

Teoría de Grupos en Cuantización

Joseph C. Várilly

México, DF

Febrero de 1992

Publicaciones del Departamento de Matemáticas

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N.

Índice Temático

Introducción	1
1 Grupos y Algebras de Lie	5
1.1 Grupos de Lie: definición y primeros ejemplos	5
1.2 Algebras de Lie	9
1.3 La aplicación exponencial	10
1.4 Relaciones de conmutación	13
1.5 Complexificación	15
1.6 Grupos infinitodimensionales	16
2 Espacios de Hilbert y Representaciones de Grupos	18
2.1 Operadores sobre espacios de Hilbert	18
2.2 Ejemplos de espacios de Hilbert	20
2.3 Núcleos reproductores	22
2.4 Representaciones unitarias de grupos de Lie	24
3 Formas Simpléticas y sus Grupos de Simetrías	30
3.1 Formas simpléticas bilineales	30
3.2 Variedades simpléticas	31
3.3 Acciones simpléticas de grupos	32
3.4 Las acciones adjunta y coadjunta de un grupo de Lie	33
3.5 Estructuras de Poisson	37
3.6 La forma simplética invariante de una órbita coadjunta	40
4 Campos Vectoriales y Corchetes de Poisson	43
4.1 Campos vectoriales hamiltonianos	43
4.2 Acciones hamiltonianas y poissonianas	44
4.3 Cohomología de álgebras de Lie	47
4.4 Acciones poissonianas de extensiones centrales	50
5 La regla de cuantización de Weyl	53
5.1 Sistemas dinámicos clásicos y cuánticos	53
5.2 Cuantización de Weyl	55

5.3	Los operadores de Grossmann y Royer	57
5.4	Símbolos de Weyl y su producto torcido	60
5.5	Cuantización de Moyal: un esquema axiomático	64
6	Cuantización de Moyal sobre la Esfera	66
6.1	Un cuantizador para la esfera	66
6.2	Las representaciones unitarias irreducibles de $SU(2)$	67
6.3	Los elementos de matriz del cuantizador	70
6.4	Símbolos de operadores de spin	74
6.5	Aplicación al cálculo de las matrices de representación	74
7	El Método de Estados Coherentes	77
7.1	El concepto de estado coherente	77
7.2	Estados coherentes para el grupo $SU(2)$	78
7.3	Símbolos covariante y contravariante de Berezin	80
7.4	Símbolos de Stratonovich–Weyl	82
8	Cuantización en Orbitas Coadjuntas de Grupos Compactos	86
8.1	Las órbitas coadjuntas de grupos compactos semisimples	86
8.2	Estados coherentes y símbolos para grupos compactos semisimples	88
8.3	Cuantizadores para grupos compactos semisimples	90
A	Cuantización sobre el Disco de Poincaré	93
B	Coordenadas Canónicas en Orbitas Coadjuntas	97
B.1	Las órbitas coadjuntas genéricas de $SU(n)$	97
B.2	Expresión en coordenadas de la forma simpléctica invariante	99
B.3	El algoritmo de reducción simpléctica	100
B.4	El dominio de la parametrización canónica de la órbita	104
B.5	Reconstrucción de la parametrización canónica	107
	Referencias	110
	Índice de Notación	113
	Índice Alfabético	114

Introducción

En estas páginas, se pretende obtener una visión de conjunto de diversos aspectos de la problemática de cuantización con simetría. Desde las primeras formulaciones sistemáticas de la mecánica cuántica en los años veinte de este siglo, ha destacado el papel de los grupos de simetría de sistemas cuánticos sencillos (y a veces no tan sencillos); uno de sus momentos culminantes fue la formulación de Wigner de que un “sistema cuántico elemental” no es más ni menos que una representación unitaria de un grupo de simetría. De hecho, la teoría de representaciones de grupos de Lie, desde los trabajos fundamentales de Weyl a nuestros días, ha sido impulsada y constantemente retroalimentada por los problemas básicos de la mecánica cuántica.

Por otro lado, el papel de los grupos de simetría en la mecánica clásica no es menos notable. Una técnica básica para la integración de las ecuaciones diferenciales de movimiento es la búsqueda de “primeras integrales” que permitan reducir el número de grados de libertad del sistema; y podemos obtener una de estas “constantes de movimiento” cada vez que el sistema total admite un grupo uniparamétrico de simetría. Si se adopta la postura de que un “sistema de la mecánica clásica” es el flujo de un campo vectorial sobre una determinada variedad diferencial, entonces las simetrías del sistema forman la acción de un grupo de Lie sobre esta variedad; y podemos hablar de un “sistema clásico elemental” cuando este grupo actúa transitivamente.

Habiendo formulado los papeles de grupos de simetría en sus aspectos clásico (acciones sobre una variedad) y cuántico (representaciones matriciales u operatoriales), sobreviene el *problema de correspondencia*: ¿cómo emparejar un sistema de cada tipo, de modo que se pueda pasar libremente de uno al otro, conservando las interpretaciones físicas? El punto de vista más sano es el de postular que el mundo es cuántico, y que la mecánica clásica no es más que una aproximación que es permisible cuando se consideran fenómenos a escalas macroscópicas tales que ciertos parámetros, como la constante de Planck \hbar , pueden despreciarse. El proceso de tomar $\lim_{\hbar \rightarrow 0}$ se conoce como “límite clásico” y es recomendable toda vez que se tiene un sistema cuántico completamente integrable.

El problema práctico es que son los sistemas *clásicos* que más fácilmente se dejan integrar en forma completa, y se hace necesario buscar, para un sistema clásico dado, un sistema cuántico (o mejor dicho, una familia paramétrica de sistemas cuánticos) cuyo “límite clásico” es el sistema inicial. Esto es, en síntesis, el problema de la cuantización.

Hay varios enfoques posibles para atacar este problema. La teoría de deformaciones (a veces llamada “el programa de \ast -cuantización”) consiste en variar los corchetes de Poisson en forma paramétrica, e interpretar los nuevos corchetes como objetos cuánticos. El programa de los grupos cuánticos, hoy día muy en

boga, asocia al sistema clásico una cierta álgebra de Hopf (“coconmutativa”), e introduce variaciones paramétricas en los generadores de esta álgebra para producir otras álgebras de Hopf (“no coconmutativas”), cuyo estructura puede reproducir los fenómenos usuales de la mecánica cuántica.

Para tener una teoría convincente, se debe introducir los nuevos parámetros siguiendo algunas reglas sistemáticas, para elegir entre la profusión de posibilidades aquéllas que dan la cuantización “correcta”, que esperamos sea única (salvo factores de escala); porque el mundo cuántico es como es, y no como queremos que debe ser. Un procedimiento sistemático respetable es la llamada “cuantización geométrica”, que propone —simplificando mucho el caso— interpretar un sistema cuántico como un fibrado vectorial de cierta especie, cuyo espacio base es la variedad diferencial del sistema clásico asociado. Desafortunadamente, el estudio de estos sistemas requiere un aparato geométrico bastante formidable, que hace difícil la extracción de predicciones experimentalmente verificables.

Retrocedemos, entonces, al estudio de una subclase de problemas de cuantización que permiten soluciones exactas. Elegimos para nuestra consideración solamente aquéllos *sistemas* —clásicos o cuánticos— *que poseen tanta simetría que el mismo grupo de simetría encierra la solución al problema de cuantización*. Se puede objetar que la gran mayoría de sistemas no poseen alta simetría; pero, como bien señala Marsden para sistemas dinámicos clásicos [32, p. 1] los sistemas de alta simetría son “puntos de bifurcación” en el conjunto de todos los sistemas dinámicos, y por ende su estudio merece atención.

Siguiendo estos lineamientos, el desarrollo que sigue puede dividirse, como Galia, en tres partes. Los Capítulos 1 y 2 repasan los aspectos de las teorías de grupos de Lie y espacios de Hilbert que son relevantes para lo que sigue. Abundan los tratados excelentes y exhaustivos sobre estos temas, y no pretendemos sustituirlos, sino ofrecer un menú de ejemplos accesibles de grupos y sus representaciones antes de ir más a fondo. Los Capítulos 3 y 4 versan sobre las simetrías de sistemas clásicos, es decir, acciones simplécticas de grupos de Lie; en el Capítulo 4 trazamos la conexión entre las acciones compatibles con estructuras de Poisson y las extensiones centrales de álgebras y grupos de Lie. Este estudio nos conduce a definir un “espacio de fases homogéneo” como una *órbita coadjunta* de un grupo de Lie, o de una extensión central de él.

Los Capítulos 5 a 8 trazan el puente a sistemas cuánticos con simetría. El ejemplo paradigmático es la conocida regla de cuantización de Weyl para el espacio de fases plano. Desarrollamos este ejemplo con detalle, poniendo énfasis en el papel del grupo de Heisenberg, para llegar a una formulación axiomático de cuantización covariante que fue adumbrado por primera vez por Stratonovich [42]; su propiedad esencial, que llamamos “tracialidad”, permite calcular valores esperados de observables cuánticas mediante integrales sobre el espacio de fases. En el Capítulo 6, mostramos cómo este esquema axiomático conduce a reformular

la teoría de spin como un cálculo de funciones sobre la esfera. En el Capítulo 7, descubrimos que esta “cuantización de Moyal” sobre la esfera puede obtenerse de los llamados estados coherentes de spin mediante un procedimiento interpolativo. Finalmente, mostramos en el Capítulo 8 la generalización del método de estados coherentes a la cuantización de sistemas cuyo grupo de simetría es un grupo compacto semisimple cualquiera.

Hay dos Apéndices que complementan este estudio. En el Apéndice A, esbozamos la cuantización de Moyal para un grupo no compacto semisimple, $SL(2, \mathbb{R})$; el espacio de fases correspondiente es el disco de Poincaré. En el Apéndice B, desarrollamos los detalles de un algoritmo reciente para hallar coordenadas canónicas sobre una órbita coadjunta de $SU(n)$; las coordenadas así obtenidas permiten expresar la medida de Liouville sobre la órbita (y por ende, la medida de Haar sobre el grupo) en una forma covariante.

Desde el punto de vista estrictamente matemático, este libro es una meditación sobre el “paradigma de Kirillov”, según el cual hay —o debe de haber— una correspondencia entre las representaciones unitarias irreducibles de un grupo de Lie y ciertas órbitas de la acción coadjunta del grupo sobre el espacio dual de su álgebra de Lie. Digo “paradigma” y no “teoría” porque la relación entre representaciones y órbitas, bien conocida ya para grupos nilpotentes y grupos compactos, no ha sido del todo esclarecido en el caso general; y subsisten diversos problemas interesantes en el caso de grupos infinitodimensionales.

Este libro vio la luz como un curso de posgrado en el Departamento de Matemáticas del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional en México, entre setiembre de 1991 y enero de 1992. Quiero agradecer al Dr. Guillermo Moreno la magnífica oportunidad que me brindó de interactuar con colegas y estudiantes de dicho departamento durante una estadía sabática en el Centro; y a las personas que hicieron valiosos aportes al curso, en particular a Egidio Barrera, Sastry Bhāskara, Guillermo Dávila, Cesario García, Victor Martínez Olivé, Isidro Nieto y Michael Porter. Las influencias de José Cariñena y de José Gracia-Bondía, originadores de varias de las ideas aquí discutidas, han pesado mucho en su desarrollo; pero, desde luego, las fallas y omisiones que permanecen son solamente mías.

Se trata, en fin, de un libro de matemáticas con cierto interés y aplicación física, y no de un libro de física para matemáticos. Si es cierto, como ha dicho George Bernard Shaw, que “los ingleses y los norteamericanos son dos pueblos separados por un idioma común”, tratemos aquí de dilucidar parte del lenguaje común que separa a físicos y matemáticos.

Joseph C. Várilly

CINVESTAV del IPN, México, DF
Febrero 1992

1. Grupos y Algebras de Lie

Los grupos de Lie han llegado a ser el centro de las matemáticas.

—J. Dieudonné

1.1. Grupos de Lie: definición y primeros ejemplos

1.1. Definición. Un **grupo de Lie** es un grupo G que es a su vez una variedad diferencial real, de modo que el producto $(g, h) \mapsto gh : G \times G \rightarrow G$ y la inversión $g \mapsto g^{-1} : G \rightarrow G$ son aplicaciones suaves, es decir, indefinidamente diferenciables.

Hay una colección de grupos de Lie, llamados “grupos clásicos”, que son grupos de matrices reales o complejos (o inclusive de cuaterniones). En todo caso, conviene considerar la variedad subyacente como variedad real.

1.2. Definición. Una *variedad diferencial* (real) de dimensión finita n es un conjunto (mejor dicho: un espacio topológico Hausdorff y paracompacto) M , provisto de un “atlas” de *cartas locales* $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$ donde $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ es un recubrimiento abierto de M y cada $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua uno-a-uno, y toda vez que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, las “funciones de transición” $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ son suaves.

Una *variedad compleja* de dimensión finita m tiene definición análoga, pero con \mathbb{C}^m en lugar de \mathbb{R}^n y con el requisito de que las funciones de transición sean *holomorfas*. Evidentemente, una variedad compleja de dimensión compleja m es también una variedad real de dimensión $2m$.

Se define un *grupo de Lie complejo* como un grupo que sea a su vez una variedad compleja, tal que las operaciones de multiplicación e inversión sean holomorfas.

1.3. Ejemplos.

1. Un *espacio vectorial* real (finitodimensional) es un grupo de Lie abeliano, con la operación de suma. Un espacio vectorial complejo es un grupo de Lie complejo abeliano.
2. $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, con la multiplicación ordinaria, es un grupo de Lie unidimensional no compacto. $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es un grupo de Lie unidimensional compacto. $\mathbb{C}^\times := \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$ es un grupo de Lie complejo unidimensional.
3. $GL(n, \mathbb{R}) := \{g \in \mathbb{R}^{n \times n} : g^{-1} \text{ existe}\}$ es un grupo de Lie de dimensión n^2 ; de hecho es el abierto $\det^{-1}(\mathbb{R}^\times)$ en $\mathbb{R}^{n \times n}$. El *grupo lineal especial* es el subgrupo $SL(n, \mathbb{R}) := \{g \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det g = 1\}$ de $GL(n, \mathbb{R})$. Análogamente se definen los grupos de Lie complejos $GL(n, \mathbb{C})$ y $SL(n, \mathbb{C})$ al reemplazar \mathbb{R} por \mathbb{C} .

1.4. Definición. Sea d una *forma bilineal simétrica no degenerada* sobre \mathbb{R}^n , es decir, $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, y $d(x, y) = 0$ para todo y solo si $x = 0$. Por el teorema de Sylvester, podemos elegir una base de \mathbb{R}^n respecto del cual d se expresa como:

$$d(x, y) = x_1y_1 + \cdots + x_p y_p - x_{p+1}y_{p+1} - \cdots - x_{p+q}y_{p+q}, \quad (1.1)$$

con $p + q = n$ (pues d es no degenerada). Defínase

$$O(p, q) := \{ g \in GL(n, \mathbb{R}) : d(gx, gy) = d(x, y) \text{ para } x, y \in \mathbb{R}^n \}. \quad (1.2)$$

Si $q = 0$, es decir, si d es definida positiva, escribimos $O(n)$ en vez de $O(n, 0)$; este se llama el *grupo ortogonal* de \mathbb{R}^n . Si en (1.2) tomamos $g \in SL(n, \mathbb{R})$, es decir, si agregamos la restricción $\det g = 1$, obtenemos los grupos $SO(p, q)$ y $SO(n)$; este último es el *grupo ortogonal especial* de \mathbb{R}^n .

1.5. Definición. Sea s una *forma bilineal alternante no degenerada* sobre \mathbb{R}^{2n} , (se sabe que tales formas existen solo si la dimensión es par). Entonces hay una base de \mathbb{R}^{2n} respecto del cual s se expresa como:

$$s(x, y) = x_{n+1}y_1 + \cdots + x_{2n}y_n - x_1y_{n+1} - \cdots - x_ny_{2n}. \quad (1.3)$$

Si

$$J := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n},$$

entonces $d_J(x, y) := s(x, Jy)$ es simétrica y definida positiva. El *grupo simpléctico* de \mathbb{R}^{2n} se define como:

$$Sp(n, \mathbb{R}) := \{ g \in GL(2n, \mathbb{R}) : s(gx, gy) = s(x, y) \text{ para } x, y \in \mathbb{R}^{2n} \}. \quad (1.4)$$

Si $g \mapsto g^t$ denota la transpuesta de la matriz g respecto de la forma simétrica d_J , tenemos que $g \in Sp(n, \mathbb{R})$ si y solo si $d_J(Jgx, gy) \equiv d_J(Jx, y)$ si y solo si $g^t Jg = J$.

Obsérvese que $J \in Sp(n, \mathbb{R})$ y que $J^2 = -I_{2n}$.

1.6. Podemos amplificar las formas d y s a formas bilineales sobre \mathbb{C}^n , \mathbb{C}^{2n} respectivamente, al tomar las coordenadas x_i, y_j complejos en (1.1) y (1.3). (Alternativamente, tome $d(x + iy, u + iv) := d(x, u) + id(x, v) + id(y, u) - d(y, v)$ si $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$ y análogamente para s .) (Fíjese bien que las formas amplificadas son bilineales, no sesquilineales.) Obtenemos los grupos complejos $O(n, \mathbb{C})$, $Sp(n, \mathbb{C})$ al reemplazar \mathbb{R} por \mathbb{C} en las definiciones (1.2), (1.4). (Se puede suponer $q = 0$ para d sin perder generalidad.)

Definimos también $SO(n, \mathbb{C}) := O(n, \mathbb{C}) \cap SL(n, \mathbb{C})$.

1.7. Definición. Denotamos por g^* el conjugado hermítico de $g \in \mathbb{C}^{n \times n}$. (Su entrada (i, j) es \bar{g}_{ji} .) El *grupo unitario* $U(n) := \{g \in \mathbb{C}^{n \times n} : g^*g = I_n\}$ es un grupo de Lie *real* (su variedad subyacente no es, en general, una variedad compleja) que es, además, compacto: tenemos $g \in U(n)$ si y solo si las columnas de la matriz g forman una base ortonormal de \mathbb{C}^n , así que $\{g_{ij} : i, j = 1, 2, \dots, n\}$ es acotado y cerrado en \mathbb{C}^{n^2} . (Por la misma razón, los grupos $O(n)$ y $SO(n)$ son también compactos.)

El subgrupo cerrado $SU(n) := U(n) \cap SL(n, \mathbb{C}) = \{g \in U(n) : \det g = 1\}$, el *grupo especial unitario* de \mathbb{C}^n , es también compacto.

1.8. Obsérvese que \mathbb{R}^n encaja en \mathbb{C}^n de modo natural, y que la *forma hermítica* $\langle z | w \rangle := d(\bar{z}, w)$ sobre \mathbb{C}^n se reduce a d sobre \mathbb{R}^n , ya que identificamos \mathbb{R}^n con $\{z \in \mathbb{C}^n : \bar{z} = z\}$. Así tenemos $O(n) = U(n) \cap GL(n, \mathbb{R})$ y $SO(n) = SU(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$. (Esto nos da otra manera de comprobar que $O(n)$ y $SO(n)$ son compactos.) También el grupo $Sp(n) := Sp(n, \mathbb{C}) \cap U(2n)$ es compacto.

1.9. El grupo $SL(n, \mathbb{R})$ posee un subgrupo *soluble* maximal $B(n, \mathbb{R}) := \{g \in SL(n, \mathbb{R}) : g_{ij} = 0 \text{ para } i > j\}$. Recuerde que G es soluble si la serie de subgrupos derivados $G', G'' := (G')', \dots, G^{(n)} := (G^{(n-1)})', \dots$ se reduce a $G^{(k)} = \{e\}$ en un número finito de pasos; aquí G' es el subgrupo cerrado de G generado por los “conmutadores”: $G' := \langle xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in G \rangle$.

El subgrupo $N(n, \mathbb{R}) := \{g \in B(n, \mathbb{R}) : g_{ij} = 1 \text{ para } i = j\}$ es *nilpotente*. Recuerde que un grupo G es nilpotente si la serie de subgrupos $\gamma_1(G) := G', \dots, \gamma_n(G) := \langle xyx^{-1}y^{-1} : x \in G, y \in \gamma_{n-1}(G) \rangle, \dots$ se reduce a $\gamma_k(G) = \{e\}$ en un número finito de pasos.

1.10. Definición. El **grupo de Heisenberg** $\mathbb{H}(n)$ (a veces llamado el “grupo de Heisenberg–Weyl”) es un subgrupo de $N(n+2, \mathbb{R})$ que consta de matrices de la forma:

$$(x, y; z) := \begin{pmatrix} 1 & x^t & z \\ 0 & I_n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $x, y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}$. Es nilpotente (con $k = 2$.) La variedad subyacente a $\mathbb{H}(n)$ es el espacio vectorial \mathbb{R}^{2n+1} , así que $\mathbb{H}(n)$ es un grupo no compacto de dimensión $(2n+1)$. La multiplicación de matrices da la “ley de grupo” de $\mathbb{H}(n)$ en la forma

$$(x_1, y_1; z_1)(x_2, y_2; z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2; z_1 + z_2 + x_1 y_2).$$

Aquí y en lo sucesivo adoptamos el convenio de que la yuxtaposición de dos vectores en \mathbb{R}^n significa su “producto interno euclidiano”:

$$xy := x^1 y^1 + x^2 y^2 + \dots + x^n y^n \quad \text{si } x = (x^1, \dots, x^n), y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Denotamos por $\widetilde{\mathbb{H}}(n)$ el grupo (abstracto) parametrizado por \mathbb{R}^{2n+1} , cuyos elementos $(x, y; z)$ cumplen la regla

$$(x_1, y_1; z_1)(x_2, y_2; z_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2; z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)). \quad (1.5)$$

Esta es también una “ley de grupo” (es asociativa, posee identidad y cada elemento tiene inverso). Es fácil comprobar que $(x, y; z) \mapsto (x, y; z + \frac{1}{2}xy)$ es un isomorfismo biyectivo de $\widetilde{\mathbb{H}}(n)$ en $\mathbb{H}(n)$. Adoptaremos la versión (1.5) de la ley de grupo cuando discutimos el papel del grupo de Heisenberg en la cuantización de Weyl.

1.11. No todos los grupos de Lie son “grupos lineales”, es decir, subgrupos de $GL(n, \mathbb{R})$ o de $GL(n, \mathbb{C})$. Una manera importante de obtener nuevos grupos de Lie a partir de los ejemplos básicos anteriores es la de formar productos semidirectos de grupos conocidos. Un grupo G es un **producto semidirecto** de dos subgrupos H y K si H es un subgrupo normal de G , $H \cap K = \{e\}$ y $G = HK$. Así, cada elemento g de G se puede escribir en forma única como $g = hk$ (con $h \in H$, $k \in K$), y luego $g_1 g_2 = h_1 k_1 h_2 k_2 = (h_1 k_1 h_2 k_1^{-1})(k_1 k_2)$.

Más abstractamente, podemos formar un producto semidirecto de dos grupos dados H y K , si disponemos de un homomorfismo $\alpha: K \rightarrow \text{Aut}(H)$, porque podemos definir una “ley de grupo” en el producto cartesiano de H y K por:

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1 \alpha(k_1)[h_2], k_1 k_2).$$

(Se verifica enseguida que este producto de pares es asociativo.) El grupo así formado se denota por $H \rtimes_{\alpha} K$, o simplemente por $H \rtimes K$ si no hay ambigüedad en cuanto a α . Obsérvese que $(h, k)^{-1} = (\alpha(k^{-1})[h^{-1}], k^{-1})$ y que $(e, k)(h, e)(e, k)^{-1} = (\alpha(k)[h], e)$, así que esta descripción “abstracta” del producto semidirecto es esencialmente a la anterior. (Al identificar h con (h, e) y k con (e, k) , se puede considerar H y K como subgrupos de $H \rtimes K$ cuya intersección es la identidad.)

1.12. Ejemplos.

1. $E(n) := \mathbb{R}^n \rtimes SO(n)$ es el *grupo euclidiano* de movimientos rígidos de \mathbb{R}^n ; el grupo de rotaciones $SO(n)$ actúa sobre \mathbb{R}^n de la manera usual. La ley de grupo es

$$(x_1, R_1)(x_2, R_2) = (x_1 + R_1 x_2, R_1 R_2).$$

$\mathbb{R}^n \rtimes SO(n)$ es isomorfo a un grupo de matrices por $(x, R) \mapsto \begin{pmatrix} R & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$.

2. El *grupo galileano homogéneo* Γ es el grupo de transformaciones lineales $(t, \mathbf{r}) \mapsto (t, \mathbf{v}t + R\mathbf{r})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, donde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $R \in SO(3)$. (Se puede ver que $\Gamma \cong E(3)$.) El grupo de traslaciones $(t, \mathbf{r}) \mapsto (t + b, \mathbf{r} + \mathbf{a})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$,

junto con Γ , genera el *grupo galileano* $\mathbb{R}^4 \ltimes \Gamma \cong \mathbb{R}^4 \ltimes (\mathbb{R}^3 \ltimes SO(3))$, cuyo ley de grupo es:

$$(b_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{v}_1, R_1)(b_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{v}_2, R_2) = (b_1 + b_2, \mathbf{a}_1 + R_1 \mathbf{a}_2, \mathbf{v}_1 + R_1 \mathbf{v}_2, R_1 R_2).$$

3. El *grupo de Lorentz* $O(3, 1)$ es el grupo de invariancia de la forma bilineal $(xy) := -x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$ sobre \mathbb{R}^4 . Al agregar las traslaciones de \mathbb{R}^4 , se forma el *grupo de Poincaré* $\mathcal{P} := \mathbb{R}^4 \ltimes O(3, 1)$.

1.2. Algebras de Lie

1.13. Definición. Un **álgebra de Lie** es un espacio vectorial \mathfrak{g} , provisto de un **corchete** bilineal $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ que es *antisimétrico*: $[Y, X] = -[X, Y]$, y que cumple la *identidad de Jacobi*:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \text{para todo } X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

1.14. El lado izquierdo es una suma de tres copias del primer término, modificadas por permutaciones cíclicas de sus argumentos X, Y, Z . Tales expresiones aparecerán a menudo en lo sucesivo, y adoptaremos la notación $\sum_{\text{cíclica}}$ para abreviarlos. Una “suma cíclica” de una expresión es la suma de todas las expresiones obtenidas por permutaciones cíclicas de los argumentos de la original; así, la identidad de Jacobi se puede reescribir como sigue:

$$\sum_{\text{cíclica}} [X, [Y, Z]] = 0 \quad \text{para todo } X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

1.15. Definición. Si M es una variedad diferencial, sea $TM := \bigsqcup_{x \in M} T_x M$ su fibrado tangente, con la proyección natural $\tau: TM \rightarrow M$ dado por $\tau(v) := x$ si $v \in T_x M$. Entonces TM es a su vez una variedad diferencial de modo natural. Un **campo vectorial** sobre M es una sección (suave) de τ , es decir, una aplicación $\tilde{X}: M \rightarrow TM$ tal que $y \mapsto \tilde{X}_y \in T_y M$. Denotamos la totalidad de campos vectoriales sobre M por $\mathfrak{X}(M)$.

Ahora $T_x M$ es, por definición, el espacio vectorial de formas lineales sobre $C^\infty(M)$ que cumplen la “regla de Leibniz local”:

$$v(fg) = v(f)g(x) + f(x)v(g), \quad \text{para todo } f, g \in C^\infty(M).$$

Un campo vectorial es entonces una aplicación lineal $f \mapsto \tilde{X}f : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ que obedece la regla de Leibniz:

$$\tilde{X}(fg) = (\tilde{X}f)g + f(\tilde{X}g), \quad \text{para todo } f, g \in C^\infty(M); \quad (1.6)$$

la función $\tilde{X}f$ se define por $\tilde{X}f(y) := \tilde{X}_y f$. En otras palabras, $\mathfrak{X}(M)$ es el espacio de “derivaciones” del álgebra $C^\infty(M)$.

1.16. Si M, N son dos variedades diferenciales y si $\phi: M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable, hay una aplicación lineal $\phi_*: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$ dado por $(\phi_*\tilde{X})(h) := \tilde{X}(h \circ \phi)$ para $h \in C^\infty(N)$.

En el caso de que $N = M$ y ϕ es un difeomorfismo de M , decimos que \tilde{X} es *invariante* bajo ϕ si $\phi_*\tilde{X} = \tilde{X}$.

1.17. Definición. Si G es un grupo de Lie, las *traslaciones a la izquierda* $\lambda_g: h \mapsto gh$ son difeomorfismos de G (fíjese que $(\lambda_g)^{-1} = \lambda_{g^{-1}}$ en general). Decimos que un *campo vectorial* $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(G)$ es *invariante a la izquierda*, o simplemente *invariante*, si $(\lambda_g)_*\tilde{X} = \tilde{X}$ para todo $g \in G$. Obsérvese que en ese caso, \tilde{X} es determinado por \tilde{X}_e , ya que $\tilde{X}_g = (\lambda_g)_*\tilde{X}_e$ para todo $g \in G$. Inversamente, si $X \in T_eG$, la fórmula $\tilde{X}_g := (\lambda_g)_*X$ define un campo vectorial invariante cuyo valor en la identidad es X . Sobra decir que $\tilde{X} \mapsto \tilde{X}_e$ es lineal; de esta manera identificamos el conjunto de campos vectoriales invariantes sobre G con T_eG .

1.18. $\mathfrak{X}(M)$ es un álgebra de Lie (en general, infinitodimensional). Su corchete es dado simplemente por:

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}](f) := \tilde{X}(\tilde{Y}f) - \tilde{Y}(\tilde{X}f). \quad (1.7)$$

(Se verifica que el lado derecho de (1.7) cumple la propiedad de derivación (1.6).) Además, si $\phi: M \rightarrow M$ es un difeomorfismo, es inmediato de la definición de ϕ_* que $\phi_*([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = [\phi_*\tilde{X}, \phi_*\tilde{Y}]$. En particular, los campos vectoriales invariantes bajo ϕ forman una subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$.

1.19. Definición. Si G es un grupo de Lie, el **álgebra de Lie de G** es el espacio vectorial $\mathfrak{g} := T_eG$, dotado del corchete inducido por (1.7) sobre la subálgebra de campos vectoriales invariantes. En otras palabras, si $X, Y \in \mathfrak{g}$, sean \tilde{X}, \tilde{Y} los campos invariantes definidos por $\tilde{X}_g := (\lambda_g)_*X$, $\tilde{Y}_g := (\lambda_g)_*Y$. Como

$$(\lambda_g)_*([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = [(\lambda_g)_*\tilde{X}, (\lambda_g)_*\tilde{Y}] = [\tilde{X}, \tilde{Y}],$$

si $g \in G$, entonces $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ es un campo vectorial invariante; coloque $[X, Y] := [\tilde{X}, \tilde{Y}]_e \in \mathfrak{g}$. Es evidente que $[X, Y]$ depende linealmente de X y de Y , y su antisimetría y la identidad de Jacobi son consecuencias de las propiedades análogas de $\mathfrak{X}(G)$.

1.3. La aplicación exponencial

1.20. Una carta local $\phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ de una variedad M , junto con las proyecciones $\pi^j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: (a^1, \dots, a^n) \rightarrow a^j$, determina, por $x^j := \pi^j \circ \phi_\alpha$ un “sistema de coordenadas locales” $x^1, \dots, x^n: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$. La propiedad (1.6) implica que

cualquier campo vectorial es localmente de la forma $\tilde{X} = \sum_{j=1}^n f^j \partial/\partial x^j$ en U_α , con $f^1, \dots, f^n \in C^\infty(U_\alpha)$. Si $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ es una curva suave, su vector tangente en $\gamma(t)$ es $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$ dado por $\dot{\gamma}(t)(f) := \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} (f \circ \gamma)(s)$. La ecuación diferencial

$$\dot{\gamma}(t) = \tilde{X}_{\gamma(t)}, \quad \gamma(0) = p \in U_\alpha,$$

determina una única *curva integral* $t \mapsto \gamma_p(t)$ del campo vectorial \tilde{X} , para $-\epsilon < t < \epsilon$ con $\epsilon > 0$; además, esta curva depende suavemente del punto inicial p . A lo mejor, podemos extender la curva (hacer crecer ϵ) al tomar otras cartas locales amén de (U_α, ϕ_α) ; asumimos, entonces, que el intervalo $-\epsilon < t < \epsilon$ de definición de γ_p sea el mayor posible (no se excluye $\epsilon = +\infty$). Ahora $\psi_t: p \mapsto \gamma_p(t)$ es un difeomorfismo sobre su dominio, y además $\psi_{t+s}(p) = \psi_t(\psi_s(p))$ toda vez que $\psi_s(p) \in \text{Dom}(\psi_t)$. Los ψ_t constituyen el *flujo* del campo vectorial \tilde{X} .

Si M es compacto, es $\text{Dom}(\psi_t) = M$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y entonces el flujo de \tilde{X} es un grupo uniparamétrico de difeomorfismos de M .

1.21. Definición. Sean G un grupo de Lie, \mathfrak{g} su álgebra de Lie y sea $X \in \mathfrak{g}$. La curva integral γ_X del campo vectorial invariante $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(G)$ tal que $\gamma_X(0) = e$ cumple $\dot{\gamma}_X(0) = X$, y su intervalo de definición inicial $-\epsilon < t < \epsilon$ se puede prolongar en \mathbb{R} ; porque si $-\epsilon < s < \epsilon$, la curva η determinada por $\eta(0) = \gamma_X(s)$, $\dot{\eta}(t) = \tilde{X}_{\eta(t)} = (\lambda_g)_* \tilde{X}_{g^{-1}\eta(t)}$ con $g = \gamma_X(s)$, la cual es $\eta(t) = \gamma_X(s)\gamma_X(t)$, constituye una prolongación de γ_X al intervalo $s - \epsilon < t < s + \epsilon$. De este modo, se obtiene una curva $\gamma_X: \mathbb{R} \rightarrow G$, que además cumple $\gamma_X(s+t) = \gamma_X(s)\gamma_X(t)$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$.

La curva γ_X así definida es un *subgrupo uniparamétrico* de G , determinada unívocamente por la condición $\dot{\gamma}_X(0) = X \in \mathfrak{g}$.

Escribimos $\exp X := \gamma_X(1)$. La construcción de γ_X hace evidente que $\gamma_{tX}(1) = \gamma_X(t)$, es decir, $\gamma_X(t) = \exp tX$ para todo $t \in \mathbb{R}$. La aplicación $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ así definida se llama la **aplicación exponencial** del grupo de Lie G .

1.22. Ejemplo. Si G es un grupo de Lie lineal, es decir, $G \subset GL(m, \mathbb{R})$ o bien $G \subset GL(m, \mathbb{C})$ para algún $m \in \mathbb{N}$, el espacio tangente $T_e G$ se puede identificar con un subespacio vectorial (real) de $\mathbb{R}^{m \times m}$ o de $\mathbb{C}^{m \times m}$. En estos casos, la *exponencial matricial* $\exp X := \sum_{k=0}^{\infty} (1/k!) X^k$ coincide con la aplicación exponencial de G . De hecho, tenemos la fórmula utilísima:

$$\mathfrak{g} = \{ X \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ (ó } \mathbb{C}^{m \times m}) : \exp tX \in G \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \},$$

en vista del siguiente resultado sobre exponenciales matriciales.

1.23. Lema. Si $X, Y \in \mathbb{R}^{m \times m}$, tenemos

$$\left. \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} (\exp tX \exp tY \exp(-tX) \exp(-tY)) = XY - YX.$$

Demostración: Esta igualdad se basa en la llamada *fórmula de Campbell–Baker–Hausdorff*:

$$\exp tX \exp tY = \exp(t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2(XY - YX) + O(t^3)). \quad (1.8)$$

[Aquí la notación $O(t^3)$ de Landau significa alguna función $F(t)$ tal que $F(t)/t^3$ es acotada cuando $t \rightarrow 0$, y por ende puede despreciarse en comparación con t^2 cuando t es pequeño.] La fórmula (1.8) se obtiene del desarrollo:

$$\begin{aligned} \exp tX \exp tY &= (I + tX + \frac{1}{2}t^2X^2 + O(t^3))(I + tY + \frac{1}{2}t^2Y^2 + O(t^3)) \\ &= I + t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2(X^2 + 2XY + Y^2) + O(t^3) \\ &= I + t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2(X + Y)^2 + \frac{1}{2}t^2(XY - YX) + O(t^3) \\ &= \exp(t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2(XY - YX) + O(t^3)), \end{aligned}$$

ya que $I + A = \exp(A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 - \dots)$ si esta última serie converge. (Aquí $A = t(X + Y)$, y habrá convergencia si t es suficientemente pequeño.)

Aplicando (1.8) dos veces, se obtiene

$$\begin{aligned} \exp tX \exp tY \exp(-tX) \exp(-tY) &= \exp(t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2(XY - YX) + O(t^3)) \\ &\quad \times \exp(-t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2(XY - YX) + O(t^3)) \\ &= \exp(t^2(XY - YX) + O(t^3)). \end{aligned}$$

Luego, al derivar dos veces en $t = 0$ y al dividir por 2, se obtiene la fórmula deseada. \square

1.24. En consecuencia, $XY - YX \in T_e(G)$ toda vez que $X, Y \in T_eG$ (de hecho, podemos identificar T_eG con el subespacio tangente en I_m a la subvariedad G de $\mathbb{R}^{m \times m}$; la curva $t \mapsto \exp tX$ (exponencial matricial) es un subgrupo uniparamétrico de G cuyo vector tangente en I_m es X , así que $X \mapsto \exp X$ es la aplicación exponencial de G). El corchete en \mathfrak{g} es también entonces el “conmutador matricial” $[X, Y] := XY - YX \in \mathfrak{g}$.

1.25. Ejemplos.

1. Para $G = GL(n, \mathbb{R})$, es $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) := \mathbb{R}^{n \times n}$; para $G = GL(n, \mathbb{C})$, es $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) := \mathbb{C}^{n \times n}$.
2. Como $\det(\exp X) = e^{\text{Tr } X}$ para cualquier matriz X , la condición $\det g = 1$ para $g \in G$ se traduce en $\text{Tr } X = 0$ para $X \in \mathfrak{g}$. Luego $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : \text{Tr } X = 0\}$, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} : \text{Tr } X = 0\}$ son las álgebras de Lie respectivas de $SL(n, \mathbb{R})$ y de $SL(n, \mathbb{C})$. Como $\dim G = \dim T_eG = \dim \mathfrak{g}$, concluimos que $\dim SL(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1$, $\dim SL(n, \mathbb{C}) = 2n^2 - 2$.

3. Si $X \in \mathfrak{o}(n)$, es decir, $\exp tX \in O(n)$ para $t \in \mathbb{R}$, tenemos la identidad $d((\exp tX)u, (\exp tX)v) = d(u, v)$ para cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}^n$. Derivando en $t = 0$, obtenemos la condición $d(Xu, v) + d(u, Xv) \equiv 0$; o bien, $X^t = -X$. Luego $\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : X^t = -X\} = \mathfrak{so}(n)$, y en consecuencia $\dim \mathfrak{o}(n) = \dim SO(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$.
4. De igual modo, se obtiene la condición $s(Xu, v) + s(u, Xv) \equiv 0$ para $X \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$; luego $d_J(JXu, v) + d_J(Ju, Xv) \equiv 0$. Por ende, $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} : X^t J = -JX\}$, y en consecuencia $\dim Sp(n, \mathbb{R}) = 2n^2 + n$.
5. La matriz $X = \begin{pmatrix} 0 & a^t & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cumple $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $X^3 = 0$, así que es nilpotente, si $a, b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Se nota que $\exp tX \in \mathbb{H}(n)$ para $t \in \mathbb{R}$, ya que en este caso $\exp tX = I + tX + \frac{1}{2}t^2 X^2$ en vista de $X^3 = 0$. Luego X es un elemento típico del álgebra de Lie $\mathfrak{h}(n)$ del grupo de Heisenberg $\mathbb{H}(n)$ (de dimensión $2n + 1$). Visto de esta forma, tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & x^t & z \\ 0 & I_n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & x^t & z - xy \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

así que $\exp: \mathfrak{h}(n) \rightarrow \mathbb{H}(n)$ es sobreyectiva. Si abreviamos $X =: (a, b; c)$, obtenemos la regla: para corchetes en $\mathfrak{h}(n)$:

$$[(a_1, b_1; c_1), (a_2, b_2; c_2)] = (0, 0; a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

1.4. Relaciones de conmutación

1.26. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión n . Elegimos una base $\{X_1, \dots, X_n\}$ para el espacio vectorial \mathfrak{g} . Como $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ es una forma bilineal, para determinar el corchete basta calcular los corchetes básicos $[X_i, X_j]$; obtenemos

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k X_k,$$

donde los números reales c_{ij}^k se llaman *constantes de estructura* de \mathfrak{g} .

Las constantes de estructura obedecen las relaciones

$$\begin{aligned} c_{ji}^k &= -c_{ij}^k, \\ \sum_{k=1}^n c_{ij}^k c_{kl}^m + c_{jl}^k c_{ki}^m + c_{li}^k c_{kj}^m &= 0, \end{aligned} \tag{1.9}$$

debido a la antisimetría del corchete y a la identidad de Jacobi, respectivamente. Inversamente, cualquier colección de números reales $\{c_{ij}^k : i, j, k = 1, 2, \dots, n\}$ que obedece (1.9) determina un álgebra de Lie de dimensión n .

1.27. Ejemplos.

1. Un álgebra de Lie de dimensión 1 es necesariamente abeliana (es decir, $[X, Y] = 0$ para todo X, Y) ya que $c_{11}^1 = -c_{11}^1$ implica $c_{11}^1 = 0$. En este caso, $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}$, y hay un solo álgebra de Lie unidimensional, hasta isomorfismo. Obsérvese, sin embargo, que hay varios grupos de Lie unidimensionales no isomorfos: \mathbb{R}^\times (no conexo), \mathbb{T} (conexo y compacto pero no simplemente conexo) y \mathbb{R} (conexo y simplemente conexo, pero no compacto). \mathbb{T} y \mathbb{R} poseen el mismo álgebra de Lie porque \mathbb{R} es el grupo recubridor universal de \mathbb{T} mediante el homomorfismo $t \mapsto e^{it}$.
2. Hay dos álgebras de Lie de dimensión 2: \mathbb{R}^2 (abeliano) y $\mathfrak{m}(1) := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$; si $X_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, la única relación de conmutación no trivial es $[X_1, X_2] = X_2$.
3. En dimensión 3, tenemos \mathbb{R}^3 (abeliano) y $\mathfrak{m}(1) \oplus \mathbb{R}$. Además tenemos 4 nuevas álgebras de Lie $\mathfrak{h}(1)$, $\mathfrak{e}(2)$, $\mathfrak{su}(2)$ y $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, determinadas por:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}(1) : \text{ base } \{X, Y, T\} : & \quad [X, Y] = T, \quad [T, X] = 0, \quad [T, Y] = 0; \\ \mathfrak{e}(2) : \text{ base } \{J, P_1, P_2\} : & \quad [J, P_1] = P_2, \quad [J, P_2] = -P_1, \quad [P_1, P_2] = 0; \\ \mathfrak{su}(2) : \text{ base } \{X, Y, Z\} : & \quad [X, Y] = Z, \quad [Y, Z] = X, \quad [Z, X] = Y; \\ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) : \text{ base } \{X, Z, W\} : & \quad [Z, X] = W, \quad [W, Z] = -X, \quad [W, X] = Z. \end{aligned}$$

Unos grupos de Lie tridimensionales que les corresponden son, respectivamente, $\mathbb{H}(1)$; $E(2)$; $SU(2)$ ó $SO(3)$; $SL(2, \mathbb{R})$ ó $SU(1, 1)$ o bien $SO(2, 1)$.

Es conveniente tener presentaciones explícitas de estas bases. Si E_{ij} denota la matriz 3×3 con entrada (i, j) igual a 1 y las demás entradas cero, la base de $\mathfrak{h}(1)$ es dada por $X = E_{12}$, $Y = E_{23}$, $T = E_{13}$. La base de $\mathfrak{e}(2)$ es dada por $J = E_{21} - E_{12}$, $P_1 = E_{13}$, $P_2 = E_{23}$. Para $\mathfrak{su}(2)$, una base conveniente es:

$$X = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, podemos tomar:

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad W = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

1.5. Complexificación

1.28. Uno de los teoremas fundamentales de la teoría de grupos de Lie (que no mostraremos aquí, pero vea [45, Teorema 3.15.1], por ejemplo) es el “tercer teorema fundamental de Lie”, que dice que *cada álgebra de Lie real [respectivamente, compleja] de dimensión finita es el álgebra de Lie de un grupo de Lie G real [respectivamente, complejo] que es conexo y simplemente conexo; y este grupo G es único hasta isomorfismo.*

En los ejemplos anteriores de dimensión 3, los grupos $SO(3)$ y $SO(2, 1)$ no son simplemente conexos; y $SL(2, \mathbb{R}) \cong SU(1, 1)$.

1.29. Definición. Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie, $X \in \mathfrak{g}$, definimos $\text{ad } X \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ por $(\text{ad } X)Y := [X, Y]$. La identidad de Jacobi entonces muestra que

$$\text{ad}([X, Z]) = (\text{ad } X)(\text{ad } Z) - (\text{ad } Z)(\text{ad } X)$$

en $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$, así que $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ es un homomorfismo de álgebras de Lie. Si \mathfrak{g} es finitodimensional, defínase la *forma de Killing* de \mathfrak{g} por

$$B(X, Y) := \text{Tr}[(\text{ad } X)(\text{ad } Y)].$$

Es obvio que B es una forma bilineal simétrica sobre \mathfrak{g} , y que

$$B((\text{ad } Z)X, Y) = -B(X, (\text{ad } Z)Y)$$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Se dice que \mathfrak{g} es *semisimple* si B es una forma no degenerada. Por ejemplo, $\mathfrak{su}(2)$ es semisimple ya que $B(X, X) \leq 0$ para todo $X \in \mathfrak{su}(2)$. (La negatividad de la forma de Killing es característica de grupos *compactos* semisimples.)

1.30. Definición. Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie real, el espacio vectorial complejo $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ (= “ $\mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ ”) es un álgebra de Lie complejo, llamado la *complexificación* de \mathfrak{g} .

Sea G un grupo de Lie y \mathfrak{g} su álgebra de Lie. Una **complexificación** de G es un grupo de Lie complejo $G^{\mathbb{C}}$, cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, tal que G sea un subgrupo de Lie real de $G^{\mathbb{C}}$.

1.31. Ejemplos.

1. $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $O(n, \mathbb{C})$, $SO(n, \mathbb{C})$, $Sp(n, \mathbb{C})$ son complexificaciones de $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $O(n, \mathbb{R})$, $SO(n, \mathbb{R})$, $Sp(n, \mathbb{R})$ respectivamente.
2. \mathbb{C}^{\times} es una complexificación de \mathbb{R}^{\times} ; también es una complexificación de \mathbb{T} . Las álgebras de Lie de estos dos grupos reales son \mathbb{R} e $i\mathbb{R}$ respectivamente, como subespacios reales de \mathbb{C} .

3. El álgebra de Lie de $U(n)$ es $\mathfrak{u}(n) := \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} : X^* = -X\}$; entonces $i\mathfrak{u}(n) := \{Y \in \mathbb{C}^{n \times n} : Y^* = Y\}$, y $\mathfrak{u}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} := \mathfrak{u}(n) \oplus i\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Luego $GL(n, \mathbb{C})$ es una complexificación del grupo compacto $U(n)$.
4. De modo similar, los grupos $SL(n, \mathbb{C})$ y $Sp(n, \mathbb{C})$ son complexificaciones de los grupos compactos $SU(n)$ y $Sp(n)$ respectivamente.
5. Si G es un grupo de Lie compacto, entonces $U(N)$ contiene un subgrupo isomorfo a G si $N \in \mathbb{N}$ es suficientemente grande; podemos suponer entonces que $G \subset U(N)$. Si G es conexo, podemos tomar $G^{\mathbb{C}} := \exp(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$, donde \exp denota la exponencial matricial en $\mathbb{C}^{N \times N}$. Se puede mostrar que cualquier otra complexificación del grupo compacto conexo G es isomorfo a $G^{\mathbb{C}}$, y así podemos hablar de “la” complexificación de G .

1.6. Grupos infinitodimensionales

1.32. Las consideraciones anteriores se aplican, sobre todo, al caso de un grupo de Lie de *dimensión finita*. Buena parte de la teoría es aplicable a grupos de *dimensión infinita* también. En el caso infinitodimensional, falta precisar el concepto de “variedad diferencial” y “función suave”. Lo que hay que aclarar es la noción de diferenciabilidad de una función $f: U \rightarrow F$, donde $U \subset E$ es abierto y donde E y F son espacios vectoriales reales, de *dimensión posiblemente infinita*. Si la derivada direccional $D_v f$ se define como $D_v f(x) := \lim_{h \rightarrow 0} (f(x + hv) - f(x))/h$, decimos que f es *diferenciable* en U si $(x, v) \mapsto D_v f(x)$ existe y es continua como función de $U \times E$ en F . Esta condición de continuidad conjunta (que es bastante exigente en espacios infinitodimensionales) permite desarrollar el cálculo diferencial usual con su regla de cadena, etc. [26].

La existencia de una teoría adecuada de variedades diferenciales infinitodimensionales nos permite considerar grupos de Lie G cuyas álgebras de Lie $T_e G$ son espacios vectoriales infinitodimensionales. Cabe notar, sin embargo, que ahora el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias no está disponible, y la existencia de la aplicación exponencial está en entredicho. Esta circunstancia nos obliga a buscar ejemplos cuya aplicación exponencial existe de antemano.

1.33. Si G es un grupo de Lie finitodimensional, el *grupo de lazos* LG es $\{\gamma: \mathbb{S}^1 \rightarrow G \text{ suave}\}$, donde \mathbb{S}^1 es el círculo \mathbb{T} considerado como variedad (olvidando su estructura de grupo). El producto de LG es “composición puntual”: $(\gamma_1 \gamma_2)(\theta) := \gamma_1(\theta) \gamma_2(\theta)$. La identidad es evidentemente el lazo *constante* $\epsilon(\theta) \equiv e$. El álgebra de Lie de LG es $L\mathfrak{g} := \{\xi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathfrak{g} \text{ suave}\}$, que es un espacio vectorial infinitodimensional. Con la topología de convergencia uniforme de ξ y de sus derivadas $d^m \xi / d\theta^m$, $L\mathfrak{g}$ es un espacio de Fréchet [38]. La aplicación exponencial es (por definición) la exponencial “puntual”, es decir, $(\exp \xi)(\theta) := \exp(\xi(\theta))$. Definimos

la topología de LG al declarar (a) que cada traslación $\gamma \mapsto \gamma_1\gamma$ sea un homeomorfismo (y de hecho, será un difeomorfismo); (b) que un sistema de vecindades básicas de e es formado por los $V_U := \{ \xi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \exp(U) \}$, donde $U \subset \mathfrak{g}$ es una vecindad abierta de 0 tal que $\exp: U \rightarrow \exp(U) \subset G$ sea una biyección. Con esta topología, la aplicación $\exp: L\mathfrak{g} \rightarrow LG$ es automáticamente continua.

El estudio detallado de grupos de lazos es una herramienta poderosa para investigar sistemas físicos con un número infinito de grados de libertad; y también establece conexiones sorprendentes entre varios aspectos de análisis y topología. Remitimos a la monografía [37] para una introducción a este tema de actualidad. Aquí nos limitaremos a grupos de simetría finitodimensionales: pero los métodos aquí reseñados pueden explotarse con provecho en algunos casos más complejos.

2. Espacios de Hilbert y Representaciones de Grupos

¡Caballeros! Aún queda mucho lugar en el espacio de Hilbert!

—S. MacLane

2.1. Operadores sobre espacios de Hilbert

2.1. Definición. Un **espacio de Hilbert** \mathcal{H} es un espacio vectorial complejo con un producto interno $(x, y) \mapsto \langle x | y \rangle$, que es completo respecto de la norma inducida. Adoptamos el convenio de que $\langle x | y \rangle$ es *antilineal en x y lineal en y* ; la norma es $\|x\| := \sqrt{\langle x | x \rangle}$. Siempre asumiremos que \mathcal{H} es *separable* en la topología de la norma (posee un conjunto numerable denso), o equivalentemente, que \mathcal{H} posee una base ortonormal numerable.

2.2. Recordemos las propiedades principales de los espacios de Hilbert. Si $\{e_k : k \in J\}$ es una base ortonormal de \mathcal{H} , donde el conjunto índice J es \mathbb{N} , \mathbb{Z} ó $\{1, \dots, N\}$ según el caso, tenemos la *igualdad de Parseval*:

$$\|x\|^2 = \sum_{k \in J} |\langle e_k | x \rangle|^2,$$

lo cual permite desarrollar $x \in \mathcal{H}$ en una “serie de Parseval”:

$$x = \sum_{k \in J} \langle e_k | x \rangle e_k$$

(donde esta última serie converge en la norma de \mathcal{H} .) Luego, una correspondencia $e_k \mapsto e'_k$ entre bases ortonormales de dos espacios de Hilbert \mathcal{H} y \mathcal{H}' (que poseen bases ortonormales de la misma cardinalidad) se extiende por linealidad y continuidad a un *operador unitario* (es decir, una isometría sobreyectiva) $U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$. (Un operador $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ es una isometría si $\langle Vx | Vy \rangle = \langle x | y \rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$.)

Si $M \leq \mathcal{H}$ es un subespacio cerrado, su *complemento ortogonal*

$$M^\perp := \{y \in \mathcal{H} : \langle y | x \rangle = 0, \text{ para todo } x \in M\}$$

es un subespacio cerrado con $M^\perp \cap M = \{0\}$. Además $\mathcal{H} \cong M \oplus M^\perp$, donde el lado derecho es la “suma directa de espacios de Hilbert”; esto significa que cada vector en \mathcal{H} se expresa de manera única como $x + y$, con $x \in M$ y $y \in M^\perp$, y que además vale $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Si se define $P_M: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ por $P_M(x + y) := x$, entonces P_M es el *proyector ortogonal* con rango M .

2.3. Un operador lineal $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ es *acotado* si hay $M \geq 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$. El menor M posible es la *norma* del operador T , denotado por:

$$\|T\| := \inf\{M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in \mathcal{H}\} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}. \quad (2.1)$$

La condición $\|T\| < \infty$ es equivalente a la continuidad del operador lineal T ; denotamos por $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ el espacio normado (pues $T \mapsto \|T\|$ es de hecho una norma) de operadores acotados. $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un espacio de Banach, es decir, es completo en la norma (2.1), es un álgebra bajo composición de aplicaciones lineales, y satisface

$$\|ST\| \leq \|S\| \|T\| \quad \text{para todo } S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Además $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ posee una involución $T \mapsto T^*$, determinado por

$$\langle T^*y | x \rangle := \langle y | Tx \rangle,$$

que es una *involución isométrica*: $(\alpha T + \beta S)^* = \bar{\alpha}T^* + \bar{\beta}S^*$ si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $(T^*)^* = T$, $(TS)^* = S^*T^*$ y $\|T^*\| = \|T\|$. Resumimos todas estas propiedades algebraicas al decir que $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un *álgebra de Banach involutiva*.

El operador T^* se llama el *adjunto* de T . Obsérvese que su existencia se debe al *teorema de Riesz*, que dice que cada forma lineal y continua sobre \mathcal{H} es $x \mapsto \langle z | x \rangle$ para algún $z \in \mathcal{H}$; la continuidad de $x \mapsto \langle y | Tx \rangle$ se debe a la desigualdad de Schwarz: $|\langle y | Tx \rangle| \leq \|y\| \|Tx\| \leq (\|T\| \|y\|) \|x\|$, y la consiguiente continuidad y linealidad de $y \mapsto z$ dice que $z = T^*y$ para cierto elemento T^* de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

De estas consideraciones obtenemos otra fórmula útil para la norma de un operador:

$$\|T\| = \sup\{|\langle y, Tx \rangle| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}. \quad (2.2)$$

El álgebra de Banach involutiva $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ posee otra propiedad importante:

$$\|T^*T\| = \|T\|^2, \quad \text{para todo } T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad (2.3)$$

como consecuencia inmediata de (2.2). Un álgebra de Banach involutiva que cumple (2.3) se llama una “ C^* -álgebra”.

2.4. Llamamos la atención sobre tres clases especiales de operadores en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$:

1. *Operadores unitarios*: $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ con $U^*U = UU^* = I$. Tales U son isométricos (ya que $\langle Uy | Ux \rangle = \langle y | U^*Ux \rangle = \langle y | x \rangle$ en general) e invertibles, con $U^{-1} = U^*$. Los operadores unitarios forman un grupo de Lie $\mathcal{U}(\mathcal{H})$, isomorfo a $U(n)$ si $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = n$ e infinitodimensional si $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = \infty$.

2. *Proyectores ortogonales*: $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ con $P^2 = P = P^*$. Si M es un subespacio cerrado, P_M es de esta clase, porque $P^2(x+y) = P(x+0) = x$ si $x \in M$, $y \in M^\perp$, y $\langle P_M^*(x+y) | x'+y' \rangle = \langle x+y | x' \rangle = \langle x | x' \rangle = \langle x+y | P_M(x'+y') \rangle$ si $x, x' \in M$, $y, y' \in M^\perp$. Inversamente, un proyector ortogonal P es de la forma P_M con $M = P\mathcal{H}$.

3. *Operadores positivos*: $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ con $A = B^*B$ para algún $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Obsérvese que $A^* = A$ porque $(B^*B)^* = B^*B^{**} = B^*B$. Se ve que $\langle x | Ax \rangle =$

$\langle x | B^* Bx \rangle = \langle Bx | Bx \rangle = \|Bx\|^2 \geq 0$. Inversamente, A es positivo si y solo si $\langle x | Ax \rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Además, se puede elegir B de manera única tal que $B^2 = A$ y B sea también positiva, en cuyo caso B se llama la *raíz cuadrada positiva* de A , y se escribe $B =: A^{1/2}$.

2.5. Definición. Hay una cuarta clase de operadores de importancia, que son los operadores de la **clase de Hilbert–Schmidt**. Sea $\{e_k : k \in J\}$ una base ortonormal de \mathcal{H} ; se dice que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es de clase de Hilbert–Schmidt, escrito $T \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$, si $\sum_{k \in J} \|Te_k\|^2 < \infty$. No es difícil comprobar que esta definición no depende de la base elegida: si $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{u_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ son dos bases ortonormales de \mathcal{H} , la igualdad de Parseval muestra que las tres series

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|Te_k\|^2, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\langle u_r, Te_k \rangle|^2, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|T^* u_r\|^2,$$

o bien divergen o bien convergen a la misma suma. Se puede verificar que $\|T\|_2 := \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \|Te_k\|^2}$ define una norma tal que $\|T\|_2 = \|T^*\|_2$ y $\|RT\|_2 \leq \|R\| \|T\|_2$, $\|TR\|_2 \leq \|T\|_2 \|R\|$ para $T \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$, $R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. De ahí resulta que $\mathcal{L}_2(\mathcal{H})$ es un *ideal* (no cerrado) de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, es decir, si $T \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$ y $R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, entonces $RT, TR \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$ también. Además, $\mathcal{L}_2(\mathcal{H})$ es a su vez un espacio de Hilbert, bajo el producto interno $\langle S | T \rangle := \sum_{k \in J} \langle Se_k | Te_k \rangle$; tenemos $\langle T | T \rangle = \|T\|_2^2 \geq \|T\|$, pero usualmente no hay igualdad.

2.6. Definición. La **traza** de un operador positivo A es

$$\text{Tr } A := \sum_{k \in J} \langle e_k | Ae_k \rangle \in [0, \infty], \quad (2.4)$$

y se dice que A es **trazable** si y solo si $\text{Tr } A < \infty$. Obsérvese que $T \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$ si y solo si T^*T es trazable. La serie (2.4) para $\text{Tr } A$ converge absolutamente, aunque A no sea positivo, toda vez que $(A^*A)^{1/2}$ sea trazable. La *clase de traza* es $\mathcal{L}_1(\mathcal{H}) := \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : \text{Tr}((A^*A)^{1/2}) < \infty\}$, la cual es también un ideal (no cerrado) de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, y resulta que $\mathcal{L}_1(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$; de hecho, $A \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ si y solo si $A = BC$ con $B, C \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$. Se verifica la fórmula $\langle S | T \rangle = \text{Tr}(S^*T)$ para $S, T \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$.

2.7. Un *operador de rango uno* sobre \mathcal{H} es de la forma $z \mapsto \langle y | z \rangle x$ para un par de vectores $x, y \in \mathcal{H}$ (como consecuencia del teorema de Riesz). Denotaremos este operador por $|x\rangle\langle y|$. Obsérvese que $|x\rangle\langle y|^* = |y\rangle\langle x|$ y que $\text{Tr}[|x\rangle\langle y|] = \langle y | x \rangle$. Si $\|x\| = 1$, entonces $|x\rangle\langle x|$ es un proyectador ortogonal.

2.2. Ejemplos de espacios de Hilbert

2.8. Los ejemplos más cotizados de espacios de Hilbert son espacios de funciones. Destaca el ejemplo

$$L^2(\mathbb{R}^n) := \{ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \text{ medible} : \|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 d^n x < \infty \},$$

donde $d^n x$ denota la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n . En general, si μ es una medida (boreliana, regular) sobre un espacio localmente compacto X , entonces $L^2(X, d\mu)$ denota el espacio de Hilbert de funciones de cuadrado integrable sobre X . El producto interno de dos elementos de $L^2(X, d\mu)$ es

$$\langle f | g \rangle := \int_X \overline{f(x)} g(x) d\mu(x).$$

Otros dos ejemplos importantes son $L^2(\mathbb{S}^1, \frac{1}{2\pi} d\theta)$ y $L^2(\mathbb{S}^2, \frac{1}{4\pi} \text{sen } \theta d\theta d\phi)$.

2.9. Otra clase de ejemplos aparece cuando X es una variedad compleja y \mathcal{H} es un subespacio de $L^2(X, d\mu)$ que consta de funciones holomorfas sobre X . El ejemplo mejor conocido es el llamado *espacio de Bargmann* [4], que es el subespacio $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ de $L^2(\mathbb{C}^n, d\mu(z))$, cuyos elementos son funciones holomorfas enteras $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\| := \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 d\mu(z) := \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} dz < \infty.$$

(Aquí $dz := dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_n$ denota la medida de Lebesgue sobre \mathbb{C}^n). La medida $d\mu(z) := \pi^{-n} e^{-|z|^2} dz$ se llama la *medida gaussiana* (normalizada) sobre \mathbb{C}^n . La constante π^{-n} garantiza que $\int_{\mathbb{C}^n} 1 d\mu(z) = 1$. Se puede comprobar que sus funciones enteras forman un subespacio *cerrado* de $L^2(\mathbb{C}^n, d\mu)$, así que $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ es un espacio de Hilbert.

2.10. Hay que conocer *bases ortonormales* específicas de estos espacios de Hilbert de funciones. Si $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, la base ortonormal más manejable es dado por las *funciones de Hermite*:

$$h_n(t) := 2^{n/2} \pi^{1/4} \sqrt{n!} H_n(t) e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad H_n(t) := (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2}).$$

Aquí H_n es el *polinomio de Hermite* de grado n . Vale la pena notar que los H_n (y también los h_n) son funciones pares o impares según n sea par o impar, lo cual es evidente de la dependencia de las fórmulas de t^2 y de las propiedades elementales de la derivada. Luego $h_n(-t) = (-1)^n h_n(t)$. Las funciones de Hermite poseen la propiedad importante de ser autofunciones de la transformación de Fourier:

$$\mathcal{F}h(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} h(t) dt,$$

ya que

$$\mathcal{F}h_n = i^n h_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Se sabe que \mathcal{F} es un operador unitario en $L^2(\mathbb{R})$ (teorema de Plancherel), y que $\mathcal{F}^4 = I$ en $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$. Luego (2.5) muestra que sus cuatro autovalores $1, i, -1, -i$ tienen multiplicidad infinita.

2.11. Una base ortonormal de $L^2(\mathbb{S}^1)$ (con la medida de Lebesgue normalizada $d\theta/2\pi$) es dado por las funciones exponenciales $e_n(\theta) := e^{in\theta}$ para $n \in \mathbb{Z}$. El desarrollo de Parseval $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle e_n | f \rangle e_n$ es en este caso la *serie de Fourier* de f . (La igualdad de Parseval garantiza que la serie de Fourier de una función en $L^2(\mathbb{S}^1)$ converge a dicha función en medio cuadrado, pero no asegura nada acerca de la convergencia puntual. Sin embargo, hay un teorema de Carleson que afirma que la serie de Fourier de una función de cuadrado integrable converge a esa función casi por doquier.)

2.12. Una base ortonormal de $L^2(\mathbb{S}^2)$ (con la medida $\sin\theta d\theta d\phi/4\pi$) es dado por los **armónicos esféricos**

$$Y_{lm}(\theta, \phi) := (-i)^m \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{-im\phi},$$

donde P_l^m es la *función asociada de Legendre*:

$$P_l^m(x) := \frac{(-1)^{l+m}}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (1-x^2)^l.$$

(Fíjese que $P_l^m(\cos\theta)$ es un polinomio en $\cos\theta$ y $\sin\theta$.) Aquí el rango de los índices es $l \in \mathbb{N}$ y $m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}$. Es $Y_{00} = 1$ (función constante sobre \mathbb{S}^2). Además $Y_{l0}(\theta, \phi) = P_l(\cos\theta)$, donde

$$P_l(x) := \frac{(-1)^l}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (1-x^2)^l$$

es el **polinomio de Legendre** de grado l . Los Y_{l0} son las llamadas “funciones esféricas zonales” sobre \mathbb{S}^2 .

2.13. Para $\mathcal{F}(\mathbb{C})$, una base ortonormal consta de los “monomios” $\{z^k/\sqrt{k!} : k \in \mathbb{N}\}$. En $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$, los $z^k/\sqrt{k!}$ también forman una base ortonormal, donde los k son “multiíndices” en \mathbb{N}^n , con $z^k := z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n}$ y $k! := k_1! k_2! \dots k_n!$.

2.14. Un ejemplo parecido es $\mathcal{H} = \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, el espacio de funciones holomorfas en el disco $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ con $\|f\|^2 := \pi^{-1} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 d\Re(z) d\Im(z) < \infty$. Aquí una base ortonormal es dado por los monomios $\{z^k/\sqrt{k+1} : k \in \mathbb{N}\}$.

2.3. Núcleos reproductores

2.15. Definición. Un concepto importante en la teoría de espacios de Hilbert es el de un **núcleo reproductor**. Si $\mathcal{H} \leq L^2(X, d\mu)$ posee una base ortonormal de funciones $\{e_k\}_{k \in J}$, defínase la serie formal

$$I(x, y) := \sum_{k \in J} e_k(x) \overline{e_k(y)}. \quad (2.6)$$

Se puede mostrar que el lado derecho no depende de la base ortonormal elegida, y tenemos, para $f \in \mathcal{H}$:

$$\int_X I(x, y) f(y) d\mu(y) = \sum_{k \in J} e_k(x) \langle e_k, f \rangle = f(x). \quad (2.7)$$

Las últimas fórmulas deben tomarse *cum grano salis* en general, porque la convergencia de la serie de Parseval debe entenderse como convergencia en media cuadrática, mientras que la convergencia indicada en (2.6) es la convergencia puntual (o casi por doquier) de funciones. Sin embargo, hay varios casos en donde estos dos tipos de convergencia son compatibles; por ejemplo, cuando \mathcal{H} es finitodimensional o cuando consta de funciones holomorfas.

Para el caso $\mathcal{H} = \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$, una aplicación de la desigualdad de Schwarz a la serie de Taylor de $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ muestra que

$$|f(z)| \leq e^{\frac{1}{2}|z|^2} \|f\| \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Por ende, $f \mapsto f(w)$ es una forma lineal continua sobre $\mathcal{F}(\mathbb{C})$, y (por el teorema de Riesz) hay un elemento $e_w \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ tal que $f(w) = \langle e_w, f \rangle$ para cada $w \in \mathbb{C}$. Ahora tenemos

$$I(z, w) := \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{k!} z^k \bar{w}^k = e^{z\bar{w}}, \quad \text{para todo } z, w \in \mathbb{C}^n.$$

Esta función es holomorfa en z y antiholomorfa en w . Tenemos entonces que

$$\frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{C}^n} e^{z\bar{w}} f(w) e^{-|w|^2} dw = f(z) \quad \text{para todo } f \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^n),$$

lo cual es un cálculo directo para $f(z) = z^m$; el caso general puede obtenerse (con cierto cuidado con intercambios de sumas e integrales) de la serie de Taylor de f . Se ve que $e_w(z) := e^{z\bar{w}}$.

En el caso $\mathcal{H} = \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, obtenemos

$$I(z, w) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} z^k \bar{w}^k = \log(1 - z\bar{w}), \quad \text{para todo } z, w \in \mathbb{D}.$$

Este núcleo reproductor proporciona la fórmula conocida

$$\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} f(w) \log(1 - z\bar{w}) d\Re w d\Im w = f(z).$$

2.16. Cuando $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, la serie (2.6) es $I(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x) h_k(y)$ (no se requiere conjugación compleja pues las funciones de Hermite son reales). Esta serie es divergente, pero es sumable en el sentido distribucional y su suma es la distribución $\delta(x - y)$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ cuyo soporte es la diagonal $y = x$. Esto se ve de la conocida fórmula distribucional:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x - y) f(y) dy = f(x).$$

Concluimos que aun cuando la serie (2.6) es divergente, es útil considerar un núcleo reproductor como una distribución en $X \times X$ que cumple (2.7).

2.4. Representaciones unitarias de grupos de Lie

2.17. Definición. Ahora sea G un grupo de Lie. Una **representación unitaria** de G es un *homomorfismo* $\pi: G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$, donde \mathcal{H} es algún espacio de Hilbert.

Si $\pi_1: G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_1)$, $\pi_2: G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_2)$ son dos representaciones de G , se dice que un operador (lineal, continuo) $A: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ **entrelaza** π_1 y π_2 si

$$A\pi_1(g) = \pi_2(g)A, \quad \text{para todo } g \in G. \quad (2.8)$$

Se dice que π_1 y π_2 son **equivalentes**, escrito $\pi_1 \sim \pi_2$, si existe un operador invertible que los entrelaza, y que son **unitariamente equivalentes** si hay un operador unitario que los entrelaza. Sucede que dos representaciones unitarias equivalentes son de hecho unitariamente equivalentes (si A es un operador entrelazante invertible, el operador $U := A(A^*A)^{-1/2}$ es un operador unitario entrelazante). En este caso, hay un isomorfismo unitario $U: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ tal que

$$U\pi_1(g)U^{-1} = \pi_2(g), \quad \text{para todo } g \in G. \quad (2.9)$$

Si $\pi_1 = \pi_2$ y si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ cumple (2.8), decimos que A **conmuta** con la representación π_1 .

La *dimensión* de una representación $\pi: G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ es $d(\pi) := \dim \mathcal{H}$; es obvio que $d(\pi_1) = d(\pi_2)$ cuando π_1, π_2 son equivalentes, porque un isomorfismo unitario $U: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ lleva una base ortonormal de \mathcal{H}_1 en una base ortonormal de \mathcal{H}_2 .

2.18. Definición. Sea G un grupo de Lie, $\pi: G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ una representación unitaria. Un **subespacio invariante** para π es un subespacio *cerrado* \mathcal{K} de \mathcal{H}

tal que $\pi(g)\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ para todo $g \in G$. Como cada $\pi(g)$ es unitario, tenemos $\pi(g^{-1}) = \pi(g)^{-1} = \pi(g)^*$, la restricción $g \mapsto \pi(g) \upharpoonright \mathcal{K}$ es una representación de G sobre \mathcal{K} , es decir, una *subrepresentación* de π . También,

$$\langle \pi(g)y \mid x \rangle = \langle y \mid \pi(g)^*x \rangle = \langle y \mid \pi(g^{-1})x \rangle = 0 \quad \text{si } x \in \mathcal{K}, y \in \mathcal{K}^\perp,$$

así que $\pi(g)\mathcal{K}^\perp \subset \mathcal{K}^\perp$: tenemos $\pi = (\pi \upharpoonright \mathcal{K}) \oplus (\pi \upharpoonright \mathcal{K}^\perp)$. Si $\{0\} \neq \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, decimos que π es *reducible*. Por el contrario, si los únicos subespacios invariantes de π son los subespacios triviales $\{0\}$ y \mathcal{H} , decimos que π es **irreducible**.

2.19. Lema de Schur. Sean π_1, π_2 dos representaciones unitarias irreducibles de un grupo de Lie G , y sea $A: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ un operador que las entrelaza. Si π_1, π_2 son inequivalentes, entonces $A = 0$. Si $\pi_1 \sim \pi_2$, todos los operadores entrelazantes son proporcionales. Si $\pi_1 = \pi_2$, entonces $A = \lambda I$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demostración: Consideramos los subespacios cerrados $\ker A \subset \mathcal{H}_1$, $\overline{A\mathcal{H}_1} \subset \mathcal{H}_2$. Si $Ax = 0$, entonces $A\pi_1(g)x = \pi_2(g)Ax = 0$, así que $\ker A$ es un subespacio invariante de \mathcal{H}_1 . Además, $\pi_2(g)(Az) = A(\pi_2(g)z)$ para todo $z \in \mathcal{H}_1$, así que $\overline{A\mathcal{H}_1}$ es un subespacio invariante de \mathcal{H}_2 . Si $\pi_1 \not\sim \pi_2$, A no puede ser invertible, así que o bien $\ker A \neq \{0\}$ o bien $\overline{A\mathcal{H}_1} \neq \mathcal{H}_2$. Luego $\ker A = \mathcal{H}_1$ o bien $\overline{A\mathcal{H}_1} = \{0\}$; en ambos casos, $A = 0$.

Si $\pi_1 \sim \pi_2$, entonces hay $U: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ tal que vale (2.9). Debemos mostrar que cualquier A que cumple (2.8) es de la forma $A = \lambda U$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, o lo que es lo mismo, que $AU^{-1} = \lambda I$. Para ese efecto, podemos entonces suponer que $\pi_1 = \pi_2$ y que $U = I$.

Supongamos primero que A posee un autovalor $\mu \in \mathbb{C}$. Entonces $\ker(A - \mu I)$ es un subespacio no cero, y es invariante porque

$$Ax = \mu x \implies A\pi_1(g)x = \pi_1(g)Ax = \mu\pi_1(g)x.$$

Luego $\ker(A - \mu I) = \mathcal{H}_1$, así que $A = \mu I$.

Ahora $A\pi_1(g) = \pi_1(g)A \implies \pi_1(g^{-1})A^* = A^*\pi_1(g^{-1})$ al tomar adjuntos, así que A^* conmuta con π_1 también. Luego $A = A_1 + iA_2$ donde $A_1 := (A^* + A)/2$, $A_2 := (A^* - A)/2i$ son autoadjuntos y conmutan con π_1 . Basta entonces suponer que A es autoadjunto. Ahora, si $\dim \mathcal{H}_1$ es finito, cada operador autoadjunto posee un autovalor, y hemos terminado. Si $\dim \mathcal{H} = \infty$, $A^* = A$, entonces —por el teorema espectral— tenemos $A = \int_{\mathbb{R}} t dE_A(t)$, y las proyectores espectrales $P_a^b := \int_a^b dE_A(t)$ son proyectores ortogonales que conmutan con cualquier operador que conmuta con A (en particular, con cada $\pi_1(g)$); luego cada $P_a^b\mathcal{H}_1$ es un subespacio invariante, y por ende $P_a^b = 0$ ó I para todo $a \leq b$. Eso solo es posible si hay un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $P_a^b = I$ cuando $a \leq \lambda \leq b$, $P_a^b = 0$ si no; en cuyo caso $A = \lambda I$. \square

2.20. Ejemplo. Si G es un grupo *conmutativo*, cada representación unitaria irreducible es *unidimensional*. Esto es una consecuencia inmediata del lema de Schur, ya que $\pi(g)\pi(h) = \pi(gh) = \pi(hg) = \pi(h)\pi(g)$ para todo $g, h \in G$ implica que $\pi(h) = \lambda(h)I$ para todo $h \in G$; si $x \neq 0$ en \mathcal{H} , entonces el subespacio unidimensional $\mathbb{C}x$ es invariante, así que $\mathbb{C}x = \mathcal{H}$.

2.21. Ejemplo. Tome $G = SU(2)$. Hay una representación unitaria irreducible obvia, la “autorepresentación” sobre \mathbb{C}^2 dado por la inclusión $SU(2) \hookrightarrow U(2) = \mathcal{U}(\mathbb{C}^2)$. También hay una representación trivial $g \mapsto 1 \in \mathbb{T} = \mathcal{U}(\mathbb{C})$. Se obtienen otras representaciones finitodimensionales como sigue. Tome $j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}$ (es decir, $2j \in \mathbb{N}$) y sea \mathcal{H}_j el espacio vectorial de dimensión $2j + 1$ de polinomios homogéneos de grado $2j$ en dos variables complejas:

$$\mathcal{H}_j := \left\{ \sum_{k=0}^{2j} c_k z_1^k z_2^{2j-k} : c_0, c_1, \dots, c_{2j} \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathbb{C}[z_1, z_2].$$

Dotamos \mathcal{H}_j del producto interno respecto del cual los monomios $z_1^k z_2^{2j-k}$ forman una base ortonormal. La representación unitaria π_j sobre \mathcal{H}_j se define por:

$$\pi_j \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : z_1^k z_2^{2j-k} \mapsto (\alpha z_1 + \beta z_2)^k (-\bar{\beta} z_1 + \bar{\alpha} z_2)^{2j-k}. \quad (2.10)$$

La ecuación $\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1$ implica que los polinomios del lado derecho de (2.10) son ortonormales, y por ende esta representación es unitaria. Se puede comprobar por cálculo directo que los únicos operadores en $\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)$ que conmutan con π_j son los escalares, así que π_j es irreducible. Estas representaciones son inequivalentes, ya que sus dimensiones $d(\pi_j) = 2j + 1$ son distintas. También es posible verificar que cualquier representación unitaria irreducible de $SU(2)$ es de dimensión finita (esto ocurre para cualquier grupo de Lie compacto) y que es equivalente a π_j si su dimensión es $2j + 1$.

2.22. Ejemplo. Tome $G = \mathbb{H}(n)$. Si $g = (a, b; c) \in \mathbb{H}(n)$, el subgrupo $Z = \{(0, 0; c) : c \in \mathbb{R}\}$ es el *centro* de $\mathbb{H}(n)$ y $\mathbb{H}(n)/Z \cong \mathbb{R}^{2n}$. Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, la representación unidimensional $(a, b) \mapsto e^{i(a^t x + b^t y)}$ del grupo aditivo \mathbb{R}^{2n} proporciona una representación unitaria irreducible ρ_{xy} de $\mathbb{H}(n)$ que es unidimensional y es trivial sobre el centro Z :

$$\rho_{xy}(a, b; c) := e^{i(a^t x + b^t y)} \in \mathbb{T}.$$

Hay otra clase de representaciones, no triviales sobre Z , que son infinitodimensionales: tome $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^n)$ y tome $\hbar \neq 0$ en \mathbb{R} . Entonces

$$[\pi_{\hbar}(a, b; c)\psi](x) := e^{i(c - b^t x)/\hbar} \psi(x - a) \quad (2.11)$$

es una representación unitaria irreducible de $\mathbb{H}(n)$ sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$. Las representaciones para distintos valores de \hbar son inequivalentes.

2.23. Ejemplo. El grupo no compacto $SU(1, 1)$ posee varias familias (llamadas “series”) de representaciones unitarias irreducibles. Exhibimos la llamada “serie discreta holomorfa” (también hay una serie discreta antiholomorfa, una serie principal y una serie suplementaria). Tomemos el disco de Poincaré $\mathbb{D} := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$, y para $k \in \{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots\}$ sea $\mathcal{H}_k := L^2(\mathbb{D}, d\lambda_k)$ con $d\lambda_k(\zeta) := ((2k-1)/\pi)(1-|\zeta|^2)^{2k-2} d\Re\zeta d\Im\zeta$. El grupo $SU(1, 1)$ actúa sobre \mathbb{D} por transformaciones de Möbius:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} [\zeta] := \frac{\alpha\zeta + \beta}{\bar{\beta}\zeta + \bar{\alpha}},$$

y entonces

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}^{-1} [\zeta] = \frac{\bar{\alpha}\zeta - \beta}{-\bar{\beta}\zeta + \alpha}.$$

La representación π_k de $SU(1, 1)$ se define por

$$\left[\pi_k \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \psi \right] (\zeta) := (-\bar{\beta}\zeta + \alpha)^{2k} \psi \left(\frac{\bar{\alpha}\zeta - \beta}{-\bar{\beta}\zeta + \alpha} \right). \quad (2.12)$$

2.24. Después de pasar revista a estos ejemplos, cabe preguntar si es posible buscar representaciones de grupos en una forma más sistemática. Aunque no hay (todavía) una vara mágica que produce *todas* las representaciones unitarias irreducibles de cualquier grupo, hay un procedimiento “de inducción” que produce muchas representaciones a partir de otras representaciones iniciales. Si G es un grupo de Lie y H es un subgrupo, y si por cualquier artificio disponemos ya de una representación unitaria irreducible σ de H sobre un determinado espacio de Hilbert \mathcal{H}_σ , es posible obtener una representación asociada ρ de G . Definimos

$$E := G \times_\sigma \mathcal{H}_\sigma := \{ [g, v] : g \in G, v \in \mathcal{H}_\sigma \}$$

donde $[g, v]$ denota la clase de (g, v) bajo la relación de equivalencia dada por la regla: $(gh, v) \sim (g, \sigma(h)^{-1}v)$ para $h \in H$.

La correspondencia $\eta: [g, v] \mapsto gH$ es una proyección de E en G/H , con $\eta^{-1}(gH) = \{ [g, v] : v \in \mathcal{H}_\sigma \} \cong \mathcal{H}_\sigma$. Tenemos entonces un *fibrado vectorial* $E \xrightarrow{\eta} G/H$, con fibra típica \mathcal{H}_σ . El subgrupo H actúa a la derecha sobre las fibras por $[g, v] \cdot h := [gh, v] = [g, \sigma(h^{-1})v]$. El grupo G actúa a la izquierda sobre el espacio total E por $g \cdot [g', v] := [gg', v]$, lo cual es compatible con la acción $g'H \mapsto gg'H$ de G sobre G/H .

Sea \mathcal{K} el espacio de secciones de cuadrado integrable del fibrado vectorial $E \xrightarrow{\eta} G/H$. Una *sección* es una función (boreliana) $s: G/H \rightarrow E$ tal que

$\eta \circ s = \text{Id}_{G/H}$; es decir, $s(gH) := [g, f(g)]$ donde $f: G \rightarrow \mathcal{H}_\sigma$ es una aplicación que cumple la condición de compatibilidad $f(gh) = \sigma(h^{-1})f(g)$ para $g \in G$, $h \in H$. Si G/H posee una medida μ tal que $d\mu(gg'H) = d\mu(g'H)$ para todo $g \in G$ (lo cual no ocurre siempre, pero es frecuente en los ejemplos de interés), entonces la cantidad $\|f(g)\|^2 = \langle f(g) | f(g) \rangle_{\mathcal{H}_\sigma}$ depende solamente de la clase de g en G/H , y $\|f\|^2 := \int_{G/H} \|f(g)\|^2 d\mu(gH)$ define una norma hilbertiana en el espacio de secciones. Ahora la fórmula $[\rho(g)s](g'H) := s(g^{-1}g'H)$, o equivalentemente $[\rho'(g)f](g'H) := f(g^{-1}g'H)$, o equivalentemente define una representación unitaria $\rho: G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{K})$, que es la *representación inducida* a partir de σ .

2.25. Sea $G = H \ltimes K$ un producto semidirecto con H abeliano y normal en G . Las representaciones unitarias irreducibles de H son unidimensionales, $\lambda: H \rightarrow \mathbb{T}$. Resulta que estos “caracteres” λ forman un grupo de Lie “dual” a H , que se denota comunmente por \widehat{H} , con producto $(\lambda_1 \lambda_2)(h) := \lambda_1(h) \lambda_2(h)$, el cual es también abeliano. Para simplificar un poco, supongamos que $H \cong \mathbb{R}^m$; si H^* es el espacio vectorial dual, cada $\lambda \in \widehat{H}$ es de la forma $h \mapsto e^{i\langle v|h \rangle}$ para algún $v \in H^*$. Tome $v \in H^*$ y $k \in K$; entonces $\langle k \cdot v, h \rangle := \langle v, k^{-1}hk \rangle$ define una acción de K sobre H^* . Sea $L_v := \{k \in K : k \cdot v = v\}$ el subgrupo de isotropía de v ; este es el llamado *grupo chico* de v . Se puede inducir una representación ρ de G a partir de una representación σ de L_v , y si σ es irreducible, también lo es ρ , toda vez que G cumple la llamada “condición de Mackey”: que H^* posee una parte boreliana que encuentra cada órbita de K en un solo punto. Es un teorema (de Mackey) que todas las representaciones unitarias irreducibles de G se obtienen de esta manera.

2.26. Ejemplo. Tomamos $G = E(3) = \mathbb{R}^3 \ltimes SO(3)$, el grupo euclidiano del espacio tridimensional. Se verifica $(0, R^{-1})(x, I)(0, R) = (R^{-1}x, I)$ para $x \in \mathbb{R}^3$, $R \in SO(3)$, así que $\langle v, R^{-1}x \rangle = \langle Rv, x \rangle$ para $v \in (\mathbb{R}^3)^*$; es decir, $SO(3)$ actúa sobre $(\mathbb{R}^3)^*$ por rotaciones $v \mapsto Rv$, como era de esperar. Si $v = (0, 0, 1) \in (\mathbb{R}^3)^*$, tenemos $L_v = \{R \in SO(3) : Rv = v\} \cong SO(2) \cong \mathbb{T}$. Las representaciones del grupo abeliano $SO(2)$ son los caracteres

$$\sigma_n : R_\psi \equiv \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \mapsto e^{in\psi} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Entonces $v\sigma_n : (x, R_\psi) \mapsto e^{iv \cdot x} e^{in\psi}$ es una representación de $\mathbb{R}^3 \ltimes SO(2)$. (Aquí encajamos $SO(2) \subset SO(3)$ de la manera usual.) Ahora, $E(3)/\mathbb{R}^3 \ltimes SO(2) \approx SO(3)/SO(2) \approx \mathbb{S}^2$, la esfera unitaria en \mathbb{R}^3 .

Una sección de $E \rightarrow \mathbb{S}^2$ es descrita por una función $\tilde{f}: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, o bien por $f: E(3) \rightarrow \mathbb{C}$ que satisface $f((x, R)(y, R_\psi)) = v\sigma_n(-R_\psi^{-1}y, R_\psi^{-1})f((x, R))$. Sea $A: \mathbb{S}^2 \rightarrow SO(3)$ una función que asocia una rotación $A_{\theta\phi}$ a cada punto (θ, ϕ) de la esfera (es decir, una sección de $SO(3) \rightarrow \mathbb{S}^2$). Coloque $\tilde{f}(\theta, \phi) := f((0, A_{\theta\phi}))$.

Si $g = (x, R) \in E(3)$, podemos escribir $g = (x, I)(0, R)$; para $g = (x, I)$, obtenemos

$$\begin{aligned} [\rho(g)\tilde{f}](\theta, \phi) &= f((x, I)^{-1}(0, A_{\theta\phi})) = f((-x, I)(0, A_{\theta\phi})) \\ &= f((-x, A_{\theta\phi})) = f((0, A_{\theta\phi})(-A_{\theta\phi}^{-1}x, I)) \\ &= v\sigma_n(A_{\theta\phi}^{-1}x, I) f((0, A_{\theta\phi})) = \exp(iv \cdot A_{\theta\phi}^{-1}x) \tilde{f}(\theta, \phi) \\ &= \exp(ix \cdot A_{\theta\phi}v) \tilde{f}(\theta, \phi). \end{aligned}$$

Para $g = (0, R)$, podemos escribir $R = A_{\beta\gamma}R_\alpha$ ya que $SO(3)/SO(2) \approx \mathbb{S}^2$. Entonces

$$\begin{aligned} [\rho(g)\tilde{f}](\theta, \phi) &= f((0, A_{\beta\gamma}R_\alpha)^{-1}(0, A_{\theta\phi})) = f((0, R_\alpha^{-1}A_{\beta\gamma}^{-1}A_{\theta\phi})) \\ &= f((0, R^{-1}A_{\theta\phi}RR_\alpha^{-1})) = f((0, A_{R^{-1}(\theta, \phi)}R_\alpha^{-1})) \\ &= f((0, A_{R^{-1}(\theta, \phi)})(0, R_\alpha^{-1})) = v\sigma_n(0, R_\alpha) f((0, A_{R^{-1}(\theta, \phi)})) \\ &= e^{in\alpha} \tilde{f}(R^{-1}(\theta, \phi)), \end{aligned}$$

donde $R^{-1}(\theta, \phi)$ es la imagen de $(\theta, \phi) \in \mathbb{S}^2$ bajo la rotación R^{-1} . Combinando las dos fórmulas, obtenemos

$$[\rho(x, R)\tilde{f}](\theta, \phi) = \exp(in\alpha_R + ix \cdot A_{\theta\phi}v) \tilde{f}(R^{-1}(\theta, \phi)). \quad (2.13)$$

Para terminar la construcción de la representación inducida (2.13), falta explicar la factorización $R = A_{\beta\gamma}R_\alpha$. Sean

$$R_\phi := \begin{pmatrix} \cos \phi & \sen \phi & 0 \\ -\sen \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_\theta := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sen \theta \\ 0 & -\sen \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad A_{\theta\phi} := R_\phi S_\theta.$$

(Como hemos identificado $SO(2)$ con un subgrupo de $SO(3)$, no hay conflicto entre las definiciones de R_ϕ y de R_ψ .) Se puede demostrar que cada rotación en $SO(3)$ tiene la factorización $R = R_\gamma S_\beta R_\alpha$, con $\alpha, \gamma \in (-\pi, \pi]$, $\beta \in [0, \pi]$; estos son los *ángulos de Euler* de $R \in SO(3)$.

3. Formas Simplécticas y sus Grupos de Simetrías

Para penetrar en la geometría simpléctica sin tomar la ruta histórica larga, es más simple usar el método axiomático, que tiene, según Bertrand Russell, muchas ventajas, semejantes a las ventajas del robo sobre el trabajo honesto.

—V. I. Arnol'd

3.1. Formas simplécticas bilineales

3.1. Definición. Si E es un espacio vectorial real, una **forma simpléctica** sobre E es una forma *bilineal* $s: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ que es *alternante*: $s(x, y) = -s(y, x)$, y *no degenerada*, en el sentido de que $s(x, y) = 0$ para todo $y \in E$ solo si $x = 0$.

Si $\dim E < \infty$, esto significa que la matriz de s respecto de una base de E es antisimétrica e invertible. Se puede hallar una base respecto del cual esta matriz es de la forma $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$. De hecho, tome $x_1 \neq 0$, tome y_1 con $s(x_1, y_1) = 1$ (siempre posible porque s es no degenerada) y sea $E_1 := \{z \in E : s(x_1, z) = s(y_1, z) = 0\}$. Como $y_1 \notin E$ ya que $s(x_1, y_1) = 1$ y $x_1 \notin E$ ya que $s(y_1, x_1) = -1$, se ve que $E = \mathbb{R}x_1 \oplus \mathbb{R}y_1 \oplus E_1$ (suma directa de espacios vectoriales reales). Si $s_1 := s \upharpoonright E_1$ denota la restricción de s al subespacio E_1 , entonces s_1 es una forma simpléctica sobre E_1 . Si $E_1 \neq \{0\}$, tome $x_2 \neq 0$ en E_1 , tome $y_2 \in E_1$ con $s(x_2, y_2) = 1$ y sea $E_2 := \{z \in E_1 : s(x_2, z) = s(y_2, z) = 0\}$. Tomando $s_2 := s_1 \upharpoonright E_2$, y repitiendo este argumento n veces, se llega a (E_n, s_n) donde $\dim E_n = 1$ ó 0 . El caso $\dim E_n = 1$ queda excluido porque habría $x_n \in E_n \setminus \{0\}$ con $s(x_n, x_n) = 0$, que contradice la no degeneración de s_n . Por lo tanto, $\dim E$ es *necesariamente par* y la base vectorial $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$ así construida se llama una *base simpléctica* de E .

Si $z \in E$, es

$$z = q^1 x_1 + \dots + q^n x_n + p_1 y_1 + \dots + p_n y_n$$

para algunas *coordenadas canónicas* $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$. Obsérvese que las funciones coordenadas $z \mapsto q^j$, $z \mapsto p_k$ son lineales, y por ende pertenecen al *espacio vectorial dual* E^* de formas \mathbb{R} -lineales sobre E . De hecho, estas funciones lineales $\{q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n\}$ forman la *base dual* en E^* a la base $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$ de E .

3.2. Si $F \leq E$ es un subespacio vectorial, el *ortogonal simpléctico* de F es el subespacio $F^\perp := \{y \in E : s(x, y) = 0, \forall x \in F\}$. Un subespacio F es **isotrópico** si $F \leq F^\perp$. Un subespacio **lagrangiano** de E es un subespacio

isotrópico maximal, es decir, un subespacio L de E que cumple $L = L^\perp$. (Ejemplo: $L := \text{lin}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$). No es difícil ver que $\dim L = \frac{1}{2} \dim E$ si L es un subespacio lagrangiano.

3.3. [La condición de que s sea no degenerada es que la aplicación $\hat{s}: E \rightarrow E^*$ dada por $\hat{s}(x): y \mapsto s(x, y)$ es *inyectiva*: $\hat{s}(x) = 0 \implies x = 0$. (Si $\dim E < \infty$, un conteo de dimensiones muestra que \hat{s} es sobreyectiva también.) En general, la *transpuesta* de \hat{s} es $\hat{s}^t: E \rightarrow E^*$, dada por

$$\hat{s}^t(x)y := \hat{s}(y)x := s(y, x) = -s(x, y) = -\hat{s}(x)y,$$

así que $\hat{s}^t = -\hat{s}$ es también inyectiva. Esto implica que \hat{s} tiene rango denso en E , respecto de alguna topología apropiada sobre E para la cual s es (separadamente) continua de $E \times E$ en \mathbb{R} ; pero no garantiza que \hat{s} sea sobreyectiva, si E es infinitodimensional. Se dice que s es *fuertemente no degenerada* si $\hat{s}: E \rightarrow E^*$ es un isomorfismo (algebraico y topológico). En adelante, entendremos “no degenerado” es este sentido fuerte.]

3.2. Variedades simplécticas

3.4. Ahora sea M una *variedad diferencial* de dimensión finita. Usaremos la notación $\Omega^k(M)$ para denotar la totalidad de formas diferenciales (suaves) de grado k sobre M . Recordemos que $\mathfrak{X}(M)$ denota la totalidad de campos vectoriales (suaves) sobre M . Un elemento de $\Omega^k(M)$ es una función k -lineal alternante sobre $\mathfrak{X}(M)$:

$$\alpha(X_1, \dots, X_k) \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \Omega^k(M), \quad X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M).$$

Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha \in \Omega^k(M)$, la *contracción* o “producto interior” de X y α es el elemento $i(X)\alpha$ de $\Omega^{k-1}(M)$ dado por:

$$i(X)\alpha(X_1, \dots, X_{k-1}) := \alpha(X, X_1, \dots, X_{k-1}).$$

3.5. Ahora sea M una variedad diferencial de dimensión par $2n$. Una **forma simpléctica** sobre M es una *2-forma cerrada no degenerada* sobre M : $\omega \in \Omega^2(M)$ y $d\omega = 0$. Si $u \in M$, $\omega_u \in \Lambda^2(T_u^*M)$ es una forma bilineal antisimétrica sobre T_uM ; la no degeneración de ω es la afirmación de que cada $\hat{\omega}_u(X_u): Y_u \mapsto \omega_u(X_u, Y_u)$ es una biyección lineal de T_uM en T_u^*M . Ahora, se ve que $\hat{\omega}(X_u) = (i(X)\omega)_u$ al examinar las definiciones de ambos lados. Entonces la no degeneración de ω es también la afirmación de que la transformación $X \mapsto i(X)\omega$ es un isomorfismo de $\mathfrak{X}(M)$ en $\Omega^1(M)$.

El par (M, ω) se llama una **variedad simpléctica**.

3.6. Definición. Un **campo vectorial** $X \in \mathfrak{X}(M)$ es **hamiltoniano** (respecto de una forma simpléctica ω sobre M) si $i(X)\omega$ es una 1-forma *exacta*, es decir, si existe $f \in C^\infty(M)$ con $i(X)\omega = df$. En tal caso,

$$\omega(X, Y) = i(X)\omega(Y) = df(Y) = Yf.$$

Como $df_1 = df_2$ implica que $f_1 - f_2$ es constante en cada componente conexo de M , f es único hasta sumar un elemento de $H^0(M)$. (Si M es conexo, f es único hasta sumar una función constante.)

Si $i(X)\omega$ es una 1-forma *cerrada*, aunque no necesariamente exacta, se dice que X es un campo *localmente hamiltoniano*.

3.7. Ejemplo. Sea $M = \mathbb{R}^{2n}$; identificamos los espacios tangentes $T_u M$ a \mathbb{R}^{2n} en la forma usual. Más precisamente, $T_u \mathbb{R}^{2n} \cong T_0 \mathbb{R}^{2n}$ mediante la aplicación tangente a la traslación $v \mapsto v - u$ de \mathbb{R}^{2n} , e identificamos $T_0 \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{R}^{2n}$ de modo convencional. Si ω es una 2-forma tal que $u \mapsto \omega_u$ sea *constante* luego de estas identificaciones (y por ende $d\omega = 0$), ω es determinada por la forma bilineal antisimétrica $s := \omega_0$; respecto de una base simpléctica de \mathbb{R}^{2n} para s , obtenemos

$$\omega = \sum_{j=1}^n dq^j \wedge dp_j.$$

Luego $i(\partial/\partial q^j) = dp_j$, $i(\partial/\partial p_j) = -dq^j$, así que $i(X_f)\omega = df$ si y solo si

$$X_f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p_j}. \quad (3.1)$$

3.8. Para una variedad simpléctica (M, ω) de dimensión $2n$, la condición $d\omega = 0$ permite hallar un *atlas de cartas locales*, y coordenadas $\{q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n\}$ en cada carta, tales que $\omega = \sum_{j=1}^n dq^j \wedge dp_j$ localmente. Este hecho se llama el *teorema de Darboux* [1].

3.9. Ejemplo. La esfera \mathbb{S}^2 es una variedad bidimensional orientada, y el elemento de área $\omega = \sin \theta d\theta \wedge d\phi$ (en coordenadas polares) es una 2-forma; $d\omega = 0$ es automático, porque una 3-forma sobre \mathbb{S}^2 es necesariamente cero. Si elegimos $q := \phi$, $p := \cos \theta$, entonces $\omega = dq \wedge dp$ en la carta local obtenida al omitir una meridiana $\phi = \text{constante}$ de \mathbb{S}^2 . La variedad compacta \mathbb{S}^2 está cubierta por dos cartas de este tipo.

3.3. Acciones simplécticas de grupos

3.10. Definición. Sean (M, ω) , (M', ω') dos variedades simplécticas. Un **symplectomorfismo** de (M, ω) en (M', ω') es un difeomorfismo $\phi: M \rightarrow M'$ tal que

$\phi^*\omega' = \omega$. Decimos que dos variedades simplécticas son *simplectomorfos* si hay un simplectomorfismo entre ellas. Es obvio que los simplectomorfismos de (M, ω) en sí mismo forman un grupo, que denotaremos por $\text{Simpl}(M, \omega)$. Nos interesan diversos subgrupos de este grupo; estos son los grupos de simetría de (M, ω) .

3.11. Definición. Sea G un grupo de Lie y sea M una variedad diferencial. Una **acción** (suave) de G sobre M es una aplicación suave $\psi: G \times M \rightarrow M$, tal que (i) $\psi(e, u) = u$, (ii) $\psi(g_1, \psi(g_2, u)) = \psi(g_1g_2, u)$ para todo $u \in M$, $g_1, g_2 \in G$. Si denotamos por ψ_g la aplicación $u \mapsto g \cdot u$, tenemos que cada ψ_g es un difeomorfismo de M (ya que $(\psi_g)^{-1} = \psi_{g^{-1}}$) y que $g \mapsto \psi_g$ es un homomorfismo de G en el grupo de difeomorfismos de M . Generalmente escribimos $g \cdot u := \psi(g, u)$, así que las propiedades de acción se escriben:

$$e \cdot u = u; \quad g_1 \cdot (g_2 \cdot u) = (g_1g_2) \cdot u.$$

Si $u \in M$, la **órbita** de u es $G \cdot u := \{g \cdot u : g \in G\} \subset M$, y el **subgrupo de isotropía** de u es $G_u := \{g \in G : g \cdot u = u\} \leq G$. La correspondencia $gG_u \mapsto g \cdot u$ determina un difeomorfismo entre el espacio homogéneo G/G_u y la subvariedad $G \cdot u$ de M .

3.12. Definición. Sea G un grupo de Lie y sea (M, ω) una variedad simpléctica. Una **acción simpléctica** de G sobre (M, ω) es una acción suave ψ de G sobre M tal que $\psi_g^*\omega = \omega$ para todo $g \in G$. En este caso, $g \mapsto \psi_g$ es un homomorfismo de G en $\text{Simpl}(M, \omega)$.

3.13. Ejemplo. El grupo $Sp(n, \mathbb{R})$ actúa por simplectomorfismos *lineales* sobre la variedad simpléctica (\mathbb{R}^{2n}, s) . Se nota que la órbita de $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ es $\{0\}$, porque toda transformación lineal deja fijo el origen. No es difícil comprobar que $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$ es también una órbita de $Sp(n, \mathbb{R})$.

3.14. Ejemplo. El grupo de rotaciones $SO(3)$ actúa sobre la esfera unitaria \mathbb{S}^2 en \mathbb{R}^3 (en la forma usual, por rotaciones) y preserva áreas sobre \mathbb{S}^2 . Si $R \in SO(3)$, y si $\omega = \sin \theta d\theta \wedge d\phi$, tenemos entonces que $R^*\omega = \omega$; esta acción es simpléctica. Este es un ejemplo de una acción *transitiva*: la órbita de un punto $u \in \mathbb{S}^2$ es todo \mathbb{S}^2 .

El subgrupo de isotropía del polo norte $u_0 = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$ se identifica naturalmente con $SO(2)$ (pues cada uno de sus elementos determina una rotación en el plano xy). Por ende tenemos $\mathbb{S}^2 \approx SO(3)/SO(2)$ como espacios homogéneos para el grupo $SO(3)$.

3.4. Las acciones adjunta y coadjunta de un grupo de Lie

3.15. Definición. Sea G un grupo de Lie, \mathfrak{g} su álgebra de Lie. La **acción adjunta** de G sobre \mathfrak{g} es $(g, X) \mapsto \text{Ad}(g)X$ donde $\text{Ad}: G \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ es el homomor-

fismo dado por

$$\text{Ad}(g)X := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(\exp tX)g^{-1}. \quad (3.2)$$

Esta acción es lineal. Cuando G es un grupo de matrices, $G \leq GL(n, \mathbb{K})$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} , si tomamos $\mathfrak{g} \leq \mathbb{K}^{n \times n}$ por identificación de la aplicación $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ con la exponencial matricial, tenemos $g(\exp tX)g^{-1} = \exp(tgXg^{-1})$, así que $\text{Ad}(g)X = gXg^{-1}$ como elementos de $\mathbb{K}^{n \times n}$. Obsérvese que en general el lado derecho de (3.2) es el vector tangente en e a la curva $t \mapsto g(\exp tX)g^{-1}$ en G , y por ende es un elemento de \mathfrak{g} .

Si G es un grupo conmutativo, la acción adjunta es trivial: $\text{Ad}(g)X = X$ para todo $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$.

3.16. Definición. La derivada de $\text{Ad}: G \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ es la “acción adjunta infinitesimal” $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g})$, dado por $\text{ad}(Z)X := \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \text{Ad}(\exp sZ)X$. Tenemos:

$$\begin{aligned} \text{ad}(Z)X &= \left. \frac{d^2}{ds dt} \right|_{s=t=0} (\exp sZ)(\exp tX)(\exp(-sZ)) \\ &= \left. \frac{d^2}{ds dt} \right|_{s=t=0} \exp(sZ + tX + \frac{1}{2}st[Z, X] + \dots) \exp(-sZ) \\ &= \left. \frac{d^2}{ds dt} \right|_{s=t=0} \exp(tX + st[Z, X] + \dots) = [Z, X] \end{aligned}$$

por la fórmula de Campbell–Baker–Hausdorff (1.8) (aquí los puntos suspensivos denotan términos de grado mayor que 1 en s ó t). La identidad de Jacobi dice ahora que $\text{ad}(Z)$ es una *derivación* del álgebra de Lie \mathfrak{g} :

$$\begin{aligned} \text{ad}(Z)[X, Y] &= [Z, [X, Y]] = [[Z, X], Y] + [X, [Z, Y]] \\ &= [\text{ad}(Z)X, Y] + [X, \text{ad}(Z)Y]. \end{aligned}$$

3.17. Definición. Sea G un grupo de Lie, \mathfrak{g} su álgebra de Lie y \mathfrak{g}^* su coálgebra (el espacio vectorial dual de \mathfrak{g}). Escribimos $\langle u, X \rangle := u(X)$ cuando $u \in \mathfrak{g}^*$ y $X \in \mathfrak{g}$; obsérvese que esta forma es bilineal. La **acción coadjunta** de G sobre \mathfrak{g}^* es $(g, u) \mapsto \text{Coad}(g)u$ donde $\text{Coad}: G \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g}^*)$ es el homomorfismo dado por

$$\langle \text{Coad}(g)u, X \rangle := \langle u, \text{Ad}(g^{-1})X \rangle.$$

En otras palabras, $\text{Coad}(g)$ es la aplicación lineal *contragrediente* (transpuesta del inverso) de $\text{Ad}(g)$. En adelante, escribimos $g \cdot u$ como sinónimo de $\text{Coad}(g)u$.

3.18. Ejemplo. Sea $G = SU(2)$. El álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ tiene la base

$$X = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

con $[X, Y] = Z$, $[Y, Z] = X$, $[Z, X] = Y$. Estos elementos de base generan tres subgrupos uniparamétricos de $SU(2)$:

$$\begin{aligned} \exp \alpha X &= \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\alpha & i \sin \frac{1}{2}\alpha \\ i \sin \frac{1}{2}\alpha & \cos \frac{1}{2}\alpha \end{pmatrix}, & \exp \beta Y &= \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\beta & -\sin \frac{1}{2}\beta \\ \sin \frac{1}{2}\beta & \cos \frac{1}{2}\beta \end{pmatrix}, \\ \exp \psi Z &= \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se calcula que $\text{Ad}(\exp \alpha X): X \mapsto X$, $Y \mapsto Y \cos \alpha + Z \sin \alpha$, $Z \mapsto -Y \sin \alpha + Z \cos \alpha$ ya que $\text{Ad}(g)X = gXg^{-1}$ como matrices 2×2 . Sean (x, y, z) coordenadas de $\mathfrak{su}(2)^*$ para la base dual a $\{X, Y, Z\}$. Transponiendo la matriz de $\text{Ad}(\exp(-\alpha X))$, obtenemos

$$\text{Coad}(\exp \alpha X): \begin{cases} x \mapsto x, \\ y \mapsto y \cos \alpha + z \sin \alpha, \\ z \mapsto -y \sin \alpha + z \cos \alpha. \end{cases}$$

Viendo (x, y, z) como coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^3 , se ve que $\text{Coad}(\exp \alpha X)$ ejecuta una *rotación* alrededor del eje x por un ángulo α . Es fácil verificar de la misma forma que $\text{Coad}(\exp \beta Y)$ y $\text{Coad}(\exp \psi Z)$ son rotaciones por ángulos β , ψ alrededor de los ejes y , z respectivamente. Se concluya que $SU(2)$ actúa sobre $\mathfrak{su}(2)^* \cong \mathbb{R}^3$ por rotaciones, y que cada rotación de \mathbb{R}^3 proviene de algún elemento de $SU(2)$. Las *órbitas coadjuntas* de $SU(2)$ son el origen $\{0\}$ y las *esferas* $\{(x, y, z) \in \mathfrak{su}(2)^* : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ para $r > 0$.

3.19. El cálculo explícito de la acción coadjunta de $SU(2)$ pone en evidencia que hay un homomorfismo sobreyectivo de $SU(2)$ en $SO(3)$, que es esencialmente el homomorfismo Coad . Ahora $SU(2)$ es simplemente conexo, porque su variedad diferencial subyacente es la esfera \mathbb{S}^3 , mientras que el grupo fundamental de $SO(3)$ es \mathbb{Z}_2 . El núcleo de $\text{Coad}: SU(2) \rightarrow SO(3)$ consta de los dos matrices escalares $\{\pm I\}$ (que forman el centro del grupo $SU(2)$), así que este homomorfismo es un recubrimiento dos-a-uno de $SO(3)$. De ahí se ve que $SU(2) = \widetilde{SO(3)}$, el grupo recubridor universal de $SO(3)$.

3.20. Ejemplo. Se puede calcular la acción coadjunta de otros grupos por un procedimiento similar. Por ejemplo, consideramos el grupo afín $M(1)$ de matrices 2×2 de la forma $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. La acción adjunta $X \mapsto gXg^{-1}$ sobre $\mathfrak{m}(1)$, cuyos elementos son matrices de la forma $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es fácil de calcular y tiene como órbitas un punto aislado (el origen de $\mathfrak{m}(1)$), dos semirectas, y una familia de rectas.

Por otro lado, el cálculo de la acción coadjunta puede expresarse como $g \cdot (\xi, \eta) = (\xi + b\eta/a, \eta/a)$ en coordenadas apropiadas. De ahí se ve que las órbitas coadjuntas son una familia de puntos $\{(\xi, 0)\}$ y los dos semiplanos $\eta > 0$

y $\eta < 0$. Este ejemplo muestra que en general las acciones adjunta y coadjunta son inequivalentes.

3.21. Ejemplo. Si calculamos la acción coadjunta del grupo euclidiano $E(2)$, usando la base $\{J, P_1, P_2\}$ de $\mathfrak{e}(2)$ de (1.10), con coordenadas correspondientes (j, p_1, p_2) sobre $\mathfrak{e}(2)^*$, obtenemos como órbitas una recta de puntos $\{(j, 0, 0)\}$ y los cilindros $p_1^2 + p_2^2 = C$ (con $C > 0$) centrados en esta recta.

3.22. Ejemplo. La acción coadjunta del grupo $SL(2, \mathbb{R})$ pone en evidencia un esquema más general de cálculo. Usamos la base $\{X, Z, W\}$ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ dado por (1.11). Ahora, se puede verificar que cada elemento de $SL(2, \mathbb{R})$ puede expresarse en la forma $g = (\exp tZ)(\exp sX)(\exp \phi W)$ para algunos $t, s, \phi \in \mathbb{R}$ —estos tres subgrupos uniparamétricos generan el grupo— así que basta determinar las matrices de $\text{Coad}(\exp tZ)$, $\text{Coad}(\exp sX)$, $\text{Coad}(\exp \phi W)$. Se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Coad}(\exp tZ) &: \begin{cases} z \mapsto z, \\ x \mapsto x \cosh t - w \sinh t, \\ w \mapsto w \cosh t - x \sinh t, \end{cases} \\ \text{Coad}(\exp sX) &: \begin{cases} z \mapsto z \cosh s + w \sinh s, \\ x \mapsto x, \\ w \mapsto w \cosh s + z \sinh s, \end{cases} \\ \text{Coad}(\exp \phi W) &: \begin{cases} z \mapsto z \cos \phi + x \sin \phi, \\ x \mapsto x \cos \phi - z \sin \phi, \\ w \mapsto w. \end{cases} \end{aligned}$$

Por inspección, se ve que el polinomio $C := z^2 + x^2 - w^2$ es invariante bajo la acción coadjunta. Cada superficie de nivel $C = \text{constante}$ es una unión de órbitas coadjuntas. Las órbitas entonces resultan ser: el origen de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})^*$, dos semiconos sin vértice (para $C = 0$), hiperboloides de un manto ($C > 0$), y los componentes conexos de hiperboloides de dos mantos ($C < 0$).

3.23. Ejemplo. Las funciones $x^2 + y^2 + z^2$ sobre $\mathfrak{su}(2)^*$ y $z^2 + x^2 - w^2$ sobre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})^*$ son ejemplos de *funciones de Casimir* (en la terminología de Weinstein [50]). Estas son polinomios sobre la coálgebra \mathfrak{g}^* , que corresponden a elementos del *centro* de la llamada álgebra universal del álgebra de Lie \mathfrak{g} (ésta es el álgebra generada por los elementos de \mathfrak{g} sujeto solamente a las relaciones $XY - YX - [X, Y] = 0$). Para $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)^*$ [respectivamente, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})^*$] este centro es generado por el “elemento Casimir” $X^2 + Y^2 + Z^2$ [respectivamente, $Z^2 + X^2 - W^2$]. En general, se espera encontrar un número finito de polinomios de este tipo; como la acción adjunta (extendida a un automorfismo del álgebra universal) deja fijo el centro de dicha álgebra, *las funciones de Casimir son invariantes bajo la acción coadjunta*. Por lo tanto, las superficies de nivel de estas funciones de Casimir son uniones de órbitas coadjuntas. Esta información es suficiente, en muchos casos, para determinar estas órbitas completamente.

3.24. Ejemplo. Las órbitas coadjuntas del grupo euclidiano $E(3) = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ pueden calcularse con el uso de coordenadas (j, p) de $\mathfrak{e}(3)^*$, con $j, p \in \mathbb{R}^3$; la rotación $R \in SO(3)$ actúa por $j \mapsto Rj$, $p \mapsto Rp$, y la traslación $b \in \mathbb{R}^3$ actúa por $j \mapsto j$, $p \mapsto p + b \wedge j$. Las funciones de Casimir son $C_1 := \|j\|^2$, $C_2 := jp$. Las órbitas que corresponden a $C_1 > 0$ son simplectomorfas al fibrado cotangente $T^*\mathbb{S}^2$ de la esfera, y las que corresponden a $C_1 = 0$ son esferas \mathbb{S}^2 y un punto (el origen). Para los detalles de este y otros cálculos de órbitas coadjuntas, remitimos a la tesis [3].

3.25. El grupo de Poincaré (propio, ortócrono) $\mathcal{P}_+^\uparrow := \mathbb{R}^4 \times O_0(3, 1)$ es el grupo de simetría de una partícula relativista, y es importante obtener sus órbitas coadjuntas. Hay dos funciones de Casimir y las órbitas coadjuntas genéricas son de dimensión 8. Es posible mostrar [14] que las órbitas genéricas que corresponden a partículas masivas son simplectomorfas a $\mathbb{R}^6 \times \mathbb{S}^2$, donde las coordenadas esféricas pueden interpretarse como el “spin clásico” de la partícula de marras.

3.5. Estructuras de Poisson

3.26. Definición. Sea P una variedad diferencial. Una **estructura de Poisson** sobre P es una aplicación bilineal $(f, g) \mapsto \{f, g\}$ de $C^\infty(P) \times C^\infty(P)$ en $C^\infty(P)$, que cumple:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \{f, g\} = -\{g, f\}; \\ \text{b)} \quad & \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0; \\ \text{c)} \quad & \{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}; \end{aligned} \tag{3.3}$$

para todo $f, g, h \in C^\infty(P)$. De (a) y (b), se ve que $(P, \{\cdot, \cdot\})$ es un álgebra de Lie (infinitodimensional); de (a) y (c), se ve que $g \mapsto \{g, f\}$ es una derivación de $C^\infty(P)$, así que hay un campo vectorial $X_f \in \mathfrak{X}(P)$ tal que

$$X_f g = \{g, f\}. \tag{3.4}$$

3.27. Si (M, ω) es una variedad simpléctica, sea X_f el campo vectorial hamiltoniano tal que $i(X_f)\omega = df$. (La no degeneración de ω la existencia y unicidad de X_f para cada $f \in C^\infty(P)$.) Defínase ahora

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g). \tag{3.5}$$

Debemos comprobar que esta es una estructura de Poisson sobre la variedad simpléctica (M, ω) . Primero, es útil notar que

$$\omega(X_f, X_g) = (i(X_f)\omega)X_g = df(X_g) = X_g f, \tag{3.6}$$

así que esta estructura de Poisson asocia a cada elemento de $C^\infty(P)$ el campo hamiltoniano correspondiente (compare (3.6) con (3.4)). Ahora la antisimetría de $\{\cdot, \cdot\}$ sigue de la antisimetría de ω , y la propiedad de derivación (3.3c) es consecuencia de (3.6). Falta comprobar la identidad de Jacobi (3.3b). Recordamos la fórmula para la derivada exterior de una 2-forma:

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, X_2, X_3) &= X_1\omega(X_2, X_3) - X_2\omega(X_1, X_3) + X_3\omega(X_1, X_2) \\ &\quad - \omega([X_1, X_2], X_3) + \omega([X_1, X_3], X_2) - \omega([X_2, X_3], X_1) \\ &= \sum_{\text{cíclica}} X_1\omega(X_2, X_3) - \omega([X_1, X_2], X_3), \end{aligned}$$

donde la notación $\sum_{\text{cíclica}}$ denota la suma sobre permutaciones cíclicas de las tres índices que siguen. Tomando en cuenta que (3.6) puede usarse para mostrar que $\omega(X_f, Y) = Yf$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ (con sólo reemplazar X_g por Y), la identidad $d\omega(X_f, X_g, Y) = 0$ ahora implica que:

$$\begin{aligned} \omega([X_f, X_g], Y) &= X_f\omega(X_g, Y) - X_g\omega(X_f, Y) + Y\omega(X_f, X_g) \\ &\quad + \omega([X_f, Y], X_g) - \omega([X_g, Y], X_f) \\ &= X_f(Yg) - X_g(Yf) + Y\{f, g\} - [X_f, Y]g + [X_g, Y]f \\ &= Y(X_fg) - Y(X_gf) + Y\{f, g\} \\ &= Y\{g, f\} - Y\{f, g\} + Y\{f, g\} = Y\{f, g\} \\ &= \omega(X_{\{g, f\}}, Y) \end{aligned}$$

para todo $Y \in \mathfrak{X}(P)$. Como ω es no degenerada, se concluye que

$$[X_f, X_g] = X_{\{g, f\}}, \quad (3.7)$$

para todo $f, g \in C^\infty(P)$. Ahora hay que observar que

$$\begin{aligned} d\omega(X_f, X_g, X_h) &= \sum_{\text{cíclica}} X_f\omega(X_g, X_h) - \omega([X_f, X_g], X_h) \\ &= \sum_{\text{cíclica}} X_f\{g, h\} - \omega(X_{\{g, f\}}, X_h) \\ &= \sum_{\text{cíclica}} \{\{g, h\}, f\} - \{\{g, f\}, h\} \\ &= -2(\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}), \end{aligned}$$

así que la identidad de Jacobi (3.3b) sigue de $d\omega = 0$.

3.28. En el caso “plano” $(M, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \sum_{j=1}^n dq^j \wedge dp_j)$, obtenemos de (3.1):

$$\{f, g\} = -X_fg = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q^j}, \quad (3.8)$$

que es el ejemplo original de “corchete de Poisson”. Por el teorema de Darboux, cualquier estructura de Poisson que proviene de una forma simpléctica posee esta forma respecto de coordenadas canónicas locales.

3.29. Si P es una variedad (no necesariamente simpléctica) que admite una estructura de Poisson, sea $\{x_1, \dots, x_m\}$ un juego de coordenadas locales sobre una carta de P . La propiedad de derivación (3.3c) permite expresar el corchete de Poisson de dos funciones cualesquiera en términos de los corchetes de estas funciones coordenadas (en la carta local). En efecto:

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= X_g f = \sum_{i=1}^m (X_g x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \{x_i, g\} \\ &= - \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \{g, x_i\} = - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \{x_j, x_i\} \\ &= \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \{x_i, x_j\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Para clasificar estructuras de Poisson, es entonces cuestión de analizar las formas permisibles de los corchetes básicos $\{x_i, x_j\}$. El caso simpléctico (3.8) corresponde a corchetes básicos constantes, pues

$$\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q^i, p_j\} = \delta_j^i.$$

En el ejemplo siguiente, los corchetes básicos son funciones lineales de las coordenadas locales. Otros casos, en donde aparecen funciones afines o cuadráticos de las coordenadas, forman un tema de mucho estudio actual [8, 9].

3.30. Definición. Sea \mathfrak{g}^* la coálgebra de un grupo de Lie G . Si $\{X_1, \dots, X_n\}$ es una base vectorial de \mathfrak{g} , las funciones $u \mapsto \langle u, X_i \rangle$ determinan coordenadas (globales) (x_1, \dots, x_n) sobre \mathfrak{g}^* (porque son coordenadas respecto de la base dual a $\{X_1, \dots, X_n\}$). Si $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k X_k$ donde las c_{ij}^k son las constantes de estructura de \mathfrak{g} , entonces la definición

$$\{x_i, x_j\} := \sum_{k=1}^n c_{ij}^k x_k$$

determina, en vista de (3.9) y las relaciones conocidas entre las constantes de estructura (que reflejan la antisimetría y la identidad de Jacobi del corchete de \mathfrak{g}), una estructura de Poisson sobre la variedad \mathfrak{g}^* , por

$$\{f, g\} = \sum_{i,j,k=1}^n c_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} x_k. \quad (3.10)$$

Esta se llama la **estructura de Lie–Poisson** sobre \mathfrak{g}^* [30, p. 295].

Si $u \in \mathfrak{g}^*$, $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, la identificación canónica de $T_u\mathfrak{g}^*$ con el espacio vectorial \mathfrak{g}^* conlleva una identificación de la derivada $(Df)_u: T_u\mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ con un elemento $d_u f \in (\mathfrak{g}^*)^* = \mathfrak{g}$. Para $f = x_j : u \mapsto \langle u, X_j \rangle$, es evidente que $d_u(x_j) = X_j$ para todo u . Más generalmente, $d_u f = \sum_{j=1}^n \partial f / \partial x_j(u) X_j$. Así,

$$\begin{aligned} \{f, g\}(u) &= \sum_{i,j,k=1}^n c_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(u) \frac{\partial g}{\partial x_j}(u) \langle u, X_k \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(u) \frac{\partial g}{\partial x_j}(u) \langle u, [X_i, X_j] \rangle \\ &= \langle u, [d_u f, d_u g] \rangle, \end{aligned} \quad (3.11)$$

y por lo tanto la definición (3.10) no depende de las coordenadas elegidas en \mathfrak{g}^* .

3.31. Si $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ y $g \in G$, denotamos por f^g la función $u \mapsto f(g^{-1} \cdot u)$. Tenemos $f^g(g \cdot u) \equiv f(u)$, y la regla de cadena aplicada a $(Df)_u: T_u\mathfrak{g}^* \rightarrow T_{g \cdot u}\mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ muestra que $(Df)_u = (Df^g)_{g \cdot u} \circ D(\text{Coad}(g))_u$, o bien $d_u f = d_{g \cdot u} f^g \circ \text{Coad}(g): \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$. Luego

$$\langle v, d_u f \rangle = \langle \text{Coad}(g)v, d_{g \cdot u} f^g \rangle = \langle v, \text{Ad}(g^{-1})d_{g \cdot u} f^g \rangle$$

para todo $v \in \mathfrak{g}^*$, así que $d_{g \cdot u} f^g = \text{Ad}(g)d_u f \in \mathfrak{g}$. Por lo tanto, aplicando (3.11) en el punto $g \cdot u$ de la órbita $G \cdot u$, obtenemos

$$\begin{aligned} \{f^g, h^g\}(g \cdot u) &= \langle g \cdot u, [d_{g \cdot u} f^g, d_{g \cdot u} h^g] \rangle \\ &= \langle g \cdot u, [\text{Ad}(g)d_u f, \text{Ad}(g)d_u h] \rangle = \langle g \cdot u, \text{Ad}(g)[d_u f, d_u h] \rangle \\ &= \langle u, [d_u f, d_u h] \rangle = \{f, h\}(u) = \{f, h\}^g(g \cdot u) \end{aligned}$$

para $u \in \mathfrak{g}^*$, así que *la estructura de Lie–Poisson es equivariante bajo la acción coadjunta* de G , es decir,

$$\{f, h\}^g = \{f^g, h^g\}, \quad \text{para todo } f, h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*), \quad g \in G.$$

3.6. La forma simpléctica invariante de una órbita coadjunta

3.32. Ahora sea $M = G \cdot u$ una órbita coadjunta de G . Tenemos $T_u M = T_u(G/G_u) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_u$, donde \mathfrak{g}_u es la subálgebra de Lie

$$\mathfrak{g}_u := T_e G_u = \{X \in \mathfrak{g} : \langle u, \text{ad}(X)Y \rangle = \langle u, [X, Y] \rangle = 0, \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\}. \quad (3.12)$$

(Fíjese que X pertenece al lado derecho si y solo si $t \mapsto \langle u, \text{Ad}(\exp(-tX))Y \rangle$ es constante para todo u, Y si y solo si $t \mapsto \text{Coad}(\exp tX)u$ es constante para

todo u si y solo si $t \mapsto \exp tX$ es un subgrupo uniparamétrico del subgrupo de isotropía G_u de u .)

Si $X \in \mathfrak{g}$, definimos $X_u := \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \text{Coad}(\exp(-tX))u$. Fíjese que este es un vector tangente a una curva en la órbita $M = G \cdot u$. Se ve además que X_u es el elemento de $T_u M$ que corresponde a la clase $X\mathfrak{g}_u \in \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_u$; luego cada vector tangente en $T_u M$ es de la forma X_u para algún $X \in \mathfrak{g}$ (que no es único, pero que representa una única clase en $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_u$.)

3.33. Definición. . Sea G un grupo de Lie, $M = G \cdot u$ una órbita coadjunta de M . La **forma de Kirillov–Kostant–Souriau** sobre M es la 2-forma ω dado por:

$$\omega_v(X_v, Y_v) := \langle v, [X, Y] \rangle \quad \text{para } v \in M. \quad (3.13)$$

Hay que comprobar que esta forma está bien definida; para eso, basta observar que si $X \in \mathfrak{g}_u$, entonces el lado derecho de (3.13) se anula, por la mera definición (3.12) de \mathfrak{g}_u .

La antisimetría del lado derecho de (3.13) (más la linealidad de la correspondencia $X \mapsto X_u$) muestran que ω es una 2-forma sobre M . Es cerrado, porque se calcula que

$$d\omega_v(X_v, Y_v, Z_v) = \sum_{\text{cíclica}} \langle v, [X, [Y, Z]] \rangle - \langle v, [[X, Y], Z] \rangle = 0$$

usando la identidad de Jacobi para \mathfrak{g} . La definición también garantiza que ω es no degenerada, porque el lado derecho de (3.13) se anula para todo $Y \in \mathfrak{g}$ solo si $X \in \mathfrak{g}_u$ solo si $X_v = 0$ en $T_v M$. Por ende, ω es una *forma simpléctica* sobre M .

3.34. Si comparamos (3.11) con (3.13), vemos enseguida que la estructura de Poisson asociada a la forma de Kirillov–Kostant–Souriau no es otra cosa que *la restricción a la órbita coadjunta M de la estructura de Lie–Poisson sobre \mathfrak{g}^** . Empleando otra lenguaje, podemos decir que la “variedad de Poisson” $(\mathfrak{g}^*, \{\cdot, \cdot\})$ admite una foliación cuyas hojas (las órbitas coadjuntas) son simplécticas. Desafortunadamente, el rango de esta estructura de Poisson (la dimensión de una hoja típica) no es constante, lo cual complica considerablemente su estudio como foliación. La equivariancia de la estructura de Poisson bajo la acción coadjunta implica una simetría correspondiente para las formas simplécticas en las diversas órbitas; en efecto, estas son *invariantes*, como demuestra el siguiente teorema.

3.35. Teorema. *La forma simpléctica (3.13) de Kirillov–Kostant–Souriau es invariante bajo la acción coadjunta de G sobre la órbita coadjunta $M = G \cdot u$. En otras palabras, la acción coadjunta es una acción simpléctica sobre cada órbita coadjunta.*

Demostración: Si $v = g \cdot u$, la transformación lineal $\text{Coad}(g)$ de \mathfrak{g}^* deja M invariante, lleva u en v y lleva la curva $t \mapsto \exp(-tX) \cdot u$ en la curva $t \mapsto$

$(g \exp(-tX)g^{-1}) \cdot v$; derivando en $t = 0$, obtenemos que la aplicación tangente de $\text{Coad}(g)$ sobre M lleva X_u en $(\text{Ad}(g)X)_v$. Ahora tenemos:

$$\begin{aligned}
 (\text{Coad}(g)^*\omega)_u(X_u, Y_u) &= \omega_{g \cdot u}(\text{Coad}(g)_*X_u, \text{Coad}(g)_*Y_u) \\
 &= \omega_{g \cdot u}((\text{Ad}(g)X)_{g \cdot u}, (\text{Ad}(g)Y)_{g \cdot u}) \\
 &= \langle g \cdot u, [\text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y] \rangle \\
 &= \langle \text{Coad}(g)u, \text{Ad}(g)[X, Y] \rangle = \langle u, [X, Y] \rangle \\
 &= \omega_u(X_u, Y_u).
 \end{aligned}$$

Como $\{X_u : X \in \mathfrak{g}\} = T_uM$, se ve que $\text{Coad}(g)^*\omega = \omega$ para todo $g \in G$. \square

4. Campos Vectoriales y Corchetes de Poisson

Poincaré visualizó un sistema dinámico como un campo de vectores en el espacio de fases, donde una solución es una curva suave, tangente en cada punto al vector basado en ese punto.

—R. Abraham

4.1. Campos vectoriales hamiltonianos

4.1. Sea (M, ω) una variedad simpléctica, tome $f \in C^\infty(M)$ y sea X_f el campo vectorial hamiltoniano asociado a f : $\omega(X_f, Y) = df(Y) = Yf$. Sea $\{\phi_t \in \text{Diff}(M) : -\epsilon < t < \epsilon\}$ el flujo del campo vectorial X_f . Afirmamos que los ϕ_t son simplectomorfismos, es decir, $\phi_t^* \omega = \omega$ para cada t .

Recordemos la definición de la *derivada de Lie* asociado a un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$. Si $\alpha \in \Omega^k(M)$ es una k -forma sobre M , sea $\{\phi_t \in \text{Diff}(M) : -\epsilon < t < \epsilon\}$ el flujo de X ; la derivada de Lie $\mathcal{L}_X \alpha$ es la k -forma dada por

$$\mathcal{L}_X \alpha := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* \alpha \in \Omega^k(M).$$

La derivada de Lie de una k -forma tiene la expresión explícita [15, p. 128]:

$$\mathcal{L}_X \alpha(X_1, \dots, X_k) := X\alpha(X_1, \dots, X_k) - \sum_{j=1}^k \alpha(X_1, \dots, [X, X_j], \dots, X_k)$$

y de ahí se puede comprobar la *identidad de Cartan*:

$$\mathcal{L}_X \alpha = i(X) d\alpha + d(i(X)\alpha). \tag{4.1}$$

Como ω es una forma simpléctica, es $d\omega = 0$, así que $\mathcal{L}_X \omega = d(i(X)\omega)$. Ahora si $X = X_f$ es un campo vectorial hamiltoniano, entonces $\mathcal{L}_{X_f} \omega = d(df) = 0$. Por lo tanto $\phi_t^* \omega = \omega$ para $-\epsilon < t < \epsilon$. Concluimos que el flujo de un campo vectorial hamiltoniano consta de simplectomorfismos.

4.2. Definición. Decimos que $X \in \mathfrak{X}(M)$ es **localmente hamiltoniano** (respecto de ω) si $\mathcal{L}_X \omega = 0$, o equivalentemente, si su flujo consta de simplectomorfismos de (M, ω) . Como $\mathcal{L}_X \omega = d(i(X)\omega)$ en general, se ve que X es localmente hamiltoniano si y solo si $i(X)\omega$ es una 1-forma *cerrada* sobre M ; en símbolos, $i(X)\omega \in Z^1(M)$. Localmente, es decir, en cada carta local (U_α, ϕ_α) de M , podemos encontrar $f_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$ tal que $(i(X)\omega \upharpoonright U_\alpha) = df_\alpha$. Si denotamos por $B^1(M) := \{df : f \in C^\infty(M)\}$ las 1-formas *exactas*, se ve que X es hamiltoniano si y solo si $i(X)\omega \in B^1(M)$. Fíjese que el cociente $H^1(M) := Z^1(M)/B^1(M)$ es el primer grupo de cohomología de de Rham de la variedad M .

4.3. Denotamos los campos vectoriales hamiltonianos [respectivamente, localmente hamiltonianos] por $\mathfrak{X}_H(M, \omega)$ [respectivamente, por $\mathfrak{X}_{LH}(M, \omega)$]. Ahora, $df = 0$ solo si $f \in C^\infty(M)$ es localmente constante, es decir, solo si $f \in Z^0(M) = H^0(M)$. La imagen de $f \mapsto X_f$ es $\mathfrak{X}_H(M, \omega) \subset \mathfrak{X}_{LH}(M, \omega)$, y el conúcleo de esta aplicación es isomorfo a $Z^1(M)/B^1(M) = H^1(M)$. Tenemos, pues, una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow H^0(M) \longrightarrow C^\infty(M) \longrightarrow \mathfrak{X}_{LH}(M, \omega) \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow 0.$$

4.4. Lema. Si $X, Y \in \mathfrak{X}_{LH}(M, \omega)$, entonces $[X, Y] \in \mathfrak{X}_H(M, \omega)$. En particular, $\mathfrak{X}_{LH}(M, \omega)$ es un álgebra de Lie.

Demostración: Tenemos una fórmula [15]: $\mathcal{L}_X i(Y)\alpha - i(Y)\mathcal{L}_X \alpha = i([X, Y])\alpha$, válido para todo $\alpha \in \Omega^k(M)$. De $\mathcal{L}_X \omega = \mathcal{L}_Y \omega = 0$ y de (4.1) obtenemos:

$$\begin{aligned} i([X, Y])\omega &= \mathcal{L}_X i(Y)\omega - i(Y)\mathcal{L}_X \omega = \mathcal{L}_X i(Y)\omega \\ &= i(X) d(i(Y)\omega) - d(i(X)i(Y)\omega) = 0 + d(\omega(X, Y)). \end{aligned}$$

Luego $[X, Y] = X_h$, donde $h = \omega(X, Y) \in C^\infty(M)$. □

4.2. Acciones hamiltonianas y poissonianas

4.5. Definición. Ahora sea G un grupo de Lie que tiene una acción diferencial sobre una variedad M , denotada por $u \mapsto g \cdot u$. Hay un homomorfismo natural de álgebras de Lie de \mathfrak{g} en $\mathfrak{X}(M)$, definido como sigue. Para $X \in \mathfrak{g}$, definimos el **campo fundamental** $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ asociado a X por:

$$(\tilde{X}f)(u) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\exp(-tX) \cdot u).$$

Entonces

$$\begin{aligned} [\tilde{X}, \tilde{Y}]f(u) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\exp(-tX) \exp(-tY) \exp(tX) \exp(tY) \cdot u) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\exp(-t[X, Y]) \cdot u) = [\widetilde{[X, Y]}]f(u), \end{aligned}$$

así que $X \mapsto \tilde{X}$ es un homomorfismo de \mathfrak{g} en $\mathfrak{X}(M)$.

Si ω es una forma simpléctica sobre M y si la acción de G es simpléctica respecto de ω , el flujo de \tilde{X} es el grupo uniparamétrico de symplectomorfismos $u \mapsto \exp(-tX) \cdot u$, así que $\tilde{X} \in \mathfrak{X}_{LH}(M, \omega)$. En este caso, $X \mapsto \tilde{X}$ es un homomorfismo de \mathfrak{g} en $\mathfrak{X}_{LH}(M, \omega)$.

4.6. Definición. Una acción simpléctica de un grupo de Lie G sobre una variedad simpléctica (M, ω) es una **acción hamiltoniana** (o “fuertemente simpléctica”) si los campos fundamentales $\{\tilde{X} : X \in \mathfrak{g}\}$ son hamiltonianos.

Esto es automático si $H^1(M) = 0$. Si G es semisimple, de modo que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, es una consecuencia del Lema anterior.

4.7. Sea ahora $\{\cdot, \cdot\}$ la estructura de Poisson sobre (M, ω) dada por (3.5). La aplicación $\sigma: C^\infty(M) \rightarrow \mathfrak{X}_{LH}(M, \omega) : f \mapsto -X_f$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, puesto que

$$\sigma(\{f, g\}) = -X_{\{f, g\}} = -[X_g, X_f] = [X_f, X_g],$$

en vista de (3.7). Si M es conexo (para que $H^0(M) = \mathbb{R}$), obtenemos un diagrama donde las flechas son homomorfismos de álgebras de Lie:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathfrak{g} & & \\ & & & & \downarrow \sim & & (4.2) \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & C^\infty(M) & \xrightarrow{\sigma} & \mathfrak{X}_H(M, \omega) \longrightarrow 0 \end{array}$$

y la fila inferior es exacta. Es fácil hallar una aplicación *lineal* $f: \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$ tal que $\sigma(f_X) = \tilde{X}$: si $\{X_1, \dots, X_n\}$ es una base de \mathfrak{g} , elija $f_{X_j} \in C^\infty(M)$ tal que $-df_{X_j} = i(\tilde{X}_j)\omega$ y extiende por linealidad; si $X = \sum_{j=1}^n a_j X_j$, tome $f(X) := \sum_{j=1}^n a_j f_{X_j}$. Esta aplicación f se llama una *aplicación comomento* [13] para la acción hamiltoniana de G . Por transposición, se obtiene una **aplicación momento** [31] $P: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ definido por $\langle P(u), X \rangle := f_X(u)$, para $u \in M$.

4.8. La aplicación comomento $X \mapsto f_X$ no está completamente determinado por (4.2), porque otra función que difiere de f_X por una constante posee el mismo campo hamiltoniano; al mantener la dependencia lineal de X , se ve que $X \mapsto f_X + \langle v, X \rangle$ es otra aplicación comomento, cualquiera que fuera $v \in \mathfrak{g}^*$. Es legítimo preguntar si esta flexibilidad permite elegir f de modo que sea un *homomorfismo* de álgebras de Lie, de \mathfrak{g} en $C^\infty(M)$.

4.9. Obsérvese que $\sigma(\{f_X, f_Y\} - f_{[X, Y]}) = [\tilde{X}, \tilde{Y}] - [\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0$, así que

$$c(X, Y) := \{f_X, f_Y\} - f_{[X, Y]} \quad (4.3)$$

es una función constante (M es conexo), y la identificamos con su valor en \mathbb{R} . Fíjese que entonces c es una función bilineal antisimétrica sobre \mathbb{R} . La sustitución $f_X \mapsto f_X + \langle v, X \rangle$ lleva $c(X, Y)$ en $c(X, Y) - \langle v, [X, Y] \rangle$.

Como $\{\{f_X, f_Y\}, f_Z\} = \{f_{[X, Y]}, f_Z\} = f_{[[X, Y], Z]} + c([X, Y], Z)$, las identidades de Jacobi para $C^\infty(M)$ y para \mathfrak{g} nos lleva a la identidad:

$$c([X, Y], Z) + c([Y, Z], X) + c([Z, X], Y) = 0, \quad (4.4)$$

que la forma bilineal c debe satisfacer.

4.10. Proposición. *Si se puede elegir f tal que sea un homomorfismo de \mathfrak{g} en $C^\infty(M)$, entonces la aplicación momento $P: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ es equivariante respecto de la acción dada de G sobre M y la acción coadjunta de G sobre \mathfrak{g}^* .*

Demostración: Tomamos $u \in M$ y $X, Y \in \mathfrak{g}$ arbitrarios; entonces

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle P(\exp(-tX) \cdot u), Y \rangle &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_Y(\exp(-tX) \cdot u) = \tilde{X} f_Y(u) \\
&= -\{f_Y, f_X\}(u) = \{f_X, f_Y\}(u) = f_{[X, Y]}(u) \\
&= \langle P(u), [X, Y] \rangle = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle P(u), \text{Ad}(\exp tX)Y \rangle \\
&= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \text{Coad}(\exp(-tX))P(u), Y \rangle. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Luego $P(g \cdot u) = \text{Coad}(g)P(u)$ para $g \in G$, $u \in M$. \square

4.11. Definición. Una acción hamiltoniana de un grupo de Lie G sobre una variedad simpléctica (M, ω) es una **acción poissoniana** (o “fuertemente hamiltoniana”) si existe un homomorfismo de álgebras de Lie $f: \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$ tal que $\sigma \circ f$ lleva cada elemento de \mathfrak{g} en el campo fundamental asociado.

La proposición anterior dice que la aplicación momento de una acción poissoniana es equivariante para esta acción y la acción coadjunta de G .

4.12. Proposición. *Cada variedad simpléctica (M, ω) que admite una acción poissoniana y transitiva de un grupo de Lie G es un espacio recubridor de alguna órbita coadjunta de G .*

Demostración: Supongamos que la acción de G sobre (M, ω) es poissoniana y además *transitiva*. Por la equivariancia (4.5), tenemos que

$$\mathcal{O} := \{ P(u) : u \in M \} = \{ P(g \cdot u_0) : g \in G \} = \{ \text{Coad}(g)P(u_0) : g \in G \}$$

es una *órbita coadjunta* de G . Recuerde que esta órbita posee una forma simpléctica (KKS) dada por (3.13). El campo fundamental de $X \in \mathfrak{g}$ sobre la órbita coadjunta \mathcal{O} no es otra que la sección de $T\mathcal{O}$ cuya valor en $v \in \mathcal{O}$ es la X_v de (3.13). Ahora debemos notar que

$$\omega_u(\tilde{X}_u, \tilde{Y}_u) =: \{f_X, f_Y\}(u) = \langle P(u), [X, Y] \rangle,$$

que dice que P entrelaza las formas simplécticas en M y en \mathcal{O} .

Como el espacio tangente $T_u M$ es generado por los campos fundamentales \tilde{X}_u (ya que la acción es transitiva), la diferencial $P_*: T_u M \rightarrow T_{P(u)}\mathcal{O}$ es un isomorfismo. Por ende, P es un *simplectomorfismo local* entre M y \mathcal{O} , y es sobreyectivo: P es, en particular, una aplicación recubridor. \square

4.3. Cohomología de álgebras de Lie

4.13. Ahora volvemos al problema de la existencia de una aplicación comomento homomorfo; equivalente, al problema de determinar cuales acciones hamiltonianas son poissonianas. Por lo dicho después de (4.3), este problema tiene solución si y solo si cada forma bilineal antisimétrica sobre \mathfrak{g} que cumple (4.4) es de la forma $c(X, Y) := \langle v, [X, Y] \rangle$ para algún $v \in \mathfrak{g}^*$. Se trata, entonces de un problema de *cohomología*, específicamente de la cohomología de Chevalley y Eilenberg para álgebras de Lie [17].

4.14. Definición. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie. Una *n-cocadena* es una aplicación n -linear alternante $\alpha: \mathfrak{g}^n \rightarrow \mathbb{R}$; el espacio de n -cocadenas será denotado $C^n(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$, y escribimos $C(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} C^n(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$, donde $C^0(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) := \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\delta: C^n(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) \rightarrow C^{n+1}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ por:

$$\delta\alpha(X_1, \dots, X_{n+1}) := \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \overset{i}{\underset{j}{\checkmark}} \dots, X_{n+1}), \quad (4.6)$$

donde $\overset{i}{\underset{j}{\checkmark}}$ denota la omisión del elemento X_i . El operador lineal δ sobre $C(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ así definido satisface $\delta^2 = 0$. Escribimos $B^n(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) := \{ \delta\beta : \beta \in C^{n-1}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) \} = \text{Im}(\delta \upharpoonright C^{n-1}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}))$, los *n-cobordes*; denotamos $Z^n(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) := \{ \alpha \in C^n(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) : \delta\alpha = 0 \} = \text{ker}(\delta \upharpoonright C^n(\mathfrak{g}, \mathbb{R}))$, los *n-cociclos*; como $\delta^2 = 0$, es $B^n(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) \subset Z^n(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$. El n -ésimo **grupo de cohomología** $H^n(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ se define como

$$H^n(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) := \frac{Z^n(\mathfrak{g}, \mathbb{R})}{B^n(\mathfrak{g}, \mathbb{R})}.$$

4.15. Una 1-cocadena es entonces un elemento $v \in \mathfrak{g}^*$. Tenemos $\delta v(X, Y) := \langle v, [X, Y] \rangle$: esta es la forma general de un 2-coborde. Una 2-cocadena es una aplicación bilineal antisimétrica $\alpha: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$. El caso $n = 2$ de (4.6) da

$$\delta\alpha(X, Y, Z) = \alpha([X, Y], Z) - \alpha([X, Z], Y) + \alpha([Y, Z], X) = \sum_{\text{cíclica}} \alpha([X, Y], Z).$$

Luego la ecuación (4.4) dice que c es un 2-cociclo: $c \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$. Se puede entonces garantizar que c es un 2-coborde si y solo si $Z^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = B^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$, si y solo si $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$. En otras palabras: $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ mide la obstrucción a que las acciones hamiltonianas de G sean equivalentes a acciones poissonianas.

4.16. Ejemplo. Sea $G = \mathbb{R}^{2n}$, un grupo *abeliano*. Entonces $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^{2n}$, con corchete trivial: $[X, Y] = 0$ para todo $X, Y \in \mathbb{R}^{2n}$. Por ende, en (4.6) tenemos $\delta = 0$, así que $B^k(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}) = 0$ para $k > 1$. Es $H^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}) = Z^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}) =$

$C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}) \cong \mathfrak{so}(2n, \mathbb{R}) \neq 0$. Conclusión: la acción del grupo \mathbb{R}^{2n} sobre la variedad simpléctica (\mathbb{R}^{2n}, s) por traslaciones es hamiltoniana (pues $\mathfrak{X}_{LH}(\mathbb{R}^{2n}, s) = \mathfrak{X}_H(\mathbb{R}^{2n}, s)$ por el lema de Poincaré) pero no es poissoniana, porque $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^{2n}$, con su base usual $\{Q^1, \dots, Q^n, P_1, \dots, P_n\}$, es abeliana, pero las imágenes de estos generadores en $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, i.e., las funciones coordenadas $\{q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n\}$, no conmutan respecto del corchete de Poisson (3.8); de hecho, $\{q^j, p_j\} = 1$.

4.17. El hecho de que la obstrucción es cohomológica nos indica qué es lo que hay que hacer: es menester reemplazar el grupo abeliano \mathbb{R}^{2n} por cierto grupo no abeliano que sea una *extensión central* de aquél. Esta extensión resulta ser el grupo de Heisenberg $\mathbb{H}(n)$.

4.18. Definición. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie. Una **extensión central de \mathfrak{g} por \mathbb{R}** es una sucesión exacta de álgebras de Lie:

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{h} \xrightarrow{\eta} \mathfrak{g} \longrightarrow 0, \quad (4.7)$$

tal que $\iota(\mathbb{R}) \subset Z(\mathfrak{h}) := \{X \in \mathfrak{h} : [X, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{h}\}$. Con un poco de abuso de lenguaje, decimos “ \mathfrak{h} es una extensión de \mathfrak{g} por \mathbb{R} ” cuando los homomorfismos ι, η no son ambiguos. Dos extensiones $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ son *equivalentes* si hay un homomorfismo $\psi: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \xrightarrow{\iota} & \mathfrak{h} & \xrightarrow{\eta} & \mathfrak{g} \longrightarrow 0 \\ & & & & \parallel & & \parallel \\ & & & & \downarrow \psi & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \xrightarrow{\iota'} & \mathfrak{h}' & \xrightarrow{\eta'} & \mathfrak{g} \longrightarrow 0 \end{array}$$

en donde el “Lema de cinco” muestra que ψ es, de hecho, un isomorfismo.

4.19. Si $\{X_1, \dots, X_n\}$ es una base de \mathfrak{g} , elijamos un elemento $s(X_j) \in \eta^{-1}(X_j)$ para cada j , y extendamos s por linealidad a una *sección lineal* de η , es decir, $s: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es lineal con $\eta \circ s = \text{Id}_{\mathfrak{g}}$. Esta sección lineal no será en general un homomorfismo de álgebras de Lie, pero de todas formas tendremos

$$\eta([s(X), s(Y)] - s([X, Y])) = [X, Y] - [X, Y] = 0,$$

así que $[s(X), s(Y)] - s([X, Y]) \in \ker \eta = \iota(\mathbb{R})$. Si $c(X, Y)$ es el elemento de \mathbb{R} tal que

$$\iota(c(X, Y)) = [s(X), s(Y)] - s([X, Y]), \quad (4.8)$$

la linealidad de s implica que $s \in C^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$, y además

$$\delta c(X, Y, Z) = \sum_{\text{cíclica}} [[s(X), s(Y)], s(Z)] - [\iota(c(X, Y)), s(Z)] - s([[X, Y], Z]) = 0$$

ya que $\iota(\mathbb{R}) \subset Z(\mathfrak{h})$; luego $c \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$. Si elegimos otra sección lineal s' de η , obtenemos de $\eta \circ (s' - s) = 0$ que $s'(X) = s(X) + \iota(\langle v, X \rangle)$ donde $v: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal (es decir, $v \in \mathfrak{g}^* = C^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$). Tenemos:

$$\iota(c'(X, Y)) = [s'(X), s'(Y)] - s'([X, Y]) = \iota(c(X, Y)) - \iota(\langle v, [X, Y] \rangle),$$

así que $c' = c - \delta v$. Luego la extensión (4.7) determina una clase $[c] \in H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$.

4.20. Definición. Ahora sea $c \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ un 2-cociclo y defínase una extensión \mathfrak{h}_c como sigue. Sea $\mathfrak{h}_c := \mathbb{R} \oplus \mathfrak{g}$ como espacio vectorial, y defínase un corchete en \mathfrak{h}_c por:

$$[(\lambda, X), (\mu, Y)]_c := (c(X, Y), [X, Y]).$$

para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}; X, Y \in \mathfrak{g}$. Esto es evidentemente una forma bilineal antisimétrica, y además

$$\sum_{\text{cíclica}} [[(\lambda, X), (\mu, Y)]_c, (\nu, Z)]_c = \sum_{\text{cíclica}} (c([X, Y], Z), [[X, Y], Z]),$$

así que la identidad de Jacobi para $[\cdot, \cdot]_c$ es consecuencia de $\delta c = 0$.

Defínanse $\iota_c(\lambda) := (\lambda, 0)$, $\eta_c(\lambda, X) := X$. Estos son obviamente homomorfismos de álgebras de Lie, así que

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\iota_c} \mathfrak{h}_c \xrightarrow{\eta_c} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

es una extensión de \mathfrak{g} por \mathbb{R} . Al tomar $s(X) := (0, X)$, se ve que la clase en $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ determinado por \mathfrak{h}_c es $[c]$, como era de esperar. De este modo, cada clase en $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ es asociado a alguna extensión central de \mathfrak{g} por \mathbb{R} .

4.21. Lema. *Dos extensiones centrales de \mathfrak{g} por \mathbb{R} son equivalentes si y solo si determinan la misma clase en $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$.*

Demostración: Si $c, d \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ son 2-cociclos tales que las extensiones $\mathfrak{h}_c, \mathfrak{h}_d$ son equivalentes mediante un homomorfismo $\psi: \mathfrak{h}_c \rightarrow \mathfrak{h}_d$, las condiciones $\eta_d \circ \psi = \eta_c$, $\psi \circ \iota_c = \iota_d$ muestran que $\psi(\lambda, X) = (\lambda + \langle v, X \rangle, X)$ para alguna $v \in \mathfrak{g}^*$. Luego

$$\begin{aligned} \psi((c(X, Y), [X, Y])) &= \psi([(0, X), (0, Y)]_c) \\ &= [(\langle v, X \rangle, X), (\langle v, Y \rangle, Y)]_d = (d(X, Y), [X, Y]), \end{aligned}$$

y por lo tanto $d = c + \delta v$, o bien $[d] = [c]$ en $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$.

Por otro lado, si \mathfrak{h} es una extensión cualquiera de \mathfrak{g} por \mathbb{R} , si $s: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es una sección lineal de $\eta: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$, y $c \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ es dado por (4.8), defínase $\psi: \mathfrak{h}_c \rightarrow \mathfrak{h}$ por $\psi(\lambda, X) := \iota(\lambda) + s(X)$. En vista de que

$$\begin{aligned} \psi([(\lambda, X), (\mu, Y)]_c) &= \psi((c(X, Y), [X, Y])) = \iota(c(X, Y)) + s([X, Y]) \\ &= [s(X), s(Y)] = [\iota(\lambda) + s(X), \iota(\mu) + s(Y)] = [\psi(\lambda, X), \psi(\mu, Y)], \end{aligned}$$

se ve que ψ es un homomorfismo de álgebras de Lie que da la equivalencia deseada. \square

4.4. Acciones poissonianas de extensiones centrales

4.22. Volvamos a considerar un grupo de Lie G con una acción hamiltoniana sobre una variedad simpléctica conexa (M, ω) . Sea $c \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ el 2-cociclo (4.3) determinado por una sección lineal $f: \mathfrak{X}_H(M, \omega) \rightarrow C^\infty(M)$ de $\sigma: h \mapsto -X_h$. (Recuerde que $\sigma(f_X) = \tilde{X}$, el campo fundamental determinado por X .) Ya hemos observado que la acción de G determina la clase $[c] \in H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$. Ahora tome $\mathfrak{h} := \mathfrak{h}_c$ una extensión central de \mathfrak{g} por \mathbb{R} , determinada hasta equivalencia de extensiones por $[c]$.

4.23. Definición. Si $(\lambda, X) \in \mathfrak{h} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{g}$, colocamos $\tau(\lambda, X) := \tilde{X} \in \mathfrak{X}_H(M, \omega)$; entonces $\tau: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{X}_H(M, \omega)$ es un homomorfismo de álgebras de Lie. Defínase $F: \mathfrak{h} \rightarrow C^\infty(M)$ por $F(\lambda, X) := \lambda + f_X$. Es claro que $\sigma \circ F = \tau$. Ahora F es un homomorfismo de álgebras de Lie, porque

$$\begin{aligned} F([\lambda, X], [\mu, Y]) &= F((c(X, Y), [X, Y])) = c(X, Y) + f_{[X, Y]} \\ &= \{f_X, f_Y\} = \{\lambda + f_X, \mu + f_Y\} = \{F(\lambda, X), F(\mu, Y)\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.24. Definición. Sea H el grupo de Lie conexo y simplemente conexo cuya álgebra de Lie es \mathfrak{h} . Entonces H actúa sobre M como sigue: para cada $Z \in \mathfrak{h}$, sea $t \mapsto \gamma(t, u)$ la curva en M tal que $\gamma_Z(0, u) = u$, $\gamma'_Z(0, u) = \tau(Z)_u$. Esto determina la acción del subgrupo uniparamétrico $t \mapsto \exp(tZ)$ de H sobre M por $\exp(tZ) \cdot u := \gamma_Z(t, u)$. Si escribimos $g \in G$ en la forma $g = \exp(t_1 Z_1) \exp(t_2 Z_2) \dots \exp(t_m Z_m)$ con $Z_1, \dots, Z_m \in \mathfrak{g}$, $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$, coloque $g \cdot u := \gamma_{Z_1}(t_1, \gamma_{Z_2}(t_2, \dots \gamma_{Z_m}(t_m, u) \dots))$. Tal vez no es obvio que $g \cdot u$ está bien definido; pero en este caso no hay dificultades. (Se puede apelar a un teorema de Palais [35, p. 95] según el cual un homomorfismo $\tau: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ es “integrable” a una acción de H sobre M toda vez que haya una base $\{Z_0, Z_1, \dots, Z_n\}$ de \mathfrak{h} tal que cada $\tau(Z_k)$ es la derivada de una acción de un subgrupo uniparamétrico de H . Si \mathfrak{h} es una extensión central por \mathbb{R} del álgebra de Lie de un grupo G que actúa sobre M , esto se verifica, pues $t \mapsto \exp(tZ_0)$ actúa trivialmente y la acción de los $t \mapsto \exp(tZ_k)$, para $k \geq 1$, es dada por la acción de G .) El campo fundamental asociado a $Z \in \mathfrak{h}$ para esta acción de H es evidentemente $\tau(Z)$.

Si ahora (M, ω) es una variedad simpléctica, con una acción hamiltoniana de G , es $\tau(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{X}_H(M, \omega)$, así que la acción de H es también simpléctica y hamiltoniana. Por (4.9), esta acción es poissoniana.

4.25. Supongamos ahora que G es un grupo de Lie conexo. Sea \tilde{G} el grupo recubridor (universal) de G : \tilde{G} es conexo y simplemente conexo, su álgebra de Lie es la de G , y hay un homomorfismo suave $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$ que es una aplicación

recubridora; de hecho, $\ker \pi \cong \pi_1(G)$. Obsérvese que \tilde{G} es una extensión de G por $\pi_1(G)$, vale decir, hay una sucesión exacta:

$$\mathbf{1} \longrightarrow \pi_1(G) \longrightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow \mathbf{1}.$$

(Aquí $\mathbf{1}$ denota el grupo trivial de un solo elemento.) El grupo H construido arriba, cuya álgebra de Lie es \mathfrak{h} , es una extensión central de \tilde{G} por \mathbb{R} en el sentido de que existe una sucesión exacta:

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H \longrightarrow \tilde{G} \longrightarrow \mathbf{1}$$

tal que la imagen de \mathbb{R} es parte del centro $Z(H)$ de H .

Se concluye que *una acción hamiltoniana de un grupo de Lie conexo G da lugar a una acción poissoniana de una extensión central del grupo recubridor de G .*

4.26. Ejemplo. Volvemos finalmente a la acción hamiltoniana de \mathbb{R}^{2n} sobre (\mathbb{R}^{2n}, s) por traslaciones, que es hamiltoniana pero no es poissoniana. Si definimos $f_{Q^j} := q^j$, $f_{P_k} := p_k$, para $j, k = 1, \dots, n$, obtenemos una sección lineal f de $\sigma: C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathfrak{X}_H(\mathbb{R}^{2n}, s)$. Tenemos

$$\{q^j, q^k\} = \{p_j, p_k\} = 0, \quad \{q^j, p_k\} = \delta_k^j, \quad (4.10)$$

así que el 2-cociclo $c \in Z^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ es dado por

$$c(Q^j, Q^k) = c(P_j, P_k) = 0, \quad c(Q^j, P_k) = \delta_k^j.$$

Sea $\mathfrak{h} := \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{2n}$ la extensión central de \mathbb{R}^{2n} por \mathbb{R} determinado por $[c]$. Si escribimos $X_j := (0, Q^j)$, $Y_k := (0, P_k)$ y $T := (1, 0)$, vemos que \mathfrak{h} tiene la base $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, T\}$ cuyas relaciones de conmutación son:

$$[X_j, X_k] = [Y_j, Y_k] = [T, X_j] = [T, Y_k] = 0, \quad [X_j, Y_k] = \delta_{jk}T.$$

Luego $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}(n)$, el álgebra de Lie del grupo de Heisenberg $\mathbb{H}(n)$. Como este grupo es conexo y simplemente conexo, obtenemos $H = \mathbb{H}(n)$. Luego $\mathbb{H}(n)$ tiene la siguiente acción poissoniana sobre (\mathbb{R}^{2n}, s) :

$$(a, b; c) \cdot (q, p) := (q + a, p + b). \quad (4.11)$$

4.27. Es fácil verificar que en este caso la aplicación momento entrelaza esta acción con la acción coadjunta de $\mathbb{H}(n)$ sobre una órbita de codimensión 1 en $\mathfrak{h}(n)^*$. Para ver esto, calculemos esta acción coadjunta. Tenemos:

$$\text{ad}(X_r) : \begin{cases} X_j \mapsto 0, \\ Y_k \mapsto \delta_k^r T, \\ T \mapsto 0, \end{cases} \quad \text{ad}(Y_s) : \begin{cases} X_j \mapsto -\delta_s^j T, \\ Y_k \mapsto 0, \\ T \mapsto 0 \end{cases}, \quad \text{ad}(T) : \begin{cases} X_j \mapsto 0, \\ Y_k \mapsto 0, \\ T \mapsto 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

En la notación $g = (a, b; c)$ para elementos de $\mathbb{H}(n)$, vemos que $(a, 0; 0) = \exp(\sum_{r=1}^n a_r X_r)$, $(0, b; 0) = \exp(\sum_{s=1}^n b_s Y_s)$, $(0, 0; c) = \exp cT$, y que $(a, b; c) = (a, 0; 0)(0, b; 0)(0, 0; c - a^t b)$. Exponenciando (4.12), obtenemos la acción adjunta de $\mathbb{H}(n)$ en la forma:

$$\text{Ad}(a, 0; 0) : \begin{cases} X_j \mapsto X_j, \\ Y_k \mapsto Y_k + a_k T, \\ T \mapsto T, \end{cases} \quad \text{Ad}(0, b; 0) : \begin{cases} X_j \mapsto X_j - b_j T, \\ Y_k \mapsto Y_k, \\ T \mapsto T, \end{cases}$$

y $\text{Ad}(0, 0; c) = \text{Id}$. La acción coadjunta, en coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t)$ de $\mathfrak{h}(n)^*$ es:

$$\text{Coad}(a, 0; 0) : \begin{cases} x_j \mapsto x_j, \\ y_k \mapsto y_k - a_k t, \\ t \mapsto t, \end{cases} \quad \text{Coad}(0, b; 0) : \begin{cases} x_j \mapsto x_j + b_j t, \\ y_k \mapsto y_k, \\ t \mapsto t, \end{cases}$$

y $\text{Coad}(0, 0; c) = \text{Id}$; o bien:

$$(a, b; c) \cdot (x, y, t) := (x + tb, y - ta, t). \quad (4.13)$$

(De esta ecuación se ve enseguida que las órbitas coadjuntas son *puntos* $\{(a, b, 0)\}$ del hiperplano $t = 0$, o bien *hiperplanos* $t = t_0$ para $t_0 \neq 0$.)

Fijamos $t = t_0 \neq 0$, y definimos *coordenadas canónicas sobre esta órbita* por $q := -y$, $p := x/t_0$. Es fácil comprobar que la estructura de Lie–Poisson sobre $\mathfrak{h}(n)^*$, restringido a la órbita $t = t_0$, reproduce los corchetes de Poisson (4.10). Obsérvese que en estas coordenadas, la acción coadjunta se expresa así:

$$(a, b; c) \cdot (q, p) := (q + t_0 a, p + b).$$

La aplicación momento de \mathbb{R}^{2n} en $\mathfrak{h}(n)^*$ es dado por $P(q, p) := (q, t_0 p, t_0)$, que es equivariante bajo la acción (4.11) de $\mathbb{H}(n)$ sobre \mathbb{R}^{2n} y su acción coadjunta sobre la órbita $t = t_0$. En particular, podemos tomar $t_0 = 1$ e identificar \mathbb{R}^{2n} con el hiperplano $t = 1$ en $\mathfrak{h}(n)^*$; de esta forma la acción traslativa de \mathbb{R}^{2n} corresponde a la acción coadjunta de $\mathbb{H}(n)$ sobre una de sus órbitas.

5. La regla de cuantización de Weyl

Los problemas concretos fueron resueltos por primera vez en su complejidad indivisa; por fuerza bruta, por así decirlo. Antes de poder generalizar, formalizar, y axiomatizar, debe haber una sustancia matemática.

—H. Weyl

5.1. Sistemas dinámicos clásicos y cuánticos

5.1. Entendemos por **sistema dinámico clásico** un sistema de ecuaciones de movimiento:

$$\frac{df}{dt} = Xf,$$

en donde una “cantidad observable”, o simplemente *un observable*, es una función $f \in C^\infty(M)$ sobre alguna variedad diferencial M que incorpora los parámetros físicos del sistema, y $X \in \mathfrak{X}(M)$. En la formulación hamiltoniana, M es un *espacio de fases*, es decir, una variedad simpléctica, con coordenadas canónicas locales $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$, y las ecuaciones de movimiento toman la forma de las llamadas “ecuaciones de Hamilton”:

$$\frac{dq^j}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial q^k},$$

para cierta “función hamiltoniana” $h \in C^\infty(M)$.

En el caso de que $M = \mathbb{R}^{2n}$, con su estructura simpléctica usual, se puede reescribir estas ecuaciones en la forma

$$\frac{dq^j}{dt} = -\{h, q^j\}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\{h, p_k\}.$$

Usando la propiedad leibniziana de los corchetes de Poisson, obtenemos, para cualquier $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ la siguiente *ecuación de Liouville*:

$$\frac{df}{dt} = -\{h, f\}. \tag{5.1}$$

[El signo negativo es consecuencia de los convenios de signo que hemos adoptado; pueden suprimirse con un simple cambio de notación, por ejemplo, al redefinir $\{\cdot, \cdot\}$ como la negativa de la estructura de Poisson usual, o al reemplazar h por $-h$.] Ahora $-\{h, f\} = \{f, h\} = X_h f$, así que las soluciones de la ecuación de Liouville (5.1) son las curvas integrales del campo hamiltoniano X_h .

5.2. Por otro lado, la formulación usual de la mecánica cuántica “ordinaria” (es decir: no relativista, sin spin, y con un número finito de parámetros) parte de un

formalismo distinto. Se postula la disponibilidad de un espacio de Hilbert \mathcal{H} , y los “observables” corresponden a ciertos operadores autoadjuntos sobre \mathcal{H} . (El espacio de Hilbert no es del todo indispensable; al concluir este capítulo, haremos una reformulación del formalismo que no exige la presencia de \mathcal{H} de antemano.)

En la “presentación de Heisenberg”, estos observables cambian durante la evolución temporal del sistema, de modo que el operador $F(t)$ que representa el observable en el instante t satisfaga la llamada *ecuación de Heisenberg*:

$$\frac{d}{dt}F(t) = \frac{i}{\hbar}(HF(t) - F(t)H) \equiv \frac{i}{\hbar}[H, F(t)], \quad (5.2)$$

donde H es el “operador hamiltoniano”, o simplemente el *hamiltoniano*, que es un operador autoadjunto sobre \mathcal{H} ; para simplificar, asumiremos que H no depende del tiempo t . Aquí \hbar es una constante positiva fija, interpretada como $\hbar = h/2\pi$, siendo h la constante de Planck.) Se puede adoptar el convenio de elegir las unidades físicas (de longitud, masa, tiempo, etc.) tales que $\hbar = 1$, y así lo haremos. (Si mantuviéramos la \hbar en nuestras fórmulas como parámetro, podríamos luego considerar el “límite semiclásico” $\lim_{\hbar \rightarrow 0}$ de las expresiones obtenidas; aquí no entraremos en esas consideraciones.)

5.3. ¿Cómo elegir el espacio de Hilbert \mathcal{H} y el operador hamiltoniano H , para poder comparar las consecuencias de las ecuaciones de evolución clásica (5.1) y cuántica (5.2)? Los procedimientos originales eran (vistos con ojos modernos) recetarios *ad hoc*, basados en un “principio de correspondencia” que identificaba operadores plausibles Q_j, P_k para representar las funciones coordenadas q^j, p_k , y luego dictaminó que a la función $f = f(q^1, \dots, p_n)$ le correspondía el operador $F := f(Q_1, \dots, P_n)$. Pero esta receta no es única porque los operadores Q_j, P_k no conmutan, y a la función $f(q, p) = q^1 p_1$, por ejemplo, podemos hacer corresponder los operadores $Q_1 P_1, P_1 Q_1, \frac{1}{2}(Q_1 P_1 + P_1 Q_1)$, amén de otras variantes.

Dirac sugirió [18] que lo que hacía falta era una *regla de correspondencia lineal* $f \mapsto F : C^\infty(M) \rightarrow \text{Op}(\mathcal{H})$, donde $\text{Op}(\mathcal{H})$ denota la colección de operadores autoadjuntos sobre \mathcal{H} , que *preserva las relaciones de conmutación*, es decir,

$$f \mapsto F, \quad h \mapsto H \quad \iff \quad \{f, h\} \mapsto -\frac{i}{\hbar}[F, H]. \quad (5.3)$$

Tal correspondencia, si existe, merece el nombre de una *regla de cuantización*.

5.4. El esquema propuesto por Dirac funciona bien para funciones lineales (a partir de una identificación inicial $q^j \mapsto Q_j, p_k \mapsto P_k$) y para funciones cuadráticas: no es difícil comprobar que la condición (5.3) exige $(q^j)^2 \mapsto (Q_j)^2, (p_k)^2 \mapsto (P_k)^2$ y $q^j p_k \mapsto \frac{1}{2}(Q_j P_k + P_k Q_j)$. Pero al pasar a funciones cúbicas, resulta [25, p. 102] que no hay manera consistente de asignar un operador a la función $q^1 (p_1)^2$ en presencia de la condición (5.3). Este resultado negativo nos obliga a

abandonar la búsqueda de un homomorfismo entre el álgebra de Lie $C^\infty(M)$ y el álgebra de Lie de operadores autoadjuntos sobre \mathcal{H} .

(El estudio de operadores autoadjuntos conlleva otro problema, de carácter técnico: los operadores Q_j, P_k son necesariamente operadores no acotados [38], y hay que asegurarse de que los dominios de definición de dos operadores dados tengan intersección no trivial antes de formar su suma. Este problema se resuelve parcialmente si todos los operadores que debemos considerar tengan un dominio común denso e invariante; así ocurre en los ejemplos principales.)

5.5. No obstante la imposibilidad de ejecutar la correspondencia (5.3) tal cual, hay ejemplos importantes de correspondencias lineales $f \mapsto F$ que cumplen (5.3) cuando la función h es fija. Diremos que una función hamiltoniana h es *distinguida* si hay una subálgebra de Lie \mathcal{A} de $C^\infty(M)$ con $h \in \mathcal{A}$ y si existe una correspondencia lineal $f \mapsto F$ de \mathcal{A} en $\text{Op}(\mathcal{H})$ tal que:

$$f \mapsto F \implies \{f, h\} \mapsto -\frac{i}{\hbar}[F, H] \quad \text{para todo } f \in \mathcal{A}, \quad (5.4)$$

donde H es el operador imagen de h .

El problema de cuantización para un sistema dinámico clásico (5.1) es hallar dicha correspondencia tal que h sea distinguida.

El **problema de cuantización con simetría** es encontrar una correspondencia que cumple (5.4) para ciertas funciones hamiltonianas distinguidas cuando M posee un grupo de invariancia G , tal que $f \mapsto F$ sea *equivariante* respecto de dos acciones apropiadas de G .

5.2. Cuantización de Weyl

5.6. Tomamos $(M, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, s)$ donde s es la forma simpléctica usual sobre \mathbb{R}^{2n} . La “representación de Schrödinger” asocia a las funciones lineales q^j, p_k los siguientes operadores Q_j, P_k respectivamente sobre $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$[Q_j \psi](\zeta) := \zeta_j \psi(\zeta), \quad [P_k \psi](\zeta) := -i \frac{\partial \psi}{\partial \zeta_k}(\zeta). \quad (5.5)$$

(Comúnmente se escribe $Q_j = \zeta_j, P_k = -i\partial/\partial\zeta_k$; aquí ζ_j denota el operador de multiplicación correspondiente.)

Si conjugamos con la transformación de Fourier $\mathcal{F} \in \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^n))$, dado por:

$$\mathcal{F}\psi(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\zeta} \psi(\zeta) d^n \zeta,$$

y si escribimos $\widehat{Q}_j := \mathcal{F}Q_j\mathcal{F}^{-1}, \widehat{P}_k := \mathcal{F}P_k\mathcal{F}^{-1}$, obtenemos

$$[\widehat{Q}_j \phi](\xi) = -i \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j}(\xi), \quad [\widehat{P}_k \phi](\xi) := -\xi_k \phi(\xi). \quad (5.6)$$

(La correspondencia (5.6) se llama la “representación de Schrödinger en el espacio de momentos”.)

5.7. Cabe aclarar que las fórmulas (5.5), (5.6) pueden extenderse a dos representaciones equivalentes del álgebra de Lie $\mathfrak{h}(n)$, si agregamos la regla $\mathbf{1} \mapsto I$ (aquí $\mathbf{1}$ es la función constante de valor 1 sobre \mathbb{R}^{2n}). En otras palabras, el álgebra de Lie $\mathfrak{h}(n)$ se representa en $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ por $X_j \mapsto q^j$, $Y_k \mapsto p_k$, $T \mapsto \mathbf{1}$, y la receta (5.5) o bien (5.6) lleva esta en una representación de $\mathfrak{h}(n)$ por operadores autoadjuntos sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$. Esta es la versión infinitesimal de la representación unitaria irreducible π_1 de $\mathbb{H}(n)$ ya exhibida en (2.11).

5.8. Antes de seguir, recordamos que $\mathbb{H}(n)$ es isomorfo al grupo $\tilde{\mathbb{H}}(n)$ cuya ley de grupo es:

$$(a_1, b_1; c_1)(a_2, b_2; c_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2; c_1 + c_2 + \frac{1}{2}(a_1 b_2 - a_2 b_1)).$$

5.9. Definición. La **regla de cuantización de Weyl** extiende la representación de Schrödinger $q^j \mapsto Q_j$, $p_k \mapsto P_k$ al asociar un operador $\text{Op}(f)$ a una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ como sigue. Weyl analizó f en sus componentes de Fourier, reemplazó las funciones e^{ixq} y e^{iyp} por los operadores unitarios e^{ixQ} y e^{iyP} respectivamente, y reconstituye $\text{Op}(f)$ por la fórmula de inversión de Fourier. Formalmente:

$$\text{Op}(f) := (2\pi)^{-2n} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-ixQ - iyP} \left(\iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{ixq + iyp} f(q, p) d^n q d^n p \right) d^n x d^n y.$$

Más correctamente, sea $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ el “espacio de Schwartz” de funciones $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ tales que $(1 + \|x\|^2)^N \partial^K f$ sea acotada para todo $n \in \mathbb{N}$, $K \in \mathbb{N}^{2n}$. (La función gaussiana $f_0(q, p) := \exp(\frac{1}{2}(\|q\|^2 + \|p\|^2))$ queda en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$.) La transformada de Fourier inversa de $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ es dado por:

$$\mathcal{F}^{-1} f(x, y) := (2\pi)^{-n} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{ixq + iyp} f(q, p) d^n q d^n p.$$

Para $x, y \in \mathbb{R}^n$, sean $U(x) := e^{-ixQ}$, $V(y) := e^{-iyP}$; tenemos $[U(x)\psi](\zeta) := e^{-ix\zeta}\psi(\zeta)$, $[V(y)\psi](\zeta) := \psi(\zeta - y)$. De ahí se ve que $U(x)V(y) = e^{-ixy}V(y)U(x)$. Defínase

$$W(x, y) := e^{ixy/2}U(x)V(y) = e^{-ixy/2}V(y)U(x), \quad (5.7)$$

de donde:

$$[W(x, y)\psi](\zeta) = e^{-ix(\zeta - \frac{1}{2}y)}\psi(\zeta - y).$$

Ahora se puede definir, para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$:

$$\text{Op}(f) := (2\pi)^{-n} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \mathcal{F}^{-1} f(x, y) W(x, y) d^n x d^n y \quad (5.8)$$

como límite de sumas de Riemann, por ejemplo; la integral converge porque $\mathcal{F}^{-1}f$, al igual que f , queda en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$.

5.10. Es importante notar que (5.7) determina una representación del grupo de Heisenberg $\tilde{\mathbb{H}}(n)$. Mejor dicho, la correspondencia $(x, y; 0) \mapsto W(x, y)$ se extiende a una representación de todo $\tilde{\mathbb{H}}(n)$ al tomar $\pi(x, y; z) := e^{-iz}W(x, y) \in \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^n))$. En efecto:

$$\begin{aligned} & [\pi(x_1, y_1; z_1)\pi(x_2, y_2; z_2)\psi](\zeta) \\ &= e^{-i(z_1+z_2+x_1(\zeta-\frac{1}{2}y_1))}[W(x_2, y_2)\psi](\zeta-y_1) \\ &= e^{-i(z_1+z_2+x_1(\zeta-\frac{1}{2}y_1)+x_2(\zeta-y_1-\frac{1}{2}y_2))}\psi(\zeta-y_1-y_2) \\ &= e^{-i((x_1+x_2)(\zeta-\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2)+z_1+z_2+\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1))}\psi(\zeta-y_1-y_2) \\ &= [\pi((x_1, y_1; z_1)(x_2, y_2; z_2))\psi](\zeta). \end{aligned}$$

5.3. Los operadores de Grossmann y Royer

5.11. Podemos reformular (5.8) de un modo más directo, evitando los procesos de análisis y síntesis de Fourier, si tomamos en cuenta el *teorema de Plancherel-Parseval* que afirma la unitariedad de la transformación de Fourier:

$$\iint_{\mathbb{R}^{2n}} \overline{\mathcal{F}f(x, y)} \mathcal{F}h(x, y) d^n x d^n y = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \overline{f(q, p)} h(q, p) d^n q d^n p.$$

Si introducimos los operadores de Grossmann [24] y Royer [39] definidos simbólicamente por $\Omega(q, p) = “(\mathcal{F}^{-1}W)(q, p)” := (2\pi)^{-n} \iint e^{ixq+iy p} W(x, y) d^n x d^n y$, podemos *redefinir* (5.8) como sigue:

$$\text{Op}(f) := (2\pi)^{-n} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} f(q, p)\Omega(q, p) d^n q d^n p. \quad (5.9)$$

Para obtener la definición precisa de Ω , basta hacer un pequeño cálculo distribucional:

$$\begin{aligned} [\Omega(q, p)\psi](\zeta) &:= (2\pi)^{-n} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{ixq+iy p}[W(x, y)\psi](\zeta) d^n x d^n y \\ &= (2\pi)^{-n} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{ix(q-\zeta+\frac{1}{2}y)} e^{iy p}\psi(\zeta-y) d^n x d^n y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(q-\zeta+\frac{1}{2}y) e^{iy p}\psi(\zeta-y) d^n y \\ &= 2^n e^{2ip(\zeta-q)}\psi(2q-\zeta), \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde hemos usado las identidades distribucionales:

$$\delta(\lambda k) = \lambda^{-n} \delta(k), \quad \text{para } \lambda > 0, k \in \mathbb{R}^n; \quad (5.11a)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ixk} d^n x = (2\pi)^n \delta(k). \quad (5.11b)$$

5.12. Excursus: cálculo de deltas. El desarrollo subsiguiente de la cuantización de Weyl se simplifica considerablemente si empleamos sistemáticamente ciertos cálculos con las deltas de Dirac. (Una ruta alternativa, que no emplea dichos cálculos pero que en su lugar usa técnicas de dualidad en espacios de distribuciones temperadas, está expuesta en [23].) La distribución δ —sobre \mathbb{R}^m — es el funcional lineal definido sobre $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ por:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \delta(x - y) f(y) d^m y = f(x). \quad (5.12)$$

(Dicho de otra forma, $(x, y) \mapsto \delta(x - y)$ es esencialmente un núcleo reproductor para el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^m)$.) Aparte de las identidades de dilatación (5.11a) que son consecuencia de $d^m(\lambda y) = \lambda^m d^m y$, y (5.11b) (una formulación simbólica del teorema de inversión de Fourier), tenemos la propiedad de reflexión:

$$\delta(-x) = \delta(x),$$

(por la invariancia de la medida de Lebesgue bajo $x \mapsto -x$) y la importante regla de simplificación:

$$\delta(f(x)) = \sum_{\{x_0: f(x_0)=0\}} \frac{\delta(x_0)}{|f'(x_0)|}$$

toda vez que f sea una función con ceros simples aislados. La definición (5.12) conduce a una identidad reproductora para las deltas:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \delta(x - y) \delta(y - z) d^m y = \delta(x - z).$$

Finalmente, consideramos la distribución $\Psi_x(y) := \delta(x - y)$ sobre \mathbb{R}^m . La familia $\{\Psi_x : x \in \mathbb{R}^m\}$, aunque no incluida en $L^2(\mathbb{R}^m)$ (es parte del espacio más amplio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ de distribuciones temperadas) se comporta como una familia de “vectores principales” para $L^2(\mathbb{R}^m)$. (Por ejemplo, se verifica $\langle \Psi_x | h \rangle = h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$.) En particular, tenemos una fórmula para calcular trazas:

$$\text{Tr}[A] = \int_{\mathbb{R}^m} \langle \Psi_x | A \Psi_x \rangle d^m x \quad (5.13)$$

es decir, el lado derecho de (5.13) coincide con la traza de A si esta existe. Resulta que el lado derecho tiene sentido para ciertos operadores no trazables, en cuyo caso define una “traza generalizada” del operador que también denotamos por $\text{Tr}[A]$. Este es el caso, en particular, si A posee un espectro discreto de autovalores no absolutamente sumable, pero si sumable en el sentido de Abel: la sumatoria de Abel de sus autovalores es su traza generalizada.

5.13. Teorema. *Los operadores $\{\Omega(u) : u \in \mathbb{R}^{2n}\}$ sobre $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ poseen las siguientes propiedades:*

- i) $\Omega^*(u) = \Omega(u)$, para todo $u \in \mathbb{R}^{2n}$;
- ii) $\text{Tr}[\Omega(u)] = 1$, para todo $u \in \mathbb{R}^{2n}$;
- iii) $\pi(g)\Omega(u)\pi(g)^{-1} = \Omega(g \cdot u)$, para todo $u \in \mathbb{R}^{2n}$, $g \in \tilde{\mathbb{H}}(n)$, donde la acción de $\tilde{\mathbb{H}}(n)$ sobre \mathbb{R}^{2n} es dado por $(x, y; z) \cdot (q, p) := (q + y, p - x)$;
- iv) $\text{Tr}[\Omega(u)\Omega(v)] = (2\pi)^n \delta(u - v)$, para todo $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$.

Observación. Si identificamos \mathbb{R}^{2n} con la órbita coadjunta del grupo de Heisenberg correspondiente a $t = 1$ en (4.13), la acción dada en (iii) es precisamente la acción coadjunta de $\tilde{\mathbb{H}}(n)$.

Demostración: Primero observamos que si (iii) es válido, la transitividad de la acción sobre \mathbb{R}^{2n} dice que basta verificar $\Omega(0)^* = \Omega(0)$, $\text{Tr}[\Omega(0)] = 1$ para comprobar (i) y (ii).

Ahora

$$[\Omega(0)\psi](\zeta) = 2^n \psi(-\zeta)$$

(tomando $q = p = 0$ en (5.10)) es un “operador de paridad” sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$. Tenemos

$$\begin{aligned} \langle \chi | \Omega(0)\phi \rangle &= 2^n (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \overline{\chi(u)} \phi(-u) d^{2n}u \\ &= 2^n (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \overline{\chi(-v)} \phi(v) d^{2n}v = \langle \Omega(0)\chi | \phi \rangle, \end{aligned}$$

así que $\Omega(0)^* = \Omega(0)$.

Si $\{h_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ denota la base ortonormal de funciones de Hermite para $L^2(\mathbb{R}^n)$, recordamos que $h_\alpha(-\zeta) = (-1)^{|\alpha|} h_\alpha(\zeta)$ para todo multiíndice α , así que

$$\text{Tr}[\Omega(0)] = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \langle h_\alpha | \Omega(0)h_\alpha \rangle = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} 2^n (-1)^{|\alpha|} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2(-1)^k \right)^n = 1.$$

(La última sumatoria se toma en el sentido de Abel.)

Para comprobar la covariancia (iii), usamos el hecho de que cualquier elemento del grupo $\tilde{\mathbb{H}}(n)$ puede escribirse en la forma $g = \exp(aX) \exp(bY) \exp(cT)$

para $a, b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Es $\pi(\exp(aX)) = \pi(a, 0; 0) = U(a)$, $\pi(\exp(bY)) = \pi(0, b; 0) = V(b)$, $\pi(\exp(cT)) = \pi(0, 0; c) = e^{-ic}I$. Basta entonces comprobar (iii) con $U(a)$ o bien $V(b)$ en lugar de $\pi(g)$. Tenemos

$$\begin{aligned}
[U(a)\Omega(q, p)U(-a)\psi](\zeta) &:= e^{-ia\zeta}[\Omega(q, p)U(-a)\psi](\zeta) \\
&= 2^n e^{-ia\zeta} e^{2ip(\zeta-q)} [U(-a)\psi](2q - \zeta) \\
&= 2^n e^{-ia\zeta + 2ip(\zeta-q) + ia(2q-\zeta)} \psi(2q - \zeta) \\
&= 2^n e^{2i(p-a)(\zeta-q)} \psi(2q - \zeta) = [\Omega(q, p-a)\psi](\zeta); \\
[V(b)\Omega(q, p)V(-b)\psi](\zeta) &:= [\Omega(q, p)V(-b)\psi](\zeta - b) \\
&= 2^n e^{2ip(\zeta-q-b)} [V(-b)\psi](2q - \zeta + b) \\
&= 2^n e^{2ip(\zeta-q-b)} \psi(2q + 2b - \zeta) \\
&= [\Omega(q+b, p)\psi](\zeta).
\end{aligned}$$

Con esto, hemos verificado (i), (ii) y (iii) del enunciado.

Para (iv), usamos la fórmula (5.13) que calcula la traza. Primero observamos que, para todo $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\langle \Omega(q, p)\Psi_\zeta \mid \psi \rangle &:= \langle \Psi_\zeta \mid \Omega(q, p)\psi \rangle = [\Omega(q, p)\psi](\zeta) \\
&= 2^n e^{2ip(\zeta-q)} \psi(2q - \zeta) = 2^n e^{2ip(\zeta-q)} \langle \Psi_{2q-\zeta} \mid \psi \rangle,
\end{aligned}$$

o bien $\Omega(q, p)\Psi_\zeta = 2^n e^{-2ip(\zeta-q)} \Psi_{2q-\zeta}$. Luego de (5.11) y (5.13) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\Omega(q, p)\Omega(q', p')] &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \Omega(q, p)\Psi_\zeta \mid \Omega(q', p')\Psi_\zeta \rangle d^n \zeta \\
&= 4^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{2ip(\zeta-q) - 2ip'(\zeta-q')} \delta((2q - \zeta) - (2q' - \zeta)) d^n \zeta \\
&= 2^n \delta(q - q') \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i(p-p')(\zeta-q)} d^n \zeta \\
&= 2^n \delta(q - q') \pi^n \delta(p - p') = (2\pi)^n \delta(u - u'),
\end{aligned}$$

para todo $u = (q, p)$, $u' = (q', p') \in \mathbb{R}^{2n}$. □

5.4. Símbolos de Weyl y su producto torcido

5.14. Definición. El núcleo operatorial Ω puede usarse no solamente para “cuantizar” funciones mediante (5.9), sino también para “dequantizar” operadores. Sea A un operador sobre $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$. Su **símbolo de Weyl** es la función:

$$W_A(q, p) := \text{Tr}[A\Omega(q, p)]$$

toda vez que la traza existe (aunque sea en el sentido generalizado). Para simplificar la discusión, supongamos por un momento que A es de clase de traza. Entonces $A \mapsto W_A(q, p)$ es una forma lineal continua sobre $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$. Además, A pertenece al núcleo de todas estas formas lineales si y solo si $A = 0$, ya que $\{\Omega(u) : u \in \mathbb{R}^{2n}\}$ genera un subespacio denso de $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ (con la topología fuerte de operadores); esto se puede demostrar directamente, o bien al notar que este último conjunto es la imagen de Fourier de $\{W(x, y) : x, y \in \mathbb{R}^n\}$, que genera el mismo subespacio que $\{\pi(g) : g \in \tilde{\mathbb{H}}(n)\}$, cuya densidad resulta de la irreducibilidad de la representación π . En conclusión, la aplicación lineal $A \mapsto W_A$ de operadores en símbolos es uno-a-uno.

5.15. La *propiedad tracial* $\text{Tr}[\Omega(u)\Omega(v)] = (2\pi)^n \delta(u - v)$ de Ω ahora permite concluir que los procesos de “cuantización” y “decuantización” son *inversos*, es decir:

$$\text{Op}(W_A) = A. \quad (5.14)$$

En efecto, si $B := \text{Op}(W_A)$, tenemos $B = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} W_A(v)\Omega(v) d^{2n}v$, así que

$$\begin{aligned} W_B(u) &= (2\pi)^{-n} \text{Tr} \left[\Omega(u) \int_{\mathbb{R}^{2n}} \Omega(v) W_A(v) d^{2n}v \right] \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} W_A(v) \text{Tr}[\Omega(u)\Omega(v)] d^{2n}v = W_A(u). \end{aligned}$$

Como $A \mapsto W_A$ es uno-a-uno, concluimos que $B = A$.

Podemos entonces reformular las propiedades básicas del *cuantizador* Ω en términos de los símbolos de Weyl.

5.16. Teorema. *La correspondencia $A \mapsto W_A$ posee las siguientes propiedades:*

- i) $W_{A^*}(u) = \overline{W_A(u)}$, para todo $u \in \mathbb{R}^{2n}$;
- ii) $W_I = \mathbf{1}$, (la función constante de valor 1);
- iii) $W_{\pi(g)A\pi(g)^{-1}} = (W_A)^g$, para todo $g \in \tilde{\mathbb{H}}(n)$;
- iv) $\text{Tr}[AB] = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} W_A(u)W_B(u) d^{2n}u$, para todo A, B .

Demostración: i): $W_{A^*}(u) = \text{Tr}[A^*\Omega(u)]$ es el conjugado del número complejo $\text{Tr}[(A^*\Omega(u))^*] = \text{Tr}[\Omega(u)^*A] = \text{Tr}[\Omega(u)A] = W_A(u)$.

ii): $W_I(u) = \text{Tr}[\Omega(u)] = 1$, para todo $u \in \mathbb{R}^{2n}$.

iii): Como $(W_A)^g(u) := W_A(g^{-1} \cdot u) = \text{Tr}[A\Omega(g^{-1} \cdot u)]$, tenemos

$$W_{\pi(g)A\pi(g)^{-1}}(u) = \text{Tr}[\pi(g)A\pi(g)^{-1}\Omega(u)] = \text{Tr}[A\pi(g)^{-1}\Omega(u)\pi(g)] = (W_A)^g(u).$$

iv): En vista de (5.14), tenemos:

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} W_A(u)W_B(u) d^{2n}u &= (2\pi)^{-n} \text{Tr} \left[A \int_{\mathbb{R}^{2n}} \Omega(u) W_B(u) d^{2n}u \right] \\ &= \text{Tr}[A \text{Op}(W_B)] = \text{Tr}[AB]. \quad \square \quad (5.15) \end{aligned}$$

5.17. La *propiedad tracial* (5.15) de la correspondencia $A \mapsto W_A$ tiene una interpretación importante. Desde el punto de vista de la física estadística clásica, una función real f (como W_A si $A^* = A$) sobre el espacio de las fases $M = \mathbb{R}^{2n}$ representa una cantidad observable (o simplemente “un observable”) asociado a un determinado sistema clásico elemental. El valor real que se mide u observa depende del “estado” del sistema, representado por una densidad de probabilidad, es decir una función no negativa ρ sobre el espacio de las fases. El “valor esperado” del observable f en el estado ρ es entonces $\langle f \rangle_\rho := (2\pi)^{-n} \int_M f(u) \rho(u) d^{2n}u$.

En la mecánica cuántica ordinaria, se conserva este lenguaje de observables y estados; pero ahora un observable es un operador autoadjunto $A = A^*$, y un estado se representa por un operador trazable positivo B ; la receta para calcular valores esperados es: $\langle A \rangle_B := \text{Tr}[AB]$. Fue Moyal [33] quien inicialmente notó que el esquema de cuantización de Weyl tiene la propiedad característica de que *los valores esperados cuánticos se calculan mediante el procedimiento clásico* sobre los símbolos. (La diferencia entre las teorías clásica y cuántica se concentra entonces en el hecho de que los “estados cuánticos” —símbolos W_B para operadores positivos B — no siempre son funciones no negativas.) Llamamos “cuantización de Moyal” a una regla de cuantización que exhibe la propiedad tracial (5.15).

5.18. Definición. El producto de operadores sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ induce un **producto torcido** de funciones sobre \mathbb{R}^{2n} , mediante la correspondencia biunívoca $A \leftrightarrow W_A$: colocamos $W_A \times W_B := W_{AB}$. Para poner de manifiesto que esta definición no depende de A, B , consideramos el siguiente cálculo distribucional:

$$\begin{aligned} [W_A \times W_B](u) &:= W_{AB}(u) = \text{Tr}[\Omega(u) AB] \\ &= (2\pi)^{-2n} \text{Tr} \left[\Omega(u) \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} W_A(v) \Omega(v) d^{2n}v W_B(w) \Omega(w) d^{2n}w \right] \\ &= (2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \text{Tr}[\Omega(u) \Omega(v) \Omega(w)] W_A(v) W_B(w) d^{2n}v d^{2n}w \end{aligned}$$

Por la tanto, se puede definir el producto torcido de dos funciones f, g por:

$$(f \times g)(u) := (2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} L(u, v, w) f(v) g(w) d^{2n}v d^{2n}w, \quad (5.16)$$

donde el “trinúcleo” L es dado por:

$$L(u, v, w) := \text{Tr}[\Omega(u) \Omega(v) \Omega(w)].$$

Obsérvese que (5.16) determina una operación bilineal $(f, g) \mapsto f \times g$, cuya asociatividad se debe esencialmente a la ciclicidad de la traza: $L(u, v, w) \equiv L(v, w, u)$. Dejamos de lado el tema importante de precisar el dominio de este

producto, que es tratado con detalle en [23]; aquí es suficiente notar que $f \times g$ está bien definida si uno de f, g es una distribución temperada (en particular, un elemento de $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$) y el otro pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$, y que el producto torcido es continuo sobre el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$.

Debemos calcular el trinúcleo L en forma explícita:

$$\begin{aligned}
L(u, v, w) &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \Psi_\zeta | \Omega(u) \Omega(v) \Omega(w) \Psi_\zeta \rangle d^n \zeta \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \Omega(u) \Psi_\zeta | \Omega(v) \Omega(w) \Psi_\zeta \rangle d^n \zeta \\
&= 2^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{2ip_u(\zeta - q_u)} \langle \Omega(v) \Psi_{2q_u - \zeta} | \Omega(w) \Psi_\zeta \rangle d^n \zeta \\
&= 2^{3n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2ip_u(\zeta - q_u) + 2ip_v(2q_u - \zeta - q_v) - 2ip_w(\zeta - q_w)} \langle \Psi_{2q_v - 2q_u + \zeta} | \Psi_{2q_w - \zeta} \rangle d^n \zeta \\
&= 2^{3n} e^{2i(2q_u p_v - q_u p_u - q_v p_v + q_w p_w)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\zeta(p_u - p_v - p_w)} \delta(2\zeta - 2q_u + 2q_v - 2q_w) d^n \zeta \\
&= 2^{2n} e^{2i(2q_u p_v - q_u p_u - q_v p_v + q_w p_w)} e^{2i(q_u - q_v + q_w)(p_u - p_v - p_w)} \\
&= 2^{2n} \exp\{2i(q_u p_v - q_v p_u + q_v p_w - q_w p_u + q_w p_u - q_u p_w)\} \\
&= 2^{2n} \exp\{-2i[s(u, v) + s(v, w) + s(w, u)]\},
\end{aligned}$$

de donde obtenemos la forma explícita del producto torcido:

$$(f \times g)(u) = \pi^{-2n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-2i[s(u, v) + s(v, w) + s(w, u)]} f(v) g(w) d^{2n} v d^{2n} w. \quad (5.17)$$

5.19. Definición. El corchete de Moyal de dos funciones $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ se define ahora por:

$$\{f, h\}_M := -i(f \times h - h \times f).$$

El paradigma de Dirac ahora tiene la siguiente respuesta parcial: *si h es un polinomio lineal o cuadrático, entonces $\{f, h\}_M = \{f, h\}$ para todo $f \in C^\infty(M)$.* Podemos entonces considerar la cuantización de Weyl como un proceso de “deformación” que lleva el corchete de Poisson en el corchete de Moyal, dejando invariante las ecuaciones de movimiento para sistemas gobernados por hamiltonianos lineales o cuadráticos. Este es el punto de vista adoptado en [6], que conduce a una teoría de deformaciones de estructuras de Poisson.

5.20. Proposición.

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} (f \times h)(u) d^{2n} u = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(u) h(u) d^{2n} u.$$

Demostración: Tenemos $L(u, v, w) = \text{Tr}[\Omega(u)\Omega(v)\Omega(w)] = W_{\Omega(v)\Omega(w)}(u)$, así que

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} L(u, v, w) d^{2n}u &= \text{Tr}[\text{Op}(W_{\Omega(v)\Omega(w)})] = \text{Tr}[\Omega(v)\Omega(w)] \\ &= (2\pi)^n \delta(v - w). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2n}} (f \times h)(u) d^{2n}u &= (2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} L(u, v, w) f(v) h(w) d^{2n}u d^{2n}v d^{2n}w \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \delta(v - w) f(v) h(w) d^{2n}v d^{2n}w \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(v) h(v) d^{2n}v. \quad \square \end{aligned}$$

5.21. Corolario. $\int_{\mathbb{R}^{2n}} (f \times g)(u) h(u) d^{2n}u = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(u) (g \times h)(u) d^{2n}u$ para todo $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$.

Demostración: Ambas expresiones coinciden con $\int_{\mathbb{R}^{2n}} (f \times g \times h)(u) d^{2n}u$. \square

5.22. Si definimos $\langle f, h \rangle := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} (f \times h)(u) d^{2n}u$, obtenemos una forma bilineal (no sesquilineal) sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$. Con esta notación, el Corolario se lee: $\langle f \times g, h \rangle = \langle f, g \times h \rangle$. Podemos entonces *extender el producto por dualidad*, en la siguiente forma. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ (es decir, T es una distribución temperada sobre el espacio de las fases), definimos

$$\langle T \times f, h \rangle := \langle T, f \times h \rangle, \quad \langle f \times T, h \rangle := \langle T, h \times f \rangle,$$

para $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ (los lados derechos denotan la dualidad usual entre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ y $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$). Este tipo de extensión permite ampliar el dominio del producto torcido más allá del ámbito de convergencia de la integral doble (5.17); para más detalles, remitimos a [23]. Es de notar que la posibilidad de hacer esta extensión surge del teorema anterior, que a su vez depende de la propiedad tracial del trinúcleo Ω .

5.5. Cuantización de Moyal: un esquema axiomático

5.23. Recapitulemos ahora el esquema general de la regla de la cuantización de Weyl. Sus ingredientes son: (a) un grupo de Lie $G = \widetilde{\text{H}}(n)$; (b) una representación unitaria irreducible π de G sobre un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}_\pi = L^2(\mathbb{R}^n)$; (c) una órbita coadjunta $M = \mathbb{R}^{2n}$ de G ; y (d) una normalización $d\mu(u) := (2\pi)^{-n} d^{2n}u$ de la medida G -invariante sobre M . Si ω es la forma simpléctica natural sobre la órbita M , la medida G -invariante sobre M

dada por $\mu := C \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ ($\frac{1}{2} \dim M$ veces) se llama una **medida de Liouville** sobre M : es única salvo por la determinación de la constante positiva C . Observamos ahora que Ω depende únicamente de estos cuatro datos; esto nos conduce a la siguiente definición.

5.24. Definición. Para una cuaterna dada $(G, \pi, M, d\mu)$, un **cuantizador de Stratonovich–Weyl** es una aplicación $\Omega: M \rightarrow \{\text{operadores sobre } \mathcal{H}_\pi\}$ tal que:

- i) $\Omega^*(u) = \Omega(u)$, para todo $u \in M$;
- ii) $\text{Tr}[\Omega(u)] = 1$, para todo $u \in M$;
- iii) $\pi(g)\Omega(u)\pi(g)^{-1} = \Omega(g \cdot u)$, para todo $u \in M, g \in G$;
- iv) $\text{Tr}[\Omega(u)\Omega(v)] =: K(u, v)$ es el *núcleo reproductor* para el subespacio cerrado $\mathcal{K} \subset L^2(M, d\mu)$ generado por los *símbolos* $W_A := \text{Tr}[A\Omega(\cdot)]$.

Si tal Ω existe, definimos $L(u, v, w) := \text{Tr}[\Omega(u)\Omega(v)\Omega(w)]$ e introducimos el *producto torcido* de funciones sobre M por

$$(f \times g)(u) := \iint_M L(u, v, w) f(v) g(w) d\mu(v) d\mu(w).$$

La correspondencia $A \mapsto W_A$ se invierte por la regla $A = \int_M W_A(u) \Omega(u) d\mu(u)$, en vista de la propiedad tracial (iv).

5.25. El *programa de cuantización de Moyal* consiste en la búsqueda de cuantizadores Ω , con sus respectivos teoremas de existencia y unicidad, para determinados grupos de Lie G . En lo sucesivo nos dedicaremos a realizar este programa para grupos *compactos*. Con esto evitaremos ciertos problemas de rigor analítico que acompañan el manejo de trazas generalizadas, puesto que los espacios de representación \mathcal{H}_π serán finitodimensionales. El interés de los grupos compactos, con miras a las aplicaciones físicas, viene de su lugar central en la teoría de spin y otras teorías de “simetrías internas”.

6. Cuantización de Moyal sobre la Esfera

No hay problema fundamental de la mecánica cuántica que no puede entenderse en términos de las matrices 2×2 . (Pero eso nos dice algo importante acerca de las matrices 2×2 .)

—E. P. Wigner

6.1. Un cuantizador para la esfera

6.1. En este capítulo, tomamos $G = SU(2)$, que es un grupo de Lie compacto, simple, conexo y simplemente conexo. Resulta que $H^2(SU(2), \mathbb{R}) = 0$, así que no hace falta considerar extensiones centrales de $SU(2)$: las variedades simplécticas homogéneas para $SU(2)$ son precisamente sus órbitas coadjuntas. Estas órbitas son el origen $\{0\} \in \mathfrak{su}(2)^*$ y las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = C$, donde C es una constante positiva. Tomamos $M = \mathbb{S}^2$, la esfera unitaria en $\mathfrak{su}(2)^* \cong \mathbb{R}^3$, es decir, tomamos $C = 1$; recordamos que $SU(2)$ actúa sobre \mathbb{S}^2 por rotaciones.

Las representaciones unitarias irreducibles de $SU(2)$ forman una familia $\{\pi_j : 2j \in \mathbb{N}\}$; la dimensión del espacio de representación \mathcal{H}_j de π_j es $(2j + 1)$. El caso $j = 0$ corresponde a la representación trivial sobre \mathbb{C} ; en adelante supondremos que $j > 0$.

Las medidas de Liouville sobre \mathbb{S}^2 son los múltiplos positivos de la forma de área $\sin \theta d\theta d\phi$ (invariante bajo rotaciones; viene de la forma simpléctica $\omega = \sin \theta d\theta \wedge d\phi$). Normalizamos esta medida por $d\mu_j(\theta, \phi) := \frac{2j+1}{4\pi} \sin \theta d\theta d\phi$, para $j \in \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}$.

6.2. Debemos buscar un cuantizador de Stratonovich–Weyl para la cuaterna $(SU(2), \pi_j, \mathbb{S}^2, d\mu_j)$. Esta es una función $\Omega_j: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_j) \cong \mathbb{C}^{(2j+1) \times (2j+1)}$, tal que, para $u \in \mathbb{S}^2$, $g \in SU(2)$:

$$(i) \quad \Omega_j(u)^* = \Omega_j(u); \tag{6.1a}$$

$$(ii) \quad \text{Tr}[\Omega_j(u)] = 1; \tag{6.1b}$$

$$(iii) \quad \pi_j(g)\Omega_j(u)\pi_j(g)^{-1} = \Omega_j(g \cdot u); \tag{6.1c}$$

$$(iv) \quad \text{Tr}[\Omega_j(u)\Omega_j(v)] = K_j(u, v), \tag{6.1d}$$

donde $K_j(\cdot, \cdot)$ es el *núcleo reproductor* para el subespacio $\mathcal{K}_j \subset L^2(\mathbb{S}^2, d\mu_j)$ generado por los “símbolos” $W_A^j := \text{Tr}[A\Omega(\cdot)]$.

6.3. Es de notar que \mathcal{K}_j es un espacio de Hilbert *finitodimensional*. De hecho, si E_{sr} denota la matriz $(2j + 1) \times (2j + 1)$ con entrada (s, r) igual a 1 y sus demás entradas iguales a 0, cada $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_j)$ tiene la forma $A = \sum_{r,s} a_{sr} E_{sr}$, así que \mathcal{K}_j

es generado por los símbolos de los E_{sr} , que son precisamente las entradas (r, s) de la matriz de Ω_j .

Denotamos por $Z_{rs}^j(u)$ la entrada (r, s) de $\Omega_j(u)$. Usamos el convenio de que $r, s \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$ (así que son semienteros cuando j es semientero). Nuestra tarea es identificar estas “funciones especiales” Z_{rs}^j sobre la esfera.

6.2. Las representaciones unitarias irreducibles de $SU(2)$

6.4. Notación. Sea $\mathcal{D}_{rs}^j(g)$ la entrada (r, s) de la matriz de $\pi_j(g)$, para $g \in SU(2)$. Cualquier elemento $g \in SU(2)$ puede escribirse como un producto $g = \exp(-\alpha Z) \exp(\beta Y) \exp(-\gamma Z)$, donde $Y := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Z := \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ son dos de las tres generadores $\{X, Y, Z\}$ de $\mathfrak{su}(2)$ dadas en (1.10). Los ángulos α, β, γ son los *ángulos de Euler* de g . Los signos siguen el convenio adoptado en Biedenharn y Louck [10]; en ese libro se recopilan muchas fórmulas de funciones especiales y coeficientes de Clebsch–Gordan que citaremos a continuación sin demostración. Luego $\mathcal{D}_{rs}^j(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \mathcal{D}_{rs}^j(g)$ toma la forma

$$\mathcal{D}_{rs}^j(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-ir\alpha} d_{rs}^j(\beta) e^{-is\gamma},$$

al usar una base ortonormal de \mathcal{H}_j respecto del cual los $\pi_j(\exp(-\alpha Z))$ poseen matrices diagonales; se puede verificar que

$$\begin{aligned} d_{rs}^j(\beta) &= \sqrt{(j+r)!(j-r)!(j+s)!(j-s)!} \\ &\times \sum_t (-1)^{r-s+t} \frac{(\cos \frac{1}{2}\beta)^{2j-r+s-2t} (\sin \frac{1}{2}\beta)^{r-s+2t}}{t!(j+s-t)!(r-s+t)!(j-r-t)!} \end{aligned} \quad (6.2)$$

donde la suma extiende sobre los valores enteros de t tales que los argumentos de los factoriales en el denominador sean no negativos: $\max\{0, s-r\} \leq t \leq \min\{j+s, j-r\}$. Alternativamente, tenemos la fórmula:

$$d_{rs}^j(\beta) = \sqrt{\frac{(j+s)!(j-s)!}{(j+r)!(j-r)!}} (\cos \frac{1}{2}\beta)^{r+s} (\sin \frac{1}{2}\beta)^{s-r} P_{j-s}^{(s-r, r+s)}(\cos \beta), \quad (6.3)$$

donde $P_n^{(a,b)}$ denota un polinomio de Jacobi [48].

6.5. Varias funciones especiales sobre la esfera son casos particulares de las funciones $\mathcal{D}_{rs}^j(g)$. Como $\mathbb{S}^2 \cong SU(2)/\mathbb{T}$, la fibración natural $SU(2) \rightarrow \mathbb{S}^2$ lleva ángulos de Euler sobre $SU(2)$ en coordenadas esféricas sobre \mathbb{S}^2 por $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (\beta, \alpha)$; en consecuencia, las funciones sobre $SU(2)$ que son independientes de γ se proyectan a \mathbb{S}^2 . Para $l \in \mathbb{N}$, $m \in \{-l, \dots, l-1, l\}$, las funciones

$$Y_{lm}(\beta, \alpha) := \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \overline{\mathcal{D}}_{m0}^l(\alpha, \beta, \gamma) \quad (6.4)$$

(donde la barra denota conjugación compleja) se llaman **armónicos esféricos** sobre \mathbb{S}^2 . Los factores de normalización son elegidos para garantizar que los Y_{lm} son ortonormales, respecto de la medida $\sin \theta d\theta d\phi$ sobre \mathbb{S}^2 . De hecho, ellos forman una *base ortonormal* para $L^2(\mathbb{S}^2)$. En coordenadas esféricas:

$$Y_{lm}(\beta, \alpha) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \beta) e^{im\alpha} \quad (6.5)$$

donde los P_l^m son las “funciones asociadas de Legendre”. Cuando $m = 0$, obtenemos

$$Y_{l0}(\beta, \alpha) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}} P_l(\cos \beta),$$

donde los P_l son los *polinomios de Legendre*.

Vale la pena tomar nota de una fórmula importante que establece una relación entre los armónicos esféricos y los polinomios de Legendre:

$$\sum_{m=-l}^l Y_{lm}(u) \bar{Y}_{lm}(v) = \frac{4\pi}{2l+1} P_l(\cos \theta_{uv}), \quad (6.6)$$

donde θ_{uv} denota el ángulo entre los dos puntos $u, v \in \mathbb{S}^2$. (Nota: como los Y_{lm} son ortonormales, esta fórmula dice que $(u, v) \mapsto P_l(\cos \theta_{uv})$ es un *núcleo reproductor* para el subespacio de $L^2(\mathbb{S}^2, \sin \theta d\theta d\phi)$ generado por los Y_{lm} con l fijo, es decir, las funciones armónicas de grado l .)

6.6. La condición de covariancia (6.1c) para Ω_j se escribe en términos de los elementos de matriz como sigue:

$$Z_{rs}^j(g \cdot u) = \sum_{p,q=-j}^j \mathcal{D}_{rp}^j(g) Z_{pq}^j(u) \bar{\mathcal{D}}_{sq}^j(g), \quad (6.7)$$

ya que $\pi_j(g)^{-1} = \pi_j(g)^*$ por unitariedad.

6.7. Las funciones $\mathcal{D}_{rp}^j(g) \bar{\mathcal{D}}_{sq}^j(g)$ son elementos de matriz del *producto tensorial* de matrices $\pi_j(g) \otimes \pi_j(g)^* =: (\pi_j \otimes \bar{\pi}_j)(g)$. La representación $\bar{\pi}_j$ es equivalente a π_j ya que, para $SU(2)$, hay solamente una clase de equivalencia de representaciones unitarias irreducibles en cada dimensión finita. Ahora, el producto tensorial de representaciones $\pi_j \otimes \bar{\pi}_j \sim \pi_j \otimes \pi_j$ no es irreducible, sino que se descompone en la forma:

$$\pi_j \otimes \pi_j \sim \bigoplus_{l=0}^{2j} \pi_l,$$

un hecho que recibe el nombre de “identidad de Clebsch y Gordan”. Más generalmente, el producto tensorial de dos representaciones unitarias irreducibles cualesquiera de $SU(2)$ se descompone como sigue:

$$\pi_j \otimes \pi_k \sim \bigoplus_{l=|j-k|}^{j+k} \pi_l. \quad (6.8)$$

6.8. La equivalencia (6.8) tiene la siguiente elaboración: hay una matriz unitaria C , con $(2j+1)(2k+1)$ filas, tal que

$$C(\pi_j(g) \otimes \pi_k(g))C^* = \bigoplus_{l=|j-k|}^{j+k} \pi_l(g), \quad \text{para todo } g \in SU(2); \quad (6.9)$$

la suma directa a la derecha es la matriz formada por bloques diagonales que son copias de las matrices de $\pi_l(g)$, para $l \in \{|j-k|, \dots, j+k\}$. Denotamos las entradas de la matriz C con la notación $\left\langle \begin{matrix} j & k \\ r & s \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\rangle$, donde $r \in \{-j, \dots, j\}$ y $s \in \{-k, \dots, k\}$ determinan una fila de C ; $l \in \{|j-k|, \dots, j+k\}$ y $m \in \{-l, \dots, l\}$ determinan una columna. La fórmula (6.9) no determina C unívocamente (por ejemplo, es insensible a multiplicación de C por un escalar de módulo 1); se obtiene unicidad al usar el “convenio de fases de Condon y Shortley”, que exige que las entradas $\left\langle \begin{matrix} j & j \\ j & -j \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l \\ 0 \end{matrix} \right\rangle$ sean positivas. Con este convenio, las entradas

$\left\langle \begin{matrix} j & k \\ r & s \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\rangle$ se llaman los **coeficientes de Clebsch–Gordan** para $SU(2)$.

La fórmula general para los coeficientes de Clebsch–Gordan es [10, fórmula (3.170)]:

$$\left\langle \begin{matrix} j & k \\ r & s \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\rangle = \delta_{r+s,m} \sqrt{\frac{(2l+1)(j+k-l)!(l+j-k)!(l+k-j)!}{(j+k+l+1)!}} \times \\ \sum_t (-1)^t \frac{\sqrt{(j+r)!(j-r)!(k+s)!(k-s)!(l+m)!(l-m)!}}{t!(j+k-l-t)!(j-r-t)!(k+s-t)!(l-k+r+t)!(l-j-s+t)!}$$

donde la suma extiende sobre los valores enteros de t tales que los argumentos de los factoriales en el denominador sean no negativos.

6.9. Los coeficientes de Clebsch–Gordan obedecen muchas relaciones combinatorias, evidentemente. De momento, solo necesitamos tres de ellas:

$$\left\langle \begin{matrix} j & k \\ r & s \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\rangle = 0 \quad \text{si } r+s \neq m, \quad (6.10a)$$

$$\left\langle \begin{matrix} j & k & l \\ r & s & m \end{matrix} \right\rangle = (-1)^{j-r} \sqrt{\frac{2l+1}{2k+1}} \left\langle \begin{matrix} j & l & k \\ r & -m & -s \end{matrix} \right\rangle, \quad (6.10b)$$

$$\sum_{\substack{r,s \\ r+s=m}} \left\langle \begin{matrix} j & k & l \\ r & s & m \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} j & k & l' \\ r & s & m \end{matrix} \right\rangle = \delta_{ll'}. \quad (6.10c)$$

(La última fórmula dice que las filas de C son ortogonales, ya que C es una matriz unitaria.)

6.3. Los elementos de matriz del cuantizador

6.10. Si escribimos los elementos de matriz de la relación (6.9) y tomamos en cuenta la ortogonalidad de las funciones \mathcal{D}_{rs}^j en el espacio de Hilbert $L^2(SU(2))$, podemos expresar un producto de dos funciones \mathcal{D} como una combinación lineal de otros. El resultado que necesitamos es el siguiente [46]:

$$\mathcal{D}_{rp}^j(g) \overline{\mathcal{D}}_{sq}^j(g) = \sum_{l=0}^{2j} \frac{2l+1}{2j+1} \left\langle \begin{matrix} j & l & j \\ r & s-r & s \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} j & l & j \\ p & q-p & q \end{matrix} \right\rangle \overline{\mathcal{D}}_{s-r, q-p}^l(g). \quad (6.11)$$

Enchufando esta identidad en (6.7), obtenemos:

$$\begin{aligned} Z_{rs}^j(g \cdot u) &= \sum_{l=0}^{2j} (-1)^{j-r} \left\langle \begin{matrix} j & j & l \\ r & -s & r-s \end{matrix} \right\rangle \\ &\quad \times \sum_{p,m} (-1)^{j-p} \left\langle \begin{matrix} j & j & l \\ p & -p-m & -m \end{matrix} \right\rangle \overline{\mathcal{D}}_{s-r, m}^l(g) Z_{p, m+p}^j(u), \end{aligned} \quad (6.12)$$

donde hemos empleado (6.10b), con $m := q - p$.

6.11. Defínase ahora la siguiente combinación lineal de funciones Z :

$$\tilde{Y}_{lm}(u) := \sum_{p=-j}^j (-1)^{j-p} \left\langle \begin{matrix} j & j & l \\ p & -p-m & -m \end{matrix} \right\rangle Z_{p, m+p}^j(u). \quad (6.13)$$

Entonces podemos reescribir (6.12) en la forma:

$$Z_{rs}^j(g \cdot u) = \sum_{l=0}^{2j} (-1)^{j-r} \left\langle \begin{matrix} j & j & l \\ r & -s & r-s \end{matrix} \right\rangle \sum_{m=-l}^l \overline{\mathcal{D}}_{s-r, m}^l(g) \tilde{Y}_{lm}(u).$$

En particular, si $g = e$, tenemos $\mathcal{D}_{rs}^j(e) = \delta_{rs}$, así que Z_{rs}^j es una combinación lineal de los \tilde{Y}_{lm} :

$$Z_{rs}^j(u) = \sum_{l=0}^{2j} (-1)^{j-r} \left\langle \begin{matrix} j & j & l \\ r & -s & r-s \end{matrix} \right\rangle \tilde{Y}_{l, s-r}(u). \quad (6.14)$$

La relación de ortogonalidad (6.10c) ahora muestra que:

$$\begin{aligned}
 \tilde{Y}_{lm}(g \cdot u) &= \sum_{p=-j}^j (-1)^{j-p} \left\langle \begin{matrix} j & j \\ p & -p-m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l \\ -m \end{matrix} \right\rangle Z_{p,m+p}^j(g \cdot u) \\
 &= \sum_{l'=0}^{2j} \sum_{p=-j}^j \left\langle \begin{matrix} j & j \\ p & -p-m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l \\ -m \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} j & j \\ p & -p-m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l' \\ -m \end{matrix} \right\rangle \sum_{n=-l'}^{l'} \overline{\mathcal{D}}_{mn}^{l'}(g) \tilde{Y}_{l'n}(u) \\
 &= \sum_{n=-l}^l \overline{\mathcal{D}}_{mn}^l(g) \tilde{Y}_{ln}(u). \tag{6.15}
 \end{aligned}$$

6.12. La relación (6.15) es característica de los armónicos esféricos (6.4). Si $u = (\theta, \phi) \in \mathbb{S}^2$ en coordenadas esféricas, sea $g_u \in SU(2)$ el elemento de grupo con ángulos de Euler con ángulos de Euler $(\phi, \theta, 0)$, de modo que $g_u \cdot u_0 = u$, donde u_0 es el “polo norte” ($\theta = 0$) de \mathbb{S}^2 . Entonces $u \mapsto g_u$ define una sección de la fibración $SU(2) \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $(\phi, \theta, \psi) \mapsto (\theta, \phi)$; esta sección es continua salvo en los polos norte y sur, en donde las coordenadas esféricas son singulares. De (6.4), vemos que los armónicos esféricos obedecen la relación:

$$Y_{lm}(u) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \overline{\mathcal{D}}_{m0}^l(g_u). \tag{6.16}$$

Además, debemos notar que si $h \cdot u_0 = u$, entonces $h = g_u t_h$, donde t_h es un elemento del subgrupo de isotropía $SU(2)_{u_0} = \{\exp(\psi Z) : \psi \in \mathbb{R}\}$, así que $\overline{\mathcal{D}}_{m0}^l(h) = \overline{\mathcal{D}}_{m0}^l(g_u)$. Por ende,

$$\begin{aligned}
 Y_{lm}(g \cdot u) &= Y_{lm}(gg_u \cdot u_0) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \overline{\mathcal{D}}_{m0}^l(g_u) \\
 &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sum_{n=-l}^l \overline{\mathcal{D}}_{mn}^l(g_u) \overline{\mathcal{D}}_{n0}^l(g_u) = \sum_{n=-l}^l \overline{\mathcal{D}}_{mn}^l(g_u) Y_{ln}(u),
 \end{aligned}$$

en vista de que $\pi_l(gg_u) = \pi_l(g)\pi_l(g_u)$.

De ahí, podemos concluir que \tilde{Y}_{lm} y Y_{lm} son proporcionales. De hecho, si $A(l, l')$ es la matriz $(2l+1) \times (2l'+1)$ cuya entrada (m, n) es

$$\frac{2l+1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \tilde{Y}_{lm}(\theta, \phi) \overline{Y}_{l'm}(\theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi,$$

entonces $\pi_l(g)^* A(l, l') \pi_{l'}(g)$ tiene entrada (m, n) igual a

$$\frac{2l+1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \tilde{Y}_{lm}(g \cdot (\theta, \phi)) \overline{Y}_{l'm}(g \cdot (\theta, \phi)) \sin \theta \, d\theta \, d\phi,$$

así que $\pi_l(g)^* A(l, l') \pi_{l'}(g) = A(l, l')$ por la invariancia bajo rotaciones de la medida $\sin \theta d\theta d\phi$. Luego $A(l, l')$ entrelaza las representaciones π_l y $\pi_{l'}$. Por el Lema de Schur, obtenemos $A(l, l') = 0$ si $l \neq l'$ y $A(l, l) = \lambda_l^j I$ para algún $\lambda_l^j \in \mathbb{C}$. En resumen:

$$\tilde{Y}_{lm} = \lambda_l^j Y_{lm}.$$

En consecuencia, la ecuación (6.14) se reescribe en esta forma:

$$Z_{rs}^j(u) = \sum_{l=0}^{2j} (-1)^{j-r} \left\langle \begin{matrix} j & j \\ r & -s \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l \\ r-s \end{matrix} \right\rangle \lambda_l^j Y_{l, s-r}(u). \quad (6.17)$$

En particular, todos los Z_{rs}^j pertenecen al espacio vectorial \mathcal{K}'_j generado por los armónicos esféricos $\{Y_{lm} : l = 0, \dots, 2j; m = -l, \dots, l\}$ (obsérvese que la dimensión de este espacio es $\sum_{l=0}^{2j} (2l+1) = (2j+1)^2$). Por (6.13), en cambio, los Y_{lm} son combinaciones lineales de los Z_{rs}^j ; luego estos generan el espacio \mathcal{K}'_j , así que $\mathcal{K}'_j = \mathcal{K}_j$, el espacio de símbolos determinado por el cuantizador Ω_j .

6.13. El postulado (6.1a), es decir, la colección de igualdades $\bar{Z}_{rs}^j = Z_{sr}^j$, junto con la conocida propiedad $\bar{Y}_{lm} = (-1)^m Y_{l, -m}$ de los armónicos esféricos — que se deriva fácilmente de (6.2) ó (6.5) — muestra que los escalares λ_l^j en la fórmula (6.17) son *reales*.

El núcleo reproductor de \mathcal{K}_j (considerado como subespacio de $L^2(\mathbb{S}^2, d\mu_j)$) es

$$K_j(u, v) := \frac{4\pi}{2j+1} \sum_{l=0}^{2j} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(u) \bar{Y}_{lm}(v).$$

Ahora la propiedad tracial (6.1d) dice que

$$\begin{aligned} K_j(u, v) &= \text{Tr}[\Omega_j(u) \Omega_j(v)] = \sum_{r, s=-j}^j Z_{rs}^j(u) \bar{Z}_{rs}^j(v) \\ &= \sum_{r, s=-j}^j \sum_{l, l'=0}^{2j} \lambda_l^j \lambda_{l'}^j \left\langle \begin{matrix} j & j \\ r & -s \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l \\ r-s \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} j & j \\ r & -s \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l' \\ r-s \end{matrix} \right\rangle Y_{l, s-r}(u) \bar{Y}_{l, s-r}(v) \\ &= \sum_{l=0}^{2j} \sum_{m=-l}^l (\lambda_l^j)^2 Y_{lm}(u) \bar{Y}_{lm}(v), \end{aligned} \quad (6.18)$$

al emplear (6.10c) de nuevo. Comparando con coeficientes en estas dos expresiones para K_j , obtenemos $\lambda_l^j = \pm \sqrt{4\pi/2j+1}$.

6.14. La normalización $\text{Tr}[\Omega_j(u)] = 1$ es equivalente, dada la propiedad tracial (6.1d), a lo siguiente:

$$(ii') \quad \int_{\mathbb{S}^2} \Omega_j(v) d\mu_j(v) = I; \quad (6.19)$$

esto se ve de la unicidad de la correspondencia $A \mapsto W_A^j$ (que a su vez viene de la igualdad de dimensiones entre el dominio $\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)$ y el rango \mathcal{K}_j de esta aplicación lineal sobreyectiva), en vista de:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} \left[\Omega_j(u) \int_{\mathbb{S}^2} \Omega_j(v) d\mu_j(v) \right] &= \int_{\mathbb{S}^2} \operatorname{Tr}[\Omega_j(u) \Omega_j(v)] d\mu_j(v) \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} K_j(u, v) d\mu_j(v) \equiv 1. \end{aligned}$$

Como $\int_{\mathbb{S}^2} Y_{lm}(u) d\mu_j(u) = 0$ salvo si $l = m = 0$ (por la ortogonalidad de los armónicos esféricos; recuerde que Y_{00} es la función constante $(4\pi)^{-1/2}$), obtenemos de (6.17) que:

$$\int_{\mathbb{S}^2} Z_{rs}^j(u) d\mu_j(u) = \delta_{rs} \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \lambda_0^j (2j+1) = \delta_{rs} \operatorname{signo}(\lambda_0^j).$$

Ahora (6.19) muestra que $\lambda_0^j > 0$.

Los signos de λ_l^j para $l = 1, 2, \dots, 2j$ quedan indeterminadas —pues ya hemos todas las condiciones en (6.1)—, así que hay 2^{2j} soluciones distintas para el cuantizador Ω_j , correspondientes a distintas elecciones de estos signos. Para elegir la opción que reproduce los signos esperados en la teoría de spin, convenimos en tomar $\lambda_l^j > 0$ para todo l . Hemos obtenido el siguiente resultado.

6.15. Teorema. *Para la cuaterna $(SU(2), \pi_j, \mathbb{S}^2, d\mu_j)$, con $j \in \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$ cualquiera, existe un cuantizador de Stratonovich–Weyl. Sus elementos de matriz son las funciones:*

$$\begin{aligned} Z_{rs}^j(u) &:= (-1)^{j-r} \sum_{l=0}^{2j} \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}} \left\langle \begin{matrix} j & j \\ r & -s \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l \\ r-s \end{matrix} \right\rangle Y_{l,s-r}(u) \\ &= \frac{\sqrt{4\pi}}{2j+1} \sum_{l=0}^{2j} \sqrt{2l+1} \left\langle \begin{matrix} j & l \\ r & s-r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j \\ s \end{matrix} \right\rangle Y_{l,s-r}(u). \end{aligned} \quad (6.20)$$

En particular, si $u = (\theta, \phi)$ en coordenadas esféricas:

$$Z_{mm}^j(u) = \sum_{l=0}^{2j} \frac{2l+1}{2j+1} \left\langle \begin{matrix} j & l \\ m & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j \\ m \end{matrix} \right\rangle P_l(\cos \theta). \quad (6.21)$$

Cualquier otro cuantizador es obtenido de (6.20) al cambiar los signos de uno o más de los términos de la suma con $l > 0$. \square

6.4. Símbolos de operadores de spin

6.16. En la teoría de spin, los operadores de principal importancia son $J_z := d\pi_j(Z) \equiv \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \pi_j(\exp tZ)$ y $J^2 := d\pi_j(X)^2 + d\pi_j(Y)^2 + d\pi_j(Z)^2$. La matriz de J_z es diagonal y su entrada (m, m) es $m \in \{-j, \dots, j-1, j\}$. El “operador de Casimir” J^2 es escalar: $J^2 = j(j+1)I$ sobre \mathcal{H}_j . Luego el símbolo $W_{J^2}^j$ es la función constante $j(j+1)$. El símbolo de J_z es

$$\begin{aligned} W_{J_z}^j(\theta, \phi) &= \text{Tr}[J_z \Omega_j(\theta, \phi)] = \sum_{m=-j}^j m Z_{mm}^j(\theta, \phi) \\ &= \sum_{m=-j}^j \frac{m}{2j+1} \sum_{l=0}^{2j} (2l+1) \left\langle \begin{matrix} j & l \\ m & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j \\ m \end{matrix} \right\rangle P_l(\cos \theta). \end{aligned}$$

Ahora $\left\langle \begin{matrix} j & 1 \\ m & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j \\ m \end{matrix} \right\rangle = m/\sqrt{j(j+1)}$, así que

$$\begin{aligned} W_{J_z}^j(\theta, \phi) &= \frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} \sum_{m=-j}^j \sum_{l=0}^{2j} \left\langle \begin{matrix} j & 1 \\ m & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j \\ m \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} j & l \\ m & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j \\ m \end{matrix} \right\rangle (2l+1) P_l(\cos \theta) \\ &= \sum_{l=0}^{2j} \frac{\sqrt{j(j+1)}}{\sqrt{3(2l+1)}} \sum_{m=-j}^j \left\langle \begin{matrix} j & j \\ m & -m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} j & j \\ m & -m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l \\ 0 \end{matrix} \right\rangle (2l+1) P_l(\cos \theta) \\ &= \frac{\sqrt{j(j+1)}}{3} \sum_{l=0}^{2j} \sqrt{2l+1} \delta_{l1} P_l(\cos \theta) = \sqrt{j(j+1)} P_1(\cos \theta) \\ &= \sqrt{j(j+1)} \cos \theta. \end{aligned}$$

Es posible calcular otros símbolos de manera análoga. En particular, si $J_x := d\pi_j(X)$, $J_y := d\pi_j(Y)$, se verifica que $W_{J_x}^j(\theta, \phi) = \sqrt{j(j+1)} \sin \theta \cos \phi$ y $W_{J_y}^j(\theta, \phi) = \sin \theta \sin \phi$.

6.5. Aplicación al cálculo de las matrices de representación

6.17. Los cuantizadores de Stratonovich–Weyl tienen diversas aplicaciones a la teoría de spin; lo cual es de esperar, debido a la equivalencia estricta con la formulación usual de dicha teoría garantizada por (6.1). En vez de explorar este tema en detalle, consideramos ahora un ejemplo de la aplicación de esta maquinaria a la propia teoría de representaciones del grupo $SU(2)$.

Los elementos matriciales $D_{r,s}^j$ de la representación π_j se escriben, por costumbre, usando los ángulos de Euler, aunque hay algunas parametrizaciones alternativas que pueden emplearse. Una parametrización muy natural de $SU(2)$ es la llamada “parametrización ángulo-eje”:

$$g = g(\psi, u) := \exp \left[-\frac{i\psi}{2} \begin{pmatrix} u_3 & u_1 - iu_2 \\ u_1 + iu_2 & -u_3 \end{pmatrix} \right],$$

donde $u = (u_1, u_2, u_3)$ son coordenadas *cartesianas* de $u \in \mathbb{S}^2$; es decir, se determina g al identificar un subgrupo uniparamétrico que lo contiene y su ubicación dentro de ese subgrupo. El homomorfismo natural de $SU(2)$ en $SO(3)$ —dado por la acción coadjunta, por ejemplo— lleva $g(\psi, u)$ en la rotación de \mathbb{R}^3 por un ángulo ψ alrededor del eje que procede del origen y pasa por el punto u de la esfera unitaria \mathbb{S}^2 . Se busca una fórmula [47] que expresa $\mathcal{D}_{rs}^j(g(\psi, u))$ directamente en términos del ángulo ψ y del eje u .

6.18. Introduzcamos la función definida sobre $SU(2) \times \mathbb{S}^2$ por:

$$E(g; j, u) := \text{Tr}[\pi_j(g) \Omega_j(u)] = \sum_{r,s=-j}^j \mathcal{D}_{rs}^j(g) Z_{sr}^j(u). \quad (6.22)$$

La función E puede ser considerado como núcleo integral entre funciones sobre $SU(2)$ y funciones sobre la unión disjunta de las esferas de radio $2j$; este segundo espacio juega el papel de “espacio dual” del grupo $SU(2)$ en análisis armónico no conmutativo.

Las propiedades (6.1) de Ω_j implican propiedades correspondientes de E , análogas a las del núcleo $(t, x) \mapsto e^{-itx}$ del análisis de Fourier usual. Tomemos nota de su “covariancia”, obtenida al insertar (6.1c) en (6.22):

$$E(hgh^{-1}; j, u) = E(g; j, h \cdot u). \quad (6.23)$$

De la propiedad tracial, obtenemos la ortogonalidad de las funciones Z_{rs}^j :

$$\int_{\mathbb{S}^2} \overline{Z_{rs}^j}(u) Z_{r's'}^j(u) d\mu_j(u) = \text{Tr}[E_{sr}^* E_{s'r'}] = \delta_{rr'} \delta_{ss'}.$$

Por lo tanto, una integración sobre la esfera despeja (6.22) como sigue:

$$\mathcal{D}_{rs}^j(g) = \int_{\mathbb{S}^2} E(g; j, v) Z_{rs}^j(v) d\mu_j(v). \quad (6.24)$$

6.19. Si $g = g(\psi, u_0)$ donde u_0 es el polo norte, sabemos de (6.3) que $\mathcal{D}_{rs}^j(g) = 0$ para $r \neq s$, y al derivar respecto de ψ obtenemos $\frac{d}{d\psi} \Big|_{\psi=0} \mathcal{D}_{kk}^j(g(\psi, u_0)) = -ik$. En este caso (6.22) se simplifica:

$$E(g(\psi, u_0); j, v) = \sum_{k=-j}^j e^{-ik\psi} Z_{kk}^j(v).$$

Ahora usaremos la covariancia (6.1c) como sigue. Si $g \in SU(2)$, la conjugación $g \mapsto hgh^{-1}$ induce la acción adjunta $\text{Ad}(h)$ sobre $\mathfrak{su}(2)$ y la acción coadjunta

$u \mapsto h \cdot u$ sobre \mathbb{S}^2 . Entonces si $g = g(\psi, u) \in SU(2)$, se $X_u := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g(t, u)$ el generador del subgrupo uniparamétrico donde queda g ; tome $h \in SU(2)$ con $\text{Ad}(h)X_{u_0} = X_u$; entonces $g(\psi, u) = g(\psi, h \cdot u_0)$; como h no depende de ψ , se obtiene $u = h \cdot u_0$. En vista de (6.23), concluimos:

$$E(g(\psi, u); j, v) = \sum_{k=-j}^j e^{-ik\psi} Z_{kk}^j(\cos \theta_{uv}), \quad (6.25)$$

donde θ_{uv} denota el ángulo entre los dos puntos $u, v \in \mathbb{S}^2$, y hemos cometido un leve abuso de notación al escribir $\cos \theta$ en vez del argumento $(\theta, \phi) \in \mathbb{S}^2$ de la entrada diagonal Z_{kk}^j , habido cuenta de (6.21).

Sustituyendo (6.25) en la integral (6.24), obtenemos finalmente, con la ayuda de (6.6):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{rs}^j(g(\psi, u)) &= \sum_{k=-j}^j e^{-ik\psi} \int_{\mathbb{S}^2} Z_{kk}^j(\cos \theta_{uv}) Z_{rs}^j(v) d\mu_j(v) \\ &= \sum_{l, l'=0}^{2j} \sum_{k=-j}^j \frac{\sqrt{4\pi(2l'+1)}}{2j+1} e^{-ik\psi} \left\langle \begin{matrix} j & l & j \\ k & 0 & k \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} j & l' & j \\ r & s-r & s \end{matrix} \right\rangle \\ &\quad \times \int_{\mathbb{S}^2} P_l(\cos \theta_{uv}) Y_{l', s-r}(v) d\mu_l(v) \\ &= \sum_{l=0}^{2j} \frac{\sqrt{4\pi(2l+1)}}{2j+1} \left\langle \begin{matrix} j & l & j \\ r & s-r & s \end{matrix} \right\rangle \sum_{k=-j}^j \left\langle \begin{matrix} j & l & j \\ k & 0 & k \end{matrix} \right\rangle e^{-ik\psi} Y_{l, s-r}(u). \end{aligned} \quad (6.26)$$

6.20. Como la fórmula (6.26) es poco conocida, aprovechamos la oportunidad para escribir aquí algunos casos particulares simples. Escribimos $u = (\theta, \phi)$ como de costumbre, pero advertimos que (ϕ, θ, ψ) ya no son ángulos de Euler necesariamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{00}^1(g(\psi, u)) &= \cos \psi + (1 - \cos \psi) \cos^2 \theta, \\ \mathcal{D}_{11}^1(g(\psi, u)) &= \frac{1}{2}(1 + \cos \psi) - i \sin \psi \cos \theta - \frac{1}{2}(1 - \cos \psi) \cos^2 \theta, \\ \mathcal{D}_{01}^1(g(\psi, u)) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \sin \theta [i \sin \psi + (1 - \cos \psi) \cos \theta], \\ \mathcal{D}_{-1,1}^1(g(\psi, u)) &= -\frac{1}{2}(1 - \cos \psi) e^{2i\phi} \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

7. El Método de Estados Coherentes

Virtus in medio stat.

—Horacio

7.1. El concepto de estado coherente

7.1. El método empleado en el capítulo anterior para construir un cuantizador para el grupo $G = SU(2)$, aunque en principio muy general, aprovechó de manera esencial ciertos objetos conocidos del análisis armónico de $SU(2)$: los armónicos esféricos Y_{lm} y los coeficientes de Clebsch–Gordan, en particular. Para extender este esquema a otros grupos compactos (o no compactos), vale la pena reformular la construcción del cuantizador de una manera más fácilmente generalizable. Esta reformulación está proporcionada por el llamado “método de estados coherentes”.

7.2. El vocabulario de la mecánica cuántica pone mucho énfasis en dos conceptos básicos: “observables” y “estados”. Hablando en términos generales, un observable es una cantidad física que puede asumir cierto rango de valores reales, experimentalmente medibles: cantidades como energía, coordenadas de posición, componentes de momento angular, etc. Un estado de un sistema físico es la configuración interna del sistema, que determina cuales de los posibles valores de los observables serán producidos al medirlos en dicha configuración interna. (Si el sistema es complejo, no se podrá averiguar la configuración interna con exactitud, y entonces los “estados” tendrán cierto carácter aleatorio o probabilístico.)

Matemáticamente, los observables forman un álgebra involutiva compleja \mathcal{A} (conviene tomar combinaciones complejas de los observables reales), con identidad I , en donde el producto o composición corresponde a la medición consecutiva de dos observables; para la mecánica cuántica, este producto suele ser no conmutativo. Un *estado* es entonces (por definición) una *forma lineal* $\phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ que es *positiva*, en el sentido de que $\phi(A^*A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$, y *normalizado* por $\phi(I) = 1$. El número $\phi(A)$, que es real si $A^* = A$, se llama el *valor esperado* del observable A en el estado ϕ ; este es el número proporcionado por la medición del observable cuando la configuración interna del sistema es modelado por ϕ . Obsérvese que el formalismo no da más información sobre ϕ que la totalidad de los valores $\{\phi(A) : A \in \mathcal{A}\}$. Para una discusión más a fondo de este formalismo algebraico, recomendamos el libro de Emch [20].

Por ejemplo, si $\mathcal{A} = C^\infty(M)$, donde M es una variedad simpléctica, las formas lineales positivas normalizadas son precisamente las medidas de probabilidad sobre M . Entonces $\phi(f) = \int_M f(u)\rho_\phi(u) d\mu(u)$, donde μ es una medida de Liouville sobre M y ρ_ϕ es la función de densidad correspondiente al estado ϕ ; si no hay continuidad absoluta de la medida ϕ respecto de μ , entonces ρ_ϕ es una distribución (en el sentido de Schwartz). Para el estado $f \mapsto f(u)$, ρ_ϕ es la delta de Dirac concentrado en el punto $u \in M$.

7.3. Otro ejemplo importante es $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$, donde \mathcal{H} es un determinado espacio de Hilbert. En este caso, podemos tomar $\phi(A) = \text{Tr}[A B_\phi]$, donde $B_\phi \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ es un operador trazable. (Para eso, el estado ϕ debe cumplir una condición de continuidad suplementaria; pero podemos dejar esta sutileza de lado por ahora.) Es de particular importancia el caso de un “estado vectorial”, en donde B_ϕ es un proyector de rango uno $|x_\phi\rangle\langle x_\phi|$:

$$\phi(A) = \text{Tr}[A |x_\phi\rangle\langle x_\phi|] = \langle x_\phi | A | x_\phi \rangle. \quad (7.1)$$

Obsérvese que el valor de (7.1) es invariante bajo la modificación $|x_\phi\rangle \mapsto e^{i\theta}|x_\phi\rangle$, si $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$. Por otra parte, el vector $|x_\phi\rangle$ es de norma 1, ya que $\langle x_\phi | x_\phi \rangle = \phi(I) = 1$. Luego la totalidad de estados vectoriales del álgebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es el espacio cociente $\mathbb{S}(\mathcal{H})/\mathbb{T}$, donde $\mathbb{S}(\mathcal{H})$ es la esfera de norma 1 en \mathcal{H} y \mathbb{T} actúa sobre esta esfera por multiplicación escalar. (Para un análisis de la estructura simpléctica de este espacio cociente, véase, por ejemplo, [11].)

Para nuestros propósitos aquí, lo importante es que un estado vectorial es un vector $|x_\phi\rangle$ de norma 1 en un espacio de Hilbert, y que un múltiplo de $|x_\phi\rangle$ por un escalar unitaria representa el mismo estado. Tenemos entonces la opción de pasar al cociente bajo la acción de \mathbb{T} o de elegir un representante de cada órbita de esta acción de alguna forma sistemática; tomaremos el segundo camino.

7.4. Definición. Ahora sea \mathcal{H} el espacio de Hilbert de alguna representación unitaria irreducible π de un grupo de Lie G . Elegimos un vector “fiducial” $|x_0\rangle \in \mathcal{H}$ de norma 1. La familia de vectores $\{\pi(g)|x_0\rangle : g \in G\}$ quedan en la esfera unitaria de \mathcal{H} —porque cada $\pi(g)$ es unitario— y obviamente es permutado por $\pi(G)$. Dicha familia se llama una **familia de estados coherentes** para el grupo G . (En otras palabras, una familia de estados coherentes es una órbita de la acción de G sobre la esfera unitaria de \mathcal{H} .)

Obsérvese que $\pi(g)|x_0\rangle = e^{i\theta}\pi(h)|x_0\rangle$ para algún $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ si y solo si $g^{-1}h$ queda en subgrupo de isotropía H_{x_0} del círculo $\mathbb{T}|x_0\rangle$ para esta acción. Luego la familia de estados coherentes es parametrizado, no por G , sino por el espacio cociente G/H_{x_0} .

7.2. Estados coherentes para el grupo $SU(2)$

7.5. Volvemos ahora a $G = SU(2)$. Denotamos por $|jm\rangle$, para $m \in \{-j, \dots, j\}$, el vector unitario en $\mathcal{H}_j = \mathbb{C}^{2j+1}$ tal que $\pi_j(\exp tZ)|jm\rangle = e^{imt}|jm\rangle$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Los $|jm\rangle$, para j fijo, evidentemente forman una base ortonormal para \mathcal{H}_j . Tomaremos el vector $|jj\rangle$ como vector fiducial para una familia de estados coherentes: $\{\pi(g)|jj\rangle : g \in SU(2)\}$. El subgrupo de isotropía de $\mathbb{T}|jj\rangle$ es precisamente el “toro máximo” $T := \{\exp tZ : t \in \mathbb{R}\}$ de $SU(2)$.

Para $u = (\theta, \phi) \in \mathbb{S}^2$, elegimos $g_u := (\phi, \theta, 0) \in SU(2)$ como en (6.16). Ahora los estados coherentes quedan parametrizados por el cociente $SU(2)/T \approx$

\mathbb{S}^2 mediante:

$$|j, u\rangle := \pi_j(g_u)|j, u_0\rangle := \pi_j(g_u)|jj\rangle$$

donde denotamos por u_0 el polo norte de la esfera \mathbb{S}^2 . En más detalle:

$$\begin{aligned} |j, u\rangle &= \sum_{m=-j}^j \mathcal{D}_{m,j}^j(\phi, \theta, 0)|jm\rangle \\ &= \sum_{m=-j}^j \sqrt{\binom{2j}{j+m}} (\cos \frac{1}{2}\theta)^{j+m} (\sin \frac{1}{2}\theta)^{j-m} e^{-im\phi} |jm\rangle. \end{aligned} \quad (7.2)$$

7.6. Proposición. *La familia de estados coherentes $\{|j, u\rangle : u \in \mathbb{S}^2\}$ cumple:*

$$\pi_j(g)|j, u\rangle \propto |j, g \cdot u\rangle \quad \text{para todo } u \in \mathbb{S}^2, g \in SU(2); \quad (7.3a)$$

$$\int_{\mathbb{S}^2} |j, u\rangle \langle j, u| d\mu_j(u) = I. \quad (7.3b)$$

Demostración: Tenemos $\pi_j(g)|j, u\rangle = \pi_j(gg_u)|j, u_0\rangle$ y $gg_u \cdot u_0 = g \cdot u$, así que $g_g^{-1}gg_u \in T$. Si $g_g^{-1}gg_u = \exp \theta Z$, entonces $\pi_j(g_g^{-1}gg_u)|j, u_0\rangle = e^{ij\theta}|j, u_0\rangle$; luego $\pi_j(g)|j, u\rangle = e^{ij\theta}|j, u_0\rangle$.

Sea $A := \int_{\mathbb{S}^2} |j, u\rangle \langle j, u| d\mu_j(u)$; esta es un límite de sumas de Riemann que son combinaciones lineales de los proyectores de rango uno $|j, u\rangle \langle j, u|$, y por ende $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_j)$. Para todo $x \in \mathcal{H}_j$ tenemos:

$$\begin{aligned} A\pi_j(g)x &= \int_{\mathbb{S}^2} |j, u\rangle \langle j, u | \pi_j(g)x \rangle d\mu_j(u) = \int_{\mathbb{S}^2} |j, u\rangle \overline{\langle \pi_j(g)x | j, u\rangle} d\mu_j(u) \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} |j, u\rangle \overline{\langle x | \pi_j(g^{-1}) | j, u\rangle} d\mu_j(u) = \int_{\mathbb{S}^2} \pi_j(g)|j, v\rangle \overline{\langle x | j, v\rangle} d\mu_j(v) \\ &= \pi_j(g)Ax, \end{aligned}$$

debido a la invariancia de $d\mu_j$ bajo $SU(2)$ y (7.3a): hemos efectuado el cambio de variable $u \mapsto v := g \cdot u$ en la integral. Se concluye que $A\pi_j(g) = \pi_j(g)A$, para todo $g \in SU(2)$. Por el lema de Schur, obtenemos $A = \lambda I$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. Calculamos λ con la traza:

$$\begin{aligned} (2j+1)\lambda &= \text{Tr}[\lambda I] = \text{Tr} \left[\int_{\mathbb{S}^2} |j, u\rangle \langle j, u| d\mu_j(u) \right] = \int_{\mathbb{S}^2} \langle j, u | j, u\rangle d\mu_j(u) \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} d\mu_j(v) = \frac{2j+1}{4\pi} (4\pi) = 2j+1, \end{aligned} \quad (7.4)$$

así que $\lambda = 1$; por lo tanto, $A = I$. \square

7.7. Es de notar que la demostración de esta Proposición no usa propiedades que son específicas al grupo $SU(2)$; podremos generalizarla a otros grupos sin

cambio esencial. Lo que debemos notar, sin embargo, es que se obtuvo $\lambda = 1$ en (7.4) gracias a la normalización de la medida de Liouville $d\mu_j$ sobre la órbita coadjunta \mathbb{S}^2 ; luego la generalización eventual a otros grupos debe tomar en cuenta esta normalización.

7.3. Símbolos covariante y contravariante de Berezin

7.8. Definición. Dada la familia de vectores de norma 1, $\{|j, u\rangle : u \in \mathbb{S}^2\}$, las propiedades (7.3) son suficientes para definir dos correspondencias de operadores en \mathcal{H}_j a funciones sobre \mathbb{S}^2 por las siguientes fórmulas, debidos esencialmente a Berezin [7]:

$$Q_A(u) := \langle j, u | A | j, u \rangle, \quad (7.5a)$$

$$A =: \int_{\mathbb{S}^2} P_A(u) |j, u\rangle \langle j, u| d\mu_j(u), \quad (7.5b)$$

en donde la definición de los P_A es implícita (luego identificaremos estas funciones con mayor detalle). La función Q_A se llama el **símbolo covariante**, y P_A el **símbolo contravariante** del operador A .

Es inmediato que $Q_I = \mathbf{1}$, y de (7.3b) se ve que $P_I = \mathbf{1}$ también. Además, es fácil ver que $Q_{A^*} = \overline{Q_A}$, $P_{A^*} = \overline{P_A}$.

7.9. Las correspondencias $A \mapsto Q_A$, $A \mapsto P_A$ son *covariantes* para las representaciones $A \mapsto \pi_j(g)A\pi_j(g^{-1})$ y $f \mapsto \tau(g)f$, donde τ denota la “representación regular” de $SU(2)$ sobre $L^2(\mathbb{S}^2, d\mu_j)$ dada por:

$$[\tau(g)f](u) := f(g^{-1} \cdot u).$$

Explícitamente:

$$Q_{\pi(g)A\pi(g^{-1})} = \tau(g)Q_A, \quad P_{\pi(g)A\pi(g^{-1})} = \tau(g)P_A. \quad (7.6)$$

Vemos que estas son consecuencias inmediatas de (7.3a) y la invariancia de la medida $d\mu_j$ bajo el cambio de variable $u \mapsto g \cdot u$.

Ya sabemos que las correspondencias $A \mapsto Q_A$, $A \mapsto P_A$ cumplen las propiedades análogas a los incisos (i), (ii), (iii) del Teorema 5.16. Falta indagar si también cumplen la propiedad tracial: $\int_{\mathbb{S}^2} Q_A(u) Q_B(u) d\mu_j(u) = \text{Tr}[AB]$ ó $\int_{\mathbb{S}^2} P_A(u) P_B(u) d\mu_j(u) = \text{Tr}[AB]$. Desdichosamente, la respuesta es negativa.

7.10. Lema. $Q_{J_z}(\theta, \phi) = j \cos \theta$, y $P_{J_z}(\theta, \phi) = (j + 1) \cos \theta$. Por ende, las correspondencias $A \mapsto Q_A$, $A \mapsto P_A$ no cumplen la propiedad tracial.

Demostración:

$$\begin{aligned} Q_{J_z}(\theta, \phi) &= \sum_{m=-j}^j \langle j; \theta, \phi | jm \rangle m \langle jm | j; \theta, \phi \rangle = \sum_{m=-j}^j m |\mathcal{D}_{m_j}^j(\phi, \theta, 0)|^2 \\ &= \sum_{m=-j}^j m \binom{2j}{j+m} (\cos^2 \frac{1}{2}\theta)^{j+m} (\sin^2 \frac{1}{2}\theta)^{j-m} = j \cos \theta. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^2} \cos \theta |\langle jm | j; \theta, \phi \rangle|^2 d\mu_j(\theta, \phi) &= \frac{2j+1}{2} \int_0^\pi |\mathcal{D}_{mj}^j(\phi, \theta, 0)|^2 \cos \theta \sin \theta d\theta \\
&= \frac{2j+1}{2} \int_0^\pi \binom{2j}{j+m} \left(\frac{1+\cos \theta}{2}\right)^{j+m} \left(\frac{1-\cos \theta}{2}\right)^{j-m} \cos \theta \sin \theta d\theta \\
&= \frac{2j+1}{2} \binom{2j}{j+m} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{2}\right)^{j+m} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{j-m} x dx \\
&= (2j+1) \binom{2j}{j+m} \int_0^1 t^{j+m} (1-t)^{j-m} (t - (1-t)) dt \\
&= (2j+1) \binom{2j}{j+m} \left[\binom{2j+2}{j-m}^{-1} - \binom{2j+2}{j+m}^{-1} \right] \\
&= \frac{(j+m+1) - (j-m+1)}{2j+2} = \frac{m}{j+1},
\end{aligned}$$

lo cual muestra que $P_{J_z}(\theta, \phi) = (j+1) \cos \theta$.

Ahora calculamos que

$$\int_{\mathbb{S}^2} |Q_{J_z}(\theta, \phi)|^2 d\mu_j(\theta, \phi) = \frac{2j+1}{2} \int_0^\pi j^2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2j+1}{3} j^2, \quad (7.7)$$

y luego

$$\int_{\mathbb{S}^2} |P_{J_z}(\theta, \phi)|^2 d\mu_j(\theta, \phi) = \frac{2j+1}{3} (j+1)^2. \quad (7.8)$$

Sin embargo,

$$\text{Tr}[J_z^* J_z] = \text{Tr}[J_z^2] = \sum_{m=-j}^j m^2 = \frac{2j+1}{3} j(j+1). \quad (7.9)$$

Tomando $A = J_z = J_z^*$, $B = J_z$, vemos que la propiedad tracial se incumple porque los cálculos (7.7), (7.8), (7.9) tienen resultados distintos. \square

7.11. Lema. Si $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_j)$, vale la igualdad:

$$\int_{\mathbb{S}^2} P_A(u) Q_B(u) d\mu_j(u) = \text{Tr}[AB]. \quad (7.10)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^2} P_A(u) Q_B(u) d\mu_j(u) &= \int_{\mathbb{S}^2} P_A(u) \langle j, u | B | j, u \rangle d\mu_j(u) \\
&= \int_{\mathbb{S}^2} P_A(u) \text{Tr}[|j, u\rangle \langle j, u | B] d\mu_j(u) = \text{Tr}[AB]. \quad \square
\end{aligned}$$

7.4. Símbolos de Stratonovich–Weyl

7.12. El último lema sugiere que la falta de tracialidad en los símbolos de Berezin podría componerse con una astuta *interpolación* entre el símbolo covariante y el símbolo contravariante. Esto es, en efecto, lo que proponemos hacer ahora. Sin embargo, debemos resolver primero el enigma de la definición exacta de P_A . La relación (7.10) —que depende de propiedad (7.5b) de P_A , nada más— indica que P_A se obtiene de Q_A por *dualidad*. Recuerde que $\langle A | B \rangle := \text{Tr}[A^*B]$ define un producto interno en $\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)$. Si escribimos también $\langle f | g \rangle := \int_{\mathbb{S}^2} \overline{f(u)} g(u) d\mu_j(u)$ para $f, g \in L^2(\mathbb{S}^2, d\mu_j)$, y reemplazamos A por A^* , podemos interpretar (7.10) así:

$$\langle P_A | Q_B \rangle = \langle A | B \rangle.$$

La correspondencia $B \mapsto Q_B$ es lineal; también es uno-a-uno. Esta univocidad no es obvia, pero se puede comprobar, a partir de la fórmula explícita (7.2) para los estados coherentes, que $\{Q_A : A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_j)\}$ es precisamente el espacio vectorial \mathcal{K}_j de los armónicos esféricos de grado no mayor que $2j$. (Confirmaremos esta afirmación con los cálculos posteriores.) Luego $B \mapsto Q_B$, por ser lineal y sobreyectivo entre los espacios $\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)$ y \mathcal{K}_j de igual dimensión $(2j+1)^2$, es también inyectivo. Por ende, hay una correspondencia lineal inversa $Q_B \mapsto B$. Luego, para $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_j)$, $Q_B \mapsto \text{Tr}[A^*B]$ determina una forma lineal sobre el espacio de Hilbert \mathcal{K}_j (en cuanto subespacio cerrado de $\mathcal{L}^2(\mathbb{S}^2, d\mu_j)$).

Ahora viene la observación clave: el teorema de Riesz garantiza la existencia de un único elemento P_A del mismo espacio de Hilbert \mathcal{K}_j , tal que esta forma lineal sea $Q_B \mapsto \langle P_A | Q_B \rangle$. Por ende, la fórmula sirve para *definir* $P_A \in \mathcal{K}_j$, mediante el teorema de Riesz.

7.13. Introducimos un operador lineal $\mathbf{K} \in \mathcal{L}(\mathcal{K}_j)$ por $\mathbf{K}(Q_A) := P_A$. Como los Q_A generan \mathcal{K}_j , y Q_A depende linealmente de A , se ve que \mathbf{K} está bien definido. El método de interpolación de símbolos se basa en el siguiente lema.

7.14. Lema. \mathbf{K} es un operador definido positivo.

Demostración: Basta notar que para todo $Q_A \in \mathcal{K}_j$,

$$\langle \mathbf{K}(Q_A) | Q_A \rangle = \langle P_A | Q_A \rangle = \text{Tr}[A^*A] \geq 0. \quad \square \quad (7.11)$$

7.15. Definición. Sea $W_A := \mathbf{K}^{1/2}(Q_A) = \mathbf{K}^{-1/2}(P_A)$, donde $\mathbf{K}^{1/2}$ denota la (única) raíz cuadrada positiva del operador positivo \mathbf{K} . (Hay un riesgo de confusión entre esta notación y el símbolo de Stratonovich–Weyl W_A definido en el Capítulo 6; pero mostraremos que estos símbolos coinciden!)

7.16. Teorema. *La correspondencia $A \mapsto W_A$ posee las siguientes propiedades:*

- i) $W_{A^*}(u) = \overline{W_A(u)}$, para todo $u \in \mathbb{S}^2$;
- ii) $W_I = \mathbf{1}$ (la función constante de valor 1);
- iii) $W_{\pi(g)A\pi(g)^{-1}} = \tau(g)W_A$, para todo $g \in SU(2)$;
- iv) $\text{Tr}[AB] = \int_{\mathbb{S}^2} W_A(u) W_B(u) d\mu_j(u)$, para todo $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_j)$.

Demostración: i): Como $Q_{A^*} = \overline{Q_A}$ y $P_{A^*} = \overline{P_A}$ para todo A , se ve que \mathbf{K} conmuta con la conjugación compleja (la cual es un operador antilineal $\mathcal{C}: \mathcal{K}_j \rightarrow \mathcal{K}_j$); de $\mathbf{C}\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{C}$ se deduce que $\mathbf{C}p(\mathbf{K}) = p(\mathbf{K})\mathbf{C}$ para cualquier polinomio p con coeficientes reales; si aproximamos la función raíz cuadrada (uniformemente sobre un intervalo que contenga cada autovalor de \mathbf{K}) por una sucesión de tales polinomios, obtenemos $\mathbf{C}\mathbf{K}^{1/2} = \mathbf{K}^{1/2}\mathbf{C}$. Luego $W_{A^*} = \mathbf{K}^{1/2}\mathbf{C}(Q_A) = \mathbf{C}\mathbf{K}^{1/2}(Q_A) = \overline{W_A}$.

ii): Como $Q_I = P_I = \mathbf{1}$, obtenemos $\mathbf{K}\mathbf{1} = \mathbf{1}$; luego $\mathbf{K}^{1/2}\mathbf{1} = \mathbf{1}$ también, así que $W_I = \mathbf{1}$.

iii): De (7.6) obtenemos $\tau(g)\mathbf{K} = \mathbf{K}\tau(g)$ para todo $g \in SU(2)$. Ahora τ es una representación unitaria de $SU(2)$ y como tal se descompone en una suma directa de representaciones unitarias irreducibles; el hecho de que \mathbf{K} conmuta con esta representación dice (por el Lema de Schur) que \mathbf{K} posee una matriz que es una suma directa de bloques escalares que preservan los subespacios irreducibles de $\tau(SU(2))$. Luego la matriz de $\mathbf{K}^{1/2}$ tiene la misma estructura, y por ende $\mathbf{K}^{1/2}$ también conmuta con cada $\tau(g)$. (Alternativamente, el argumento con los polinomios aproximantes conduce a la misma conclusión.) Por lo tanto, $W_{\pi(g)A\pi(g)^{-1}} = \mathbf{K}^{1/2}(\tau(g)Q_A) = \tau(g)\mathbf{K}^{1/2}(Q_A) = \tau(g)W_A$.

iv): De la positividad del operador $\mathbf{K}^{1/2}$ y (7.10), obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} W_A(u) W_B(u) d\mu_j(u) &= \langle W_{A^*} | W_B \rangle = \langle \mathbf{K}^{1/2}(Q_{A^*}) | \mathbf{K}^{1/2}(Q_B) \rangle \\ &= \langle \mathbf{K}(Q_{A^*}) | Q_B \rangle = \langle P_{A^*} | Q_B \rangle = \text{Tr}[AB]. \quad \square \end{aligned}$$

7.17. Ya tenemos la *existencia* de una correspondencia lineal $A \mapsto W_A$ que cumple todos los requisitos de una cuantización de Moyal. De hecho, si aprovechamos esta linealidad para definir $\Omega': \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_j)$ mediante $\text{Tr}[A\Omega'(u)] := W_A(u)$, no es difícil comprobar que las cuatro conclusiones del último Teorema implican que Ω' cumple los cuatro requisitos (6.1) para un cuantizador de Stratonovich–Weyl; luego los W_A coincide con los símbolos W_A obtenidos en el Capítulo 6, salvo por algunos posibles discrepancias de signos. Para cerciorarnos que tales discrepancias no se presentan, es necesario calcular los nuevos W_A en forma explícita.

Los Q_A son explícitamente dados por (7.5a) y (7.2). Luego lo que falta es computar $\mathbf{K}^{1/2}$, es decir, hallar sus autovalores y la base de \mathcal{K}_j en la cual \mathbf{K} posee una matriz diagonal.

7.18. Curiosamente, es fácil expresar el símbolo conocido Q_A en términos del símbolo (aun desconocido) P_A . Esta expresión conduce a una determinación del operador \mathbf{K}^{-1} . Veremos:

$$\begin{aligned} Q_A(u) &= \langle j, u | A | j, u \rangle = \int_{\mathbb{S}^2} |\langle j, u | j, v \rangle|^2 P_A(v) d\mu_j(v) \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} |\langle jj | \pi(g_u^{-1} g_v) | jj \rangle|^2 P_A(v) d\mu_j(v), \end{aligned} \quad (7.12)$$

con

$$\begin{aligned} |\langle j, u | j, v \rangle|^2 &= \left| \sum_{m,n=-j}^j \langle jm | jn \rangle \overline{\mathcal{D}}_{mj}^j(g_u) \mathcal{D}_{nj}^j(g_v) \right|^2 = \left| \sum_{m=-j}^j \overline{\mathcal{D}}_{mj}^j(g_u) \mathcal{D}_{mj}^j(g_v) \right|^2 \\ &= \sum_{m,n=-j}^j \mathcal{D}_{mj}^j(g_u) \overline{\mathcal{D}}_{nj}^j(g_u) \mathcal{D}_{nj}^j(g_v) \overline{\mathcal{D}}_{mj}^j(g_v) \\ &= \sum_{l,l'=0}^{2j} \frac{2l+1}{2j+1} \frac{2l'+1}{2j+1} \left\langle \begin{matrix} j & l \\ j & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j \\ j \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} j & l' \\ j & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j \\ j \end{matrix} \right\rangle \\ &\quad \times \sum_{m,n=-j}^j \left\langle \begin{matrix} j & l \\ m & n-m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j \\ n \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} j & l' \\ m & n-m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j \\ n \end{matrix} \right\rangle \overline{\mathcal{D}}_{n-m,0}^l(g_u) \mathcal{D}_{n-m,0}^l(g_v) \\ &= \sum_{l,l'=0}^{2j} \sqrt{\frac{2l+1}{2j+1}} \sqrt{\frac{2l'+1}{2j+1}} \left\langle \begin{matrix} j & l \\ j & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j \\ j \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} j & l' \\ j & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j \\ j \end{matrix} \right\rangle \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l'+1}} \\ &\quad \times \sum_{m,n=-j}^j \left\langle \begin{matrix} j & j \\ m & -n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l \\ m-n \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} j & j \\ m & -n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l' \\ m-n \end{matrix} \right\rangle Y_{l,n-m}(u) \overline{Y}_{l',n-m}(v) \\ &= \sum_{l=0}^{2j} \frac{4\pi}{2j+1} \left\langle \begin{matrix} j & l \\ j & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j \\ j \end{matrix} \right\rangle^2 \sum_{r=-j}^j Y_{lr}(u) \overline{Y}_{lr}(v) \\ &= \sum_{l=0}^{2j} \frac{2l+1}{2j+1} \left\langle \begin{matrix} j & l \\ j & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j \\ j \end{matrix} \right\rangle^2 P_l(\cos \theta_{uv}), \end{aligned}$$

donde hemos usado (6.11), (6.10) y (6.6). Obtenemos finalmente la fórmula:

$$Q_A(u) = \sum_{l=0}^{2j} \left\langle \begin{matrix} j & l \\ j & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j \\ j \end{matrix} \right\rangle^2 \int_{\mathbb{S}^2} P_l(\cos \theta_{uv}) P_A(v) d\mu_l(v). \quad (7.13)$$

Para mayor claridad, hacemos constar que el coeficiente de Clebsch–Gordan que aparece en esta fórmula es positivo, y que su cuadrado es:

$$\left\langle \begin{matrix} j & l & | & j \\ j & 0 & | & j \end{matrix} \right\rangle^2 = \frac{2j+1}{2j+l+1} \binom{2j}{l} / \binom{2j+l}{l}.$$

7.19. En vista de la ortogonalidad de los armónicos esféricos, obtenemos de (6.6) la “fórmula de reproducción”:

$$\int_{\mathbb{S}^2} P_l(\cos \theta_{uv}) P_{l'}(\cos \theta_{vw}) d\mu_l(v) = \delta_{ll'} P_l(\cos \theta_{uw}). \quad (7.14)$$

El núcleo reproductor de \mathcal{K}_j es dado por (6.18); usando (6.6), podemos reexpresarlo como

$$K_j(u, v) = \sum_{l=0}^{2j} \frac{2l+1}{2j+1} P_l(\cos \theta_{uv}). \quad (7.15)$$

Al multiplicar ambos lados de (7.13) por $P_l(\cos \theta_{wu})$ y al integrar con $d\mu_l(u)$ usando (7.14), obtenemos:

$$\left\langle \begin{matrix} j & l & | & j \\ j & 0 & | & j \end{matrix} \right\rangle^{-2} \int_{\mathbb{S}^2} P_l(\cos \theta_{wu}) Q_A(u) d\mu_l(u) = \int_{\mathbb{S}^2} P_l(\cos \theta_{wv}) P_A(v) d\mu_l(v);$$

integrando ahora con $d\mu_j(v)$, obtenemos de (7.15):

$$P_A(w) = \sum_{l=0}^{2j} \left\langle \begin{matrix} j & l & | & j \\ j & 0 & | & j \end{matrix} \right\rangle^{-2} \int_{\mathbb{S}^2} P_l(\cos \theta_{wu}) Q_A(u) d\mu_l(u). \quad (7.16)$$

Esta es la fórmula que invierte (7.13). Para interpolar entre Q_A y P_A , ahora es claro que debemos tomar

$$W_A(u) := \sum_{l=0}^{2j} \left\langle \begin{matrix} j & l & | & j \\ j & 0 & | & j \end{matrix} \right\rangle^{-1} \int_{\mathbb{S}^2} P_l(\cos \theta_{uv}) Q_A(v) d\mu_l(v). \quad (7.17)$$

De hecho, de (7.16) vemos que los autovalores del operador positivo \mathbf{K} son precisamente los coeficientes $\left\langle \begin{matrix} j & l & | & j \\ j & 0 & | & j \end{matrix} \right\rangle^{-2}$; para obtener $\mathbf{K}^{1/2}$ simplemente reemplazamoslos por $\left\langle \begin{matrix} j & l & | & j \\ j & 0 & | & j \end{matrix} \right\rangle^{-1}$. Con esta fórmula en mano, es un cálculo tedioso comprobar que los signos $\text{signo}(\lambda_l^j)$ del cuantizador correspondiente son todos igual a +1. Hecho eso, se obtiene el mismo cuantizador del Capítulo 6. Luego el método de estados coherentes es una ruta alternativa a la obtención de los cuantizadores para el grupo $SU(2)$.

8. Cuantización de Moyal para Grupos Compactos

Hay dos formas de generalizar un estado: agregar más agua, o agregar más carne.

—G. G. Emch

8.1. Las órbitas coadjuntas de grupos compactos semisimples

8.1. El método de estados coherentes, esbozado en el capítulo anterior para el grupo $SU(2)$, permite efectuar una cuantización de Moyal gobernado por un grupo de Lie compacto cualquiera. La metodología es idéntica a la del Capítulo 7: se construya un juego de estados coherentes, cuyo conjunto índice es una órbita conjunta del grupo de Lie dado, y así se definen los símbolos covariantes de Berezin; luego se introducen los símbolos contravariantes por dualidad; entonces un proceso de interpolación permite identificar una clase de símbolos intermedios, que cumplen la deseada propiedad tracial.

Para efectuar este programa para un grupo de Lie general, tenemos que tomar los siguientes pasos previos:

- a) describir las órbitas coadjuntas;
- b) identificar los estados coherentes parametrizados por una órbita dada;
- c) describir una colección de funciones especiales que permiten calcular los símbolos en forma explícita.

En el caso de $G = SU(2)$, las órbitas son esferas, los estados coherentes ya han sido descritas, y las funciones especiales básicas son los armónicos esféricos sobre la esfera unitaria. En este capítulo indicaremos cómo resolver los problemas (a) y (b) para grupos compactos semisimples.

8.2. Para no hacer la exposición muy extensa, asumiremos en este capítulo cierta familiaridad con la teoría de grupos de Lie compactos: los sistemas de raíces, los toros maximales, el peso máximo de una representación unitaria irreducible. Remitimos al excelente texto de Broecker y tom Dieck [12] para mayor información acerca de dichos temas.

Teniendo en cuenta las consideraciones acerca de las extensiones centrales de G , supondremos desde el principio que G es conexo y *simplemente conexo*, además de compacto. Esto excluye la posibilidad de que G contenga un subgrupo normal toral, y de hecho implica que G sea *semisimple*. Resulta entonces que $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$, así que no hace falta preocuparnos sobre las extensiones centrales de G : las variedades simplécticas homogéneas son simplemente las órbitas coadjuntas de G .

8.3. Por (3.12), sabemos que el espacio tangente $T_u(G \cdot u)$ de la órbita coadjunta de $u \in \mathfrak{g}^*$ es de la forma $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_u$, donde $\mathfrak{g}_u = \{ X \in \mathfrak{g} : \langle u, [X, Y] \rangle = 0, \forall Y \in \mathfrak{g} \}$. Ahora, como G es compacto, la *forma de Killing* $(X, Y) \mapsto \text{Tr}[\text{ad}(X)\text{ad}(Y)]$ es

semidefinida negativa; como G es semisimple, esta forma es no degenerada. Por lo tanto, su negativa:

$$\langle X, Y \rangle_K := -\text{Tr}[\text{ad}(X)\text{ad}(Y)] \quad (8.1)$$

es definida positiva sobre \mathfrak{g} ; es decir, $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$ hace de \mathfrak{g} un espacio de Hilbert real (finitodimensional). Si $u \in \mathfrak{g}^*$, el teorema de Riesz garantiza la existencia de $U \in \mathfrak{g}$ tal que $\langle U, Y \rangle_K = \langle u, Y \rangle$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$; y la correspondencia $u \mapsto U$ es un isomorfismo real-lineal de \mathfrak{g}^* en \mathfrak{g} . (En otras palabras, (8.1) nos permite identificar \mathfrak{g}^* con \mathfrak{g} .) Ahora

$$\begin{aligned} \langle u, [X, Y] \rangle &= \langle U, [X, Y] \rangle_K = \text{Tr}[\text{ad}(U)\text{ad}(Y)\text{ad}(X) - \text{ad}(U)\text{ad}(X)\text{ad}(Y)] \\ &= \text{Tr}[\text{ad}(X)\text{ad}(U)\text{ad}(Y) - \text{ad}(U)\text{ad}(X)\text{ad}(Y)] = \langle [U, X], Y \rangle_K, \end{aligned}$$

así que $\mathfrak{g}_u = \{ X \in \mathfrak{g} : \text{ad}(X)U = 0 \}$. Como $\text{ad}(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}(\exp tX)$, obtenemos

$$\begin{aligned} G_u &= \{ g \in G : \text{Ad}(g)U = U \} \\ &= \{ g \in G : g \exp(tU)g^{-1} = \exp(tU), \forall t \in \mathbb{R} \} = Z_G(T_1) \end{aligned}$$

donde $Z_G(T_1)$ es el centralizador del toro T_1 que es la adherencia del subgrupo uniparamétrico $\{ \exp(tU) : t \in \mathbb{R} \}$. (Obsérvese que T_1 es compacto, conexo y abeliano, luego es un toro, pero su dimensión puede ser mayor que 1.)

Como G es un grupo compacto y conexo, $Z_G(T_1)$ es la unión de los toros máximos de G que incluyen T_1 . Podemos elegir una cámara de Weyl (abierta) $K \subset \mathfrak{g}^*$ (y por ende fijamos una colección de raíces positivas de \mathfrak{g}) tal que u esté en la adherencia de K . El toro T_1 no es máximo si y solo si u queda en una pared de K . Las órbitas coadjuntas “genéricas” entonces corresponden al caso $u \in K$, y tienen dimensión máxima entre todas las órbitas coadjuntas, pues $\dim(G \cdot u)$ es máximo si y solo si $\dim(Z_G(T_1))$ es mínimo si y solo si $\dim(T_1)$ es máximo si y solo si T_1 es un toro máximo. Como todos los toros máximos del grupo compacto G son conjugados, obtenemos para una órbita genérica:

$$G \cdot u \approx G/T,$$

donde T es un toro máximo fijo de G .

8.4. [Podemos precisar la estructura de G con un poco más de detalle, aunque no será imprescindible para nuestro propósito inmediato. Decimos que la órbita $G \cdot u$ es *entera* si la forma simpléctica ω_u es entera, es decir, si tiene integrales de valores enteros sobre 2-ciclos enteros. Por un teorema de Kostant [28], esto ocurre cuando la forma real-lineal $2\pi i u: \mathfrak{g}_u \rightarrow i\mathbb{R}$ se puede levantar a un carácter $\chi_u: G_u \rightarrow U(1)$ definido por $\chi_u(\exp X) := e^{2\pi i \langle u, X \rangle}$ para $X \in \mathfrak{g}_u$. Estas órbitas

corresponden a representaciones unitarias irreducibles de G por inducción holomorfa de χ_u . Más precisamente, el álgebra de Lie complexificada $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ posee una subálgebra compleja \mathfrak{p} que incluye la complexificación de \mathfrak{g}_u y también los espacios de raíces de las raíces positivas de G . Si P es el subgrupo “parabólico” de G con álgebra de Lie \mathfrak{p} , entonces χ_u se extiende a una representación holomorfa unidimensional de P . Esto da lugar, por inducción de χ_u , a una representación holomorfa del grupo complexificado $G^{\mathbb{C}}$; su restricción a G es una representación unitaria irreducible ρ_u de G .

Más aún, el teorema de Borel–Weil [40] dice que cada representación unitaria irreducible de G es obtenida por esta vía, y que ρ_u y ρ_v son unitariamente equivalentes si y solo si u y v quedan en la misma órbita coadjunta entera. Así, si $G \cdot u$ es una órbita entera, tenemos

$$G \cdot u \approx G/Z_G(T_1) \approx G^{\mathbb{C}}/P$$

que es una variedad de Kähler compacta; de hecho, es una de las llamadas “variedades de bandera”.]

8.2. Estados coherentes y símbolos para grupos compactos semisimples

8.5. Ahora sea π una representación unitaria irreducible fija de G , sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H} ; escribiremos $d(\pi) := \dim(\mathcal{H})$. El peso máximo de π (respecto de una elección previa de la cámara de Weyl positiva K) es un elemento $u_0 \in \mathfrak{g}^*$. En la terminología del párrafo anterior, la órbita $M := G \cdot u_0$ es entera; supongamos que esta órbita es genérica (es decir, $u_0 \in K$), y que $M = G/T$, donde T es un toro máximo apropiado.

Sea $|u_0\rangle \in \mathcal{H}$ un vector de norma 1 tal que

$$\pi(\exp tX)|u_0\rangle = e^{2\pi it\langle u_0, X \rangle}|u_0\rangle. \quad (8.2)$$

El llamado “teorema del peso máximo” asegura que existen vectores no ceros que cumplen (8.2) y que todos son proporcionales, es decir, forman un subespacio unidimensional de \mathcal{H} .

Si $x \in \mathcal{H}$ es un vector de norma 1 cualquiera, definimos $P(x) \in \mathfrak{g}^*$ por:

$$\langle P(x), Y \rangle := -i \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle x | \pi(\exp tY) | x \rangle.$$

(P es una “aplicación momento” para la acción de G sobre la esfera unitaria de \mathcal{H} .) Se ve que $\langle P(\pi(g)x), Y \rangle = \langle P(x), \text{Ad}(g)Y \rangle$, así que

$$P(\pi(g)x) = g \cdot P(x). \quad (8.3)$$

Además $P^{-1}(u_0) = \{ e^{i\theta}|u_0\rangle : e^{i\theta} \in \mathbb{T} \}$, por las propiedades de vectores de peso máximo. Esto es suficiente para poder concluir que

$$P^{-1}(M) = \{ \pi(g)|u_0\rangle : g \in G \},$$

porque $P(x) = g \cdot u_0$ si y solo si $P(\pi(g^{-1})x) = u_0$ si y solo si $x = \pi(g) e^{i\theta}|u_0\rangle = \pi(g)\pi(h)|u_0\rangle$ para algún $h \in G_{u_0}$, ya que u_0 es un peso (real) de π .

8.6. Definición. Ahora, para cada $u \in M = G \cdot u_0$, elijamos $g_u \in G$ tal que $g_u \cdot u_0 = u$ y $g_{u_0} = 1$, y tal que $u \mapsto g_u$ sea una sección boreliana del fibrado $G \rightarrow G \cdot u_0$. (La órbita coadjunta M está dotada de una medida de Liouville G -invariante $d\mu$, cuya normalización será especificado abajo.) Definimos entonces los **estados coherentes** para la representación π por:

$$|u\rangle := \pi(g_u)|u_0\rangle \in \mathcal{H}.$$

La equivariancia (8.3) de P muestra que $P(|u\rangle) = u$ para todo $u \in G \cdot u_0$, así que $|u\rangle$ es determinado por u salvo por un múltiplo por un elemento de \mathbb{T} .

Podemos entonces definir el símbolo covariante de Berezin:

$$Q_A(u) := \langle u | A | u \rangle,$$

para $u \in G \cdot u_0$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. De ahora en adelante, el argumento para la construcción de los símbolos P_A y W_A es idéntica al procedimiento empleado en el Capítulo 7 en el caso $G = SU(2)$. Lo único que debemos hacer es asegurarnos que no se pierde información al sustituir Q_A en lugar de A . Para ese efecto, comprobaremos la univocidad del símbolo covariante con un argumento inductivo, debido a Wildberger [51].

8.7. Lema. *La correspondencia $A \mapsto Q_A : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow L^2(M, d\mu)$ es uno-a-uno.*

Demostración: Para cada raíz positiva α de \mathfrak{g} podemos elegir vectores $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ (para la notación, remitimos a [12]) tales que

$$\langle x | d\pi(X_\alpha)y \rangle = \langle d\pi(Y_\alpha)x | y \rangle \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{H}.$$

Dotamos el conjunto de pesos (complejos) de π de una orden parcial por: $v > w$ si y solo si $v - w = c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k$, donde $\{ \alpha_1, \dots, \alpha_k \}$ son las raíces simples de \mathfrak{g} y c_1, \dots, c_k son enteros no negativos, no todos cero. Hay un elemento máximo λ para este orden, a saber, la extensión compleja de la forma real-lineal $2\pi i u_0$ sobre el álgebra de Lie del toro máximo T . Ordenamos pares de pesos lexicográficamente por: $(v, v') > (w, w')$ si $v > w$ ó si $v = w$ y $v' > w'$. Sea $H_v \subset \mathcal{H}$ el espacio de peso de v ; entonces $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{v,w} L_{vw}$, donde L_{vw} es el espacio vectorial generado por $\{ |x\rangle\langle y| : x \in H_v, y \in H_w \}$. Para $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, sea $A = \sum_{v,w} A_{vw}$ la decomposición correspondiente de A , con $A_{vw} \in L_{vw}$.

La representación $\sigma := \pi \otimes \bar{\pi}$ actúa sobre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ por $\sigma(g)A := \pi(g)A\pi(g^{-1})$. Para $X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, tenemos $d\sigma(X)A = d\pi(X)A - A d\pi(X)$. En particular,

$$\begin{aligned} d\sigma(X_\alpha)|x\rangle\langle y| &= |d\pi(X_\alpha)x\rangle\langle y| - |x\rangle\langle d\pi(Y_\alpha)y|, \\ d\sigma(Y_\alpha)|x\rangle\langle y| &= |d\pi(Y_\alpha)x\rangle\langle y| - |x\rangle\langle d\pi(X_\alpha)y|. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Tomamos ahora $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ con $A \neq 0$, pero con $Q_A = 0$ en $L^2(M, d\mu)$ (si esto fuera posible). Entonces $\langle u | \sigma(g)A | u \rangle = \langle g^{-1} \cdot u | A | g^{-1} \cdot u \rangle = 0$ para $g \in G$, así que $\langle u | d\sigma(X)A | u \rangle = 0$ para $u \in M$, $X \in \mathfrak{g}$.

Sea (ξ, η) un par máximo de pesos tales que exista A con $Q_A = 0$ y $A_{\xi\eta} \neq 0$. Si $\xi < \lambda$, entonces $A_{\xi\eta} = \sum_{i=1}^m |x_i\rangle\langle y_i|$, donde $\{y_1, \dots, y_m\}$ es una base para H_η y $x_i \in H_\xi$ con $x_1 \neq 0$. Como $\eta < \lambda$ y π es irreducible, $d\pi(X_\alpha)x_1 \neq 0$ para alguna raíz positiva α . Pero entonces $d\sigma(X_\alpha)A$ tiene símbolo covariante cero y por (8.4) tiene un componente $(\xi + \alpha, \eta)$ no cero, violando la maximalidad de ξ . Luego $\xi = \lambda$.

Ahora, si $\eta < \lambda$ entonces $A_{\lambda\eta} = |x\rangle\langle y|$ con $x \in H_\lambda$, $y \in H_\eta$ y $y \neq 0$; para alguna raíz positiva α , tenemos entonces que $d\sigma(Y_\alpha)A$ tiene símbolo covariante cero y un componente $(\lambda, \eta + \alpha)$ no cero, violando la maximalidad de η . Luego $\eta = \lambda$; se concluye que $A_{\lambda\lambda}$ es un escalar no cero.

Tenemos $|u_0\rangle \in H_\lambda$, y por lo tanto

$$Q_A(u_0) = \langle u_0 | A | u_0 \rangle = A_{\lambda\lambda} \langle u_0 | u_0 \rangle \neq 0,$$

lo cual contradice $Q_A = 0$. Se concluye que $Q_A = 0$ solo si $A = 0$. \square

8.3. Cuantizadores para grupos compactos semisimples

8.8. Introducimos ahora el símbolo contravariante. Sea $\mathcal{K} := \{Q_A : A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\}$ el espacio de símbolos; es un subespacio finitodimensional de $L^2(M, d\mu)$, con $\dim(\mathcal{K}) = \dim(\mathcal{L}(\mathcal{H})) = d(\pi)^2$. La forma lineal $Q_B \mapsto \text{Tr}[A^*B]$ sobre \mathcal{K} es dada, en vista del teorema de Riesz, por $Q_B \mapsto \langle P_A | Q_B \rangle$ para un único elemento $P_A \in \mathcal{K}$; esta definición de P_A es suficiente para comprobar el análogo de (7.10):

$$\int_M P_A(u) Q_B(u) d\mu(u) = \text{Tr}[AB]. \quad (8.5)$$

Ahora podemos precisar la normalización de la medida $d\mu$. Tenemos $Q_I = \mathbf{1}$ y queremos tener $P_I = \mathbf{1}$ también. Al colocar $A = B = I$ en (8.5), se ve que la condición necesaria y suficiente para eso es:

$$\mu(M) := \int_M d\mu(u) = d(\pi). \quad (8.6)$$

(Para $G = SU(2)$, $\pi = \pi_j$, tenemos $d(\pi) = 2j + 1$; de ahí el factor de $(2j + 1)$ en la fórmula para la medida $d\mu_j$.)

Introducimos $\mathbf{K} \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ por $\mathbf{K}(Q_A) := P_A$. De (7.11), que es válido en el caso general, vemos que \mathbf{K} es definida positiva. Introducimos finalmente $W_A := \mathbf{K}^{1/2}(Q_A) = \mathbf{K}^{-1/2}(P_A)$. La demostración del Teorema 7.16 se transfiere sin cambio al caso general para mostrar que este último símbolo cumple, *mutatis mutandis*, las cuatro propiedades requeridas de una cuantización de Moyal.

8.9. Si hacemos $W_A =: \text{Tr}[A\Omega(\cdot)]$, obtenemos que Ω cumple (6.1). En fin, existe un cuantizador de Stratonovich–Weyl por la cuaterna $(G, \pi, M, d\mu)$, donde G es un grupo compacto simplemente conexo, π es una representación unitaria irreducible de G cuyo peso máximo pertenece al interior de la cámara de Weyl, $M \approx G/T$ es una órbita coadjunta genérica y $d\mu$ es la medida de Liouville sobre M normalizada por (8.6).

8.10. No está fuera de lugar preguntar si W_A posee una expresión más explícita, análoga a la fórmula (7.17) para $SU(2)$. Es posible desarrollar el formalismo que condujo a (7.17) para cualquier grupo compacto semisimple, toda vez que encontremos las generalizaciones adecuadas de los armónicos esféricos Y_{lm} y los coeficientes de Clebsch–Gordan. Ahora, la búsqueda de coeficientes de Clebsch–Gordan para grupos compactos generales es un camino trillado; podemos remitir, por ejemplo, a [5]. Una complicación nada trivial es que en el caso general, las subrepresentaciones del producto tensorial $\pi \otimes \bar{\pi}$ tienen multiplicidad mayor que 1:

$$\pi \otimes \bar{\pi} \sim \bigoplus_{\gamma} n_{\pi}(\gamma) \gamma,$$

donde γ recorre las (clases de equivalencia de) representaciones unitarias irreducibles de G presentes en la descomposición de $\pi \otimes \bar{\pi}$, y $n_{\pi}(\gamma)$ es la multiplicidad de γ en dicha descomposición. Hay fórmulas recursivas que permiten calcular $n_{\pi}(\gamma)$; vea, por ejemplo, [27]. El cálculo explícito de los coeficientes de Clebsch–Gordan para los grupos clásicos es, hoy en día, una subindustria del álgebra simbólica.

8.11. La generalización de los armónicos esféricos es menos evidente. Estas serían funciones sobre órbitas conjuntas G/T que tengan propiedades de covariancia adecuadas respecto de la acción coadjunta de G , y que formen una base ortonormal para $L^2(G/T, d\mu)$. Los que ocurren en el análisis del cuantizador para $(G, \pi, G/T, d\mu)$ tienen índices (γ, r, m) , donde γ es una subrepresentación de $\pi \otimes \bar{\pi}$, $r = 1, \dots, n_{\pi}(\gamma)$, y $m = 1, \dots, d(\gamma)$. Una definición tentativa sería:

$$Y_{\gamma rm}(u) := \sqrt{\frac{d(\gamma)}{d(\pi)}} \mathcal{D}_{kr}^{\gamma}(g_u), \tag{8.7}$$

en donde los $\mathcal{D}_{kr}^{\gamma}(g)$ son entradas de la matriz de $\gamma(g)$. (Resulta que $n_{\pi}(\gamma) \leq d(\gamma)$, para que las distintas r puedan corresponder a diversas columnas de la

matriz de $\gamma(g)$.) En [21] se comprueba que esta definición conduce a fórmulas que generalizan (7.17) a órbitas de grupos compactos semisimples.

8.12. Un último cabo suelto es la búsqueda de una sección adecuada $u \mapsto g_u$ del fibrado $G \mapsto G/T$. Es sabido que este fibrado no admite secciones continuas; pero como solo queremos calcular integrales respecto de la medida de Liouville, es suficiente que nuestra sección sea continua fuera de algún conjunto de medida cero. (Para $SU(2) \rightarrow \mathbb{S}^2$, la sección $(\theta, \phi) \mapsto (\phi, \theta, 0)$ es continua salvo en los polos norte y sur, que forman un conjunto de codimensión dos y de área cero.) La solución de este problema vendrá dada por *una parametrización de G por ángulos de Euler generalizados* $(\theta_1, \phi_1, \dots, \theta_m, \phi_m; \psi_1, \dots, \psi_k)$, con $k = \dim T$, $m = (\dim G - \dim T)/2$, donde los últimos k ángulos parametrizan el toro máximo T . Con esta parametrización, podemos tomar $u = (\theta_1, \phi_1, \dots, \theta_m, \phi_m)$, $g_u = (\theta_1, \phi_1, \dots, \theta_m, \phi_m; 0, \dots, 0)$ para expresar funciones como (8.7) explícitamente en términos de coordenadas angulares de la variedad de bandera G/T .

Debemos mencionar el trabajo de Chacón y Moshinsky [16], que es al parecer el primer ensayo de un cálculo de esta naturaleza para el grupo 8-dimensional $SU(3)$. De sus fórmulas, se percibe que los armónicos esféricos generalizados son combinaciones lineales de productos de armónicos esféricos usuales, cuyas expresiones dependen de los parámetros elegidos.

Curiosamente, los trabajos acerca de ángulos de Euler para grupos compactos generales no abundan; pero se pueden calcular estos ángulos en algunos casos. En el Apéndice B, exponemos el método de Shatahshvili para $G/T = SU(n)/\mathbb{T}^{n-1}$, que produce una parametrización angular a partir de un algoritmo de “reducción simpléctica”. Sin duda, el método puede aplicarse a los demás grupos simples también; podemos afirmar, entonces, que el problema de cuantización de Moyal para grupos compactos admite una solución completa.

Apéndice A. Cuantización sobre el Disco de Poincaré

*Mientras aprendía la teoría yo mismo,
me pareció buena idea exponer sobre
 $SL(2, \mathbb{R})$.*

—S. Lang

A.1. En este apéndice indicamos brevemente (sin demostraciones) un ejemplo de cuantización de Moyal de un grupo no compacto semisimple: $G = SL(2, \mathbb{R})$. Hay familias de estados coherentes para los diversos representaciones unitarias irreducibles de este grupo, cuyas construcciones están expuestas en el libro de Perelomov [36]. El método del Capítulo 8 puede adaptarse para el caso de las llamadas “series discretas” de representaciones. Nuestros estados coherentes difieren de los de Perelomov por ciertos factores de normalización; esto hace más sencillo el cálculo del cuantizador de Stratonovich–Weyl.

A.2. Definición. Para simplificar la notación, usamos el isomorfismo conocido entre los grupos $SL(2, \mathbb{R})$ y $SU(1, 1)$ dado por la “transformación de Cayley” $\theta(g) := CgC^{-1}$ para $g \in SL(2, \mathbb{R})$, donde $C := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \in SU(2)$. La **serie discreta** (holomorfa) de representaciones unitarias irreducibles de $SU(1, 1)$ es la familia $\{\pi_k : k = 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \dots\}$ dada por la fórmula (2.12). El espacio de Hilbert es $\mathcal{H}_k := L^2_{\text{hol}}(\mathbb{D}, d\lambda_k(\zeta))$, donde \mathbb{D} es el disco $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ y $d\lambda_k(\zeta) := \frac{2k-1}{\pi}(1 - |\zeta|^2)^{2k-2} d\Re\zeta d\Im\zeta$.

La órbita coadjunta correspondiente puede identificarse con \mathbb{D} también. (Esta órbita es un componente de una hiperboloide de dos mantos en $\mathfrak{su}(1, 1)$; la identificación con \mathbb{D} se efectúa por una proyección estereográfica). En el disco, en cuanto órbita coadjunta, usamos la coordenada compleja $\eta \equiv \text{th}(\frac{1}{2}\tau) e^{i\phi}$. La medida de Liouville (con normalización apropiada) es

$$d\mu_k(\eta) := \frac{2k-1}{\pi}(1 - |\eta|^2)^{-2} d\Re\eta d\Im\eta = \frac{2k-1}{\pi} \text{sh } \tau d\tau d\phi.$$

El espacio de Hilbert \mathcal{H}_k tiene la base ortonormal:

$$\psi_m(\zeta) := \binom{m+2k-1}{m}^{1/2} \zeta^m \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Su núcleo reproductor es $I_k(\omega, \bar{\zeta}) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(\omega) \overline{\psi_m(\bar{\zeta})} = (1 - \omega\bar{\zeta})^{-2k}$.

A.3. Los estados coherentes para la representación π_k son dados por:

$$|\eta\rangle(\zeta) := R(\eta)^{-2k} (1 - \zeta\bar{\eta})^{-2k}, \quad R(\text{th } \frac{1}{2}\tau e^{i\phi}) \equiv \text{ch } \frac{1}{2}\tau e^{i\phi/2}.$$

Fíjese que $|R(\eta)|^{-2} = \operatorname{sech}^2(\frac{1}{2}\tau) = 1 - |\eta|^2$. Se puede comprobar que:

$$\int_{\mathbb{D}} |\eta\rangle\langle\eta| d\mu_k(\eta) = I,$$

y además que $\langle\xi|\eta\rangle = \{R(\bar{\xi})R(\eta)(1 - \xi\bar{\eta})\}^{-2k}$, así que

$$|\langle\xi|\eta\rangle|^2 = \left(\frac{|1 - \xi\bar{\eta}|^2}{(1 - |\xi|^2)(1 - |\eta|^2)} \right)^{-2k} = \{\operatorname{ch} d(\xi, \eta)\}^{-4k},$$

donde $d(\xi, \eta)$ denota la función de distancia hiperbólica sobre el disco de Poincaré \mathbb{D} . Si escribimos $T \equiv T_{\xi\eta} := 2d(\xi, \eta)$, obtenemos:

$$|\langle\xi|\eta\rangle|^2 = \{\operatorname{ch} d(\xi, \eta)\}^{-4k} = \left(\frac{1 + \operatorname{ch} T_{\xi\eta}}{2} \right)^{-2k}.$$

La fórmula de adición de la trigonometría hiperbólica es:

$$\operatorname{ch} T_{\xi\eta} = \operatorname{ch} \tau \operatorname{ch} \tau' - \operatorname{sh} \tau \operatorname{sh} \tau' \cos(\phi - \phi'),$$

cuando $\eta = \operatorname{th} \frac{1}{2}\tau e^{i\phi}$, $\xi = \operatorname{th} \frac{1}{2}\tau' e^{i\phi'}$.

A.4. El núcleo reproductor para $L^2(\mathbb{D}, d\mu_k(\eta))$ es dado por

$$I(\xi, \eta) = \int_0^\infty P_{-\frac{1}{2}+i\sigma}(\operatorname{ch} T_{\xi\eta}) \sigma \operatorname{th} \pi\sigma d\sigma. \quad (\text{A.1})$$

donde los $P_{-\frac{1}{2}+i\sigma}$ son funciones de Legendre [29]. Para comprobar (A.1), es cuestión de notar que la descomposición espectral del laplaciano sobre \mathbb{D} es dado [43, p. 202] por:

$$-\Delta = \int_0^\infty \left(\frac{1}{4} + \sigma^2 \right) E_\sigma d\sigma,$$

donde los proyectores espectrales tienen el núcleo:

$$E_\sigma(\eta, \xi) := \sigma \operatorname{th} \pi\sigma P_{-\frac{1}{2}+i\sigma}(\operatorname{ch} T_{\eta\xi}).$$

El integrando en (A.1) puede desarrollarse como una serie de “armónicos hiperbólicos”:

$$P_{-\frac{1}{2}+i\sigma}(\operatorname{ch} T_{\xi\eta}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m P_{-\frac{1}{2}+i\sigma}^m(\operatorname{ch} \tau) P_{-\frac{1}{2}+i\sigma}^{-m}(\operatorname{ch} \tau') e^{im(\phi-\phi')}.$$

A.5. Los símbolos de Berezin Q_A, P_A de un operador $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_k)$ se definen por

$$Q_A(\eta) := \langle\eta|A|\eta\rangle, \quad A =: \int_{\mathbb{D}} P_A(\eta) |\eta\rangle\langle\eta| d\mu_k(\eta).$$

Como en (7.12), obtenemos

$$Q_A(\xi) = \int_{\mathbb{D}} |\langle \xi | \eta \rangle|^2 P_A(\eta) d\mu_k(\eta). \quad (\text{A.2})$$

Al emplear de nuevo la notación $\mathbf{K}(Q_A) := P_A$, vemos que $|\langle \xi | \eta \rangle|^2$ es el núcleo del operador \mathbf{K}^{-1} (que actúa sobre el subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D}, d\mu_k)$ generado por los Q_A). Para obtener una expresión para \mathbf{K} , es cuestión de invertir la transformación (A.2). Esto se logra mediante la *fórmula de inversión de Mehler–Fock* [29, p. 221]:

$$\begin{aligned} |\langle \xi | \eta \rangle|^2 &= \left(\frac{1 + \operatorname{ch} T_{\xi\eta}}{2} \right)^{-2k} = \int_0^\infty f_k(\sigma) P_{-\frac{1}{2}+i\sigma}(\operatorname{ch} T_{\xi\eta}) \sigma \operatorname{th} \pi \sigma d\sigma \\ \Leftrightarrow f_k(\sigma) &= \int_0^\infty \left(\frac{1 + \operatorname{ch} T}{2} \right)^{-2k} P_{-\frac{1}{2}+i\sigma}(\operatorname{ch} T) \operatorname{sh} T dT \\ &= \int_1^\infty \left(\frac{1+x}{2} \right)^{-2k} P_{-\frac{1}{2}+i\sigma}(x) dx. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

La expansión de este núcleo utiliza el hecho de que, debido a la covariancia de los símbolos Q_γ y P_γ , el operador \mathbf{K} conmuta con el laplaciano Δ . Luego $\mathbf{K}^{1/2}$ también conmuta con Δ , y (por cálculo espectral) podemos desarrollar su núcleo en la forma:

$$K^{1/2}(\eta, \xi) = \int_0^\infty [f_k(\sigma)]^{-1/2} P_{-\frac{1}{2}+i\sigma}(\operatorname{ch} T_{\xi\eta}) \sigma \operatorname{th} \pi \sigma d\sigma. \quad (\text{A.4})$$

A.6. [Se puede considerar $\sqrt{f_k(\sigma)}$ como un coeficiente de Clebsch–Gordan para $SU(1,1)$ [34]. El producto tensorial de representaciones $\pi_k \otimes \bar{\pi}_k$ admite una decomposición:

$$\pi_k \otimes \bar{\pi}_k \sim \int_{(0,\infty)}^\oplus \pi_{i\sigma}^+ \sigma \operatorname{th} \pi \sigma d\sigma,$$

donde $\pi_{i\sigma}^+$ denota una representación de la serie principal de $SU(1,1)$.]

A.7. De (A.4) obtenemos una receta para el cuantizador:

$$\begin{aligned} \Omega_k(\eta) &= \int_0^\infty [f_k(\sigma)]^{-1/2} \int_{\mathbb{D}} \sum_{m=-\infty}^\infty (-1)^m P_{-\frac{1}{2}+i\sigma}^m(\operatorname{ch} \tau') e^{-im\phi'} |\xi\rangle \langle \xi| d\mu_k(\xi) \\ &\quad \times P_{-\frac{1}{2}+i\sigma}^m(\operatorname{ch} \tau) e^{im\phi} \sigma \operatorname{th} \pi \sigma d\sigma \\ &= \int_0^\infty [f_k(\sigma)]^{-1/2} \int_{\mathbb{D}} P_{-\frac{1}{2}+i\sigma}(\operatorname{ch} T_{\xi\eta}) |\xi\rangle \langle \xi| d\mu_k(\xi) \sigma \operatorname{th} \pi \sigma d\sigma. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el problema de hallar el cuantizador Ω_k se reduce al de calcular $f_k(\sigma)$. De (A.3) y unas tablas de transformadas de Mehler–Fock [19, p. 504] obtenemos:

$$f_k(\sigma) = \frac{\Gamma(2k - \frac{1}{2} + i\sigma)\Gamma(2k - \frac{1}{2} - i\sigma)}{((2k - 1)!)^2}.$$

De la conocida fórmula:

$$\Gamma(\frac{1}{2} + i\sigma)\Gamma(\frac{1}{2} - i\sigma) = \pi \operatorname{sech} \pi\sigma,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} f_1(\sigma) &= \Gamma(\frac{3}{2} + i\sigma)\Gamma(\frac{3}{2} - i\sigma) = (\frac{1}{4} + \sigma^2)\pi \operatorname{sech} \pi\sigma, \\ f_{3/2}(\sigma) &= \Gamma(\frac{5}{2} + i\sigma)\Gamma(\frac{5}{2} - i\sigma) = \frac{1}{4}(\frac{9}{4} + \sigma^2)(\frac{1}{4} + \sigma^2)\pi \operatorname{sech} \pi\sigma, \end{aligned}$$

y en general:

$$f_k(\sigma) = \frac{\pi \operatorname{sech} \pi\sigma}{((2k - 1)!)^2} \prod_{j=1}^{2k-1} ((j - \frac{1}{2})^2 + \sigma^2).$$

El cálculo de símbolos Q_A , P_A y $W_A := \mathbf{K}^{1/2}(Q_A)$ se reduce así a la evaluación de transformadas de Mehler–Fock. De esta forma, vemos una vez más que la cuantización de Moyal nos conduce de manera natural a la teoría de funciones especiales.

A.8. [Hay otras cuantizaciones del espacio de fases \mathbb{D} en la literatura. El método de los Unterberger [44] generaliza la cuantización de Weyl de una forma distinta a la nuestra: se observa que los operadores de Grossmann y Royer (5.10) dan simetrías geodésicas de \mathbb{R}^n : $\zeta \mapsto 2q - \zeta$. De hecho, si definimos $\Omega(0)$ como el operador $\psi(\zeta) \mapsto 2^n \psi(-\zeta)$, y $\Omega(u)$ (para $u \neq 0$ en \mathbb{R}^{2n}) por covariancia bajo $\tilde{\mathbb{H}}(n)$, obtenemos precisamente los operadores de Grossmann y Royer. Este hecho motivó a los Unterberger a proponer un algoritmo que en nuestro lenguaje consiste en tomar $[\Omega'_k(0)\psi](\zeta) := 2\psi(-\zeta)$ (ya que $\zeta \mapsto -\zeta$ es la simetría geodésica en el origen del disco de Poincaré), y en definir $\Omega'_k(g \cdot 0) := \pi_k(g)\Omega'_k(0)\pi_k(g^{-1})$ para $g \in SU(1, 1)$. El cuantizador dado por este Ansatz es evidentemente covariante.

En un interesante trabajo, Avila [3] ha mostrado que

$$\operatorname{Tr}[\Omega'_k(0)\Omega'_k(\eta)] = 2 \left(\frac{\operatorname{sech} \tau}{1 + \operatorname{th} \tau} \right)^{2k} \frac{1 + \operatorname{th} \tau}{\operatorname{th} \tau},$$

de donde se concluye que Ω'_k no es tracial, ya que el lado derecho no es proporcional a $\delta(\operatorname{ch} \tau - 1)$ (aunque se aproxima a esta distribución cuando $k \rightarrow \infty$). Esto demuestra que la generalización de la cuantización de Weyl propuesta por los Unterberger es distinta a la nuestra.]

Apéndice B. Coordenadas Canónicas en Orbitas Coadjuntas

Un analista funcional es, primero y ante todo, un analista, y no una especie degenerada de topólogo.

—E. Hille

B.1. Las órbitas coadjuntas genéricas de $SU(n)$

B.1. Como señalamos al final del Capítulo 8, la resolución explícita del problema de cuantización de Moyal para grupos compactos depende en parte de una buena elección de coordenadas en sus órbitas coadjuntas. Indicaremos en este Apéndice como hallar coordenadas apropiadas para órbitas coadjuntas genéricas del grupo compacto simple $SU(n)$, que generalizan las coordenadas canónicas $(\cos \theta, \phi)$ de la esfera \mathbb{S}^2 . El método fue bosquejado en un trabajo reciente acerca de la cuantización por integrales de camino sobre espacios de fases compactos [2], y lo hemos bautizado el “método de Shatashvili”.

B.2. Sea G un grupo de Lie. En una vecindad V de la identidad e de G , se puede expresar $g \in V$ como exponencial: $g = \exp(a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n)$, donde $\{X_1, \dots, X_n\}$ es una base del álgebra de Lie \mathfrak{g} de G . Un cálculo formal nos da la siguiente fórmula:

$$g^{-1} dg = da_1 X_1 + da_2 X_2 + \cdots + da_n X_n \quad (\text{B.1})$$

(porque los a_j son funciones de g , bien definidas en V). Esto es una forma diferencial con valores (vectoriales) en el álgebra de Lie \mathfrak{g} de G , llamado la *forma de Maurer–Cartan*.

Si h es un elemento fijo de G , tenemos

$$(hg)^{-1} d(hg) = g^{-1} h^{-1} (h dg) = g^{-1} dg,$$

así que la forma (B.1) es invariante bajo traslaciones a la izquierda $g \mapsto hg$. (En general, $d(hg) = h dg + (dh)g$, pero aquí $dh = 0$ pues h es constante). La forma de Maurer–Cartan es, pues, una 1-forma sobre G con valores en \mathfrak{g} , que es invariante bajo traslaciones a la izquierda.

B.3. Queremos hallar una buena parametrización del grupo G . Si T denota un toro máximo de G , y $\dim T = k$, los parámetros angulares para T son obvios; falta hallar un juego de parámetros para el cociente G/T . Vimos en el Capítulo 8 que este cociente es una órbita coadjunta (de dimensión máxima) de G y por ende es una variedad simpléctica. Si ω denota su forma simpléctica G -invariante y $2m = \dim G - k$ es su dimensión, su forma de volumen (medida de Liouville) es $\omega \wedge \cdots \wedge \omega$ (m veces). Luego se requiere una expresión explícita de ω en coordenadas canónicas.

B.4. Para $G = SU(n)$, tenemos $k = n - 1$, y T es el toro de matrices *diagonales* unitarias de determinante 1:

$$t = \begin{pmatrix} e^{i\psi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\psi_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{i\psi_n} \end{pmatrix}, \quad \psi_1 + \dots + \psi_n \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

La conjugación de los toros máximos de $SU(n)$ es el hecho conocido de que cualquier matriz unitaria es diagonalizable, mediante conjugación con otra matriz unitaria.

B.5. Por ser $SU(n)$ compacto y semisimple, la negativa de la forma de Killing $\langle X, Y \rangle_K := -\text{Tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y))$ es una forma bilineal definida positiva sobre $\mathfrak{su}(n)$, que nos permite identificar $\mathfrak{su}(n)^*$ con $\mathfrak{su}(n)$.

Para el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(n)$, resulta que

$$\langle X, Y \rangle_K = -\text{Tr}(XY), \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{su}(n),$$

y la acción coadjunta adopta la forma

$$-\text{Tr}((g \cdot u)X) = -\text{Tr}(u \text{Ad}(g^{-1})X) = -\text{Tr}(ug^{-1}Xg) = -\text{Tr}(gug^{-1}X);$$

terminamos con la simple receta:

$$g \cdot u = gug^{-1}, \quad \text{para todo } g \in SU(n), u \in \mathfrak{su}(n)^*,$$

ya que $\text{Tr}(AX) = \text{Tr}(BX)$ para todo X si y solo si $A = B$. Obsérvese que (por ser $SU(n)$ semisimple) la forma matricial de las acciones adjunta y coadjunta coinciden.

B.6. Ahora sea u_0 una matriz diagonal con entradas imaginarias cuya suma es cero. Entonces u_0 pertenece al álgebra de Lie de T , que es un subespacio del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(n)$. Por la discusión anterior, podemos considerar u_0 como elemento de la coálgebra $\mathfrak{su}(n)^*$ también.

El grupo de isotropía G_{u_0} , es $\{g \in G : g \cdot u_0 = u_0\} = \{g \in G : gu_0g^{-1} = u_0\} = \{g \in G : gu_0 = u_0g\}$. Las matrices (unitarias o no) que conmutan con una matriz diagonal dada se descomponen en bloques $r \times r$, un bloque para cada autovalor de la matriz diagonal que sea r veces repetida. *El caso genérico es que u_0 tenga entradas diagonales distintas*, y en dicho caso obtenemos $gu_0 = u_0g$ si y solo si g es también diagonal. Es decir: $G_{u_0} = T$ cuando u_0 tenga autovalores distintos.

Si $u_0 = \text{diag}[im_1, im_2, \dots, im_n]$, con $m_1 + m_2 + \dots + m_n = 0$, podemos suponer que

$$m_1 > m_2 > \dots > m_n. \tag{B.2}$$

Si no, sea $\sigma \in S_n$ la permutación que reordena $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ en orden descendente, y sea g_σ la “matriz de permutación” (unitaria) con entradas $(i, \sigma(i))$ iguales a 1 y las otras entradas cero; es $\det(g_\sigma) = \epsilon_\sigma = \pm 1$, así que $\epsilon_\sigma g_\sigma \in SU(n)$ y $u'_0 := (\epsilon_\sigma g_\sigma) u_0 (\epsilon_\sigma g_\sigma)^{-1}$ tiene autovalores que sí cumplen (B.2). En adelante, supondremos que los autovalores im_k de u_0 cumplen las desigualdades (B.2).

B.2. Expresión en coordenadas de la forma simpléctica invariante

B.7. La forma simpléctica invariante ω sobre la órbita coadjunta $SU(n)/T$ es una 2-forma diferencial cerrada no degenerada. La condición $d\omega = 0$ abre la posibilidad de que $\omega = -d\alpha$ en un sistema de coordenadas locales sobre la órbita, donde α es una 1-forma invariante. Ahora, una 2-forma invariante es una combinación matricial de las 2-formas invariantes $da_i \wedge da_j$, así que se espera que ω tenga una dependencia cuadrática de la forma de Maurer–Cartan. De hecho, en la órbita $SU(n) \cdot u_0$, ω es dado por la fórmula:

$$\omega_{g \cdot u_0} = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(u_0 [g^{-1} dg, g^{-1} dg]).$$

Este corchete de dos 1-formas (con valores en $\mathfrak{su}(n)$) debe interpretarse, en vista de (B.1), como

$$\omega_{g \cdot u_0} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \operatorname{Tr}(u_0 [X_i, X_j]) da_i \wedge da_j.$$

B.8. Si $u_0, X_i, X_j \in \mathfrak{su}(n)$, estas son matrices antihermíticas de traza cero, así que

$$-\operatorname{Tr}(u_0 X_i X_j) = \operatorname{Tr}(u_0^* X_i^* X_j^*) = \overline{\operatorname{Tr}(X_j X_i u_0)} = \overline{\operatorname{Tr}(u_0 X_j X_i)};$$

por ende,

$$\frac{1}{2} \operatorname{Tr}(u_0 [X_i, X_j]) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(u_0 X_i X_j - u_0 X_j X_i) = \Re \operatorname{Tr}(u_0 X_i X_j),$$

y entonces

$$\omega_{g \cdot u_0} = \Re \operatorname{Tr}(u_0 g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg). \quad (\text{B.3})$$

Además, como $g \in SU(n)$ es unitario, tenemos $g^* g = I$; al derivar, obtenemos $dg^* g + g^* dg = 0$, o bien $dg^* g = -g^* dg = -g^{-1} dg$. Empleando esta observación, podemos reescribir (B.3) en la forma

$$\begin{aligned} \omega_{g \cdot u_0} &= -\Re \operatorname{Tr}(u_0 dg^* g \wedge g^{-1} dg) = -\Re \operatorname{Tr}(u_0 dg^* \wedge dg) \\ &= -i \sum_{k=1}^n m_k d\bar{g}_k \wedge dg_k, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

donde los g_k denotan las columnas de la matriz unitaria g . La “ \Re ” desaparece pues $d\bar{g}_k \wedge dg_k = -dg_k \wedge d\bar{g}_k$, así que el lado derecho de (B.4) es real, habido

cuenta del factor $(-i)$; y la expresión $d\bar{g}_k \wedge dg_k$ significa $\sum_{i=1}^n d\bar{g}_{ik} \wedge dg_{ik}$, vale decir, se emplea el producto escalar de las dos columnas.

(Podemos notar que la expresión (B.4) de ω nos dice que $d\omega = 0$, pues ω es una combinación lineal de expresiones de tipo $df \wedge dh$.)

Obsérvese también que ω puede escribirse en la forma $\omega = -d\alpha$, donde

$$\alpha = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\bar{g}_k \cdot dg_k - g_k \cdot d\bar{g}_k) := \frac{i}{2} \sum_{j,k=1}^n m_k (\bar{g}_{jk} dg_{jk} - g_{jk} d\bar{g}_{jk}), \quad (\text{B.5})$$

porque una aplicación de la derivada exterior d al lado derecho de (B.5) da el negativo de (B.4). Hay que tener en cuenta que las “coordenadas locales” g_{jk}, \bar{g}_{jk} no son parámetros del punto $g \cdot u_0$ de la órbita, sino más bien del espacio $\mathbb{C}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ de todas las matrices complejas, así que *muchas de esas coordenadas son redundantes*. Lo que falta hacer es eliminar sistemáticamente esas redundancias, cambiando el sistema de coordenadas según las exigencias de dicha eliminación, para terminar con una expresión de ω análoga a la de (B.4), pero sin coordenadas supérfluas. Este es un ejemplo del proceso llamado “reducción simpléctica”.

B.3. El algoritmo de reducción simpléctica

B.9. Ahora viene el paso principal: podemos considerar (B.4) como una 2-forma cerrada sobre \mathbb{R}^{2n^2} , cuyas coordenadas son las partes reales e imaginarias de las entradas de la matriz g , y debemos reducirla a una 2-forma cerrada sobre la órbita $SU(n) \cdot u_0$, cuyo punto general es de la forma $u = g \cdot u_0$.

Para eliminar las redundancias en las coordenadas matriciales, notamos primero que la unitariedad de la matriz g se expresa mediante las ecuaciones cuadráticas:

$$\bar{g}_k \cdot g_k = 1, \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad (\text{B.6a})$$

$$\bar{g}_i \cdot g_j = 0, \quad (i \neq j). \quad (\text{B.6b})$$

(Es decir, g es unitaria si y solo si sus columnas forman una base ortonormal de \mathbb{C}^n .) Esto da un total de n^2 ecuaciones entre las coordenadas g_{ij}, \bar{g}_{ij} de g : se obtiene n ecuaciones de (B.6a), y otras $(n^2 - n)$ ecuaciones de (B.6b). La dimensión de la órbita es

$$\dim(SU(n)/T) = \dim SU(n) - \dim T = (n^2 - 1) - (n - 1) = n^2 - n.$$

Luego hacen falta n ecuaciones suplementarias para caer en una subvariedad de \mathbb{R}^{2n^2} de la misma dimensión que esta órbita.

Se trata, pues, de asociar un único elemento $g_u \in SU(n)$ a cada $u \in SU(n)/T$, de forma continua (la parametrización eventual será una función continua $u \mapsto g_u$). Pero la aplicación cociente $\eta: G \rightarrow G/T$ no admite sección

continua alguna. Afortunadamente, ya que buscamos identificar la medida de Liouville sobre $SU(n)/T$, estaríamos dispuestos a sacrificar conjuntos de medida cero. Si omitimos un conjunto “singular” de la órbita, cuyo complemento U es abierto y denso en $SU(n)/T$, entonces sí podemos hallar una sección continua $u \mapsto g_u$ para $u \in U$.

B.10. Afirmamos ahora que si $u \in SU(n)/T$, entonces se puede elegir $g \in U(n)$ tal que $u = gu_0g^{-1}$ y la última fila de la matriz g sea real. Porque si $u = h \cdot u_0$ para algún $h \in SU(n)$, entonces sea $h_{nk} =: e^{-i\psi_k}|h_{nk}|$ la expresión polar de los elementos de última fila de h ; sea $t := \text{diag}[e^{i\psi_1}, e^{i\psi_2}, \dots, e^{i\psi_n}]$ y coloquemos $g := ht$. Como t es diagonal, es $tu_0t^{-1} = u_0$, así que $gu_0g^{-1} = hu_0h^{-1} = h \cdot u_0 = u$. El tercer juego de ecuaciones que delimitan los parámetros de la órbita es entonces:

$$\bar{g}_{nk} - g_{nk} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (\text{B.6c})$$

Denotamos por g^\perp la matriz que se obtiene al reemplazar la última fila de g por ceros. Si $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ denota la base estándar de \mathbb{C}^n (las columnas de la matriz identidad I_n), y si g_k^\perp es la k -ésima columna de g^\perp , entonces $g_k^\perp \cdot e_n = 0$. Volviendo a (B.5), se ve que la condición (B.6c) suprime los términos con $j = n$, así que se puede escribir

$$\alpha = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\bar{g}_k^\perp \cdot dg_k^\perp - g_k^\perp \cdot d\bar{g}_k^\perp). \quad (\text{B.7})$$

B.11. Proposición. *Existen una matriz real $n \times (n-1)$, C (que depende de g) y una base ortonormal $\{e'_1, \dots, e'_{n-1}, e_n\}$ de \mathbb{C}^n (que también depende de g) tales que:*

$$C^T C = I_{n-1}, \quad (\text{B.8a})$$

$$C^T u_0 C =: u'_0 \quad \text{es diagonal}, \quad (\text{B.8b})$$

$$C C^T = I_n - (g^n)^T g^n, \quad (\text{B.8c})$$

$$g_k^\perp = \sum_{p=1}^{n-1} C_{kp} e'_p. \quad (\text{B.8d})$$

Demostración: Notamos que la última fila g^n de g es real, por hipótesis; luego $(g^n)^T g^n$ es una matriz real $n \times n$ de rango 1. Como g es unitario, $(g^n)^T$ es un vector columna de norma 1 en \mathbb{R}^n , y $(g^n)^T g^n$ es el proyector ortogonal sobre el subespacio unidimensional de \mathbb{R}^n generado por este vector; por ende, $I_n - (g^n)^T g^n$ es el proyector ortogonal sobre el complemento ortogonal de éste, que es un subespacio de dimensión $(n-1)$. Así, tanto $C^T C$ como $C C^T$ deben ser proyectores ortogonales de rango $(n-1)$. La matriz C representa entonces una

isometría parcial de \mathbb{R}^{n-1} en \mathbb{R}^n , cuyo rango es el subespacio mencionado de \mathbb{R}^n . Tales isometrías parciales existen: es cuestión de elegir bases ortonormales en el dominio y en el rango, y ponerlos en correspondencia con una matriz C_1 . Si $P \in O(n-1)$ es una matriz ortogonal (cambio de base ortonormal en el dominio \mathbb{R}^{n-1}), entonces C_1P es otra isometría parcial que también cumple (B.8a) y (B.8c).

Si $C_1^T(-iu_0)C_1$ no es diagonal, es de todas formas una matriz real simétrica. Por ende es diagonalizable con una matriz ortogonal: tome $P \in O(n-1)$ tal que $P^T C_1^T(-iu_0)C_1 P$ sea diagonal, con autovalores en orden decreciente, y coloque $C := C_1P$. Entonces $u'_0 := C^T u_0 C$ es una matriz diagonal $(n-1) \times (n-1)$ imaginaria. Tenemos, pues,

$$u_0 = \begin{pmatrix} im'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & im'_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & im'_{n-1} \end{pmatrix}, \quad m'_1 \geq m'_2 \geq \dots \geq m'_{n-1}.$$

Finalmente, colocamos $e'_p := \sum_{j=1}^n C_{jp} g_j^\perp$ para $p = 1, 2, \dots, n-1$. Es evidente que $e'_p \cdot e_n = 0$ para todo p . Además tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{e}'_q \cdot e'_p &= \sum_{i,j=1}^n C_{iq} C_{jp} \bar{g}_i^\perp \cdot g_j^\perp = \sum_{i,j=1}^n C_{iq} C_{jp} (\bar{g}_i - g_{ni} e_n) \cdot (g_j - g_{nj} e_n) \\ &= \sum_{i,j=1}^n C_{iq} C_{jp} (\delta_{ij} - g_{ni} g_{nj}) = \sum_{i,j=1}^n C_{iq} (CC^T)_{ij} C_{jp} \\ &= (C^T CC^T C)_{qp} = (I_{n-1})_{qp} = \delta_{qp}, \end{aligned}$$

así que $\{e'_1, \dots, e'_{n-1}, e_n\}$ es una base ortonormal de \mathbb{C}^n . Ahora calculamos

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{n-1} C_{kp} e'_p &= \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^{n-1} C_{kp} C_{jp} g_j^\perp = \sum_{j=1}^n (CC^T)_{kj} g_j^\perp \\ &= \sum_{j=1}^n (\delta_{kj} - g_{nk} g_{nj}) g_j^\perp = g_k^\perp - g_{nk} \sum_{j=1}^n g_{nj} g_j^\perp = g_k^\perp, \end{aligned}$$

porque la entrada l de la columna $\sum_{j=1}^n g_{nj} g_j^\perp$ es 0 si $l = n$, y si $l < n$ es $\sum_{j=1}^n g_{nj} g_{lj} = g^n \cdot g^l = \bar{g}^n \cdot g^l = 0$, porque las filas g^n y g^l de la matriz unitaria g son ortogonales, y la fila g^n es real. Luego se verifica (B.8d), y la Proposición queda demostrada. \square

B.12. La matriz C es casi única, si los autovalores de u'_0 son distintos. Porque si la matriz ortogonal P' es tal que CP' cumple (B.8) también, entonces P' conmuta

con u'_0 y por la tanto es diagonal, por un argumento que hemos empleado antes. Los únicos matrices ortogonales que son diagonales son los que tienen entradas diagonales ± 1 . De ahí se ve que se puede cambiar el signo de cualquier columna de C libremente, pero aparte de eso C es único, en el caso genérico de que los autovalores de u'_0 resulten distintos.

B.13. Si volvemos ahora a la 1-forma α de (B.7), podemos reescribirla en la forma:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{i}{2} \sum_{k,p,q} m_k \{ C_{kp} C_{kq} (\bar{e}'_p \cdot de'_q - e'_p \cdot d\bar{e}'_q) + (\bar{e}'_p \cdot e'_q) dC_{kp} - (\bar{e}'_p \cdot e'_q) dC_{kq} \} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{n-1} (C^T u_0 C)_{pq} (\bar{e}'_p \cdot de'_q - e'_p \cdot d\bar{e}'_q) \\ &= \frac{i}{2} \sum_{p=1}^{n-1} m'_p (\bar{e}'_p \cdot de'_p - e'_p \cdot d\bar{e}'_p), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

ya que $\delta_{pq} dC_{kp} - \delta_{pq} dC_{kq} = 0$.

La matriz $(n-1) \times (n-1)$ formada por las columnas $\{e'_1, \dots, e'_{n-1}\}$ al remover la última fila (que consta de ceros) es una matriz unitaria en $U(n-1)$, y podríamos volver a aplicar a esta matriz el proceso que hemos hecho con la matriz g , si la fila $(n-1)$ de la nueva matriz fuera real. En general, no lo es; pero podemos multiplicar cada columna por un número complejo de valor absoluto 1 para que el resultado sea una matriz con última fila real. Sea $e'_{n-1,p} =: e^{i\phi'_p} g'_{n-1,p}$ con $g'_{n-1,p}$ real, para $p = 1, \dots, n-1$. Coloque

$$g'_{rp} := e^{-i\phi'_p} e'_{rp}, \quad p, r = 1, 2, \dots, n-1.$$

Entonces $g' \in U(n-1)$ tiene última fila real. Podemos volver a escribir (B.9) como:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{i}{2} \sum_{p=1}^{n-1} m'_p \{ e^{-i\phi'_p} \bar{g}'_p \cdot d(e^{i\phi'_p} g'_p) - e^{i\phi'_p} g'_p \cdot d(e^{-i\phi'_p} \bar{g}'_p) \} \\ &= - \sum_{p=1}^{n-1} m'_p d\phi'_p + \frac{i}{2} \sum_{p=1}^{n-1} m'_p (\bar{g}'_p \cdot dg'_p - g'_p \cdot d\bar{g}'_p). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

La primera suma del lado derecho de (B.10) nos proporciona $2(n-1)$ parámetros $m'_1, \dots, m'_{n-1}, \phi'_1, \dots, \phi'_{n-1}$ para la órbita $SU(n)/T$. Faltan $(n^2 - n) - 2(n-1) = (n-1)^2 - (n-1)$ parámetros. Es evidente de la forma de (B.10) que el proceso de reducción puede repetirse con la matriz $g' \in U(n-1)$, aplicando la Proposición 1 para obtener una matriz C' de tamaño $(n-1) \times (n-2)$ y una

familia ortonormal $\{e''_1, \dots, e''_{n-2}\}$ que cumple las condiciones análogas a (B.8). Entonces los autovalores ordenados $\{im''_1, \dots, im''_{n-2}\}$ de $u''_0 := C'^T u'_0 C'$ y los argumentos $\{\phi''_1, \dots, \phi''_{n-2}\}$ de los $e''_{n-2,r}$ proporcionan nuevos parámetros para α :

$$\alpha = - \sum_{p=1}^{n-1} m'_p d\phi'_p - \sum_{r=1}^{n-2} m''_r d\phi''_r + \frac{i}{2} \sum_{r=1}^{n-2} m''_r (\bar{g}''_r \cdot dg''_r - g''_r \cdot d\bar{g}''_r).$$

Al continuar las repeticiones de este proceso, llegamos finalmente a:

$$\alpha = - \sum_{p=1}^{n-1} m'_p d\phi'_p - \sum_{r=1}^{n-2} m''_r d\phi''_r + \dots - m^{(n-1)} d\phi^{(n-1)},$$

y luego la forma simpléctica $\omega = -d\alpha$ alcanza su forma final:

$$\omega = \sum_{p=1}^{n-1} dm'_p \wedge d\phi'_p + \sum_{r=1}^{n-2} dm''_r \wedge d\phi''_r + \dots + dm^{(n-1)} \wedge d\phi^{(n-1)}. \quad (\text{B.11})$$

Hay que notar, sin embargo, un detalle: los ángulos ψ_k , ϕ'_p , ϕ''_r , etc. son únicos solo si las entradas de las últimas filas g_{nj} , $g'_{n-1,q}$, etc. no son ceros; luego, para evitar estas “singularidades de coordenadas polares”, hay que quitar de la órbita, en cada etapa de la reducción, los puntos que corresponden a últimas filas reales con algunas entradas cero. Lo que queda es el abierto denso U , en el cual los parámetros m , ϕ están bien definidos.

B.14. Hay un total de $(n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{1}{2}n(n-1)$ pares en esta suma (B.11) (igual a $\frac{1}{2} \dim(SU(n)/T$). Luego la medida de Liouville es el producto exterior de $\frac{1}{2}n(n-1)$ copias de la 2-forma ω :

$$\omega^{\wedge(\frac{1}{2}n(n-1))} = dm'_1 \wedge d\phi'_1 \wedge dm'_2 \wedge d\phi'_2 \wedge \dots \wedge dm^{(n-1)} \wedge d\phi^{(n-1)}.$$

B.4. El dominio de la parametrización canónica de la órbita

B.15. Es evidente que los variables angulares ϕ'_p , ϕ''_r , etc. tienen variación en el intervalo $0 \leq \phi_j^{(i)} < 2\pi$. La variación de los parámetros $m_j^{(i)}$ es menos evidente.

Se trata de determinar la ubicación de los autovalores im'_1, \dots, im'_{n-1} de la matriz $C^T u_0 C$. Para mayor comodidad, dividimos por i y trabajamos con la matriz real diagonal $M := -iu_0$. Escribimos $M' := -iu'_0$ también. Necesitamos un resultado conocido de álgebra lineal [22, p. 324].

B.16. Proposición. Sea $M = \text{diag}[m_1, m_2, \dots, m_n]$ una matriz diagonal real con autovalores en orden decreciente: $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n$. Sea C una matriz real $n \times (n-1)$ tal que $C^T C = I_{n-1}$, CC^T es un proyector ortogonal de rango $(n-1)$, y tal que $C^T M C =: M' = \text{diag}[m'_1, m'_2, \dots, m'_{n-1}]$ sea también diagonal, con autovalores en orden decreciente. Entonces valen las desigualdades:

$$m_1 \geq m'_1 \geq m_2 \geq m'_2 \geq m_3 \geq \dots \geq m_{n-1} \geq m'_{n-1} \geq m_n. \quad (\text{B.12})$$

Demostración: Sea V_C el subespacio de \mathbb{R}^n , de dimensión $(n-1)$, generado por las columnas de C . (Es decir, V es la imagen de la aplicación lineal de \mathbb{R}^{n-1} en \mathbb{R}^n que corresponde a C .) Sea $a \in \mathbb{R}^n$ un vector de norma 1 ortogonal a V .

Las condiciones sobre $C^T C$ y CC^T son equivalentes a que las $(n-1)$ columnas de C sean ortonormales en \mathbb{R}^n . Luego los m'_p son valores particulares de la forma cuadrática $x^T M x$, correspondientes a $x = c_p$ (la p -ésima columna de C). Consideramos esta forma cuadrática sobre la esfera unitaria $x^T x = 1$; como función continua, alcanza un máximo en la esfera, lo cual es $\sup\{x^T M x : x^T x = 1\} = m_1$, su mayor autovalor. Para ver esto, escribe $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$ con $\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 = 1$; entonces $x^T M x = \sum_{k=1}^n m_k \lambda_k^2 \leq \sum_{k=1}^n m_1 \lambda_k^2 \leq m_1$, con igualdad si $x = e_1$. En particular, $m'_1 = c_1^T M c_1 \leq m_1$.

El mismo razonamiento muestra que

$$m'_1 = \sup\{x^T M x : x^T x = 1, x \in V_C\},$$

porque podemos escribir $x \in V$ con $x^T x = 1$ en la forma $x = \sum_{p=1}^{n-1} \mu_p c_p$ con $\sum_{p=1}^{n-1} \mu_p^2 = 1$, y entonces $x^T M x = \sum_{p=1}^{n-1} m'_p \mu_p^2 \leq m'_1$.

Si W es el subespacio 2-dimensional de \mathbb{R}^n generado por las columnas e_1 y e_2 de I , tenemos $V_C \cap W \neq \{0\}$; sea y un vector de norma 1 en $V_C \cap W$. Entonces, como $y \in W$, es $y = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ con $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$, y $y^T M y = m_1 \lambda_1^2 + m_2 \lambda_2^2 \geq m_2$. Pero como $y \in V_C$, es $y = \sum_p \mu_p c_p$ con $\sum_p \mu_p^2 = 1$, y $y^T M y = \sum_p m'_p \mu_p^2 \leq m'_1$. Se concluye que $m'_1 \geq m_2$.

Si reemplazamos el subespacio V_C por un subespacio arbitrario V de dimensión $(n-1)$, vemos que $m_2 \leq \sup\{x^T M x : x^T x = 1, x \in V\}$ siempre; y en el caso de que V sea generado por $\{e_2, e_3, \dots, e_n\}$, esta desigualdad se convierte en igualdad. Hemos mostrado, entonces, la siguiente *propiedad extrema* del segundo mayor autovalor de M :

$$m_2 = \inf\{\sup\{x^T M x : x^T x = 1, x \in V\} : \dim V = n-1\}.$$

(Esta caracterización “minimax” de m_2 es el “teorema de Courant y Fischer”, que en el fondo es un caso particular del teorema espectral).

Hemos mostrado que $m_1 \geq m'_1 \geq m_2$. De igual manera obtenemos que

$$m'_2 = \inf\{\sup\{x^T M x : x^T x = 1, x \in V\} : V \subset V_C, \dim V = n-2\},$$

$$m_3 = \inf\{\sup\{x^T M x : x^T x = 1, x \in V\} : \dim V = n-2\}.$$

y concluimos que $m_2 \geq m'_2 \geq m_3$; por repetición del argumento, llegamos finalmente a (B.12). \square

B.17. Ahora abordamos el problema inverso: ¿cuáles valores permisibles de m'_1, \dots, m'_{n-1} realmente ocurren? Es decir, dada la matriz M , y dada una matriz diagonal M' , de tamaño $(n-1) \times (n-1)$, cuyos autovalores cumplen las desigualdades (B.12), ¿se podrá hallar una isometría parcial C tal que $C^T M C = M'$? La respuesta es positiva, si los autovalores de M son distintos, lo cual podemos asumir sin dificultad. Además, hay un método constructivo [41, p. 280] de hallar el vector a ortogonal a las columnas de C ; y luego, por Gram–Schmidt y diagonalización con una $P \in O(n-1)$, reconstruir la matriz C deseada.

B.18. Proposición. *Sea $M = \text{diag}[m_1, m_2, \dots, m_n]$ una matriz diagonal real $n \times n$ con autovalores en orden decreciente. Sea M' una matriz diagonal real $(n-1) \times (n-1)$ cuyos autovalores cumplen las desigualdades (B.12). Entonces hay una matriz $n \times (n-1)$, C , tal que $C^T C = I_{n-1}$ y $C C^T$ es un proyector ortogonal de rango $n-1$, y tal que $C^T M C = M'$.*

Demostración: La proposición es equivalente a demostrar la afirmación siguiente: hay un subespacio V_C de \mathbb{R}^n , de dimensión $(n-1)$, en la cual la forma cuadrática $x^T M x$ posee los autovalores dados. Como cualquier subespacio de dimensión $(n-1)$ es de la forma $\{y \in \mathbb{R}^n : y \cdot a = 0\}$, y entonces las columnas de C completan una base ortonormal de \mathbb{R}^n cuyo primer vector es a (lo cual siempre es posible por Gram–Schmidt), el problema se reduce a hallar el vector unitario a , en función de los m_1, m_2, \dots, m_n .

Vemos primero el proceso inverso: calcular los m_1, m_2, \dots, m_n en función de las entradas del vector unitario a . Podemos suponer que $a_n \neq 0$; luego, la ecuación $y \cdot a = 0$ de V_C se traduce en $y_n = -(1/a_n) \sum_{k=1}^{n-1} a_k y_k$. Por lo tanto

$$y^T M y = \sum_{k=1}^{n-1} m_k y_k^2 + \frac{m_n}{a_n^2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k y_k \right)^2. \quad (\text{B.13})$$

La ecuación de la esfera unitaria en V_C se expresa en las variables y_1, \dots, y_{n-1} así:

$$\sum_{k=1}^{n-1} y_k^2 + \frac{1}{a_n^2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k y_k \right)^2 = 1. \quad (\text{B.14})$$

Si analizamos la función cuadrática $x^T M x$ sobre la esfera unitaria en \mathbb{R}^n , sus valores estacionarios son los autovalores de M . Esto se ve con el empleo de multiplicadores de Lagrange: la esfera tiene ecuación $x^T x = 1$, y las derivadas parciales de la función $L(x) = x^T M x - \lambda x^T x$ dan el sistema de ecuaciones $2Mx - 2\lambda x = 0$, y los valores admisibles del multiplicador λ son las soluciones de la ecuación $\det(M - \lambda I) = 0$, es decir, $\lambda = m_k$ para algún k .

Si restringimos esta función cuadrática a la intersección de la esfera unitaria con el hiperplano V_C , hay dos métodos de hallar los valores estacionarios. Primero, si usamos la base ortonormal $\{c_1, \dots, c_{n-1}\}$, el párrafo anterior nos dice que los valores buscados son los autovalores m'_1, \dots, m'_{n-1} de la restricción de la función a V_C . Por otro lado, podemos usar las coordenadas y_1, \dots, y_{n-1} y hallar los valores de λ que anulan las derivadas parciales de la función $L(y) = (B.13) - \lambda(B.14)$. De nuevo obtenemos un sistema de ecuaciones para y_1, \dots, y_{n-1} , cuyo determinante resulta ser

$$D(\lambda) = \frac{G(\lambda)}{a_n^2} \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{m_k - \lambda}, \quad \text{donde } G(\lambda) := \prod_{k=1}^n (m_k - \lambda). \quad (B.15)$$

Entonces las soluciones de la ecuación $D(\lambda) = 0$ son $\lambda = m'_1, \dots, m'_{n-1}$, y esto implica que $D(\lambda)$ es proporcional a $D_1(\lambda) := \prod_{p=1}^{n-1} (m'_p - \lambda)$. El cálculo de los m'_p en términos de los a_k se reduce al cálculo de los raíces del polinomio (B.15).

Por otro lado, si los m_k y los m'_p son dados, la búsqueda de los a_k ya es pan comido; porque los cocientes a_k^2/a_n^2 (que son suficientes, ya que a es un vector unitario) son proporcionales a los coeficientes b_k del desarrollo de $D_1(\lambda)/G(\lambda)$ en fracciones parciales:

$$\frac{D_1(\lambda)}{G(\lambda)} = \frac{b_1}{m_1 - \lambda} + \frac{b_2}{m_2 - \lambda} + \dots + \frac{b_n}{m_n - \lambda}.$$

Ahora los b_k son dados por la conocida fórmula:

$$b_k = \lim_{\lambda \rightarrow m_k} \frac{(m_k - \lambda)D_1(\lambda)}{G(\lambda)} = \frac{D_1(m_k)}{G'(m_k)}, \quad (B.16)$$

y luego se toma $a_k^2 = d b_k$, donde d es determinado por la condición $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$. □

B.19. Obsérvese que el cálculo de los b_k fracasa si hay un autovalor repetido m_j , ya que entonces $G'(m_j) = 0$ y el denominador de (B.16) se anula. (Sin embargo, las fórmulas generales obtenidas para el caso de autovalores distintas pueden extenderse por continuidad al caso general.) También, obsérvese que al final se obtuvo una determinación de los cuadrados de los a_k , así que los signos de los a_k pueden ser elegidos a gusto (lo cual corresponde a cambiar los signos de las columnas individuales de la matriz C).

B.5. Reconstrucción de la parametrización canónica

B.20. Ahora que conocemos un juego de coordenadas para un punto genérico de la órbita $SU(n)/T = SU(n) \cdot u_0$, subsiste el problema inverso: dados los

parámetros que representan un punto $u \in SU(n)/T$, hallar un elemento $g_u \in G$ tal que $u = g_u \cdot u_0$, en función de esos mismos parámetros. Lo que hay que hacer es *correr el algoritmo de reducción al revés!* Resulta que está muy bien adaptado a este camino regresivo.

Comenzamos con el caso sencillo de $SU(2)$. Es $u_0 = \begin{pmatrix} im & 0 \\ 0 & -im \end{pmatrix}$ con $m > 0$. Entonces un punto genérico u de la órbita es dado por un par de parámetros (m', ϕ) con $0 \leq \phi < 2\pi$ y $-m < m' < m$. El vector unitario e'_1 es ortogonal a $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\arg(e'_{11}) = \phi$, así que $e'_1 = \begin{pmatrix} e^{i\phi} \\ 0 \end{pmatrix}$, por ser este el único vector unitario que cumple los requisitos. De la (B.8d) podemos reconstruir g^\perp si disponemos de la matriz C .

En este caso, $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ es una matriz 2×1 que debe cumplir (B.8a) y (B.8b). Esto nos da:

$$\begin{aligned} C_1^2 + C_2^2 &= 1, \\ mC_1^2 - mC_2^2 &= m', \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

cuya solución es $C_1 = \pm\sqrt{(m+m')/2m}$, $C_2 = \pm\sqrt{(m-m')/2m}$. Elegimos el signo positivo en ambos casos. Podemos eliminar las raíces cuadradas si introducimos $\theta := \arccos(m'/m)$, porque entonces se ve de (B.17) que la solución tiene la forma $C_1 = \cos \frac{1}{2}\theta$, $C_2 = \sin \frac{1}{2}\theta$.

Ahora de (B.8d) obtenemos

$$g_1^\perp = c_1 e'_1 = \begin{pmatrix} e^{i\phi} \cos \frac{1}{2}\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2^\perp = c_2 e'_1 = \begin{pmatrix} e^{i\phi} \sin \frac{1}{2}\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La segunda fila de g debe ser real y ortogonal a la primera, así que:

$$g = \begin{pmatrix} e^{i\phi} \cos \frac{1}{2}\theta & e^{i\phi} \sin \frac{1}{2}\theta \\ -\sin \frac{1}{2}\theta & \cos \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es unitaria pero no está necesariamente en $SU(2)$, ya que su determinante es $e^{i\phi}$. Recordamos que $g = ht$ donde $h \in SU(n)$ y t es unitaria y diagonal, con $\det t = \det g$. Podemos tomar, por ejemplo, $t = \text{diag}[e^{\frac{1}{2}i\phi}, e^{\frac{1}{2}i\phi}]$. Llegamos a $g_u := h = gt^{-1} \in SU(2)$:

$$g_u = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\phi} \cos \frac{1}{2}\theta & e^{\frac{1}{2}i\phi} \sin \frac{1}{2}\theta \\ -e^{-\frac{1}{2}i\phi} \sin \frac{1}{2}\theta & e^{-\frac{1}{2}i\phi} \cos \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix}.$$

Finalmente, para obtener la matriz más general \hat{g} tal que $\hat{g} \cdot u_0 = g_u \cdot u_0$, tenemos $\hat{g} = g_u t'$, donde t' es cualquier elemento de $G \cdot u_0 = T$. Para $SU(2)$, tal t' es de la forma $\text{diag}[e^{\frac{1}{2}i\psi}, e^{-\frac{1}{2}i\psi}]$ para algún ángulo ψ con $-2\pi < \psi \leq 2\pi$. De ahí obtenemos

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i(\phi+\psi)} \cos \frac{1}{2}\theta & e^{\frac{1}{2}i(\phi-\psi)} \sin \frac{1}{2}\theta \\ -e^{\frac{1}{2}i(\psi-\phi)} \sin \frac{1}{2}\theta & e^{-\frac{1}{2}i(\phi+\psi)} \cos \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix}.$$

Se ve que el convenio $m' =: m \cos \theta$ identifica ψ, θ, ϕ con los ángulos de Euler de $SU(2)$.

B.21. En consecuencia, la medida de Liouville es proporcional a

$$\omega = dm' \wedge d\phi = -m \operatorname{sen} \theta d\theta \wedge d\phi.$$

Los puntos singulares del sistema de coordenadas esféricas (θ, ϕ) son los polos norte y sur en donde $\theta = 0$ ó π , o lo que es lo mismo, $m' = \pm m$. El abierto denso $U \subset \mathbb{S}^2$ es el conjunto cilíndrico obtenido al quitar estos dos puntos de la esfera.

B.22. Consideramos ahora el caso de $SU(3)$. Tenemos $u_0 = \operatorname{diag}[im_1, im_2, im_3]$ con $m_1 + m_2 + m_3 = 0$. Los parámetros de la órbita son $(m'_1, m'_2, m''; \phi'_1, \phi'_2, \phi'')$, donde $m_1 \geq m'_1 \geq m_2 \geq m'_2 \geq m_3$ y además $m'_1 \geq m'' \geq m'_2$. De nuevo obtenemos (empezando en el último nivel) $e'_1 = e^{i\phi''} e_1$. La matriz 2×1 C' cumple

$$\begin{aligned} C_1'^2 + C_2'^2 &= 1, \\ m'_1 C_1'^2 + m'_2 C_2'^2 &= m'', \end{aligned}$$

Luego $C_1'^2 = (m'' - m'_2)/(m'_1 - m'_2)$, $C_2'^2 = (m'_1 - m'')/(m'_1 - m'_2)$. De nuevo, podemos simplificar esto un poco al colocar $\theta'' := \arccos(2m'' - m'_1 - m'_2)/(m'_1 - m'_2)$, en cuyo caso $0 \leq \theta'' \leq \pi$, y podemos tomar $C_1' = \cos \frac{1}{2}\theta''$, $C_2' = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta''$. El análisis hecho para $SU(2)$ nos permite concluir que

$$g' = \begin{pmatrix} e^{i\phi''} \cos \frac{1}{2}\theta'' & e^{i\phi''} \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta'' \\ -\operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta'' & \cos \frac{1}{2}\theta'' \end{pmatrix}.$$

Luego

$$e'_1 = \begin{pmatrix} e^{i(\phi'_1 + \phi'')} \cos \frac{1}{2}\theta'' \\ -e^{i\phi'_1} \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta'' \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} e^{i(\phi'_2 + \phi'')} \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta'' \\ e^{i\phi'_2} \cos \frac{1}{2}\theta'' \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.18})$$

Ahora se busca una matriz 3×2 , C , que cumple las ecuaciones $C^T C = I_2$, $C^T u_0 C = \operatorname{diag}[im'_1, im'_2]$. Se obtienen expresiones explícitas para los C_{kp} en función de los m'_p y los m_k ; con eso, la receta (B.8d) y los vectores (B.18) nos permiten hallar la matriz g^\perp . Los cálculos finales son tediosos, y nos permitiremos dejar estos últimos detalles al sufrido lector.

Referencias

- [1] R. Abraham y J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2^a edición, Addison–Wesley, Reading, MA, 1980.
- [2] A. Alekseev, L. D. Faddeev y S. Shatashvili, “Quantization of symplectic orbits of compact Lie groups by means of the functional integral”, *J. Geom. Phys.* **5** (1989), 391–406.
- [3] J. F. Avila H., *Grupos de Lie y Orbitas Coadjuntas Cuantizables*, tesis de licenciatura, Universidad de Costa Rica, 1990.
- [4] V. Bargmann, “On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. I”, *Commun. Pure Appl. Math.* **14** (1961), 187–214.
- [5] A. O. Barut y R. Raczka, *Theory of Group Representations and Applications*, PWN, Warszawa, 1977.
- [6] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz y D. Sternheimer, “Deformation theory and quantization. I”, *Ann. Phys. (NY)* **111** (1978), 61–110.
- [7] F. A. Berezin, “General concept of quantization”, *Commun. Math. Phys.* **40** (1975), 153–174.
- [8] K. H. Bhāskara, “Affine Poisson Structures”, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* **100** (1990), 189–202.
- [9] K. H. Bhāskara y K. Rama, “Quadratic Poisson Structures”, *J. Math. Phys.* **32** (1991), 2319–2322.
- [10] L. C. Biedenharn y J. D. Louck, *Angular Momentum in Quantum Physics: Theory and Applications*, Addison–Wesley, Reading, MA, 1981.
- [11] L. J. Boya, J. F. Cariñena y J. M. Gracia-Bondía, “Symplectic structure of the Aharonov–Anandan geometric phase”, *Phys. Lett. A* **161** (1991), 30–34.
- [12] T. Broecker y T. tom Dieck, *Representations of Compact Lie Groups*, Springer, Berlin, 1985.
- [13] J. F. Cariñena, “Canonical Group Actions”, preprint IC/37/88, ICTP, Trieste, 1988.
- [14] J. F. Cariñena, J. M. Gracia-Bondía y J. C. Várilly, “Relativistic Quantum Mechanics in the Moyal Representation”, *J. Phys. A (Math. Gen.)* **23** (1990), 901–933.
- [15] M. Crampin y F. A. E. Pirani, *Applicable Differential Geometry*, London Math. Soc. Lecture Notes **59**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
- [16] E. Chacón y M. Moshinsky, “Representations of finite $U(3)$ transformations”, *Phys. Lett.* **23** (1966), 567–569.
- [17] C. Chevalley y S. Eilenberg, “Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **63** (1948), 85–124.

- [18] P. A. M. Dirac, *Principles of Quantum Mechanics*, 4ª edición, Clarendon Press, Oxford, 1958.
- [19] V. A. Ditkin y A. P. Prudnikov, *Integral Transforms and Operational Calculus*, Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [20] G. G. Emch, *Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*, Wiley, New York, 1972.
- [21] H. Figueroa, J. M. Gracia-Bondía y J. C. Várilly, “Moyal quantization with compact symmetry groups and noncommutative harmonic analysis”, *J. Math. Phys.* **31** (1990), 2664–2671.
- [22] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, tomo 1, Chelsea, New York, 1959.
- [23] J. M. Gracia-Bondía y J. C. Várilly, “Algebras of distributions suitable for phase-space quantum mechanics. I”, *J. Math. Phys.* **29** (1988), 869–879.
- [24] A. Grossmann, “Parity operators and quantization of δ -functions”, *Commun. Math. Phys.* **48** (1976), 191–193.
- [25] V. Guillemin y S. Sternberg, *Symplectic Techniques in Physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.
- [26] R. Hamilton, “The inverse function theorem of Nash and Moser”, *Bull. Amer. Math. Soc.* **7** (1982), 65–222.
- [27] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, Berlin, 1970.
- [28] B. Kostant, “Quantization and unitary representations”, en *Lectures in Modern Analysis and Applications III*, Lecture Notes in Math. **170**, Springer, Berlin, 1970.
- [29] M. N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Dover, New York, 1972.
- [30] M. S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, tomo II, Teubner, Leipzig, 1890.
- [31] G. Marmo, E. J. Saletan, A. Simoni y B. Vitale, *Dynamical Systems: A Differential Geometric Approach to Symmetry and Reduction*, Wiley, Chichester, 1985.
- [32] J. E. Marsden, *Lectures on Geometric Methods in Mathematical Physics*, CBMS–NSF Regional Conference Lectures **37**, SIAM, Philadelphia, PA, 1981.
- [33] J. E. Moyal, “Quantum Mechanics as a Statistical Theory”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **45** (1949), 99–124.

- [34] N. Mukunda y B. Radhakrishnan, “Clebsch–Gordan problem and coefficients for the three-dimensional Lorentz group in a continuous basis. II”, *J. Math. Phys.* **15** (1974), 1332–1342.
- [35] R. Palais, *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*, AMS Memoirs **22**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1957.
- [36] A. M. Perelomov, *Generalized Coherent States and Applications*, Springer, Berlin, 1986.
- [37] A. Pressley and G. Segal, *Loop Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [38] M. Reed y B. Simon, *Methods of Mathematical Physics: I. Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1972.
- [39] A. Royer, “Wigner function as the expectation value of a parity operator”, *Phys. Rev. A* **15** (1977), 449–450.
- [40] J.-P. Serre, “Représentations linéaires et espaces homogènes kählériens des groupes de Lie compacts”, Séminaire Bourbaki, Exposé **100**, 1954.
- [41] G. E. Shilov, *Linear Algebra*, Dover, New York, 1977.
- [42] R. L. Stratonovich, “On distributions in representation space”, *Sov. Phys. JETP* **4** (1957), 891–898.
- [43] M. E. Taylor, *Noncommutative Harmonic Analysis*, Mathematical Surveys and Monographs **22**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [44] A. Unterberger y J. Unterberger, “La série discrète de $SL(2, \mathbb{R})$ et les opérateurs pseudodifférentiels sur une demi-droite”, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **17** (1984), 83–116.
- [45] V. S. Varadarayan, *Lie Groups, Lie Algebras, and their Representations*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.
- [46] J. C. Várilly y J. M. Gracia-Bondía, “The Moyal representation for spin”, *Ann. Phys. (NY)* **190** (1989), 107–148.
- [47] J. C. Várilly, J. M. Gracia-Bondía y W. Schempp, “The Moyal representation of quantum mechanics and special function theory”, *Acta Appl. Math.* **11** (1990), 225–250.
- [48] N. Ya. Vilenkin, *Fonctions Spéciales et Théorie de la Représentation des Groupes*, Dunod, Paris, 1969.
- [49] A. Weinstein, *Lectures on Symplectic Manifolds*, CBMS Regional Conference Series **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977.
- [50] A. Weinstein, “Poisson structures and Lie algebras”, en *Henri Poincaré et les mathématiques d’aujourd’hui*, *Astérisque*, hors série (1985), 421–432.
- [51] N. Wildberger, “On the Fourier transform of a compact semisimple Lie group”, preprint, Yale University, 1986.

Índice de Notación

- Ad, 33.
 ad, 15, 34.
 $B^n(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$, 47.
 Coad, 34.
 \mathbb{D} , 22, 93.
 $d(\pi)$, 24.
 \mathcal{D}_{rs}^j , 67, 75, 76.
 $E(2)$, 36.
 $\mathfrak{e}(2)$, 14.
 $E(3)$, 28, 37.
 $E(g; j, u)$, 75.
 $E(n)$, 8.
 \mathcal{F} , 55.
 $f \times g$, 62.
 $\{f, g\}$, 37.
 $\{f, h\}_M$, 63.
 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$, 21, 23.
 \tilde{G} , 50.
 \mathfrak{g} , 10, 33.
 \mathfrak{g}^* , 34, 39.
 $G^{\mathbb{C}}$, 15.
 $GL(n, \mathbb{R})$, 5.
 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, 12.
 $G \cdot u$, 33.
 G_u , 33.
 \mathfrak{g}_u , 40, 87.
 g_u , 71, 89, 100, 108.
 $\mathbb{H}(n)$, 7, 26, 48.
 $\tilde{\mathbb{H}}(n)$, 8, 56.
 $\mathfrak{h}(n)$, 13.
 $H^1(M)$, 43.
 \mathfrak{h}_c , 49.
 $H \times K$, 8, 28.
 $H^n(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$, 47.
 $i(X)\alpha$, 31.
 $|jm\rangle$, 78.
 \mathbf{K} , 82.
 \mathcal{K}_j , 82, 85.
 $L(u, v, w)$, 62, 65.
 LG , 16.
 $O(n)$, 6.
 $\text{Op}(f)$, 56, 57.
 Ω_j , 66.
 $\Omega^k(M)$, 31.
 $\Omega(q, p)$, 57.
 π_j , 26, 66.
 P_A , 80, 94.
 P_l , 22, 68.
 Q_A , 80, 89, 94.
 $s(u, v)$, 6, 63.
 $SL(2, \mathbb{R})$, 5, 36, 93.
 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, 14.
 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, 12, 13.
 $SO(n)$, 6.
 $\mathfrak{so}(n)$, 13.
 $Sp(n, \mathbb{R})$, 6, 33.
 $SU(1, 1)$, 27, 93.
 $SU(2)$, 26, 34, 66.
 $\mathfrak{su}(2)$, 14.
 $SU(3)$, 92, 109.
 $SU(n)$, 7, 98.
 $\mathfrak{su}(n)$, 98.
 \mathbb{T} , 5.
 TM , 9.
 Tr , 20.
 $U(n)$, 7.
 $W(x, y)$, 56.
 W_A , 60, 82.
 \tilde{X} , 44.
 $\mathfrak{X}(M)$, 31.
 $\mathfrak{X}_H(M, \omega)$, 44.
 $\mathfrak{X}_{LH}(M, \omega)$, 44.
 $[X, Y]$, 9, 10.
 Y_{lm} , 67.
 \tilde{Y}_{lm} , 70.
 $Z^n(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$, 47.
 Z_{rs}^j , 67, 72.
 $\sum_{\text{cíclica}}$, 9.

Índice Alfabético

- Abraham, R., 43.
Acción, 33.
— adjunta, 33, 98.
— — infinitesimal, 34.
— coadjunta, 34, 46, 51, 98.
— hamiltoniana, 44.
— poissoniana, 46, 50, 51.
— simpléctica, 33.
— transitiva, 33.
Adjunto, 19.
Álgebra de Lie, 9, 37.
— — de un grupo, 10.
— — semisimple, 15.
Álgebra universal, 36.
Ángulos de Euler, 29, 67, 71, 92, 109.
Aplicación comomento, 45.
— exponencial, 11, 16.
— momento, 45, 46, 88.
Armónicos esféricos, 22, 68, 91.
— hiperbólicos, 94.
Arnol'd, V. I., 30.
Base ortonormal, 18, 21, 78, 93, 100.
Base simpléctica, 30.
Berezin, F. A., 80.
 C^* -álgebra, 19.
Cámara de Weyl, 87.
Campo vectorial, 9, 31.
— — fundamental, 44.
— — hamiltoniano, 32, 37, 43, 53.
— — invariante, 10.
— — localmente hamiltoniano, 43.
Carácter, 28, 87.
Clase de traza, 20.
Coálgebra, 34.
Coborde, 47.
Cociclo, 47.
Coeficiente de Clebsch–Gordan, 67, 69, 85, 91, 95.
Cohomología de Chevalley y Eilenberg, 47.
— de de Rham, 43.
Complemento ortogonal, 18.
Complexificación, 15.
Constante de Planck, 1, 54.
Constantes de estructura, 13.
Contracción, 31.
Coordenadas canónicas, 30, 39, 52.
— locales, 10, 39, 100.
Corchete, 9, 49.
— de Moyal, 63.
— de Poisson, 1, 39, 53.
Correspondencia equivariante, 55.
Covariancia, 68.
Cuantización con simetría, 55.
— de Moyal, 3, 62, 65, 83.
— de Weyl, 2, 56, 96.
— geométrica, 2.
Cuantizador de Stratonovich–Weyl, 65, 66, 73, 91, 95.
Curva integral, 11, 53.
Deformaciones de estructuras de Poisson, 63.
Delta de Dirac, 24, 58, 77.
Derivación, 10, 34, 37.
Derivada de Lie, 43.
Desigualdad de Schwarz, 19, 23.
Dieudonné, J., 5.
Dirac, P. A. M., 54.
Disco de Poincaré, 3, 22, 93.
Distancia hiperbólica, 94.
Distribución, 24, 58, 77.
Ecuación de Heisenberg, 54.
— de Liouville, 53.
— de Hamilton, 53.
Elemento Casimir, 36.
Emch, G. G., 86.

- Espacio de Bargmann, 21.
 — de fases, 2, 53.
 — de Hilbert, 18, 54, 87, 93.
 — de Schwartz, 56.
 — vectorial dual, 30.
- Estado, 62, 77.
 — coherente, 3, 78, 89, 93.
 — vectorial, 78.
- Estructura de Lie–Poisson, 40, 52.
 — de Poisson, 37.
- Exponencial matricial, 11.
- Extensión central, 48, 86.
 — por dualidad, 64.
- Fibrado cotangente, 37.
 — tangente, 9.
 — vectorial, 27.
- Flujo de un campo vectorial, 11, 43.
- Forma bilineal alternante, 6, 30.
 — — no degenerada, 6, 30.
 — — simétrica, 6.
- Forma diferencial, 31.
 — hermítica, 7.
 — de Killing, 15, 86, 98.
 — de Kirillov–Kostant–Souriau, 41.
 — lineal positiva, 77.
 — de Maurer–Cartan, 97.
 — simpléctica, 30, 31, 41, 104.
 — — invariante, 99.
- Fórmula de adición, 94.
 — de Campbell–Baker–Hausdorff, 12, 34.
 — de inversión de Mehler–Fock, 95.
- Fracciones parciales, 107.
- Función asociada de Legendre, 22, 68.
 — de Casimir, 36.
 — gaussiana, 56.
 — hamiltoniana, 53.
 — — distinguida, 55.
 — de Hermite, 21, 59.
 — de Legendre, 94.
- Grupo afín, 35.
 — de cohomología, 47.
 — cuántico, 1.
 — chico, 28.
 — euclidiano, 8, 28, 36, 37.
 — galileano, 8.
 — de Heisenberg, 7, 57.
 — de Heisenberg–Weyl, 7.
 — de isotropía, 98.
 — de lazos, 16.
 — de Lie, 5, 33.
 — — compacto, 86.
 — — complejo, 5.
 — — lineal, 8.
 — de Lorentz, 9.
 — nilpotente, 7.
 — de Poincaré, 9, 37.
 — recubridor, 35, 50.
 — de simetría, 1.
 — simpléctico, 6.
 — soluble, 7.
 — unitario, 7.
- Hamiltoniano, 54.
- Hille, E., 97.
- Homomorfismo de álgebras de Lie, 45, 48, 55.
- Horacio, 77.
- Identidad de Cartan, 43.
 — de Clebsch y Gordan, 69.
 — de Jacobi, 9, 14, 38.
- Igualdad de Parseval, 18.
- Isometría parcial, 102.
- Kirillov, A. A. 3.
- Lang, S., 93.
- Laplaciano, 94.
- Lema de Schur, 25, 79.
- Ley de grupo, 7.
- MacLane, S., 18.
- Marsden, J. E., 2.

- Matriz diagonal, 98.
- Medida de Liouville, 3, 65, 66, 80, 92, 93, 97, 109.
— gaussiana, 21.
- Método de Shatashvili, 92, 97.
- Moyal, J., 62.
- Norma de un operador, 18.
- Núcleo de Fourier, 75.
— reproductor, 23, 58, 65, 66, 68, 85, 93, 94.
- Observable, 53, 62, 77.
- Operador de Grossmann y Royer, 57, 96.
— de Hilbert–Schmidt, 20.
— de paridad, 59.
— de rango uno, 20.
— entrelazante, 24.
— positivo, 19, 82.
— trazable, 20, 78.
— unitario, 18, 19.
- Orbita, 33.
— coadjunta, 2, 35, 64, 86, 93.
— — entera, 87.
- Ortogonal simpléctico, 30.
- Paradigma de Kirillov, 3.
- Parametrización ángulo-eje, 74.
- Perelomov, A. M., 93.
- Peso máximo, 88.
- Poincaré, H., 43.
- Polinomio de Jacobi, 67.
— de Legendre, 22, 68.
- Principio de correspondencia, 1, 54.
- Producto semidirecto, 8.
— tensorial de representaciones, 68.
— torcido, 62, 65.
- Propiedad tracial, 61, 62, 72, 80, 96.
- Proyector de rango uno, 78.
— espectral, 25, 94.
— ortogonal, 18, 19, 20, 101.
- Raíz cuadrada positiva, 20.
- Reducción simpléctica, 92, 100.
- Regla de cuantización, 54.
— de Leibniz, 9.
- Representación de Schrödinger, 55.
— inducida, 28.
— regular, 80.
— unitaria irreducible, 3, 24, 25, 64, 66, 88, 93.
- Representaciones unitariamente equivalentes, 24.
- Russell, B., 30.
- Sección boreliana, 27, 89, 92, 101.
— lineal, 48.
- Semisimple, 86.
- Serie de Fourier, 22.
— discreta holomorfa, 27, 93.
— principal, 95.
- Shaw, G. B., 3.
- Símbolo contravariante, 80, 90.
— covariante, 80, 89.
— de Berezin, 94.
— de Stratonovich–Weyl, 82.
— de Weyl, 60.
- Simetría geodésica, 96.
- Simplectomorfismo, 32, 43, 46.
- Sistema clásico elemental, 1.
— cuántico elemental, 1.
— dinámico clásico, 53.
- Spin clásico, 37.
- Stratonovich, 2.
- Subespacio invariante, 24.
— isotrópico, 30.
— lagrangiano, 30.
- Subgrupo de isotropía, 33.
— derivado, 7.
— parabólico, 88.
— uniparamétrico, 11, 36.
- Subrepresentación, 25.
- Suma cíclica, 9.
- Sumatoria de Abel, 59.

- Teorema de Borel–Weil, 88.
— de Courant y Fischer, 105.
— de Darboux, 32, 39.
— de Kostant, 87.
— de Mackey, 28.
— de Palais, 50.
— de Plancherel–Parseval, 22, 57.
— de Riesz, 19, 23, 82, 87, 90.
— del peso máximo, 88.
- Toro máximo, 78, 87, 88, 97.
- Transformación de Cayley, 93.
— de Fourier, 21, 55.
— de Mehler–Fock, 96.
— de Möbius, 27.
- Traslaciones a la izquierda, 10.
- Traza, 20, 58.
— generalizada, 59.
- Trinúcleo, 62.
- Unterberger, A. y J., 96.
- Valor esperado, 2, 62.
- Variedad compleja, 5.
— de bandera, 88.
— diferencial, 5.
— — infinitodimensional, 16.
— simpléctica, 31, 53.
- Weinstein, A., 36.
- Weyl, H., 53, 56.
- Wigner, E. P., 1, 66.
- Wildberger, N., 89.