento es correcto puesto que la expresión $m + 5$ es lineal y creciente (conforme aumenta el valor de m también aumenta el valor de $m + 5$). Entonces, para $m > -4$ se cumplirá $m + 5 \geq 2$ y, de la misma forma, para $m < -6$ se tendrá que $m + 5 \leq -2$. Por lo tanto, solo con los tres valores ya identificados se cumpliría que $-2 < m + 5 < 2$.

6. Si n es un número natural, tal que $2^{11} \cdot 7^3 \cdot 5^1 = 2^{10} \cdot n \cdot 7^3$, ¿cuál de las siguientes relaciones se cumple **con certeza**?

- A) $n < 5$
- B) $n > 10$
- C) $n^3 < 64$
- D) $n^2 < 128$

Clave

La respuesta correcta es la opción D.

Conocimientos previos requeridos

- Números naturales (propiedades y operaciones). En particular, el concepto de factores, leyes de potencias y de relaciones de orden con números naturales.
- Descomposición prima.
- Ecuaciones de primer grado. Este conocimiento se utiliza si se emplea la segunda estrategia, que se proporcionará en la sección siguiente. No obstante, el uso del proceso de despeje de una ecuación no es indispensable, pues basta establecer relaciones a partir de la igualdad entre dos expresiones factorizadas completamente.

Estrategia de resolución

El único dato suministrado es una igualdad. Para definir características correspondientes al valor de n se deberán tomar en cuenta el concepto y las propiedades de una igualdad. Esto se puede hacer de distintas maneras.

Estrategia 1

Al comparar los factores presentes en las cantidades equivalentes que aparecen representadas a ambos lados de la igualdad y tomando en cuenta que la expresión de la izquierda está completamente factorizada, se infiere que los factores primos de ambas cantidades son los mismos. De esta manera, n corresponde al producto de los valores que completan la totalidad de factores primos que aparecen en la expresión a la izquierda de la igualdad. De esta manera, se debe cumplir que $n = 2 \cdot 5 = 10$.

Estrategia 2

Aunque se trata de un ítem de aritmética, también se podría abordar mediante el uso de herramientas algebraicas conocidas, tal y como son las ecuaciones. La igualdad $2^{11} \cdot 7^3 \cdot 5^1 = 2^{10} \cdot n \cdot 7^3$ se puede ver como una ecuación de primer grado con n como incógnita. Por lo tanto, se efectúa el despeje de n :

$$\begin{aligned}2^{11} \cdot 7^3 \cdot 5^1 &= 2^{10} \cdot n \cdot 7^3 \\n &= \frac{2^{11} \cdot 7^3 \cdot 5^1}{2^{10} \cdot 7^3} \\n &= 10\end{aligned}$$

Mediante cualquiera de las dos estrategias expuestas se llega a la conclusión de que $n = 10$. A partir de lo anterior, se procede a analizar la veracidad de cada una de las expresiones que aparecen en las opciones para *validar* la respuesta correcta.

Al analizar las proposiciones dadas en las opciones se tiene lo siguiente:

- Opción A: es falsa porque $n = 10 > 5$.
- Opción B: es falsa porque $n = 10$ y, por lo tanto, no se cumple que $10 > 10$.
- Opción C: es falsa porque $n^3 = 1000 > 64$.
- Opción D: es verdadera porque $n^2 = 100 < 128$.

7. Considere la siguiente secuencia numérica:

$$u_2 = \left(\frac{2+1}{2}\right)$$

$$u_3 = \left(\frac{2+1}{2}\right) \left(\frac{3+1}{3}\right)$$

$$u_4 = \left(\frac{2+1}{2}\right) \left(\frac{3+1}{3}\right) \left(\frac{4+1}{4}\right)$$

\vdots

$$u_n = \left(\frac{2+1}{2}\right) \left(\frac{3+1}{3}\right) \left(\frac{4+1}{4}\right) \dots \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Con base en la secuencia anterior, ¿cuál es el valor de u_{100} ?

A) 1^{100}

B) 2^{100}

C) $\frac{100}{2}$

D) $\frac{101}{2}$

Clave

La respuesta correcta es la opción D.

Conocimientos previos requeridos

- Números racionales (propiedades y operaciones).
- Simplificación.

Estrategia de resolución

Para establecer una estrategia adecuada para resolver este ítem, se debe analizar con detalle la secuencia dada. Se requiere determinar el valor de cada uno de los casos brindados en los datos y así observar su comportamiento. Es preciso identificar cuál es la forma general que tienen las soluciones de la secuencia para, posteriormente, calcular el valor específico solicitado. Se calculan los valores de la siguiente forma:

$$u_2 = \left(\frac{2+1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$u_3 = \left(\frac{2+1}{2}\right) \left(\frac{3+1}{3}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{2}$$

$$u_4 = \left(\frac{2+1}{2}\right) \left(\frac{3+1}{3}\right) \left(\frac{4+1}{4}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$$

⋮

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{2+1}{2}\right) \left(\frac{3+1}{3}\right) \left(\frac{4+1}{4}\right) \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

A partir de los valores calculados, se observa que el resultado siempre es la mitad del sucesor de la posición definida por el subíndice n . En otras palabras, se identifica el patrón de la secuencia planteada. La *generalización* establecida se puede incluso representar mediante la siguiente fórmula:

$$u_n = \frac{n+1}{2}$$

Por lo tanto, para calcular el valor solicitado se efectúa lo que sigue:

$$u_{100} = \frac{100 + 1}{2} = \frac{101}{2}$$

8. Si x y y son números naturales pares consecutivos, ¿cuál de las siguientes características corresponde, **con certeza**, al valor numérico de la expresión $\frac{x+y}{2}$?
- A) Es un número par.
 - B) Es un número impar.
 - C) Es múltiplo de cuatro.
 - D) Es un número primo.

Clave

La respuesta correcta es la opción B.

Conocimientos previos requeridos

- Números naturales (propiedades y operaciones).
- Divisibilidad.
- Múltiplos.
- Números primos.
- Números compuestos.

Estrategia de resolución

Al observar la situación planteada, se aprecia que el objetivo es *clasificar* el valor dado por la expresión $\frac{x+y}{2}$ en alguna de las cuatro categorías definidas en las opciones, siendo x y y dos números naturales pares consecutivos.

Estrategia 1

Una manera de llegar a la respuesta consiste en considerar el conjunto de los números naturales pares $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \dots\}$, para establecer el valor de la expresión $\frac{x+y}{2}$ siendo x y y dos números pares consecutivos en ese conjunto y, así, tratar de identificar un patrón. En el Cuadro 2, se muestran varias parejas de números pares consecutivos (valores específicos de x y y) así como el valor de la expresión $\frac{x+y}{2}$.

Cuadro 2*Datos auxiliares para el ítem 8*

Valores asignados a x, y	Valor correspondiente de $\frac{x+y}{2}$
2, 4	3
4, 6	5
6, 8	7
8, 10	9
10, 12	11
12, 14	13
14, 16	15
\vdots	\vdots

Valor de $\frac{x+y}{2}$ para x, y naturales, pares y consecutivos.

Basta observar el patrón que surge para concluir que, bajo las condiciones dadas, $\frac{x+y}{2}$ siempre se *clasificará* como un número impar.

Estrategia 2

Una vía alterna para trabajar en este ítem consiste en representar algebraicamente los dos números naturales pares consecutivos x y y de la siguiente manera: $x = 2n$, $y = 2n + 2$ con $n \in \mathbb{Z}^+$.

Así, la expresión dada corresponde a

$$\begin{aligned}\frac{x + y}{2} &= \frac{2n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{4n + 2}{2} \\ &= \frac{2(2n + 1)}{2} \\ &= 2n + 1\end{aligned}$$

Como la expresión $2n + 1$ corresponde a un número impar *con certeza*, entonces, la expresión equivalente $\frac{x + y}{2}$, se *clasifica* como impar.

Independientemente de cuál de las dos estrategias se utilice, observe que la cantidad resultante *no siempre* corresponde a un número primo, *nunca* corresponde a un número par y, por ende, *nunca* corresponde a un múltiplo de cuatro. Debido a lo anterior, se descartan las opciones A, C y D.

9. ¿Cuál es el valor de la suma de los dígitos del número $(200)^6 + (700)^2$?

- A) 8
- B) 9
- C) 23
- D) 113

Clave

La respuesta correcta es la opción C.

Conocimientos previos requeridos

- Números naturales (propiedades y operaciones). En particular, es necesario comprender las propiedades de las potencias, incluyendo la multiplicación de números naturales por potencias cuya base es 10 (multiplicación abreviada).
- Descomposición prima.
- Factorización mediante el método de factor común. Este conocimiento se emplea si se utiliza la estrategia de manipulación de las cantidades dadas, que se expondrá en la siguiente sección.

Estrategia de resolución

Estrategia 1

Al revisar el enunciado de la pregunta planteada, se observa que solo se cuenta con un único dato: una cantidad expresada como suma de potencias. Es preciso comprender que para obtener la suma de los dígitos de dicha cantidad, la forma como viene representada no permite llegar directamente a la respuesta, por lo que hay que efectuar algún tipo de tratamiento sobre la expresión, de manera que sea posible deducir cuál va a ser la suma de los dígitos de dicha cantidad.

Esto se puede lograr al factorizar completamente cada una de las cantidades que se están sumando y aplicar las leyes de potencias. Después se *establecen relaciones* entre los factores obtenidos y las propiedades de las potencias con base 10, para tratar de identificar la suma de los dígitos solicitada. Se debe recordar que cuando en una multiplicación uno de los factores es 10^n , con $n \in \mathbb{N}$, se agregan n ceros al producto de los demás factores. Por lo tanto, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}(200)^6 &= (2 \cdot 10^2)^6 \\ &= 2^6 \cdot 10^{12} \\ &= 64 \cdot 10^{12} \\ &= 64\,000\,000\,000\,000\,000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(700)^2 &= (7 \cdot 10^2)^2 \\ &= 7^2 \cdot 10^4 \\ &= 49 \cdot 10^4 \\ &= 490\,000\end{aligned}$$

La suma de ambas cantidades es 64 000 000 490 000, por lo que la suma de los dígitos es 23.

Estrategia 2

Un razonamiento parecido sería mediante la factorización de la expresión inicial, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(200)^6 + (700)^2 &= (2 \cdot 10^2)^6 + (7 \cdot 10^2)^2 \\ &= 2^6 \cdot 10^{12} + 7^2 \cdot 10^4 \\ &= (64 \cdot 10^8 + 49)10^4 \\ &= (6\,400\,000\,049) \cdot 10^4\end{aligned}$$

Dado que, en esa cantidad, multiplicar por 10^4 solamente agregaría más ceros al final, entonces, la suma de los dígitos será $6 + 4 + 4 + 9 = 23$.

10. Si p y m son números enteros positivos, tales que $p \div 2$ es entero y $m \div 3$ es par, ¿cuál de las siguientes opciones es, **con certeza**, verdadera?
- A) $p \cdot m$ es múltiplo de 9.
- B) $p \cdot m$ es múltiplo de 12.
- C) $\frac{3p}{m}$ es entero.
- D) $\frac{2m}{3p}$ es par.

Clave

La respuesta correcta es la opción B.

Conocimientos previos requeridos

- Números enteros (propiedades y operaciones).
- Divisibilidad.
- Múltiplos.

Estrategia de resolución

Para resolver este ítem es necesario identificar algunas propiedades útiles de las variables presentes en el encabezado: p y m .

A partir del dato de que $p \div 2$ es entero, se deduce que p es múltiplo de dos. Además, con base en el hecho de que $m \div 3$ es par, se puede inferir que m es múltiplo de seis. La justificación de estas conclusiones es

$$\begin{aligned}\frac{p}{2} \text{ es entero} &\Rightarrow \frac{p}{2} = k, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow p = 2k, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow p \text{ es múltiplo de } 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{m}{3} \text{ es par} &\Rightarrow \frac{m}{3} = 2h, \text{ con } h \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow m = 3 \cdot 2h, \text{ con } h \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow m = 6h, \text{ con } h \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow m \text{ es múltiplo de } 6\end{aligned}$$

Con la información anterior, se analizan las tres expresiones que son presentadas en las opciones, a saber, $p \cdot m$, $\frac{3p}{m}$, $\frac{2m}{3p}$ para proceder a *clasificarlas* según las categorías indicadas en cada una de las opciones (múltiplo de 12, múltiplo de 9, entero o par).

- La expresión de las opciones A y B, $p \cdot m$: esta cantidad es, *con certeza*, un entero múltiplo de 12, ya que p es un entero múltiplo de 2 y m es un entero múltiplo de 6. Se tiene que $p \cdot m = 2k \cdot 6h = 12kh$, con $k, h \in \mathbb{Z}$. Nótese que si $k = h = 1$, entonces, $p \cdot m = 12$, que no es múltiplo de 9. Esto descarta la opción A.
- La expresión de la opción C, $\frac{3p}{m}$: esta cantidad es racional *con certeza*, pero podría ser entera o no. Por ejemplo, si $p = 4$ y $m = 24$, entonces, $\frac{3p}{m} = \frac{1}{2}$ que no corresponde a un número entero. Esto descarta la opción C.
- La expresión de la opción D, $\frac{2m}{3p}$: esta cantidad es racional *con certeza*, pero podría ser un número entero o un número racional no entero. En este caso, si es un racional no entero no se clasificaría como número par. Por ejemplo, si $m = 12$ y $p = 16$, entonces, $\frac{2m}{3p} = \frac{1}{2}$. Esto descarta la opción D.

Del análisis anterior, se puede inferir que la única opción verdadera, *con certeza*, es la B.

Geometría

11. Considere el rectángulo $PQRS$ y E un punto, tal que $R - E - S$. ¿Cuál es el porcentaje del área del rectángulo $PQRS$ que es cubierto por el triángulo PQE ?
- A) Menos del 25 %.
 - B) Más del 25 %, pero menos del 50 %.
 - C) El 50 %.
 - D) Más del 50 %.

Clave

La respuesta correcta es la opción C.

Conocimientos previos requeridos

- Geometría plana: triángulos.
- Geometría plana: cuadriláteros.
- Operaciones fundamentales con expresiones algebraicas.

Estrategia de resolución

Antes de determinar la estrategia de solución que demanda este ítem, se debe organizar la información para trabajar de una mejor manera el problema. Para esto, se puede recurrir a un dibujo (Figura 1), como el que se presenta a continuación:

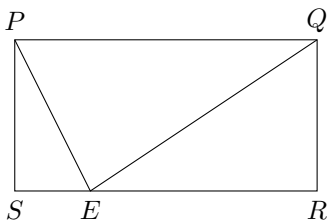


Figura 1. Ilustración auxiliar para el ítem 11

Nótese que en el dibujo se coloca el punto E de forma estratégica para que no dé la impresión de que es el punto medio, ya que en los datos proporcionados solo se garantiza que es un punto entre R y S .

La pregunta del enunciado demanda que se calcule el área del triángulo PQE en términos del área del rectángulo $PQRS$. El área del triángulo es

$$\frac{PQ \cdot QR}{2} = \frac{A_{\text{Rectángulo}}}{2}$$

Debido a lo anterior, la respuesta correcta es que el área del triángulo representa la mitad del área del rectángulo, lo cual equivale al 50 %.

12. Considere el $\triangle EPR$ rectángulo en P y los puntos Q y S , tales que $P-Q-R$, $P-S-E$, $\overline{PQ} \cong \overline{QR}$ y $\overline{PS} \cong \overline{SE}$.

De acuerdo con la información anterior, ¿cuál de las siguientes afirmaciones se cumple **con certeza**?

- A) $EP < 2QS$
- B) $QS < QR$
- C) $2QS > RE$
- D) $2EP > RE$

Clave

La respuesta correcta es la opción A.

Conocimientos previos requeridos

- Elementos básicos de geometría.
- Desigualdades.
- Triángulos: semejanza, teorema de Pítagoras.
- Ecuación de segundo grado que se simplifica a una de primer grado.

Estrategia de resolución

Previo a establecer una estrategia de solución, es necesario organizar los datos brindados para relacionarlos. Para ello, es recomendable realizar una representación gráfica de la figura y las condiciones dadas, como la de la Figura 2:

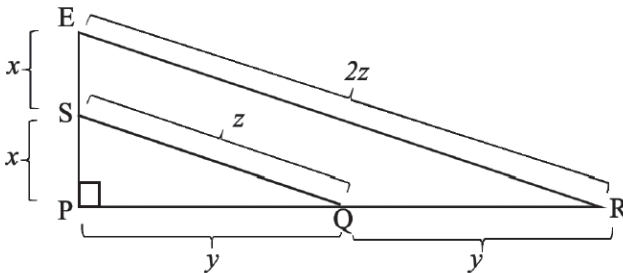


Figura 2. Ilustración auxiliar para el ítem 12

A partir de dicha representación, se establecen relaciones entre los datos. Por ejemplo, en la Figura 2 se observa que se identificó la distancia de P a S y de S a E con la letra x , para representar que la distancia es la misma, ya que en los datos se afirma que tales segmentos son congruentes. De la misma forma, se señala la distancia de P a Q y de Q a R con la letra y , debido a que, de acuerdo con el enunciado, los segmentos son congruentes entre sí.

Por su parte, se señala la distancia de S a Q con la letra z . De esta manera, según la información brindada, se puede concluir que la distancia de E a R será igual a $2z$. Esto último se puede justificar de diversas maneras, utilizando diferentes conocimientos vistos previamente en secundaria, tales como:

- Semejanza de triángulos: se tiene que $\triangle EPR \sim \triangle SPQ$ por el criterio de semejanza de lado-ángulo-lado. Puesto que la razón entre los catetos correspondientes en los triángulos semejantes es $1 : 2$, se concluye que las hipotenusas están en esa misma razón y, por lo tanto, $ER = 2 \cdot SQ$, es decir, $ER = 2z$.
- Teorema de Pitágoras: dicho teorema garantiza que en el $\triangle SPQ$ se cumple que $SQ^2 = SP^2 + PQ^2$ o, lo que es lo mismo, $x^2 + y^2 = z^2$. De esta manera, al aplicar el teorema en el $\triangle EPR$ se tiene que:

$$\begin{aligned} ER^2 &= EP^2 + PR^2 \\ \Rightarrow ER^2 &= (2x)^2 + (2y)^2 \\ \Rightarrow ER^2 &= 4x^2 + 4y^2 \\ \Rightarrow ER^2 &= 4(x^2 + y^2) \\ \Rightarrow ER^2 &= 4z^2 \\ \Rightarrow ER &= 2z \end{aligned}$$

Una vez establecidas dichas relaciones, se procede a analizar las diferentes alternativas de respuesta, para *determinar la veracidad de la desigualdad dada* en cada una de ellas. En cada caso, se analiza la posibilidad de determinar directamente si la desigualdad es verdadera o falsa o, de ser necesario, se procede a buscar contraejemplos para descartarlas, hasta determinar la única que siempre será verdadera.

Así, se analizan las desigualdades propuestas:

- En la opción A, $EP < 2QS$: como $2x = EP$ y $2QS = 2z = ER$ se tendría que la desigualdad dada equivale a $EP < ER$, lo cual es *verdadero* porque, en

cualquier triángulo rectángulo, siempre se cumple que un cateto es menor que la hipotenusa.

- En la opción B, $QS < QR$: como $QR = PQ = y$ y $z = QS$, se tendría que la desigualdad dada equivale a $QS < PQ$, lo cual es *falso* porque la hipotenusa de un triángulo no puede ser menor a un cateto.
- En la opción C, $2QS > RE$: como se cumple que $2z = 2QS$ y $2z = ER$, se tendría que la desigualdad es *falsa* porque $2QS$ y ER equivalen a una misma cantidad.
- En la opción D, $2EP > RE$: como se cumple que $2EP = 4x$ y $RE = 2z$, entonces se busca analizar si se cumple que $4x > 2z$. Sin embargo, esto *no siempre es verdadero*, puesto que en ciertos triángulos rectángulos podría cumplirse, pero en otros no. Por ejemplo, si las medidas de los lados del $\triangle SPQ$ fueran $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ (que en efecto corresponden a las medidas de los lados de un triángulo rectángulo), se tendría que $4x = 4 \cdot 3 = 12 > 10 = 2 \cdot 5 = 2z$. En este caso, sí se cumpliría que $2EP > RE$. No obstante, si las medidas del $\triangle SPQ$ fueran los valores $x = 5$, $y = 12$, $z = 13$ (los cuales también corresponden a las medidas de los lados de un triángulo rectángulo), se tendría que $4x = 4 \cdot 5 = 20 < 26 = 2 \cdot 13 = 2z$. En este caso, se tendría que $2EP < RE$.

Por lo tanto, la única afirmación que es siempre verdadera es la que aparece en la opción A.

13. Observe los cuatro primeros elementos de una secuencia de formas construidas con cuadrados cuyo lado mide 3 cm. Debajo de cada grupo de cuadrados se indica su posición en la secuencia.

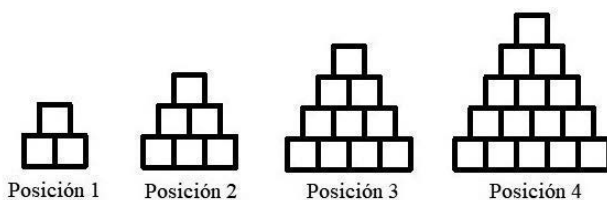


Figura 3. Ilustración con datos para el ítem 13

Si se continúa construyendo la secuencia con el mismo patrón, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el área total del grupo de cuadrados en la posición 15?

- A) 192 cm^2
- B) 405 cm^2
- C) 1224 cm^2
- D) 1620 cm^2

Clave

La respuesta correcta es la opción C.

Conocimientos previos requeridos

- Cuadriláteros: propiedades.
- Área de un cuadrado.
- Expresiones algebraicas.

Estrategia de resolución

Para establecer una estrategia de solución, se debe analizar con detalle los datos y extraer toda la información posible de ellos. En este caso, la información viene dada por medio de imágenes formadas por pequeños cuadrados y que están identificadas como posición 1, posición 2, posición 3 y posición 4.

Para determinar la cantidad de cuadrados que conforman cada forma y averiguar el área total de la misma, primero se debe realizar el cálculo con las que vienen dadas en el enunciado (de la posición uno a la cuatro) y, posteriormente, determinar un patrón de formación de la secuencia para obtener la cantidad de cuadrados que conformarían la forma en la posición 15. Se observa que la cantidad de cuadrados en las formas se ajusta al patrón 3, 6, 10, 15, ...

Inicialmente, para facilitar el análisis, se asocia cada imagen con el número de posición, por ejemplo $n = 1$ corresponde a la primera posición, $n = 2$ a la segunda y así respectivamente para identificarlas. Además, se determina que cada cuadrado pequeño que conforma cada figura tiene un área de 9 cm^2 , debido a que su lado mide 3 cm.

Hay diversas maneras de determinar el patrón general que permite expresar la formación de los elementos en la secuencia. Algunas de ellas son las siguientes:

1. *De forma recursiva*: esto se logra identificando como primer término de la secuencia al acomodo que se aprecia en la posición 1 (que está conformado por tres cuadrados pequeños) y, tomando como punto de partida ese primer término, se determina cada término en la secuencia usando como referencia el anterior. Se observa que la cantidad de cuadrados pequeños de cada forma respecto a la anterior aumenta así: de la posición 1 a la 2 se incrementa en tres cuadrados, de la posición 2 a la 3 en cuatro cuadrados, de la posición 3 a la 4 en cinco cuadrados y así sucesivamente; es decir, si la cantidad de cuadrados de la forma anterior se representa con a_{n-1} , entonces la cantidad de cuadrados de la forma siguiente a_n se obtendría mediante $a_n = a_{n-1} + n + 1$. Por lo tanto, para $n = 15$ se cumpliría que:

$$\begin{aligned} a_{15} &= a_{14} + 15 + 1 \\ &= a_{14} + 16 \\ &= a_{13} + 14 + 1 + 16 \\ &= a_{13} + 15 + 16 \\ &= a_{12} + 13 + 1 + 15 + 16 \\ &= a_{12} + 14 + 15 + 16 \\ &\vdots \\ &= a_1 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 13 + 14 + 15 + 16 \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 13 + 14 + 15 + 16 \\ &= 136 \end{aligned}$$

2. *De forma algebraica:* se determina la fórmula general que describe a todos los términos de la secuencia. Para ello se analizan los datos, se representa la posición del elemento de la secuencia como n y se analizan las relaciones entre el número de cuadrados pequeños que constituyen cada forma y el valor correspondiente de n . En ese caso, se observa que la forma 2 de la secuencia está constituida por 6 cuadrillos y que seis es la mitad de 3×4 ; luego, la forma 3 de la secuencia está constituida por 10 cuadrillos y que diez es la mitad de 4×5 y el mismo comportamiento se da para la forma 4. Por lo tanto, se genera una fórmula que permite expresar el patrón de construcción de la secuencia, que se ajusta a las cuatro formas dadas e, incluso, puede comprobarse con la forma que seguiría en la posición 5 de la secuencia y, de esta manera, tener mayor seguridad con respecto al patrón encontrado. Se comprueba que la fórmula que determina la cantidad de cuadrillos que conforman la figura en la posición n es $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
3. *De forma geométrica:* se busca completar un rectángulo a partir de cada una de las figuras dadas. Se trata de reordenar los cuadrillos de cada figura de manera que se evidencie que la misma corresponde a la mitad de un rectángulo. Para completar el rectángulo se reacomodan los cuadrados de la figura original y se agrega la misma cantidad de cuadrados de manera que se obtenga un rectángulo cuya base corresponde a $n+1$ y cuya altura es $n+2$. Por ejemplo, en la Figura 4 se aprecia el reacomodo para la forma en la posición 1. En general, se tiene que, al tomar como unidad de área cada cuadrado,

el área del rectángulo completo es $(n + 1)(n + 2)$ unidades cuadradas y, por ende, el área de la figura original corresponde a la mitad del área del rectángulo y se representa mediante $\frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$ unidades cuadradas.

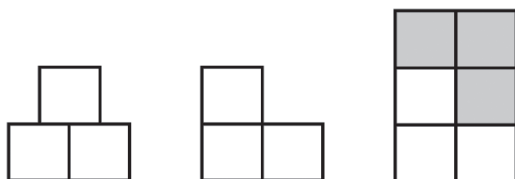


Figura 4. Ilustración auxiliar para el ítem 13

Una vez realizada la *generalización*, mediante cualquiera de las alternativas anteriores, se determina la cantidad de cuadrados (unidades cuadradas) que tendría la figura 15 y que correspondería a

$$\frac{(15 + 1)(15 + 2)}{2} = \frac{(16)(17)}{2} = 136$$

Esa sería la cantidad de cuadrados en la figura 15. Posteriormente, se multiplica esta cantidad de cuadrados por 9 cm^2 , que corresponde al área de cada uno; lo cual equivale a

$$136 \cdot 9 = 1224$$

Se obtiene así que el área de la figura en la posición 15 es de 1224 cm^2 .

14. La longitud de cada uno de dos lados opuestos de un cuadrado se aumenta en x unidades y la longitud de cada uno de los otros dos lados opuestos se disminuye en x unidades, con lo cual se obtiene un rectángulo.

De acuerdo con la información anterior, ¿cuál de las siguientes opciones se cumple **con certeza**?

- A) El área del cuadrado es mayor que el área del rectángulo.
- B) El área del cuadrado es menor que el área del rectángulo.
- C) El perímetro del rectángulo es mayor que el perímetro del cuadrado.
- D) El perímetro del rectángulo es menor que el perímetro del cuadrado.

Clave

La respuesta correcta es la opción A.

Conocimientos previos requeridos

- Geometría plana: cuadriláteros.
- Operaciones fundamentales con expresiones algebraicas.

Estrategia de resolución

Este ítem demanda analizar la veracidad de cuatro afirmaciones sobre medidas asociadas a un cuadrado y a un rectángulo. En cada afirmación, se deben calcular dos valores y , luego, se deben comparar entre sí. Antes de iniciar el análisis de las opciones, se representa la información gráficamente (Figura 5). Se va a suponer que la medida del lado del cuadrado es l .

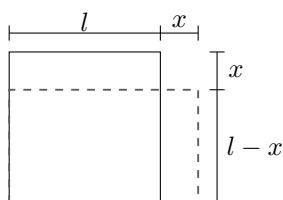


Figura 5. Ilustración auxiliar para el ítem 14

En la opción A, se deben comparar las áreas. El área del cuadrado sería l^2 y la del rectángulo corresponde a $(l - x)(l + x) = l^2 - x^2$. Esto implica que el área del cuadrado es mayor que el área del rectángulo, ya que el área de este último es igual al área del cuadrado (l^2), disminuida en x^2 unidades cuadradas. Por tanto, esta opción es verdadera. Este análisis implica inmediatamente que la opción B es falsa.

Con respecto a las opciones C y D relativas a los perímetros de ambas figuras, se tiene que el perímetro del cuadrado es $4l$ y el del rectángulo $2(l + x) + 2(l - x) = 4l$, por consiguiente, ambos perímetros son iguales. Esto implica que las opciones C y D son falsas.

15. En la figura adjunta se muestra un cuadrado, cuyo lado mide x cm. Los puntos M y P son los puntos medios de los lados respectivos. La región sombreada está delimitada por un triángulo determinado por los puntos M , P y un vértice del cuadrado, ubicado en la posición mostrada en la figura.

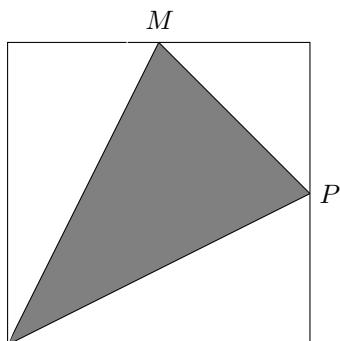


Figura 6. Ilustración con datos para el ítem 15

¿Cuál es el área de la región sombreada?

- A) $\frac{1}{4}x^2 \text{ cm}^2$
- B) $\frac{3}{8}x^2 \text{ cm}^2$
- C) $\frac{5}{8}x^2 \text{ cm}^2$
- D) $\frac{1}{2}x^2 \text{ cm}^2$

Clave

La respuesta correcta es la opción B.

Conocimientos previos requeridos

- Geometría plana: cuadriláteros y triángulos.
- Operaciones fundamentales con expresiones algebraicas.

Estrategia de resolución

Este ítem demanda encontrar una forma de calcular el área del triángulo indicado, ya que no se posee ninguna medida de este. Una forma accesible de calcular dicha área es determinar $A_{\text{cuadrado}} - A_{\text{región no sombreada}}$.

El área del cuadrado es x^2 y el área de la región no sombreada es la suma de tres áreas de triángulos rectángulos, los cuales se señalan en la Figura 7 como T_1 , T_2 y T_3 .

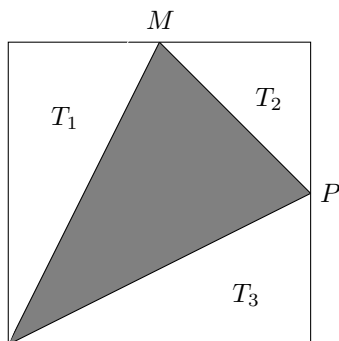


Figura 7. Ilustración auxiliar para el ítem 15

En el caso de T_1 , los catetos miden x y $\frac{x}{2}$ (M es el punto medio del lado de un cuadrado). En T_2 , ambos catetos miden $\frac{x}{2}$. Para T_3 los catetos miden x y $\frac{x}{2}$.

De esta manera, como el área de un triángulo rectángulo es el producto de los catetos dividido por dos, las áreas de los triángulos son

$$A_{T_1} = \frac{x \cdot \frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{4}$$

$$A_{T_2} = \frac{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{8}$$

$$A_{T_3} = \frac{x \cdot \frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{4}$$

Entonces, el área de la región no sombreada corresponde a la suma

$$\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{4} = \frac{5x^2}{8}$$

Luego, con base en la fórmula establecida inicialmente, el área del triángulo sombreado corresponde a

$$x^2 - \frac{5x^2}{8} = \frac{3x^2}{8}$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción B.

16. En la figura adjunta todos los pares de segmentos que se intersecan son perpendiculares.

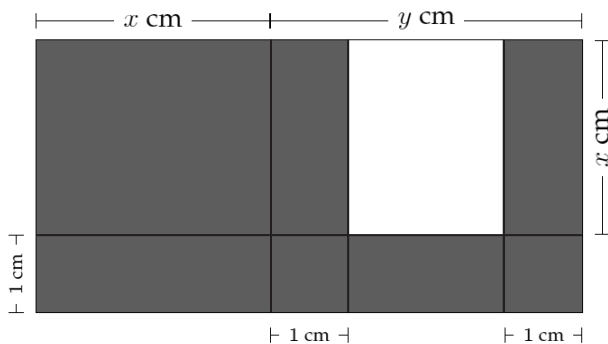


Figura 8. Ilustración con datos para el ítem 16

De acuerdo con la información anterior, ¿cuál es el área de la región sombreada?

- A) $(x^2 + 3x + y) \text{ cm}^2$
B) $(x^2 + 4x + 2) \text{ cm}^2$
C) $(x^2 + x + 1 + y) \text{ cm}^2$
D) $(x^2 + x + xy + y) \text{ cm}^2$

Clave

La respuesta correcta es la opción A.

Conocimientos previos requeridos

- Geometría plana: cuadriláteros.
- Operaciones fundamentales con expresiones algebraicas.

Estrategia de resolución

La solución de este problema demanda dos tareas fundamentales de razonamiento. La primera es determinar cómo se encuentra el área solicitada, la cual se puede calcular como el área del rectángulo que abarca toda la figura (A_1), menos la del rectángulo sin sombrear (A_2). La segunda tarea es determinar las medidas de los segmentos de cada una de las figuras involucradas en el cálculo del área. En el rectángulo que abarca toda la figura, las medidas de los lados son $x + y$ y $x + 1$; mientras que en el rectángulo sin sombrear son $y - 2$ y x .

Después de esto, se procede a calcular el área solicitada, la cual es

$$\begin{aligned}A_1 - A_2 &= (x + y)(x + 1) - (y - 2)x \\ &= x^2 + x + xy + y - xy + 2x \\ &= x^2 + 3x + y\end{aligned}$$

Por lo tanto, la opción con la respuesta correcta es A.

17. Un rectángulo y un cuadrado poseen el mismo perímetro. Los lados del rectángulo miden P cm y Q cm. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado?

A) $(P + Q)$ cm

B) $(2P + 2Q)$ cm

C) $\left(\frac{P + Q}{4}\right)$ cm

D) $\left(\frac{P + Q}{2}\right)$ cm

Clave

La respuesta correcta es la opción D.

Conocimientos previos requeridos

- Geometría plana: cuadriláteros.
- Operaciones fundamentales con expresiones algebraicas.

Estrategia de resolución

Este ítem demanda crear una estrategia que permita calcular la medida de un lado (L) de un cuadrado del que se tiene un único elemento de información: su perímetro es igual al perímetro de otra figura. A partir de esto, se plantea la ecuación $4L = 2(P + Q)$, donde $4L$ corresponde al perímetro del cuadrado con lado desconocido y $2(P + Q)$ representa el perímetro del rectángulo.

Finalmente, se procede a calcular el valor de L despejando la ecuación para dicha incógnita. Por lo tanto,

$$L = \frac{2(P + Q)}{4} \text{ cm} = \frac{(P + Q)}{2} \text{ cm}$$

18. Considere el segmento de recta \overline{ME} y tres puntos P, Q, R , tales que, $M - P - Q - R - E$. Además, $MR = PE + 2$ y $RE = 7$. ¿Cuál es la longitud de \overline{MP} ?

- A) 2
- B) 7
- C) 8
- D) 9

Clave

La respuesta correcta es la opción D.

Conocimientos previos requeridos

- Geometría plana: elementos básicos de geometría.
- Operaciones fundamentales con expresiones algebraicas.

Estrategia de resolución

Antes de proceder a resolver el ejercicio, se representa la información en la Figura 9. La medida buscada se va a denominar x y el valor PE se va a denominar y .

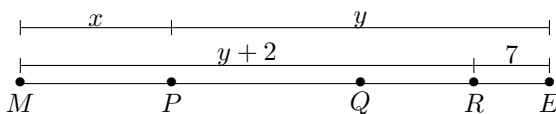


Figura 9. Ilustración auxiliar para el ítem 18

El ejercicio demanda que se construya un procedimiento que permita determinar el valor de x . Al observar la ubicación de las medidas brindadas, se puede concluir que las expresiones $x + y$ y $(y + 2) + 7$ representan la medida de todo el segmento ME y, por tanto, se cumple la siguiente igualdad $x + y = (y + 2) + 7$.

La relación anterior permite despejar el valor de x en términos de y . No obstante, el valor de y se cancela, con lo cual se obtiene que el valor de x (que representa la longitud de \overline{MP}) es igual a 9.

Por lo tanto, la respuesta correcta corresponde a la opción D.

19. Sea l la arista de un cubo y V el volumen de ese cubo. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es, **con certeza**, verdadera?
- A) Si l es racional, entonces V es irracional.
 - B) Si l es irracional, entonces V es irracional.
 - C) Si l es par, entonces V es impar.
 - D) Si l es par, entonces V es par.

Clave

La respuesta correcta es la opción D.

Conocimientos previos requeridos

- Cuerpos sólidos: prismas rectos.
- Números reales.

Estrategia de resolución

En este ítem se requiere analizar la veracidad de cada una de las opciones presentadas. Para el análisis se debe tener presente que $V = l^3$.

En el caso de la opción A, se puede concluir que es falsa para todos los valores racionales de l , ya que si l es racional, su potencia cúbica también es racional (es decir, el volumen). Por ejemplo, para el valor racional $l = 2$, se tiene que el volumen es un número racional ($V = 8$).

Para la opción B, se tiene que esta no se cumple para todos los casos posibles, por lo cual *no es con certeza* verdadera. Por ejemplo, para el caso $l = \sqrt[3]{2}$, que es irracional, se obtiene un volumen racional ($V = 2$).

En el caso de las opciones C y D, se tiene que si l es par, entonces, $l = 2k$, con k un número natural. A partir de esto, se puede concluir que

$$V = l^3 = (2k)^3 = 8k^3.$$

Por tanto, el volumen sería un múltiplo de 2, es decir, V sería un número par. Esto implica que la opción C es falsa y la D es verdadera.

20. Considere $P(2, 3)$, $Q(2, 3k)$ y $R(2k, 3)$, puntos en el plano cartesiano, con $k > 1$. Con respecto a las distancias entre ellos, ¿cuál de las siguientes afirmaciones se cumple **con certeza**?

- A) $PR = PQ$
- B) $PR > PQ$
- C) $PQ > PR$
- D) $PR = 2PQ$

Clave

La respuesta correcta es la opción C.

Conocimientos previos requeridos

- Geometría analítica: distancia entre puntos.
- Operaciones fundamentales con expresiones algebraicas: operaciones con polinomios.

Estrategia de resolución

Inicialmente, se debe notar que este ítem demanda una comparación entre distancias. La estrategia más directa para resolver este ítem es calcular las distancias involucradas: PR y PQ y, posteriormente, analizar las comparaciones indicadas.

Nótese que \overline{PR} es un segmento horizontal, pues tanto P como R tienen la misma coordenada y (en ambos casos es igual a 3). La distancia PR corresponde al valor absoluto de la resta de las coordenadas x y, por ello, $PR = |2k - 2|$.

De forma similar, \overline{PQ} es un segmento vertical, pues ambos puntos comparten la misma coordenada x (para ambos es igual a 2). La distancia PQ , entonces, es igual al valor absoluto de la resta de las coordenadas y , es decir, $PQ = |3k - 3|$.

Luego, como $k > 1$, los valores $2k - 2$ y $3k - 3$ son positivos. De esta forma, se tendría que $PR = 2k - 2$ y $PQ = 3k - 3$.

A partir de lo anterior, se puede concluir que:

$$\begin{aligned}PQ &= 3k - 3 = 2k + k - 2 - 1 \\ &= 2k - 2 + k - 1 = PR + (k - 1)\end{aligned}$$

Al establecerse que $PQ = PR + (k - 1)$ y como además se sabe que $k - 1 > 0$ (pues $k > 1$), se puede garantizar que $PQ > PR$. Esto descarta las opciones A, B y D. Así, la solución de este ejercicio corresponde a la opción C.

Álgebra

21. Para vaciar un contenedor completamente lleno de agua se utiliza un recipiente con z litros de capacidad. Si en todas las extracciones se llena el recipiente completamente, el contenedor quedaría vacío después de x extracciones. Si se hubiera seguido el mismo procedimiento para vaciar el contenedor lleno, pero utilizando un recipiente con tres litros más de capacidad, ¿cuál es la expresión que representa la cantidad de extracciones necesarias para vaciar completamente el contenedor?

A) $xz - 3x$

B) $x - \frac{3x}{z}$

C) $x - 3$

D) $\frac{zx}{z + 3}$

Clave

La respuesta correcta es la opción D.

Conocimientos previos requeridos

- Expresiones algebraicas.
- Regla de tres: proporcionalidad inversa.
- Ecuaciones de primer grado.

Estrategia de resolución

Estrategia 1

Inicialmente, la cantidad de agua total del contenedor es desconocida. Sin embargo, en el enunciado se indica que el contenedor está completamente lleno y que en cada extracción se llena completamente el recipiente a su capacidad máxima (z litros), por lo que, si se requirieron x extracciones para que el contenedor quedara completamente vacío, se infiere que la cantidad total de agua en el contenedor se puede representar mediante la expresión $x \cdot z$.

Posteriormente, se da un cambio hipotético sobre una de las condiciones iniciales de la situación descrita en el enunciado. Dicho cambio consiste en que se usa un nuevo recipiente con una capacidad de $(z + 3)$ litros para extraer el agua. Como se indica que, salvo ese cambio, se sigue el mismo procedimiento para vaciar el contenedor lleno, se tendría que la capacidad máxima del contenedor no cambia, pero al usar un recipiente diferente, la cantidad de extracciones necesarias sí cambiará. Si se representa como y la nueva cantidad de extracciones iguales necesarias para vaciar el contenedor, la cantidad total de agua en el mismo es equivalente a la cantidad de extracciones necesarias multiplicada por la capacidad del nuevo recipiente, es decir, $y \cdot (z + 3)$.

Al tener dos expresiones que representan la capacidad total del contenedor (que permanece igual en ambas situaciones), se puede *representar la relación entre los datos* mediante la siguiente igualdad:

$$z \cdot x = y \cdot (z + 3)$$

Al despejar y en esa ecuación, se obtiene el valor buscado:

$$\frac{z \cdot x}{z + 3} = y$$

Por lo tanto, la cantidad de extracciones necesarias para vaciar el contenedor con el nuevo recipiente es $\frac{zx}{z + 3}$.

Estrategia 2

Otra forma de abordar la situación consiste en identificar, a partir de la lectura de los datos, que corresponde a una situación de proporcionalidad entre las cantidades involucradas. Así, si y representa la nueva cantidad de extracciones necesarias, se genera una relación de proporcionalidad inversa, dado que al aumentar la capacidad del recipiente se reduce proporcionalmente la nueva cantidad de extracciones. De esta manera, si con un recipiente de capacidad z se requieren x extracciones y con un recipiente de capacidad $(z+3)$ se requieren y extracciones, la igualdad que relaciona estos cuatro datos, tomando en cuenta la naturaleza inversa de la proporción, es

$$\frac{y}{x} = \frac{z}{z + 3}$$

Al despejar el valor solicitado en el enunciado se tiene que:

$$y = \frac{z \cdot x}{z + 3}$$

De lo anterior, se concluye que para vaciar el contenedor con el nuevo recipiente de $z + 3$ litros se requieren $\frac{zx}{z + 3}$ extracciones. La respuesta correcta es la opción D.

22. En un rectángulo, el largo es el doble del ancho. ¿Cuál es la razón entre el ancho del rectángulo y su perímetro?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{6}$

Clave

La respuesta correcta es la opción D.

Conocimientos previos requeridos

- Cuadriláteros: propiedades, perímetro.
- Expresiones algebraicas.

Estrategia de resolución

Estrategia 1

En este ítem se solicita realizar una *comparación o relación entre dos datos*, particularmente la razón entre el ancho y el perímetro de un determinado rectángulo, del cual se mencionan previamente algunas características.

Para ello, primero debe representarse la información proporcionada de forma que las características brindadas puedan manipularse de una manera sencilla. En este caso, conviene nombrar con una variable al ancho del rectángulo, puesto que es una de las cantidades que se deben comparar al final, de la siguiente manera:

$$\text{Ancho} = x$$

Como se indica en el enunciado que el largo es el doble del ancho, se representa así:

$$\text{Largo} = 2x$$

Al utilizar estas medidas, se calcula el perímetro:

$$P = 2x + 2x + x + x = 6x$$

Una vez que se tienen representados todos los datos involucrados en el problema, finalmente *se relacionan* los valores anteriores para establecer la razón solicitada entre el ancho y el perímetro del rectángulo:

$$\frac{x}{6x} \text{ y simplificando se obtiene la razón } \frac{1}{6}$$

Por consiguiente, la razón entre el ancho y el perímetro es de un sexto.

Estrategia 2

Otra forma de abordar la situación planteada consiste en el uso de casos particulares del rectángulo, es decir, utilizando valores que cumplan las condiciones dadas, lo que implica que deben ser medidas de un rectángulo en el cual el largo sea el doble del ancho. Esto es válido debido a que el ítem solicita una ley que se cumpla en todos los casos, por tanto, si se encuentra la razón solicitada para un caso, este valor aplicará para el resto. Por ejemplo, supongamos que las medidas del rectángulo son las siguientes:

$$\text{Ancho} = 2$$

$$\text{Largo} = 4$$

Entonces, el perímetro es igual a 12. Así, la razón solicitada entre el ancho y el perímetro es

$$\frac{2}{12} \text{ y simplificando se obtiene la razón } \frac{1}{6}$$

En este caso, se está efectuando un proceso de *ejemplificación*, pues se está utilizando un caso particular de los rectángulos cuyo largo mide el doble del ancho con el objetivo de establecer cuál es la razón solicitada.

23. Sean m , x , y números reales para los cuales se cumple que $y = mx - m^2 - x$. Si $x = m + 1$, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el valor de y ?

- A) $y = 1$
- B) $y = m$
- C) $y = -1$
- D) $y = 2m + 1$

Clave

La respuesta correcta es la opción C.

Conocimientos previos requeridos

- Ecuaciones de primer y segundo grado.
- Operaciones básicas con expresiones algebraicas.

Estrategia de resolución

En los datos se proporcionan dos expresiones algebraicas que describen dos relaciones entre un conjunto de cantidades. En la primera, se establece la relación entre y, m, x , mientras que en la segunda se establece la relación entre x y m . Como en la pregunta se solicita determinar una expresión que represente el valor de y , una estrategia de solución sería relacionar las expresiones brindadas para establecer una igualdad que permita hallar el valor de y .

Para ello, a partir de las expresiones

$$y = mx - m^2 - x \quad \text{y} \quad x = m + 1,$$

se puede *establecer una relación*, para generar una conclusión sobre el valor de y .

A partir de la primera expresión, y sustituyendo en esta x por $m + 1$ (ya que es la relación dada en la segunda expresión), se puede efectuar el siguiente despeje:

$$\begin{aligned}y &= mx - m^2 - x \\y &= m(m + 1) - m^2 - (m + 1) \\y &= m^2 + m - m^2 - m - 1 \\y &= m^2 - m^2 + m - m - 1 \\y &= -1\end{aligned}$$

Se obtiene como conclusión que el valor de y es igual a -1 , lo cual corresponde a la opción C.

24. Considere la igualdad $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, donde n es un número entero positivo. Si se tiene que $k(x+1) + k(x+2) + k(x+3) + \dots + k(x+20) = 310k$, donde k es un número real distinto de cero, ¿cuál es el valor de x ?
- A) 5
- B) $\frac{5}{k}$
- C) $\frac{1}{5}$
- D) $5k$

Clave

La respuesta correcta es la opción A.

Conocimientos previos requeridos

- Simplificación de expresiones algebraicas.
- Factorización de expresiones algebraicas.
- Ecuaciones de primer grado.

Estrategia de resolución

En este ítem, se presenta una generalización para la suma de los primeros n números naturales. Posteriormente, se proporciona una ecuación, en la cual x corresponde a la incógnita de la misma, mientras que k corresponde a una constante real distinta de cero. Se requiere averiguar el valor de x , es decir, resolver la ecuación.

Para iniciar se simplifica la segunda expresión, mediante la técnica de factor común, las propiedades de las igualdades y la reducción de términos semejantes. Luego, cuando se necesita efectuar la suma de los primeros 20 números naturales, se aplica la primera igualdad dada en el enunciado (tomando $n = 20$), lo cual facilita la simplificación y despeje de x , tal y como se muestra a continuación:

$$k(x + 1) + k(x + 2) + k(x + 3) + \dots + k(x + 20) = 310k$$

$$k[(x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + \dots + (x + 20)] = 310k$$

$$k[x + 1 + x + 2 + x + 3 + \dots + x + 20] = 310k$$

$$x + 1 + x + 2 + x + 3 + \dots + x + 20 = 310$$

$$20x + (1 + 2 + 3 + \dots + 20) = 310$$

$$20x + \frac{20(20 + 1)}{2} = 310$$

$$20x + 210 = 310$$

$$20x = 100$$

$$x = 5$$

Con lo anterior se demuestra que la opción A es correcta.

25. Sean x, w, z números reales. Si $x + w = z$, y w está entre $(z - 2)$ y $(z + 1)$, ¿entre cuáles valores está x ?

- A) -2 y -1 .
- B) -2 y 1 .
- C) -1 y 2 .
- D) 1 y 2 .

Clave

La respuesta correcta es la opción C.

Conocimientos previos requeridos

- Inecuaciones de primer grado.
- Expresiones algebraicas.

Estrategia de resolución

En los datos del ítem se dan dos relaciones entre los valores implicados en el ejercicio. La primera relación corresponde a una ecuación lineal que involucra las tres cantidades (incógnitas). La segunda relación proporcionada corresponde al intervalo en el que se encuentra el valor de w . Los extremos de dicho intervalo están expresados en términos de z .

Para determinar entre qué valores se encuentra el valor de x , se deben *establecer relaciones* entre los datos brindados para identificar los extremos del intervalo y representarlos en su forma más simplificada. Una posible estrategia de solución es considerar el intervalo al que pertenece w . Puesto que w está entre $(z - 2)$ y $(z + 1)$, entonces:

$$z - 2 < w < z + 1$$

A partir de la igualdad $x + w = z$, brindada en el enunciado, se despeja $w = z - x$ y se puede sustituir w por $z - x$ en los extremos de la desigualdad anterior, para determinar, mediante propiedades de las desigualdades y otras manipulaciones algebraicas, el intervalo al que pertenece x , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} z - 2 &< w < z + 1 \\ \Leftrightarrow z - 2 &< z - x < z + 1 \\ \Leftrightarrow -z + z - 2 &< -z + z - x < -z + z + 1 \\ \Leftrightarrow -2 &< -x < 1 \\ \Leftrightarrow 2 &> x > -1 \end{aligned}$$

Esto es equivalente a $-1 < x < 2$.

De esta forma, a partir de la *relación establecida* entre los datos, se concluye que x está entre -1 y 2 , lo que corresponde a la opción C.

26. Sea x un número real, tal que $(x - 7)^{20} < \frac{1}{200}$.

Analice las siguientes proposiciones:

- I. El valor de x puede ser 7.
- II. El valor de x puede ser negativo.

De las proposiciones anteriores, ¿cuál(es) es(son) verdadera(s)?

- A) Solo la I.
- B) Solo la II.
- C) Ambas.
- D) Ninguna.

Clave

La respuesta correcta es la opción A.

Conocimientos previos requeridos

- Expresiones algebraicas.
- Números reales: propiedades y operaciones.
- Valor numérico de una expresión algebraica.

Estrategia de resolución

En el ítem, se requiere verificar el valor de verdad de dos afirmaciones, utilizando para ello la desigualdad dada inicialmente. Para la primera proposición basta sustituir el valor indicado ($x = 7$) en la desigualdad que satisface x y evaluar si esta se cumple. A continuación, se realiza dicho procedimiento:

$$\begin{aligned}(x - 7)^{20} &< \frac{1}{200} \\ (7 - 7)^{20} &< \frac{1}{200} \\ (0)^{20} &< \frac{1}{200} \\ 0 &< \frac{1}{200}\end{aligned}$$

Como lo anterior es verdadero, se comprueba que el valor de x puede ser 7, con lo que obtenemos que la proposición I es verdadera.

Para la segunda proposición, hay que notar que si x es negativo, entonces, $(x - 7)^{20} > 7^{20}$. Lo anterior se justifica debido a que un negativo x menos 7 es un valor, también negativo, menor que -7 ; es decir, $x - 7 < -7$ (por ejemplo, si $x = -3$ se cumple que $x - 7 = -10 < -7$). Luego, al calcular una potencia con exponente par de dos números negativos distintos, la potencia cuya base menor es una cantidad mayor que la potencia cuya base es mayor. De esta forma, se tiene que $(x - 7)^{20} > (-7)^{20} = 7^{20}$ (por ejemplo, $-5 < -3$ y $(-5)^2 = 25 > (-3)^2 = 9$).

A partir lo anterior, se concluye que para cualquier número negativo x se cumple lo siguiente:

$$(x - 7)^{20} > (-7)^{20} = 7^{20} > \frac{1}{200}$$

De esta manera, la proposición $(x - 7)^{20} < \frac{1}{200}$ es falsa y solo la proposición I es verdadera, lo que corresponde a la opción A.

27. Para $x, y, z \in \{0, 1, 2\}$ se define la expresión $(xyz)_3$ como $x \cdot 3^2 + y \cdot 3 + z$. Si $(k2m)_3$ equivale al número 15, ¿cuál es el valor de $k + m$?

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3

Clave

La respuesta correcta es la opción B.

Conocimientos previos requeridos

- Expresiones algebraicas.
- Valor de una expresión algebraica.
- Ecuaciones lineales.

Estrategia de resolución

En los datos del ítem, se brinda una expresión algebraica que denota una definición particular para un conjunto de tres números que solo pueden ser 0, 1 y 2. A partir de esa definición se debe calcular el valor de $k + m$ sabiendo, además, que la expresión algebraica desarrollada para los valores $k, 2, m$ en el orden dado es equivalente a 15.

Para calcular el valor de $k + m$ es necesario *establecer relaciones* entre las expresiones $k, 2, m$, de acuerdo con la información general brindada en el enunciado. De esta manera, según la definición inicial dada para $(xyz)_3$, se puede obtener una nueva expresión para $(k2m)_3$ la cual, además, es igual a 15. Si se plantea esta igualdad se tiene que

$$\begin{aligned}k \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + m &= 15 \\ \Rightarrow k \cdot 3^2 + 6 + m &= 15 \\ \Rightarrow k \cdot 3^2 + m &= 9 \\ \Rightarrow 9k + m &= 9\end{aligned}$$

A partir de la última igualdad, se debe determinar cuál de los posibles valores de $k + m$, dados en las opciones, satisface esta condición. Sin embargo, para identificar el valor de $k + m$, primero se requiere determinar los valores de k y m que satisfacen la igualdad obtenida. Una manera para hacer eso consiste en sustituir en la expresión $9k + m$ los posibles valores que pueden tomar k y m , para verificar cuáles de ellos cumplen que $9k + m = 9$.

En el Cuadro 3, se han asignado los valores 0, 1, 2 tanto a la incógnita m como a la incógnita k y en las demás casillas se consigna el valor correspondiente de $9k + m$.

Cuadro 3

Datos auxiliares para el ítem 27

$m \backslash k$	0	1	2
0	0	9	18
1	1	10	19
2	2	11	20

Valor de $9k + m$ para $m, k \in \{1, 2, 3\}$.

Por lo tanto, se evidencia que necesariamente k debe ser igual a 1 y m debe ser igual a 0, con lo cual, $k + m$ es igual a 1. En conclusión, la opción B es la respuesta correcta.

28. Sean x, y, z números reales positivos distintos, tales que $y^2 > z > x^2$.

Considere las siguientes proposiciones:

I. $z - y < 0$

II. $x - y < 0$

De las proposiciones anteriores, ¿cuál(es) es(son), **con certeza**, verdadera(s)?

- A) Solo la I.
B) Solo la II.
C) Ambas.
D) Ninguna.

Clave

La respuesta correcta es la opción B.

Conocimientos previos requeridos

- Números reales: relaciones de orden.
- Inecuaciones de primer grado.

Estrategia de resolución

Para dar respuesta a este ítem, se debe determinar los valores de verdad de las afirmaciones I y II. Para esto se analiza cada una de ellas utilizando la relación dada inicialmente entre las tres variables implicadas en el problema.

- Proposición I: $z - y < 0$

Observe que esta primera proposición es equivalente a $z < y$ o, lo que es lo mismo, $y > z$. Para analizar si lo anterior se cumple o no, inicialmente se extrae de la expresión $y^2 > z > x^2$ (proporcionada en el enunciado) la única desigualdad simple en la que se establece una relación entre las variables y y z : $y^2 > z$.

Es preciso determinar si a partir de esa relación es posible comprobar que $y > z$ se cumple *con certeza*. Sin embargo, $y^2 > z$ no garantiza que $y > z$, pues hay valores reales positivos distintos para los que no se cumple. Por ejemplo, si $y = 2$ y $z = 3$, nótese que se cumple que $y^2 > z$, ya que $2^2 = 4 > 3$, pero no se cumple $y > z$, pues, por el contrario, $y < z$ ($2 < 3$). Esto significa que la proposición I no se cumple para todos los valores reales positivos distintos de y y z . En otras palabras, no es posible afirmar que la primera proposición sea verdadera *con certeza*.

- Proposición II: $x - y < 0$

Por transitividad de las relaciones de orden, se puede garantizar que si $y^2 > z$ y simultáneamente $z > x^2$ (tal como se deduce de la desigualdad proporcionada en el enunciado), entonces, $y^2 > x^2$, o lo que es lo

mismo, $x^2 < y^2$, de la cual si es posible deducir que $x < y$ (pues ambas cantidades corresponden a números reales positivos). Por lo tanto, como sí es posible garantizar que $x < y$, entonces la proposición equivalente $x - y < 0$ sí se cumple *con certeza*.

Se concluye que solo se puede garantizar que la proposición II es verdadera *con certeza*.

29. Sean x, y, z números reales no nulos y sean

$$P = \frac{x^{-2}y}{z^{-3}}, \quad Q = \frac{x^2y^{-2}}{z}$$

Si $PQ > 0$, ¿cuál de las siguientes relaciones de orden es, **con certeza**, verdadera?

- A) $y < 0$
- B) $z < 0$
- C) $y > 0$
- D) $z > 0$

Clave

La respuesta correcta es la opción C.

Conocimientos previos requeridos

- Definición de potencia.
- Leyes de potencias.
- Números reales: relaciones de orden.
- Simplificación de expresiones algebraicas.
- Factorización de expresiones algebraicas.
- Operaciones con polinomios.

Estrategia de resolución

En este ítem, se brindan dos valores expresados en términos de tres variables relacionadas por medio de operaciones aritméticas. Además, se sabe que el producto de los dos valores dados es siempre positivo ($PQ > 0$). A partir de esos datos se debe determinar el valor de verdad de las relaciones de orden dadas en las opciones de respuesta. Para ello, es preciso relacionar las dos expresiones dadas y simplificar la expresión resultante para obtener algunas relaciones entre las variables implicadas que permitan conocer el valor de verdad de las opciones de respuesta.

$$PQ = \frac{x^{-2}y \cdot x^2y^{-2}}{z^{-3}z} = \frac{z^3yx^2}{x^2zy^2} = \frac{z^3y}{zy^2} = \frac{z^2}{y}$$

Por lo tanto, se cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

- $PQ = \frac{z^2}{y} > 0$.
- El numerador es positivo *con certeza* ($z^2 > 0$).

De lo anterior, se puede inferir que el denominador de la expresión es positivo, es decir, que $y > 0$. Se puede concluir, por un lado, que la opción C es verdadera y que la opción A es falsa. Por otro lado, el valor de z puede ser negativo o positivo, debido a que solo se ocupa que z^2 sea positivo, lo cual ocurre con cualquier valor no nulo de esta variable (esto permite descartar las opciones B y D). Por esto, la opción correcta es la C.

30. Sea x un número real y sea $z = x(x + 1)(x - 1)$. Si $x \in [0, 1[$, ¿cuál de las siguientes condiciones se cumple para z ?
- A) Es estrictamente positivo.
 - B) Es positivo en algunos casos y cero en otros.
 - C) Es estrictamente negativo.
 - D) Es negativo en algunos casos y cero en otros.

Clave

La respuesta correcta es la opción D.

Conocimientos previos requeridos

- Números reales: propiedades y operaciones.
- Inecuaciones lineales.

Estrategia de resolución

Este ítem requiere determinar el signo de la variable z a partir de la expresión algebraica inicial y del intervalo en el cual se encuentra la variable x . Este intervalo se puede determinar por medio del estudio de los valores que puede tomar dicha variable. Para ello, se deben estudiar los intervalos de pertenencia de los factores que componen a la variable.

De acuerdo con lo que se menciona en el enunciado, el factor x pertenece al intervalo $[0, 1[$ y, por lo tanto, el valor de x puede ser positivo o cero. A partir de lo anterior, se puede concluir que el factor $(x - 1)$ pertenece al intervalo $[-1, 0[$ y el factor $(x + 1)$ pertenece al intervalo $[1, 2[$, es decir, el primero siempre es negativo y el segundo siempre es positivo.

Luego, el producto $x(x + 1)(x - 1)$ tiene dos factores positivos (uno de ellos que se vuelve cero para un valor) y un factor que es negativo. Así, el producto de los tres factores es negativo en los casos que el factor x no es cero, mientras que ese producto es igual a cero cuando el factor x es igual a cero. Debido a lo anterior, se puede afirmar que z es negativo en algunos casos y, en otros, cero. De ahí que la respuesta correcta corresponda a la opción D.

Análisis de datos

31. En el siguiente gráfico, se muestra la distribución de la forma principal de traslado al trabajo reportada por 200 personas.

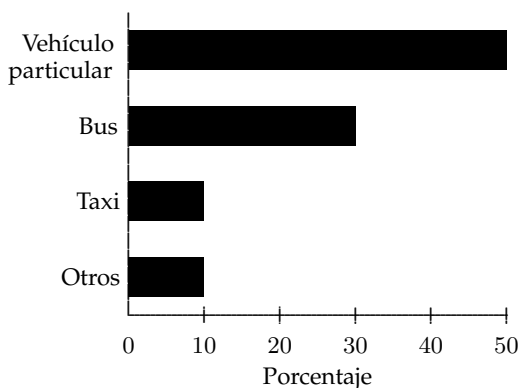


Figura 10. Gráfico con datos para el ítem 31.

De acuerdo con la información dada, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es, **con certeza**, verdadera?

- A) Solo 40 personas viajan en bus o taxi.
- B) Más de 100 personas viajan en un medio de transporte que **no** es un vehículo particular.
- C) La diferencia entre la cantidad de las personas que viajan en bus y la cantidad de personas que viajan en vehículo particular es 20.
- D) La diferencia entre la cantidad de personas que viajan en taxi y la cantidad de personas que viajan en vehículo particular es 80.

Clave

La respuesta correcta es la opción D.

Conocimientos previos requeridos

- Variables cuantitativas y cualitativas.
- Análisis de gráficos estadísticos: barras, circulares, lineales y de puntos.
- Frecuencias relativas y absolutas de datos.

Estrategia de resolución

La situación planteada requiere del análisis de los datos que son presentados en un gráfico de barras horizontales. Es importante observar que los valores indicados son *porcentajes* (frecuencias relativas) de un total de 200 personas (el cual también es un dato proporcionado en el enunciado) que reportan su medio de transporte al trabajo.

Para analizar la información, se debe considerar que las cantidades que aparecen en las alternativas de respuesta son cantidades absolutas (no porcentajes), por tanto, el primer paso que conviene efectuar es *establecer las relaciones* correspondientes para obtener las frecuencias absolutas, tal y como se muestra en el Cuadro 4:

Cuadro 4*Datos auxiliares para el ítem 31*

Medio de transporte	Porcentaje	Cantidad de personas
Vehículo particular	50 % de 200	100
Bus	30 % de 200	60
Taxi	10 % de 200	20
Otros	10 % de 200	20

Cantidad de personas por medio de transporte.

A partir de las frecuencias absolutas, se analizan las opciones y se evidencia cuál de ellas corresponde a una de las relaciones encontradas. Así:

- Opción A: lo enunciado no corresponde a una de las relaciones establecidas en el cuadro, ya que en bus viajan 60 personas y en taxi 20, así que la cantidad de personas que viajan en bus o taxi es de 80.
- Opción B: el enunciado no corresponde con las relaciones reflejadas en el cuadro, ya que son exactamente 100 personas las que no utilizan vehículo particular.
- Opción C: la diferencia entre los que viajan en bus y los que viajan en vehículo particular es de 40 personas (no 20, como dice el enunciado).
- Opción D: lo que se enuncia es coherente con las frecuencias que aparecen en el cuadro, ya que, en efecto, la diferencia entre los que usan vehículo particular con los que viajan en taxi es de 80 personas.

32. Un conjunto de 8 datos está compuesto por los valores 0, 1 y 2. Este conjunto tiene como promedio 0,5. De acuerdo con la información anterior, ¿cuál es, **con certeza**, la cantidad de datos que toman el valor 0?
- A) 3
 - B) 4
 - C) 5
 - D) 6

Clave

La respuesta correcta es la opción C.

Conocimientos previos requeridos

- Concepto de media.
- Ecuaciones de primer grado (si se representa algebraicamente las relaciones entre los datos mediante ecuaciones).

Estrategia de resolución

Para efectuar el análisis de la situación descrita, es preciso *establecer una relación* entre el promedio dado, $\bar{x} = 0,5$, con la fórmula del promedio de los ocho datos. Si la suma de los ocho datos se representa como S , se tiene que:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{S}{8} \\ 0,5 &= \frac{S}{8} \\ 8 \cdot 0,5 &= S \\ 4 &= S\end{aligned}$$

A partir del despeje anterior, se aprecia que la suma de los ocho datos debe ser 4. Por su parte, al decir que el conjunto de datos está conformado por 0, 1 y 2, se debe cumplir que cada uno de ellos debe aparecer al menos una vez en el conjunto de datos. Así que, hasta el momento, se sabe que los datos tienen la siguiente conformación (los signos de interrogación representan datos desconocidos):

$$0, 1, 2, ?, ?, ?, ?, ?$$

Ahora bien, como la suma de los datos debe ser $S = 4$ y los tres datos conocidos suman 3, entonces, necesariamente uno de los datos desconocidos debe ser 1 y los demás deben ser ceros:

$$0, 1, 2, 1, 0, 0, 0, 0$$

De esta manera, en el conjunto de datos, cinco de ellos deben tomar como valor 0.

33. En una encuesta para determinar la cantidad de días a la semana que los jóvenes realizan algún tipo de ejercicio físico, se reportó la siguiente información:

Cuadro 5

Datos proporcionados para el ítem 33

Cantidad de días	Jóvenes
0	2
1	11
2	10
3	4
4	2
5	1

Cantidad de jóvenes según la cantidad de días que practican deporte (datos recolectados inicialmente).

Posteriormente, se realizó una corrección a los datos iniciales, ya que 4 de los jóvenes que indicaron 2 días, en realidad realizaban ejercicio 4 días a la semana. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es, **con certeza**, verdadera?

- A) La moda de los datos corregidos es mayor que la moda de los datos iniciales.
- B) La moda de los datos corregidos es menor que la moda de los datos iniciales.
- C) El promedio de los datos corregidos es menor que el promedio de los datos iniciales.
- D) El promedio de los datos corregidos es mayor que el promedio de los datos iniciales.

Clave

La respuesta correcta es la opción D.

Conocimientos previos requeridos

- Concepto de moda.
- Concepto de media.
- Operaciones aritméticas básicas.

Estrategia de resolución

Para analizar la información dada es preciso observar que los datos que aparecen en el cuadro brindado son los reportados inicialmente, pero se indica que estos en un momento posterior se corrigieron. Esto porque, según el enunciado, cuatro de los jóvenes que indicaron que hacían ejercicio dos días a la semana, en realidad realizaban ejercicio cuatro días a la semana.

También, se desea comprobar la veracidad de lo que se indica en las opciones de respuesta, las cuales hacen comparaciones entre los datos brindados inicialmente y los datos corregidos. Ante esta situación, el camino más conveniente para trabajar consiste en replantear el Cuadro 5 e incorporar las frecuencias de acuerdo con los datos corregidos (Cuadro 6), para *establecer las relaciones* correspondientes entre la moda y la media del conjunto de datos iniciales, con la moda y la media del conjunto de los datos corregidos. El nuevo cuadro se vería así:

Cuadro 6*Datos auxiliares para el ítem 33*

Cantidad de días	Jóvenes (datos iniciales)	Jóvenes (datos corregidos)
0	2	2
1	11	11
2	10	6
3	4	4
4	2	6
5	1	1

Cantidad de jóvenes según la cantidad de días que practican deporte (datos iniciales y datos corregidos).

Ahora, se procede a calcular la moda y el promedio para cada uno de los dos escenarios:

Moda (datos iniciales): 1

Moda (datos corregidos): 1

Promedio (datos iniciales):

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 0 + 11 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{30} &= \frac{56}{30} \\ &= \frac{28}{15} \\ &= 1,8\bar{6} \end{aligned}$$

Promedio (datos corregidos):

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 0 + 11 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{30} &= \frac{64}{30} \\ &= \frac{32}{15} \\ &= 2,1\bar{3} \end{aligned}$$

Al contrastar estas medidas con lo que se indica en las opciones de respuesta, se evidencia lo siguiente:

- Opción A: la afirmación es incorrecta, pues la moda de los datos iniciales es 1 y la moda en los datos corregidos también es 1, por lo que la relación entre ellas es de igualdad.
- Opción B: la afirmación es incorrecta porque ambas modas son iguales (1).
- Opción C: la afirmación es incorrecta porque el promedio de los datos corregidos ($2, \overline{13}$) no es menor que el promedio de los datos iniciales ($1, \overline{86}$).
- Opción D: la afirmación sí es correcta, pues el promedio de los datos corregidos ($2, \overline{13}$) es, en efecto, mayor que el promedio de los datos iniciales ($1, \overline{86}$). Es importante resaltar que no es necesario representar las fracciones utilizando notación decimal, ya que tienen el mismo denominador (es decir, son homogéneas) y, por lo tanto, se pueden comparar directamente a partir de la relación que se establezca entre sus numeradores. Así, se puede concluir directamente que $\frac{32}{15} > \frac{28}{15}$.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la D.

34. En una fábrica se recopila mensualmente la información relacionada con los problemas detectados en las botellas de plástico que se producen. Durante el mes de marzo sucedió que ninguna de las botellas que se registraron como defectuosas mostró más de un problema en su fabricación. Los datos del cuadro adjunto muestran la frecuencia de los problemas detectados ese mes.

Cuadro 7

Datos proporcionados para el ítem 34

Problema	Frecuencia
Decoloración	9
Grosor	12
Agarradera	7
Plástico	20
Etiqueta	12

Frecuencia de problemas detectados en la fabricación de botellas.

Analice las siguientes proposiciones:

- I. La agarradera y el plástico representan el 45 % de los problemas detectados.
- II. La etiqueta y la decoloración representan el 30 % de los problemas detectados.

De las proposiciones planteadas, ¿cuál(es) es(son) verdadera(s)?

- A) Solo la I.
- B) Solo la II.
- C) Ambas.
- D) Ninguna.

Clave

La respuesta correcta es la opción A.

Conocimientos previos requeridos

- Frecuencias relativas y absolutas de datos.
- Comparación de cantidades por medio de una razón.
- Representación de razones como porcentajes.

Estrategia de resolución

Como parte de la información proporcionada se cuenta con la frecuencia absoluta de cada uno de los problemas detectados en las botellas producidas, aunque en el Cuadro 7 no se brinda la cantidad total de botellas que presentaron cada problema. Además, se presentan dos proposiciones en las que se refiere a algunos de esos problemas, pero estas hacen uso de porcentajes para representar algunos grupos de problemas detectados.

Debido a las características de la situación, para establecer la veracidad de las proposiciones dadas, el ítem demanda los siguientes procesos:

- Sumar las frecuencias para obtener el total (T) de problemas detectados: $T = 9 + 12 + 7 + 20 + 12 = 60$
- Agrupar los casos a los que hace referencia cada una de las proposiciones, mediante la suma de las frecuencias correspondientes.

- *Comparar* mediante una razón los datos agrupados con el total calculado.
- Representar la razón encontrada como un porcentaje. Esto se puede hacer amplificando la razón establecida en notación fraccionaria a una equivalente con denominador 100 o por una aplicación directa de la *regla de tres*.

Posteriormente, se *comparan* (mediante una razón) las cantidades correspondientes a cada una de las proposiciones y se amplifican (o se aplica la *regla de tres*) para obtener el porcentaje de los problemas agrupados. De esa forma, se obtendría lo siguiente:

- I. Agarradera + plástico: se compara por medio de una razón la suma de las frecuencias correspondientes (7+20) con respecto al total y se representa como porcentaje:

$$\frac{27}{60} = \frac{9}{20} = \frac{45}{100} = 45\%$$

- II. Etiqueta + decoloración: se compara por medio de una razón la suma de las frecuencias correspondientes (12 + 9) con respecto al total y se representa como porcentaje:

$$\frac{21}{60} = \frac{7}{20} = \frac{35}{100} = 35\%$$

A partir de los razonamientos anteriores, se verifica que la proposición I es verdadera y que la proposición II es falsa. Por lo tanto, la alternativa correcta es la opción A.

35. En una fábrica, se tienen 25 cajas que pesan en conjunto 75 kg. Si el peso de una única caja se reduce en $\frac{1}{2}$ kg, ¿cuál de las siguientes afirmaciones respecto al nuevo peso promedio de las cajas se cumple **con certeza**?
- A) Es igual a 3 kg.
 - B) Es igual a 3,5 kg.
 - C) Es mayor a 3 kg, pero menor a 3,5 kg.
 - D) Es mayor a 2,5 kg, pero menor a 3 kg.

Clave

La respuesta correcta es la opción D.

Conocimientos previos requeridos

- Números naturales: propiedades y operaciones.
- Promedio.

Estrategia de resolución

El ítem demanda comparar el peso promedio de las cajas antes y después de que se realice una modificación en una de ellas. Para ello, se pueden calcular ambos promedios y, posteriormente, compararlos, o bien, solo analizar la influencia del cambio en el nuevo peso promedio. Entonces, se tienen dos posibles estrategias para obtener la respuesta correcta.

Estrategia 1

Se determina el peso promedio original de las cajas; que sería el resultado de dividir 75 kg entre 25 cajas, lo cual da como resultado 3 kg (peso promedio original).

Después, se calcula el peso promedio bajo las nuevas circunstancias, que se obtiene dividiendo 74,5 kg entre 25 cajas, con lo que se obtiene que el nuevo peso promedio es 2,98 kg.

En resumen:

$$\text{Peso promedio original: } \frac{75}{25} = 3$$

$$\text{Nuevo peso promedio: } \frac{74,5}{25} = 2,98$$

Finalmente, se debe *comparar* el peso promedio original con el actual para determinar la alternativa correcta. Como se tiene que el nuevo peso promedio es mayor que 2,5 kg, pero menor que 3 kg, la respuesta correcta corresponde a la opción D.

Estrategia 2

Otra alternativa para analizar este ítem consiste en considerar que el peso promedio original de las cajas corresponde a 3 kg (resultado de 75 kg entre 25 cajas). Luego, se puede deducir, a partir de la situación descrita en el enunciado, que si el peso total de las cajas se disminuye y el número de cajas se mantiene igual, necesariamente el nuevo peso promedio de las cajas debe disminuir, es decir, debe ser menor que el peso promedio original.

Al inspeccionar las opciones, se puede observar que la única en la que se plantea una disminución del peso promedio original (3 kg) corresponde a la opción D.

36. Una caja de lápices contiene 20 lápices de grafito, de los cuales exactamente 8 no tienen borrador en uno de sus extremos. De esos 8 lápices, 6 son amarillos y 2 son negros.

De acuerdo con la información, ¿cuál afirmación es correcta?

- A) 3 de cada 5 lápices no tienen borrador.
B) 2 de cada 3 lápices tienen borrador.
C) 1 de cada 4 lápices no tiene borrador y es negro.
D) 3 de cada 10 lápices no tienen borrador y son amarillos.

Clave

La respuesta correcta es la opción D.

Conocimientos previos requeridos

- Frecuencias relativas y absolutas de datos.
- Comparación de cantidades por medio de una razón.

Estrategia de resolución

La situación enunciada proporciona los siguientes datos:

- Cantidad de lápices con borrador: 12.
- Cantidad de lápices sin borrador: 8 (6 amarillos y 2 negros).
- Cantidad de lápices en total: 20.

La estrategia para identificar la respuesta consiste en plantear las razones correspondientes a las *comparaciones* enunciadas en cada una de las opciones y simplificarlas al máximo para interpretar las relaciones entre los grupos de lápices, tal como se muestra a continuación:

- Opción A: razón de lápices sin borrador con respecto al total: $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$. Lo anterior significa que 2 de cada 5 lápices no tienen borrador.
- Opción B: razón de lápices con borrador con respecto al total: $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$. Lo anterior significa que 3 de cada 5 lápices sí tienen borrador.
- Opción C: razón de lápices negros sin borrador con respecto al total: $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$. Lo anterior significa que 1 de cada 10 lápices es negro y no tiene borrador.
- Opción D: razón de lápices amarillos sin borrador con respecto al total: $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$. Lo anterior significa que 3 de cada 10 lápices no tienen borrador y son amarillos.

Por lo tanto, solo la opción D es correcta.

37. Un conjunto de 9 datos está compuesto por los valores 1 y 2. Este conjunto tiene como moda al número 2.

De acuerdo con la información anterior, ¿cuál de las siguientes características corresponde, **con certeza**, a la cantidad de datos iguales a 1?

- A) Es par.
- B) Es impar.
- C) Es mayor que 4.
- D) Es menor que 5.

Clave

La respuesta correcta es la opción D.

Conocimientos previos requeridos

- Concepto de moda.
- Números naturales (propiedades y operaciones). Específicamente, se requiere conocer el concepto de número natural par o impar.

Estrategia de resolución

Para el análisis de la situación descrita, se requiere *establecer relaciones* entre los datos a los que hace referencia.

En primer lugar, hay que observar que si se trata de nueve datos cuyos valores únicamente pueden ser 1 o 2 y, además, se tiene que la moda es 2, significa que la cantidad de datos que asumen el valor de 2 es mayor que la cantidad de datos que asumen el valor de 1 (recuerde que la moda es el dato que se repite más veces).

Del razonamiento anterior, se infiere que la cantidad de veces que puede aparecer como dato el valor 1 es 1, 2, 3 o 4 veces; pues si se repitiera 5, 6, 7, 8 o 9 veces, la moda sería 1, lo cual representaría una contradicción con los datos del enunciado.

Por lo tanto, la cantidad de datos que pueden asumir como valor a 1 tiene que ser menor que 5, tal como se indica en la opción D.

Observe, además, que como 1 puede aparecer 1, 2, 3 o 4 veces, la cantidad de apariciones podría ser par o impar (con lo que se descartan como opciones de respuesta las opciones A y B). Por su parte, la opción C se descarta porque la moda sería 1, lo que contradice la suposición inicial del enunciado.

38. En una encuesta para determinar el refresco favorito entre P, R y T, se obtuvo que el 10 % de los encuestados prefirió el refresco P, el 25 % el R, el 40 % el T y el 25 % no respondió la encuesta.

Si se lograra recolectar la respuesta de los encuestados que no la respondieron, ¿cuál de las siguientes situaciones sucedería **con certeza**?

- A) La moda sería P.
- B) La moda sería R.
- C) La moda **no** sería P.
- D) La moda **no** sería R.

Clave

La respuesta correcta es la opción C.

Conocimientos previos requeridos

- Frecuencias relativas y absolutas de datos.
- Concepto de moda.

Estrategia de resolución

Una estrategia para llegar a la respuesta es considerar la situación hipotética de que se logre recolectar la respuesta del 25 % que no respondió la encuesta y analizar los *escenarios extremos*, suponiendo que *todo* ese 25 % de la población encuestada escogiera uno de los tres refrescos. Se utilizan escenarios extremos porque si en estos sucede que un refresco no llega a ser la moda, entonces, es imposible que lo sea en cualquier otro escenario. Los escenarios extremos son los siguientes:

- Escenario 1: el 25 % que no había contestado escoge el refresco P. En este caso, los porcentajes de preferencia por refresco serían $P \rightarrow 35\%$, $R \rightarrow 25\%$, $T \rightarrow 40\%$. En esa situación extrema la moda sería T .
- Escenario 2: el 25 % que no había contestado escoge el refresco R. En este caso, los porcentajes de preferencia por refresco serían $P \rightarrow 10\%$, $R \rightarrow 50\%$, $T \rightarrow 40\%$. En esa situación extrema la moda sería R .
- Escenario 3: el 25 % que no había contestado escoge el refresco T. En este caso, los porcentajes de preferencia por refresco serían $P \rightarrow 10\%$, $R \rightarrow 25\%$, $T \rightarrow 65\%$. En esa situación extrema la moda sería T .

Al analizar lo anterior, se observa que en ninguno de los escenarios extremos se daría que la moda sea P , lo cual descarta la opción A. Por su parte, las opciones B y D que hacen referencia a que la moda pueda o no ser R, no van a suceder *con certeza*, ya que, para ciertas situaciones la moda sí podría ser R (como se aprecia en el escenario 2) mientras que para

otras situaciones la moda no sería R (como sucede en los escenarios 1 y 3). Debido a lo anterior, la única situación que logra ser *validada* es la que afirma que la moda *no* sería P, así que la opción C corresponde a la respuesta correcta.

39. Los resultados de un experimento se codificaron con los valores 10, 20 y 30. Luego de repetir varias veces el experimento, se obtuvo que el 80 % de los resultados fue igual a 20.

De acuerdo con la información anterior, en los resultados finales, ¿cuál de las siguientes situaciones se obtuvo **con certeza**?

- A) El promedio fue igual a 20.
- B) La mediana fue igual a 20.
- C) El promedio fue diferente a 20.
- D) La mediana fue diferente a 20.

Clave

La respuesta correcta es la opción B.

Conocimientos previos requeridos

- Frecuencias relativas y absolutas de datos.
- Concepto de media.
- Concepto de mediana.

Estrategia de resolución

La situación planteada en el ítem exige *determinar la veracidad* de las afirmaciones y *validar* alguno de los escenarios planteados en ellas. Sin embargo, los datos proporcionados requieren algunas consideraciones iniciales.

Primero, hay que analizar el concepto de mediana. Si la cantidad de datos es impar, la mediana corresponde al valor que se encuentra en la posición central de una lista de datos ordenados. Si la cantidad de datos ordenados es par, la mediana es el promedio de los dos elementos centrales consecutivos. Puesto que los datos son únicamente 10, 20 y 30, pero el 80 % de los mismos corresponden a 20, *no* existe la posibilidad de que los elementos centrales sean 10 o 30. Entonces, al ordenarlos de menor a mayor solo habrá dos posibilidades:

- Si la cantidad de datos es impar, el valor central será 20 y, por lo tanto, la mediana será 20.
- Si la cantidad de datos es par, los valores centrales asumirán ambos el valor de 20 y, por lo tanto, al promediarlos, el valor de la mediana será 20.

En ambos casos, es posible observar que la opción D queda descartada, mientras que la opción B queda *validada*. De igual manera, con respecto al promedio de los datos, los escenarios descritos en las opciones A y C podrían darse, pero *no* con certeza. Por ejemplo, los datos a los que se hace referencia podrían ser los siguientes:

10, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 30

En este caso, se cumplirían las condiciones enunciadas por el problema (el 80 % de los datos corresponde a 20) y el promedio, en efecto, sería igual a 20.

A pesar de lo anterior, el siguiente conjunto de datos al que se hace referencia podría ser el siguiente:

10, 10, 10, 20, 20,
20, 20, 20, 20, 20,
20, 20, 20, 20, 20,
20, 20, 20, 20, 30

Ese conjunto de datos igualmente cumple las condiciones (el 80 % de los mismos corresponden a 20), pero su promedio sería 19. Esto evidencia que también podría darse el caso de que el promedio sea distinto de 20.

Por ello, la única situación que se dará *con certeza* es que la mediana sea igual a 20 y, entonces, la respuesta correcta corresponde a la opción B.

40. La probabilidad de un evento es $\frac{1}{m} + \frac{m}{5}$. ¿Cuáles son dos posibles valores para m ?
- A) 2 y 4.
 - B) 2 y 3.
 - C) 3 y 4.
 - D) 3 y 5.

Clave

La respuesta correcta es la opción B.

Conocimientos previos requeridos

- Definición de probabilidad.
- Números racionales (propiedades y operaciones). Específicamente, este ítem requiere el manejo de la suma de números racionales en notación fraccionaria, así como del manejo de relaciones de orden entre números racionales, para comparar fracciones con respecto a la unidad.

Estrategia de resolución

Una estrategia para analizar la información proporcionada consiste en verificar si se satisface una condición que toda probabilidad cumple: debe ser un valor entre 0 y 1. Debido a lo anterior, los valores de m deben garantizar que la probabilidad satisfaga esa condición. Por ello, una estrategia para resolver este ítem consiste en calcular la probabilidad del evento utilizando los posibles valores de m , que son proporcionados en las alternativas de respuesta:

- Si $m = 2$ se tiene que $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$.
- Si $m = 3$ se tiene que $\frac{1}{3} + \frac{3}{5} = \frac{14}{15}$.
- Si $m = 4$ se tiene que $\frac{1}{4} + \frac{4}{5} = \frac{21}{20}$.
- Si $m = 5$ se tiene que $\frac{1}{5} + \frac{5}{5} = \frac{6}{5}$.

Al analizar los resultados anteriores, solo dos de ellos corresponden a valores que están entre 0 y 1 y se obtienen cuando $m = 2$ y $m = 3$. Para los otros dos valores de m , el resultado obtenido no es coherente con el concepto de probabilidad, pues representan valores mayores que 1. Así, de las cuatro alternativas de respuesta, la única que representa un escenario posible corresponde a la opción B.

Referencias bibliográficas

- Bolaños, M. y Rojas, L. (octubre-diciembre, 2013). Comparación entre los promedios de la Prueba de Aptitud Académica y la Prueba de Habilidades Cuantitativas de los Estudiantes de la Universidad de Costa Rica. *Revista de Ciencias Sociales*, 142(4), 101-115. doi: 10.15517/rsc.v0i142.14305
- Brizuela, A., Cerdas, D., Fallas, S., Pérez, N., Rojas, L., Seas, G. y Ordoñez, K. (2015). *Resolvamos la PAA* (1.^a ed.). Editorial UCR.
- Dwyer, C. A., Gallagher, A., Levin, J. y Morley, M. E. (2003). What is quantitative reasoning? Defining the construct for assessment purposes. *ETS Research Report Series*, 2003(2), 1-48. doi: 10.1002/j.2333-8504.2003.tb01922.x
- Embretson, S. y Daniel, R. (2008). Understanding and quantifying cognitive complexity level in Mathematical problem solving items. *Psychology Science Quarterly*, 50(3), 328-344. Recuperado de https://www.psychologie-aktuell.com/fileadmin/download/PschoologyScience/3-2008/02_Embretson.pdf
- Mayer, R. E., Larkin, J. y Kadane, J. B. (1984). A cognitive analysis of mathematical problem solving ability. En R. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence*, (pp. 231- 73). Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

- Polya, G. (1965). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*. Nueva York: Wiley.
- Rojas, L. (febrero, 2013). Predicción de la dificultad de la Prueba de Habilidades Cuantitativas. *Revista digital: Matemática, Educación e Internet*, 13(1), 1659-0643. doi: 10.18845/rdmei.v13i1.1627.
- Rojas, L. (setiembre-diciembre, 2014). Predicción de la reprobación de cursos de matemática básicos en las carreras de Física, Meteorología, Matemática, Ciencias Actuariales y Farmacia. *Revista Electrónica Educare*, 18(3), 3-15. doi: <http://dx.doi.org/10.15359/ree.18-3.1>
- Rojas, L., Mora, M. y Ordóñez, G. (2018). Asociación del Razonamiento Cuantitativo con el Rendimiento Académico en Cursos Introdutorios de Matemática de Carreras STEM. *Revista digital: Matemática, Educación e Internet*, 19(1), 1-13. doi: 10.18845/rdmei.v19i1.3851
- Rojas, L. y Ordóñez, G. (2019). Proceso de construcción de pruebas educativas: El caso de la Prueba de Habilidades Cuantitativas. *Revista Evaluar*, 12(2). doi: 10.35670/1667-4545.v19.n2.25080
- Steen, L. A. (2004). *Achieving Quantitative Literacy: An Urgent Challenge for Higher Education*. Estados Unidos: Mathematical Association of America.

Índice de cuadros

Cuadro 1. Datos auxiliares para el ítem 5	26
Cuadro 2. Datos auxiliares para el ítem 8	35
Cuadro 3. Datos auxiliares para el ítem 27	87
Cuadro 4. Datos auxiliares para el ítem 31	97
Cuadro 5. Datos proporcionados para el ítem 33 . . .	100
Cuadro 6. Datos auxiliares para el ítem 33	102
Cuadro 7. Datos proporcionados para el ítem 34 . . .	104

Índice de figuras

Figura 1.	Ilustración auxiliar para el ítem 11	44
Figura 2.	Ilustración auxiliar para el ítem 12	46
Figura 3.	Ilustración con datos para el ítem 13	49
Figura 4.	Ilustración auxiliar para el ítem 13	53
Figura 5.	Ilustración auxiliar para el ítem 14	55
Figura 6.	Ilustración con datos para el ítem 15	56
Figura 7.	Ilustración auxiliar para el ítem 15	57
Figura 8.	Ilustración con datos para el ítem 16	59
Figura 9.	Ilustración auxiliar para el ítem 18	64
Figura 10.	Gráfico con datos para el ítem 31	95

Acerca de los autores

Leiner Víquez García nació en San José, Costa Rica, el 21 de julio de 1972 y es licenciado en Enseñanza de la Matemática. Posee más de veinticinco años de experiencia como profesor en educación secundaria y más de diecinueve años como docente universitario. En los últimos años, su interés por la comprensión de los procesos mentales vinculados al aprendizaje de la Matemática lo llevan a ingresar al Programa de Posgrado en Ciencias Cognoscitivas, del cual es candidato a la maestría. Su formación académica y experiencia en las áreas de Enseñanza de la Matemática y Ciencias Cognoscitivas le ha permitido realizar aportes desde la perspectiva de esas dos disciplinas al equipo académico de la PHC, lo que ha contribuido también con la elaboración conjunta de la presente obra.

Mónica Mora Badilla nació en San José, Costa Rica, el 14 de marzo de 1989. Su formación académica es Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica, Maestría en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y actualmente estudiante del Doctorado en Didáctica de la Matemática de la Universitat de València. Trabaja como profesora e investigadora en la Escuela de Formación Docente y como investigadora en el equipo académico de la PHC del Instituto de Investigaciones Psicológicas, ambos en la Universidad de Costa Rica. Además trabaja como tutora en la Cátedra de Didáctica de la Matemática de la Universidad Estatal a Distancia. El aporte de la M.Sc. Mora-Badilla a la

obra viene dado por más de 4 años de experiencia en el constructo subyacente de la PHC.

Graciela Ordóñez Gutiérrez nació en Guanacaste, Costa Rica, el 3 de septiembre de 1982. Es Licenciada en Enseñanza de la Matemática, Máster en Educación con énfasis en Evaluación Educativa por la Universidad de Costa Rica. Actualmente cursa el Doctorado en Educación en la UCR. Ha trabajado más de 12 años como docente en la Escuela de Matemática y como investigadora en el área de evaluación educativa, en el Instituto de Investigaciones Psicológicas. El aporte de la M.Ed. Ordóñez a la obra se refleja en los elementos asociados a la evaluación en el campo de la matemática.

Luis Rojas Torres nació en San José, Costa Rica, el 11 de mayo de 1986. Su formación académica es Licenciatura en Enseñanza de la Matemática, Maestría en Estadística y es egresado del Doctorado en Educación de la Universidad de Costa Rica. Ha trabajado más de 10 años como profesor de la Escuela de Matemática y como investigador en el área de las pruebas educativas, dentro del Instituto de Investigaciones Psicológicas. Con respecto a la obra sometida a evaluación, el M.Sc. Rojas-Torres es experto en el constructo subyacente de la PHC y en las estrategias de resolución evaluadas por la prueba.

Corrección filológica y revisión de pruebas: *Sofía Conejo A.* • Diseño y diagramación: *Los autores*
Diseño de portada: *Raquel Fernández C.* • Control de calidad de la versión impresa: *Grettel Calderón A.*
Realización del libro digital: *Alban Guerrero C.* • Control de calidad de la versión digital: *Hazel Aguilar B.*

Editorial UCR es miembro del Sistema Editorial Universitario Centroamericano (SEDUCA),
perteneciente al Consejo Superior Universitario Centroamericano (CSUCA).

Edición digital de la Editorial Universidad de Costa Rica. Fecha de creación: diciembre, 2023.

La licencia de este libro se ha otorgado a su comprador legal.

Valoramos su opinión.
Por favor [comente esta obra](#).



Adquiera más de nuestros
libros digitales en la
[Librería UCR Virtual](#).

LIBRERÍA
UCR

VIRTUAL

Este texto tiene por objetivo ofrecer un panorama de la Prueba de Habilidades Cuantitativas (PHC) y los procesos de solución de los ítems que la componen. El libro está dirigido a todas aquellas personas que desean ingresar a las carreras que utilizan la PHC como requisito de ingreso. Además, se pretende dar a las personas la oportunidad de prepararse a partir de los procesos de solución que se encuentran en cada uno de los ítems; por ello, se exponen las estrategias de resolución y se explica de manera detallada la solución en cada uno de los ítems que componen el folleto de práctica de la PHC.

El texto se divide en cinco secciones. La primera es de introducción al folleto. La segunda sección aborda el constructo de lo que se mide en la PHC, es decir el razonamiento cuantitativo. En la tercera sección, se establece la estructura de la PHC y los contenidos que se consideran para la medición del razonamiento cuantitativo. En la cuarta sección, se establecen las pautas para resolver un ítem. Finalmente, en la quinta sección se proporciona la solución de cada uno de los ítems de la PHC.