MA–455: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Joseph C. Várilly

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

I Ciclo Lectivo del 2016

Introducción

Las *ecuaciones diferenciales* juegan un papel central en las matemáticas y sus aplicaciones. Desde que Isaac Newton propuso, en 1687, que "el cambio en la cantidad de movimiento [de un cuerpo] es proporcional a la fuerza aplicada" (su llamada segunda ley de movimiento), ha sido indispensable determinar ciertas cantidades variables a partir de sus derivadas. Las ecuaciones diferenciales se clasifican en *ordinarias*: para cantidades que dependen de una sola variable independiente; y *parciales*: las que involucran derivadas parciales con respecto a dos o más variables. Este curso introduce la teoría – y también la resolución práctica – de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Las ecuaciones diferenciales se clasifican por su *orden* (el número de derivaciones de la variable dependiente). De mayor importancia son las ecuaciones de primer y segundo órdenes. Muchas ecuaciones obtenidas de problemas de la mecánica clásica son de segundo orden. Resolver una ecuación diferencial implica hallar ciertas antiderivadas (o integrales indefinidas): en la solución general aparecen una o más constantes de integración, que serán determinadas por condiciones suplementarias: por ejemplo, los valores iniciales del variable dependiente y de algunas de sus derivadas.

Una ecuación diferencial de orden n para una función $x(t)$ tiene la forma general $F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$. Esta ecuación se llama *lineal* si F es de primer grado en todas las derivadas $x^{(k)}(t)$. La resolución de dichas ecuaciones diferenciales lineales se logra con la ayuda del álgebra lineal. Las ecuaciones *no lineales* tienen una teoría menos completa: se pone el énfasis en la existencia y unicidad de sus soluciones y el comportamiento cualitativo de sus curvas integrales.

Cuando no es posible obtener una solución explícita, hay que aproximar la solución por diversos algoritmos numéricas, que generalizan las fórmulas conocidas para aproximar integrales definidas. Este curso incluirá un bosquejo de algunos de esos métodos.

Temario

Ecuaciones diferenciales de primer orden Ecuaciones diferenciales con una condición inicial. Existencia y unicidad de las soluciones en un intervalo apropiado. El método de aproximaciones sucesivas. Ecuaciones separables y exactas. La búsqueda de factores integrantes. Ejemplos diversos.

Ecuaciones lineales de orden superior Ecuaciones de orden superior y sistemas de primer orden. Ecuaciones lineales homogéneas, soluciones linealmente independientes, el wronskiano. Ecuaciones lineales inhomogéneas, determinación de una solución particular. Sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

Problemas de contorno Condiciones de frontera y funciones de Green. Problemas de Sturm y Liouville y sus autovalores. Ortogonalidad de las autofunciones.

Resolución por series de potencias Ecuaciones lineales de segundo orden y sus puntos singulares. Expansión de soluciones en series de potencias, puntos singulares regulares. Ecuaciones diferenciales para funciones especiales, funciones de Bessel.

Soluciones aproximadas El método de Euler para obtener aproximaciones poligonales. Predicción y corrección, aproximaciones mejoradas. El uso de los polinomios de Taylor, métodos de Runge y Kutta. Estimación de errores.

Bibliografía

El temario sigue en parte el texto introductorio de Ahmad y Ambrosetti, con un buen balance entre teoría y práctica.

[1] S. Ahmad & A. Ambrosetti, *A Textbook on Ordinary Differential Equations*, serie "La Matematica per il 3 + 2", Springer, New York, 2015.

[2] G. Birkhoff & G.-C. Rota, *Ordinary Differential Equations*, tercera edición, Wiley, New York, 1978.

[3] E. A. Coddington, *Introducción a las ecuaciones diferenciales*, Centro Regional de Ayuda Técnica, México, DF, 1968.

[4] B. Rai, D. P. Choudhury & H. I. Freedman, *A Course in Ordinary Differential Equations*, Alpha Science International, Oxford, 2013.

[5] D. G. Zill, M. R. Cullen & A. E. García Hernández, *Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera*, Cengage Learning, Melbourne, 2009.

1 Ecuaciones diferenciales de primer orden

1.1 Ecuaciones diferenciales con una condición inicial

Una *ecuación diferencial* plantea una relación entre una función diferenciable de una o varias variables y algunas de sus derivadas. Estas ecuaciones se clasifican en *ordinarias* (referentes a funciones de una sola variable) y *parciales* (para funciones de dos o más variables: se plantea una relación entre la función original y sus derivadas parciales). En este curso se estudiará, casi exclusivamente, las ecuaciones diferenciales ordinarias para funciones de una sola variable.

Conviene adoptar el convenio de designar la variable independiente con la letra t. En diversas aplicaciones, se trata de averiguar la evolución temporal de una cantidad desconocida x como función del tiempo t. Entonces la función buscada (la llamada “variable dependiente”) se denotará por $x(t)$. Cuando se trata de buscar varias funciones de t a la vez, se usarán las notaciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, etcétera.

Definición 1.1. Una **ecuación diferencial (ordinaria)** de primer orden para una función $x(t)$ es una relación de la forma

$$\boxed{x'(t) = f(t, x(t))} \tag{1.1}$$

donde $x'(t) \equiv dx/dt$ es la derivada de $x(t)$ de primer orden, mientras $f(t, x)$ es una función conocida de dos variables reales.

La naturaleza de la solución (o soluciones) de dicha ecuación depende del comportamiento de la función f. Se espera encontrar una solución para $t \in I$, donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo de la recta real $\mathbb{R}$. Si el dominio de f es una parte $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, se busca el intervalo I tal que $(t, x(t)) \in \Omega$ para todo $t \in I$. ◊

Ejemplo 1.2. Una ecuación diferencial sencilla es

$$x'(t) = x(t), \tag{1.2}$$

donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la función $f(t, x) = x$. Esta ecuación tiene una solución inmediata:

$$x(t) = e^t \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R},$$

porque la función $t \mapsto e^t$ coincide con su derivada: $d/dt(e^t) \equiv e^t$. Esto establece la *existencia* de una solución, definido en el intervalo completo $I = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Sin embargo, esta solución *no es única*. Otra función que coincide con su derivada es $t \mapsto 2\,e^t$; otra más es $t \mapsto 3\,e^t$; en fin, para toda constante $c \in \mathbb{R}$, hay una solución $x_c(t) := c\,e^t$. Las soluciones de (1.2) entonces forman una familia parametrizada por una constante “arbitraria” c. ◊

Ejemplo 1.3. Un modelo de crecimiento de una población de una determinada especie (de conejos, truchas, hormigas, o lo que sea) debe tomar en cuenta el ritmo de crecimiento de la población $k = n - m$, donde n es el ritmo de nacimientos y m es el ritmo de muertes por unidad de tiempo. Se considera que n y m son cantidades observadas y medidas por estudios empíricos, así que – en una primera aproximación – el ritmo k es una constante conocida. Si h es la unidad de tiempo usada, el crecimiento entre las instantes t y $t + h$ sería[1]

$$x(t + h) - x(t) \doteq k\, x(t)\, h$$

porque el crecimiento es proporcional al tamaño de la población $x(t)$ en el instante t y también proporcional al lapso h. Esta aproximación debe ser cada vez mejor cuando la unidad de tiempo es más corta:

$$\frac{x(t + h) - x(t)}{h} \to k\, x(t) \quad \text{cuando} \quad h \to 0,$$

lo cual conduce a la ecuación diferencial de crecimiento simple:

$$x'(t) = k\, x(t). \tag{1.3}$$

En vista del ejemplo anterior, se puede adivinar una solución, $x(t) = e^{kt}$; y luego una familia de soluciones: $x(t) = c\, e^{kt}$, parametrizada por c. Por ese procedimiento *ad hoc* no garantiza que el hallazgo de *todas* las soluciones de (1.3). Sin embargo, sí sugiere un procedimiento más sistemático: se puede modificar la ecuación

$$x'(t) - k\, x(t) = 0$$

al multiplicar ambos lados por e^{-kt}:

$$x'(t)\, e^{-kt} - k\, x(t)\, e^{-kt} = 0.$$

El lado izquierdo de la ecuación modificada es una derivada:

$$\frac{d}{dt}\big(x(t)\, e^{-kt}\big) = 0,$$

y se sabe (por el *teorema de valor medio*) que las únicas funciones con derivada nula son las funciones *constantes*:

$$x(t)\, e^{-kt} \equiv C \quad \text{para alguna} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Entonces las funciones $\underline{x(t) := C\, e^{kt}}$ son *todas* las soluciones de la ecuación diferencial (1.3). ◊

[1] El símbolo $\doteq$ denota una igualdad aproximada.

La naturaleza cualitativa de las soluciones de (1.3) es la siguiente. Es necesario (para los efectos del modelo) que $C > 0$ ya que $x(t) > 0$ si $x(t)$ representa el tamaño de una población. Si $k > 0$, la solución $C\,e^{kt}$ indica crecimiento explosivo y descontrolado (y peor aun, ilimitado). Si $k = 0$, la solución constante $x(t) \equiv C$ indica una población totalmente estable. Si $k < 0$, la solución $C\,e^{kt}$ indica extinción rápida de la población. Ninguna de estas tres soluciones es muy realista a largo plazo: en consecuencia, habrá que refinar el modelo – omitiendo la hipótesis de un ritmo constante k – con una ecuación diferencial más precisa, capaz de estimar el comportamiento de $x(t)$ para t grande.

► El Ejemplo 1.3 pone de manifiesto que la "constante arbitraria" C es *una constante de integración*:

$$x(t)\,e^{-kt} = \int 0\,dt = C,$$

debido al uso de una integral indefinida para despejar la solución. Si una ecuación diferencial involucra derivadas de orden superior, se puede esperar dos o más constantes de integración en su solución general.

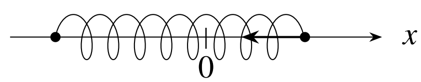

Figura 1.1: Un resorte estirado

Ejemplo 1.4. Un *resorte estirado*, con un extremo anclado, ejerce una fuerza sobre un cuerpo pegado al otro extremo. Según la ley de Hooke,[2] esta fuerza es proporcional a la extensión del resorte desde su posición de equilibrio. La segunda ley de Newton[3] indica que la aceleración del cuerpo en movimiento es proporcional a la fuerza ejercida (la constante de proporcionalidad m es su masa inercial). Para simplificar la situación, se puede imaginar un resorte sobrepuesto al eje x, con el extremo libre en el origen cuando está en equilibrio (véase la Figura 1.1), con un cuerpo de masa 1 en el extremo libre del resorte. Si $x(t)$ denota la posición de ese cuerpo en el instante t, su velocidad en la dirección horizontal es $x'(t)$ y su aceleración es la derivada de segundo orden, $x''(t)$. La ley de Hooke entonces dice que $x''(t) = k\,x(t)$. La fuerza de compresión del resorte

[2]Robert Hooke descubrió su ley sobre la tensión de un resorte (*ut tensio, sic vis*) en 1660 y fue curador de la Royal Society inglesa a partir de 1662. También hizo estudios sobre el fenómeno de gravitación, aunque no llegó a formular una ley precisa antes de Newton.

[3]En su libro *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687), Newton habla de la *cantidad de materia* de un cuerpo (su masa inercial m) y también su *cantidad de movimiento* (su momento $p = mv$, donde v denota la velocidad). Si el cuerpo se mueve bajo el efecto de una fuerza F, su segunda ley dice que $dp/dt = F$, o equivalentemente, $m\,dv/dt = F$. En general, tanto F como p son cantidades vectoriales.

tiende a jalar el cuerpo hacia el origen, así que esta constante es *negativa*: se puede escribir $k = -\omega^2$ para algún $\omega \in \mathbb{R}$.

En fin, se plantea la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\boxed{x''(t) = -\omega^2 x(t).} \tag{1.4a}$$

Se debe observar que $x(t)$ tiene la dimensión física (L) de una longitud, mientras la aceleración tiene dimensión física (LT^{-2}), así que ω tiene la dimensión (T^{-1}): se puede interpretar ω como una *frecuencia*.

Para resolver esta ecuación diferencial, conviene introducir una nueva variable, con la dimensión física de una longitud,

$$y(t) := \frac{x'(t)}{\omega}\,.$$

entonces la ecuación diferencial de segundo orden se convierte en dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \omega\, y(t), \\ y'(t) &= -\omega\, x(t). \end{aligned} \tag{1.4b}$$

Por lo tanto, se busca un par de funciones, tales que la derivada de cada una sea proporcional a la otra, con constantes de proporcionalidad que difieren por un signo. He aquí una solución "evidente":

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \operatorname{sen} \omega t, \\ y_1(t) &= \cos \omega t. \end{aligned}$$

Después de pensarlo brevemente, se puede dar cuenta que las funciones seno y coseno pueden cambiar de papel, dando lugar a una segunda solución:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \cos \omega t, \\ y_2(t) &= -\operatorname{sen} \omega t. \end{aligned}$$

En efecto, estas funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son dos soluciones de la ecuación (1.4a). Ellas no coinciden: de hecho, estas dos funciones, al no ser proporcionales, son *linealmente independientes* (en el espacio vectorial de funciones diferenciables sobre $\mathbb{R}$). Más aun: *cualquier combinación lineal* de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ es una solución de la ecuación diferencial original:

$$x(t) = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t, \quad \text{con} \quad A, B \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Resulta (como se verá más adelante) que esta es la *solución general* de la ecuación diferencial (1.4a). Está parametrizada por dos constantes de integración. ◊

Nuevamente, la naturaleza cualitativa de las soluciones (1.5) es evidente: son *funciones periódicas* de período $2\pi/\omega$:

$$x(t + 2\pi/\omega) \equiv x(t), \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Físicamente, esto corresponde al *comportamiento oscilatorio* del resorte: en la ausencia de fuerzas mitigantes (como fricción o desgaste del metal), el resorte se estira y encoge alrededor de la posición del equilibrio $x = 0$.

► De los ejemplos ya vistos, es evidente que una ecuación diferencial tendrá una familia de soluciones si tiene al menos una. Entonces, para obtener unicidad, hay que imponer algunas condiciones suplementarias, capaces de determinar la o las "constantes arbitrarias". Hay dos clases de restricciones de particular importancia:

- ◇ *Condiciones iniciales*: por ejemplo, se puede fijar el valor de $x(t)$ y $x'(t)$ en un instante inicial t_0, al demandar $x(t_0) = x_0$ y $x'(t_0) = x'_0$.
- ◇ *Condiciones de contorno*: por ejemplo, se puede fijar los valores de $x(t)$ en los extremos de un intervalo $a \leqslant t \leqslant b$, al demandar $x(a) = x_1$ y $x(b) = x_2$.

Las condiciones ilustradas son adecuadas para una ecuación de segundo orden, cuando se requiere determinar dos "constantes". Para ecuaciones de primer orden, una sola condición suele ser suficiente.

Definición 1.5. Dada una ecuación diferencial de primer orden (1.1), una **condición inicial** toma la forma $x(t_0) = x_0$. Entonces se plantea lo siguiente:

$$\boxed{x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0\,.} \tag{1.6}$$

Este planteamiento se llama un **problema de Cauchy**, o más simplemente, un **problema de valor inicial**. Dada la función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, se trata de hallar un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que $t_0 \in I$ y una función diferenciable $x : I \to \mathbb{R}$ tal que $(t, x(t)) \in \Omega$ para todo $t \in I$, que satisfaga (1.6) para $t \in I$. ◊

Ejemplo 1.6. Considérese el problema de valor inicial:

$$x'(t) = 1 + x(t)^2, \qquad x(0) = 0.$$

Aquí $f(t, x) = 1 + x^2$ es independiente de t: dícese que esta ecuación es *autónoma*. Hay una función trigonométrica que cumple con estos requisitos:

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{tg} t) = \sec^2 t = 1 + \operatorname{tg}^2 t, \quad \operatorname{tg}(0) = 0.$$

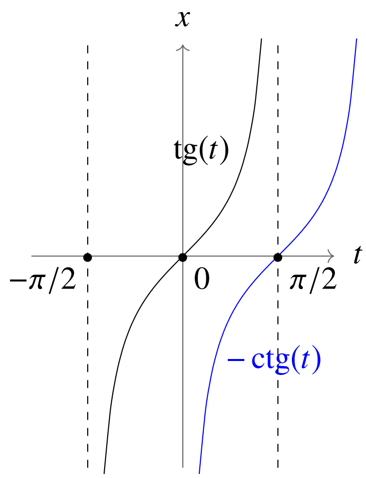

Figura 1.2: Soluciones a $x'(t) = 1 + t^2$

Entonces la solución (que resulta ser única) es $\underline{x(t) = \operatorname{tg} t}$.

Ahora bien, la función tangente no está definida en todo $\mathbb{R}$, porque $\operatorname{tg} t \to +\infty$ cuando $t \uparrow \pi/2$ y además $\operatorname{tg} t \to -\infty$ cuando $t \downarrow -\pi/2$. Entonces el intervalo máximo donde esta solución puede estar definida es $I = (-\pi/2, \pi/2)$. Afortunadamente $0 \in I$, así que este problema de Cauchy tiene solución en ese intervalo.

El problema de valor inicial

$$x'(t) = 1 + x(t)^2, \qquad x(\pi) = 0,$$

también tiene solución única, pero esta vez hay que usar otro intervalo $I = (\pi/2, 3\pi/2)$ para garantizar que $\pi \in I$. Se trata de otra "rama" de la función tangente, la cual es periódica con período π (si se omiten los múltiplos impares de $\pi/2$).

El problema de valor inicial

$$x'(t) = 1 + x(t)^2, \qquad x(\pi/2) = 0,$$

requiere un nuevo tipo de solución. Por suerte, está disponible la función cotangente, y la función $\underline{x(t) = -\operatorname{ctg} t}$ provee una solución (también única) definida en el intervalo $I = (0, \pi)$. Véase la Figura 1.2. $\Diamond$

Se debe notar que el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ puede ser finito, semiinfinito o todo $\mathbb{R}$; también puede ser un intervalo abierto (a, b), un intervalo semiabierto $[a, b)$ o $(a, b]$, o bien un intervalo cerrado $[a, b]$. Típicamente, los problemas de valor inicial poseen soluciones en intervalos abiertos (a, b) para los cuales $a < t_0 < b$.

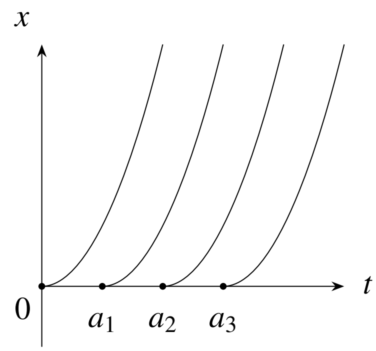

Figura 1.3: Varias soluciones de $x' = 2\sqrt{x}$, $x(0) = 0$

Ejemplo 1.7. Considérese el problema de valor inicial:

$$x'(t) = 2\sqrt{x(t)}, \qquad x(0) = 0. \tag{1.7}$$

Aquí $f(t,x) = 2\sqrt{x}$ solo está definido en $\Omega = \mathbb{R} \times [0,\infty)$. Esta función f es continua pero solo es diferenciable – con respecto a x – en el semiplano abierto $\mathbb{R} \times (0,\infty)$.

Una solución "evidente" a este problema de Cauchy es la media parábola

$$x(t) = t^2 \quad \text{para} \quad t \geqslant 0.$$

Esta solución particular decide el problema de existencia. Sin embargo, esta solución no es única. Otra solución, también evidente, es la *solución trivial*: $x(t) \equiv 0$.

De hecho, el problema de Cauchy (1.7) tiene una infinitud de soluciones: para cada $a \geqslant 0$, sea $x_a \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$x_a(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant a, \\ (t-a)^2 & \text{si } t \geqslant a. \end{cases}$$

Entonces x_a es diferenciable[4] en $[0,\infty)$ – nótese que $x_a'(a) = 0$, en particular – y la función x_a verifica (1.7), cualquiera que sea $a \geqslant 0$. Véase la Figura 1.3. ◊

En vista de los ejemplos anteriores, hay dos preguntas que merecen respuesta. ¿Cuáles condiciones garantizan la *existencia* de (al menos) una solución a un problema de valor inicial (1.6)? Además: ¿cuáles condiciones garantizan la *unicidad* de esa solución? En la siguiente sección, se ofrecerá una respuesta parcial a la segunda pregunta.

[4]Una función $y\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ cuyo dominio es un intervalo cerrado se llama *diferenciable en* $[c,d]$ si (i) $y'(t) := \lim_{h\to 0}(y(t+h) - y(t))/h$ existe para todo $t \in (c,d)$; y (ii) los dos límites unilaterales $y'(a) := \lim_{h\downarrow 0}(y(a+h) - y(a))/h$, $y'(b) := \lim_{h\uparrow 0}(y(b+h) - y(b))/h$ existen.

1.2 Existencia y unicidad de las soluciones

El teorema principal para problemas de Cauchy de primer orden es el siguiente, cuya demostración se pospone temporalmente.

Teorema 1.8. *Sea* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una función* continua *definida en un dominio* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$*, con derivada parcial continua* f_x *respecto de la segunda variable. Sea* (t_0, x_0) *un punto interior de* Ω*. Entonces hay un intervalo cerrado* $I \subseteq \mathbb{R}$ *con* t_0 *un punto interior de* I*, tal que el problema de valor inicial*

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0$$

tenga solución única $x(t)$ *para* $t \in I$*.*

Este teorema establece la *existencia y unicidad* de la solución en un intervalo apropiado que incluye t_0. Es posible que la solución pueda extenderse a un intervalo más grande, bajo el riesgo de perder unicidad en ese intervalo mayor.

Antes de abordar la demostración, cabe recordar su terminología. El **interior** de un intervalo cerrado[5] $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ es el intervalo abierto (a, b) que omite los extremos.

Un punto $(t_0, x_0) \in \Omega$ es un **punto interior** de Ω si posee un vecindario abierto V tal que $V \subseteq \Omega$. Entre los posibles vecindarios de ese punto, se puede tomar:

- ◇ $V_r := \{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 : (t - t_0)^2 + (x - x_0)^2 < r^2 \}$ para algún $r > 0$; o bien
- ◇ $V_{\delta,\varepsilon} := \{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| < \delta,\ |x - x_0| < \varepsilon \}$ para algunos $\delta > 0$ y $\varepsilon > 0$.

Sin perder generalidad, se puede suponer que Ω incluye el *rectángulo cerrado*:

$$\overline{V}_{\delta,\varepsilon} := \{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leqslant \delta,\ |x - x_0| \leqslant \varepsilon \},$$

porque $\overline{V}_{\delta,\varepsilon} \subset V_{\delta',\varepsilon'}$ para $\delta < \delta'$ y $\varepsilon < \varepsilon'$.

La **derivada parcial** f_x se define como sigue:

$$f_x(t_1, x_1) := \lim_{h \to 0} \frac{f(t_1, x_1 + h) - f(t_1, x_1)}{h}$$

para todo $(t_1, x_1) \in \Omega$. ⟦ Si el punto $(t_1, x_1) \in \Omega$ no es un punto interior, se debe tomar un límite unilateral. ⟧ Nótese que esta "derivada con t_1 fijo" es un concepto del cálculo de una variable.

[5]Para intervalos semiinfinitos, el interior de $[a, +\infty)$ es $(a, +\infty)$; el interior de $(-\infty, b]$ es $(-\infty, b)$. El intervalo cerrado $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ coincide con su interior.

► La demostración del Teorema 1.8 está basada en la siguiente observación: por el *teorema fundamental de cálculo*, una función diferenciable $x(t)$ con $x(t_0) = x_0$ es la integral definida de su derivada:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds,$$

y el problema de valor inicial (1.6) es equivalente a la siguiente **ecuación integral**:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds. \tag{1.8}$$

Ahora bien, como la función desconocida $x(t)$ aparece en ambos lados de esta relación, no es más (ni menos) fácil resolver esta ecuación integral que la ecuación diferencial original. Sin embargo, se puede al menos observar la existencia de la integral al lado derecho. En detalle: *si se asume* que la función $s \mapsto x(s)$ es *continua*, entonces la continuidad de f garantiza que el integrando $s \mapsto f(s, x(s))$ es continua – por ser la composición de dos funciones continuas – y por ende la integral existe.[6] Además, la ecuación (1.8) implica que $x(t) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t} f(s, x(s))\,ds$, lo cual refuerza la hipótesis de la continuidad de la función $t \mapsto x(t)$.

Entonces el planteamiento (1.8) sugiere un *procedimiento recursivo* para obtener una "solución aproximada". Inicialmente, colóquese $x_0(t) \equiv x_0$. Esta función constante es continua y coincide con la solución deseada al menos en el punto $t = t_0$. Ahora defínase

$$x_1(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0)\,ds.$$

Nuevamente, $t \mapsto x_1(t)$ es continua y satisface $x_1(t_0) = x_0$. En seguida, se puede ensayar

$$x_2(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))\,ds.$$

Continuando así, se obtiene una familia una familia de funciones $\{\, x_k(t) : k \in \mathbb{N} \,\}$ definidas recursivamente por:

$$x_0(t) := x_0, \qquad x_{k+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\,ds \tag{1.9}$$

para $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ Si se puede establecer que las $t \mapsto x_k(t)$ convergen a una función límite $t \mapsto x(t)$ y que esta función límite es continua, entonces se habrá construido una solución de (1.8) por este **método de aproximaciones sucesivas**.

[6] Una función *continua* definida en un intervalo compacto $[t_0, t]$ es integrable en ese intervalo, como límite de sumas de Riemann.

La hipótesis de la existencia y continuidad de la derivada parcial $f_x(t,x)$ es la clave para justificar la convergencia de estas aproximaciones.

Ejemplo 1.9. Considerése el problema de valor inicial

$$x'(t) = x(t), \qquad x(0) = 1, \tag{1.10}$$

heredado del Ejemplo 1.2. El método de aproximaciones sucesivas, para $f(t,x) = x$, $t_0 = 0$, $x_0 = 1$, permite definir $x_0(t) := 1$ y en seguida:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &:= 1 + \int_0^t 1\,ds = 1 + t, \\
x_2(t) &:= 1 + \int_0^t (1+s)\,ds = 1 + t + \tfrac{1}{2}t^2, \\
x_3(t) &:= 1 + \int_0^t \bigl(1 + s + \tfrac{1}{2}s^2\bigr)\,ds = 1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{3!}t^3, \\
x_4(t) &:= 1 + \int_0^t \bigl(1 + s + \tfrac{1}{2}s^2 + \tfrac{1}{3!}s^3\bigr)\,ds = 1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{3!}t^3 + \tfrac{1}{4!}t^4,
\end{aligned}$$

y luego, por inducción:

$$x_k(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \cdots + \frac{1}{k!}t^k \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Estas aproximaciones son los polinomios de Taylor de la función continua $t \mapsto e^t$. Además, esta convergencia es *uniforme* en el intervalo compacto $[-T,T]$ si $T > 0$, por la estimación del resto de la serie de Taylor:

$$|e^t - x_k(t)| = |R_k(t)| = \frac{|t^{k+1}\,e^{\theta t}|}{(k+1)!} \leqslant \frac{T^{k+1}\,e^T}{(k+1)!}$$

para $-T \leqslant t \leqslant T$; aquí $0 < \theta < 1$ y $e^{\theta t} = d^{k+1}/ds^{k+1}(e^s)$ evaluado en $s = \theta t$, según el teorema de valor medio. Se concluye que $x_k(t) \to e^t$ uniformemente en el intervalo $[-T,T]$ para todo $T \geqslant 0$.[7] En este ejemplo, el intervalo de existencia de la solución $x(t) = e^t$ es $I = \mathbb{R}$. ◊

Ejemplo 1.10. Considerése el problema de valor inicial

$$x'(t) = x(t)^2, \qquad x(0) = 1. \tag{1.11}$$

[7] Una función $t \mapsto g(t)$ es **analítica** en $t = a$ si g es suave (tiene derivadas de todo orden) y sus polinomios de Taylor convergen a $g(t)$ uniformemente en un intervalo compacto $[a-r, a+r]$, para algún $r > 0$. Entonces la serie de Taylor de g converge, y su suma coincide con g en ese intervalo. La estimación anterior muestra que $t \mapsto e^t$ es analítica en todo $\mathbb{R}$.

En este caso, $f(t,x) = x^2$ y $t_0 = 0$, $x_0 = 1$. El método de aproximaciones sucesivas define $x_0(t) := 1$ y luego

$$\begin{aligned}
x_1(t) &:= 1 + \int_0^t 1\,ds = 1 + t, \\
x_2(t) &:= 1 + \int_0^t (1+s)^2\,ds = 1 + \int_0^t (1 + 2s + s^2)\,ds = 1 + t + t^2 + \tfrac{1}{3}t^3, \\
x_3(t) &:= 1 + \int_0^t (1 + s + s^2 + \tfrac{1}{3}s^3)^2\,ds \\
&= 1 + \int_0^t (1 + 2s + 3s^2 + \tfrac{8}{3}s^3 + \tfrac{5}{3}s^4 + \tfrac{2}{3}s^5 + \tfrac{1}{9}s^6)\,ds \\
&= 1 + t + t^2 + t^3 + \tfrac{2}{3}t^4 + \tfrac{1}{3}t^5 + \tfrac{1}{9}t^6 + \tfrac{1}{63}t^7.
\end{aligned}$$

En este caso, es más difícil detectar el patrón inductivo. Se podría especular que las aproximaciones toman la forma

$$x_k(t) = 1 + t + t^2 + \cdots + t^k + (\text{correcciones pequeñas}),$$

que permite *adivinar* que

$$x(t) := \lim_{k\to\infty} x_k(t) = \lim_{k\to\infty}(1 + t + t^2 + \cdots + t^k) = \frac{1}{1-t}$$

al observar que la parte inicial de cada aproximación es una suma parcial de la serie geométrica para la función $1/(1-x)$. En seguida se podría notar que la derivada de esta función cumple la ecuación diferencial dada:

$$x(t) := \frac{1}{1-t} \implies x'(t) = \frac{1}{(1-t)^2} = x(t)^2; \qquad x(0) = 1.$$

De este modo se ha "descubierto" una solución de (1.11), pero de modo poco riguroso, porque no se ha comprobado que $x_k(t) \to x(t)$. La moraleja de este ejemplo es que el Teorema 1.8 puede establecer la existencia y unicidad de una solución, pero no ofrece un algoritmo práctico para hallarla en forma cerrada.

Obsérvese también que la solución $x(t) = 1/(1-t)$ está representada por la serie geométrica solamente en el intervalo $(-1,1)$, y que esta función diverge en $t = 1$. Se verá más adelante que un intervalo cerrado de la forma $I = [-r,r]$, con $0 < r < 1$, satisface los requisitos del Teorema 1.8, aunque es evidente que la solución es válida en todo el intervalo abierto $(-\infty, 1)$. $\Diamond$

► La hipótesis de la diferenciabilidad de $x \mapsto f(t,x)$ no ha sido usado (explícitamente) en los Ejemplos 1.9 y 1.10. Sin embargo, no puede ser dejado de lado: el Ejemplo 1.7 exhibe un problema de valor inicial donde no hay unicidad de la solución. Este problema no cabe dentro de las hipótesis del Teorema 1.8 porque la función $x \mapsto 2\sqrt{x}$ no es diferenciable en $x = 0$.

La diferenciabilidad de $x \mapsto f(t,x)$ permite comprobar la convergencia de las aproximaciones sucesivas. Para eso, bastará hacer ciertas *estimaciones*, donde una condición levemente más amplia (dada a continuación) es todo lo se ocupa.

Definición 1.11. Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ satisface una **condición de Lipschitz**, o es **lipschitziana** (en la segunda variable),[8] en el punto $(t_0, x_0) \in \Omega$ si hay un vecindario cerrado $\overline{V} \subset \Omega$ de (t_0, x_0) y una constante $L > 0$ tales que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant L\,|x - y| \quad \text{para todo} \quad (t,x),\ (t,y) \in \overline{V}. \tag{1.12}$$

Dícese que f es **lipschitziana en todo** Ω si hay una constante $L > 0$ tal que la estimación de (1.12) sea válida para todo $(t,x),\ (t,y) \in \Omega$. ◊

Lema 1.12. *Sea (t_0, x_0) un punto interior de $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, de modo existen $\delta > 0$ y $\varepsilon > 0$ tales que*

$$\overline{V} := \{\, (t,x) : |t - t_0| \leqslant \delta,\ |x - x_0| \leqslant \varepsilon \,\} \subseteq \Omega.$$

Si una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable con respecto a x, entonces f es lipschitziana en $\overline{V}$.

Demostración. La hipótesis dice que la derivada parcial f_x existe y es continua y acotada en $\overline{V}$. Como $\overline{V}$ es un rectángulo compacto, la función continua f_x es acotada[9] sobre ese rectángulo. Tómese $L := \sup_{(t,x)\in\overline{V}} |f_x(t,x)|$.

Si $(t,x) \in \overline{V}$ y $(t,y) \in \overline{V}$, el teorema de valor medio dice que hay $y_t = (1-\theta_t)x + \theta_t y \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(t,x) - f(t,y) = f_x(t,y_t)\,(x - y).$$

Nótese que $(t, y_t) \in \overline{V}$ también. Entonces

$$|f(t,x) - f(t,y)| = |f_x(t,y_t)|\,|x - y| \leqslant L\,|x - y|. \qquad \square$$

[8] Una función de una sola variable $g : I \to \mathbb{R}$ satisface una condición de Lipschitz, o es *lipschitziana*, en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, si hay $L > 0$ con $|g(t) - g(s)| \leqslant L|t - s|$ para $t, s \in I$. Esta condición, introducido por Rudolf Lipschitz, es intermedia entre diferenciabilidad continua y continuidad uniforme. En este curso, se usará el término "lipschitziana" como abreviatura para "lipschitziana en la segunda variable".

[9] Aquí se usa la proposición conocida de que una función real continua alcanza su valor máximo y su valor mínimo sobre un rectángulo acotado y cerrado.

Ejemplo 1.13. La función $\underline{f(t,x) := |x|}$ es obviamente lipschitziana sobre $\mathbb{R}^2$, con $L = 1$, por la desigualdad triangular:

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|,$$

pero $f_x(t,0) = d/dx(|x|)$ no existe.

La función $\underline{g(t,x) := 2\sqrt{x}}$ no es lipschitziana en el punto $(t,0)$ por la misma razón que la derivada $g_x(t,0)$ no existe: la recta que une los puntos $(t,0)$ y $(t+h, 2\sqrt{h})$ tiene una pendiente $m = 2h^{-1/2}$ que diverge cuando $h \downarrow 0$.

La función $\underline{h(t,x) := x^2}$ es lipschitziana en cada punto (t_0, x_0) por el Lema 1.12, pero no en todo $\mathbb{R}^2$, porque $h_x(t,x) := 2x$ no es acotada en $\mathbb{R}^2$. En efecto, si fuera $|x^2 - y^2| \leqslant L\,|x - y|$ para todo x, y, entonces sería $|x + y| \leqslant L$ toda vez que $x \neq y$, lo cual es falso. Puede decirse que $(t,x) \mapsto x^2$ es **localmente lipschitziana**, pero no es "globalmente lipschitziana". $\Diamond$

Proposición 1.14. *Sea $f\colon [a,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y lipschitziana. Entonces las aproximaciones sucesivas x_k de la fórmula* (1.9) *convergen uniformemente en el intervalo $[a,b]$ a una función continua $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.*

Demostración. La hipótesis dice que hay una constante $L > 0$ que satisface

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant L\,|x - y| \quad \text{para todo} \quad t \in [a,b];\ x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.13}$$

Por su continuidad, la función $t \mapsto |f(t,x_0)|$ es acotada en el intervalo compacto $[a,b]$. Sea $M := \sup_{a\leqslant t\leqslant b} |f(t,x_0)|$.

Para $t \in [a,b]$ con $t \geqslant t_0$, se obtiene la estimación:

$$\begin{aligned}
|x_2(t) - x_1(t)| &= \left|\int_{t_0}^t \big(f(s,x_1(s)) - f(s,x_0)\big)\,ds\right| \\
&\leqslant \int_{t_0}^t \big|f(s,x_1(s)) - f(s,x_0)\big|\,ds \\
&\leqslant L \int_{t_0}^t |x_1(s) - x_0|\,ds.
\end{aligned}$$

El integrando al lado derecho obedece otra estimación:

$$|x_1(s) - x_0| = \left|\int_{t_0}^s f(r,x_0)\,dr\right| \leqslant \int_{t_0}^s \big|f(r,x_0)\big|\,dr \leqslant M\,(s - t_0).$$

Al combinar estas dos desigualdades, se obtiene

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leqslant L \int_{t_0}^{t} M\,(s - t_0)\,ds = ML \int_{t_0}^{t} (s - t_0)\,ds = \frac{ML}{2}\,(t - t_0)^2.$$

De la misma forma, se obtiene la desigualdad

$$|x_3(t) - x_2(t)| \leqslant L \int_{t_0}^{t} |x_2(s) - x_1(s)|\,ds$$

la cual implica que

$$|x_3(t) - x_2(t)| \leqslant L \int_{t_0}^{t} \frac{ML}{2}(s - t_0)^2\,ds = \frac{ML^2}{6}\,(t - t_0)^3.$$

Entonces es razonable sospechar que, para todo $k \geqslant 1$, se cumple

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \leqslant \frac{ML^{k-1}}{k!}\,(t - t_0)^k.$$

Los casos $k = 1$ y $k = 2$ ya han sido comprobados. El caso general sigue por inducción sobre k:

$$\begin{aligned}
|x_{k+1}(t) - x_k(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} \big(f(s, x_k(s)) - f(s, x_{k-1}(s)) \big)\,ds \right| \\
&\leqslant L \int_{t_0}^{t} |x_k(s) - x_{k-1}(s)|\,ds \leqslant \frac{ML^k}{k!} \int_{t_0}^{t} (s - t_0)^k\,ds \\
&\leqslant \frac{ML^k}{(k+1)!}\,(t - t_0)^{k+1}.
\end{aligned}$$

Para el caso $t \leqslant t_0$, se puede hacer el mismo análisis con algunos cambios de signo; se llega a la siguiente estimación, válido para todo $t \in [a, b]$ y todo $k \in \mathbb{N}$:

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leqslant \frac{ML^k}{(k+1)!}\,|t - t_0|^{k+1}. \tag{1.14}$$

El lado derecho es el término #$(k + 1)$ de la serie de Taylor de la función $(M/L)\,e^{L|t-t_0|}$. En particular, la sucesión $\{x_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$, para t fijo, es una *sucesión de Cauchy* en $\mathbb{R}$ y por ende converge a un límite

$$x(t) := \lim_{k\to\infty} x_k(t).$$

En vista de la relación $|t - t_0| \leqslant (b - a)$, se puede reemplazar (1.14) por una estimación uniforme:

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leqslant \frac{ML^k}{(k+1)!}\,(b - a)^{k+1}.$$

En consecuencia, se obtiene

$$|x(t) - x_n(t)| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} |x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leqslant \frac{M}{L} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{L^{k+1}(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} \leqslant \frac{ML^n(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{L(b-a)}.$$

⟦ El lado derecho viene del residuo de Taylor de la función $s \mapsto e^s$ en $s = L(b-a)$. ⟧ Entonces $x_n(t) \to x(t)$ uniformemente para $t \in [a,b]$. Como cada función es continua, por su definición (1.9), su límite uniforme x es también continua en $[a,b]$. □

Teorema 1.15 (Picard)**.** *Sea* $f\colon [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua y lipschitziana. Entonces el problema de valor inicial* (1.6)*:*

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0$$

posee una solución única, definida en todo el intervalo $[a,b]$.

Demostración. Defínase las aproximaciones sucesivas por la fórmula (1.9):

$$x_0(t) := x_0, \qquad x_{k+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\, ds,$$

para $k \in \mathbb{N}$ y $a \leqslant t \leqslant b$. La Proposición 1.14 muestra que hay una función continua $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $x_k(t) \to x(t)$ uniformemente para $t \in [a,b]$. Entonces $f(s, x_k(s)) \to f(s, x(s))$ también, uniformemente para $s \in [a,b]$.

Esta convergencia uniforme garantiza que se puede intercambiar el límite $k \to \infty$ con la integral $\int_{t_0}^{t}$ en el cálculo siguiente:

$$\begin{aligned} x(t) = \lim_{k\to\infty} x_{k+1}(t) &= x_0 + \lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\, ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{k\to\infty} f(s, x_k(s))\, ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds. \end{aligned}$$

Esto dice que $x(t)$ satisface la ecuación integral (1.8), así que la función x es diferenciable y además es una solución del problema de valor inicial.

Para comprobar la unicidad, sea $y(t)$ una solución cualquiera del problema (1.6). Entonces la diferencia $x(t) - y(t)$ satisface la relación:

$$x(t) - y(t) = \int_{t_0}^{t} \bigl(f(s, x(s)) - f(s, y(s))\bigr)\, ds.$$

Si L es la constante de la condición de Lipschitz (1.13), tómese δ tal que $0 < \delta < 1/L$. Para $t \in [a,b]$ con $|t - t_0| < \delta$, se ve que

$$\begin{aligned}
|x(t) - y(t)| &\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \big| f(s, x(s)) - f(s, y(s)) \big| \, ds \right| \\
&\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} L \, |x(s) - y(s)| \, ds \right| \leqslant L \, |t - t_0| \sup_{|s - t_0| < \delta} |x(s) - y(s)| \\
&\leqslant L \, \delta \sup_{|s - t_0| < \delta} |x(s) - y(s)|.
\end{aligned}$$

El máximo valor del lado izquierdo está acotado por el lado derecho:

$$\sup_{|t - t_0| < \delta} |x(t) - y(t)| \leqslant L \, \delta \sup_{|t - t_0| < \delta} |x(t) - y(t)|.$$

Como $L\delta < 1$, se concluye que $\sup_{|t-t_0|<\delta} |x(t) - y(t)| = 0$; en otras palabras, $y(t) \equiv x(t)$ para $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [a,b]$.

En particular, vale $y(t_1) = x(t_1)$ para $t_1 = t_0 + \delta$ o bien $t_1 = t_0 - \delta$. Al reemplazar t_0 por t_1 en el análisis anterior, se obtiene $y(t) \equiv x(t)$ en los intervalos $[t_0 + \delta, t_0 + 2\delta]$ y $[t_0 - 2\delta, t_0 - \delta]$. Por lo tanto, $y(t) \equiv x(t)$ para $t \in [t_0 - 2\delta, t_0 + 2\delta] \cap [a,b]$. Al repetir este argumento un número finito de veces, se obtiene $y(t) \equiv x(t)$ para todo $t \in [a,b]$. $\square$

La hipótesis de que la función f sea lipschitziana en todo la franja $[a,b] \times \mathbb{R}$ es muy restrictiva, pero en vista del Lema 1.12 una función continuamente diferenciable sí es lipschitziana en algún rectángulo compacto centrado en el punto inicial (t_0, x_0):

$$\overline{V} = \{\, (t,x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leqslant \delta,\ |x - x_0| \leqslant \varepsilon \,\}. \tag{1.15}$$

En tal caso es necesario modificar el intervalo de existencia y unicidad. La funcíon continua f es acotada en $\overline{V}$; llámese

$$M := \sup\{\, |f(t,x)| : (t,x) \in \overline{V} \,\}.$$

Es posible comprobar la validez de los argumentos anteriores para $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \eta$ (y también para $t_0 - \eta \leqslant t \leqslant t_0$) toda vez que $\eta \leqslant \delta$ – para que $f(t, x(t))$ se pueda definir – y además $\eta \leqslant \varepsilon/M$. La segunda condición es necesaria porque la fórmula (1.9) impone la restricción

$$|x_{k+1}(t) - x_0| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f(s, x_k(s))| \, ds \leqslant \int_{t_0}^{t} M \, ds = M(t - t_0) \leqslant M\eta$$

para $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \eta$. La desigualdad $|x_{k+1}(t) - x_0| \leqslant \varepsilon$ garantiza que $f(t, x_{k+1}(t)) \in \overline{V}$, para que se pueda continuar la inducción.

Corolario 1.16. *Sea* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una función continua y lipschitziana definida en el rectángulo compacto* (1.15). *Entonces el problema de valor inicial* (1.6) *posee una solución única, definida en el intervalo* $I = [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$, *donde* $\eta := \min\{\delta, \varepsilon/M\}$.

Bosquejo de la prueba. Es cuestión de repetir las demostraciones de las dos proposiciones anteriores, notando en cada instancia que los puntos $(t, x_k(t))$ y $(t, x(t))$ pertenecen al dominio de f. Se deja los detalles como un ejercicio. □

Demostración del Teorema 1.8. Por ser (t_0, x_0) un punto interior de Ω, existen $\delta > 0$ y $\varepsilon > 0$ tales que el rectángulo cerrado $\overline{V}$ de (1.15) esté incluido en Ω. Entonces, por el Lema 1.12, la función f es continua y lipschitziana en $\overline{V}$. El Corolario 1.16 entonces ofrece el intervalo I en donde hay una solución única. □

El Teorema 1.8 permite resolver el problema de Cauchy de forma única *localmente*, es decir, en un vecindario del punto inicial (t_0, x_0). Es posible que la solución obtenida en el intervalo $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ pueda extenderse a un intervalo mayor. Por ejemplo, al obtener el valor $x_1 = x(t_0 + \eta)$ a partir de esta solución, se puede plantear un nuevo problema problema de Cauchy en $t_1 = t_0 + \eta$:

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_1) = x_1.$$

Si f es también continua y lipschitziana en un rectángulo centrado en (t_1, x_1), habrá un intervalo $J = [t_1 - \xi, t_1 + \xi]$ con solución única al nuevo problema. En la intersección $[t_0, t_0 + \eta] \cap [t_1 - \xi, t_1]$ las dos soluciones coinciden, por unicidad; en tal caso, la solución inicial en el intervalo I ha sido prolongado al intervalo $I \cup J$. Moraleja: la solución local ofrecida por el Teorema 1.8 *podría ser prolongable a un intervalo mayor*, dependiendo de la naturaleza de la función f.

¿Qué ocurre si f es continua en el rectángulo Ω dado por (1.15), pero no es lipschitziana? Un teorema de Peano asegura que *existe al menos una solución* en el mismo intervalo $I = [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$, pero sin garantía de unicidad. La demostración está fuera del alcance de este curso.[10]

1.3 Ecuaciones separables y exactas

En el apartado anterior, se ha visto que muchos problemas de valor inicial poseen soluciones únicas; sin embargo, los resultados vistos no ofrecen algoritmos prácticos

[10]Peano consideró una familia de "soluciones aproximadas" al problema de Cauchy y mostró que tal familia debe tener una subsucesión que convergen uniformemente a una verdadera solución. (Esta es consecuencia de un teorema de Ascoli.) Sin embargo, puede haber otras subsucesiones que convergen a soluciones distintas: de ahí la falta de unicidad.

para hallar las soluciones, salvo en los casos infrecuentes en donde las aproximaciones sucesivas convergen a una función conocida. Ahora se debe cambiar el énfasis a la tarea de buscar soluciones explícitas.

El éxito de esa tarea no está garantizada, porque en el caso particular de la ecuación diferencial $x'(t) = g(t)$, $x(t_0) = x_0$, la solución "inmediata" es la *integral indefinida*:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds,$$

y es bien conocida que no siempre es posible hallar esa integral en una forma elemental.[11]

Sin embargo, es posible identificar varios casos particulares de problemas de valor inicial que admiten soluciones explícitas.

1.3.1 Ecuaciones separables

Una ecuación diferenciable se llama **separable** si tiene la forma

$$x'(t) = h(t)\,g(x), \tag{1.16}$$

es decir, si el lado derecho $f(t,x) := h(t)\,g(x(t))$ se factoriza en dos funciones de una variable.

En adelante, se supondrá que la función h es continua y que la función g es continuamente diferenciable. Entonces f satisface las hipótesis del Teorema 1.8, garantizando la existencia y unicidad locales de las soluciones de problemas de Cauchy.

La ecuación (1.16) puede escribirse en la forma

$$\frac{x'(t)}{g(x(t))} = h(t).$$

Al integrar con respecto a t, se obtiene

$$\int \frac{x'(t)\,dt}{g(x(t))} = \int h(t)\,dt,$$

o más simplemente,

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int h(t)\,dt + C.$$

Brevemente: el problema se reduce a la búsqueda de antiderivadas para $h(t)$ y $1/g(x)$.

[11] En términos más precisos: si $g(t)$ pertenece a una clase de funciones "elementales" – polinomios, funciones racionales, trigonométricos, exponenciales y logarítmicos – se busca su integral indefinida en esa misma clase. Un estudio hecho por Joseph Liouville, alrededor de 1835, clasificó las funciones que poseen integrales elementales.

Una condición inicial $x(t_0) = x_0$ permite despejar C, la "constante de integración". Alternativamente, se puede plantear el problema en términos de integrales indefinidas:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{g(x')} = \int_{t_0}^{t} h(t')\,dt'.$$

Ejemplo 1.17. Como caso particular, considérese la ecuación *lineal* separable:

$$x'(t) = h(t)\,x, \qquad x(t_0) = x_0.$$

En este caso, se obtiene[12]

$$\log x = \int \frac{dx}{x} = \int h(t)\,dt + C,$$

así que

$$x(t) = A\,e^{\int h(t)\,dt}.$$

donde la "constante de integración" A depende de la condición inicial. Por ejemplo,

$$x'(t) = t^2 x, \quad x(0) = 4 \implies x(t) = 4\,e^{t^3/3}. \qquad \Diamond$$

Ejemplo 1.18. Considérese el problema de valor inicial:

$$x'(t) = \frac{t^2}{1 + 3x^2}, \qquad x(0) = 0. \tag{1.17}$$

Al separar las variables, se obtiene

$$\int_0^x (1 + 3x'^2)\,dx' = \int_0^t t'^2\,dt',$$

lo cual conduce a la ecuación algebraica:

$$x + x^3 = \frac{t^3}{3}.$$

A partir de ahí, una solución "explícita" $x = x(t)$ pasa por resolver una ecuación algebraica cúbica; no imposible, pero de dudosa utilidad.

Sin embargo, se puede describir la solución en términos cualitativos. Fíjese que $f(t,x) := t^2/(1 + 3x^2)$ es continua en $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; su derivada parcial f_x es

$$f_x(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\biggl(\frac{t^2}{1 + 3x^2}\biggr) = t^2\,\frac{d}{dx}\biggl(\frac{1}{1 + 3x^2}\biggr) = -\frac{6t^2 x}{(1 + 3x^2)^2}.$$

[12]En este curso, 'log' denota el logaritmo natural; es hora de dejar de lado la notación obsoleta 'ln'.

Entonces f_x es acotada en cualquier franja $[-b, b] \times \mathbb{R}$. ⟦ No es difícil encontrar los extremos de la función $6x/(1+3x^2)^2$ para $x \geqslant 0$; pero bastaría aplicar la desigualdad de Cauchy $|2\sqrt{3}\, x| \leqslant 1 + 3x^2$ para concluir que $|f_x(t, x)| \leqslant b^2 \sqrt{3}$ en la franja indicada. ⟧ Entonces el Teorema 1.15 garantiza que el problema (1.17) tiene solución única en $[-b, b]$. Como b es arbitrario, la solución existe y es única en todo $\mathbb{R}$.

Además, la función $y = p(x) \equiv x + x^3$ es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$. Por lo tanto, posee una función inversa $x = q(y)$, también estrictamente creciente, con $q(0) = 0$. Entonces la solución única coincide con $x(t) = q(t^3/3)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. ◊

Ejemplo 1.19. El crecimiento de una población biológica $x(t)$ con tasa de crecimiento k no puede ser descrito por la ecuación lineal $x' = k\,x$, porque esto produciría un crecimiento exponencial ilimitada $x(t) = A\,e^{kt}$. Ese modelo erróneo, sugerido por Thomas Malthus en 1798, fue modificado por Jean-François Verhulst en 1838 para tomar en cuenta las limitaciones ambientales. Verhulst sugirió la **ecuación logística**:

$$x'(t) = x(k - mx), \quad \text{con} \quad k > 0,\ m > 0, \tag{1.18}$$

donde el término negativo $-mx^2$ tiende a frenar el ritmo de crecimiento.

Hay dos soluciones triviales: $x(t) \equiv 0$ (cero población) y $x(t) \equiv k/m$ (población estable) que corresponden a las raíces de la función $g(x) := x(k - mx)$. En ambos casos $x'(t) \equiv 0$: estas son "soluciones de equilibrio". Se busca, entonces, soluciones que corresponden a valores iniciales $x(0)$ con $0 < x(0) < k/m$.

La ecuación logística es separable:

$$\int \frac{dx}{x(k - mx)} = \int dt + C.$$

Usando fracciones parciales, esta relación se convierte en

$$\frac{1}{k} \int \frac{dx}{x} + \frac{m}{k} \int \frac{dx}{k - mx} = \int dt + C,$$

así que

$$\frac{1}{k} \log|x| - \frac{1}{k} \log|k - mx| = \frac{1}{k} \log\left|\frac{x}{k - mx}\right| = t + C.$$

Esto implica que

$$\frac{x}{k - mx} = A\,e^{kt} \quad \text{donde} \quad A := \frac{x(0)}{k - mx(0)}\,.$$

Es fácil despejar la ecuación $x = A\,e^{kt}(k - mx)$:

$$x(t) = \frac{Ak\,e^{kt}}{1 + Am\,e^{kt}}\,.$$

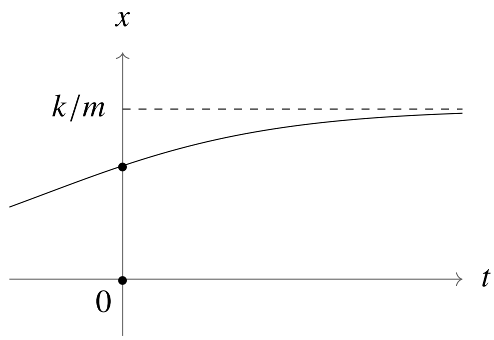

Figura 1.4: Una solución a $x'(t) = x(k - mx)$ con $0 < x(0) < k/m$

Para $0 < x(0) < k/m$, se ve que $A > 0$ y además $0 < x(t) < k/m$ para $0 < t < \infty$. Entonces el lado derecho de (1.18) es positivo, así que $t \mapsto x(t)$ es estrictamente creciente para $0 \leqslant t < \infty$. Luego, al tomar el límite cuando $t \to +\infty$, se obtienen las cotas

$$0 < x(t) < \lim_{t\to\infty} \frac{Ak\, e^{kt}}{1 + Am\, e^{kt}} = \frac{k}{m}\,.$$

Este modelo sugiere que la población biológica se aproximará a un tamaño máximo k/m en vez de seguir creciendo sin límite: véase la Figura 1.4. ◊

1.3.2 Ecuaciones exactas

Una familia de curvas disjuntas en el plano $\mathbb{R}^2$ – con coordenadas cartesianas (x, y) – se describe por la ecuación

$$F(x, y) = C, \tag{1.19}$$

donde el valor de la constante C distingue una de las curvas de la familia. Así, por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 = k^2$ caracteriza la familia de círculos centrados en el origen; al fijar un valor de k, se obtiene un círculo de radio k. Si F es una función diferenciable, se puede suprimir la mención de la constante al tomar la **diferencial** de los dos lados:

$$dF(x, y) \equiv F_x(x, y)\, dx + F_y(x, y)\, dy = 0. \tag{1.20}$$

La diferencial expresa, en forma compacta, la *regla de la cadena* para funciones diferenciables de varias variables. En efecto, si una curva de la familia (1.19) está parametrizada por $t \mapsto (x(t), y(t))$, entonces la ecuación $F(x(t), y(t)) = C$ puede ser expresada mediante su derivada:[13]

$$0 = \frac{d}{dt}(C) = \frac{d}{dt}\big[F(x(t), y(t))\big] = F_x(x(t), y(t))\, x'(t) + F_y(x(t), y(t))\, y'(t)$$

al aplicar la regla de la cadena. En forma abreviada:

$$F_x(x, y)\,\frac{dx}{dt} + F_y(x, y)\,\frac{dy}{dt} = 0.$$

La ecuación (1.20) es sinónima a esta, al suprimir la mención de la parametrización.

La regla de la cadena entonces autoriza la manipulación formal de las diferenciales dx, dy, dt, etcétera, análogamente a la simplificación de integrales "por sustitución" mediante un cambio de variable.

► Es posible plantear una ecuación diferencial (sin condición inicial) en la forma

$$\boxed{M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0.} \tag{1.21}$$

Esta relación es sinónimo a cualquiera de las dos ecuaciones:

$$M(x, y) + N(x, y)\,\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{o bien} \quad M(x, y)\,\frac{dx}{dy} + N(x, y) = 0,$$

dependiendo de cual de las dos variables depende de la otra: la primera opción se usa si $y = y(x)$ y la segunda si $x = x(y)$. Si estas dos funciones son biyectivas, cada una de ellas es la función inversa de la otra; y las dos opciones son equivalentes.

Dícese que (1.21) es una **ecuación diferencial exacta** si resulta ser de la forma (1.20); es decir, si existe una función diferenciable $F(x, y)$ tal que $F_x = M$, $F_y = N$.

La *solución general* de la ecuación exacta (1.20) es la *familia de curvas* $F(x, y) = C$ de (1.19). Cuando sea posible expresar esta relación en la forma $F(x, y(x)) = C$ para alguna función $y = y(x)$ [o bien $F(x(y), y) = C$ para alguna función $x = x(y)$], la función $y(x)$ [resp., $x(y)$] también puede considerarse como una solución de esta ecuación diferencial.

Lema 1.20. *Si M y N son dos funciones continuamente diferenciables*[14] *en un rectángulo abierto $\Omega = (a, b) \times (c, d) \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces la expresión $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$ es una diferencial exacta si y solo si se cumple la siguiente condición de compatibilidad:*

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \quad \textit{para todo} \quad (x, y) \in \Omega. \tag{1.22}$$

[13] Aquí se supone implícitamente que la función $F(x, y)$ es diferenciable y que la parametrización $t \mapsto (x(t), y(t))$ es también diferenciable.

[14] Se debe recordar que una función $G(x, y)$, definido en una parte abierta de $\mathbb{R}^2$, es **continuamente diferenciable** si las derivadas parciales G_x y G_y son funciones continuas en el dominio de G. Esta condición implica que G sea diferenciable.

Demostración. Ad $\Longrightarrow$: Si $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable tal que $F_x(x,y) = M(x,y)$ y $F_y(x,y) = N(x,y)$ para todo $(x,y) \in \Omega$, entonces F de hecho es dos veces continuamente diferenciable en Ω. La condición de compatibilidad se reduce a la igualdad

$$F_{xy}(x,y) = F_{yx}(x,y) \quad \text{para} \quad (x,y) \in \Omega,$$

Un teorema básico del cálculo diferencial asegura que estas derivadas parciales mixtas de segundo orden coinciden, $F_{xy} \equiv F_{yx}$, toda vez que existen y sean continuas, como en el caso presente.

Ad $\Longleftarrow$: Si se verifica la condición (1.22), es necesario obtener una función F tal que $F_x = M$ y $F_y = N$. Sea (x_0, y_0) un punto de Ω, arbitrario pero fijo. Defínase

$$F(x,y) := \int_{x_0}^{x} M(u, y_0)\,du + \int_{y_0}^{y} N(x, v)\,dv. \tag{1.23}$$

El teorema fundamental del cálculo da la derivada parcial de F con respecto a x:

$$\begin{aligned} F_x(x,y) &= M(x,y_0) + \frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y} N(x,v)\,dv \\ &= M(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial}{\partial x} N(x,v)\,dv = M(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} N_x(x,v)\,dv \\ &= M(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} M_y(x,v)\,dv = M(x,y). \end{aligned}$$

El intercambio de $\partial/\partial x$ con $\int_{y_0}^{y}$ es válido porque los integrandos $N(x,v)$ y $N_x(x,v)$ son continuas.

La derivada parcial de F con respecto a y también viene del teorema fundamental del cálculo; nótese que la primera integral en (1.23) no depende de y:

$$F_y(x,y) = 0 + \frac{\partial}{\partial y}\int_{y_0}^{y} N(x,v)\,dv = N(x,y).$$

Las derivadas parciales $F_x = M$ y $F_y = N$ son funciones continuas, así que F es continuamente diferenciable, con $dF := F_x\,dx + F_y\,dy = M\,dx + N\,dy$. $\square$

⟦ Cabe mencionar que el lado derecho de (1.23) representa una *integral de línea* de la forma diferencial $M\,dx + N\,dy$ sobre una camino de dos segmentos consecutivos, desde (x_0, y_0) pasando por (x, y_0) hasta llegar a (x,y). Ese camino queda dentro del rectángulo Ω, naturalmente. Cualquier otro camino de integración C *dentro del rectángulo* Ω, con los mismos puntos inicial y final, produciría el mismo resultado $F(x,y)$: la integral

$\int_C M\,dx + N\,dy$ es "independiente del camino" si se cumple (1.22). En consecuencia, el Lema 1.20 es válido para otros dominios Ω que son "simplemente conexos": si C es una curva simple cerrada en Ω, la región encerrada por C también es parte de Ω. ⟧

Ejemplo 1.21. Considérese la ecuación diferencial:

$$2xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0.$$

Aquí $M_y = 2x = N_x$; el lado izquierdo es una diferencial exacta.

Tanto $M(x,y)$ como $N(x,y)$ son polinomios, definidos en todo el plano $\mathbb{R}^2$. Al tomar $(x_0, y_0) = (0,0)$, la fórmula (1.23) sugiere tomar

$$F(x,y) := \int_0^x 0\,du + \int_0^y (x^2 + v^2)\,dv = x^2 y + \frac{y^3}{3}.$$

Entonces la solución es la familia de curvas

$$x^2 y + \frac{y^3}{3} = C,$$

con C una "constante arbitraria" que parametriza la familia. Nótese que el caso $C = 0$, es decir, $y(x^2 + y^2/3) = 0$, coincide con el eje x, cuya ecuación es $y = 0$. Las curvas con $C > 0$ están al lado superior ($y > 0$) del eje x.

También es posible llegar a esta solución mediante el cálculo de "antiderivadas parciales". Si $F_x(x,y) = 2xy$, entonces

$$F(x,y) = \int 2xy\,dx = x^2 y + h(y);$$

en una integración con respecto de x, la "constante de integración" puede depender de y (solamente). De ahí se obtiene

$$F_y(x,y) = x^2 + h'(y) = x^2 + y^2,$$

así que $h'(y) = y^2$. Luego $h(y) = \int y^2\,dy = y^3/3 + C$. ◊

► Si la diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ no es exacta, podría ser útil multiplicar ambos lados de la ecuación (1.21) por una función $\mu(x,y)$. Si la ecuación modificada $\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$ resulta ser exacta, dícese que $\mu(x,y)$ es un **factor integrante** de la ecuación original. ⟦ Las dos ecuaciones diferenciales son equivalentes en la regiones del plano en donde $\mu(x,y) \neq 0$. ⟧

La búsqueda de un factor integrante es un arte práctico. A veces resulta posible usar un factor integrante de una sola variable, $\mu(x)$ o bien $\mu(y)$.

Ejemplo 1.22. Considérese la ecuación diferencial:

$$x \operatorname{sen} y\, dx + (x+1) \cos y\, dy = 0.$$

Aquí $M_y = x \cos y$ pero $N_x = \cos y$; en este caso, la diferencial dada no es exacta.

Como $M_y/N_x = x$ no depende de y, vale la pena buscar un factor integrante de la forma $\mu(x)$. La ecuación diferencial modificada es

$$x\mu(x) \operatorname{sen} y\, dx + (x+1)\mu(x) \cos y\, dy = 0.$$

Ahora

$$(\mu M)_y = x\mu(x) \cos y, \quad \text{mientras} \quad (\mu N)_x = \big(\mu(x) + (x+1)\mu'(x)\big) \cos y.$$

Entonces se requiere resolver una ecuación diferencial para $\mu(x)$:

$$(x+1)\mu'(x) = (x-1)\mu(x).$$

Esta es una ecuación separable:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}\,.$$

Al integrar ambos lados con respecto a x, se obtiene

$$\log \mu(x) = \int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}\, dx = \int \Big(1 - \frac{2}{x+1}\Big)\, dx = x - 2\log(x+1) + C.$$

En este contexto, se puede suprimir la constante C de integración – se requiere un solo candidato para $\mu(x)$, no el caso general – para así obtener

$$\mu(x) = \exp\big(x - 2\log(x+1)\big) = \frac{e^x}{(x+1)^2}\,.$$

Nótese que $\mu(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, así que la ecuación diferencial dada es equivalente a la versión modificada:

$$\frac{xe^x}{(x+1)^2} \operatorname{sen} y\, dx + \frac{e^x}{x+1} \cos y\, dy = 0.$$

Se verifica fácilmente que la nueva ecuación es exacta.

La condición $F_y(x,y) = e^x \cos y/(x+1)$ implica que

$$F(x,y) = \int \frac{e^x}{x+1} \cos y\, dy = \frac{e^x}{x+1} \operatorname{sen} y + g(x),$$

y luego $F_x(x,y) = xe^x/(x+1)^2 \operatorname{sen} y + g'(x)$; se ve que $g'(x) = 0$, así que $g(x)$ es constante. Entonces la solución general es la familia de curvas

$$\frac{e^x}{x+1} \operatorname{sen} y = C.$$

Nótese que tanto la ecuación modificada como las curvas de la solución no están definidas en la recta $x = -1$. De hecho, las curvas de la solución tiene ramas separadas en los semiplanos $x > -1$ y $x < -1$. ◊

1.3.3 Ecuaciones homogéneas

Definición 1.23. Una función de dos variables $f(x,y)$ se llama **homogénea de grado n** si obedece la condición:

$$f(at, ax) = a^n f(t,x) \quad \text{para todo} \quad a > 0.$$

La ecuación diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ es una **ecuación diferencial homogénea** si las funciones M y N son homogéneas del mismo grado:

$$M(ax, ay) = a^n M(x,y), \quad N(ax,ay) = a^n N(x,y) \quad \text{para todo} \quad a > 0.$$

En tal caso, el cambio de variable $y \mapsto z$ dado por

$$y =: xz; \quad dy = z\,dx + x\,dz$$

convierte la ecuación diferencial original en una ecuación separable. ◊

En efecto, al definir $g(z) := M(1,z)$, $h(z) := N(1,z)$, la ecuación diferencial original se convierte en

$$x^n g(z)\,dx + x^n h(z)(z\,dx + x\,dz) = 0.$$

Al cancelar el factor común x^n, se obtiene

$$(g(z) - zh(z))\,dx + xh(z)\,dz = 0,$$

una ecuación separable con solución general

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{h(z)\,dz}{zh(z) - g(z)}.$$

Una ecuación diferencial de la forma $x'(t) = f(t, x(t))$ es homogénea si la función f es homogénea de grado 0, es decir, $f(at, ax) = f(t,x)$ para todo $a > 0$. Este es el caso si f es el cociente de dos funciones homogéneas del mismo grado, de tipo $f(t,x) := -M(t,x)/N(t,x)$. En tal caso, la sustitución $x \mapsto z$ dado por $x(t) =: t\,z(t)$, $x'(t) = z(t) + t\,z'(t)$ produce una ecuación diferencial separable para $z(t)$.

Ejemplo 1.24. Considérese la ecuación diferencial

$$x'(t) = \frac{t^2 + x^2}{tx}.$$

El lado derecho es una función homogénea de grado 0, por ser el cociente de dos funciones cuadráticas.

Conviene usar la sustitución $x(t) =: t\,z(t)$. La ecuación dada se convierte en

$$z + tz' = \frac{1 + z^2}{z}.$$

o bien

$$tz' = \frac{1 + z^2}{z} - z = \frac{1}{z}$$

así que $zz' = 1/t$, o bien $z\,dz = dt/t$. La solución es

$$\int 2z\,dz = \int \frac{2\,dt}{t}, \quad \text{esto es,} \quad z^2 = 2\log|t| + C.$$

La función original $x(t)$ entonces obedece

$$x(t)^2 = 2t^2 \log|t| + Ct^2.$$

Esta familia de curvas es la solución general de la ecuación dada. ◊

1.4 Sistemas de ecuaciones diferenciales

Con frecuencia hay que buscar soluciones a una ecuación diferencial *de segundo orden* con el formato:

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \tag{1.24}$$

para $t \in [a, b]$ y $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ es una función continua definida en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Hay un artificio que permite reducir este problema a *dos ecuaciones de primer orden*, al introducir una nueva variable que representa la derivada $x'(t)$ de primer orden. En efecto, si se define

$$\begin{aligned} x_1(t) &:= x(t), \\ x_2(t) &:= x'(t), \end{aligned}$$

la ecuación (1.24) es equivalente al sistema siguiente:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t), \\ x_2'(t) &= f(t, x_1(t), x_2(t)). \end{aligned} \tag{1.25}$$

Para abordar sistemas como (1.25) y otros más generales, conviene introducir una *notación vectorial*:

$$\boldsymbol{x}(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} f_1(t, \boldsymbol{x}) \\ f_2(t, \boldsymbol{x}) \end{pmatrix},$$

donde $f_1(t, x_1, x_2) \equiv x_2$ y $f_2(t, x_1, x_2) \equiv f(t, x_1, x_2)$ en el caso de marras. Entonces el sistema (1.25) se presenta bajo el formato de *una ecuación diferencial vectorial de primer orden*:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}),$$

con $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ una función continua en el dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.

Obsérvese que una condición inicial para esta ecuación diferencial vectorial debe tomar la forma $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{a}$ para algún $t_0 \in [a, b]$ y algún vector fijo $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. En otras palabras, se trata de tomar *dos condiciones iniciales* para el problema original (1.24): el requisito $\underline{x(t_0) = a_1}$ debe venir acompañado de $\underline{x'(t_0) = a_2}$. Brevemente: un problema de valor inicial de segundo orden debe prescribir tanto $x'(t_0)$ como $x(t_0)$.

► Ahora bien, el sistema (1.25) admite dos generalizaciones evidentes. En primer lugar, el componente f_1 de $\boldsymbol{f}$ podría ser más general que la mera coordenada x_2; en segundo lugar, los vectores $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{f}$ podrían tener más de dos componentes cada uno. Así, arribamos a la definición siguiente.

Definición 1.25. Sea $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una función vectorial continua, definido en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$. Escríbase $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ y tómese $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_m)$ con componentes $f_j(t, \boldsymbol{x}) = f_j(t, x_1, \dots, x_m)$ para $j = 1, 2, \dots, m$. Un **problema de valor inicial** (o un *problema de Cauchy*) determinado por esta función tiene la forma

$$\boxed{\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{a}} \tag{1.26}$$

con algún vector fijo $(t, \boldsymbol{a}) \in \Omega$. Se trata de hallar un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que $t_0 \in I$ y una función diferenciable $\boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}^m$ tal que $(t, \boldsymbol{x}(t)) \in \Omega$ para todo $t \in I$, que satisfaga (1.26) para todo $t \in I$. ◊

Debe ser claro que los teoremas de existencia y unicidad anteriores tiene extensiones naturales a los problemas naturales de tipo (1.26), con algunas adaptaciones de notación para el caso vectorial. Para extender los teoremas de Picard (el Teorema 1.15 y su Corolario 1.16), solo hace falta aclarar el concepto de función lipschitziana en el contexto vectorial, antes de repetir la demostración de esos teoremas casi verbatim. Esa tarea se simplifica al adoptar la "norma rectangular" en el espacio vectorial $\mathbb{R}^m$.

Cabe recordar que una **norma** sobre $\mathbb{R}^m$ es una función $\boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\|$ que cumple estas tres propiedades:

$$\|t\boldsymbol{x}\| = |t|\,\|\boldsymbol{x}\|; \qquad \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|; \qquad \|\boldsymbol{x}\| > 0 \text{ si } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}.$$

(Nótese que $\|\boldsymbol{0}\| = 0$, al tomar $t = 0$.) Hay tres normas de especial interés:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\|_1 &:= |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_m|; \\
\|\boldsymbol{x}\|_2 &:= \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2}\,; \\
\|\boldsymbol{x}\|_\infty &:= \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_m|\}.
\end{aligned}$$

Estas normas son *equivalentes*: una bola de radio finito $\{\, \boldsymbol{x} : \|\boldsymbol{x}\| \leqslant R \,\}$ para cualquiera de ellas está incluido en una bola de cualquier otra: de modo que las tres normas definen el mismo concepto de "conjunto acotado" en $\mathbb{R}^m$. Esto es consecuencia del lema siguiente.

Lema 1.26. *Para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, se cumplen las desigualdades:*

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant m\|\boldsymbol{x}\|_\infty \quad \textit{para todo} \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m.$$

Demostración. Para verificar estas inecuaciones, basta considerar vectores $\boldsymbol{x}$ con $x_j \geqslant 0$ para $j = 1, \dots, m$. La primera y segunda de estas desigualdades son obvias; y la tercera resulta de $|x_j| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_\infty$ para cada j.

Los factores de proporcionalidad son óptimas: al tomar $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 := (1, 0, \dots, 0)$, se ve que $\|\boldsymbol{e}_1\|_\infty = \|\boldsymbol{e}_1\|_2 = \|\boldsymbol{e}_1\|_1$. Para $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} := (1, 1, \dots, 1)$, vale $\|\boldsymbol{u}\|_1 = m\|\boldsymbol{u}\|_\infty$. □

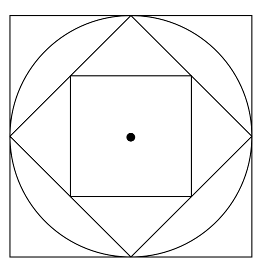

Figura 1.5: Bolas encajadas en $\mathbb{R}^2$

Si $\overline{B}_p(\boldsymbol{x}; \delta) := \{\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_p \leqslant \delta \,\}$ denota la *bola cerrada* con respecto a la norma $\|\cdot\|_p$ con centro $\boldsymbol{x}$ y "radio" $\delta > 0$, el Lema 1.26 muestra que

$$\overline{B}_\infty(\boldsymbol{x}; \delta/m) \subset \overline{B}_1(\boldsymbol{x}; \delta) \subset \overline{B}_2(\boldsymbol{x}; \delta) \subset \overline{B}_\infty(\boldsymbol{x}; \delta),$$

es decir, estas bolas están encajadas: véase la Figura 1.5.

Para analizar sistemas de ecuaciones diferenciales, conviene usar la “norma max” $\|\cdot\|_\infty$ en vez de la norma euclidiana $\|\cdot\|_2$. En adelante, el símbolo $\|\cdot\|$ – sin subíndice – denotará la norma max.

► Ahora bien, los resultados de la Sección 1.2 siguen válidos para sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$, una función $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ se llama *lipschitziana* en un vecindario cerrado $\overline{V} \subset \Omega$ de $(t_0, \boldsymbol{a}) \in \Omega$ si hay una constante $L > 0$ tal que

$$\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})\| \leqslant L\,\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \quad \text{para todo} \quad (t,\boldsymbol{x}),\ (t,\boldsymbol{y}) \in \overline{V}.$$

Se definen aproximaciones sucesivas a una solución del problema de Cauchy (1.26) por una versión de la fórmula (1.9):

$$\boldsymbol{x}_0(t) := \boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{x}_{k+1}(t) := \boldsymbol{a} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_k(s))\,ds.$$

Esto permite enunciar versiones vectoriales de los teoremas de existencia y unicidad.

Proposición 1.14′. *Sea $\boldsymbol{f}\colon [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ una función continua y lipschitziana. Entonces las aproximaciones sucesivas $\boldsymbol{x}_k$ convergen uniformemente en el intervalo $[a,b]$ a una función continua $\boldsymbol{x}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$.* ⊟

Teorema 1.15′ (Picard)**.** *Sea $\boldsymbol{f}\colon [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ una función continua y lipschitziana. Entonces el problema de valor inicial:*

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{a}$$

posee una solución única, definida en todo el intervalo $[a,b]$. ⊟

Corolario 1.16′. *Sea $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ una función continua y lipschitziana, definida en el rectángulo compacto*

$$\overline{V} := \{\, (t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{m+1} : |t - t_0| \leqslant \delta,\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant \varepsilon \,\},$$

y sea $M := \sup\{\, \|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\| : (t,\boldsymbol{x}) \in \overline{V} \,\}$. El problema de valor inicial (1.26) *posee una solución única, definida en el intervalo $I = [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$, donde $\eta := \min\{\delta, \varepsilon/M\}$.* ⊟

Teorema 1.8′. *Sea $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ una función continua, definida en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$, con derivadas parciales continuas $f_{x_1}, \dots, f_{x_m}$ respecto de las variables de $\mathbb{R}^m$. Sea $(t_0, \boldsymbol{a})$ un punto interior de Ω. Entonces hay un intervalo cerrado $I \subseteq \mathbb{R}$ con t_0 un punto interior de I, tal que el problema de valor inicial*

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{a}$$

tenga solución única $\boldsymbol{x}(t)$ para $t \in I$. ⊟

2 Ecuaciones diferenciales lineales

Definición 2.1. Una ecuación diferencial ordinaria de orden n,

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t), x^{(n)}(t)) = 0,$$

se llama **lineal** si la función f es un polinomio de primer grado en todas las variables salvo la primera. En otros términos, una ecuación diferencial es lineal, de orden n, si tiene el formato:

$$a_0(t)\, x^{(n)}(t) + a_1(t)\, x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)\, x'(t) + a_n(t)\, x(t) = g(t), \tag{2.1}$$

donde $a_0(t), \dots, a_n(t)$ y $g(t)$ son funciones continuas,[1] definidas en un intervalo cerrado,[2] $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Las funciones $a_0(t), \dots, a_n(t)$ son los **coeficientes** de esta ecuación lineal.

La ecuación diferencial lineal (2.1) se llama **homogénea** si $g(t) \equiv 0$; en cambio, dícese que (2.1) es **inhomogénea** si $g(t)$ no es nula. ◊

La ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$a_0(t)\, x'(t) + a_1(t)\, x(t) = g(t),$$

se resuelve por los métodos de la Sección 1.3. Se debe notar que esta ecuación es problemática (**singular**, se dice) si el intervalo de definición de $x(t)$ contiene un valor t_1 tal que $a_0(t_1) = 0$. Es prudente dejar esos casos de lado, por ahora: *se asumirá que la función $a_0(t)$ no se anula* para $t \in [a, b]$. Entonces conviene dividir por $a_0(t)$; la ecuación diferencial lineal de primer orden es generalmente de la forma

$$\boxed{x'(t) + p(t)\, x(t) = h(t),} \tag{2.2}$$

donde p y h son funciones continuas definidas en un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Con $f(t, x) := h(t) - p(t)x$, se obtiene $f_x(x, t) = -p(t)$. La condición de Lipschitz

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |p(t)|\, |x - y| \leqslant L\, |x - y|$$

[1]La continuidad de estas funciones solo es necesario para poder aplicar los teoremas de existencia y unicidad del capítulo anterior. Ciertamente es posible plantear ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes discontinuas.

[2]En este capítulo $\underline{[a, b]}$ denotaré un *intervalo cerrado* de $\mathbb{R}$, no necesariamente compacto. Es decir, la notación $[a, b]$ podría denotar un intervalo acotado, pero también los casos $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ y $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ de intervalos cerrados no acotados. El *interior* de este intervalo, denotado por $\underline{(a, b)}$, comprende también los casos (a, ∞), $(-\infty, b)$ y $(-\infty, \infty)$.

se verifica, al tomar $L := \sup\{\, |p(t)| : a \leqslant t \leqslant b \,\}$; esta cota es finita por la continuidad de p. Entonces el Teorema 1.15 garantiza la existencia y unicidad de la solución a un problema de valor inicial en el intervalo $[a, b]$.

Para *encontrar* dicha solución, se puede emplear un *factor integrante* $\underline{\mu(t)}$ que depende de t solamente. Escríbase

$$\mu(t)\, x'(t) + \mu(t)\, p(t)\, x(t) = \mu(t)\, h(t).$$

El lado izquierda es una derivada total,

$$\mu(t)\, x'(t) + \mu(t)\, p(t)\, x(t) = \frac{d}{dt}\bigl(\mu(t)\, x(t)\bigr),$$

si $\mu'(t) = \mu(t)\, p(t)$, o bien $\mu'(t)/\mu(t) = p(t)$. Esta es una ecuación separable, con solución

$$\log \mu(t) = \int \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}\, dt = \int p(t)\, dt =: P(t),$$

si $P(t)$ es una *primitiva* (es decir, antiderivada) de $p(t)$. Entonces, con el factor integrante

$$\mu(t) := e^{P(t)} \equiv \exp\Bigl(\int^t p(s)\, ds\Bigr), \tag{2.3}$$

se llega a la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}\bigl(\mu(t)\, x(t)\bigr) = \mu(t)\, h(t),$$

cuya solución elemental resuelve la ecuación original (2.2):

$$x(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int^t h(s)\, ds + \frac{C}{\mu(t)}\,. \tag{2.4}$$

Ejemplo 2.2. La ecuación de crecimiento simple (1.3):

$$x'(t) = k\, x(t),$$

es lineal y homogénea: a partir de $x'(t) - k\, x(t) = 0$, se ve que $p(t) \equiv -k$; una primitiva de esta es $P(t) = -kt$. Entonces $\mu(t) := e^{-kt}$ es un factor integrante:

$$\frac{d}{dt}\bigl(x(t)\, e^{-kt}\bigr) = 0,$$

con solución general $x(t) = C/\mu(t) = C\, e^{kt}$. Esta es una recapitulación del Ejemplo 1.3 anterior. ◊

Ejemplo 2.3. Se busca la solución general de la ecuación diferencial lineal inhomogénea

$$t^2 x'(t) + t\, x(t) = t^4 + t^2.$$

En primer lugar, se debe notar que esta ecuación es singular en $t = 0$, donde el coeficiente de $x'(t)$ se anula. Por ende hay que buscar soluciones válidas para $t > 0$; y para $t < 0$, por separado. Tómese $t > 0$; entonces, al dividir por t^2, se obtiene

$$x'(t) + \frac{1}{t}\, x(t) = t^2 + 1.$$

Ahora $p(t) = 1/t$ tiene primitiva $P(t) := \log t$ para $t > 0$. Por lo tanto, $\mu(t) := e^{\log t} = t$ es un factor integrante. En efecto, $t\, x'(t) + x(t) \equiv d/dt\big(t\, x(t)\big)$ es una derivada total. Luego,

$$\frac{d}{dt}\big(t\, x(t)\big) = t^3 + t \implies t\, x(t) = \int^t (s^3 + s)\, ds = \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + C_1$$

da la solución general

$$x(t) = \frac{t^3}{4} + \frac{t}{2} + \frac{C_1}{t} \quad \text{para} \quad t > 0.$$

En el intervalo $t < 0$, se procede del mismo modo. Aquí, sin embargo, $p(t) = 1/t$ tiene primitiva $P(t) := \log|t| = \log(-t)$ y el factor integrante (¡positivo!) es $\mu(t) = -t$. La ecuación reformulada es

$$\frac{d}{dt}\big(-t\, x(t)\big) = -t^3 - t,$$

de donde es evidente que la misma fórmula $x(t) = t^3/4 + t/2 + C_2/t$ también describe la rama de la solución general con $t < 0$. Las constantes C_1 y C_2 no son necesariamente iguales. ◊

2.1 Ecuaciones lineales homogéneas

Considérese una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden:

$$\boxed{x''(t) + p(t)\, x'(t) + q(t)\, x(t) = 0.} \tag{2.5}$$

Al poner $y(t) := x'(t)$, este es equivalente a un sistema de dos ecuaciones lineales homogéneas de primer orden:

$$\begin{aligned} x'(t) - y(t) &= 0, \\ y'(t) + p(t)y(t) + q(t)x(t) &= 0; \end{aligned}$$

que se puede expresar también en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q(t) & p(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Un problema de valor inicial para la ecuación (2.5) tiene la forma:

$$x''(t) + p(t)\,x'(t) + q(t)\,x(t) = 0; \qquad x(t_0) = x_0\,, \quad x'(t_0) = y_0\,.$$

El Teorema 1.15′ garantiza la existencia y unicidad de su solución en un intervalo compacto $a \leqslant t \leqslant b$.

Obsérvese que si las condiciones iniciales son ceros:

$$x(t_0) = 0, \quad x'(t_0) = 0,$$

entonces esta solución única debe ser la **solución nula** $x(t) \equiv 0$.

Estas consideraciones también son válidas en ecuaciones de orden superior. La ecuación diferencial lineal homogénea de orden n tiene la forma:

$$x^{(n)}(t) + p_1(t)\,x^{(n-1)}(t) + \cdots + p_{n-1}(t)\,x'(t) + p_n(t)\,x(t) = 0. \tag{2.6}$$

Si $\boldsymbol{x}(t) := (x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \in \mathbb{R}^n$, esta ecuación se transforma en una ecuación vectorial:

$$\boldsymbol{x}'(t) + P(t)\,\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0}, \tag{2.7}$$

donde $P(t)$ es una matriz $n \times n$ cuyas entradas incluyen los coeficientes $p_j(t)$ de la ecuación original. La condición inicial $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{a}$ se manifiesta como n condiciones iniciales para la ecuación (2.6):

$$x(t_0) = a_1, \quad x'(t_0) = a_2, \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = a_n\,.$$

En particular, si $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, la solución nula $x(t) \equiv 0$ es la solución única correspondiente.

► Conviene dejar de lado, por un rato, el asunto de valores iniciales y enfocar la ecuación homogénea (2.6) cuya *solución general* debe ser una familia de funciones con n parámetros reales $c_1, c_2, \dots, c_n$ – las llamadas “constantes arbitrarias” – por ser la ecuación de n-ésimo orden. ⟦ Su versión vectorial (2.7) tendrá un solo parámetro, por ser de primer orden; pero ese parámetro es un vector $(c_1, \dots, c_n)$ que combina los n parámetros de la ecuación original. ⟧

La *linealidad* de la ecuación homogénea (2.6) tiene la siguiente consecuencia de enorme importancia.

Lema 2.4. *Las soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea forman un espacio vectorial (sobre* $\mathbb{R}$*).*

Demostración. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos soluciones de la ecuación (2.6). Fórmese una combinación lineal $x(t) := c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} x'(t) &= c_1 x_1'(t) + c_2 x_2'(t), \\ x''(t) &= c_1 x_1''(t) + c_2 x_2''(t), \\ \vdots \quad &\qquad \vdots \\ x^{(n)}(t) &= c_1 x_1^{(n)}(t) + c_2 x_2^{(n)}(t). \end{aligned}$$

Al sustituir estas expresiones en el lado izquierdo de la fórmula (2.6), se obtiene

$$x^{(n)}(t) + p_1(t)\, x^{(n-1)}(t) + \cdots + p_{n-1}(t)\, x'(t) + p_n(t)\, x(t) = c_1(0) + c_2(0) = 0,$$

después de combinar los términos con derivadas de x_1 y x_2. En resumen: cualquier combinación lineal de dos soluciones de (2.6) es también una solución. □

Obsérvese que los “vectores” de este espacio vectorial son funciones $t \mapsto x(t)$, definidos en un intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.5. Considérese de nuevo el oscilador armónico del Ejemplo 1.4:

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Esta ecuación es (1.4a), escrito ya en el formato de (2.5). Se conoce dos soluciones: $x_1(t) := \operatorname{sen} \omega t$ y $x_2(t) := \cos \omega t$. El Lema 2.4 asegura que hay una familia de soluciones, dadas por (1.5):

$$x(t) = c_1 \operatorname{sen} \omega t + c_2 \cos \omega t, \quad \text{con} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Es evidente que las dos soluciones particulares, $\operatorname{sen} \omega t$ y $\cos \omega t$, son linealmente independientes, pues ninguna de ellas es un múltiplo de la otra. ◊

Definición 2.6. Sean $g, h \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables definidas en un intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. El **wronskiano** de este par de funciones la función $W(g, h) \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ dado por

$$W(g, h)(t) := \begin{vmatrix} g(t) & h(t) \\ g'(t) & h'(t) \end{vmatrix} \equiv g(t)\, h'(t) - g'(t)\, h(t). \tag{2.8}$$

Más generalmente, si $g_1, \dots, g_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones $(n-1)$ veces diferenciables, definidas en un intervalo común $[a,b]$, su wronskiano es el determinante

$$W(g_1,\dots,g_n)(t) := \begin{vmatrix} g_1(t) & g_2(t) & \dots & g_n(t) \\ g_1'(t) & g_2'(t) & \dots & g_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1^{(n-1)}(t) & g_2^{(n-1)}(t) & \dots & g_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}. \tag{2.9}$$

Si no hay ambigüedad, se puede denotar esta función por $W(t)$. ◊

Si g y h son linealmente dependientes, de modo que $h(t) = c\,g(t)$ [o bien $g(t) = c\,h(t)$] para alguna constante $c \in \mathbb{R}$, entonces $h'(t) = c\,g'(t)$ [respectivamente, $g'(t) = c\,h'(t)$], entonces $W(g,h)(t) \equiv 0$.

En el caso de n funciones linealmente dependientes, sin perder generalidad se puede suponer que $g_n(t) = c_1 g_1(t) + \cdots + c_{n-1} g_{n-1}(t)$. Las derivadas de orden superior siguen el mismo patrón: $g_n^{(k)}(t) = c_1 g_1^{(k)}(t) + \cdots + c_{n-1} g_{n-1}^{(k)}(t)$ para $k = 1,\dots,n-1$. Como resultado, la última columna del determinante (2.9) es una combinación lineal de las otras; y por ende, el determinante es nulo: $W(g_1,\dots,g_n)(t) \equiv 0$. En resumen: *el wronskiano de un juego de funciones linealmente dependientes es nulo*.

Ejemplo 2.7. Considérese las dos funciones diferenciables $g, h \colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ dadas por $g(t) := t^3$ y $h(t) := |t^3|$. Evidentemente, no son proporcionales en todo el intervalo $[-1,1]$, así que son linealmente independientes. Sin embargo, su Wronskian es nula:

$$W(g,h)(t) = \begin{vmatrix} t^3 & t^3 \\ 3t^2 & 3t^2 \end{vmatrix} = 0, \text{ si } t \geqslant 0; \quad W(g,h)(t) = \begin{vmatrix} t^3 & -t^3 \\ 3t^2 & -3t^2 \end{vmatrix} = 0, \text{ si } t \leqslant 0.$$

Entonces la nulidad del wronskiano es una condición necesaria, pero no suficiente, para que dos funciones sean linealmente dependientes. ◊

Afortunado, este contraejemplo 2.7 no es relevante *si se limita la atención a soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea*, en vez de funciones diferenciables cualesquiera. Esto es el resultado de una fórmula de Abel, que expresa el wronskiano en términos de los coeficientes de esa ecuación.

Proposición 2.8 (Abel)**.** *Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son dos soluciones de la ecuación diferencial*

$$x''(t) + p(t)\,x'(t) + q(t)\,x(t) = 0,$$

con coeficientes continuas $p, q \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, su wronskiano $W(t) \equiv W(x_1,x_2)(t)$ cumple

$$W(t) = C\,e^{-P(t)}, \quad \text{donde} \quad P(t) = \int_a^t p(s)\,ds, \tag{2.10}$$

para alguna constante $C \in \mathbb{R}$.

Demostración. El wronskiano y su derivada cumplen

$$\begin{aligned} W(t) &= x_1(t)\,x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t), \\ W'(t) &= x_1(t)\,x_2''(t) - x_1''(t)x_2(t). \end{aligned}$$

Al simplificar $x_2''(t)$ y $x_1''(t)$ con el uso de la ecuación diferencial, se obtiene

$$\begin{aligned} W'(t) &= -x_1(t)\big(p(t)\,x_2'(t) + q(t)\,x_2(t)\big) + \big(p(t)\,x_1'(t) + q(t)\,x_1(t)\big)x_2(t) \\ &= -p(t)\big(x_1(t)\,x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)\big) \\ &= -p(t)\,W(t). \end{aligned}$$

Esta ecuación diferencial $W'(t) + p(t)\,W(t) = 0$ tiene la forma (2.2) – con cero al lado derecho – y por lo tanto puede ser resulto con el factor integrante $\mu(t) = e^{P(t)}$. Se obtiene $W(t) = C/\mu(t) = C\,e^{-P(t)}$, como caso particular de la fórmula (2.4). □

Corolario 2.9. *Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son dos soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, su wronskiano $W(x_1, x_2)(t)$ bien es idénticamente nulo, o bien nunca se anula. Luego, estas dos soluciones son linealmente dependientes* si y solo si $W(x_1, x_2)(t) \equiv 0$.

Demostración. El wronskiano tiene la forma $W(t) = C\,e^{-P(t)}$ donde el segundo factor es positivo para todo t. Luego $W(t) \equiv 0$ si $C = 0$; pero $W(t) \neq 0$ para todo t si $C \neq 0$.

Ahora bien, x_1 y x_2 son linealmente dependientes si y solo si hay constantes c_1, c_2, con $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, tales que $c_1\,x_1(t) + c_2\,x_2(t) \equiv 0$ para t en el intervalo $[a, b]$. Al tomar la derivada de ambos lados, también vale $c_1\,x_1'(t) + c_2\,x_2'(t) \equiv 0$ para $t \in (a, b)$. Entonces, para cualquier $t_0 \in (a, b)$, el sistema de ecuaciones (algebraicas) lineales:

$$\begin{aligned} c_1\,x_1(t_0) + c_2\,x_2(t_0) &= 0 \\ c_1\,x_1'(t_0) + c_2\,x_2'(t_0) &= 0 \end{aligned}$$

tiene una solución no nula (c_1, c_2). Por ende, el determinante de sus coeficientes es cero:

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Recapitulando: x_1 y x_2 son linealmente dependientes si y solo si $W(t_0) = 0$ para *algún* $t_0 \in (a, b)$; si y solo si $W(t) \equiv 0$ para *todo* $t \in (a, b)$. □

Teorema 2.10. *La solución general de la ecuación diferencial*

$$x''(t) + p(t)\,x'(t) + q(t)\,x(t) = 0,$$

con coeficientes continuas $p, q \colon [a,b] \to \mathbb{R}$*, satisface:*

$$\boxed{x(t) \equiv c_1\, x_1(t) + c_2\, x_2(t),}$$

donde x_1 *y* x_2 *son dos soluciones particulares, linealmente independientes.*

Demostración. Tómese $t_0 \in (a,b)$. Con las condiciones iniciales

$$x_1(t_0) = 1, \quad x_1'(t_0) = 0; \qquad x_2(t_0) = 0, \quad x_2'(t_0) = 1,$$

existen soluciones únicas $x_1 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ y $x_2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ que cumplen estas condiciones respectivas. Evidentemente, estas funciones no son proporcionales, porque no son proporcionales en el punto t_0. Por lo tanto, x_1 y x_2 son soluciones linealmente independientes.

Ahora sea $x \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una solución cualquiera de la ecuación dada (2.5). Sea $c_1 := x(t_0)$ y $c_2 := x'(t_0)$. Entonces la combinación lineal

$$y(t) := x(t) - c_1\, x_1(t) - c_2\, x_2(t)$$

es también una solución, por el Lema 2.4. Esta solución cumple $y(t_0) = y'(t_0) = 0$; como tal, esta es la solución nula, $y(t) \equiv 0$, como se quería comprobar. □

En síntesis: el espacio vectorial real de las soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden (2.5) tiene dimensión 2.

► La fórmula (2.10) para el wronskiano de dos soluciones permite relacionar dos soluciones independientes: si se conoce una solución $x_1(t)$, se puede obtener una ecuación (lineal y homogénea) de primer orden para la otra solución $x_2(t)$, la cual se resuelve en seguida: esta proceso se llama la *reducción de orden* de la ecuación original.

Proposición 2.11. *Si se conoce una solución* $x_1(t)$ *de la ecuación lineal homogénea*

$$x''(t) + p(t)\, x'(t) + q(t)\, x(t) = 0,$$

tal que $x_1(t) \neq 0$ *para* $t \in [a,b]$*, defínase* $w(t) := e^{-P(t)}$ *donde* $P(t) := \int^t p(s)\, ds$ *es una primitiva del coeficiente* $p(t)$*. Entonces la fórmula*

$$x_2(t) := x_1(t) \int^t \frac{w(s)}{x_1(s)^2}\, ds \tag{2.11}$$

representa otra solución de la ecuación diferencial dada; y las soluciones x_1 *y* x_2 *son linealmente independientes.*

Demostración. Se quiere encontrar una segunda solución de la forma $x_2(t) = u(t)\, x_1(t)$ donde u es una función no constante. Entonces la ecuación dada toma la forma

$$\big(u''(t)x_1(t) + 2u'(t)x_1'(t) + u(t)x_1''(t)\big) + p(t)\big(u'(t)x_1(t) + u(t)x_1'(t)\big) + q(t)u(t)x_1(t) = 0,$$

o bien, al reorganizar los términos:

$$u''(t)x_1(t) + u'(t)\big(2x_1'(t) + p(t)x_1(t)\big) + u(t)\big(x_1''(t) + p(t)x_1'(t) + q(t)x_1(t)\big) = 0.$$

En la última expresión, el múltiplo de $u(t)$ se anula porque $x_1(t)$ es una solución de la ecuación dada. Colóquese $v(t) := u'(t)$. Entonces se obtiene

$$v'(t)x_1(t) + v(t)\big(2x_1'(t) + p(t)x_1(t)\big) = 0$$

Esta es una ecuación diferencial, lineal y homogénea, y *de primer orden* para la función desconocida $v(t)$. Al dividir por $x_1(t)$, se obtiene

$$v'(t) + \left(2\frac{x_1'(t)}{x_1(t)} + p(t)\right)v(t) = 0.$$

De acuerdo con (2.3), esta ecuación posee un factor integrante $\mu(t)$, donde

$$\log \mu(t) = \int^t \left(2\frac{x_1'(s)}{x_1(s)} + p(s)\right) ds = 2 \log x_1(t) + P(t),$$

así que $\mu(t) = x_1(t)^2 e^{P(t)} = x_1(t)^2/w(t)$. En consecuencia,

$$u'(t) = v(t) = \frac{C}{\mu(t)} = C\frac{w(t)}{x_1(t)^2}$$

Como se busca una solución particular $x_2(t)$, se puede tomar $C = 1$ y tomar una primitiva del lado derecho:

$$u(t) = \int^t \frac{w(s)}{x_1(s)^2}\, ds,$$

de donde (2.11) es inmediato. □

Ejemplo 2.12. La ecuación lineal homogénea

$$x''(t) - \frac{1}{t}\, x'(t) + \frac{1}{t^2}\, x(t) = 0,$$

definida en el intervalo $(0, \infty)$, tiene una solución "obvia", la cual es $x_1(t) = t$.

En este caso $P(t) = -\int^t ds/s = -\log t$, así que $w(t) = e^{-P(t)} = e^{\log t} = t$. Entonces

$$x_2(t) = t \int^t \frac{s}{s^2}\, ds = t \int^t \frac{ds}{s} = t \log t.$$

Entonces la solución general a la ecuación dada es $x(t) = c_1\, t + c_2\, t \log t$, para $t > 0$. ◊

► Las consideraciones para ecuaciones de orden 2 también son válidas para ecuaciones de orden superior. El manejo del wronskiano se facilita con el lema siguiente.

Lema 2.13. *La derivada del wronskiano* (2.9) *es otro determinante:*

$$W'(g_1,\dots,g_n)(t) := \begin{vmatrix} g_1(t) & g_2(t) & \dots & g_n(t) \\ g_1'(t) & g_2'(t) & \dots & g_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1^{(n-2)}(t) & g_2^{(n-2)}(t) & \dots & g_n^{(n-2)}(t) \\ g_1^{(n)}(t) & g_2^{(n)}(t) & \dots & g_n^{(n)}(t) \end{vmatrix}. \tag{2.12}$$

Demostración. Sea $A(t) = [a_{ij}(t)]$ una matriz $n \times n$ cuyas entradas son funciones diferenciables. Su determinante admite la expansión en la primera fila:

$$\det A(t) = a_{11}(t)\, m_{11}(t) + a_{12}(t)\, m_{12}(t) + \cdots + a_{1n}(t)\, m_{1n}(t).$$

La derivada del determinante obedece la regla del producto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big(\det A(t)\big) &= \big(a_{11}'(t)\, m_{11}(t) + a_{12}'(t)\, m_{12}(t) + \cdots + a_{1n}'(t)\, m_{1n}(t)\big) \\ &\qquad + \big(a_{11}(t)\, m_{11}'(t) + a_{12}(t)\, m_{12}'(t) + \cdots + a_{1n}(t)\, m_{1n}'(t)\big). \end{aligned}$$

Los cofactores $m_{ij}(t)$ son determinantes de lado $(n-1)$ tomados de las filas $2,\dots,n$ de la matriz $A(t)$. Por lo tanto, el primer sumando es el determinante de la matriz $A_1(t)$ obtenida de $A(t)$ al derivar su primer fila y al dejar iguales las otras filas. Por inducción sobre n, el mismo proceso es aplicable para derivar los cofactores $m_{1j}(t)$. En el segundo sumando aparece el determinante obtenido al derivar la segunda fila de $A(t)$ solamente; y así sucesivamente:

$$\det A(t) = \det A_1(t) + \det A_2(t) + \cdots + \det A_n(t),$$

donde $A_k(t)$ es obtenido de $A(t)$ al derivar la fila k solamente. Por ejemplo, para $n = 3$:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} \\ &\quad = \begin{vmatrix} a_{11}'(t) & a_{12}'(t) & a_{13}'(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}'(t) & a_{22}'(t) & a_{23}'(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}'(t) & a_{32}'(t) & a_{33}'(t) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Si ahora se aplica esta receta al determinante (2.9), en cada una de las matrices iniciales $A_1(t), \dots, A_{n-1}(t)$ hay dos filas consecutivas iguales, así que $\det A_k(t) = 0$ para $k = 1, \dots, n-1$. Por lo tanto, $W'(g_1, \dots, g_n)(t) = \det A_n(t)$, obtenido al derivar la última fila solamente: esto comprueba la fórmula (2.12). $\square$

Proposición 2.8′ (Abel)**.** *Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ son n soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n:*

$$x^{(n)}(t) + p_1(t)\,x^{(n-1)}(t) + \cdots + p_{n-1}(t)\,x'(t) + p_n(t)\,x(t) = 0,$$

con coeficientes continuas $p_1, \dots, p_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, entonces su wronskiano $W(t) \equiv W(x_1, \dots, x_n)(t)$ obedece

$$W(t) = C\,e^{-P_1(t)}, \quad \textit{donde} \quad P_1(t) = \int_a^t p_1(s)\,ds,$$

para alguna constante $C \in \mathbb{R}$.

Demostración. Por el Lema 2.13, la derivada del wronskiano $W(t)$ es igual a

$$W'(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-2)}(t) & x_2^{(n-2)}(t) & \dots & x_n^{(n-2)}(t) \\ x_1^{(n)}(t) & x_2^{(n)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix}.$$

Cada entrada $x_j^{(n)}(t)$ de la última fila de $W'(t)$ puede ser sustituida por la ecuación diferencial dada:

$$x_j^{(n)}(t) = -p_1(t)\,x_j^{(n-1)}(t) - \cdots - p_{n-1}(t)\,x_j'(t) - p_n(t)\,x_j(t).$$

Luego, al sumar $p_{n+1-k}(t)$ veces la k-ésima fila a la última fila, para $k = 1, \dots, n-2$, (una operación que no afecta al valor del determinante), se obtiene

$$W'(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_1(t)x_1^{(n-1)}(t) & -p_1(t)x_2^{(n-1)}(t) & \dots & -p_1(t)x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} = -p_1(t)\,W(t).$$

La ecuación diferencial $W'(t) + p_1(t)\,W(t) = 0$ se resuelve, como antes, por el método del factor integrante, dando lugar a la solución enunciada. $\square$

Corolario 2.9′. *Sean $x_1, \dots, x_n$ una n soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea* (2.6)*, de orden n. Entonces su wronskiano $W(t) := W(x_1, \dots, x_n)(t)$ bien es idénticamente nulo, o bien nunca se anula. Luego, estas n soluciones son linealmente dependientes si y solo si $W(t) \equiv 0$.*

Demostración. Como el wronskiano tiene la forma $W(t) = C\, e^{-P_1(t)}$, entonces $W(t) \equiv 0$ si $C = 0$; mientras $W(t) \neq 0$ para todo t si $C \neq 0$.

Ya se ha observado que si $x_1, \dots, x_n$ son linealmente dependientes, entonces su wronskiano es idénticamente nulo – para eso, no hace falta que sean soluciones de (2.6).

Por otro lado, si $x_1, \dots, x_n$ son *soluciones*, y si $W(t_0) = 0$ para algún $t_0 \in (a, b)$, entonces el sistema de ecuaciones (algebraicas) lineales:

$$\begin{aligned} c_1\, x_1(t_0) + c_2\, x_2(t_0) + \cdots + c_n\, x_n(t_0) &= 0 \\ c_1\, x_1'(t_0) + c_2\, x_2'(t_0) + \cdots + c_n\, x_n'(t_0) &= 0 \\ \vdots \quad &= \vdots \\ c_1\, x_1^{(n-1)}(t_0) + c_2\, x_2^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_n\, x_n^{(n-1)}(t_0) &= 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

tiene una solución no nula $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Por el Lema 2.4, la combinación lineal

$$y(t) := c_1\, x_1(t) + c_2\, x_2(t) + \cdots + c_n\, x_n(t)$$

es también una solución de (2.6). Entonces las ecuaciones (2.13) muestran que

$$y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0, \ \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

Por la unicidad de la solución de (2.6) con estas condiciones iniciales, $y(t)$ coincide con la solución nula: $y(t) \equiv 0$ para $t \in [a, b]$. Esto dice que las soluciones originales son linealmente dependientes. □

Teorema 2.10′. *La solución general de la ecuación diferencial*

$$x^{(n)}(t) + p_1(t)\, x^{(n-1)}(t) + \cdots + p_{n-1}(t)\, x'(t) + p_n(t)\, x(t) = 0,$$

con coeficientes continuas $p_1, \dots, p_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, satisface:

$$\boxed{x(t) \equiv c_1\, x_1(t) + c_2\, x_2(t) + \cdots + c_n\, x_n(t),}$$

donde $x_1, \dots, x_n$ son n soluciones particulares, linealmente independientes.

Demostración. Tómese $t_0 \in (a, b)$. Sea $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ la base estándar de $\mathbb{R}^n$ – esto es, $\boldsymbol{e}_1 := (1, 0, \dots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, …, $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$. Con las condiciones iniciales

$$\big(x_k(t_0), x_k'(t_0), \dots, x_k^{(n-1)}(t_0)\big) = \boldsymbol{e}_k\,,$$

existen soluciones únicas $x_k \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, para $k = 1, 2, \dots, n$, que cumplen estas condiciones respectivas. Su wronskiano en el punto t_0 vale

$$W(x_1, \dots, x_n)(t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

así que $W(x_1, \dots, x_n)(t) \neq 0$ para todo t; y las soluciones $x_1, \dots, x_n$ son linealmente independientes.

Ahora sea $x \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una solución cualquiera de la ecuación dada (2.5). Sean $c_1 := x(t_0)$, $c_2 := x'(t_0)$, …, $c_n := x^{(n-1)}(t_0)$. Entonces la combinación lineal

$$y(t) := x(t) - c_1\, x_1(t) - c_2\, x_2(t) - \cdots - c_n\, x_n(t)$$

es también una solución, la cual cumple $y(t_0) = y'(t_0) = \cdots = y^{(n-1)}(t_0) = 0$; por ende, esta es la solución nula, $y(t) \equiv 0$. □

En síntesis: el espacio vectorial real de las soluciones de la ecuación diferencial (2.6) de orden n tiene dimensión n.

2.2 Ecuaciones lineales inhomogéneas de segundo orden

Considérese la ecuación lineal inhomogénea

$$x''(t) + p(t)\, x'(t) + q(t)\, x(t) = h(t), \tag{2.14}$$

con funciones continuas $p(t)$, $q(t)$, $h(t)$, definidos en un intervalo cerrado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

Al poner $y(t) := x'(t)$, este es equivalente a un sistema de dos ecuaciones lineales inhomogéneas de primer orden:

$$\begin{aligned} x'(t) - y(t) &= 0, \\ y'(t) + p(t)y(t) + q(t)x(t) &= h(t); \end{aligned}$$

que se puede expresar también en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q(t) & p(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix};$$

o bien, en forma matricial:

$$\boldsymbol{x}'(t) + A(t)\,\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{h}(t), \tag{2.15}$$

donde $\boldsymbol{h}(t) := (0, h(t))$; el lado izquierdo es idéntico al lado izquierdo de (2.7).

En la presencia de condiciones iniciales $x(t_0) = a_1$, $x'(t_0) = a_2$, este es un sistema de la forma (1.26), en donde $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) := \boldsymbol{h}(t) - A(t)\,\boldsymbol{x}$, con $t \in [a, b]$. Si $[a, b]$ es un intervalo acotado, se verifica fácilmente que esta función vectorial es lipschitziana:

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})\| \leqslant L\,\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \quad \text{para todo} \quad (t, \boldsymbol{x}),\ (t, \boldsymbol{y}) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2,$$

al tomar

$$L := \sup\{\, 1 + |p(t)| + |q(t)| : a \leqslant t \leqslant b \,\}.$$

Luego, por el Teorema 1.15′, un problema de valor inicial para la ecuación diferencial (2.14) tiene solución única en el intervalo $[a, b]$.

⟦ Con leves cambios de notación, este argumento también demuestra que una ecuación diferencial lineal homogénea de orden $n \geqslant 2$ tiene solución única en cualquier intervalo compacto en el cual los coeficientes son funciones continuas. ⟧

► La diferencia principal con el caso homogéneo es la ausencia de una solución trivial: si fuera $h(t) \equiv 0$, las condiciones iniciales $x(t_0) = 0$, $x'(t_0) = 0$ impondrían la solución nula; pero esto es inadmisible si $h(t)$ no es idénticamente cero. Es necesario, entonces, encontrar al menos una *solución particular* de la ecuación inhomogénea (2.14).

Ahora bien, si $x(t)$ y $y(t)$ son dos soluciones de (2.14), su diferencia $z(t) := x(t) - y(t)$ resuelve la ecuación homogénea:

$$z''(t) + p(t)\,z'(t) + q(t)\,z(t) = 0.$$

Como tal, $z(t) = c_1\,x_1(t) + c_2\,x_2(t)$ donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea. Se ha demostrado el resultado siguiente.

Proposición 2.14. *La* solución general *de la ecuación lineal inhomogénea*

$$x''(t) + p(t)\,x'(t) + q(t)\,x(t) = h(t)$$

tiene la forma

$$x(t) = c_1\,x_1(t) + c_2\,x_2(t) + y(t),$$

donde $c_1\,x_1(t) + c_2\,x_2(t)$ es la solución general de la ecuación homogénea correspondiente; mientras $\underline{y(t)}$ es una solución particular *de la ecuación inhomogénea.*

Ejemplo 2.15. La ecuación lineal inhomogénea

$$x''(t) - \frac{1}{t}\,x'(t) + \frac{1}{t^2}\,x(t) = 4t \tag{2.16}$$

es una variante de la ecuación homogénea del Ejemplo 2.12. Esta ecuación posee la solución particular $y(t) = t^3$, como se puede comprobar por inspección.

Habida cuenta de la solución general conocida de la ecuación homogénea, se obtiene la solución de la inhomogénea:

$$x(t) = c_1\,t + c_2\,t\log t + t^3 \quad \text{cuando} \quad t > 0.$$

Hace falta, entonces, desarrollar un método para obtener una solución particular que no dependa de un golpe de suerte. ◊

2.2.1 Variación de parámetros

Para encontrar una solución particular a la ecuación (2.14), se usa un artificio análogo al de la demostración de la Proposición 2.11, en donde se obtuvo una segunda solución al colocar $x_2(t) := u(t)\,x_1(t)$ y se trató de determinar el multiplicador $u(t)$. Para que $x_2(t)$ fuera linealmente independiente de la solución dada $x_1(t)$, era esencial que la función $u(t)$ no fuera constante.

Ahora bien, al enfrentar la ecuación diferencial (2.14), no se dispone de una solución previa; pero al menos se conoce un par de soluciones independientes $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de la ecuación *homogénea*. Se recomienda, entonces, reemplazar la combinación lineal $c_1\,x_1(t) + c_2\,x_2(t)$ por una expresión

$$y(t) := v_1(t)\,x_1(t) + v_2(t)\,x_2(t), \tag{2.17}$$

en donde $v_1(t)$ y $v_2(t)$ son funciones no necesariamente constantes.

Al calcular la derivada de la última expresión, se obtiene

$$y'(t) = \bigl(v_1'(t)\,x_1(t) + v_2'(t)\,x_2(t)\bigr) + \bigl(v_1(t)\,x_1'(t) + v_2(t)\,x_2'(t)\bigr).$$

Para determinar un par de funciones v_1, v_2 convenientes, se toma la decisión de anular la primera de las dos paréntesis al lado derecho. Esto impone el requisito:

$$v_1'(t)\,x_1(t) + v_2'(t)\,x_2(t) = 0. \tag{2.18a}$$

Entonces la segunda derivada de $y(t)$ es:

$$y''(t) = v_1'(t)\,x_1'(t) + v_2'(t)\,x_2'(t) + v_1(t)\,x_1''(t) + v_2(t)\,x_2''(t).$$

La función $y(t)$ será una solución de (2.14),

$$y''(t) + p(t)\, y'(t) + q(t)\, y(t) = h(t),$$

si y solo si

$$\begin{aligned} v_1(t)\big(x_1''(t) + p(t)\, x_1'(t) + q(t)\, x_1(t)\big) + v_2(t)\big(x_2''(t) + p(t)\, x_2'(t) + q(t)\, x_2(t)\big) \\ + v_1'(t)\, x_1'(t) + v_2'(t)\, x_2'(t) = h(t). \end{aligned}$$

Como x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación homogénea, los términos iniciales se anulan; queda solamente la relación:

$$v_1'(t)\, x_1'(t) + v_2'(t)\, x_2'(t) = h(t). \tag{2.18b}$$

En resumen, se obtiene una sistema de ecuaciones lineales para las dos incógnitas $v_1'(t)$ y $v_2'(t)$ al combinar las condiciones (2.18):

$$\begin{aligned} v_1'(t)\, x_1(t) + v_2'(t)\, x_2(t) &= 0, \\ v_1'(t)\, x_1'(t) + v_2'(t)\, x_2'(t) &= h(t). \end{aligned} \tag{2.18c}$$

Este sistema se resuelve por la regla de Cramer, habida cuenta de que el determinante de los coeficientes es el wronskiano:[3]

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = W(t) = e^{-P(t)},$$

al invocar la fórmula de Abel (2.10). Concretamente:

$$v_1'(t) = \frac{1}{W(t)} \begin{vmatrix} 0 & x_2(t) \\ h(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = -\frac{x_2(t)\, h(t)}{W(t)}\,; \quad v_2'(t) = \frac{1}{W(t)} \begin{vmatrix} x_1(t) & 0 \\ x_1'(t) & h(t) \end{vmatrix} = \frac{x_1(t)\, h(t)}{W(t)}\,.$$

Esto demuestra el resultado siguiente.

Proposición 2.16. *Una solución particular de la ecuación diferencial lineal inhomogénea* (2.14) *está dada por*

$$y(t) = -x_1(t) \int^t \frac{x_2(s)}{w(s)}\, h(s)\, ds + x_2(t) \int^t \frac{x_1(s)}{w(s)}\, h(s)\, ds \tag{2.19}$$

donde $w(t) = e^{-P(t)}$ *y* $P(t) = \int^t p(s)\, ds$. □

[3] La constante $C = 1$ de la fórmula (2.10) está absorbida en la constante de integración de la primitiva $P(t) := \int^t p(s)\, ds$.

Ejemplo 2.17. Cabe reconsiderar el Ejemplo 2.15. La ecuación inhomogénea (2.16):

$$x''(t) - \frac{1}{t}\,x'(t) + \frac{1}{t^2}\,x(t) = 4t$$

fue resulta al adivinar una solución particular "obvia". Sería interesante ver lo que da el método de variación de parámetros. Se postula una solución

$$y(t) := v_1(t)\,x_1(t) + v_2(t)\,x_2(t) = t\,v_1(t) + t\log t\,v_2(t).$$

El Wronskian de la ecuación homogénea está dada por $P(t) := \int^t (-1/s)\,ds = -\log t$, $W(t) = e^{-P(t)} = t$, o equivalentemente por

$$W(t) = \begin{vmatrix} t & t\log t \\ 1 & 1+\log t \end{vmatrix} = t.$$

El sistema de ecuaciones (2.18) es:

$$\begin{aligned} t\,v_1'(t) + t\log t\,v_2'(t) &= 0, \\ v_1'(t) + (1+\log t)\,v_2'(t) &= 4t; \end{aligned}$$

así que

$$v_1'(t) = \frac{1}{t}\begin{vmatrix} 0 & t\log t \\ 4t & 1+\log t \end{vmatrix} = -4t\log t; \qquad v_2'(t) = \frac{1}{t}\begin{vmatrix} t & 0 \\ 1 & 4t \end{vmatrix} = 4t.$$

De ahí se obtiene un par de primitivas:

$$v_1(t) = -\int_1^t 4s\log s\,ds = -(2t^2\log t - t^2 + 1), \quad v_2(t) = \int_1^t 4s\,ds = 2t^2 - 2.$$

(Se escoge $a = 1$ como la cota inferior de integración, porque $a = 0$ está fuera del intervalo de definición del problema.)

Entonces se obtiene la solución particular

$$y(t) = -t(2t^2\log t - t^2 + 1) + t\log t(2t^2 - 2) = t^3 - t - 2t\log t.$$

Es evidente que los términos $-t - 2t\log t$ son una combinación lineal de las soluciones básicas $x_1(t) = t$ y $x_2(t) = t\log t$ de la ecuación homogénea; su presencia se debe a la elección de $a = 1$ para calcular las primitivas. Luego se puede descartarlas, y así se obtiene una nueva solución particular, $\tilde{y}(t) := t^3$.

Moraleja: aunque sea preferible obtener una solución particular por inspección, el método de variación de parámetros siempre es capaz de proporcionar alguna solución. $\Diamond$

► En el ejemplo anterior, se encontró la solución particular al resolver el sistema (2.18), en vez de aplicar ciegamente la fórmula (2.19). Sin embargo, esa última fórmula tiene cierta importancia teórica. Al escribirla en el formato:

$$y(t) = \int_a^t \frac{x_2(t)\,x_1(s) - x_1(t)\,x_2(s)}{w(s)}\,h(s)\,ds,$$

se puede observar que tiene la forma de un **operador integral**:

$$h(t) \mapsto \int_a^t G(t,s)\,h(s)\,ds \tag{2.20}$$

para cierta función de dos variables $G(t,s)$ obtenida de las soluciones de la ecuación homogénea.

Definición 2.18. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea (2.5), con coeficientes continuas en un intervalo cerrado $[a,b]$. Sea $w(t) = W(x_1,x_2)(t)$ su wronskiano. Una **función de Green** asociada a dicha ecuación se define por:

$$G(t,s) := \frac{x_2(t)\,x_1(s) - x_1(t)\,x_2(s)}{w(s)} \quad \text{para} \quad a \leqslant s \leqslant t \leqslant b. \tag{2.21}$$

(En problemas de contorno, suele usarse otras funciones de Green, levemente diferentes de esta fórmula; serán consideradas más adelante.) ◊

Del punto de vista del álgebra lineal, cabe notar que el lado izquierdo de una ecuación diferencial lineal es de la forma $L[x(t)]$, donde

$$L := \frac{d^2}{dt^2} + p(t)\,\frac{d}{dt} + q(t)$$

es un operador lineal – es decir, posee la propiedad:

$$L[c_1\,x(t) + c_2\,y(t)] = c_1\,L[x(t)] + c_2\,L[y(t)] \quad \text{para todo} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Si se denota el lado derecho de la fórmula (2.20) por $G[h(t)]$, se puede resumir la Proposición 2.16 así:

$$y(t) = G[h(t)] \implies L[y(t)] = h(t),$$

e inversamente, $L[x(t)] = h(t)$ implica que $x(t)$ es la suma de $G[h(t)]$ con un elemento del núcleo del operador lineal L. Por el Teorema 2.10, se sabe que este núcleo es un espacio $\mathbb{R}$-vectorial de dimensión 2. Brevemente: el operador integral G invierte el operador diferencial L, módulo el núcleo de L.

2.3 Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

2.3.1 Ecuaciones homogéneas de segundo orden

Considérese una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden:

$$a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = 0, \tag{2.22}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ son constantes, con $a \neq 0$. En vez de buscar una solución sistemáticamente usando algún factor integrante, se puede partir de una simple observación: hay una familia de funciones conocidas cuyas derivadas son proporcionales a ellas. Estas son las *funciones exponenciales* $t \mapsto e^{\lambda t}$, con λ constante.

Entonces, vale la pena ensayar una *función de prueba* $x(t) := \underline{e^{\lambda t}}$. La ecuación (2.22) se reduce a

$$a\lambda^2\, e^{\lambda t} + b\lambda\, e^{\lambda t} + c\, e^{\lambda t} = 0,$$

y como $e^{\lambda t} \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, esto es equivalente a la **ecuación característica**:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \tag{2.23}$$

Si esta ecuación cuadrática tiene dos raíces distintas, ellas corresponden a dos soluciones independientes de la ecuación diferencial (2.22).

Un análisis completo de (2.22) depende del *discriminante* $b^2 - 4ac$ de la ecuación característica (2.23). Se distinguen tres casos, a continuación.

Caso $\boldsymbol{b^2 - 4ac > 0}$: La ecuación (2.23) tiene dos raíces distintas,

$$\lambda_1 := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad \lambda_2 := \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Las funciones $e^{\lambda_1 t}$ y $e^{\lambda_2 t}$ son linealmente independientes. Su wronskiano es

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = -(\lambda_1 - \lambda_2)e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} \neq 0.$$

Entonces la solución general de la ecuación diferencial (2.22) es:

$$x(t) = c_1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, e^{\lambda_2 t}, \tag{2.24a}$$

Caso $\boldsymbol{b^2 - 4ac = 0}$: La ecuación (2.23) tiene una sola raíz, $\lambda = -b/2a$. En este caso $x_1(t) := e^{-bt/2a}$ es una solución. La segunda solución viene de la Proposición 2.11.

Aquí $p(t) \equiv b/a$, con primitiva $P(t) = bt/a$; luego $w(t) = e^{-bt/a}$. Entonces la fórmula (2.11) produce

$$x_2(t) := x_1(t) \int^t \frac{w(s)}{x_1(s)^2}\,ds = e^{-bt/2a} \int^t \frac{e^{-bt/a}}{e^{-bt/a}}\,ds = t\,e^{-bt/2a}.$$

Entonces la solución general de (2.22) es:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)\,e^{-bt/2a}. \tag{2.24b}$$

Caso $b^2 - 4ac < 0$: La ecuación (2.23) no posee raíces reales; pero sí tiene dos *raíces complejas* distintas. Escríbase

$\rho := -b/2a$ y $\sigma := \sqrt{4ac - b^2}/2|a| > 0$. Entonces la fórmula cuadrática ofrece dos raíces complejas conjugadas:

$$\lambda_1 = \rho + i\sigma, \quad \lambda_2 = \rho - i\sigma.$$

La función exponencial de un número complejo $z \in \mathbb{C}$ se define mediante la serie de potencias (o serie de Taylor):

$$e^z \equiv \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots$$

y se verifica que $e^{z+w} = e^z\,e^w$. En particular, cuando $z = i\sigma t$, se obtiene[4]

$$\begin{aligned} e^{i\sigma t} &= 1 + i\sigma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} - i\,\frac{\sigma^3 t^3}{6} + \frac{\sigma^4 t^4}{24} + \cdots + i^n\,\frac{\sigma^n t^n}{n!} + \cdots \\ &= \Bigl(1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{\sigma^4 t^4}{24} + \cdots + (-1)^k \frac{\sigma^{2k} t^{2k}}{(2k)!} + \cdots\Bigr) \\ &\qquad + i\Bigl(\sigma t - \frac{\sigma^3 t^3}{6} + \frac{\sigma^5 t^5}{120} + \cdots + (-1)^k \frac{\sigma^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots\Bigr) \\ &= \cos\sigma t + i\,\operatorname{sen}\sigma t. \end{aligned}$$

De igual manera, se obtiene $e^{-i\sigma t} = \cos(\sigma t) - i\,\operatorname{sen}(\sigma t)$. Entonces

$$e^{(\rho \pm i\sigma)t} = e^{\rho t}\,e^{\pm i\sigma t} = e^{\rho t}(\cos\sigma t \pm i\,\operatorname{sen}\sigma t).$$

Para obtener soluciones reales de la ecuación diferencial, tómese estas combinaciones lineales de las funciones anteriores:

$$\begin{aligned} x_1(t) &:= \frac{e^{(\rho+i\sigma)t} + e^{(\rho-i\sigma)t}}{2} = e^{\rho t}\cos\sigma t, \\ x_2(t) &:= \frac{e^{(\rho+i\sigma)t} - e^{(\rho-i\sigma)t}}{2i} = e^{\rho t}\operatorname{sen}\sigma t. \end{aligned}$$

[4]La identidad que sigue es la **fórmula de de Moivre**, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\operatorname{sen}\theta$, para el caso $\theta = \sigma t$.

Estas dos funciones son linealmente independientes (sobre $\mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2)(t) &= \begin{vmatrix} e^{\rho t} \cos \sigma t & e^{\rho t} \operatorname{sen} \sigma t \\ \rho e^{\rho t} \cos \sigma t - \sigma e^{\rho t} \operatorname{sen} \sigma t & \rho e^{\rho t} \operatorname{sen} \sigma t + \sigma e^{\rho t} \cos \sigma t \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{\rho t} \cos \sigma t & e^{\rho t} \operatorname{sen} \sigma t \\ -\sigma e^{\rho t} \operatorname{sen} \sigma t & \sigma e^{\rho t} \cos \sigma t \end{vmatrix} = \sigma e^{2\rho t} > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial (2.22) en este caso es:

$$x(t) = c_1 \, e^{\rho t} \cos \sigma t + c_2 \, e^{\rho t} \operatorname{sen} \sigma t. \tag{2.24c}$$

El comportamiento *cualitativo* de las soluciones de la ecuación diferencial (2.22) depende en gran medida del discriminante $\Delta := b^2 - 4ac$. Si $\Delta > 0$, las soluciones (2.24a) exhiben crecimiento o decrecimiento exponencial cuando $t \to \pm\infty$ (los signos de λ_1 y λ_2 determinan si estas soluciones divergen o tienden rápidamente a 0 cuando $t \to +\infty$). Si $\Delta = 0$, las soluciones (2.24b) tienen un comportamiento similar en el infinito, pero no son monótonas.

En cambio, si $\Delta < 0$, las soluciones (2.24c) tienen *un comportamiento oscilatorio* cuando $t \to \pm\infty$. Las oscilaciones tiene una amplitud constante $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ si $\rho = 0$; pero si $\rho < 0$, ellas están amortiguadas cuando $t \to +\infty$; y si $\rho > 0$, al dejar $t \to +\infty$ se observan oscilaciones reforzadas. Las soluciones con $\Delta \geqslant 0$ no presentan oscilaciones.

Ejemplo 2.19. Una variante a la ecuación (2.22) con coeficientes es la llamada **ecuación de Euler**:

$$a \, t^2 \, x''(t) + b \, t \, x'(t) + c \, x(t) = 0. \tag{2.25}$$

Esta ecuación diferencial es singular en $t = 0$, obviamente. En el intervalo abierto $t > 0$, se puede hacer el cambio de variable:

$$t =: e^s \iff s := \log t,$$

y la regla de la cadena implica que

$$t \, x'(t) \equiv t \, \frac{dx}{dt} = t \, \frac{ds}{dt} \, \frac{dx}{ds} = t(t^{-1}) \, \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{ds} \, .$$

Conviene usar la notación $\underline{\dot{x}(s)} \equiv dx/ds$ para distinguir las derivadas de x con respecto a las dos variables t y s. Así, se ve que $t \, x'(t) = \dot{x}(s)$. Además,

$$t^2 \, x''(t) = t^2 \, \frac{dx'}{dt} = t^2 \, \frac{dx'}{ds} \, \frac{ds}{dt} = t \, \frac{dx'}{ds} = e^s \, \frac{d}{ds}\big(e^{-s} \, \dot{x}(s)\big) = \ddot{x}(s) - \dot{x}(s).$$

Entonces la ecuación (2.25) se convierte en

$$a(\ddot{x}(s) - \dot{x}(s)) + b\,\dot{x}(s) + c\,x(s) = 0.$$

o bien[5]

$$a\,\ddot{x}(s) + (b - a)\,\dot{x}(s) + c\,x(s) = 0.$$

Este es una ecuación con coeficientes constantes, con discriminante

$$\Delta = (b - a)^2 - 4ac = a^2 + b^2 - 2ab - 4ac.$$

Si $\Delta > 0$, por ejemplo, las soluciones de (2.25) asumen la forma

$$x(t) = c_1\, e^{\lambda_1 s} + c_2\, e^{\lambda_2 s} = c_1\, t^{\lambda_1} + c_2\, t^{\lambda_2}.$$

Cuando $\Delta = 0$, hay soluciones de la forma

$$x(t) = (c_1 + c_2 s)\, e^{\lambda s} = c_1\, t^{\lambda} + c_2\, t^{\lambda} \log t. \qquad \Diamond$$

2.3.2 Ecuaciones homogéneas de orden superior

Para ecuaciones lineales de orden superior a 2, con coeficientes constantes, el análisis del caso de segundo orden se extiende con un poco de álgebra lineal. Considérese la ecuación diferencial homogénea:

$$x^{(n)}(t) + a_1\, x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}\, x'(t) + a_n\, x(t) = 0, \tag{2.26}$$

con coeficientes constantes reales $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Una vez más, se puede probar una solución de la forma $x(t) := e^{\lambda t}$. Esta vez, al tomar en cuenta la fórmula de de Moivre:

$$e^{(\rho \pm i\sigma)t} = e^{\rho t}\, e^{\pm i\sigma t} = e^{\rho t}(\cos \sigma t \pm i \operatorname{sen} \sigma t), \tag{2.27}$$

sería prudente admitir valores complejos de λ desde el inicio. Al sustituir $x(t) = e^{\lambda t}$, con $\lambda \in \mathbb{C}$, en la ecuación (2.26) y al multiplicar el resultado por $e^{-\lambda t}$, se obtiene la **ecuación característica**:

$$p(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\, \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, \lambda + a_n = 0. \tag{2.28}$$

[5] En 1666, Isaac Newton era un estudiante de pregrado en Cambridge, leyendo sobre el algoritmo de DesCartes para calcular rectas tangentes a curvas expresadas algebraicamente como $y = f(x)$. Concibió la estrategia de expresar las dos variables x, y de DesCartes como cantidades que dependían de una variable "temporal" t; denotó sus derivadas temporales por $\dot{x}(t)$ y $\dot{y}(t)$, de modo que la pendiente de la recta tangente fuese $\dot{y}/\dot{x}$. (En esencia, descubrió la regla de cadena, porque su receta arrojaba los mismos resultados que el procedimiento de DesCartes.) Más tarde, su notación $\dot{x}(t)$ fue modificada al equivalente de $x'(t)$, aunque los clásicos textos ingleses de mecánica continuaron con $\dot{x}(t)$ cuando la variable independiente representaba tiempo.

El polinomio mónico $p(X)$, de grado n, se puede factorizar en un producto de factores de primer grado:[6]

$$p(X) = (X - \lambda_1)^{q_1}(X - \lambda_2)^{q_2} \cdots (X - \lambda_m)^{q_m}, \tag{2.29}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ son las *raíces distintas* del polinomio, con *multiplicidades* respectivas $q_1, q_2, \dots, q_m$. (Fíjese que $q_1 + \cdots + q_m = n$.)

Lema 2.20. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es una raíz de la ecuación característica* (2.28)*, de multiplicidad q, entonces las funciones*

$$x_1(t) := e^{\lambda t}, \quad x_2(t) := t\, e^{\lambda t}, \quad \dots \quad x_q(t) := t^{q-1}\, e^{\lambda t}$$

son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (2.26).

Demostración. Para $k = 0, 1, \dots, q-1$, se ve enseguida que $x_k(t) := t^k\, e^{\lambda t}$ cumple

$$\frac{d}{dt}(t^k\, e^{\lambda t}) = (kt^{k-1} + \lambda t^k)e^{\lambda t}.$$

Resulta muy útil usar la abreviatura $\boxed{D \equiv d/dt}$ y escribir la fórmula anterior así:

$$(D - \lambda)x_k(t) = k\, x_{k-1}(t), \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \dots, q-1.$$

Luego $(D - \lambda)^2 x_k(t) = k(k-1)\, x_{k-2}(t)$; y así sucesivamente. Al aplicar el operador $(D - \lambda)$ unas q veces, se obtiene

$$(D - \lambda)^q x_k(t) = 0, \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \dots, q-1.$$

Considérese el operador diferencial $p(D)$ obtenido al sustituir $D = d/dt$ por la incógnita X en la fórmula (2.29):

$$p(D) = (D - \lambda_1)^{q_1}(D - \lambda_2)^{q_2} \cdots (D - \lambda_m)^{q_m} = D^n + a_1\, D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, D + a_n.$$

Los factores $(D - \lambda_j)^{q_j}$ conmutan entre sí porque los λ_j son constantes (no dependen de t), así que su producto es en efecto el polinomio que aparece al lado izquierdo de (2.28).

[6] Esta factorización se debe al llamado **teorema fundamental del álgebra**, según el cual cualquier polinomio no constante con coeficientes en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ tiene una raíz compleja $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. Este resultado también es aplicable al polinomio cociente $p(X)/(X - \lambda_1)$, de grado $n - 1$; de ahí, por inducción sobre el grado de $p(X)$, se recupera la factorización completa (2.29). Es importante notar que no hay un resultado análogo para raíces reales: el polinomio $X^2 + 1$ no tiene raíz alguna en $\mathbb{R}$.

Ahora, $(D-\lambda)^q$ es uno de esos factores, de modo que hay otro polinomio $r(X)$, de grado $(n-q)$, tal que

$$D^n + a_1\, D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, D + a_n = p(D) = r(D)\,(D-\lambda)^q.$$

Al aplicar este operador a las $x_k(t)$, se obtiene $p(D)x_k(t) = r(D)\,(D-\lambda)^q x_k(t) = 0$. Por lo tanto, cada $x_k(t)$ es una solución de la ecuación diferencial (2.26).

La independencia lineal de estas soluciones se verifica al calcular su wronskiano $W(t)$; es suficiente comprobar que $W(0) \neq 0$. Resulta que

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda t} & t\,e^{\lambda t} & t^2\,e^{\lambda t} & \dots \\ \lambda\,e^{\lambda t} & (\lambda t+1)\,e^{\lambda t} & (\lambda t^2+2t)\,e^{\lambda t} & \dots \\ \lambda^2\,e^{\lambda t} & (\lambda^2 t + 2\lambda)\,e^{\lambda t} & (\lambda^2 t^2 + 4\lambda t + 2)\,e^{\lambda t} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}; \quad W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda & 1 & 0 & \dots \\ \lambda^2 & 2\lambda & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}.$$

Es fácil comprobar que $W(0)$ es el determinante de una matriz *triangular inferior*, con entradas diagonales $k! = 1, 1, 2, 6, \dots$, para $k = 0, 1, 2, \dots, q-1$. Luego $W(0) = \prod_{k=0}^{q-1} k! > 0$. La independencia lineal es consecuencia del Corolario 2.9′. □

Lema 2.21. *Si $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ son las raíces distintas del polinomio $p(X)$ con factorización* (2.29)*, entonces las funciones*

$$y_1(t) := e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) := e^{\lambda_2 t}, \quad \dots \quad y_m(t) := e^{\lambda_m t}$$

son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (2.26).

Demostración. Es evidente que cada $y_j(t)$ es una solución, porque $(D-\lambda_j)y_j(t) = 0$ y cada monomio $(X-\lambda_j)$ es un factor de $p(X)$, así que $p(D)y_j(t) = 0$ también.

Nótese que $y_j^{(k)}(t) = \lambda_j^k\, e^{\lambda_j t}$ para $k \in \mathbb{N}$. El wronskiano $W(t) = W(y_1, \dots, y_m)(t)$ tiene entonces el siguiente valor en $t = 0$:

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_m \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_m^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \lambda_3^{m-1} & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{vmatrix}.$$

Este es un **determinante de Vandermonde**, que puede ser evaluado por eliminación gaussiana. En efecto, al restar múltiplos de la primera fila de las otras para obtener una primera fila igual al vector $\boldsymbol{e}_1 \in \mathbb{R}^m$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
W(0) &= \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \dots & \lambda_m - \lambda_1 \\
0 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & \dots & \lambda_m^2 - \lambda_1^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \lambda_2^{m-1} - \lambda_1^{m-1} & \lambda_3^{m-1} - \lambda_1^{m-1} & \dots & \lambda_m^{m-1} - \lambda_1^{m-1}
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
\lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \dots & \lambda_m - \lambda_1 \\
\lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & \dots & \lambda_m^2 - \lambda_1^2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\lambda_2^{m-1} - \lambda_1^{m-1} & \lambda_3^{m-1} - \lambda_1^{m-1} & \dots & \lambda_m^{m-1} - \lambda_1^{m-1}
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 \\
\lambda_2 + \lambda_1 & \lambda_3 + \lambda_1 & \dots & \lambda_m + \lambda_1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\lambda_2^{m-2} + \text{etc} & \lambda_3^{m-2} + \text{etc} & \dots & \lambda_m^{m-2} + \text{etc}
\end{vmatrix} (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \cdots (\lambda_m - \lambda_1) \\
&= \begin{vmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 \\
\lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_m \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\lambda_2^{m-2} & \lambda_3^{m-2} & \dots & \lambda_m^{m-2}
\end{vmatrix} \prod_{j=2}^{m} (\lambda_j - \lambda_1)
\end{aligned}
$$

En este cálculo, se ha hecho (a) expansión en la primera columna; (b) extracción de un factor común de cada columna; y (c) sustraer múltiplos de algunas filas desde otras filas. El primer factor al lado derecho es *otro determinante de Vandermonde*, de tamaño menor. Luego, por inducción sobre m, se obtiene el resultado:

$$
W(0) = \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i). \tag{2.30}
$$

Como los números $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ son distintos por hipótesis, se obtiene $W(0) \neq 0$. Por lo tanto, vale $W(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Esto establece la independencia lineal de las soluciones $y_1(t), \dots, y_m(t)$. □

Es posible demostrar con un argumento más directo (sin calcular wronskianos) un resultado más general: las n funciones $t^{k_j}\, e^{\lambda_j t}$, con $k_j = 0, 1, \dots, q_j - 1$, son linealmente independientes.

Si algún $\lambda = \lambda_j$ es complejo pero no real, es decir, $\lambda = \rho + i\sigma$ con $\sigma \neq 0$, su *conjugado complejo* $\bar{\lambda} := \rho - i\sigma$ debe ser otra raíz de $p(X)$, con la misma multiplicidad, para que el producto

$$(X-\lambda)^q(X-\bar\lambda_j)^q = (X-\rho-i\sigma)^q(X-\rho+i\sigma)^q = (X^2-2\rho X+\rho^2+\sigma^2)^q$$

sea un *factor real* del polinomio $p(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$ cuyos coeficientes son reales.

En tal caso, en visto de la fórmula (2.27), se reemplaza el par de funciones complejas $t^k\,e^{\lambda t}$ y $t^k\,e^{\bar\lambda t}$ por sus combinaciones lineales

$$t^k\,e^{\rho t}\operatorname{sen}\sigma t \quad \text{y} \quad t^k\,e^{\rho t}\cos\sigma t$$

en el conjunto de las soluciones básicas de (2.26). En fin, se puede resumir estas consideraciones en la proposición siguiente.

Proposición 2.22. *El espacio $\mathbb{R}$-vectorial de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea*

$$x^{(n)}(t) + a_1\,x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}\,x'(t) + a_n\,x(t) = 0,$$

con coeficientes constantes $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$, posee una base de soluciones de las formas

$$t^k e^{\lambda t}; \quad \textit{o bien} \quad t^k\,e^{\rho t}\operatorname{sen}\sigma t, \quad t^k\,e^{\rho t}\cos\sigma t; \tag{2.31}$$

donde λ es una raíz real del polinomio característico (2.28) *de multiplicidad q; respectivamente, $\rho \pm i\sigma$ es un par de raíces complejas conjugadas de ese polinomio, ambos de multiplicidad q; y en ambos casos, $k \in \{0,1,\dots,q-1\}$.* □

2.3.3 Sistemas de ecuaciones lineales homogéneas

Hay una manera alternativa de analizar la ecuación lineal homogénea (2.26): con la sustitución de la variable vectorial $\boldsymbol{x}(t) := (x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$, esta ecuación asume la forma de la ecuación diferencial vectorial de primer orden (2.7), esta vez con una matriz constante de coeficientes:[7]

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\,\boldsymbol{x}(t); \quad \text{con} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

[7] Al comparar (2.32) con (2.7), se ve que $A = -P(t)$, independiente de t en el contexto actual.

Dada la condición inicial $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, esta ecuación $\boldsymbol{x}'(t) = A\,\boldsymbol{x}(t)$ permite escribir la solución única de manera elegante:

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\,\boldsymbol{x}_0 \equiv \exp(At)\,\boldsymbol{x}_0. \tag{2.33}$$

Es evidente que la fórmula (2.33) sigue válida para cualquier matriz A con entradas constantes, no necesariamente de la forma exhicida en (2.32).[8] Por lo tanto, en esta subsección se considera ecuaciones de tipo $\boldsymbol{x}'(t) = A\,\boldsymbol{x}(t)$ donde A es una matriz real constante cualquiera.

► A la hora de usar (2.33) como fórmula práctica para resolver la ecuación (2.32), surge una dificultad: ¿cómo (a) *interpretar* y (b) *calcular* la expresión matricial $\exp(At)$?

La serie de Taylor de la función exponencial $e^x = 1 + x + x^2/2 + \dots$ resuelve el problema de inerpretación: se *define* una exponencial matricial como la suma de la serie de Taylor correspondiente. Si B es una matriz $n \times n$ (real o compleja), se define[9]

$$\exp(B) := 1_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\,B^k. \quad \text{Luego,} \quad \exp(At) := 1_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\,A^k.$$

Ejemplo 2.23. Para calcular $A \mapsto \exp(At)$ en los siguientes casos, se puede usar la serie de Taylor directamente:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz D es *diagonal*, $D = \operatorname{diag}[2, 3, -1]$. Sus potencias son también diagonales: $D^k = \operatorname{diag}[2^k, 3^k, (-1)^k]$. Luego la serie de Taylor se calcula “entrada por entrada” en la diagonal:

$$\exp(Dt) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

La matriz B es *nilpotente*: B^2 solo tiene una entrada no nula, la cual es una 1 en la posición $3, 3$; mientras $B^3 = 0$ y luego $B^k = 0$ para $k \geqslant 3$. En este caso, la serie de Taylor termina en $k = 2$, y se obtiene

$$\exp(Bt) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[8]Cabe notar que el formato de la matriz A en (2.32) corresponde a la *forma canónica racional* de una aplicación lineal cíclica.

[9]La notación 1_n denota la matriz identidad $n \times n$.

La matriz C tiene un cuadrado escalar: $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1_2$. Entonces la serie de Taylor se separa en términos pares e impares:

$$\begin{aligned} \exp(Ct) &= 1_2\Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}}{(2m)!}\Big) + C\Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m+1}}{(2m+1)!}\Big) \\ &= 1_2 \cos t + C \operatorname{sen} t = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad \Diamond$$

Los tres casos del Ejemplo anterior son "típicos", porque cualquier matriz real $n \times n$ es una combinación de ellas. En más detalle: se debe recordar que una matriz *compleja* $n \times n$ es semejante a una *forma canónica de Jordan*: $A = P^{-1} J P$, donde J es una suma directa de "bloques de Jordan". Cada bloque de Jordan $J_r(\lambda) = \lambda 1_r + B_r$ es la suma de una matriz escalar $r \times r$ y una matriz nilpotente B_r (con entradas no nulas son $b_{i,i+1} = 1$). Entonces $\exp(J_r(\lambda)t) = e^{\lambda t} \exp(B_r t)$, donde el segundo factor es una matriz triangular cuyas entradas son monomios en t.

Las entradas diagonales λ de los bloques $J_r(\lambda)$ son los *autovalores* de la matriz A: pueden ser reales, $\lambda \in \mathbb{R}$; o bien complejos, $\lambda = \rho + i\sigma$. Cuando A posee autovalores complejos, estos ocurren en pares conjugados, $\lambda_\pm = \rho \pm i\sigma$, porque son raíces del polinomio característico $p_A(x) = \det(A - x 1_n)$ que tiene coeficientes reales. Es fácil comprobar la semejanza de matrices 2×2:

$$\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho + i\sigma & 0 \\ 0 & \rho - i\sigma \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \rho & -\sigma \\ \sigma & \rho \end{pmatrix} = \rho\, 1_2 + \sigma\, C.$$

En consecuencia, la parte diagonal de la suma de bloques $J_r(\lambda_+) \oplus J_r(\lambda_-)$ es semejante[10] a una suma de r bloques que son copias de $(\rho\, 1_2 + \sigma\, C)$. De esta manera, el cálculo de $\exp(At)$ en general se reduce a los tres casos particulares del Ejemplo 2.23.

Un examen minucioso de las entradas de las matrices $\exp(At)$, calculado a partir de la forma normal de Jordan de A, produce los mismos términos (2.31) ya encontrados en la Proposición 2.22.

Ejemplo 2.24. Encontrar la solución general al sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 5x(t) + 4y(t), \\ y'(t) &= -x(t) + y(t). \end{aligned}$$

[10]Para una exposición detallada de esta "forma canónica de Jordan real", se puede consulatr la sección 6.6 del libro: Georgi E. Shilov, *Linear Algebra*, Dover, New York, 1977.

Escríbase $\boldsymbol{x}(t) := (x(t), y(t))$. Entonces este es un sistema lineal homogéneo,

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\,\boldsymbol{x}(t); \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de A es[11]

$$p_A(\lambda) := \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2,$$

con una raíz doble $\lambda = 3$. Entonces 3 es un autovalor de A, de multiplicidad 2. Si $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ es un autovector de A para $\lambda = 3$, de modo que $A\boldsymbol{p} = 3\boldsymbol{p}$, se obtiene

$$\left\{ \begin{aligned} 5p_1 + 4p_2 &= 3p_1 \\ -p_1 + p_2 &= 3p_2 \end{aligned} \right\} \implies \left\{ \begin{aligned} 2p_1 + 4p_2 &= 0 \\ -p_1 - 2p_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \implies p_1 = -2p_2\,,$$

así que solo hay un autovector, $\boldsymbol{p} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, hasta múltiplos.

Esto dice que la matriz A *no es diagonalizable*, porque $\mathbb{R}^2$ no posee una base de autovectores de A. Se debe encontrar un *autovector generalizado* $\boldsymbol{q} \in \ker((A-3)^2)$ al resolver la ecuación $(A-3)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}$:

$$\left\{ \begin{aligned} 2q_1 + 4q_2 &= p_1 \\ -q_1 - 2q_2 &= p_2 \end{aligned} \right\} \implies q_1 = p_1 - 2q_2\,,$$

y se puede tomar $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, hasta múltiplos. Ahora bien, la matriz $P := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, cuyas columnas son los autovectores generalizados, realiza el cambio de base de $\mathbb{R}^2$ que lleva $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\} \mapsto \{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\}$. Por lo tanto:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =: J$$

es la forma normal de Jordan de la matriz A.

La exponencial matricial $\exp(At)$ se calcula en seguida:

$$\begin{aligned} \exp(At) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (PJP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} PJ^kP^{-1} = P\exp(Jt)P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & t\,e^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2t)e^{3t} & 4te^{3t} \\ -te^{3t} & (1-2t)e^{3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[11] El polinomio característico de una matriz $n \times n$ es $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda 1_n)$. Algunos autores usan un convenio alternativo $\det(\lambda 1_n - A) = (-1)^n \det(A - \lambda 1_n)$, que conduce a los mismos autovalores λ.

Las *columnas* de esta matriz son las soluciones a los problemas de valor inicial con condiciones iniciales respectivas $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{e}_1$ y $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{e}_2$:

$$\boldsymbol{x}(t) = \exp(At)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2t)e^{3t} \\ -te^{3t} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}(t) = \exp(At)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4te^{3t} \\ (1-2t)e^{3t} \end{pmatrix}.$$

En cambio, si la condición inicial es un autovector de A, entonces $\boldsymbol{x}(t)$ es un múltiplo de ese autovector para todo t:

$$\boldsymbol{x}(t) = \exp(At)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para la solución general, se puede tomar combinaciones lineales de dos de estas soluciones particulares:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2c_1\, e^{3t} + c_2(1+2t)e^{3t}, \\ y(t) &= -c_1\, e^{3t} - c_2 t\, e^{3t}. \end{aligned} \qquad \lozenge$$

Ejemplo 2.25. Encontrar la solución general al sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -y(t), \\ y'(t) &= x(t), \\ z'(t) &= y(t) - z(t). \end{aligned}$$

Al poner $\boldsymbol{x}(t) := (x(t), y(t), z(t))$, se obtiene un sistema lineal homogéneo:

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\,\boldsymbol{x}(t); \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de A es

$$p_A(\lambda) := \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda^2+1),$$

con autovalores distintos $\lambda = -1, i, -i$. La forma normal de Jordan real es entonces

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En una matriz (real, invertible) P tal que $P^{-1}AP = J$, la primera columna es un autovector para $\lambda = -1$, es decir, un múltiplo de $\boldsymbol{e}_3$. Las otras columnas quedan determinadas (hasta múltiplos) por la ecuación $AP = PJ$. Entonces

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J.$$

En conclusión,

$$\begin{aligned} \exp(At) = P\exp(Jt)P^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\operatorname{sen} t \\ 0 & \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t & 0 \\ \operatorname{sen} t & \cos t & 0 \\ \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - \cos t + e^{-t}) & \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t + \cos t - e^{-t}) & e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para obtener tres soluciones linealmente independientes de la ecuación $\boldsymbol{x}'(t) = A\,\boldsymbol{x}(t)$, basta tomar $\boldsymbol{x}(0)$ en una base de $\mathbb{R}^3$. Al elegir $\boldsymbol{x}(0)$ igual a $\boldsymbol{e}_3$, $2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3$, $2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ sucesivamente, las soluciones $\boldsymbol{x}_i(t) = \exp(At)\,\boldsymbol{x}(0)$ se combinan para formar la solución general:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2c_2 \cos t - 2c_3 \operatorname{sen} t, \\ y(t) &= 2c_2 \operatorname{sen} t + 2c_3 \cos t, \\ z(t) &= c_1 e^{-t} + c_2(\operatorname{sen} t - \cos t) + c_3(\operatorname{sen} t + \cos t). \end{aligned} \qquad \Diamond$$

2.3.4 Ecuaciones inhomogéneas

En general, para resolver una ecuación lineal inhomogénea con coeficientes constantes:

$$x^{(n)}(t) + a_1\,x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}\,x'(t) + a_n\,x(t) = h(t), \tag{2.34}$$

es posible buscar una solución particular con el método ya visto de variación de parámetros. Sin embargo, si el **término forzante** $h(t)$ tiene el formato de una de las funciones (2.31) – o una combinación lineal de ellas – entonces resulta más rápida "pescar" una solución particular con ese mismo formato, por prueba y error. Este procedimiento suele llamarse *el método de los coeficientes indeterminados*.

Ejemplo 2.26. Considérese la ecuación diferencial lineal inhomogénea:

$$x''(t) + 2\,x'(t) + x(t) = e^t. \tag{2.35}$$

La ecuación homogénea determinado por el lado izquierdo, $x'' + 2x' + x = 0$, tiene ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, con raíz doble $\lambda = -1$; luego su solución general, según (2.24b), es $z(t) := (c_1 + c_2 t)\, e^{-t}$. A eso hay que sumarle una solución particular $y(t)$ de la ecuación inhomogénea.

Vale la pena probar una solución posible de la forma $y(t) := p(t)\, e^t$, donde $p(t)$ es algún polinomio, debido a la presencia del exponencial e^t al lado derecho. En tal caso:

$$y(t) = p(t)\, e^t; \quad y'(t) = (p'(t) + p(t))\, e^t; \quad y''(t) = (p''(t) + 2p'(t) + p(t))\, e^t.$$

Al sustituir estas funciones en el lado izquierdo de (2.35), resulta:

$$(p''(t) + 4p'(t) + 4p(t))\, e^t = e^t.$$

Esto se reduce a la ecuación diferencial $p''(t) + 4p'(t) + 4p(t) = 1$ para el *polinomio* $p(t)$. Tiene una solución "obvia", el polinomio constante $p(t) \equiv 1/4$, con $p'(t) = p''(t) = 0$. Entonces $y(t) := \frac{1}{4} e^t$ es una solución particular; y la solución general es

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{-t} + \frac{1}{4}\, e^t. \qquad \Diamond$$

► Ahora se puede analizar las ecuaciones lineales inhomogéneas de segundo orden:

$$a\, x''(t) + b\, x'(t) + c\, x(t) = h(t). \tag{2.36}$$

En el caso de que $h(t) = q(t)\, e^{\mu t}$ con $\mu \in \mathbb{R}$, donde $q(t)$ es un polinomio de grado m, se puede probar una solución particular de la forma $y(t) := p(t)\, e^{\mu t}$ con otro polinomio $p(t)$ – de grado n, por determinar – y la misma exponencial $e^{\mu t}$. Al enchufar esta $y(t)$ en (2.36), se obtiene

$$a(p''(t) + 2\mu p'(t) + \mu^2 p(t))\, e^{\mu t} + b(p'(t) + \mu p(t))\, e^{\mu t} + c p(t)\, e^{\mu t} = q(t)\, e^{\mu t},$$

esto es,

$$\big[a p''(t) + (2a\mu + b) p'(t) + (a\mu^2 + b\mu + c) p(t)\big]\, e^{\mu t} = q(t)\, e^{\mu t},$$

la cual se reduce a la ecuación algebraica entre polinomios:

$$a p''(t) + (2a\mu + b) p'(t) + (a\mu^2 + b\mu + c) p(t) = q(t). \tag{2.37}$$

Obsérvese que el coeficiente de $p(t)$ en la última ecuación, $a\mu^2 + b\mu + c$, es el lado izquierdo de la ecuación característica (2.23). Entonces se distinguen dos casos:

Caso no resonante, $a\mu^2 + b\mu + c \neq 0$: Como la derivación reduce grados de polinomios, el lado izquierdo de (2.37) es un polinomio de grado n. Se debe tomar $n := m$ y resolver esta ecuación para los coeficientes de $p(t)$.

Caso resonante, $a\mu^2 + b\mu + c = 0$: Si $2a\mu + b \neq 0$, el lado izquierdo de (2.37) tiene grado $n - 1$; se debe tomar $n := m + 1$. En cambio, si $2a\mu + b = 0$, se debe tomar $n := m + 2$.

Ejemplo 2.27. Considérese la ecuación diferencial lineal inhomogénea:

$$x''(t) + 3\,x'(t) + 2\,x(t) = (5t + 3)e^{2t}.$$

La ecuación característica es $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, con raíces $\lambda = -1, -2$. El exponente $\mu = 2$ no es una raíz: este es un caso *no resonante*. Entonces se debe tomar $p(t) := At + B$, de grado 1, ya que $q(t) := 5t + 3$ tiene grado 1. Con

$$y(t) = (At + B)\,e^{2t}, \quad y'(t) = (2At + A + 2B)\,e^{2t}, \quad y''(t) = (4At + 4A + 4B)\,e^{2t},$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} (4At + 4A + 4B) + 3(2At + A + 2B) + 2(At + B) &= 5t + 3, \\ \text{esto es,} \quad 12At + 7A + 12B &= 5t + 3. \end{aligned}$$

Al igualar coeficientes, $12A = 5$ y $7A + 12B = 3$, se obtiene $A = 5/12$ y $B = 1/144$. Luego la solución general es

$$x(t) = c_1\,e^{-t} + c_2\,e^{-2t} + \left(\frac{5t}{12} + \frac{1}{144}\right) e^{2t}. \qquad \Diamond$$

Ejemplo 2.28. En contraste con el Ejemplo 2.27 anterior, la ecuación inhomogénea

$$x''(t) + 3\,x'(t) + 2\,x(t) = (5t + 3)e^{-2t}$$

pertenece al caso *resonante*: $\mu = -2$ es una raíz de la misma ecuación característica $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$. Por lo tanto, se debe tomar $p(t) := At^2 + Bt + C$, de grado 2. El coeficiente constante C no aparece en los cálculos de $p'(t)$ y $p''(t)$; se puede suprimirlo, así que $p(t) := At^2 + Bt$. Al derivar $y(t) = (At^2 + Bt)\,e^{-2t}$, se obtiene

$$\begin{aligned} y'(t) &= \big(-2At^2 + (2A - 2B)t + B\big)\,e^{-2t}, \\ y''(t) &= \big(4At^2 + (-8A + 4B)t + (6A - 4B)\big)\,e^{2t}, \end{aligned}$$

y de ahí se ve que

$$(4A - 6A + 2A)t^2 + (-8A + 4B + 6A - 6B + 2B)t + (6A - 4B + 3B) = 5t + 3,$$

y por lo tanto, $-2A = 5$ y $6A - B = 3$, se obtiene $A = -5/2$ y $B = -18$. (El coeficiente de t^2 se anula, necesariamente.) Luego la solución general es

$$x(t) = c_1\, e^{-t} + \left(-\frac{5t^2}{2} - \frac{t}{18} + c_2\right) e^{-2t}. \qquad \Diamond$$

Ejemplo 2.29. La ecuación diferencial lineal inhomogénea:

$$x''(t) + 3\,x'(t) + 2\,x(t) = (5t + 3)\cosh 2t$$

tiene la misma parte homogénea que los dos ejemplos anteriores, mientras que el término forzante al lado derecho es una combinación lineal de los casos anteriores:

$$(5t + 3)\cosh 2t = \frac{5t + 3}{2}\, e^{2t} + \frac{5t + 3}{2}\, e^{-2t}.$$

La *linealidad* del lado izquierdo – en función de la incógnita $x(t)$ – permite juntar las soluciones particulares con la misma combinación lineal. En detalle: si L designa el operador lineal

$$L := \frac{d^2}{dt^2} + 3\,\frac{d}{dt} + 2; \qquad L[x(t)] := x''(t) + 3\,x'(t) + 2\,x(t),$$

y si $y_1(t) := (5t/12 + 1/144)\, e^{2t}$, $y_2(t) := (-5t^2/2 - t/18)\, e^{-2t}$ denotan las soluciones respectivas, entonces

$$L[y_1(t)] = (5t + 3)\, e^{2t}, \qquad L[y_2(t)] = (5t + 3)\, e^{-2t},$$

y por lo tanto

$$L\big[\tfrac{1}{2}y_1(t) + \tfrac{1}{2}y_2(t)\big] = (5t + 3)\,\frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} = (5t + 3)\cosh 2t.$$

Entonces la solución particular buscada es

$$y(t) := \tfrac{1}{2}y_1(t) + \tfrac{1}{2}y_2(t) = \left(\frac{5t}{24} + \frac{1}{288}\right) e^{2t} - \left(\frac{5t^2}{4} + \frac{t}{36}\right) e^{-2t}.$$

Conclusión: para resolver una ecuación lineal inhomogénea (con coeficientes constantes) cuyo término forzante es una suma $h(t) = \sum_{j=1}^{k} q_j(t)\, e^{\mu_j t}$, se puede tratar cada sumando por separado y después combinar los resultados. $\Diamond$

Si el término forzante $h(t)$ en (2.36) es *oscilatorio*:

$$a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = q_1(t)\,e^{\rho t}\operatorname{sen}\sigma t + q_2(t)\,e^{\rho t}\cos\sigma t,$$

se puede aprovechar la fórmula de de Moivre:

$$e^{(\rho\pm i\sigma)t} = e^{\rho t}(\cos\sigma t \pm i\operatorname{sen}\sigma t),$$

para expresar el lado derecho como una suma de exponenciales complejas:

$$q_1(t)\,e^{\rho t}\operatorname{sen}\sigma t + q_2(t)\,e^{\rho t}\cos\sigma t = \tilde{q}_1(t)\,e^{(\rho+i\sigma)t} + \tilde{q}_2(t)\,e^{(\rho-i\sigma)t},$$

donde $\tilde{q}_1(t) = \frac{1}{2}(q_2(t) - iq_1(t))$, $\tilde{q}_2(t) = \frac{1}{2}(q_2(t) + iq_1(t))$. Entonces el análisis anterior es aplicable a los dos sumandos. Se distinguen dos casos, resonante y no resonante, como antes. Si $b^2 - 4ac \geqslant 0$, la ecuación característica no tiene raíces complejas; este es un subcaso no resonante. Si $b^2 - 4ac < 0$, el caso resonante ocurre si y sólo si las dos raíces complejas son $\rho \pm i\sigma$. Entonces se debe ensayar una solución de prueba de la forma:

$$y(t) = p_1(t)\,e^{\rho t}\operatorname{sen}\sigma t + p_2(t)\,e^{\rho t}\cos\sigma t.$$

Si m es el mayor de los grados de $q_1(t)$ y $q_2(t)$, entonces m es el grado común de los dos polinomios complejos $\tilde{q}_1(t)$, $\tilde{q}_2(t)$. Entonces se debe tomar $p_1(t)$ y $p_2(t)$ de grado m en el caso no resonante; o de grado $m + 1$ (o bien a veces $m + 2$), en el caso resonante.

Ejemplo 2.30. La siguiente ecuación corresponde a un **oscilador forzado**:

$$x''(t) + \omega^2\,x(t) = \operatorname{sen}\sigma t. \tag{2.38}$$

Se trata de un resorte elástico con una frecuencia natural ω (debido a su materia constituyente y a la ley de Hooke), sujeto a una fuerza externa períodica $h(t) = \operatorname{sen}\sigma t$ con una frecuencia σ. La ecuación característica es $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, con raíces complejas $\lambda = \pm i\omega$.

Supóngase primero que $\sigma \neq \pm\omega$; este es un caso no resonante. Los polinomios del lado derecho son constantes: $q_1(t) \equiv 1$, $q_2(t) \equiv 0$. Luego, se puedo tomar

$$y(t) = A\operatorname{sen}\sigma t + B\cos\sigma t.$$

Luego $y''(t) = -A\sigma^2\operatorname{sen}\sigma t - B\sigma^2\cos\sigma t$; la ecuación diferencial (2.38) se convierte en

$$A(\omega^2 - \sigma^2)\operatorname{sen}\sigma t + B(\omega^2 - \sigma^2)\cos\sigma t = \operatorname{sen}\sigma t,$$

con solución $A = 1/(\omega^2 - \sigma^2)$, $B = 0$. Entonces la solución particular correspondiente es $y(t) = (\omega^2 - \sigma^2)^{-1}\operatorname{sen}\sigma t$. La solución general de (2.38) es

$$x(t) = c_1\cos\omega t + c_2\operatorname{sen}\omega t + \frac{1}{\omega^2 - \sigma^2}\operatorname{sen}\sigma t.$$

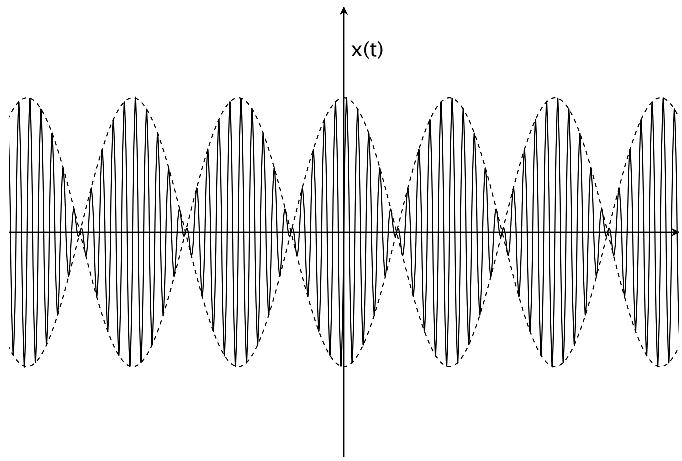

Figura 2.1: Pulsaciones de un oscilador forzado con $\omega \doteq \sigma$

Esta es una superposición de dos ondas, de frecuencias respectivas ω y σ. Nótese que si σ^2 está muy cerca de ω^2, aunque no igual, la amplitud de esta onda es muy grande pero acotada: $|x(t)| \sim 1/|\omega^2 - \sigma^2|$ cuando $t \to \pm\infty$. Este da lugar al fenómeno de *pulsaciones*: véase la Figura 2.1.

El caso *resonante* del oscilador forzado ocurre cuando $\sigma = \pm\omega$. En este caso, se anticipa una solución particular de la forma

$$y(t) = At \operatorname{sen} \omega t + Bt \cos \omega t.$$

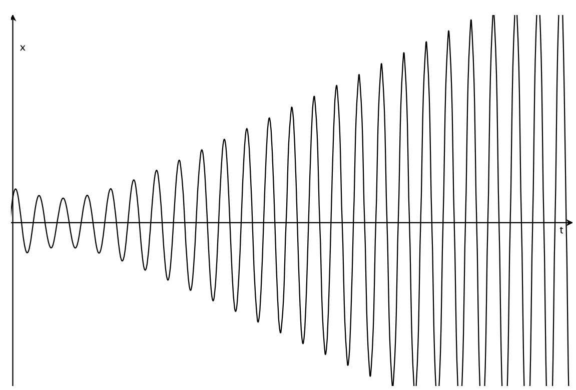

Figura 2.2: Resonancia de un oscilador forzado con $\omega = \sigma$

Ahora se calcula que:

$$\begin{aligned} y'(t) &= (A - B\omega t)\operatorname{sen}\omega t + (B + A\omega t)\cos\omega t, \\ y''(t) &= -(2B\omega + A\omega^2 t)\operatorname{sen}\omega t + (2A\omega - B\omega^2 t)\cos\omega t, \\ y''(t) + \omega^2 y(t) &= -2B\omega\operatorname{sen}\omega t + 2A\omega\cos\omega t. \end{aligned}$$

Entonces $A = 0$ y $B = -1/2\omega$, lo cual da la solución particular $y(t) = -(2\omega)^{-1} t\cos\omega t$. La solución general en este caso es

$$x(t) = c_1\cos\omega t + c_2\operatorname{sen}\omega t - \frac{1}{2\omega}\,t\cos\omega t.$$

La amplitud de esta onda crece linealmente para t grande: $|x(t)| \sim |t/2\omega|$ cuando $t \to \pm\infty$. Este crecimiento de la amplitud es la manifestación física del fenómeno de resonancia: véase la Figura 2.2.[12] ◊

[12] Las Figuras 2.1 y 2.2 fueron tomados del libro de Ahmad y Ambrosetti, pp. 109–110.

3 Problemas de contorno

El teorema de Picard garantiza la existencia y unicidad de soluciones (bajo ciertas condiciones) de una ecuación diferencial de primer o segundo orden con condiciones iniciales dadas en un instante $t = t_0$. Sin embargo, en muchas aplicaciones, se requiere resolver una ecuación diferencial bajo otras condiciones laterales.

Un problema bastante común es la búsqueda de soluciones $x(t)$ de una ecuación de segundo orden en un intervalo $a \leqslant t \leqslant b$, con información parcial sobre $x(t)$ en los extremos $t = a$ y $t = b$. En tales *problemas de contorno*, la existencia de una solución no está garantizada, ni tampoco su unicidad cuando existe.

3.1 Condiciones de frontera para ecuaciones de segundo orden

Considérese de nuevo una ecuación diferencial lineal inhomogénea de segundo orden, definido sobre un intervalo compacto $[a, b] \subset \mathbb{R}$:

$$x''(t) + h(t)\,x'(t) + k(t)\,x(t) = l(t), \tag{3.1}$$

donde $h, k, l \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas. Al usar un factor integrante:

$$g(t) := e^{H(t)}, \quad \text{con} \quad H(t) := \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds,$$

se obtiene la ecuación

$$g(t)\,x''(t) + g(t)h(t)\,x'(t) + g(t)k(t)\,x(t) = g(t)l(t),$$

en donde $g(t) > 0$ para todo $t \in [a, b]$, por su definición como exponencial de la función real $H(t)$. En esta sección, entonces, vale la pena considerar ecuaciones lineales de segundo orden de la forma:

$$g(t)\,x''(t) + p(t)\,x'(t) + q(t)\,x(t) = r(t), \tag{3.2}$$

con coeficientes continuas $g, p, q, r \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, con la hipótesis extra de que $g(t) > 0$ para $t \in [a, b]$. Esa hipótesis dice que la ecuación es *regular*, pues es equivalente a la ecuación “mónica” (3.1) obtenida al dividir ambos lados por $g(t)$.

Para obtener un problema de *valores iniciales* para esta ecuación de segundo orden, es suficiente asignar los valores de $x(t_0)$ y $x'(t_0)$ en algún punto $t_0 \in [a, b]$, por ejemplo en $t_0 = a$ o en $t_0 = b$. Como alternativa a este procedimiento, se puede fijar un par de combinaciones lineales de esas cantidades que combinan sus valores en los dos extremos.

Definición 3.1. Sea $x(t)$ una solución de la ecuación diferencial (3.2). Se puede asignar valores a dos combinaciones lineales, no proporcionales, de los valores extremos de $x(t)$ y $x'(t)$ en el intervalo compacto $[a, b]$:

$$\begin{aligned} A[x] &\equiv A_1 x(a) + A_2 x'(a) + A_3 x(b) + A_4 x'(b) = A_0\,, \\ B[x] &\equiv B_1 x(b) + B_2 x'(b) + B_3 x(a) + B_4 x'(a) = B_0\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde los $A_i, B_j \in \mathbb{R}$ son constantes. Para excluir casos triviales que se reducen a condiciones iniciales, se exige que $A_1^2 + A_2^2 > 0$ y $B_1^2 + B_1^2 > 0$. Estas asignaciones $A[x] = A_0$ y $B[x] = B_0$ se llaman **condiciones de frontera** para la ecuación (3.2).

Dícese que estas condiciones de frontera son **homogéneas** si $A_0 = B_0 = 0$. ◊

Entre las posibles condiciones de frontera, se destacan las siguientes:

- Condiciones de frontera **de Dirichlet**: este es el caso $\underline{x(a) = x(b) = 0}$.
- Condiciones de frontera **de Neumann**: el caso $\underline{x'(a) = x'(b) = 0}$.
- Condiciones de frontera **periódicas**: si los coeficientes $g(t)$, $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ son periódicas con período $(b - a)$, de modo que $p(a) = p(b)$, etc., vale la pena considerar el caso $\underline{x(a) = x(b)}$ y $\underline{x'(a) = x'(b)}$.
- Las condiciones de frontera se llaman **separadas** si $A_3 = A_4 = 0$ y $B_3 = B_4 = 0$; en cuyo caso las igualdades (3.3) se escriben así:

$$A_1 x(a) + A_2 x'(a) = A_0\,, \qquad B_1 x(b) + B_2 x'(b) = B_0\,. \tag{3.4}$$

Ejemplo 3.2. Los problemas de contorno lineales, en contraste con los problemas lineales de valores iniciales, no tienen garantía de la existencia – ni la unicidad – de una solución. Por ejemplo, considérese la ecuación lineal homogénea:

$$x''(t) + x(t) = 0, \quad \text{cuya solución general es:} \quad x(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t,$$

en el intervalo compacto $[0, \pi]$. Si $B_0 \neq 0$, no hay solución alguna que satisfaga las condiciones de frontera $x(0) = 0$, $x(\pi) = B_0$; en cambio, hay infinitas soluciones que cumplen las condiciones de frontera $x(0) = x(\pi) = 0$, porque se puede tomar $x(t) = c \operatorname{sen} t$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$. ◊

Si la ecuación diferencial es homogénea, es decir, $r(t) \equiv 0$ en (3.2), y si las condiciones de frontera también son homogéneas, es evidente que el problema de contorno admite la solución trivial: $x(t) \equiv 0$. Del ejemplo anterior se puede notar la posibilidad de otras soluciones no triviales.

Lema 3.3. *Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación lineal homogénea*

$$g(t)\, x''(t) + p(t)\, x'(t) + q(t)\, x(t) = 0.$$

Dadas unas condiciones de frontera homogéneas, $A[x] = 0$ y $B[x] = 0$ en un intervalo $[a, b]$, el problema de contorno homogénea tiene una solución no trivial si y sólo si $A[x_1]\, B[x_2] - B[x_1]\, A[x_2] = 0$.

Demostración. Sea $x(t) = c\, x_1(t) + d\, x_2(t)$ una solución del problema de contorno, para determinados valores de los coeficientes c, d. Por la linealidad de los funcionales $A[x]$ y $B[x]$ en (3.3), se puede notar que

$$\begin{aligned} A[x] &= c\, A[x_1] + d\, A[x_2] = 0, \\ B[x] &= c\, B[x_1] + d\, B[x_2] = 0. \end{aligned}$$

Este es un sistema de ecuaciones (algebraicas) lineales homogéneas para las incógnitas c y d, el cual tiene una solución no trivial, $(c, d) \neq (0, 0)$, si y solo si el determinante de los coeficientes es cero. Este determinante es $\Delta := A[x_1]\, B[x_2] - B[x_1]\, A[x_2]$. □

Corolario 3.4. *El problema de contorno inhomogéneo* (3.2) *con condiciones de frontera* (3.3) *tiene solución única si y solo si el problema homogéneo correspondiente admite únicamente la solución trivial.*

Demostración. La solución general a la ecuación inhomogénea (3.2) tiene la forma

$$x(t) = c_1\, x_1(t) + c_2\, x_2(t) + y(t),$$

donde $y(t)$ es una solución particular, con $x_1(t)$ y $x_2(t)$ como en el Lema 3.3. Ahora se plantea un par de ecuaciones (algebraicas) lineales inhomogéneas para c_1 y c_2:

$$\begin{aligned} A[x] &= c_1\, A[x_1] + c_2\, A[x_2] + A[y] = A_0\,, \\ B[x] &= c_1\, B[x_1] + c_2\, B[x_2] + B[y] = B_0\,. \end{aligned}$$

Este sistema tiene solución única (c_1, c_2), que conlleva una función única $x(t)$, si y sólo si $\Delta \neq 0$, lo que corresponde a la solución trivial única en el Lema 3.3. □

3.1.1 Funciones de Green

Dada una ecuación diferencial inhomogénea regular (3.2), junto con un par de soluciones linealmente independientes $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de la ecuación homogénea correspondiente, la Proposición 2.16 ofrece un recetario para construir soluciones particulares de (3.2) por variación de parámetros. Este recetario puede ser reorganizado en la forma de un operador integral (2.20), determinado por una función de dos variables $G(t, s)$.

La función $G(t, s)$, dada en principio por la fórmula (2.21), depende de la elección de las soluciones básicas $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Cuando se trata de problemas de contorno, es posible eliminar esa dependencia para así obtener un operador integral único, que a la vez resuelve el problema de contorno. Conviene empezar de nuevo, con las propiedades deseables de la función $G(t, s)$, para así establecer su papel en esa resolución.

Notación. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua excepto en un argumento $c \in [a, b]$, para el cual los límites unilaterales de $f(t)$ en $t = c$ existen pero tal vez no sean iguales. Dichos límites unilaterales se denotan por:

$$f(c^-) := \lim_{\delta\downarrow 0} f(c - \delta), \qquad f(c^+) := \lim_{\delta\downarrow 0} f(c + \delta).$$

Definición 3.5. Sean dadas una ecuación lineal homogénea regular:

$$g(t)\, x''(t) + p(t)\, x'(t) + q(t)\, x(t) = 0. \tag{3.5}$$

junto con condiciones de frontera homogéneas $A[x] = 0$ y $B[x] = 0$ según (3.3) en el intervalo compacto $[a, b]$. Una **función de Green** para este problema de contorno es una función *continua* $G : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ que cumple las propiedades siguientes:

(a) La derivada parcial $G_t(t, s)$ es continua en los triángulos $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$ y $a \leqslant t \leqslant s \leqslant b$; pero es discontinua en la diagonal $t = s$, con salto

$$G_t(s^+, s) - G_t(s^-, s) = \frac{1}{g(s)}\,.$$

(b) Para cada $s \in [a, b]$, la función $x_s(t) := G(t, s)$ es una solución de la ecuación diferencial (3.5) en el intervalo $[a, s)$ y también en el intervalo $(s, b]$. (Véase la Figura 3.1.)

(c) Para cada $s \in [a, b]$, la función $x_s(t) := G(t, s)$ cumple las condiciones de frontera $A[x_s] = 0$ y $B[x_s] = 0$. ◊

Proposición 3.6. *Si la ecuación lineal homogéneo* (3.5) *con condiciones de frontera homogéneas* $A[x] = 0$ *y* $B[x] = 0$ *posee solamente la solución trivial, entonces existe una única función de Green continua que satisface las propiedades (a), (b), (c) de la Definición 3.5.*

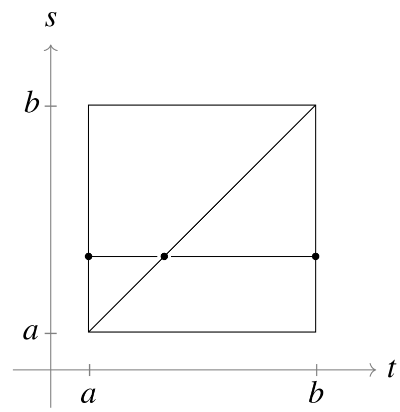

Figura 3.1: Dominio de una función de Green

Demostración. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (3.5). Si G es una función de Green cualquiera para este problema de contorno, entonces la propiedad (b) demanda que hay funciones $c_i(s)$ para $i = 1, 2, 3, 4$ y $s \in [a, b]$, tales que

$$G(t, s) = \begin{cases} c_1(s)\, x_1(t) + c_2(s)\, x_2(t) & \text{si } a \leqslant t \leqslant s, \\ c_3(s)\, x_1(t) + c_4(s)\, x_2(t) & \text{si } s \leqslant t \leqslant b. \end{cases} \tag{3.6}$$

Escríbase $d_1(s) := c_3(s) - c_1(s)$ y $d_2(s) := c_4(s) - c_2(s)$.

La continuidad de G y la propiedad (a) muestran que los c_i y los d_i son funciones continuas; y que se cumple

$$\begin{aligned} d_1(s)\, x_1(s) + d_2(s)\, x_2(s) &= 0, \\ d_1(s)\, x_1'(s) + d_2(s)\, x_2'(s) &= \frac{1}{g(s)}\,. \end{aligned} \tag{3.7a}$$

Como el wronskiano $w(s) := W(x_1, x_2)(s)$ no se anula en $[a, b]$, este par de ecuaciones determina $d_1(s)$ y $d_2(s)$ unívocamente para cada $s \in [a, b]$.

Para cada $s \in [a, b]$, entonces, la solución $x_s(t)$ tiene la forma

$$x_s(t) = \begin{cases} c_1(s)\, x_1(t) + c_2(s)\, x_2(t) & \text{si } a \leqslant t \leqslant s, \\ \big(c_1(s) + d_1(s)\big)\, x_1(t) + \big(c_2(s) + d_2(s)\big)\, x_2(t) & \text{si } s \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

Al aplicar las condiciones de frontera, $A[x_s] = 0$ y $B[x_s] = 0$, resulta entonces que

$$\begin{aligned} c_1(s)\, A[x_1] + c_2(s)\, A[x_2] &= \alpha(s), \\ c_1(s)\, B[x_1] + c_2(s)\, B[x_2] &= \beta(s), \end{aligned} \tag{3.7b}$$

donde los términos al lado derecho son:

$$\begin{aligned}
\alpha(s) &:= -A_3\big(d_1(s)\,x_1(b) + d_2(s)\,x_2(b)\big) - A_4\big(d_1(s)\,x_1'(b) + d_2(s)\,x_2'(b)\big), \\
\beta(s) &:= -B_1\big(d_1(s)\,x_1(b) + d_2(s)\,x_2(b)\big) - B_2\big(d_1(s)\,x_1'(b) + d_2(s)\,x_2'(b)\big).
\end{aligned}$$

Por la hipótesis y el Lema 3.3, se obtiene $A[x_1]\,B[x_2] - B[x_1]\,A[x_2] = 0$; lo cual implica que el sistema (3.7) determina $c_1(s)$ y $c_2(s)$ de manera única.

Para comprobar la *existencia* y continuidad de la función G, es cuestión de recorrer este procedimiento en el sentido inverso. La función $1/g(s)$ es continua en $[a, b]$, por hipótesis; por ende, las soluciones únicas $d_1(s)$, $d_2(s)$ de (3.7a) son también continuas. En seguida, las funciones $\alpha(s)$ y $\beta(s)$ son continuas, así que las soluciones únicas $c_1(s)$, $c_2(s)$ de (3.7b) son continuas. Así, al haber determinado los $c_i(s)$, la fórmula (3.6) se adopta como una *definición* de $G(t, s)$, continua en la variable s. Su continuidad en t es consecuencia de la continuidad de las soluciones básicas x_1 y x_2. □

Ejemplo 3.7. Considérese el problema de contorno:

$$x''(t) + x(t) = 0; \qquad x(0) = x(\pi/2) = 0.$$

La solución general a la ecuación diferencial es

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t.$$

Es evidente que $x(0) = c_1$ y $x(\pi/2) = c_2$. Por lo tanto, las condiciones de frontera exigen $c_1 = c_2 = 0$: la única solución a este problema homogéneo es la trivial.

Tómese $x_1(t) := \cos t$ y $x_2(t) := \operatorname{sen} t$ como un par de soluciones de $x''(t) + x(t) = 0$. Su wronskiano es $w(t) = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t \equiv 1$. En este caso, las ecuaciones (3.7a) son:

$$d_1(s) \cos s + d_2(s) \operatorname{sen} s = 0, \qquad -d_1(s) \operatorname{sen} s + d_2(s) \cos s = 1,$$

cuya solución es $d_1(s) = -\operatorname{sen} s$, $d_2(s) = \cos s$.

Usando $A[x] := x(0)$, $B[x] := x(\pi/2)$, de modo que $A_3 = A_4 = B_2 = 0$, $B_1 = 1$, se obtiene $\alpha(s) = 0$, $\beta(s) = -d_2(s) = -\cos s$. De las ecuaciones (3.7b) se obtiene

$$\begin{aligned}
c_1(s) &= 0, & c_3(s) &= c_1(s) + d_1(s) = -\operatorname{sen} s, \\
c_2(s) &= -\cos s, & c_4(s) &= c_2(s) + d_2(s) = 0.
\end{aligned}$$

Entonces, según (3.6), la función de Green para este problema está dada por:

$$G(t, s) = \begin{cases} -\cos s \operatorname{sen} t, & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \pi/2, \\ -\operatorname{sen} s \cos t, & \text{si } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \pi/2. \end{cases} \qquad \Diamond$$

Proposición 3.8. *Si la ecuación homogénea* (3.5) *con condiciones de frontera homogéneas* $A[x] = 0$ *y* $B[x] = 0$ *posee solamente la solución trivial, entonces la solución única de la ecuación inhomogénea* (3.2)*, sujeta a* $A[x] = 0$ *y* $B[x] = 0$*, está dada por*

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)\,r(s)\,ds = \int_a^t G(t,s)\,r(s)\,ds + \int_t^b G(t,s)\,r(s)\,ds. \tag{3.8}$$

Demostración. Por su construcción (3.6) la función de Green es continua y la derivada parcial $G_t(t,s)$ existe[1] en los dos triángulos $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$ y $a \leqslant t \leqslant s \leqslant b$. Luego, se puede derivar las integrales al lado derecho de la fórmula (3.8) mediante la fórmula de Leibniz:

$$\begin{aligned} y'(t) &:= G(t,t)\,r(t) + \int_a^t G_t(t,s)\,r(s)\,ds - G(t,t)\,r(t) + \int_t^b G_t(t,s)\,r(s)\,ds \\ &= \int_a^t G_t(t,s)\,r(s)\,ds + \int_t^b G_t(t,s)\,r(s)\,ds = \int_a^b G_t(t,s)\,r(s)\,ds. \end{aligned} \tag{3.9}$$

La función $G_t(t,s)$ es continua en los dos triángulos por separado. En cada punto (t,t) de la diagonal, esta función puede calcularse por límites unilaterales, de dos maneras:

$$G_t(t,t^-) = G_t(t^+,t) \quad \text{mientras} \quad G_t(t,t^+) = G_t(t^-,t).$$

Al derivar $y(t)$ por segunda vez, se obtiene

$$\begin{aligned} y''(t) &= G_t(t,t^-)\,r(t) + \int_a^t G_{tt}(t,s)\,r(s)\,ds - G_t(t,t^+)\,r(t) + \int_t^b G_{tt}(t,s)\,r(s)\,ds \\ &= \Big(G_t(t^+,t) - G_t(t^-,t)\Big) r(t) + \int_a^b G_{tt}(t,s)\,r(s)\,ds \\ &= \frac{r(t)}{g(t)} + \int_a^b G_{tt}(t,s)\,r(s)\,ds. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Al combinar (3.8), (3.9) y (3.10), se obtiene

$$\begin{aligned} &g(t)\,y''(t) + p(t)\,y'(t) + q(t)\,y(t) \\ &\qquad = r(t) + \int_a^b \big[g(t)\,G_{tt}(t,s) + p(t)\,G_t(t,s) + q(t)\,G(t,s)\big]\,ds \\ &\qquad = r(t) + \int_a^b \big[g(t)\,x_s''(t) + p(t)\,x_s'(t) + q(t)\,x_s(t)\big]\,ds = r(t), \end{aligned}$$

[1] En los extremos de un intervalo, se define la derivada parcial $t \mapsto G_t(t,s)$ por límites unilaterales.

porque $x_s(t) := G(t,s)$ es una solución de la ecuación homogénea, para $s \in [a,b]$. Se ha verificado que el lado derecho de (3.8) satisface la ecuación diferencial (3.2). Las condiciones de frontera se cumplen:

$$y(t) = \int_a^b x_s(t)\, r(s)\, ds \implies A[y] = \int_a^b A[x_s]\, r(s)\, ds = \int_a^b 0\, ds = 0$$

por la linealidad del funcional A, y de igual manera $B[y] = 0$. Luego $y(t)$ coincide con la solución única del problema de contorno. $\square$

Ejemplo 3.9. Considérese la ecuación diferencial lineal inhomogéneo:

$$x''(t) + x(t) = t,$$

sujeto a las condiciones de frontera de Dirichlet: $x(0) = x(\frac{\pi}{2}) = 0$.

La solución (única) de este problema de contorno está dada por:

$$y(t) = \int_0^{\pi/2} G(t,s)\, s\, ds,$$

donde $G(t,s)$ es la función de Green del Ejemplo 3.7. En efecto:

$$\begin{aligned} y(t) &= -\int_0^t (\operatorname{sen} s \cos t) s\, ds - \int_t^{\pi/2} (\cos s \operatorname{sen} t) s\, ds \\ &= -\cos t(-t\cos t + \operatorname{sen} t) - \operatorname{sen} t\Big(\frac{\pi}{2} - t\operatorname{sen} t - \cos t\Big) \\ &= t - \frac{\pi}{2}\operatorname{sen} t. \end{aligned}$$ ◊

Ejemplo 3.10. Denótese el lado izquierdo de las ecuaciones homogénea (3.5) e inhomogénea (3.2) por

$$L[x(t)] := g(t)\, x''(t) + p(t)\, x'(t) + q(t)\, x(t).$$

Una variante de la Proposición 3.8 es la búsqueda de una solución a $L[x(t)] = r(t)$ sujeto a *condiciones de frontera no homogéneas* $A[x] = A_0$ y $B[x] = B_0$. Siempre bajo la hipótesis de que el problema homogéneo $L[x(t)] = 0$; $A[x] = 0$, $B[x] = 0$ tiene la solución trivial solamente, se puede descomponer el problema en dos partes:

- ⋄ encontrar $y(t)$ que cumple $L[y(t)] = r(t)$, con $A[y] = 0$, $B[y] = 0$;
- ⋄ encontrar $z(t)$ que cumple $L[z(t)] = 0$, con $A[z] = A_0$, $B[z] = B_0$.

Entonces la suma $x(t) := y(t) + z(t)$ es la solución buscada.

En efecto, tanto L como las combinaciones A y B son operadores lineales, así que

$$L[x(t)] = L[y(t) + z(t)] = L[y(t)] + L[z(t)] = r(t) + 0 = r(t),$$

mientras $A[z] = A[x] + A[y] = A_0$ y de igual modo $B[z] = B[x] + B[y] = B_0$.

Por ejemplo, considérese el problema de contorno:

$$x''(t) + x(t) = t, \quad \text{sujeto a} \quad x(0) = 0,\ x(\tfrac{\pi}{2}) = 1.$$

Del Ejemplo 3.9, se sabe que $y(t) := t - \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} t$ cumple la ecuación diferencial dada, con $y(0) = y(\pi/2) = 0$. Por otro lado, la ecuación homogénea $x''(t) + x(t) = 0$ tiene solución general $c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$. Las condiciones $z(0) = 0$, $z(\frac{\pi}{2}) = 1$ demandan $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$, así que $z(t) := \operatorname{sen} t$ cumple las condiciones de frontera. Por lo tanto

$$x(t) = y(t) + z(t) = t - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \operatorname{sen} t$$

es la solución buscada. ◊

3.2 Problemas de Sturm y Liouville

Algunos problemas de contorno homogéneas admiten soluciones no triviales, según el criterio del Lema 3.3. Este fenómeno resulta ser de interés cuando el coeficiente de $x(t)$ depende de un parámetro real λ; las soluciones no triviales existen solamente para ciertos valores de λ, denotados “autovalores” del problema de contorno. Las soluciones no triviales correspondientes se llaman “autofunciones” del problema. Estos valores y funciones juegan un papel importante en diversas aplicaciones.

Conviene volver al punto de partida (3.1), con la siguiente variante: en vez de tener un término inhomogéneo, se introduce un cambio en el coeficiente de $x(t)$:

$$x''(t) + h(t)\, x'(t) + [k(t) + \lambda l(t)]\, x(t) = 0,$$

donde $h, k, l \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ son continuas y $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro real.[2] Se plantea también unas condiciones de frontera separadas (3.4):

$$A[x] \equiv A_1 x(a) + A_2 x'(a) = A_0\,, \qquad B[x] \equiv B_1 x(b) + B_2 x'(b) = B_0\,.$$

[2] ¿Qué cosa es un **parámetro**? Es simplemente una variable extra, cuya variabilidad no interesa (por ahora), con un valor no determinado o por determinar posteriormente. Así, por ejemplo, las “constantes arbitrarias” mencionadas en los capítulos anteriores pueden considerarse como “parámetros” de la solución general de una ecuación diferencial.

De nuevo, se introduce un factor integrante $p(t)$, tal que $p(t) > 0$ para todo $t \in [a, b]$:

$$p(t)\, x''(t) + p(t)h(t)\, x'(t) + p(t)[k(t) + \lambda\, l(t)]\, x(t) = 0.$$

La relación $p'(t) = p(t)h(t)$ para este factor integrante implica que

$$\frac{d}{dt}\big(p(t)\, x'(t)\big) = p(t)\, x''(t) + p(t)h(t)\, x'(t) = -p(t)[k(t) + \lambda\, l(t)]\, x(t).$$

Si se define $q(t) := -p(t)k(t)$ y $r(t) := p(t)l(t)$, la ecuación dada, junto con sus condiciones de frontera, asume la forma

$$\frac{d}{dt}\big(p(t)\, x'(t)\big) - q(t)\, x(t) + \lambda\, r(t)\, x(t) = 0. \tag{3.11}$$

Definición 3.11. Sean $p, q, r\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ tres funciones continuas, definidas en un intervalo compacto $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tales que $p(t) > 0$ y $r(t) > 0$ para todo $t \in [a, b]$. La ecuación diferencial en (3.11) se llama una **ecuación de Sturm y Liouville** regular,[3] con parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

Un **problema de Sturm y Liouville** regular es una ecuación de Sturm y Liouville regular junto con dos *condiciones de frontera separadas* (3.4). ◊

Ejemplo 3.12. Considérese el problema de Sturm y Liouville en el intervalo $[0, \pi]$:

$$x''(t) + \lambda x(t) = 0; \qquad x(0) = x(\pi) = 0. \tag{3.12}$$

La ecuación $x''(t) + \lambda x(t) = 0$ es lineal y homogénea, con coeficientes constantes. La naturaleza de sus soluciones depende del signo de λ. Se debe examinar tres casos.

- Si $\lambda < 0$, escríbase $\lambda = -\mu^2$ con $\mu > 0$. La solución general es, por (2.24a):

  $$x(t) = c_1\, e^{\mu t} + c_2\, e^{-\mu t}.$$

  La condición $x(0) = 0$ implica $c_1 + c_2 = 0$, así que $c_2 = -c_1$. La condición $x(\pi) = 0$ entonces implica $c_1(e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}) = 2c_1 \operatorname{senh}(\mu\pi) = 0$, así que $c_1 = 0$ y de rebote $c_2 = 0$. El problema solo posee la solución trivial $x(t) \equiv 0$.

- Si $\lambda = 0$, la solución general (2.24b) es $x(t) = c_1 + c_2\, t$; las condiciones de frontera implican $c_1 = 0$, $c_2\pi = 0$. De nuevo, la única solución es la trivial, $x(t) \equiv 0$.

[3] Más adelante habrá una discusión de casos *singulares*, si p se anula en uno punto de $[a, b]$, o el intervalo de definición no es compacto, o las condiciones de frontera no son separadas.

- Si $\lambda > 0$, escríbase $\lambda = \omega^2$ con $\omega > 0$. La solución general es, por (2.24c):

  $$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t.$$

  La condición $x(0) = 0$ implica $c_1 = 0$; la condición $x(\pi) = 0$ entonces implica $c_2 \operatorname{sen} \omega\pi = 0$. En este caso hay soluciones no triviales (con $c_2 \neq 0$) si y solo si ω es un número entero:

  $$\operatorname{sen} \omega\pi = 0 \iff \omega \in \mathbb{Z}.$$

En resumen: el problema (3.12) posee una solución no trivial (única hasta múltiplos escalares) si y sólo $\lambda = n^2$ donde $n \in \mathbb{N}^*$ es un entero positivo:

$$\left\{ \begin{array}{c} x''(t) + n^2 x(t) = 0 \\ x(0) = x(\pi) = 0 \end{array} \right\} \implies x(t) = C \operatorname{sen} nt.$$

Los valores posibles del parámetro $\lambda = n^2 \in \{1, 4, 9, \dots\}$ se llaman **autovalores** de este problema de Sturm y Liouville (3.12). Las funciones acompañantes $x(t) = \operatorname{sen} nt$ son las **autofunciones** correspondientes. ◊

El término *autovalor*, con sus *autovectores* concomitantes, se debe a la presencia de un operador lineal L en un problema de Sturm y Liouville. Dos clases de operadores lineales son de especial importancia:

- el *operador diferencial* $D \equiv d/dt : x(t) \mapsto x'(t)$;
- los *operadores de multiplicación*[4] tales como $q(t)\colon x(t) \mapsto q(t)\,x(t)$.

Definición 3.13. Sean $p\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $p(t) > 0$ para $t \in [a, b]$; sean $q, r\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas, con $r(t) > 0$ para $t \in [a, b]$. La abreviatura

$$L := D\,[p(t)\,D] - q(t) \tag{3.13a}$$

designa un operador lineal que permite escribir la ecuación (3.11) en el formato:

$$L[x(t)] + \lambda r(t)\,x(t) = 0. \tag{3.13b}$$

Para que el operador L esté bien definida, es necesario declarar el espacio vectorial sobre el cual L actúa. Este es el espacio $\mathcal{V}$ de funciones $x\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ de clase C^2 *que cumplen las condiciones de frontera* (3.4).[5]

[4] Sería más lógico denotar este operador por q en vez de $q(t)$, escribiendo $q\colon x \mapsto qx$. Sin embargo, en estas notas ya es de uso corriente que el símbolo $\underline{q(t)}$ denota "la función cuyo valor en t es $q(t)$"; y de igual forma se designa el operador de multiplicación correspondiente.

[5] La frase *de clase* C^2 significa "dos veces continuamente diferenciable".

El operador lineal $L\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ así definido determina un problema de Sturm y Liouville regular (3.13). Cada $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que este problema *admite una solución no trivial* $x(t)$ es un **autovalor** del problema; dicha solución $x(t)$ es la **autofunción** correspondiente. $\Diamond$

Lema 3.14. *Considérese un problema de Sturm y Liouville regular* (3.11) *con condiciones de frontera* $x(a) = x(b) = 0$. *Todos sus autovalores son reales. Si además* $q(t) \geqslant 0$*, entonces los autovalores son positivos.*

Demostración. Al multiplicar los dos lados de la ecuación (3.11) por una solución real $x(t)$, se obtiene

$$\frac{d}{dt}\bigl(p(t)\,x'(t)\bigr)\,x(t) - q(t)\,x(t)^2 + \lambda r(t)\,x(t)^2 = 0.$$

Se puede simplificar la integral del primero término con una integración por partes:

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{d}{dt}\bigl(p(t)\,x'(t)\bigr)\,x(t)\,dt &= p(b)\,x'(b)\,x(b) - p(a)\,x'(a)\,x(a) - \int_a^b \bigl(p(t)\,x'(t)\bigr)\,x'(t)\,dt \\ &= -\int_a^b p(t)\,x'(t)^2\,dt,\end{aligned}$$

al aplicar las condiciones $x(a) = x(b) = 0$ para cancelar los primeros dos términos al lado derecho. Por lo tanto, se obtiene

$$\lambda \int_a^b r(t)\,x(t)^2\,dt = \int_a^b p(t)\,x'(t)^2\,dt + \int_a^b q(t)\,x(t)^2\,dt. \tag{3.14}$$

Si $x(t)$ es una autofunción real del problema para el autovalor λ, entonces $x(t)^2$ y $x'(t)^2$ son funciones continuas no negativas.[6] Entonces (3.14) es una ecuación de la forma $\lambda R = P + Q$ con $P > 0$ y $R > 0$, así que $\lambda = (P + Q)/R \in \mathbb{R}$.

Además, si $q(t) \geqslant 0$ para $t \in [a, b]$, entonces $Q \geqslant 0$ y por ende $P + Q > 0$; se concluye que $\lambda = (P + Q)/R > 0$. $\square$

En el Ejemplo 3.12, en donde $q(t) \equiv 0$, los autovalores son $\lambda = n^2$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; todos son positivos.

► La positividad de la función $r(t)$ implica que el lado izquierdo de la ecuación (3.14) es un múltiplo positivo de λ, la cual garantiza las conclusiones sobre el signo de λ. La función $r(t)$ juega el papel de "función de peso" en esta integral.

[6] El caso de soluciones complejas es similar: procede multiplicar (3.11) por $\overline{x(t)}$ y reemplazar los términos $x(t)^2$, $x'(t)^2$ por $|x(t)|^2$, $|x'(t)|^2$.

Definición 3.15. Sea $[a, b]$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}$ y sea $r\colon (a, b) \to (0, +\infty)$ una función continua.[7] Se define el **producto escalar** de dos funciones reales continuas $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, con la **función de peso** r, por la fórmula:

$$(f \mid g) := \int_a^b r(t)\, f(t)\, g(t)\, dt. \tag{3.15}$$

Es evidente que la forma $(\cdot \mid \cdot)$ es $\mathbb{R}$-bilineal, simétrica, y definida positiva:[8]

$$(f \mid f) = \int_a^b r(t)\, f(t)^2\, dt \geqslant 0, \quad \text{con igualdad si y solo si} \quad f(t) \equiv 0 \text{ en } [a, b].$$

Dícese que f y g son **ortogonales** con respecto a la función de peso r, si $(f \mid g) = 0$. ◊

Proposición 3.16. *Sean λ, μ dos autovalores distintos del problema* (3.11) *en el intervalo $[a, b]$, con $x(a) = x(b) = 0$. Las autofunciones correspondientes $x(t)$, $y(t)$ son ortogonales:*

$$\int_a^b r(t)\, x(t)\, y(t)\, dt = 0. \tag{3.16}$$

Demostración. El operador L de (3.13a) cumple la relación siguiente:

$$\begin{aligned} x(t)\, L[y(t)] - L[x(t)]\, y(t) &= x(t)\, \frac{d}{dt}\big(p(t)y'(t)\big) - \frac{d}{dt}\big(p(t)x'(t)\big)\, y(t) \\ &= x(t)\big[p'(t)y'(t) + p(t)y''(t)\big] - \big[p'(t)x'(t) + p(t)x''(t)\big]\, y(t) \\ &= p'(t)\big[x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\big] + p(t)\big[x(t)y''(t) - x''(t)y(t)\big] \\ &= \frac{d}{dt}\Big(p(t)\big[x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\big]\Big). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Esta relación se conoce como la **identidad de Lagrange**.

Por otro lado, la ecuación (3.13b) implica que

$$x(t)\, L[y(t)] - L[x(t)]\, y(t) = (\lambda - \mu)\, r(t)\, x(t)\, y(t).$$

Al calcular la integral de estas expresiones sobre el intervalo $[a, b]$, se obtiene

$$(\lambda - \mu) \int_a^b r(t)\, x(t)\, y(t)\, dt = \Big[p(t)\big(x(t)\, y'(t) - x'(t)\, y(t)\big)\Big]_{t=a}^{t=b}. \tag{3.18}$$

El lado derecho es cero, por las condiciones de frontera $x(a) = x(b) = 0$, $y(a) = y(b) = 0$. Se concluye que $(\lambda - \mu)\,(x \mid y) = 0$; luego $(x \mid y) = 0$ porque $\lambda \neq \mu$. □

[7] En la integrales que siguen, los valores de r es los extremos no son importantes; la continuidad de r tampoco es estrictamente necesario, pero sirve para garantizar la existencia de las integrales.

[8] Nuevamente, la continuidad de f y g no es indispensable, pero garantiza la existencia de las integrales. Cabe notar que para funciones con valores en $\mathbb{C}$, la definición sería $(f \mid g) := \int_a^b r(t)\, \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$. Esta es un forma sesquilineal, hermítica, definida positiva.

Fíjese que el lado derecho de la identidad de Lagrange (3.17) tiene integral cero sobre el intervalo $[a, b]$, por las condiciones de frontera. Entonces el lado izquierdo también tiene integral cero:

$$(x \mid Ly) - (Lx \mid y) = \int_a^b x(t)\, L[y(t)] - L[x(t)]\, y(t)\, dt = 0.$$

La igualdad $(x|Ly) = (Lx|y)$ dice que el operador diferencial L de (3.13a) es *simétrico* sobre el espacio de soluciones $\mathcal{V}$. De hecho, como el dominio $\mathcal{V}$ de L incorpora las condiciones de frontera, suele decirse que L es un operador **autoadjunto**.

⟦ Para dar una explicación más precisa de las propiedades de L, habría que invocar la teoría de operadores lineales en dimensión infinita. Brevemente: la presencia del producto escalar real (3.15) hace de $\mathcal{V}$ un espacio vectorial (real) *prehilbertiano*. Su compleción en la norma $\|x\|_2 := \sqrt{(x \mid x)}$ es un *espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$; L se considera como un operador lineal (con dominio denso) sobre $\mathcal{H}$. Como tal, L posee un *operador adjunto* L^* que satisface $(x \mid L^* y) = (Lx \mid y)$; su dominio consiste de vectores $y \in \mathcal{H}$ tales que $(Lx \mid y)$ existe si $x \in \operatorname{Dom} L$. Al ser $(x|Ly) = (Lx|y)$ y además $\operatorname{Dom} L^* = \operatorname{Dom} L$, resulta que $L^* = L$, es decir, L es autoadjunto. La teoría de los espacios de Hilbert garantiza que todos los autovalores de L son reales. ⟧

Es posible mostrar, bajo las hipótesis del Lema 3.14, que un problema de Sturm y Liouville *regular* tiene infinitos autovalores y que ellos son *simples*: el espacio vectorial de autofunciones para un determinado autovalor es unidimensional. Entonces se suele ordenar los autovalores en una sucesión creciente, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$, donde además $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$. El Ejemplo 3.12, con $\lambda_n = n^2$, es típico (aunque en general no es posible dar fórmulas cerradas para los λ_n).

Ejemplo 3.17. El problema de Sturm y Liouville *periódico*:

$$x''(t) + \lambda x(t) = 0; \qquad x(-\pi) = x(\pi),\ x'(-\pi) = x'(\pi)$$

es *singular*, por cuanto las condiciones de frontera no son separadas. En este caso, $\lambda_1 = 0$ es un autovalor porque las soluciones constantes de $x''(t) = 0$ cumplen las condiciones de frontera. Además, el $\lambda_{n+1} = n^2$, con $n \in \mathbb{N}^*$, es un autovalor doble, porque $\operatorname{sen} nt$ y $\cos nt$ son autofunciones linealmente independientes para este autovalor. ◊

En el próximo capítulo se estudiará diversos ecuaciones diferenciales lineales que dan lugar a problema de Sturm y Liouville singulares.

4 Resolución por series de potencias

Algunas ecuaciones diferenciales admiten soluciones que pueden expresarse "en forma cerrada". Entre ellas, las ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes tienen familias de soluciones explícitas compuestas de funciones exponenciales o trigonométricas, multiplicadas por polinomios en algunos casos. Ciertas ecuaciones de Euler poseen soluciones polinomiales con factores logarítmicos. Pero en general, no siempre es posible expresar las soluciones en términos de funciones conocidas.

Para superar esa limitación, se debe ampliar el catálogo de las ecuaciones diferenciales resolubles en forma explícita. En primer lugar, cabe recordar que muchas funciones "conocidas" fueron introducidas como antiderivadas de otras funciones. Así, la *función logarítmica* de Napier se define como una primitiva de la función $1/t$; la llamada *función de error* de la teoría de probabilidad es proporcional a una primitiva de $e^{-t^2/2}$; etcétera. Una primitiva de una función $f(t)$ no es otra cosa que la solución a un problema de valor inicial $x'(t) = f(t)$, $x(t_0) = x_0$. En este contexto, se puede (y debe) adoptar el punto de vista de que la resolución de una ecuación diferencial sirve para *introducir y definir nuevas funciones especiales*.

Una función (real o compleja) se llama *analítica* si es suave y además está representada por su serie de Taylor en un intervalo apropiado. Las funciones analíticas se "conocen" al dar una receta para los coeficientes de sus series de Taylor. De esa manera, el problema de buscar una solución analítica para una ecuación diferencial se reduce a resolver algunas identidades algebraicas para esos coeficientes de Taylor.

4.1 Soluciones analíticas a ecuaciones lineales

Antes de emprender la tarea de buscar soluciones analíticas, conviene repasar brevemente la teoría de series de Taylor.

Definición 4.1. Una **serie de potencias** real, centrada en t_0, es una sumatoria

$$f(t) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - t_0)^k \quad \text{con cada} \quad a_k \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Cada serie de potencias tiene un **radio de convergencia** R, con $0 \leqslant R \leqslant \infty$, tal que la serie converge absolutamente para $|t - t_0| < R$ y diverge para $|t - t_0| > R$. (El comportamiento en los valores $t = t_0 \pm R$ depende de la serie particular.) Si $R = 0$, la serie solo converge en $t = t_0$ y por eso es inútil para representar una función. Si $R = \infty$, la serie converge absolutamente para todo t. Cuando $R > 0$, la serie define una función $f(t)$ en el intervalo abierto $(t_0 - R, t_0 + R)$. ◊

Si $R > 0$ y si $0 < r < R$, la serie de potencias (4.1) converge *uniformemente* en el intervalo compacto $[t_0 - r, t_0 + r]$. Por lo tanto, la suma $f(t)$ es continua – por ser un límite uniforme de polinomios – en ese intervalo; y de rebote, f es continua en todo $(t_0 - R, t_0 + R)$. Además, f es diferenciable en $(t_0 - R, t_0 + R)$, porque se puede derivar la serie término por término en cada $(t_0 - r, t_0 + r)$:

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (t - t_0)^{k-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} (t - t_0)^m.$$

Nótese que $f'(t)$ es también continua en $(t_0 - R, t_0 + R)$, porque la nueva serie tiene el mismo radio de convergencia. Por el criterio del cociente, el radio de convergencia obedece

$$R = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

si el límite existe.[1] Por inducción, se ve que $f(t)$ es suave (es decir, indefinidamente diferenciable).

Definición 4.2. La **serie de Taylor**, centrada en t_0, de una función suave $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ tal que $t_0 \in (a, b)$, es la serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k, \tag{4.2}$$

toda vez que esta serie tenga radio de convergencia $R > 0$.

Dícese que esta serie de Taylor **representa** la función suave f en el subintervalo $(t_0 - c, t_0 + c) \subseteq (a, b)$ si $R \geqslant c$ y si la serie converge a la suma $f(t)$ para $|t - t_0| < c$.

La función f es **analítica**[2] en el intervalo (a, b) si para cada $t_0 \in (a, b)$ hay un subintervalo $(t_0 - c, t_0 + c)$ en el cual f está representada por su serie de Taylor (4.2). ◊

⟦ Hay un ejemplo bien conocido de una función suave en $\mathbb{R}$ cuya serie de Taylor (centrada en 0) no la representa: si $f(t) := e^{-1/t^2}$ con $f(0) := 0$, se puede comprobar que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, así que la serie de Taylor es la serie nula, con suma idénticamente 0, aunque $f(t) > 0$ para $t \neq 0$. (Este contraejemplo no es aplicable para variable compleja, porque $F(z) := e^{-1/z^2}$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$.) ⟧

[1] Más generalmente, se puede usar la fórmula $1/R = \limsup_{k\to\infty} |a_{k+1}/a_k|$.

[2] Esta definición es aplicable a funciones de variable compleja, *mutatis mutandis* – por ejemplo, se debe reemplazar el intervalo $(t_0 - c, t_0 + c)$ por un disco $\{\, z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < c \,\}$. Sin embargo, las funciones analíticas complejas tienen propiedades no compartidas por sus análogos reales: por ejemplo, una función diferenciable de variable compleja es automáticamente analítica y por ende también suave. Suele usarse la palabra **holomorfa** como sinónimo de *analítica* en el contexto de variable compleja.

Ejemplo 4.3. Considérese la función $f(t) := 1/(1-t)$ para $t \neq 1$. Es fácil comprobar por inducción que $f^{(k)}(t) = k!(1-t)^{-k-1}$, así que la serie de Taylor centrada en 0 es la *serie geométrica*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} t^k.$$

Las sumas parciales de la serie geométrica obedecen

$$\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t} \longrightarrow \frac{1}{1-t} = f(t) \quad \text{si} \quad -1 < t < 1.$$

Para $|t| \geqslant 1$, la serie geométrica diverge. Entonces, la serie geométrica representa $f(t)$ en el intervalo $(-1,1)$.

Fíjese que $f^{(k)}(-1) = k!\,2^{-k-1}$. Entonces la serie de Taylor centrada en -1 es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(-1)}{k!} (t+1)^k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t+1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \frac{2}{2-(t+1)} = \frac{1}{1-t}$$

y esta serie tiene radio de convergencia $R = \lim_{k\to\infty} 2^{-k-1}/2^{-k-2} = 2$. Entonces esta segunda serie de potencias representa $f(t)$ en el intervalo $(-3,1)$.

De igual manera, si $t_0 > 1$, se puede hallar una serie de Taylor centrada en t_0 que representa $f(t) = 1/(1-t)$ en el intervalo $(1, 2t_0 - 1)$. Se concluye que $f(t)$ es analítica en su dominio $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, aunque esté representada por diversos series de potencias en diferentes subintervalos de este dominio. $\lozenge$

Si $f(t)$ y $g(t)$ son dos funciones analíticas, representadas por sus series de Taylor centradas en t_0 en un intervalo común $(t_0 - c, t_0 + c)$, entonces el producto $f(t)g(t)$ es también analítico en ese intervalo, representado por

$$f(t)g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(fg)^{(k)}(t_0)}{k!} (t-t_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(t_0)}{j!} \frac{g^{(k-j)}(t_0)}{(k-j)!} (t-t_0)^k$$

porque el lado derecho es el producto de Cauchy de las series de Taylor (4.2) de $f(t)$ y $g(t)$, el cual converge absoluta y uniformemente en $[t_0 - r, t_0 + r]$ cuando $0 < r < c$. De igual manera, si $f(t_0) \neq 0$, entonces $f(t) \neq 0$ en $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ para algún $\delta > 0$; y el recíproco $1/f(t)$ es una función analítica en $(t_0 - c', t_0 + c')$ donde $c' := \min\{c, \delta\}$.

En particular, una *función racional*, esto es, un cociente de dos polinomios $p(t)/q(t)$, tal que $q(t_0) \neq 0$, es analítica en un vecindario de t_0.

Definición 4.4. Considérese una ecuación diferencial lineal homogénea

$$a_0(t)\, x^{(n)}(t) + a_1(t)\, x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)\, x'(t) + a_n(t)\, x(t) = 0, \tag{4.3}$$

donde los coeficientes $a_0(t), \dots, a_n(t)$ son funciones *analíticas* en un intervalo común $(t_0 - c, t_0 + c)$. Si $a_0(t_0) \neq 0$, se dice que t_0 es un **punto regular** para esta ecuación diferencial.

En cambio, si $a(t_0) = 0$, t_0 se llama un **punto singular** de la ecuación diferencial. ◊

En torno a un punto regular, se puede dividir ambos lados de (4.3) por $a_0(t)$, para obtener una ecuación diferencial de la forma (2.6). Entonces el Teorema 2.10′ garantiza la existencia de una solución general como la combinación de n soluciones independientes, en un intervalo $(t_0 - c', t_0 + c')$.

La existencia de soluciones independientes alrededor de un punto singular será examinada más adelante.

► Sin perder mucha generalidad, basta considerar series de Taylor centrados en 0. Por lo tanto, en lo sucesivo se estudiará ecuaciones diferenciales lineales (4.3) cuyos coeficientes son funciones analíticas en un intervalo común $(-c, c)$.

Cuando $t = 0$ es un punto regular, el método de series de potencias para resolver (4.3) consiste en colocar

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, t^k = a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2 + \cdots$$

y sustituir esta serie (y sus derivadas) en el lado izquierdo, para hallar ecuaciones algebraicas entre los coeficientes numéricas a_k. En otras palabras, se postula que la solución $x(t)$ es una función analítica y se trata de determinarla. En la solución general, habrá unos n coeficientes “libres”, los otros se expresan como combinaciones de estos; en la presencia de n condiciones iniciales, se obtiene todos los a_k sin ambigüedad. Ahora bien, es posible justificar este “postulado” por el método de aproximaciones sucesivas.[3] Aquí se omite esa demostración, pero vale la pena enunciar el resultado: *en torno a un punto regular, la solución única de un problema de valor inicial es una función analítica*.

Ejemplo 4.5. Considérese la ecuación diferencial

$$x''(t) - t\, x'(t) + 3\, x(t) = 0.$$

[3] Véase, por ejemplo, la Sección 9.8 del libro de Rai, Choudhury y Freedman.

El coeficiente de $x''(t)$ es 1, así que todo punto t_0 es regular. Al desarrollar los términos alrededor de $t = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} x''(t) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k t^{k-2} &&= 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 + \cdots, \\ -t\,x'(t) &= -\sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^k &&= \qquad -a_1 t - 2a_2 t^2 - 3a_3 t^3 + \cdots, \\ 3\,x(t) &= 3\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k &&= 3a_0 + 3a_1 t + 3a_2 t^2 + 3a_3 t^3 + \cdots. \end{aligned}$$

Al sumar estas series, el término constante y el término de primer grado de la suma dan dos ecuaciones:

$$2a_2 + 3a_0 = 0, \qquad 6a_3 + 2a_1 = 0,$$

así que $a_2 = -\frac{3}{2}a_0$ y $a_3 = -\frac{1}{3}a_1$. Para $k \geqslant 2$, el coeficiente de t^k en la suma es

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - (k-3)a_k = 0.$$

Esta es una *relación de recurrencia*, que permite despejar a_{k+2} en función de a_k:

$$a_{k+2} = \frac{k-3}{(k+2)(k+1)}\, a_k\,. \tag{4.4}$$

(En este ejemplo, esta relación también es válida para $k = 1$, pero no para $k = 0$.)

Cabe notar que la recurrencia (4.4) se separa en dos casos, para k par e impar respectivamente:

$$a_{2m+2} = \frac{2m-3}{(2m+2)(2m+1)}\, a_{2m}\,, \qquad a_{2m+1} = \frac{2m-4}{(2m+1)(2m)}\, a_{2m-1}$$

para $m \geqslant 1$ en los dos casos. La primera relación, para $m \geqslant 2$, implica que[4]

$$\begin{aligned} a_{2m+2} &= \frac{(2m-3)(2m-5)}{(2m+2)(2m+1)(2m)(2m-1)}\, a_{2m-2} \\ &= \cdots = \frac{4!(2m-3)!!}{(2m+2)!}\, a_4 = -\frac{2(2m-3)!!}{(2m+2)!}\, a_2 = \frac{3(2m-3)!!}{(2m+2)!}\, a_0. \end{aligned}$$

La segunda relación, con $m = 2$, implica $a_5 = (0/30)a_3 = 0$, así que $a_7 = a_9 = \cdots = 0$ también. Al tomar $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, lo cual corresponde a elegir las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, se obtiene una *solución polinomial* $x(t) = t - \frac{1}{3}t^3$.

[4] Aquí se usa la notación $\underline{n!!} := n(n-2)(n-4)\cdots(2 \text{ o } 1)$, el llamado **doble factorial**, para abreviar las expresiones.

En cambio, al tomar $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, correspondiente a las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, se obtiene una serie de potencias no terminante. Para a_0, a_1 generales, se obtiene una combinación lineal de estas dos soluciones básicas:

$$x(t) = a_0\Big(1 - \frac{3}{2}t^2 + 3\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(2m-3)!!}{(2m+2)!}\,t^{2m}\Big) + a_1\Big(t - \frac{1}{3}t^3\Big).$$

La solución polinomial es obviamente analítica. Para la otra – expresada como serie de potencias en la variable t^2 – se debe chequear el radio de convergencia:

$$R = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_{2m}}{a_{2m+2}}\right| = \lim_{m\to\infty} \frac{(2m+2)(2m+1)}{2m-3} = +\infty,$$

así que esta solución es analítica en todo $\mathbb{R}$. ◊

Ejemplo 4.6. Considérese la **ecuación de Legendre**:

$$(1 - t^2)\, x''(t) - 2t\, x'(t) + \lambda\, x(t) = 0, \tag{4.5a}$$

donde λ es un parámetro real. Nótese que esta ecuación puede escribirse en la forma (3.11):

$$\frac{d}{dt}\big((1 - t^2)\, x'(t)\big) + \lambda\, x(t) = 0,$$

pero por ahora no se imponen condiciones de frontera. Nótese que $t = \pm 1$ son puntos singulares de la ecuación. Entonces se debe buscar soluciones analíticas de esta ecuación alrededor del punto regular $t = 0$, con la esperanza que las series de potencias converjan al menos en el intervalo abierto $(-1, 1)$.

Si $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, las siguientes series de potencias deben tener suma igual a 0:

$$\begin{aligned}
x''(t) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k t^{k-2} &&= 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 + \cdots, \\
-t^2 x''(t) &= -\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k t^k &&= -2a_2 t^2 - 6a_3 t^3 + \cdots, \\
-2t\, x'(t) &= -2\sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^k &&= -2a_1 t - 4a_2 t^2 - 6a_3 t^3 + \cdots, \\
\lambda\, x(t) &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k &&= \lambda a_0 + \lambda a_1 t + \lambda a_2 t^2 + \lambda a_3 t^3 + \cdots.
\end{aligned}$$

Los primeros dos términos de la suma dan las ecuaciones:

$$2a_2 + \lambda a_0 = 0, \qquad 6a_3 + (\lambda - 2)a_1 = 0,$$

y luego, para $k \geqslant 2$:

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} = \big(k(k+1) - \lambda\big)a_k \,.$$

Es evidente que esta relación de recurrencia, al igual que en el ejemplo anterior, se separa en dos casos para k par e impar.

Más aun, se nota que si $\lambda \in \{\, n(n+1) : k \in \mathbb{N} \,\} = \{0, 2, 6, 12, 20, \dots\}$, entonces la ecuación posee una solución polinomial. Para $\lambda_n := n(n+1)$, la recurrencia da $a_{n+2} = 0\, a_n$, así que el polinomio correspondiente tiene grado n. Ahora bien, un polinomio es continua en todo $\mathbb{R}$ y no diverge en los puntos singulares. Este da lugar a un problema de Sturm y Liouville *singular*, (4.5) con las condiciones de frontera:

$$|x(-1^+)| = \lim_{t \downarrow -1} |x(t)| < \infty, \qquad |x(1^-)| = \lim_{t \uparrow 1} |x(t)| < \infty.$$

Para uno de esos autovalores, la ecuación de Legendre tiene la forma

$$(1 - t^2)\, x''(t) - 2t\, x'(t) + n(n+1)\, x(t) = 0. \tag{4.5b}$$

Luego $a_2 = -\frac{1}{2} n(n+1) a_0$ y $a_3 = -\frac{1}{6}(n-1)(n+2) a_1$. La relación de recurrencia es:

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - n(n+1)}{(k+2)(k+1)}\, a_k$$

para $k \geqslant 2$ *a priori*, pero también para $k = 0, 1$. En particular, $a_{n+2} = a_{n+4} = \cdots = 0$; hay una solución polinomial $P_n(t)$, el cual es un polinomio par si n es par, o bien un polinomio impar si n es impar. La otra solución $Q_n(t)$, con la paridad opuesta, está dada por una serie de potencias cuya radio de convergencia es

$$R = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+2}} \right| = \lim_{k \to \infty} \frac{(k+2)(k+1)}{k(k+1) - n(n+1)} = 1.$$

La solución general tiene la forma $x(t) = c_1\, P_n(t) + c_2\, Q_n(t)$, analítica en $(-1, 1)$.

Las soluciones $P_n(t)$ y $Q_n(t)$ son únicos una vez que se fija los valores de a_0 y a_1; por ejemplo, se puede imponer condiciones iniciales en $t = 0$. Sin embargo, debido a la presencia de un problema de Sturm y Liouville singular, conviene más precisar las *condiciones de frontera* para P_n:

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n. \tag{4.6}$$

⟦ Nótese que, en este caso, la primera condición $P_n(1) = 1$ determina el valor de $P_n(-1)$, por la paridad del polinomio $P_n(t)$. ⟧ Los ejemplos de grado bajo son:

$$P_0(t) \equiv 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \tfrac{1}{2}(3t^2 - 1),$$
$$P_3(t) = \tfrac{1}{2}(5t^3 - 3t), \quad P_4(t) = \tfrac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3). \qquad \Diamond$$

Definición 4.7. La solución polinomial $P_n(t)$ al problema de Sturm y Liouville singular (4.5b) y (4.6) se llama el **polinomio de Legendre** de grado n. ◊

Los polinomios de Legendre forman una familia de autofunciones para la ecuación de Sturm y Liouville (4.5a) en el intervalo compacto $[-1, 1]$, debido a que estos polinomios están bien definidos en los dos extremos del intervalo. Por lo tanto, la demostración de la Proposición 3.16 es aplicable en este caso. En efecto, la identidad de Lagrange implica, por (3.18) con $r(t) \equiv 1$, $p(t) = 1 - t^2$:

$$(m^2 + m - n^2 - n) \int_{-1}^{1} P_m(t)\, P_n(t)\, dt = \Big[(1 - t^2)\big(P_m(t)\, P_n'(t) - P_m'(t)\, P_n(t)\big)\Big]_{t=-1}^{t=1} = 0.$$

Resulta, entonces, que *los polinomios de Legendre son ortogonales* con respecto al producto escalar usual de funciones en el intervalo $[-1, 1]$:

$$(P_m \mid P_n) = \int_{-1}^{1} P_m(t)\, P_n(t)\, dt = 0 \quad \text{para} \quad m \neq n. \tag{4.7}$$

Es posible mostrar que, en el caso $m = n$, que la normalización de los $P_n(t)$ produce el resultado:

$$(P_n \mid P_n) = \int_{-1}^{1} P_n(t)^2\, dt = \frac{2}{2n+1}\,.$$

Sea $\|f\|_2 := \sqrt{(f \mid f)}$. La compleción en este norma del espacio vectorial de los polinomios reales, restringidos al intervalo $[-1, 1]$, es un *espacio de Hilbert* real, denotado $L^2[-1, 1]$. Se concluye, entonces, que los polinomios de Legendre normalizados $p_n(t) := \sqrt{(2n+1)/2}\, P_n(t)$ forma una **base ortonormal** para este espacio de Hilbert.

Ejemplo 4.8. Considérese la **ecuación de Hermite**:

$$x''(t) - 2t\, x'(t) + \lambda\, x(t) = 0, \tag{4.8a}$$

con un parámetro real λ. Esta ecuación lineal no tiene puntos singulares; es de esperar que tenga una solución general definida en todo $\mathbb{R}$.

Si $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, la ecuación diferencial asume la forma:

$$(2a_2 + \lambda a_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \big\{(k+2)(k+1)a_{k+2} + (\lambda - 2k)a_k\big\} t^k = 0.$$

Entonces

$$2a_2 + \lambda a_0 = 0; \qquad (k+2)(k+1)a_{k+2} = (2k - \lambda)a_k \quad \text{para} \quad k \geqslant 1.$$

Una vez más, estas relaciones de recurrencia se separan en dos casos para k par e impar, respectivamente. Para $\lambda_n := 2n$, con $n = 0, 1, 2, \dots$, se obtiene $a_{n+2} = 0\, a_n$; en cuyo caso, la serie de potencias se simplifica en un polinomio de grado n.

Para uno de esos autovalores, la ecuación de Hermite tiene la forma

$$x''(t) - 2t\, x'(t) + 2n\, x(t) = 0. \tag{4.8b}$$

Ahora $a_2 = -na_0$, $a_3 = -\frac{1}{3}(n-1)a_1$, y en general

$$a_{k+2} = \frac{2(k-n)}{(k+2)(k+1)}\, a_k\,.$$

Luego, vale $a_{n+2} = a_{n+4} = \cdots = 0$; hay una solución polinomial $H_n(t)$, par o impar según la paridad de n. Para este **polinomio de Hermite** $H_n(t)$, se elige el coeficiente principal $a_n = 2^n$, de modo que

$$H_0(t) \equiv 1, \quad H_1(t) = 2t, \quad H_2(t) = 4t^2 - 2,$$
$$H_3(t) = 8t^3 - 12t, \quad H_4(t) = 16t^4 - 48t^2 + 12.$$

⟦ Hay otra solución no polinomial, cuya serie de potencias tiene radio de convergencia $R = \lim_{k\to\infty} |a_k/a_{k+2}| = \lim_{k\to\infty}(k+2)(k+1)/2(k-n) = \infty$. ⟧ ◊

Nótese que la ecuación de Hermite (4.8a) no tiene el formato (3.11) de una ecuación de Sturm y Liouville, porque los primeros dos términos no forman la derivada de un producto $p(t)\, x'(t)$. Este defecto puede ser curado al multiplicar ambos lados por un "factor integrante", el cual sería $p(t) := e^{-t^2}$, así:

$$\frac{d}{dt}\big(e^{-t^2} x'(t)\big) + \lambda\, e^{-t^2} x(t) = 0.$$

Nuevamente, la identidad de Lagrange conduce a una relación de ortogonalidad: si $m \neq n$ en $\mathbb{N}$, entonces, por (3.18) con $p(t) = r(t) = e^{-t^2}$:

$$(2m-2n)\int_{-\infty}^{\infty} H_m(t)\, H_n(t)\, dt = \Big[e^{-t^2}\big(H_m(t)\, H_n'(t) - H_m'(t)\, H_n(t)\big)\Big]_{t=-\infty}^{t=+\infty} = 0.$$

Fíjese que en este caso el decrecimiento rápido de la función $p(t) = e^{-t^2}$ hace innecesario imponer condiciones de frontera en $t = \pm\infty$. Se concluye que los polinomios de Hermite son *ortogonales* en todo $\mathbb{R}$, *con respecto a la función de peso* $r(t) = e^{-t^2}$.

Resulta que la normalización de los $H_n(t)$ implica que

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(t)^2 e^{-t^2}\, dt = 2^n\, n!\, \sqrt{\pi}.$$

La presencia de la constante $\sqrt{\pi}$ es evidente cuando $n = 0$, por la fórmula conocida:

$$\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt\Big)^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-s^2-t^2}\, ds\, dt = \int_0^{2\pi}\!\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta = \pi.$$

Se puede eliminar el uso de la función de peso al introducir las **funciones de Hermite**:

$$\underline{h_n(t)} := \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}\,\sqrt[4]{\pi}} H_n(t)\, e^{-t^2/2}. \tag{4.9}$$

Estas funciones forman una *base ortonormal*[5] para el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$:

$$(h_m \mid h_n) = \int_{-\infty}^{\infty} h_m(t)\, h_n(t)\, dt = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

► En los últimos dos ejemplos, fue oportuno considerar familias de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, (4.5b) y (4.8b) respectivamente, cuyos lados izquierdos difieren solamente en el coeficiente de $x(t)$. En tal caso, las posiciones de los ceros de las soluciones de cada familia están relacionadas por el siguiente resultado, que se llama el **teorema de comparación de Sturm**.[6]

Teorema 4.9 (Sturm)**.** *Considérese dos ecuaciones lineales homogéneas:*

$$\frac{d}{dt}\big(p(t)\, x'(t)\big) + q_1(t)\, x(t) = 0, \tag{4.10a}$$

$$\frac{d}{dt}\big(p(t)\, y'(t)\big) + q_2(t)\, y(t) = 0, \tag{4.10b}$$

donde $p, q_1, q_2 \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ son continuas y $p(t) > 0$ para todo $t \in [a, b]$. Supóngase que $q_1(t) \leqslant q_2(t)$ para $t \in [a, b]$. Si $c < d$ son dos ceros consecutivos en $[a, b]$ de una solución $x(t)$ de (4.10a)*, y si $y(t)$ es una solución de* (4.10b)*, entonces existe s con $c < s < d$ tal que $y(s) = 0$.*

Demostración. Supóngase, *arguendo*, que $y(t) > 0$ en (c, d). Como $x(t)$ tampoco se anula en ese intervalo abierto, por hipótesis, se puede asumir sin perder generalidad que $x(t) > 0$ en (c, d). Entonces, al restar $y(t)$ veces (4.10a) de $x(t)$ veces (4.10b), se obtiene la igualdad

$$x(t)\, \frac{d}{dt}\big(p(t)\, y'(t)\big) - \frac{d}{dt}\big(p(t)\, x'(t)\big)\, y(t) + \big(q_2(t) - q_1(t)\big)\, x(t)\, y(t) = 0. \tag{4.11}$$

El tercer término es no negativo y tiene integral no negativo en el intervalo $[c, d]$:

$$\int_c^d \big(q_2(t) - q_1(t)\big)\, x(t)\, y(t)\, dt \geqslant 0.$$

[5] Se ha comprobado que los h_n forman una *familia* ortonormal. Para que sean una *base* ortonormal, hace falta mostrar que esta familia es "total", es decir, que el único elemento de $L^2(\mathbb{R})$ ortogonal a cada h_n es el elemento nulo. Este es el teorema de Riesz y Fischer, no demostrado aquí.

[6] Hay varios teoremas con ese nombre; esta versión es la que tiene las hipótesis más sencillas.

Los otros términos forman una derivada total, por la identidad de Lagrange (3.17):

$$x(t)\,\frac{d}{dt}\big(p(t)y'(t)\big) - \frac{d}{dt}\big(p(t)x'(t)\big)\,y(t) = \frac{d}{dt}\Big(p(t)\big[x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\big]\Big),$$

cuya integral, habida cuenta de que $x(c) = x(d) = 0$, es igual a

$$\Big[p(t)\big(x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\big)\Big]_{t=c}^{t=d} = p(c)x'(c)y(c) - p(d)x'(d)y(d).$$

La función diferenciable $x(t)$ es positivo en el intervalo (c, d) entre dos ceros, así que $x'(c) > 0$ y $x'(d) < 0$ necesariamente. Por lo tanto,

$$p(c)x'(c)y(c) - p(d)x'(d)y(d) > 0. \tag{4.12}$$

Entonces el lado izquierdo de (4.11) tiene integral positiva, mientras que el lado derecho tiene integral $\int_c^d 0\,dt = 0$. Esta contradicción refuta la suposición de que $y(t) > 0$ en (c, d). Si fuera $y(t) < 0$ en ese intervalo, el mismo argumento aplicado a $-y(t)$ llega a la misma contradicción. Luego la solución $y(t)$ tiene al menos un cero en (c, d). □

Si fuera $q_2(t) \equiv q_1(t)$ en (4.10), de manera que $x(t)$, $y(t)$ serían dos soluciones de la misma ecuación diferencial (lineal, homogénea, de segundo orden), entonces el tercer término del lado izquierdo de (4.11) es nulo, el argumento del teorema demuestra otro resultado, llamado el **teorema de separación de Sturm**, a continuación.

Teorema 4.10 (Sturm)**.** *Sean $x(t)$, $y(t)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación lineal homogénea:*

$$\frac{d}{dt}\big(p(t)\,x'(t)\big) + q(t)\,x(t) = 0,$$

Si $c < d$ son dos ceros consecutivos de $x(t)$, entonces existe $s \in (c, d)$ tal que $y(s) = 0$.

En consecuencia, los ceros de $x(t)$ y de $y(t)$ están entrelazados.

Demostración. En primer lugar, obsérvese que $y(c) \neq 0$ y que $y(d) \neq 0$. En efecto, si fuera $y(c) = x(c) = 0$, al poner $m := y'(c)/x'(c)$, se obtendría $y(t) \equiv m\,x(t)$ por la unicidad del problema de valor inicial $y(c) = 0$, $y'(c) = m\,x'(c)$. Esto es incompatible con la independencia lineal de las dos soluciones.

Los argumentos de la demostración anterior ahora muestran que el lado izquierdo de (4.12) es cero:

$$p(c)x'(c)y(c) - p(d)x'(d)y(d) = 0.$$

Aquí $p(c) > 0$ y $p(d) > 0$, mientras que $x'(c)$ y $x'(d)$ tienen signos opuestos.[7] Por lo tanto, $y(c)$, $y(d)$ también deben tener signos opuestos; y el teorema de valor intermedio implica que $y(t)$ tiene un cero en (c, d).

Luego, al cambiar los papeles de $x(t)$ y $y(t)$, también se ve que entre dos ceros consecutivos de $y(t)$ debe haber un cero de $x(t)$. □

► Al volver a los polinomios de Legendre $P_n(t)$, que son soluciones de las ecuaciones tipo (4.5b), se puede tomar $q_1(t) = m(m+1)$, $q_2(t) = n(n+1)$ con $m < n$. El Teorema 4.9 dice que entre dos ceros de $P_m(t)$ debe haber al menos un cero de $P_n(t)$.

Por ejemplo, entre los dos ceros $t_\pm = \pm\sqrt{1/3}$ de $P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$, hay un cero de $P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$, el cual es $s_0 = 0$. Ahora, $P_3(t)$ tiene otros dos ceros, $s_\pm = \pm\sqrt{3/5}$ en el intervalo $[-1, 1]$. El Teorema 4.9 no ofrece información acerca de su posición. Sin embargo, la ortogonalidad de estos polinomios implica el siguiente resultado.

Proposición 4.11. *El polinomio de Legendre $P_n(t)$ de grado n posee n ceros simples en el intervalo* $[-1, 1]$.

Demostración. Está claro que $P_n(t)$ tiene a lo sumo n ceros reales, contados con multiplicidad. Como $P_n(1) = 1$ y $P_n(-1) = (-1)^n$, ninguno de ellos coincide con -1 o 1. Sean $t_1, \dots, t_m$ los ceros *distintos* que pertenecen al intervalo $(-1, 1)$ y que tengan multiplicidades impares $r_1, \dots, r_m$ respectivamente. Sean $t_{m+1}, \dots, t_{m+l}$ los ceros distintos en $(-1, 1)$ con multiplicidades pares. Entonces $P_n(t)$ se factoriza así:

$$P_n(t) = \prod_{i=1}^{m}(t - t_i)^{r_i} \prod_{j=m+1}^{m+l}(t - t_j)^{r_j}\, R(t)$$

donde $R(1) > 0$ y el factor $R(t)$ no se anula en $[-1, 1]$; por ende, vale $R(t) > 0$ en $[-1, 1]$.

Considérese ahora el polinomio

$$Q(t) := P_n(t)\,(t - t_1)(t - t_2)\cdots(t - t_m) = \prod_{i=1}^{m}(t - t_i)^{r_i+1} \prod_{j=m+1}^{m+l}(t - t_j)^{r_j}\, R_n(t).$$

Entonces $Q(t) \geqslant 0$ para $t \in [-1, 1]$, por ser el producto de $R(t)$ y el cuadrado de otro polinomio. Si fuera $m < n$, entonces

$$(t - t_1)(t - t_2)\cdots(t - t_m) = c_0P_0(t) + c_1P_1(t) + \cdots + c_mP_m(t)$$

[7] Nótese que $x'(c) = 0$ o $x'(d) = 0$ diría que $x(t) \equiv 0$ por unicidad del problema de valor inicial, contrario a la independencia lineal de $x(t)$ y $y(t)$.

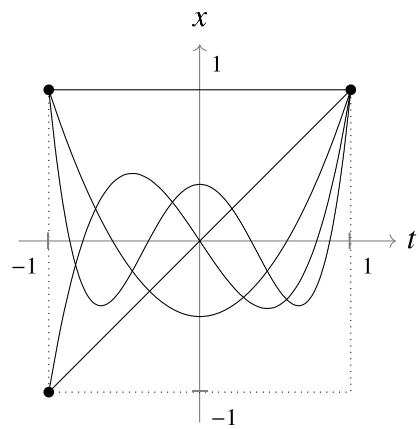

Figura 4.1: Polinomios de Legendre de grados 0, 1, 2, 3, 4

para algunos $c_0, \dots, c_m \in \mathbb{R}$. La ortogonalidad (4.7) entonces implica que

$$\int_{-1}^{1} Q(t)\,dt = \sum_{k=0}^{m} c_k \int_{-1}^{1} P_k(t)\,P_n(t)\,dt = 0,$$

lo cual es imposible, porque $Q(t) \geqslant 0$ y $Q(t) \not\equiv 0$ en $[-1, 1]$.

Se concluye que $m = n$. Esto dice que $l = 0$ y $R(t) \equiv R(1)$; además, cada raíz t_i de $P(t)$ debe ser *simple*, es decir, de multiplicidad 1.

En la Figura 4.1 que muestra los grafos de los polinomios de Legendre de grados $n \leqslant 4$ en el intervalo $[-1, 1]$, se puede apreciar el entrelazamiento de sus ceros. □

4.2 Ecuaciones con puntos singulares regulares

Cuando la ecuación lineal homogénea (4.3) tiene un punto singular en $t = t_0$, entonces no es posible asegurar la existencia de una solución analítica centrada en t_0. En esta sección se analizará el caso importante de las ecuaciones de segundo orden con puntos singulares. Un tratamiento exhaustivo demanda el uso de recursos de variable compleja y está fuera del alcance de este curso. Sin embargo, hay un subcaso de especial interés que es amenable a un tratamiento con funciones reales.

Definición 4.12. La ecuación lineal homogénea de segundo orden:

$$a_0(t)\,x''(t) + a_1(t)\,x'(t) + a_0(t)\,x(t) = 0$$

posee un punto singular en $t = t_0$ si $a_0(t_0) = 0$. Al dividir por $a_0(t)$, para reexpresar la ecuación como

$$x''(t) + p(t)\,x'(t) + q(t)\,x(t) = 0, \tag{4.13}$$

se dice que t_0 es un **punto singular regular** si las dos funciones

$$(t - t_0)\, p(t), \qquad (t - t_0)^2\, q(t)$$

son analíticas en un vecindario de t_0. En caso contrario, t_0 se llama un **punto singular irregular**.[8] ◊

Ejemplo 4.13. Considérese la **ecuación de Bessel** con parámetro n:

$$t^2\, x''(t) + t\, x'(t) + (t^2 - n^2)\, x(t) = 0. \tag{4.14}$$

Aquí se toma $n \in \mathbb{N}$, aunque otros valores son concebibles.[9] Es obvio que $t = 0$ es un punto singular. Aquí $p(t) = 1/t$ y $q(t) = (1 - n^2/t^2)$: este es un punto singular regular.

Resulta que una de las dos soluciones básicas de esta ecuación es analítica. Efectivamente, si se postula una solución con serie de potencias $x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\, t^m$, se obtiene

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)\, a_m\, t^m + \sum_{m=1}^{\infty} m\, a_m\, t^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_m\, t^{m+2} - \sum_{m=0}^{\infty} n^2 a_m\, t^m = 0.$$

Al reacomodar estas sumas, se obtiene

$$-n^2 a_0 + (1 - n^2) a_1 t + \sum_{m=2}^{\infty} \bigl\{ m(m-1)\, a_m + m\, a_m + a_{m-2} - n^2 a_m \bigr\}\, t^m = 0.$$

Una vez más, la relación de recurrencia

$$(m^2 - n^2) a_m + a_{m-2} = 0 \quad \text{para} \quad m = 2, 3, \dots$$

da lugar a una serie de potencias para o impar, según la paridad de n.

Si $n = 0$, se obtiene $a_1 = 0$ y luego $a_3 = a_5 = \cdots = 0$ también. Tómese $a_0 := 1$; entonces, por una sencilla inducción,

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{(2k)^2} = \frac{a_{2k-4}}{(2k)^2 (2k-2)^2} = \cdots = \frac{(-1)^k}{2^{2k} (k!)^2}\,.$$

[8] Usualmente, los vocablos *singular* y *regular* son antónimos. La frase “punto singular regular” es gramaticalmente excepcional, pero autorizado por tradición. La clasificación tiene sus origines en la teoría de variable compleja: las funciones en (4.13) son holomorfas si $p(t)$ posee un *polo* de primer orden en $t_0 \in \mathbb{C}$, o bien si $q(t)$ posee un polo de primer o segundo orden en t_0.

[9] Esta ecuación proviene de un problema de Sturm y Liouville singular, que depende de $n \in \mathbb{N}$. En la literatura, a veces (4.14) se llama “la ecuación de Bessel de orden n”, aunque se trata de una ecuación diferencial de segundo orden.

Defínase la serie de potencias con estos coeficientes:

$$\underline{J_0(t)} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} = 1 - \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{64} - \frac{t^6}{2304} + \cdots .$$

Esta **función de Bessel** J_0 es analítica y es par; con $J_0(0) = 1$.

Si $n = 1$, se obtiene $a_0 = 0$ y luego $a_2 = a_4 = \cdots = 0$ también. Tómese $a_1 := \frac{1}{2}$; entonces, por inducción,

$$a_{2k+1} = -\frac{a_{2k-1}}{4(k+1)k} = \frac{a_{2k-3}}{4^2(k+1)k^2(k-1)} = \cdots = \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}\, k!(k+1)!} .$$

Defínase la serie de potencias con estos coeficientes:

$$\underline{J_1(t)} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+1} = \frac{t}{2} - \frac{t^3}{16} + \frac{t^5}{384} - \frac{t^7}{18432} + \cdots .$$

Esta función de Bessel J_1 es analítica y es impar; con $J_1(0) = 0$.

Para los casos $n \geqslant 2$, se obtiene $a_0 = a_1 = 0$; y por la relación de recurrencia se ve que $a_m = 0$ para cada $m < n$. Al tomar $a_n := 2^{-n}/n!$, se obtiene la solución analítica

$$\underline{J_n(t)} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}. \tag{4.15}$$

Las únicas soluciones analíticas a la ecuación (4.14) tienen la forma $a_n\, J_n(t)$. Para obtener otra solución linealmente independiente de $J_n(t)$, se podría usar el método de la Sección 2.1: al colocar $x(t) := u(t)\, J_n(t)$ con $u(t)$ una función no constante y al tomar $v(t) := u'(t)$, la demostración de la Proposición 2.11 ofrece un método para despejar $v(t)$ y eventualmente $u(t)$. Sin embargo, el factor $u(t)$ es singular en $t = 0$; es mejor encontrar la segunda solución por otra vía. ◊

► Una ecuación lineal (2.5) con un punto singular regular en $t = 0$ tiene la forma

$$t^2\, x''(t) + t\, b(t)\, x'(t) + c(t)\, x(t) = 0,$$

donde $b(t) = b_0 + b_1 t + \cdots$ y $c(t) = c_0 + c_1 t + \cdots$ son analíticas cerca de $t = 0$. En el caso especial $b(t) = c_0$ y $c(t) = c_0$, este es una ecuación de Euler (2.25) y el cambio de variable $s := \log t$ (para $t > 0$) la reduce a una ecuación lineal con coeficientes constantes. En la subsección 2.3.1 se obtuvo una base de soluciones para una ecuación de Euler, de la forma $\{t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}\}$, o bien $\{t^\lambda, t^\lambda \log t\}$. Esta circunstancia es la motivación de una extensión del método de series de potencias, introducida por Frobenius.[10]

[10]Georg Frobenius fue un estudiante de Karl Weierstraß. En su tesis doctoral, *De functionum analyticarum unius variabilis per series infinitas repraesentatione* (Berlin, 1870), expuso lo que hoy en día se llama "el método de Frobenius".

Cuando una ecuación lineal homogénea posee un punto singular regular en $t = t_0$, el método recomienda buscar una solución de la forma

$$x(t) = (t - t_0)^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - t_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - t_0)^{k+r}, \tag{4.16}$$

con algún exponente $r \in \mathbb{R}$. Para la ecuación de Bessel, por ejemplo, la solución $J_n(t)$ de (4.15) tiene esta forma, con $r = n$; esta solución es analítica porque $r \in \mathbb{N}$. Si $r < 0$ o si r no es entero, la serie formal (4.16) no representa una función analítica. Entonces, en primera instancia, se debe considerarla una serie *formal*, cuya convergencia debe ser confirmada posteriormente.

En adelante, para simplificar los cálculos, se tomará $t_0 = 0$.

⟦ Para demostrar la validez del método de Frobenius, se requiere considerar las soluciones como funciones de una variable compleja. En tal caso, una serie de tipo (4.16) con $r \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ se llama una *serie de Laurent*, con un *polo* en t_0. Para $r \notin \mathbb{Z}$, dícese que t_0 es un *punto de ramificación*; la función compleja $z \mapsto z^r = e^{r \log z}$ debe manejarse con respeto. Tales dificultades son menos aparentes para funciones con argumentos reales, pero deben tomarse en cuenta. ⟧

Ejemplo 4.14. Considérese de nuevo la **ecuación de Bessel** (4.14), con el entero n reemplazada por $p \in [0, \infty)$ cualquiera:

$$t^2\, x''(t) + t\, x'(t) + (t^2 - p^2)\, x(t) = 0.$$

Se busca una solución dada por la serie formal:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+r}.$$

Entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)\, a_k\, t^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)\, a_k\, t^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, t^{k+r+2} - \sum_{k=0}^{\infty} p^2 a_k\, t^{k+r} = 0.$$

Al igualar los coeficientes de la potencia más baja t^r, se obtiene una ecuación para r:

$$(r^2 - p^2) a_0 = 0.$$

La relación de recurrencia conecta cada a_k con a_{k+2}, así que la opción $a_0 = 0$ conduce a la solución nula, que no interesa. Se debe asumir $a_0 \neq 0$, entonces, y como consecuencia $r = p$ o bien $r = -p$. Al tomar $r = p$, los coeficientes obedecen

$$(2p+1)a_1 = 0, \qquad k(2p+k)a_k + a_{k-2} = 0 \quad \text{para} \quad k = 2, 3, \dots$$

Entonces $a_1 = a_3 + a_5 = \cdots = 0$; y en breve se obtiene

$$J_p(t) \propto t^p \biggl(1 - \frac{(t/2)^2}{p+1} + \frac{(t/2)^4}{2!\,(p+1)(p+2)} - \frac{(t/2)^6}{3!\,(p+1)(p+2)(p+3)} + \cdots \biggr). \qquad (4.17)$$

La serie de potencias entre paréntesis tiene radio de convergencia infinita; y $t \mapsto t^p$ es un función al menos continua, para $t \in \mathbb{R}$ y $p \geqslant 0$ (es suave en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Falta elegir a_0 apropiadamente, habida cuenta que $a_0 = 2^{-n}/n!$ cuando $p = n \in \mathbb{N}$. La **función Gamma** de Euler, definida por[11]

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt,$$

cumple $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ mediante una integración por partes; y $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Luego $\Gamma(n+1) = n!$ para $n \in \mathbb{N}$ (por inducción). Entonces, al tomar $a_0 := 2^{-p}/\Gamma(p+1)$, se llega a la *función de Bessel* con índice $p \geqslant 0$:

$$\underline{J_p(t)} := \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \Bigl(\frac{t}{2}\Bigr)^{2k+p}.$$

Si $p \notin \mathbb{N}$, el caso $r = -p$ determina una segunda solución de la ecuación de Bessel, linealmente independiente de $J_p(t)$, aunque discontinua en $t = 0$:

$$J_{-p}(t) := \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-p+1)} \Bigl(\frac{t}{2}\Bigr)^{2k-p}.$$

La solución general de la ecuación de Bessel, para $p \notin \mathbb{Z}$, tiene la forma

$$x(t) = c_1 J_p(t) + c_2 J_{-p}(t). \qquad \Diamond$$

Para el caso $p = -n \in \mathbb{N}$, la serie en (4.17) tiene términos con denominador cero. En tal caso, adoptando el convenio de que $1/\Gamma(-m) := 0$ para $m \in \mathbb{N}$, el primer término no nulo de la serie de $J_{-n}(t)$ tiene índice $k = n$. Luego, se puede observar que

$$\begin{aligned} J_{-n}(t) &:= \sum_{k=n}^\infty \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)} \Bigl(\frac{t}{2}\Bigr)^{2k-n} \\ &= \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^{m+n}}{\Gamma(m+n+1)\Gamma(m+1)} \Bigl(\frac{t}{2}\Bigr)^{2m+n} = (-1)^n J_n(t). \end{aligned}$$

[11] La función $\Gamma(z)$ se define mediante esta integral (de Riemann, impropia) para $z \in \mathbb{C}$ con $\Re z > 0$; y la fórmula $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ permite extenderla a todo $\mathbb{C}$, aunque con polos en $z = -n$, para $n \in \mathbb{N}$. Su recíproco $1/\Gamma(z)$ no tiene polos y define una función analítica entera en $\mathbb{C}$. Luego, la fórmula dada para $J_p(t)$ también tiene sentido para $p < 0$.

Como $J_n(t)$ y $J_{-n}(t)$ no son linealmente independientes, se debe buscar una segunda solución a la ecuación de Bessel (4.14) mediante el proceso de reducción de orden de la Proposición 2.11.

Sea $Y_n(t)$ la segunda solución buscada (determinado hasta multiplicación por un coeficiente a_0). El wronskiano $w(t) := W(J_n, Y_n)(t)$ obedece la fórmula de Abel (2.10). En este caso, $p(t) = t/t^2 = 1/t$; $P(t) = \int^t ds/s = c + \log t$; y $w(t) = e^{-P(t)} = C/t$, para $t > 0$. Entonces, por (2.11) y (4.17):

$$\begin{aligned} Y_n(t) = C\, J_n(t) \int_1^t \frac{ds/s}{J_n(s)^2} &\propto J_n(t) \int_1^t s^{-1-2n} \biggl(1 - \frac{(s/2)^2}{n+1} + \frac{(s/2)^4}{2(n+1)(n+2)} + \cdots \biggr)^{-2} ds \\ &= J_n(t) \int_1^t \biggl(s^{-1-2n} + \frac{1}{2(n+1)}\, s^{1-2n} + \frac{2n+5}{16(n+1)^2(n+2)}\, s^{3-2n} + \cdots \biggr) ds. \end{aligned}$$

En el caso particular $n = 0$, se obtiene

$$Y_0(t) \propto J_0(t) \biggl(B + \log t + \frac{t^2}{4} + \frac{5t^4}{128} + \cdots \biggr) = J_0(t) \log t + f_0(t),$$

donde B es alguna constante y $f_0(t)$ es analítica cerca de $t = 0$. De hecho, las series $J_0(t)^{-2}$ y luego $f_0(t)$ tienen radio de convergencia R, donde R es el primer cero de la función $J_0(t)$ en el intervalo $(0, \infty)$.

Cuando $n > 0$, uno de los términos en el integrando $\int_1^t (\cdots)\, ds$ es un múltiplo de s^{-1}; se obtiene

$$Y_n(t) \propto J_n(t) \log t + t^{-n} f_n(t),$$

donde $f_n(t)$ es analítica cerca de $t = 0$. La constante de proporcionalidad está determinado por ciertos convenios no discutidos aquí.[12]

Esta discusión ejemplifica el siguiente teorema, cuya demostración será omitida.[13]

Teorema 4.15 (Frobenius)**.** *Si $t = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial lineal homogénea:*

$$t^2\, x''(t) + t\, p(t)\, x'(t) + q(t)\, x(t) = 0,$$

entonces esta ecuación posee al menos una solución de la forma

$$x(t) = t^r \biggl(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k \biggr). \tag{4.18}$$

[12]El desarrollo en serie de la función $Y_n(t)$ aparece en los breviarios de la teoría de "funciones especiales". Véase, por ejemplo, la sección 5.4 del libro: Nikolai N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Dover, New York, 1972.

[13]La prueba requiere técnicas de variable compleja. Véase el capítulo 9 del libro de Birkhoff y Rota.

*El índice r obedece la **ecuación indicial**:*

$$r(r-1)+p(0)\,r+q(0)=0. \tag{4.19}$$

Si esta ecuación cuadrática tiene dos raíces reales distintas, r_1 y r_2, con $r_1-r_2\notin\mathbb{Z}$, entonces las soluciones correspondientes $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son linealmente independientes.

En cambio, si las raíces de la ecuación indicial satisfacen $r_1-r_2\in\mathbb{Z}$ – esto incluye el caso $r_1=r_2$ de una raíz doble – hay un par de soluciones básicas de la forma:

$$x_1(t)=t^{r_1}\Bigl(1+\sum_{k=1}^{\infty}a_k t^k\Bigr),\qquad x_2(t)=c\,x_1(t)\log t+t^{r_2}\sum_{k=0}^{\infty}b_k t^k.$$

Si $r_1=r_2$, se puede tomar $c=1$ y $b_0=0$; si $r_1>r_2$, se puede tomar $b_0=1$.

Ejemplo 4.16. La siguiente **ecuación hipergeométrica** depende de tres parámetros $a,b,c\in\mathbb{R}$:

$$t(1-t)\,x''(t)+(c-(a+b+1)t)\,x'(t)-ab\,x(t)=0. \tag{4.20}$$

Como de costumbre, se buscan soluciones reales de esta ecuación.[14] Esta ecuación tiene puntos singulares regulares en $t=0$ y en $t=1$. ⟦ También tiene un punto singular en $t=\infty$: al hacer el cambio de variable $s:=1/t$, se obtiene una ecuación lineal de segundo orden para $x(s)$ que posee un punto singular regular en $s=0$. ⟧ Cerca de $t=0$, entonces, se prueba una solución de la forma (4.18), con $a_0=1$, para obtener

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)\,a_k\,(t^{k+r-1}-t^{k+r})+\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)ca_k\,t^{k+r-1}$$
$$-\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(a+b+1)\,a_k\,t^{k+r}-\sum_{k=0}^{\infty}aba_k\,t^{k+r}=0.$$

Los términos con el menor exponente dan lugar a la ecuación indicial:

$$r(r+c-1)=0.$$

Supóngase (por ahora) que $c\notin\mathbb{Z}$, para evitar soluciones con logaritmos. Entonces, la opción $r=0$ ofrece una solución analítica $x_1(t)$, denotado por $\underline{F(a,b;c;t)}$. Con un breve cálculo, se obtiene la relación de recurrencia:

$$(k+1)(c+k)\,a_{k+1}=(a+k)(b+k)\,a_k\,. \tag{4.21}$$

De ahí se obtiene $a_1=(ab/c)$, $2(c+1)a_2=(a+1)(b+1)a_1$, y en general

$$F(a,b;c;t)=1+\frac{ab}{c}\,t+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\,\frac{t^2}{2!}+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\,\frac{t^3}{3!}+\cdots$$

[14] Más generalmente, se puede tomar $a,b,c\in\mathbb{C}$ y buscar soluciones de una variable compleja $t\in\mathbb{C}$, empleando series de potencias complejas.

Conviene adoptar una notación para productos que aparecen en estas fracciones. Al escribir

$$a^{\overline{k}} \equiv (a)_k := a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$$

estos **factoriales ascendientes** $a^{\overline{k}} = (a)_k$ permiten escribir la función hipergeométrica con una serie de potencias explícita:[15]

$$\begin{aligned} F(a,b;c;t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{\overline{k}} b^{\overline{k}}}{c^{\overline{k}}} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{t^k}{k!} \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)} \frac{t^k}{k!}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

El radio de convergencia de esta serie está dada por

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{a^{\overline{k}} b^{\overline{k}}}{k!\, c^{\overline{k}}} \bigg/ \frac{a^{\overline{k+1}} b^{\overline{k+1}}}{(k+1)!\, c^{\overline{k+1}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)(c+k)}{(a+k)(b+k)} = 1,$$

siempre y cuando ni a ni b (ni c) es un entero negativo.[16] Si $-a$ o $-b \in \mathbb{N}^*$, la relación de recurrencia (4.21) muestra que $a_{k+1} = 0$ para $k = -a$ o $k = -b$ respectivamente; y la solución $F(a,b;c;t)$ es un *polinomio* de grado no mayor que ese k.

La solución $x_1(t) := F(a,b;c;t)$ tiene condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_1'(0) = ab/c$.

Cuando $c \notin \mathbb{Z}$, el Teorema 4.15 asegura que la opción $r = 1 - c$ conduce a una segunda solución $x_2(t)$ de (4.20), con relación de recurrencia:

$$(k+2-c)(k+1)\, a_{k+1} = (a+k+1-c)(b+k+1-c)\, a_k\,.$$

Esta relación es similar a (4.21), con los cambios $c \mapsto 2-c$, $a \mapsto a+1-c$, $b \mapsto b+1-c$. Por lo tanto, se obtiene

$$x_2(t) = t^{1-c}\, F(a+1-c, b+1-c; 2-c; t).$$

Como $1 - c \notin \mathbb{N}$, esta solución no es analítica en $t = 0$. ◊

---

[15] La notación $(a)_k$ es tradicional; recibe el nombre *símbolo de Pochhammer*. Sin embargo, no es muy informativa. Donald Knuth ha propuesto una reforma: al notar la analogía con el numerador del coeficiente binomial $\binom{a}{k}$ y con la potencia $a^k = a(a)(a)\cdots(a)$, introdujo el **factorial descendiente** $a^{\underline{k}} := a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)$ y el factorial ascendiente $a^{\overline{k}}$. Así, por ejemplo, el coeficiente binomial sería $\binom{a}{k} = a^{\underline{k}}/k!$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$. Estas notaciones está empleadas sistemáticamente en el libro: R. L. Graham, D. E. Knuth y O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1994.

[16] Se puede anticipar un radio de convergencia no mayor que 1 puesto que $t = 1$ es otro punto singular de la ecuación hipergeométrica.

⟦ El desarrollo (4.22) da una definición alternativa de la función hipergeométrica $F(a,b;c;t)$. En muchos libros, esta función se denota por ${}_2F_1(a,b;c;t)$, donde los subíndices en ${}_2F_1$ cuentan la cantidad de términos de tipo $a^{\overline{k}}$ en el numerador y en el denominador de la fracción. Por ejemplo, se puede definir

$$ {}_3F_2(a,b,c;d,e;t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{\overline{k}} b^{\overline{k}} c^{\overline{k}}}{d^{\overline{k}} e^{\overline{k}}} \frac{t^k}{k!}, \qquad {}_1F_1(a;b;t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{\overline{k}}}{b^{\overline{k}}} \frac{t^k}{k!}, $$

etcétera. Esta ${}_1F_1(a;b;t)$ lleva el nombre de *función hipergeométrica confluente*. ⟧

► Es posible obtener muchas relaciones entre funciones hipergeométricas por manipulaciones directas de la serie de potencias (4.22). Sin embargo, a veces es más eficiente utilizar la ecuación diferencial (4.20).

Por ejemplo, al derivar ambos lados de esa ecuación, se obtiene

$$ t(1-t)\,x'''(t) + (c+1-(a+b+3)t)\,x''(t) - (ab+a+b+1)\,x'(t) = 0. $$

Entonces la función $y(t) := x_1'(t)$ es analítica en $t = 0$, satisface $y(0) = ab/c$, y cumple la ecuación diferencial:

$$ t(1-t)\,y''(t) + (c+1-(a+1+b+1+1)t)\,y'(t) - (a+1)(b+1)\,y(t) = 0. $$

Por unicidad de la solución analítica que vale 1 en $t = 0$, se obtiene la identidad (válida para $c \notin \mathbb{Z}$, al menos):

$$ F'(a,b;c;t) = \frac{ab}{c}\,F(a+1,b+1;c+1;t). \tag{4.23} $$

El cambio de variable $s := 1-t$, $z(s) := x(t)$, aplicada a (4.20) produce la ecuación diferencial:

$$ s(1-s)\,\ddot{z}(s) + \big(a+b-c+1-(a+b+1)s\big)\,\dot{z}(s) - ab\,z(s) = 0. $$

porque $\dot{z}(s) = -x'(t)$ y $\ddot{z}(s) = x''(t)$. Esta es otra ecuación hipergeométrica con un punto singular regular en $s = 0$, esto es, en $t = 1$. Luego la ecuación original (4.20) posee dos soluciones básicas (cuando $c-a-b \notin \mathbb{Z}$) dadas por:

$$ \begin{aligned} x_3(t) &= F(a,b;a+b-c+1;1-t), \\ x_4(t) &= t^{c-a-b}F(c-b,c-a;c-a-b+1;1-t). \end{aligned} $$

Las series de potencias para estas soluciones convergen en el intervalo $(0,2)$. En el intervalo $0 < t < 1$, las dos bases de soluciones $\{x_1(t), x_2(t)\}$ y $\{x_3(t), x_4(t)\}$ son equivalentes; luego $x_3(t)$ y $x_4(t)$ coinciden con ciertos combinaciones lineales de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en el intervalo $(0,1)$.

⟦ La determinación de los coeficientes usa diversos fórmulas para las funciones hipergeométricos, que son fuera del alcance de este curso. Basta con citar aquí una de esas combinaciones:[17]

$$x_3(t) = \frac{\Gamma(a+b+1-c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(b+1-c)}\,x_1(t) + \frac{\Gamma(a+b+1-c)\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\,x_2(t)$$

salvo ciertos valores excepcionales de a, b, c. ⟧

► Varias funciones “elementales” son casos particulares de la función hipergeométrica. Por ejemplo, al notar que $1^{\overline{k}} = k!$ se ve que la serie geométrica es:

$$F(1,1;1;t) = \sum_{k=0}^{\infty} 1^{\overline{k}}\,\frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}\,.$$

Más generalmente,

$$F(a,1;1;t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{\overline{k}}\,\frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a+k-1}{k} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-a}{k} t^k = (1-t)^{-a},$$

usando el teorema binomial para exponentes reales. (La serie binomial es convergente en $(-1,1)$ si el exponente no está en $\mathbb{N}$.) En particular, si $n \in \mathbb{N}$, se ve que

$$F(-n,1;1;-t) = (1+t)^n.$$

Fíjese que ciertos valores de los parámetros a, b, c dan jugar a polinomios. En este caso, la ecuación hipergeométrico es

$$t(1+t)\,x''(t) - (1-(n-2)t)\,x'(t) - n\,x'(t) = 0.$$

Ejemplo 4.17. Considérese la **ecuación de Laguerre** con parámetro n:

$$t\,x''(t) + (1-t)\,x'(t) + n\,x(t) = 0. \tag{4.24}$$

Hay un punto singular regular en $t = 0$. Tómese una solución de la forma (4.18) con $x(t) = t^r\bigl(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k\bigr)$. En los términos del Teorema 4.15, la ecuación se escribe como

$$t^2\,x''(t) + t(1-t)\,x'(t) + nt\,x(t) = 0$$

con $p(t) := 1-t,\ q(t) := nt$. La ecuación indicial (4.19) en este caso se reduce a

$$r(r-1) + r + 0 = 0,$$

con una raíz doble, $r = 0$.

[17]Para la demostración, véase el Teorema 2.3.2 del libro: George E. Andrews, Richard Askey y Ranjan Roy, *Special Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

Entonces esta ecuación tiene una solución analítica. Con $a_0 = 1$ y $x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m$, se obtiene

$$\sum_{m=1}^{\infty} m(m-1)a_m t^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} m a_m t^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty}(n-m)a_m t^m = 0,$$

o bien

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2 a_{k+1}t^k + (n-k)a_k t^k = 0.$$

La relación de recurrencia es

$$a_{k+1} = -\frac{n-k}{(k+1)^2}\, a_k\,.$$

Entonces $a_{n+1} = 0$ y en seguida $a_{n+k} = 0$ para todo $k > 0$. La solución analítica es un *polinomio* $L_n(t)$, de grado n.

Es fácil verificar que ese **polinomio de Laguerre** es

$$\underline{L_n(t)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} \frac{t^k}{k!}\,. \tag{4.25}$$

Ejemplos:

$$L_0(t) \equiv 1, \quad L_1(t) = 1 - t, \quad L_2(t) = 1 - 2t + \tfrac{1}{2}t^2, \quad L_3(t) = 1 - 3t + \tfrac{3}{2}t^2 - \tfrac{1}{6}t^3, \ \dots$$

Hay una relación de ortogonalidad entre los polinomios de Laguerre. Con el “factor integrante” e^{-t} aplicado a la ecuación (4.24), se obtiene

$$\frac{d}{dt}\big(te^{-t}\, x'(t)\big) + ne^{-t}\, x(t) = 0.$$

Para obtener una ecuación de Sturm y Liouville (singular) con autovalores $\lambda = n$, es necesario modificar estos polinomios, al definir

$$\underline{l_n(t)} := e^{-t/2}\, L_n(t) \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Fíjese que $l_n'(t) = e^{-t/2}(L_n'(t) - \frac{1}{2}L_n(t))$. Usando la ecuación (4.24), se calcula que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big[t\, l_n'(t)\big] &= \frac{d}{dt}\big[e^{-t/2}\big(t\, L_n'(t) - \tfrac{t}{2}\, L_n(t)\big)\big] \\ &= e^{-t/2}\big[t\, L_n''(t) + (1-t)\, L_n'(t) - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{t}{4})\, L_n(t)\big] \\ &= e^{-t/2}(-n - \tfrac{1}{2} + \tfrac{t}{4})\, L_n(t). \end{aligned}$$

Esto dice que las funciones $l_n(t)$ cumplen las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d}{dt}\bigl[t\, l_n'(t)\bigr] + (n + \tfrac{1}{2} - \tfrac{t}{4})\, l_n(t) = 0.$$

Se trata de una ecuación de Sturm y Liouville (singular) en el intervalo $[0, \infty)$, con $p(t) = t$, $q(t) = \frac{t}{4} - \frac{1}{2}$, $r(t) \equiv 1$ y $\lambda = n$, con condiciones de frontera:

$$l_n(0) = 1, \qquad l_n(+\infty) := \lim_{t\to\infty} e^{-t/2}\, L_n(t) = 0.$$

Ahora la identidad de Lagrange (3.18) muestra que

$$(m - n) \int_0^\infty l_m(t)\, l_n(t)\, dt = 0,$$

o bien, en términos de los polinomios $L_n(t)$,

$$\int_0^\infty L_m(t)\, L_n(t)\, e^{-t}\, dt = 0 \quad \text{para} \quad m \neq n.$$

Dicho de otro modo: los polinomios de Laguerre $L_n(t)$ son ortogonales en $[0, \infty)$ con respecto a la función de peso e^{-t}. ◊

Proposición 4.18. *Los polinomios de Laguerre están dados por la **función generatriz**:*

$$\sum_{n=0}^\infty L_n(t)\, r^n = \frac{1}{1-r}\, \exp\Bigl(\frac{-rt}{1-r}\Bigr). \tag{4.26}$$

y esta serie converge para todo t y para $-1 < r < 1$.

Demostración. Cuando $t = 0$, en vista de $L_n(0) = 1$ la serie se reduce a la serie geométrica $\sum_{n=0}^\infty r^n = 1/(1 - r)$, la cual converge si y solo si $-1 < r < 1$. Para $t \neq 0$, el lado derecho también es analítica en r para $r \in (-1, 1)$.

Ahora hay que hacer un reacomodo de una serie doble:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^\infty L_n(t)\, r^n &= \sum_{n=0}^\infty r^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-t)^k}{(k!)^2} \sum_{n=k}^\infty \frac{n!\, r^n}{(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-t)^k}{(k!)^2} \sum_{m=0}^\infty \frac{(m+k)!\, r^{k+m}}{m!} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-rt)^k}{k!} \sum_{m=0}^\infty \binom{k+m}{m} r^m \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-rt)^k}{k!} \sum_{m=0}^\infty (-1)^m \binom{-k-1}{m} r^m = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-rt)^k}{k!} (1-r)^{-k-1} \\
&= \frac{1}{1-r} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-rt)^k}{k!} (1-r)^{-k} = \frac{1}{1-r}\, e^{-rt/(1-r)}.
\end{aligned}$$

El intercambio de sumas se justifica por la convergencia absoluta de la última serie, toda vez que $|r| < 1$. □

5 Soluciones aproximadas

Para las ecuaciones diferenciales lineales, hay una amplia gama de métodos que ofrecen soluciones en una forma "exacta", sea por una combinación de funciones conocidas o por series de potencias con coeficientes precisas. En cambio, las clases de ecuaciones no lineales con soluciones precisas son muy escasas. En tales casos, a veces es preferible obtener soluciones aproximadas: en lugar de dar una fórmula o serie de potencias para $x(t)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, bastaría con listar un número finito de argumentos $t_k \in [a, b]$ y obtener valores x_k tales que las diferencias $x(t_k) - x_k$ sean aceptablemente pequeñas.

En este capítulo se hará una breve reseña de varios procedimientos "numéricos" que permiten hallar tales listas de valores aproximadas $\{(t_1, x_1), \dots, (t_n, x_n)\}$. Estos algoritmos tienen importancia histórica y conceptual, aunque hoy en día han sido desplazados por métodos más finos que aprovechan las posibilidades de las computadoras modernas.

5.1 El método de Euler

Conviene volver a considerar el problema de valor inicial de primer orden (1.6) en un intervalo $[a, b]$, esta vez con $t_0 = a$:

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(a) = x_0. \tag{5.1}$$

⟦ Con modificaciones apropiadas para soluciones vectoriales $\boldsymbol{x}(t)$ y funciones vectoriales $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t))$, los métodos que siguen se adapten a las ecuaciones de orden superior. ⟧

Definición 5.1. Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto. Para algún $n \in \mathbb{N}^*$ (el número de pasos), sea $\underline{h} := (b - a)/n$ y considérese la partición del intervalo dado por

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b, \quad \text{con}$$
$$\underline{t_k} := a + kh \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Los **nodos** de esta partición son los argumentos

$$t_k = \big(1 - \tfrac{k}{n}\big)a + \tfrac{k}{n}\, b,$$

y la cantidad $h > 0$ es el **tamaño de paso**. (En el caso de un intervalo $[b, a]$ con $b < a$, la última relación sigue válida pero con $h < 0$.) ◊

En lo que sigue, se tomará $t_0 = a$ y $h > 0$ para simplificar el tratamiento. Si fuera $a < t_0 < b$ en el problema de valor inicial (1.6), habría que unir dos soluciones aproximadas, uno en $[t_0, b]$ con pasos de $(b - t_0)/n > 0$ y otro en $[a, t_0]$ con pasos $(a - t_0)/m < 0$; así se obtendría una solución aproximada en $[a, b]$ que cumple $x(t_0) = x_0$.

Definición 5.2. Dada un problema de valor inicial (5.1), con solución exacta $x(t)$, una función $y(t)$ es una **solución aproximada** con **error** no mayor que ε si

$$|y(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{para} \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Si $y(t)$ es continua y diferenciable por trozos en $[a, b]$, se dice que esta solución aproximada tiene **desviación** no mayor que η si

$$|y'(t) - f(t, y(t))| \leqslant \eta$$

para $t \in [a, b]$, con un número finito de excepciones. ◊

Para garantizar la unicidad de la solución exacta $x(t)$, usando el Teorema 1.15 de Picard, se supondrá en adelante que $f(t, x)$ cumple una condición de Lipschitz (1.13) en $[a, b] \times \mathbb{R}$:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant L\,|x - y| \quad \text{para todo} \quad t \in [a, b];\ x, y \in \mathbb{R}.$$

⟦ Si f fuera lipschitziana solo en un rectángulo compacto $[a, b] \times [x_0 - c, x_0 + c]$, con $f(t, x)| \leqslant M$ allí, habría que replantear la solución aproximada en el intervalo $[a, a + d]$, donde $d = \min\{b - a, c/M\}$, en vista del Corolario 1.16. ⟧

Definición 5.3. El **método de Euler** comprende la evaluación sucesiva de los incrementos $(x_{k+1} - x_k)$ en los nodos de la partición de $[a, b]$:

$$\boxed{x_{k+1} := x_k + h\, f(t_k, x_k),} \tag{5.2a}$$

seguido por una interpolación por segmentos rectilíneos:

$$y(t) := \frac{t_{k+1} - t}{h}\, x_k + \frac{t - t_k}{h}\, x_{k+1} \quad \text{para} \quad t \in [t_k, t_{k+1}]. \tag{5.2b}$$

La solución es lineal por trozos, pasando por los puntos (t_k, x_k) para $k = 0, 1, \dots, n$. ◊

Ejemplo 5.4. Considérese el problema de valor inicial:[1]

$$x'(t) = t^2 - \frac{x}{t}, \quad x(1) = 1, \quad \text{en el intervalo } [1.0, 1.5].$$

Con un paso $h = 0.1$, se obtiene la partición $\{t_0, t_1, \dots, t_5\} = \{1.0, 1.1, \dots, 1.5\}$. Se debe calcular, sucesivamente, los valores

$$x_0 = 1, \quad x_{k+1} := x_k + h\, f(t_k, x_k) = x_k + 0.1(t_k^3 - x_k)/t_k\,.$$

[1] Los datos numéricos de este ejemplo se toman del libro de Rai, Choudury y Freedman, p. 418.

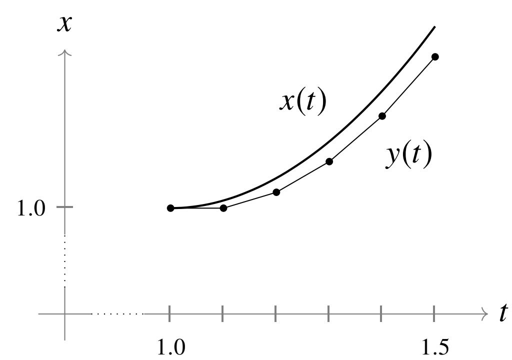

Figura 5.1: Método de Euler para $x'(t) = t^2 - x/t$, $x(1) = 1$; con $h = 0.1$.

Por ejemplo, $x_1 = 1 + 0.1(1 - 1)/1 = 1.0$, $x_2 = 1.0 + 0.1(1.331 - 1)/1.1 \doteq 1.03009$, etcétera. Al redondear a 4 cifras decimales,[2] se obtiene

t_k	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
x_k	1.0	1.0	1.0301	1.0883	1.1736	1.2858

La Figura 5.1 exhibe el resultado gráficamente: la línea quebrada $y(t)$ une los puntos (t_k, x_k); la curva $(t, x(t))$ representa la solución exacta.

De hecho, esta ecuación diferencial es lineal; su solución exacta es

$$x(t) = \frac{t^3}{4} + \frac{3}{4t} \quad \text{para} \quad 1.0 \leqslant t \leqslant 1.5.$$

Fíjese que $x'(t) = \frac{3}{4}(t^2 - t^{-2}) \geqslant 0$ y $x''(t) = \frac{3}{2}(t + t^{-3}) > 0$ para $1 \leqslant t \leqslant \frac{3}{2}$. Luego, la función $x(t)$ es *creciente y convexa* en el intervalo de interés. Esto implica que la línea quebrada $y(t)$ – en este ejemplo – queda por debajo de la curva $x(t)$, y el error $x(t) - y(t)$ crece con t; su máximo valor es $x(1.5) - y(1.5) \doteq 1.3437 - 1.2858 = 0.0579$. El error del método entonces es 0.058 (con un poquito de redondeo). $\lozenge$

Este Ejemplo 5.4 pone de manifiesto que el método de Euler no está tan mal como un primer ensayo, pero ciertamente es mejorable con procedimientos más sofisticados. Como los valores x_{k+1} están calculados a partir de x_k (la abscisa t_k se conoce de antemano), los errores $|x_k - x(t_k)|$ son cumulativos.

[2]Para efectos de dibujar un gráfico del resultado, basta conservar 3 cifras decimales (cualquier medida menos del diámetro de un pixel no sería observable en el gráfico). El error de redondeo cumulativo es bastante menor que el error propio del algoritmo.

El el caso especial donde $f(t,x)$ es continua pero *independiente de* x, la solución exacta del problema de valor inicial $x'(t) = f(t)$, $x(a) = x_0$ es la integral (de Riemann):

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s)\,ds.$$

En este caso, el método de Euler se reduce a una aproximación a esta integral por una suma de Riemann:

$$x_{k+1} := x_k + h\,f(t_k) = x_k + h\,f(a+kh), \qquad x_n = x_0 + h\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh),$$

donde los valores $f(t_k)$ están evaluadas al extremo izquierdo t_k de cada subintervalo $[t_k, t_{k+1}]$ de la partición. Esto indica que se puede esperar varias mejoras al método de Euler que se reducirán, para $f(t,x) \equiv f(t)$, a los algoritmos conocidos: el "del punto medio"; el "del trapecio"; el "de Simpson", que ofrecen aproximaciones a una integral de Riemann.

► Si la función $f(t,x)$ es de clase C^m (es decir, r veces continuamente diferenciable) sobre $[a,b]$, entonces la solución única $x(t)$ del problema de valor inicial (5.1) es de clase C^{m+1} y por ende admite un *desarrollo de Taylor* hasta grado r:

$$x(a+hs) = x(a) + x'(a)\,hs + x''(a)\frac{h^2s^2}{2!} + x'''(a)\,\frac{h^3s^3}{3!} + \cdots + x^{(m)}(a)\,\frac{h^ms^m}{m!} + R_m,$$

donde el resto tiene la forma

$$R_m = x^{(m+1)}(a+\theta hs)\,\frac{h^{m+1}s^{m+1}}{(m+1)!} \quad \text{para algún} \quad \theta \in (0,1). \tag{5.3}$$

Conviene desarrollar $x(t)$ alrededor de $t_k = a+kh$ en vez de a, y usar las abreviaturas $x'_k := x'(t_k)$, $x''_k := x''(t_k)$, etc. Así se obtiene, para $s = 1$:

$$x(t_{k+1}) = x(t_k + h) = x_k + h\,x'_k + \frac{h^2}{2}\,x''_k + \cdots + \frac{h^m}{m!}\,x_k^{(m)} + R_m\,,$$

donde $R_m = x^{(m+1)}(\tau_k)\,h^{m+1}/(m+1)!$ con $t_k < \tau_k < t_{k+1}$.

En el caso $m = 1$, la omisión del resto R_1 es equivalente al cambio

$$x(t_{k+1}) \longmapsto x_{k+1} := x_k + h\,x'_k = x_k + h\,f(t_k, x_k).$$

Esto es el método de Euler, aplicado con el valor inicial $x(t_k) := x_k$. En resumen: *el método de Euler consiste de la aplicación del polinomio de Taylor de primer grado en cada paso individual* de (t_k, x_k) a (t_{k+1}, x_{k+1}).

Una manera de obtener una mejor aproximación es la de usar un polinomio de Taylor de mayor grado. Por ejemplo, con $m = 2$ se podría considerar el polinomio cuadrático en H dado por:

$$x_{k+1} := x_k + h\,x'_k + \tfrac{1}{2}h^2\,x''_k = x_k + h\,x'_k + \tfrac{1}{2}h^2\,\frac{d}{dt}\big(f(t_k, x_k(t))\big).$$

Con la regla de la cadena se obtiene $df/dt = f_t + f_x\,dx/dt$, es decir, $df/dt = f_t + f f_x$, dando lugar a la receta

$$x_{k+1} := x_k + h\,x'_k + \tfrac{1}{2}h^2\big(f_t(t_k, x_k) + f(t_k, x_k)\,f_x(t_k, x_k)\big).$$

Este procedimiento ciertamente conduce a una mejor aproximación que el método original de Euler. Sin embargo, es evidente que requiere tres evaluaciones de $f(t, x)$ y sus derivadas en cada paso, con un cómputo muy costoso – en tiempo y esfuerzo – para no decir engorroso. La única virtud especial de este método es que es exacto cuando $x(t)$ es un polinomio cuadrático, en cuyo caso $x(a+h) = x(a) + x'(a)\,h + \tfrac{1}{2}x''(a)\,h^2$ sin resto.

Se debe, entonces, buscar procedimientos más sencillos que conservan la propiedad de ser exactas para polinomios cuadráticos.

5.2 Los métodos de Euler mejorado y modificado

En esta sección se busca una familia de algoritmos que ofrecen soluciones aproximadas al problema de valor inicial (5.1) en el intervalo $[a, b]$, con pasos de tamaño $h := (b-a)/n$, en donde se usan las notaciones x_k, x_{k+1}, x'_k, x'_{k+1}.

Aquí x_k representa la aproximación calculada para $x(t_k)$ en el paso $\#k$ del algoritmo; x_{k+1} es el valor propuesta para el algoritmo para aproximar x_{k+1}; $x'_k := f(t_k, x_k)$ es la derivada calculada en el paso $\#k$.

Considérese la receta general:

$$x_{k+1} := \alpha_1 x_k + h\big(\beta_0\,x'_{k+1} + \beta_1\,x'_k\big), \tag{5.4}$$

donde α_1, β_0, β_1 son ciertos coeficientes numéricos, por determinar. Se adopta el requisito de que esta receta *debe ser exacto para polinomios cuadráticos* $x(t)$, al sustituir

$$x_k \mapsto x(0), \quad x_{k+1} \mapsto x(h), \quad x'_k \mapsto x'(0), \quad x'_{k+1} \mapsto x'(h).$$

Al probar con $x(t) = 1\ t, t^2$ sucesivamente, se deduce lo siguiente:

$$\begin{aligned}
x(t) &\equiv 1 &&\Longrightarrow\quad 1 = \alpha_1 + h(0) &&\Longrightarrow\quad \alpha_1 = 1,\\
x(t) &= t &&\Longrightarrow\quad h = 0 + h(\beta_0 + \beta_1) &&\Longrightarrow\quad \beta_0 + \beta_1 = 1,\\
x(t) &= t^2 &&\Longrightarrow\quad h^2 = 0 + h(2\beta_0 h + 0) &&\Longrightarrow\quad \beta_0 = \tfrac{1}{2} \implies \beta_1 = \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

La fórmula (5.4) tiene un aspecto curioso si $\beta_0 \neq 0$: si se toma $x'_{k+1} := f(t_{k+1}, x_{k+1})$, la evaluación de x'_{k+1} parece exigir el conocimiento previo de x_{k+1}. Este acertijo se resuelve con la definición siguiente.

Definición 5.5. Dado un problema de valor inicial (5.1) en el intervalo $[a, b]$, se define un **algoritmo lineal de *m* pasos** por una fórmula iterativa del siguiente tipo:[3]

$$\begin{aligned} x_{k+1} := \alpha_1 x_k + \alpha_2 x_{k-1} + \cdots + \alpha_m x_{k-m+1} \\ + h\big(\beta_0\, x'_{k+1} + \beta_1\, x'_k + \cdots + \beta_m x'_{k-m+1}\big). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Si $\beta_0 = 0$, este asignación es un **predictor**: el lado derecho depende solamente de valores x_j y x'_j calculados en etapas previas al paso $\#(k+1)$. En cambio, si $\beta_0 \neq 0$, la asignación es un **corrector**: depende también de un valor x'_{k+1} calculado por algún otro procedimiento.

Es posible combinar dos recetas de tipo (5.5) con coeficientes diferentes, la primera con $\beta_0 = 0$ y la segunda con $\beta_0 \neq 0$, aplicadas consecutivamente en el paso $\#(k+1)$. Un algoritmo lineal de esa clase se llama un **método predictor y corrector**. ◊

Por ejemplo, se puede combinar el método de Euler (de 1 paso) con la receta correctora (5.4) con $\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = \beta_1 = \frac{1}{2}$; como sigue.

Definición 5.6. El **método de Euler mejorado** combina el método de Euler, como predictor, con el método de 1 paso (5.4) como corrector, así:

$$\tilde{x}_{k+1} := x_k + h\, x'_k\,, \qquad x_{k+1} := x_k + \tfrac{1}{2} h(x'_k + \tilde{x}'_{k+1}),$$

con la abreviatura $\tilde{x}'_{k+1} := f(t_{k+1}, \tilde{x}_{k+1})$. De modo más explícito:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &:= x_k + h\, f(t_k, x_k), \\ x_{k+1} &:= x_k + \tfrac{1}{2} h\big(f(t_k, x_k) + f(t_{k+1}, \tilde{x}_{k+1})\big). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Después de la segunda asignación, se descarta el valor provisional $\tilde{x}_{k+1}$.

La solución aproximada $y(t)$ es la función lineal por trozos (5.2b) que une los puntos (t_k, x_k) determinados sucesivamente por (5.6). ◊

Ejemplo 5.7. Considérese de nuevo el problema del Ejemplo 5.4:

$$x'(t) = t^2 - \frac{x}{t}, \quad x(1) = 1, \quad \text{en el intervalo } [1.0, 1.5].$$

[3] En la fórmula (5.5), se sobreentiende que $x_j = 0$ y $x'_j = 0$ si el índice j es negativo.

Con el método mejorado de Euler (5.6), la tabla de valores (t_x, x_k) es la siguiente:[4]

t_k	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$\tilde{x}_k$	1.0	1.0	1.0437	1.1135	1.2091	1.3310
x_k	1.0	1.0150	1.0576	1.1268	1.2223	1.3442

El error cumulativo en $t = 1.5$ es $x(1.5) - y(1.5) = 1.3437 - 1.3442 = -0.0005$. ⟦ En este caso el error ya no es una función monótona de t; además, es negativa: la línea quebrada $(t, y(t))$ es levemente superior a la curva $(t, x(t))$. ⟧ ◊

En el caso especial donde $f(t,x) = f(t)$ no depende de x, el método mejorado de Euler (5.6) se reduce a la prescripción:

$$x_{k+1} := x_k + \tfrac{1}{2}h\big(f(t_k) + f(t_{k+1})\big).$$

(En este caso particular, el valor intermedio $\tilde{x}_{k+1}$ es irrelevante.) Esta no es otra cosa que la **regla del trapecio** para aproximar la integral de $f(t)$ sobre el intervalo $[a, b]$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\,dt &\doteq \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) + f(t_{k+1}) \\ &= \tfrac{1}{2}h\big(f(t_0) + 2f(t_1) + 2f(t_2) + \cdots + 2f(t_{n-1}) + f(t_n)\big). \end{aligned}$$

► Un método predictor de 2 pasos,

$$x_{k+1} := \alpha_1 x_k + \alpha_2 x_{k-1} + h\big(\beta_1\, x'_k + \beta_2 x'_{k-1}\big)$$

es exacto para polinomios cuadráticos $x(t)$ si y solo si

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 = 2, \quad \alpha_1 + 2\beta_1 = 4.$$

Hay varias soluciones para estas ecuaciones; una de ellas es $\alpha_1 = \beta_2 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_1 = 2$, que produce el algoritmo:

$$x_{k+1} := x_{k-1} + 2h\, x'_k\,. \tag{5.7}$$

Definición 5.8. El **método de Euler modificado** aplica el algoritmo (5.7) pero con un tamaño de paso de $\frac{1}{2}h$, con $2n$ pasos en el intervalo $[a, b]$. Para poder compararlo con

[4]Tomado de Rai *et al*, p. 420.

los métodos anteriores, se introduce la notación $t_{k+1/2} := a + (k + \frac{1}{2})h = \frac{1}{2}(t_k + t_{k+1})$. Con esta modificación, la receta (5.7) asume el formato:

$$x_{k+1} := x_k + h\, x'_{k+1/2}\,.$$

Para poder calcular valores solamente en los nodos t_k, se adopta la definición $x_{k+1/2} := x_k + \frac{1}{2}h\, f(x_k, t_k)$, esto es, se aplica el método de Euler con un medio paso $\frac{1}{2}h$. Entonces el método modificado de Euler se presenta como sigue:

$$\begin{aligned} x_{k+1/2} &:= x_k + \tfrac{1}{2}h\, f(x_k, t_k), \\ x_{k+1} &:= x_k + h\, f(\tfrac{1}{2}(t_k + t_{k+1}), x_{k+1/2}). \end{aligned} \tag{5.8}$$

La solución aproximada $y(t)$ es la función lineal por trozos que une los puntos (t_k, x_k) obtenidos por este método, para $k = 0, 1, 2, \dots, n$. ◊

Para el caso $f(t, x) = f(t)$, la fórmula (5.8) se reduce a

$$x_{k+1} := x_k + h\, f(\tfrac{1}{2}(t_k + t_{k+1})).$$

Esto proporciona la **regla del punto medio** para aproximar integrales:

$$\int_a^b f(t)\, dt \doteq h \sum_{k=0}^{n-1} f(\tfrac{1}{2}(t_k + t_{k+1})).$$

Denótese el lado derecho por S_2; y sea S_1 la suma aproximante dada por la regla del trapecio para la integral $I := \int_a^b f(t)\, dt$. No es difícil comprobar, por una aplicación del teorema de valor medio a la serie de Taylor de f, que los errores respectivos son

$$E_1 := I - S_1 = -\frac{h^2}{12}\,(b-a)\, f''(c_1), \qquad E_2 := I - S_2 = +\frac{h^2}{24}\,(b-a)\, f''(c_2),$$

para algunas abscisas $c_1, c_2 \in [a, b]$. Aunque $c_1 \neq c_2$, se puede anticipar un error mucho menor al usar la aproximación

$$S := \tfrac{1}{3}S_1 + \tfrac{2}{3}S_2\,.$$

Resulta que la aproximación S es mucho más precisa de lo esperado; en efecto,

$$E := I - S = -\frac{h^4}{180}\,(b-a)\, f^{(4)}(c), \quad \text{para algún} \quad c \in (a, b).$$

La fórmula aproximante

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\, dt \doteq S &= \frac{h}{6} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) + 4f(t_{k+1/2}) + f(t_{k+1}) \\ &= \tfrac{1}{6}h\big(f(t_0) + 4f(t_{1/2}) + 2f(t_1) + \cdots + 2f(t_{n-1}) + 4f(t_{n-1/2}) + f(t_n)\big) \end{aligned}$$

es la celebrada **regla de Simpson**.

► Hay una amplia gama de métodos de pasos múltiples (5.5), dependiendo de la manera en que se asignan los coeficientes α_j y β_j. Una posibilidad es pedir exactitud para polinomios $x(t)$ hasta el grado $2m - 1$ (si $\beta_0 = 0$, un método predictor) o de grado $2m$ si $\beta_0 \neq 0$. Otra táctica, a veces más aconsejable, es la de suprimir ciertos coeficientes *a priori*. Los llamados **métodos de Adams** piden $\alpha_j = 0$ para $j > 1$, en cuyo caso $\alpha_1 = 1$ necesariamente. Considérese, por ejemplo, la fórmula predictor de Adams y Bashforth:

$$x_{k+1} := x_k + \frac{h}{24}\,(55\,x'_k - 59\,x'_{k-1} + 37\,x'_{k-2} - 9\,x'_{k-3}), \tag{5.9a}$$

y la fórmula corrector de Adams y Moulton:[5]

$$x_{k+1} := x_k + \frac{h}{24}\,(9\,x'_{k+1} + 19\,x'_k - 5\,x'_{k-1} + x'_{k-2}). \tag{5.9b}$$

Los dos métodos son exactos para polinomios de grado 4.

Sin embargo, los métodos de pasos múltiplos requieren, al inicio de la iteración, los valores iniciales de $x_1, \dots, x_{m-1}$. Estos valores deben ser generados por algún método de paso simple, como el de Euler (el predictor para el método de Euler mejorado) o bien los de Runge y Kutta, examinados a continuación. Fíjese que el método de Euler modificado es de paso doble (levemente disfrazado), y como tal requiere el valor de $x_{1/2}$ para su arranque.

5.3 Los métodos de Runge y Kutta

Los métodos de pasos múltiples evitan la necesidad de evaluar las derivadas parciales de f, tales como $f_t(x_k, h_k)$, $f_x(x_k, h_k)$ y otras derivadas de orden superior, pero adolecen de la necesidad de obtener los valores iniciales por algún otro procedimiento. Un método *de paso simple* que también evita la necesidad de evaluar los f_t, f_x, etcétera, fue introducido por Runge: él sugirió la posibilidad de evaluar $f(t, x)$ en ciertos puntos intermedios, usando un juego de coeficientes cuidadosamente seleccionados.[6]

[5] Estos dos métodos fueron introducidos por el matemático inglés John Couch Adams, quien en 1845 usó las leyes de Kepler, una tabla de posiciones de Urano, y un algoritmo numérico de este estilo para predecir la posición de Neptuno (casi simultáneamente con Le Verrier), confirmada en 1846. El método predictor fue empleado por él y Francis Bashforth en 1883 para estudiar la formación de gotas líquidos; el método corrector fue usado por Forrest Moulton en 1926 en un problema balístico.

[6] En el artículo original: Carl Runge, “Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen”, *Mathematische Annalen* **46** (1895), 167–178, los principios del método fueron expuestos y analizados. Posteriormente, en: Wilhelm Kutta, “Beitrag zur näherungweisen Integration totaler Differentialgleichungen”, Zeitschrift für mathematische Physik **46** (1901), 435–453, aparecen el esquema general del método y los dos ejemplos más famosos de orden 4.

Definición 5.9. El esquema de Runge, reformulado por Kutta, propone un algoritmo:

$$x_{m+1} := x_m + (b_1 k_1 + b_2 k_2 + \cdots + b_r k_r), \tag{5.10a}$$

con pesos $b_1, \dots, b_r$ por determinar, con unos r incrementos k_i de la forma

$$\begin{aligned} k_1 &:= h\, f(t_m, x_m), \\ k_2 &:= h\, f(t_m + c_2 h, x_m + a_{21} k_1), \\ k_3 &:= h\, f(t_m + c_3 h, x_m + a_{31} k_1 + a_{32} k_2), \quad \text{etc.} \end{aligned} \tag{5.10b}$$

con el patrón general:

$$k_i := h\, f\Bigl(t_m + c_i h, x_m + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j\Bigr). \tag{5.10c}$$

donde se toma $c_1 = 0$. Dícese que este método tiene ***r* etapas** (el número de evaluaciones de los incrementos k_i) y que tiene **orden *p*** si es exacto para polinomios $x(t)$ de grados no mayor que p. ◊

Para obtener un método de Runge y Kutta de orden 2, hay que determinar b_1, b_2, c_2 y a_{21} tales que la asignación (5.10a) coincida con el desarrollo de Taylor hasta segundo orden. En otras palabras, se compara el desarrollo

$$x(t + h) = x(t) + h\, x'(t) + \tfrac{1}{2} h^2\, x''(t) + O(h^3) \tag{5.11}$$

con lo que se obtiene de la fórmula de Taylor en dos variables:

$$f(t + c_2 h, x + a_{21} h f(t, x)) = f(t, x) + c_2 h f_t(t, x) + a_{21} h f(t, x) f_x(t, x) + O(h^2).$$

El paso $x(t + h) \doteq x(t) + b_1 k_1 + b_2 k_2$ entonces implica que

$$x(t + h) = x(t) + (b_1 + b_2)\, f(t, x) + b_2 c_2 h^2 f_t(t, x) + b_2 a_{21} h^2 f(t, x) f_x(t, x) + O(h^3).$$

Al comparar con (5.11), habida cuenta de que $x'(t) = f(t, x)$ y $x''(t) = (f_t + f f_x)(t, x)$, se obtienen las condiciones

$$b_1 + b_2 = 1, \qquad b_2 c_2 = b_2 a_{21} = \tfrac{1}{2} \implies c_2 = a_{21}\,.$$

Queda un parámetro libre, que podría ser c_2.

En general, para los métodos con r etapas, resulta que

$$b_1 + \cdots + b_r = 1 \quad \text{y} \quad c_i = a_{i1} + \cdots + a_{i,i-1}\,. \tag{5.12}$$

Algunas de las posibilidades para métodos de segundo orden son las siguientes:

◇ Para $c_2 = 1$, se obtiene el método de Euler mejorado, (5.6):

$$x_{m+1} := x_m + \tfrac{1}{2} h f(t_m, x_m) + \tfrac{1}{2} h f(t_m + h, x_m + h f(t_m, x_m)).$$

◇ Para $c_2 = \frac{1}{2}$, se obtiene el método de Euler modificado, (5.8):

$$x_{m+1} := x_m + h f(t_m + \tfrac{1}{2} h, x_m + \tfrac{1}{2} h f(t_m, x_m)).$$

◇ Para $c_2 = \frac{2}{3}$, se obtiene el llamado **método de Heun** de segundo orden:

$$x_{m+1} := x_m + \tfrac{1}{4} h f(t_m, x_m) + \tfrac{3}{4} h f(t_m + \tfrac{2}{3} h, x_m + \tfrac{2}{3} h f(t_m, x_m)).$$

Nótese que las primeras dos fórmulas ya tienen incorporados el término $\tilde{x}_{m+1}$ de las fórmulas (5.6) y (5.8). Se trata de un método de paso simple, sin necesidad de un "predictor" explícito.

Es factible hacer un análisis semejante para métodos de tercer y cuarto orden, como también para órdenes superiores, aunque los desarrollos de Taylor se vuelven engorrosos. Por ejemplo, para orden 3 hay que emplear la fórmula:

$$x'''(t) = \big[f_{tt} + 2 f f_{tx} + f^2 f_{xx} + f_t f_x + f f_x^2\big](t, x).$$

En todo caso, se obtienen diversos relaciones entre los parámetros b_j, c_i y a_{ij}, que incluyen las relaciones lineales (5.12) ya mencionadas. En cada caso, quedan algunos parámetros libres, que dan lugar a una familia de métodos de Runge y Kutta para cada orden.

Se puede organizar los parámetros con el esquema que sigue.

Definición 5.10. Un método de Runge y Kutta está determinado por sus coeficientes: dos vectores $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^r$ y una matriz triangular inferior A, organizados en un **tablero de Butcher**:[7]

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{c} & A \\ \hline & \boldsymbol{b}^\top \end{array}$$

donde $\boldsymbol{b}^\top$ es la transpuesta de $\boldsymbol{b}$ (un vector de fila). En este tablero, resulta que $c_1 = 0$ y se cumplen las relaciones (5.12), entre otras: la última fila tiene suma 1 y la suma de la fila $\# i$ de A es igual a c_i, colocada a la izquierda de esa fila. ◊

[7]Todos los métodos de Runge y Kutta han sido estudiados a fondo por John Butcher, quien introdujo este tablero en 1964 para exhibir los coeficientes. Los métodos dados por (5.10) son "explícitos": x_{m+1} depende directamente de x_m. Cuando se permite $c_1 \neq 0$ y que la matriz A no sea triangular inferior, se obtienen otros métodos "implícitos", no discutidos en este curso.

Ejemplo 5.11. Los tableros de Butcher de una o dos etapas son:

$$
\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}
$$

que representan respectivamente: el método de Euler (de una sola etapa); el método de Euler mejorado; el método de Euler modificado; y el método de Heun. ◊

Ejemplo 5.12. De entre los tableros de tres etapas, se pueden mencionar:

$$
\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}
$$

atribuidos a Kutta, Nystrom y Heun, respectivamente.

Por ejemplo, la forma de Kutta corresponde al algoritmo:

$$
\begin{aligned}
x_{m+1} &:= x_m + \tfrac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3), \quad \text{donde} \\
k_1 &:= h\, f(t_m, x_m), \\
k_2 &:= h\, f(t_m + \tfrac{1}{2}h, x_m + \tfrac{1}{2}k_1), \\
k_3 &:= h\, f(t_m + h, x_m - k_1 + 2k_2).
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

Fíjese que solo se requiere tres evaluaciones de $f(t,x)$ en diversos puntos en cima del intervalo $[t_m, t_{m+1}]$. ◊

El significado del método de Runge queda más evidente en la fórmula (5.13). Cada k_i/h representa la *pendiente* de un segmento con abscisa $t_m + c_i h$. La solución aproximada $y(t)$ para $t_m \leqslant t \leqslant t_{m+1}$ es un segmento con extremo izquierdo (t_m, x_m), como en el método de Euler; pero, en contraste con este método, se calcula varias pendientes posibles; y al final se decide por un promedio ponderado de las pendientes disponibles. Esta variante sofisticada del método de Euler fue la que motivó a Runge a proponer su algoritmo de paso simple.

Obviamente, se debe lograr un balance entre la precisión del método y el número de evaluaciones de $f(t,x)$. Para cálculos "manuales" se estima que ese meta se alcanza con dos métodos de 4 etapas, ambos de orden 4, propuestas originalmente por Kutta, que se detallan a continuación.[8]

[8] Kutta prefirió su "regla de tres octavos", por tener mayor precisión, pero el otro método "clásico" fue alabado por Runge, porque requiere menos pasos computacionales.

Definición 5.13. La **regla de tres octavos** de Kutta es el algoritmo de paso simple con el tablero de Butcher siguiente:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\
\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & & \\
1 & 1 & -1 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8}
\end{array}
$$

el cual corresponde al algoritmo:

$$
\begin{aligned}
x_{m+1} &:= x_m + \tfrac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4), \quad \text{donde} \\
k_1 &:= h\,f(t_m, x_m), \\
k_2 &:= h\,f(t_m + \tfrac{1}{3}h, x_m + \tfrac{1}{3}k_1), \\
k_3 &:= h\,f(t_m + \tfrac{2}{3}h, x_m - \tfrac{1}{3}k_1 + k_2), \\
k_4 &:= h\,f(t_m + h, x_m + k_1 - k_2 + k_3).
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

El análisis de error de los métodos de cuarto orden es difícil, pero Kutta creyó que este método es más preciso que el que sigue.[9] ◊

Definición 5.14. El **método clásico** de Runge y Kutta es el algoritmo de paso simple con el tablero de Butcher siguiente:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

el cual corresponde al algoritmo:

$$
\begin{aligned}
x_{m+1} &:= x_m + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad \text{donde} \\
k_1 &:= h\,f(t_m, x_m), \\
k_2 &:= h\,f(t_m + \tfrac{1}{2}h, x_m + \tfrac{1}{2}k_1), \\
k_3 &:= h\,f(t_m + \tfrac{1}{2}h, x_m + \tfrac{1}{2}k_2), \\
k_4 &:= h\,f(t_m + h, x_m + k_3).
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

[9] Esta opinión está citado en: John C. Butcher y Gerhard Wanner, “Runge–Kutta methods: some historical notes”, *Applied Numerical Mathematics* **22** (1996), 113–151.

Debido a que tres de los coeficientes a_{ij} son ceros, este método es levemente más sencillo que (5.14). En muchos libros de texto modernos, es el único método de Runge y Kutta digno de mención. ◊

Ejemplo 5.15. Considérese de nuevo el problema de valor inicial del Ejemplo 5.4:

$$x'(t) = \frac{t^3 - x}{t}, \quad x(1) = 1, \quad \text{en el intervalo } [1.0, 1.5].$$

Una vez más, se usa pasos de tamaño $h = 0.1$. Para $x_0 = 1.0$, se obtiene sucesivamente (hasta 6 cifras decimales):

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0.1\, f(1.0, 1.0) = 0.0,\\
k_2 &= 0.1\, f(1.05, 1.0) = 0.015012,\\
k_3 &= 0.1\, f(1.05, 1.007506) = 0.014297,\\
k_4 &= 0.1\, f(1.1, 1.014297) = 0.028791.
\end{aligned}$$

Luego, el primer paso produce el valor

$$x_1 = 1.0 + \tfrac{1}{6}(0.0 + 0.030024 + 0.028594 + 0.028791) = 1.014568.$$

Ahora se continua el siguiente paso con $k_1 = 0.1\, f(1.1, 1.014568) = 0.028766$, etcétera. En resumen, se obtiene esta tabla de valores:[10]

t_k	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
x_k	1.0	1.014568	1.057000	1.126173	1.221714	1.343750

Esto ofrece el valor calculado $y(1.5) = 1.343750$, que se debe comparar con el valor exacto $x(1.5) = \frac{1}{4}((1.5)^3 + 3/1.5) = \frac{1}{4}(3.375 + 2) = 1.34375$ (sin redondeo). Conclusión: el método clásico de Runge y Kutta da el valor exacto de $x(1.5)$, módulo de errores de redondeo – los cuales en este caso son menores que la precisión de 10^{-6} en el transcurso del cálculo.[11] ◊

La ganancia de exactitud en comparación con el método de Euler mejorado es impresionante. Por tal motivo, es frecuente usar uno de los métodos de Runge y Kutta como una *etapa de arranque* antes de transferir el control a un algoritmo de predictor y corrector, como el de Adams (5.9). El método de Adams de grado 4 conserva una exactitud semejante al del clásico de Runge y Kutta, también de grado 4, pero requiere menos cálculos en cada paso subsiguiente. La combinación de los dos métodos es muy poderosa.

[10] Tomados de Rai *et al*, *op. cit.*, p. 428.

[11] En el libro citado, se ejecutan los cálculos hasta 7 cifras decimales: todos los x_k calculados son exactos hasta 7 cifras.

5.4 Errores de truncación

Los métodos numéricos vistos en este capítulo son inexactos, en parte por las limitaciones propias de los algoritmos pero también por la precisión limitada de los instrumentos de cálculo. El segundo tipo de error se debe a la necesidad de expresar los números calculados en cada operación aritmética con una cantidad acotada de cifras decimales: 4 o 5 para cálculos manuales, 8 a 12 para calculadoras de bolsillo o los "apps" que las emulan; quizás 20 o más con software numérico profesional; pero de todas formas una cantidad finita. Las desviaciones de las últimas cifras decimales debidas a esta precisión finita se llaman **errores de redondeo**. Como los errores de esta clase, aunque siempre presentes, no son propios de los algoritmos aquí discutidos, se limita su estudio en este curso a una mención piadosa.[12]

Definición 5.16. Considérese, una vez más, el problema de valor inicial (5.1) en el intervalo compacto $a \leqslant t \leqslant b$, subdividido en n segmentos iguales de longitud $h = (b-a)/n$. Se calculan los valores aproximados $x_1, x_2, \dots, x_n$ mediante un algoritmo de la forma

$$x_{k+1} := x_k + h\,\Phi(t_k, x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m+1}; h), \tag{5.16a}$$

para un método explícito de m pasos. ⟦En un método implícito, Φ también puede depender de x_{k+1}.⟧ Sea $\tilde{x}_{/k}(t)$ la solución exacta de $x'(t) = f(t,x)$ con la condición inicial $\tilde{x}_{/k}(t_k) = x_k$. La diferencia

$$x_{k+1} - \tilde{x}_{/k}(t_{k+1})$$

se llama el **error de truncación local** o el *error de discretización local* en el paso $\#k$.

La cantidad $x_n - x(b)$, donde $x(t)$ es la solución exacta del problema original (5.1), es el **error de truncación cumulativo**. Es importante señalar que $x_n - x(b)$ no es simplemente la suma de los $x_{k+1} - \tilde{x}_{/k}(t_{k+1})$, porque en general $\tilde{x}_{/k}(t_k) \neq x(t_k)$ para $k = 1, \dots, n-1$. ◊

Para simplificar la discusión de los errores, aquí se discutirá en detalle los métodos de un paso solamente. En la asignación

$$x_{k+1} := x_k + h\,\Phi(t_k, x_k; h), \tag{5.16b}$$

la **función de incremento** Φ depende del punto (t_k, x_k) y de h por una fórmula concreta.

[12] Físicamente, cualquier computadora reserva unos pocos registros para guardar en memoria un determinado número decimal. Luego, se ejecutan operaciones de la llamada *aritmética de punto flotante*, que ni siquiera es conmutativa ni asociativa. Sin embargo, los errores debidos a este tipo de inexactitud son insignificantes en comparación con los errores de truncación y de redondeo.

De este modo, se puede redefinir el **error de truncación local** como una función de $t \in [a, b]$ y de h, así:

$$T(t, h) := x(t) + h\,\Phi(t, x(t); h) - x(t + h). \tag{5.17}$$

Este es el error obtenido al aplicar el algoritmo a la ecuación diferencial $x'(t) = f(t, x(t))$ en el intervalo $[t, t + h]$.

► Para el *método de Euler*, con función de incremento

$$\Phi(t, x; h) = f(t, x),$$

la fórmula de Taylor de primer orden muestra que

$$\begin{aligned} T(t, h) &= x(t) + h\,f(t, x(t)) - x(t + h) \\ &= x(t) + h\,x'(t) - x(t + h) = -\frac{h^2}{2}\,x''(t + \theta h), \end{aligned}$$

para algún θ con $0 < \theta < 1$.

En vista de que $x''(t) = f_t(t, x(t)) + f(t, x(t))\,f_x(t, x(t))$, se obtiene una cota

$$M_2 := \sup\{\,|x''(t)| : a \leqslant t \leqslant b\,\}, \tag{5.18}$$

toda vez que f sea continuamente diferenciable (es decir, que las derivadas parciales f_t y f_x sean continuas en $[a, b] \times \mathbb{R}$). En tal caso, se obtiene la estimación:

$$|T(t, h)| \leqslant \tfrac{1}{2} h^2 M_2. \tag{5.19}$$

En cuanto al error cumulativo del método de Euler, el siguiente resultado es relevante.

Proposición 5.17. *Sea dado el problema de valor inicial* (5.1)*:*

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(a) = x_0.$$

Supóngase que f sea continuamente diferenciable y lipschitziana según (1.13)*:*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant L\,|x - y| \quad \text{para} \quad t \in [a, b];\ x, y \in \mathbb{R}.$$

La solución única $x(t)$ es dos veces continuamente diferenciable y la cota M_2 de (5.18) *es finita. Sea $y(t)$ la solución aproximada* (5.2) *dada por el método de Euler. Entonces el error cumulativo $E_k := x_k - x(t_k)$ en cada intervalo $[a, t_k]$ satisface la desigualdad:*

$$E_k \leqslant h\,\frac{M_2}{2L}\,\bigl(e^{L(t_k - a)} - 1\bigr). \tag{5.20}$$

Demostración. Si se compara la ecuación (5.16b) con (5.17) evaluada en $t = t_k$:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h\,\Phi(t_k, x_k; h), \\ x(t_{k+1}) &= x(t_k) + h\,\Phi(t_k, x(t_k); h) - T(t_k, h), \end{aligned}$$

al restarlos se obtiene una relación entre errores consecutivos:

$$E_{k+1} = E_k + h\big(\Phi(t_k, x_k; h) - \Phi(t_k, x(t_k); h)\big) + T(t_k, h).$$

En el caso del método de Euler, esa fórmula se simplifica:

$$E_{k+1} = E_k + h\big(f(t_k, x_k) - f(t_k, x(t_k))\big) + T(t_k, h).$$

Sea $T := \max\{\, |T(t_k, h)| : k = 1, \dots, n \,\}$. Entonces $T \leqslant \frac{1}{2}h^2 M_2$ por (5.19). La condición de Lipschitz implica que

$$|f(t_k, x_k) - f(t_k, x(t_k))| \leqslant L\,|x_k - x(t_k)| = L\,|E_k|$$

y por lo tanto:

$$|E_{k+1}| \leqslant (1 + hL)|E_k| + |T(t_k, h)| \leqslant (1 + hL)|E_k| + T.$$

Como $E_0 = x_0 - x(t_0) = 0$ por la condición inicial, se obtiene $|E_1| \leqslant T$. En seguida,

$$|E_2| \leqslant T\big(1 + (1 + hL)\big), \qquad |E_3| \leqslant T\big(1 + (1 + hL) + (1 + hL)^2\big),$$

y luego, por inducción sobre k,

$$|E_k| \leqslant T\,\frac{(1 + hL)^k - 1}{hL} \leqslant h\,\frac{M_2}{2L}\big((1 + hL)^k - 1\big).$$

La desigualdad de Bernoulli, $1 + hL \leqslant e^{hL}$, entrega la conclusión:

$$|E_k| \leqslant h\,\frac{M_2}{2L}\big(e^{khL} - 1\big) = h\,\frac{M_2}{2L}\big(e^{L(t_k - a)} - 1\big).$$

En particular, $|E_n| \leqslant h\,M_2(e^{L(b-a)} - 1)/L$. □

Corolario 5.18. *El método de Euler es de primer orden, por cuanto sus errores de truncación cumulativos son $O(h)$ con pasos de tamaño h.* ⊟

► Antes de abordar los errores de truncación para otros métodos, es útil observar que todos los métodos discutidos hasta ahora se extienden a ecuaciones de orden superior, o bien a sistemas de ecuaciones de primer orden, al considerar ecuaciones con soluciones vectoriales. Es decir, se debe estudiar el problema de valor inicial:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \quad \boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{x}_0 \tag{5.21}$$

en el intervalo $a \leqslant t \leqslant b$, con $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^m$ y $\boldsymbol{f} : [a, b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ una función continua y lipschitziana. Por ejemplo, se obtiene el método de Euler para una ecuación de segundo orden $x''(t) = g(t, x(t), x'(t))$ al colocar $y(t) := x'(t)$ y al considerar un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t), \\ y'(t) &= g(t, x(t), y(t)), \quad \text{con} \quad x(a) = x_0, \quad y(a) = y_0 \end{aligned}$$

usando el algoritmo

$$x_{k+1} := x_k + h y_k\,, \qquad y_{k+1} := y_k + h\, g(t_k, x_k, y_k).$$

Para simplificar los desarrollos de Taylor que siguen, es mejor limitarse a problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales *autónomas*:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)), \quad \boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{x}_0\,. \tag{5.22}$$

Esto se puede lograr con el artificio de reemplazar $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ por el vector $\tilde{\boldsymbol{x}}(t) := (t, x_1(t), \dots, x_m(t)) \in \mathbb{R}^{m+1}$, considerando t como *una nueva incógnita*. Al reemplazar $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t))$ por $\tilde{\boldsymbol{f}}(\tilde{\boldsymbol{x}}(t)) := \bigl(1, f_1(t, x(t)), \dots, f_m(t, \boldsymbol{x}(t))\bigr)$, se convierte el sistema no autónoma (5.21) en un sistema autónoma:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}'(t) = \tilde{\boldsymbol{f}}(\tilde{\boldsymbol{x}}(t)), \quad \tilde{\boldsymbol{x}}(a) = (a, \boldsymbol{x}_0).$$

El desarrollo de Taylor de $\boldsymbol{x}(t + h)$ en el caso vectorial no difiere del caso escalar, salvo en la notación:

$$\boldsymbol{x}(t+h) = \boldsymbol{x}(t) + h\,\boldsymbol{x}'(t) + \frac{h^2}{2!}\,\boldsymbol{x}''(t) + \frac{h^3}{3!}\,\boldsymbol{x}'''(t) + \cdots + \frac{h^m}{m!}\,\boldsymbol{x}^{(m)}(t) + O(h^{m+1}). \tag{5.23}$$

Cuando $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ en vista de la ecuación diferencial autónoma (5.22), de modo que $x_j'(t) = f_j(\boldsymbol{x}(t))$ para $j = 0, 1, \dots, m$, la regla de la cadena implica que

$$x_j''(t) = \sum_{i=0}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\, x_i'(t) = \sum_{i=0}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\, f_i(\boldsymbol{x}(t)) \equiv \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) \implies \boldsymbol{x}''(t) = \boldsymbol{f}_x \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)).$$

En la notación, $\boldsymbol{f}_x$ denota la matriz de derivadas parciales $[\partial f^i / \partial x_j]$ actuando sobre el vector $\boldsymbol{f}$. (Esta expresión $\boldsymbol{f}_x \cdot \boldsymbol{f}$ reemplaza $f_t + f_x f$ del caso escalar no autónoma.)

Para las derivadas superiores de $\boldsymbol{x}(t)$, las fórmulas apropiadas son[13]

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}'''(t) &= \boldsymbol{f}_{xx} \cdot (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}) + (\boldsymbol{f}_x)^2 \cdot \boldsymbol{f}, \\
\boldsymbol{x}^{(4)}(t) &= \boldsymbol{f}_{xxx} \cdot (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}) + 3\, \boldsymbol{f}_{xx} \cdot (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_x \cdot \boldsymbol{f}) + \boldsymbol{f}_x \cdot \boldsymbol{f}_{xx} \cdot (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}) + (\boldsymbol{f}_x)^3 \cdot \boldsymbol{f},
\end{aligned}
$$

etc., evaluadas en $\boldsymbol{x}(t)$. Aquí, $\boldsymbol{f}_{xx}$ es una forma bilineal simétrica, $\boldsymbol{f}_{xxx}$ es trilineal, etc.

Proposición 5.19. *El método de Euler mejorado es de segundo orden, pues tiene errores de truncación global $O(h^2)$ con pasos de tamaño h.*

Demostración. El método de Euler mejorado es un método de Runge y Kutta de dos etapas (véase el Ejemplo 5.11:

$$
\begin{aligned}
x_{m+1} &:= x_m + \tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{1}{2}k_2, \\
k_1 &:= h\, f(t_m, x_m), \\
k_2 &:= h\, f(t_m + h, x_m + k_1).
\end{aligned}
$$

Se puede convertir esta en una ecuación autónoma al introducir las notaciones vectoriales $\boldsymbol{x}(t) \equiv (t, x(t))$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) \equiv (1, f(t, x(t)))$; para así obtener

$$
\boldsymbol{x}_{m+1} := \boldsymbol{x}_m + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{k}_1 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{k}_2, \quad \boldsymbol{k}_1 := h\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_m), \quad \boldsymbol{k}_2 := h\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_m + \boldsymbol{k}_1).
$$

Se debe mostrar que le error de truncación local es de orden $O(h^3)$. Según (5.17), es cuestión de desarrollar en potencias de h la expresión:

$$
\boldsymbol{T}(t, h) := \boldsymbol{x}(t) + \tfrac{1}{2}h\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{k}_1(t))\big) - \boldsymbol{x}(t + h),
$$

donde, para $t \in [a, b - h]$ cualquiera, se ha introducido[14]

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{k}_1(t) &:= \boldsymbol{x}(t + h) - \boldsymbol{x}(t) \\
&= h\, \boldsymbol{x}'(t) + \tfrac{1}{2}h^2\, \boldsymbol{x}''(t) + O(h^3) \\
&= h\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) + \tfrac{1}{2}h^2 \boldsymbol{f}_x \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) + O(h^3).
\end{aligned}
$$

De la serie de Taylor de $x(t)$, se obtiene

$$
\boldsymbol{T}(t, h) = -h\, \boldsymbol{x}'(t) - \tfrac{1}{2}h^2\, \boldsymbol{x}''(t) - \tfrac{1}{6}h^3\, \boldsymbol{x}'''(t) + O(h^4) + \tfrac{1}{2}h\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) + \tfrac{1}{2}h\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{k}_1(t)).
$$

[13] Las expresiones para derivadas de orden 4 en adelante requieren el aparato combinatorio, de *árboles con raíz*, introducido para ese propósito por Arthur Cayley en 1857. Estos árboles con raíz fueron usados por Butcher en 1963 para analizar los métodos de Runge y Kutta con más de 4 etapas.

[14] Esta definición, para $t = t_m$, implica cambiar el segundo argumento de k_2, reemplazando $x_m + k_1$ por x_{m+1} en las fórmulas anteriores. En otras, palabras, se trata de la versión *implícita* de método de Euler mejorado. Esto introduce una discrepancia despreciable de $O(h^4)$ en el análisis del método.

Por otro lado, al abreviar $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$, se ve que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}_1) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}_x \cdot \boldsymbol{k}_1 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{f}_{xx} \cdot (\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_1) + \cdots \\ &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + h\,\boldsymbol{f}_x \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \tfrac{1}{2}h^2(\boldsymbol{f}_x)^2 \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \tfrac{1}{2}h^2\,\boldsymbol{f}_{xx} \cdot (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) + O(h^3).\end{aligned}$$

En la expresión anterior para $\boldsymbol{T}(t,h)$, los términos $-h\,x'(t) + \frac{1}{2}h\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) + \frac{1}{2}h\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ cancelan. Luego

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(t,h) &= -\tfrac{1}{2}h^2\,\boldsymbol{x}''(t) - \tfrac{1}{6}h^3\big(\boldsymbol{f}_{xx} \cdot (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) + (\boldsymbol{f}_x)^2 \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}h^2\boldsymbol{f}_x \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \tfrac{1}{4}h^3\big(\boldsymbol{f}_{xx} \cdot (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) + (\boldsymbol{f}_x)^2 \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) + O(h^4) \\ &= \tfrac{1}{12}h^3\big(\boldsymbol{f}_{xx} \cdot (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) + (\boldsymbol{f}_x)^2 \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) + O(h^4).\end{aligned}$$

Esta última expresión puede abreviarse como $\boldsymbol{T}(t,h) = \frac{1}{12}h^3\,\boldsymbol{x}'''(t) + O(h^4)$. En el problema original, esto dice que $T(t,h) = \frac{1}{12}h^3\,x'''(t) + O(h^4)$; o bien, con menos precisión, $T(t,h) = O(h^3)$. Entonces $E_m = O(h^2)$ para $m = 1, 2, \dots, n$. $\square$

Los mismos métodos son aplicables para analizar los errores de truncación en métodos de Runge y Kutta de tres o cuatro etapas. Las expansiones de esas series de Taylor dan lugar a expresiones extensas. En todo caso, es posible comprobar que los métodos de tres etapas en el Ejemplo 5.12 obedecen $T(t,h) = O(h^4)$. Con más esfuerzo, se puede verificar[15] los dos métodos de cuatro etapas introducidos en las Definiciones 5.13 y 5.14 cumplen $T(t,h) = O(h^5)$, de tal manera que estos dos métodos tiene errores de truncación global de cuarto orden.

[15]Para un análisis relativamente sucinto de los errores de truncación del método clásico, véase el libro de Birkhoff y Rota, pp. 218–219.

Ejercicios

1.5 Ejercicios sobre ecuaciones diferenciales de primer orden

Ejercicio 1.1. Encontrar, en cada caso, una ecuación diferencial cuya solución general es la familia de curvas dadas en el plano tx:

(a) Las funciones $x(t) = C\,e^{-5t}$, con $C \in \mathbb{R}$.

(b) Los círculos $(t-a)^2 + x^2 = 4$, con $a \in \mathbb{R}$.

(c) Todas las rectas tangentes a la parábola $2x = t^2$.

Ejercicio 1.2. Encontrar aproximaciones sucesivas $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ a los siguientes problemas de valor inicial:

(a) $x'(t) = t + x(t)^2$, $x(0) = 0$.

(b) $x'(t) = 2\,x(t) - 2t^2 - 3$, $x(0) = 2$.

Ejercicio 1.3. Encontrar aproximaciones sucesivas $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ al problema de valor inicial:

$$x'(t) = t + x(t), \qquad x(0) = 1.$$

En seguida, encontrar una fórmula para la k-ésima aproximación $x_k(t)$. Hallar una función $x(t)$ tal que $x_k(t) \to x(t)$ cuando $k \to \infty$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y mostrar que esta función resuelve la ecuación dada.

Ejercicio 1.4. Mostrar que la función $f(t,x) = |x|^p$ es lipschitziana[1] en el punto $(0,0)$ si $p \leqslant 1$, pero no es lipschitziana en ese punto si $0 < p < 1$.

Ejercicio 1.5. Encontrar los rectángulos cerrados $\overline{V} \subseteq \mathbb{R}^2$ en las cuales estas funciones son lipschitzianas:

$$\text{(a)}\quad f_1(t,x) = \frac{x}{1+t^2}\,; \qquad \text{(b)}\quad f_2(t,x) = \frac{t}{1+x^2}\,.$$

Ejercicio 1.6. Encontrar dos soluciones distintas al problema de valor inicial:

$$x'(t) = \frac{3}{2}x(t)^{1/3}, \qquad x(0) = 0.$$

[1] Con respecto a la segunda variable x.

Ejercicio 1.7. Demostrar que la solución al problema de valor inicial:

$$x'(t) = 1 + t^2 x(t)^4, \qquad x(0) = 0,$$

es única en un intervalo $-a \leqslant t \leqslant a$; y que esta solución es necesariamente una *función impar*, esto es, $x(-t) \equiv -x(t)$.

Ejercicio 1.8. Si $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g\colon [c,d] \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ son funciones continuas cuyos dominios son intervalos compactos, demostrar que el problema de valor inicial:

$$x'(t) = h(t)\, g(x); \qquad x(t_0) = x_0$$

posee una solución única en un vecindario de cualquier punto (t_0, x_0) del rectángulo abierto $(a,b) \times (c,d)$.

Ejercicio 1.9. Encontrar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $x'(t) = 4t^3\, x^4$.

(b) $x'(t) = -t\, x^2$.

(c) $t x\, x'(t) + 1 + x^2 = 0$.

(d) $(1 + t^2)\, x'(t) = t x(1 + x^2)$.

(e) $2t^2\, x'(t) + 1 + t^2 x^2 = 0$.

⟦ Indicación: Expresar las soluciones en el formato $F(t,x) = C$ o bien $F(t,x;C) = 0$, donde el lado izquierdo depende de un parámetro C. En la parte (e), colocar $y := tx$. ⟧

Ejercicio 1.10. Resolver cada una de estos problemas de valores iniciales:

(a) $x'(t) = x^2 - 1$; $\qquad x(0) = 0$.

(b) $(2x + 1)\, x'(t) = x^2 + x$; $\qquad x(0) = 1$.

(c) $x'(t) = \dfrac{t}{x}$; $\qquad x(\sqrt{2}) = 1$.

(d) $(1 + e^t) x\, x'(t) = e^t$; $\qquad x(0) = 1$.

(e) $x'(t) \operatorname{sen} t = x \log x$; $\qquad x(\pi/2) = e$.

Ejercicio 1.11. Comprobar que las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas y hallar la solución general en cada caso:

(a) $(2x^2 + 1)\, dx = (y^5 - 1)\, dy$.

(b) $(x + y)\, dx + (x - y)\, dy = 0$.

(c) $(x^3 + xy^2)\, dx + (x^2 y + y^3)\, dy = 0$.

(d) $(\operatorname{sen} xy + xy \cos xy)\, dx + (x^2 \cos xy)\, dy = 0$.

(e) $(\operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x + x^{-1})\, dx + (x \cos y - \cos x + y^{-1})\, dy = 0$.

Ejercicio 1.12. En la hidrodinámica plana, una familia de curvas $F(x, [y) = C$ representa *curvas equipotenciales*; el movimiento del fluido sigue las *líneas de flujo* $G(x, y) = C'$ tales que, en cada punto (x, y), las dos rectas tangentes son perpendiculares. (Dícese que las dos familias son **trayectorias ortogonales**, una a la otra.) Así, si la tangente en (x, y) a la primera familia es $y'(x)$, la tangente a la otra familia tiene pendiente $-1/y'(x)$.

(a) Mostrar que las trayectorias ortogonales a las hipérbolas $x^2 - y^2 = C$ son otras hipérbolas $xy = C'$. ⟦ Indicación: Hallar la ecuación diferencial que describe las primeras, deducir la ecuación diferencial para la otra familia, y luego resolverla. ⟧

(b) Encontrar las trayectorias ortogonales a las elipses concéntricas $x^2 + 2y^2 = C$.

Ejercicio 1.13. Encontrar un factor integrante de la forma $\mu(x)$ para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales y luego hallar sus soluciones generales:

(a) $(2y + x)\,dx + (x^2 - 1)\,dy = 0.$

(b) $(1 - x^2y)\,dx + (x^2y - x^3)\,dy = 0.$

(c) $(x^2 + y)\,dx - x\,dy = 0.$

(d) $(x + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0.$

(e) $(3y + 4xy^2)\,dx + (2x + 3x^2y)\,dy = 0.$

Ejercicio 1.14. Si $\mu(x, y)$ es un factor integrante a la ecuación diferencial

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0,$$

comprobar la siguiente relación entre derivadas parciales:

$$\mu(x, y)\big[M_y(x, y) - N_x(x, y)\big] = N(x, y)\,\mu_x(x, y) - M(x, y)\,\mu_y(x, y).$$

Deducir que hay un factor integrante de la forma $\mu(x)$ si y solo si la función $(M_y - N_x)/N$ depende de x solamente.

Mostrar también que hay un factor integrante de la forma $\mu(y)$ si y solo si la función $(M_y - N_x)/M$ depende de y solamente.

Ejercicio 1.15. Encontrar un factor integrante para cada una de las siguientes ecuaciones y hallar sus soluciones generales:

(a) $(1 + y^2)\,dx + xy\,dy = 0.$

(b) $2xy \log y\,dx + \left(x^2 + y^2\sqrt{1 + y^2}\right) dy = 0.$

(c) $(y - x^2y^2)\,dx + x\,dy = 0.$

⟦ Indicación: Para la parte (c), calcular la diferencial dF de la función $F(x, y) = -1/xy$. ⟧

Ejercicio 1.16. Encontrar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad x'(t) = \frac{x - t + 1}{x - t + 2}\,. \\
&\text{(b)} \quad t\,x'(t) = \sqrt{t^2 - x^2} + x. \\
&\text{(c)} \quad (t^n + x^n)\,x'(t) = t^{n-1}x \quad \text{si} \quad n \in \mathbb{N}^*. \\
&\text{(d)} \quad (x^3 - y^3)\,dx + xy^2\,dy = 0.
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.17. Escribir en detalle la demostración del Teorema 1.15′:
Sea $\boldsymbol{f} \colon [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *una función continua y lipschitziana; tómese un vector fijo* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m$. *Entonces el problema de valor inicial:*

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{a}$$

posee una solución única, definida en todo el intervalo $[a,b]$.

Ejercicio 1.18. Demostrar que los problemas de valores iniciales de segundo orden:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad x''(t) = x\,|x|, \qquad x(0) = a_1, \quad x'(0) = a_2\,; \\
&\text{(b)} \quad x''(t) = x^4, \qquad x(0) = a_1, \quad x'(0) = a_2\,;
\end{aligned}$$

poseen soluciones únicas definidas en todo $\mathbb{R}$, para cada par de valores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.19. El siguiente problema de valores iniciales tiene solución única:

$$\begin{aligned}
x'(t) &= y(t), & x(0) &= 0, \\
y'(t) &= -x(t), & y(0) &= 1.
\end{aligned}$$

Demostrar que esta solución satisface la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. ⟦ Indicación: Considerar la función $z(t) := x(t)^2 + y(t)^2$. ⟧

Ejercicio 1.20. Resolver estos problema de valores iniciales de segundo orden:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad t\,x''(t) + x'(t) = 0, \qquad x(1) = 0, \quad x'(1) = 2. \\
&\text{(b)} \quad x''(t) + x(t)\,x'(t) = 0, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2.
\end{aligned}$$

⟦ Indicación: En los dos casos, la sustitución $y(t) := x'(t)$ reduce la ecuación dada a otra de primer orden. En el segundo caso, es útil notar que $dy/dt = (dx/dt)(dy/dx)$. ⟧

2.4 Ejercicios sobre ecuaciones diferenciales lineales

Ejercicio 2.1. Demostrar que las siguientes pares de funciones son linealmente independientes sobre el intervalo indicado:

(a) $x_1(t) = t^3 - t^2$, $x_2(t) = t^3 - 3t$; sobre $\mathbb{R}$.

(b) $x_1(t) = \operatorname{sen} t$, $x_2(t) = \operatorname{tg} t$; sobre $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(c) $x_1(t) = \operatorname{tg} t$, $x_2(t) = \operatorname{ctg} t$; sobre $(0, \frac{\pi}{2})$.

Ejercicio 2.2. Comprobar que las funciones $g(t) := \operatorname{sen} t$ y $h(t) := t^2$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Demostrar que, a pesar de eso, no hay ecuación diferencial alguna de la forma $x''(t) + p(t)\,x'(t) + q(t)\,x(t) = 0$, con $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas, cuya solución general sería $x(t) = c_1 \operatorname{sen} t + c_2\, t^2$.

Ejercicio 2.3. Encontrar una solución polinomial ⟦ es decir, $x(t)$ es un polinomio en t ⟧ a la ecuación diferencial lineal homogénea

$$x''(t) - t\,x'(t) + 3\,x(t) = 0.$$

Demostrar que esta ecuación también posee una solución no polinomial. (No es necesario hallar una fórmula explícita para la segunda solución.)

Ejercicio 2.4. Averiguar si los siguiente triples de funciones son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$, o no:

(a) e^t, e^{2t}, e^{3t}.
(b) e^t, $t\,e^t$, $t^2\,e^t$.
(c) $\operatorname{sen} t$, $\cos t$, $\cos 2t$.
(d) $\cos t$, $\cos(t+1)$, $\cos(t+2)$.

Ejercicio 2.5. Si $x(t) = c_1\,x_1(t) + c_2\,x_2(t)$ es a solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea $x''(t) + p(t)\,x'(t) + q(t)\,x(t) = 0$, y si $w(t) := W(x_1, x_2)(t)$ es el wronskiano de dos soluciones linealmente independientes, demostrar que los coeficientes satisfacen:

$$p(t) = \frac{x_2(t)\,x_1''(t) - x_1(t)\,x_2''(t)}{w(t)}, \qquad q(t) = \frac{x_1'(t)\,x_2''(t) - x_2'(t)\,x_1''(t)}{w(t)}.$$

⟦ Indicación: calcular el wronskiano $W(x_1, x_2, x)(t)$. ⟧

Ejercicio 2.6. Hallar ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden, definidas sobre $\mathbb{R}$, que tienen las siguientes pares de soluciones:

(a) $x_1(t) = t, \; x_2(t) = \operatorname{sen} t$.

(b) $x_1(t) = \cosh t, \; x_2(t) = \operatorname{senh} t$.

⟦ Indicación: usar el Ejercicio 2.5 anterior. ⟧

Ejercicio 2.7. Considérese la ecuación lineal homogénea $x''(t) + p(t)\,x'(t) + q(t)\,x(t) = 0$.

(a) Si $m(m-1) + mtp(t) + t^2 q(t) = 0$, mostrar que $x_1(t) := t^m$ es una solución.

(b) Hallar la *solución general* de la ecuación diferencial

$$(1 - t^2)\,x''(t) + 2t\,x'(t) - 2\,x(t) = 0$$

sobre el intervalo $(-1, 1)$.

Ejercicio 2.8. Considérese la ecuación lineal homogénea $x''(t) + p(t)\,x'(t) + q(t)\,x(t) = 0$.

(a) Si $a^2 + ap(t) + q(t) = 0$, mostrar que $x_1(t) := e^{at}$ es una solución.

(b) Hallar la *solución general* de la ecuación diferencial

$$t\,x''(t) - (2t+1)\,x'(t) + (t+1)\,x(t) = 0$$

sobre el intervalo $(0, \infty)$.

Ejercicio 2.9. Comprobar que la ecuación lineal homogénea

$$t\,x''(t) - x'(t) - 4t^3\,x(t) = 0$$

admite $x_1(t) := e^{t^2}$ como solución particular.

En seguida, hallar la *solución general* de esta ecuación diferencial.

Ejercicio 2.10. Demostrar el **teorema de separación de Sturm**:

Si $g(t)$ y $h(t)$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación lineal homogénea $x''(t) + p(t)\,x'(t) + q(t)\,x(t) = 0$, demostrar que entre dos ceros consecutivos de $g(t)$ debe haber un único cero de $h(t)$.

Concluir que los ceros de las dos soluciones están entrelazadas (es decir, hay un cero de una entre dos ceros consecutivos de la otra.)

Ilustrar este teorema con las soluciones de la ecuación $x''(t) + \omega^2\,x(t) = 0$.

⟦ Indicación: si $g(a) = g(b) = 0$ con $g(t) \neq 0$ para $a < t < b$, usar el wronskiano $W(g,h)(t)$ para estudiar los posibles signos de los números $g'(a)$, $g'(b)$, $h(a)$ y $h(b)$. ⟧

Ejercicio 2.11. Encontrar la solución general a cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, cuya parte homogénea tiene coeficientes constantes:

(a) $x''(t) - x(t) = t^2$.

(b) $x''(t) - x(t) = \operatorname{sen} t \cos t$.

(c) $x''(t) - x(t) = \dfrac{1}{1 + e^t}$.

(d) $x''(t) + x(t) = 3\,t^2 + t$.

(e) $x''(t) - x'(t) - 2\,x(t) = \operatorname{sen} 2t$.

Ejercicio 2.12. Encontrar la solución general a cada una de las siguientes ecuaciones lineales inhomogéneas en el intervalo $t > 0$:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & t^2\,x''(t) + 2t\,x'(t) - 12\,x(t) = t^4. \\ \text{(b)} & t\,x''(t) + (2t-1)\,x'(t) = -4t^2. \end{array}$$

Ejercicio 2.13. Comprobar que la ecuación diferencial lineal homogénea

$$t\,x''(t) + 2\,x'(t) + t\,x(t) = 0$$

tiene una base de soluciones $x_1(t) := (\operatorname{sen} t)/t$, $x_2(t) := (\cos t)/t$, válidas para $t \neq 0$.

En seguida, hallar la solución general a la ecuación inhomogénea

$$t\,x''(t) + 2\,x'(t) + t\,x(t) = 1.$$

Ejercicio 2.14. Hallar la solución general a cada una de las siguientes ecuaciones inhomogéneas, dada una solución $x_1(t)$ de la ecuación homogénea correspondiente:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & t^2\,x''(t) - t\,x'(t) - 3\,x(t) = 5t^4, & x_1(t) = 1/t. \\ \text{(b)} & x''(t) - x'(t) + e^{2t}\,x(t) = t e^{2t} - 1, & x_1(t) = \operatorname{sen}(e^t). \end{array}$$

Ejercicio 2.15. Si $h\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ es una función continua, demostrar que la solución general de la ecuación diferencial

$$x''(t) + x(t) = h(t)$$

puede expresarse en la forma

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + \int_0^t h(s) \operatorname{sen}(t-s)\,ds,$$

para $-a \leqslant t \leqslant a$.

Ejercicio 2.16. Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

(a) $x''(t) + 8\,x'(t) + 16\,x(t) = 0; \quad \text{con } x(0) = 1,\ x'(0) = -1.$

(b) $2\,x''(t) + 4\,x'(t) + 5\,x(t) = 0; \quad \text{con } x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$

(c) $x''(t) - 6\,x'(t) + 9\,x(t) = 0; \quad \text{con } x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$

Ejercicio 2.17. Encontrar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones lineales inhomogéneas:

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} & x''(t) - 4\,x(t) &= 4t^2. \\
&\text{(b)} & x''(t) + x(t) &= 3t^2 + t. \\
&\text{(c)} & x''(t) - x'(t) - 2\,x(t) &= 2t + e^t. \\
&\text{(d)} & x''(t) + x(t) &= t \operatorname{sen} 2t.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2.18. Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

(a) $x'''(t) + 4\,x'(t) = 0; \quad \text{con } x(0) = 1,\ x'(0) = -1,\ x''(0) = 2.$

(b) $x'''(t) + x''(t) - 2\,x(t) = 0; \quad \text{con } x(0) = 0,\ x'(0) = 0,\ x''(0) = 1.$

(c) $x^{(4)}(t) - x(t) = 0; \quad \text{con } x(0) = 1,\ x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$

Ejercicio 2.19. Encontrar las soluciones generales de las siguientes ecuaciones lineales:

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} & x^{(4)}(t) - 2\,x'''(t) - 7\,x''(t) + 20\,x'(t) - 12\,x(t) &= 0. \\
&\text{(b)} & x^{(4)}(t) - 6\,x'''(t) + 7\,x''(t) + 6\,x'(t) - 8\,x(t) &= 0. \\
&\text{(c)} & x^{(4)}(t) - 4\,x'''(t) + 5\,x''(t) - 4\,x'(t) + 4\,x(t) &= 0. \\
&\text{(d)} & x^{(6)}(t) - 64\,x(t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2.20. Encontrar las soluciones generales de las siguientes ecuaciones lineales:

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} & x^{(4)}(t) + 3\,x'''(t) + 2\,x''(t) &= e^t. \\
&\text{(b)} & x''(t) - x'(t) - 6\,x(t) &= 6t^3 + 26 \operatorname{sen} 2t.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2.21. (a) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, mostrar que $\exp(At) = \begin{pmatrix} \cosh t & \operatorname{senh} t \\ \operatorname{senh} t & \cosh t \end{pmatrix}$ para $t \in \mathbb{R}$.

(b) Resolver el problema de valores iniciales:

$$\left\{ \begin{aligned} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= x(t) \end{aligned} \right\} \quad \text{con} \quad x(0) = 2\,, \ y(0) = -3.$$

Ejercicio 2.22. Calcular $\exp(At)$ para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

En seguida, hallar la solución general al sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x'(t) = x(t), \qquad y'(t) = 3\,x(t) + y(t).$$

Ejercicio 2.23. Encontrar las soluciones generales de los siguientes sistemas:

$$\text{(a)}: \quad \left\{ \begin{aligned} x'(t) &= 2\,x(t) + 6\,y(t) + e^t \\ y'(t) &= x(t) + 3\,y(t) - e^t \end{aligned} \right\}, \qquad \text{(b)}: \quad \left\{ \begin{aligned} x'(t) &= x(t) + 2\,y(t) + 2t \\ y'(t) &= 3\,y(t) + t^2 \end{aligned} \right\}.$$

Ejercicio 2.24. Resolver el problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + z(t), & x(0) &= 0, \\ y'(t) &= -y(t) + z(t), & y(0) &= 1, \\ z'(t) &= y(t) - z(t), & z(0) &= 0. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.25. Encontrar una base de autovectores generalizados para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Luego, hallar la solución general del sistema $\boldsymbol{x}'(t) = A\,\boldsymbol{x}(t)$, si $\boldsymbol{x}(t) \equiv (x(t), y(t), z(t))$.

Ejercicio 2.26. Un problema de Cauchy para un sistema lineal inhomogénea con coeficientes constantes $A \in M_n(\mathbb{R})$ tiene la forma:

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{r}(t); \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0\,.$$

Verificar que la solución única está dada por la receta siguiente:

$$\boldsymbol{x}(t) := \exp(At)\,\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \exp(A(t-s))\,\boldsymbol{r}(s)\,ds.$$

En seguida, resolver el problema de valores iniciales:

$$\left\{ \begin{aligned} x'(t) &= x(t) + 2\,y(t) + e^{-t} \\ y'(t) &= 3\,y(t) \end{aligned} \right\} \quad \text{con} \quad x(0) = 2\,, \ y(0) = -1.$$

3.3 Ejercicios sobre problemas de contorno

Ejercicio 3.1. Mostrar que las funciones $x_1(t) := \cosh(t^2 - 1)$, $x_2(t) := \frac{1}{2}\operatorname{senh}(t^2 - 1)$ son dos soluciones de la ecuación lineal homogénea:

$$t\,x''(t) - x'(t) - 4t^3\,x(t) = 0.$$

Bajo las condiciones de frontera de Dirichlet o Neumann en el intervalo $[1, 2]$:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \qquad x(1) = 0\,, \quad x(2) = 0\,; \\ &\text{(b)} \qquad x'(1) = 0\,, \quad x'(2) = 0\,; \end{aligned}$$

averiguar si la solución nula $x(t) \equiv 0$ es la única solución o no.

Ejercicio 3.2. Dado el problema de contorno:

$$x''(t) + 2\,x'(t) + 5\,x(t) = 0\,, \qquad x(0) = x(\pi/2) = 0\,,$$

hallar dos soluciones linealmente independientes $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de la ecuación diferencial. Verificar que el problema de contorno tiene infinitas soluciones; y encontrarlas.

Ejercicio 3.3. Resolver el problema de contorno:

$$x''(t) - 6\,x'(t) + 25\,x(t) = 0\,, \qquad x'(0) = 1\,,\ \ x(\pi/4) = 0\,.$$

Ejercicio 3.4. Demostrar que este problema de contorno no posee solución alguna:

$$x''(t) + x(t) = t\,, \qquad x(0) + x'(0) = 1\,,\ \ x(\pi/2) - x'(\pi/2) = 0.$$

Ejercicio 3.5. Encontrar la función de Green para el problema de contorno:

$$x''(t) - \frac{1}{t}\,x'(t) = 0\,, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

Ejercicio 3.6. Comprobar que la función de Green para el problema de contorno:

$$x''(t) - x(t) = 0\,, \qquad x(0) = x(1) = 0\,,$$

está dada por:

$$G(t, s) = \begin{cases} \dfrac{2e}{e^2 - 1}\ \operatorname{senh} t \operatorname{senh}(s - 1), & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ \dfrac{2e}{e^2 - 1}\ \operatorname{senh} s \operatorname{senh}(t - 1), & \text{si } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Luego, encontrar la solución única al problema de contorno:

$$x''(t) - x(t) = 2 \operatorname{sen} t\,, \qquad x(0) = 0\,,\ \ x(1) = 2\,.$$

Ejercicio 3.7. Verificar que la función de Green para el problema de contorno:

$$x''(t) = 0, \qquad x(a) = x(b) = 0,$$

está dada por: $$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(t-a)(b-s)}{a-b} & \text{si } a \leqslant t \leqslant s \leqslant b, \\ \dfrac{(b-t)(s-a)}{a-b} & \text{si } a \leqslant s \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

En seguida, hallar la solución única al problema de contorno:

$$x''(t) = 6t, \qquad x(a) = x(b) = 0\,.$$

Ejercicio 3.8. Considérese el problema de contorno con condiciones de Dirichlet:

$$x''(t) + p(t)\,x'(t) + q(t)\,x(t) = 0, \qquad x(a) = x(b) = 0\,.$$

Sean $x_1(t)$, $x_2(t)$ las soluciones respectivas de la ecuación diferencial bajo las condiciones iniciales $x_1(a) = 0$, $x_1'(a) = 1$; y $x_2(b) = 0$, $x_2'(b) = 1$. Sea $w(t) := W(x_1, x_2)(t)$ su wronskiano. Demostrar que la función $G(t,s)$ definida por

$$G(t,s) := \begin{cases} x_1(t)\,x_2(s)/w(s) & \text{si } a \leqslant t \leqslant s \leqslant b, \\ x_1(s)\,x_2(t)/w(s) & \text{si } a \leqslant s \leqslant t \leqslant b, \end{cases}$$

es efectivamente la función de Green del problema de contorno dado.

Ejercicio 3.9. Encontrar una fórmula para una solución particular del problema de contorno:

$$x''(t) + p(t)\,x'(t) + q(t)\,x(t) = r(t), \qquad x(a) = x(b) = 0,$$

con base en el Ejercicio 3.8 anterior.

Ejercicio 3.10. Considérese el problema de contorno con condiciones de Neumann:

$$x''(t) = r(t), \qquad x'(a) = x'(b) = 0\,.$$

Verificar que el problema homogéneo correspondiente posee una solución no trivial, única hasta múltiplos. (Por lo tanto, no existe una función de Green para ese problema). Demostrar, sin embargo, que este problema tiene soluciones (no únicas) de la forma

$$x(t) = c_1 + \int_a^t (t-s)\,r(s)\,ds,$$

si y solo si se cumple $\int_a^b r(t)\,dt = 0$.

Ejercicio 3.11. Hallar la función de Green para el problema de contorno con condiciones de frontera periódicas:

$$x''(t) + 4\,x(t) = 0\,, \qquad x(0) = x(\pi/2),\;\; x'(0) = x'(\pi/2).$$

Ejercicio 3.12. Encontrar los autovalores λ y las autofunciones correspondientes del problema de Sturm y Liouville en el intervalo $[0, \pi]$:

$$x''(t) + \lambda\,x(t) = 0, \qquad x'(0) = x'(\pi) = 0\,.$$

Ejercicio 3.13. Encontrar los autovalores λ y las autofunciones correspondientes de estos problemas de Sturm y Liouville en $[0, \pi]$:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad x''(t) + \lambda\,x(t) = 0, \qquad x'(0) = x(\pi) = 0. \\ &\text{(b)} \quad x''(t) + \lambda\,x(t) = 0, \qquad x(0) = x'(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.14. Encontrar los autovalores λ y las autofunciones correspondientes del problema de Sturm y Liouville en el intervalo $[0, 1]$:

$$x''(t) + 2\,x'(t) + (1 - \lambda)\,x(t) = 0\,, \qquad x(0) = x(1) = 0\,.$$

Ejercicio 3.15. Encontrar los autovalores λ y las autofunciones correspondientes del problema de Sturm y Liouville en el intervalo $[0, 1]$:

$$\frac{d}{dt}\big((1 + t^2)\,x'(t)\big) + \frac{\lambda}{1 + t^2}\,x(t) = 0\,, \qquad x(0) = x(1) = 0\,.$$

⟦ Indicación: usar el cambio de variable $t =: \operatorname{tg} s$, $s := \operatorname{arctg} t$. ⟧

Ejercicio 3.16. Demostrar que el wronskiano de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Sturm y Liouville:

$$\frac{d}{dt}\big(p(t)\,x'(t)\big) - q(t)\,x(t) + \lambda\,r(t)\,x(t) = 0$$

está dada por $w(t) = \dfrac{C}{p(t)}$, para alguna constante $C \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3.17. Considérese un problema de Sturm y Liouville en el intervalo $[a, b]$ con condiciones de frontera *periódicas*:

$$\frac{d}{dt}\big(p(t)\,x'(t)\big) - q(t)\,x(t) + \lambda\,r(t)\,x(t) = 0\,, \qquad x(a) = x(b),\;\; x'(a) = x'(b),$$

donde $p(t) > 0$ y $r(t) > 0$ para $t \in [a, b]$. Demostrar que dos autofunciones $x(t)$, $y(t)$ para autovalores distintas $\lambda \neq \mu$ son ortogonales:

$$\int_a^b x(t)\,y(t)\,r(t)\,dt = 0.$$

⟦ Indicación: usar la identidad de Lagrange. ⟧

4.3 Ejercicios sobre soluciones en series de potencias

Ejercicio 4.1. Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

$$\begin{array}{lrl} \text{(a)} & x''(t) + t\,x'(t) + x(t) = 0, & x(0) = 1,\ x'(0) = 0. \\ \text{(b)} & x''(t) - t\,x(t) = 1, & x(0) = 0,\ x'(0) = 1. \\ \text{(c)} & x''(t) + (t-1)\,x'(t) + 2\,x(t) = 0, & x(1) = 3,\ x'(1) = -2. \end{array}$$

Ejercicio 4.2. La ecuación lineal homogénea:

$$x''(t) - t\,x'(t) - 2\,x(t) = 0$$

tiene dos soluciones independientes: $x_1(t)$ es una función par, $x_2(t)$ es una función impar. Expresarlas como series de potencias; y luego concluir que $x_2(t) = t\,e^{t^2/2}$.

Ejercicio 4.3. Hallar la solución general para estas ecuaciones lineales homogéneas:

$$\begin{array}{lr} \text{(a)} & x''(t) + t\,x'(t) + x(t) = 0. \\ \text{(b)} & (2t^2+1)\,x''(t) + 3t\,x'(t) - 6\,x(t) = 0. \end{array}$$

Ejercicio 4.4. Para la **ecuación de Airy**:

$$x''(t) - t\,x(t) = 0,$$

hallar dos soluciones linealmente independientes. Comprobar que estas dos series de potencias tiene radio de convergencia $R = \infty$.

Ejercicio 4.5. Sean $C(t)$ y $S(t)$ las dos soluciones de la ecuación diferencial lineal $x''(t) - x(t) = 0$, determinadas por las siguientes valores iniciales:[2]

$$C(0) = 1,\ C'(0) = 0\,; \qquad S(0) = 0,\ S'(0) = 1\,.$$

(a) Hallar los desarrollos de $C(t)$ y $S(t)$ como series de potencias (con $R = \infty$).

(b) Con base en dichas series, mostrar que $C(t)$ es una función par y que $S(t)$ es impar.

(c) Mostrar que $S(t)$ tiene exactamente un cero en $\mathbb{R}$ y que $C(t)$ nunca se anula.

(d) Calcular el wronskiano $w(t) = W(C,S)(t)$ y luego concluir que $C(t)^2 - S(t)^2 \equiv 1$.

[2]Desde luego, $C(t)$ y $S(t)$ son funciones bien conocidas. En este ejercicio, se trata de averiguar las propiedades de estas funciones que son consecuencias directas de la ecuación diferencial.

Ejercicio 4.6. El problema de valor inicial *no lineal* de primer orden:

$$x'(t) = 1 + x(t)^2, \qquad x(0) = 0,$$

posee una solución única en un intervalo $(-c, c)$, la cual es analítica. Esta solución es $x(t) = \operatorname{tg} t$, desde luego. Comprobar que $y(t) := -x(-t)$ cumple la misma ecuación diferencial y concluir que $\operatorname{tg} t$ es una función impar. Nótese que $x'(0) = 1$, así que $x(t) = t + \sum_{m\geqslant 1} a_{2m+1} t^{2m+1}$. Obtener así los primeros términos de la serie de Taylor:

$$\operatorname{tg} t = t + \frac{1}{3}\,t^3 + \frac{2}{15}\,t^5 + \frac{17}{315}\,t^7 + \frac{62}{2835}\,t^9 + \cdots$$

Ejercicio 4.7. Considérese la **ecuación de Chebyshev**:

$$(1 - t^2)\,x''(t) - t\,x'(t) + \lambda\,x(t) = 0\,.$$

(a) Expresar la solución general como serie de potencias. De la relación de recurrencia, deducir que hay una solución polinomial $T_n(t)$, de grado $n \in \mathbb{N}$, si y solo si $\lambda = n^2$.

Este $T_n(t)$, con $T_n(1) = 1$, se llama el **polinomio de Chebyshev** de grado n.

(b) Con el cambio de variable $t = \cos\theta$ para $\theta \in [0, \pi]$, mostrar que la ecuación diferencial (con $\lambda = n^2$) se convierte en $x''(\theta) + n^2\,x(\theta) = 0$. Concluir que

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

(c) Deducir la relación de ortogonalidad

$$(T_m \mid T_n) := \int_{-1}^{1} T_m(t)\,T_n(t)\,\frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = 0 \quad \text{para} \quad m \neq n;$$

y comprobar que $(T_0 \mid T_0) = \pi$ y que $(T_n \mid T_n) = \pi/2$ para $n = 1, 2, 3, \dots$

Ejercicio 4.8. Considérese la *ecuación de Legendre*:

$$(1 - t^2)\,x''(t) - 2t\,x'(t) + n(n + 1)\,x(t) = 0\,.$$

cuya solución $P_n(t)$, con $P_n(1) = 1$, es el **polinomio de Legendre** de grado n.

(a) De la relación de recurrencia para los coeficientes, deducir la expresión

$$P_n(t) = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \frac{(-1)^k}{2^n} \binom{n}{k} \binom{2n - 2k}{n}\, t^{n-2k}.$$

(b) Demostrar que esta **fórmula de Rodrigues** coincide con la expresión anterior:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n\, n!}\,\frac{d^n}{dt^n}\big((t^2-1)^n\big).$$

(c) Concluir que el polinomio de Legendre también está dado por:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (t+1)^k\,(t-1)^{n-k}.$$

Ejercicio 4.9. Los polinomios de Legendre cumplen una *relación de recurrencia*:

$$(n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)t\,P_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0.$$

Demostrar esta relación, mediante los pasos siguientes. Se puede asumir que

$$(P_n \mid P_n) := \int_{-1}^{1} P_n(t)^2\,dt = \frac{2}{2n+1}\,.$$

(a) Hay constantes A_n, B_n y C_n tales que

$$Q(t) := P_{n+1}(t) - (A_n t + B_n)\,P_n(t) - C_n\,P_{n-1}(t)$$

tenga grado menor que $(n-1)$, de modo que $Q(t) = \sum_{r=0}^{n-2} D_r\,P_r(t)$. Usar la ortogonalidad $(P_n \mid Q) = 0$ para mostrar que cada $D_r = 0$. Concluir que $Q(t) = 0$.

(b) Del Ejercicio anterior, $P_n(t) = 2^{-n}\binom{2n}{n} t^n + \cdots$; concluir que $A_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$.

(c) Calcular $(Q \mid P_{n-1})$ y deducir que

$$A_n(t)\int_{-1}^{1} P_n(t)\,t\,P_{n-1}(t)\,dt = C_n\int_{-1}^{1} P_{n-1}(t)^2\,dt.$$

Como $A_{n-1}t\,P_{n-1}(t) - P_n(t)$ tiene grado menor que n, concluir que

$$A_n(P_n \mid P_n) = C_n A_{n-1}(P_{n-1} \mid P_{n-1}) \quad \text{y por ende} \quad C_n = \frac{n}{n+1}\,.$$

(d) Inversamente, dados los valores de A_n y C_n, verificar por inducción que

$$(P_n \mid P_n) = \frac{A_0}{A_n}\,C_1 C_2 \cdots C_n\,(P_0 \mid P_0) = \frac{2}{2n+1}\,.$$

Ejercicio 4.10. Encontrar, con el método de Frobenius, dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial

$$2t^2\, x''(t) + (t^2 - t)\, x'(t) + x(t) = 0.$$

Ejercicio 4.11. Considerar la ecuación lineal homogénea:

$$t^2\, x''(t) + 3t\, x'(t) + (1 + t)\, x(t) = 0.$$

Tiene un punto singular regular en $t = 0$. Comprobar que la ecuación indicial tiene una raíz doble. Encontrar dos soluciones independientes de las formas:

$$x_1(t) = t^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \quad \text{y} \quad x_2(t) = x_1(t) \log t + t^r \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k.$$

Ejercicio 4.12. Para $m, n \in \mathbb{N}$ con $0 \leqslant m \leqslant n$, considerar la ecuación lineal homogénea:

$$(1 - t^2)\, x''(t) - 2t\, x'(t) + \left(n(n + 1) - \frac{m^2}{1 - t^2}\right) x(t) = 0.$$

(a) Después de sustituir $x(t) =: (1 - t^2)^{m/2} y(t)$, encontrar la ecuación diferencial correspondiente (lineal, homogénea, de segundo orden) para $y(t)$.

(b) Mostrar que una solución de la nueva ecuación es $d^m/dt^m[P_n(t)]$, donde $P_n(t)$ es el polinomio de Legendre de grado n. Concluir que la **función asociada de Legendre** $P_n^m(t) := (1 - t^2)^{m/2}\, d^m/dt^m[P_n(t)]$ es una solución de la ecuación diferencial lineal. ⟦ Indicación: aplicar d^m/dt^m a la ecuación de Legendre. ⟧

Ejercicio 4.13. (a) Sea $f_n(t) := (t^2 - 1)^n$. Usando integración por partes, mostrar que

$$I_n \equiv \int_{-1}^{1} f_n^{(n)}(t)\, f_n^{(n)}(t)\, dt = -\int_{-1}^{1} f_n^{(n-1)}(t)\, f_n^{(n+1)}(t)\, dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} f_n(t)\, f_n^{(2n)}(t)\, dt.$$

(b) Verificar las identidades $I_n = (2n)! \displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - t)^n (1 + t)^n\, dt = \frac{2^{2n+1}\,(n!)^2}{2n + 1}$.

(c) Con la fórmula de Rodrigues [Ejercicio 4.8(b)], comprobar $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)^2\, dt = \frac{2}{2n + 1}$.

Ejercicio 4.14. Hallar la solución general para estas ecuaciones lineales homogéneas, al usar un cambio de variable $s = at$ para transformarla en ecuaciones de Bessel:

(a) $t^2\, x''(t) + t\, x'(t) + (4t^2 - \tfrac{1}{9})\, x(t) = 0.$

(b) $x''(t) + \dfrac{1}{t}\, x'(t) + \dfrac{1}{9}\, x(t) = 0.$

Ejercicio 4.15. Hallar la solución general de la ecuación diferencial siguiente, al usar la transformación $x(t) =: t^{1/2}\, y(t)$ para obtener una ecuación de Bessel:

$$t^2\, x''(t) + (t^2 + \tfrac{1}{4})\, x(t) = 0.$$

Ejercicio 4.16. La función de Bessel $J_n(t)$, para $n \in \mathbb{N}$, está dada por la siguiente fórmula integral:

$$J_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \operatorname{sen} \theta - n\theta)\, d\theta. \tag{4.27}$$

Se sabe que cualquier solución de la ecuación de Bessel

$$t^2\, x''(t) + t\, x'(t) + (t^2 - n^2)\, x(t) = 0,$$

que es continua en $t = 0$, debe ser un múltiplo de $J_n(t)$. Comprobar que el lado derecho de (4.27) es proporcional a $J_n(t)$, con igualdad cuando $n = 0, 1, 2$.

⟦ Indicación: sea $f_n(t)$ el lado derecho de (4.27). Calcular $f_n'(t)$ y $f_n''(t)$, simplificando $f_n'(t)$ con una integración por partes; luego comprobar que $f_n(t)$ es una solución. Evaluar $f_0(0)$, $f_1'(0)$, $f_2''(0)$. ⟧

Ejercicio 4.17. Demostrar que la función de Bessel con índice $n \in \mathbb{N}$,

$$J_n(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n},$$

cumple las relaciones:

$$\frac{d}{dt}\bigl(t^n J_n(t)\bigr) = t^n J_{n-1}(t) \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dt}\bigl(t^{-n} J_n(t)\bigr) = -t^{-n} J_{n+1}(t).$$

Deducir las fórmulas:

$$J_n'(t) = J_{n-1}(t) - \frac{n}{t}\, J_n(t) = \frac{n}{t}\, J_n(t) - J_{n+1}(t),$$

y sus corolarios (relaciones de recurrencia):

$$2J_n'(t) = J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t) \qquad \text{y} \qquad J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t}\, J_n(t) - J_{n-1}(t).$$

Ejercicio 4.18. Se sabe que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Verificar las fórmulas siguientes:

$$J_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\, \operatorname{sen} t, \qquad J_{-1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\, \cos t.$$

Ejercicio 4.19. Si $0 < r < \infty$, las funciones $e^{tr/2}$ y $e^{-t/2r}$ son funciones analíticas para todo $t \in \mathbb{R}$. Tomando el producto de sus series de potencias, demostrar que

$$\exp\Bigl(\frac{t}{2}(r - r^{-1})\Bigr) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t)\, r^n. \tag{4.28}$$

(Dícese que la función $e^{t(r-r^{-1})/2}$ es la **función generatriz** de las funciones de Bessel J_n).

⟦ Indicación: reordenar la sumatoria doble en el producto de las series de potencias, la cual converge absolutamente para todo t. ⟧

Ejercicio 4.20. (a) Colocar $r = e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ en la fórmula (4.28) y deducir las expansiones:

$$\cos(t \operatorname{sen}\theta) = J_0(t) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(t)\cos 2k\theta,$$

$$\operatorname{sen}(t \operatorname{sen}\theta) = 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k+1}(t)\operatorname{sen}(2k+1)\theta.$$

(b) Deducir la expansión, para cada $m \in \mathbb{Z}$:

$$\cos(t \operatorname{sen}\theta - m\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t)\ \cos(m-n)\theta.$$

(c) Al integrar la igualdad anterior en el intervalo $[0, \pi]$, verificar la representación integral (4.27) de $J_n(t)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 4.21. Las funciones de Bessel de segunda especie $Y_p(t)$ se definen por

$$Y_p(t) := \frac{J_p(t)\cos\pi p - J_{-p}(t)}{\operatorname{sen}\pi p}, \quad Y_n(t) := \lim_{p\to n} Y_p(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial p}\Big|_{p=n} \bigl(J_p(t) - (-1)^n J_{-p}(t)\bigr),$$

para $p \notin \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z}$, respectivamente. Verificar la expansión, para $n \in \mathbb{N}$:[3]

$$\begin{aligned} Y_n(t) = \frac{2}{\pi}\, J_n(t)\log\frac{t}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\Bigl(\frac{t}{2}\Bigr)^{2k-n} \\ - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!}\,(H_k + H_{k+n} - 2\gamma)\Bigl(\frac{t}{2}\Bigr)^{2k+n}. \end{aligned}$$

⟦ Indicación: Si $\psi(t) := \Gamma'(t)/\Gamma(t)$, vale $\psi(t+1) = \frac{1}{t} + \psi(t)$; luego $\psi(n+1) = H_n - \gamma$. ⟧

[3]Los *números armónicos* $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ obedecen $\lim_{n\to\infty}(H_n - \log n) = \gamma = -\Gamma'(1)$, donde $\gamma \doteq 0.5772156649$ es la constante de Euler.

5.5 Ejercicios sobre soluciones aproximadas

En estos ejercicios, se recomienda el uso de una calculadora manual (o un 'app' emulador) para efectuar las operaciones aritméticas. Se debe expresar los resultados numéricos con 6 cifras decimales. El símbolo $\doteq$ indica igualdad hasta errores de redondeo.

Ejercicio 5.1. Considérese el problema de valor inicial:

$$x'(t) = 1 - 2x, \quad x(0) = 1.$$

(a) Hallar la solución exacta $x(t)$ y evaluar $x(t_k)$ para $t_k = 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1.0$.

(b) Usar el método de Euler para calcular aproximaciones x_k para esos $x(t_k)$.

Ejercicio 5.2. Considérese el problema de valor inicial:

$$x'(t) = t(x^2 - 1), \quad x(1) = 0.$$

(a) Hallar la solución exacta $x(t)$ y evaluar $x(t_k)$ para $t_k = 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$.

(b) Usar el método de Euler *mejorado* para calcular una solución aproximada en el intervalo $[1, 2]$, con tamaño de paso $h = 0.2$.

Ejercicio 5.3. Considérese el problema de valor inicial:

$$x'(t) = 1 + x^2, \quad x(0) = 0.$$

(a) Usar el método de Euler *mejorado* para calcular una solución aproximada en el intervalo $[0, 1]$, con tamaño de paso $h = 0.1$.

(b) Calcular una solución aproximada al mismo problema con el método de Euler *modificado*, también en $[0, 1]$ con $h = 0.1$.

Ejercicio 5.4. Considérese el problema de valor inicial:

$$x'(t) = 1 - 2tx, \quad x(0) = 0.$$

Resulta que $x(0.1) \doteq 0.09934$ hasta 5 cifras decimales. Para extender la solución aproximado sobre el intervalo $[0, 0.5]$ en pasos de $h = 0.1$, se puede usar el siguiente método de 2 pasos (de Milne):

$$\begin{aligned} \text{Predictor :} \quad & \tilde{x}_{k+1} := x_{k-1} + 2h\, f(t_k, x_k); \\ \text{Corrector :} \quad & x_{k+1} := x_{k-1} + \frac{h}{3}\big(f(t_{k+1}, \tilde{x}_{k+1}) + 4\, f(t_k, x_k) + f(t_{k-1}, x_{k-1})\big). \end{aligned}$$

Calcular una solución aproximada sobre $[0, 0.5]$ con este método.

Ejercicio 5.5. Aplicar el método clásico de Runge y Kutta para aproximar el valor $x(0.6)$ de la solución del problema de valor inicial:

$$x'(t) = t + x, \quad x(0) = 1 \tag{5.24}$$

en tres pasos de tamaño $h = 0.2$. Se recomienda organizar los pasos con una tabla de números decimales de la forma:

t_m	x_m	k_1	k_1
$t_m + \frac{1}{2}h$	$x_m + \frac{1}{2}k_1$	k_2	$2k_2$
$t_m + \frac{1}{2}h$	$x_m + \frac{1}{2}k_2$	k_3	$2k_3$
$t_m + h$	$x_m + k_3$	k_4	k_4
			$(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$

En cada fila $|t^* \mid x^* \mid k_j|?k_j|$ (excepto la última) se calcula $k_j := hf(t^*, x^*)$. El siguiente bloque de la tabla empieza con $t_{m+1} = t_m + h$ y $x_{m+1} := x_m + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$.

Ejercicio 5.6. Considérese el problema de valor inicial:

$$x'(t) = x - \frac{2t}{x}, \quad x(0) = 1.$$

(a) Obtener la solución exacta $x(t) = \sqrt{2t+1}$ y evaluar $x(t_k)$ para $t_k = 0.2, 0.4, 0.6$. ⟦ Indicación: sustituir $y = x^2$. ⟧

(b) Usar el método clásico de Runge y Kutta con paso $h = 0.2$ para calcular aproximaciones x_k para esos t_k.

Ejercicio 5.7. Considérese el problema de valor inicial:

$$x'(t) = t + x^2, \quad x(0) = 0.$$

(a) Usar el método clásico de Runge y Kutta con un solo paso de $h = 0.4$ para obtener el valor aproximado $x_1 \doteq 0.080647$ para $x(0.4)$.

(b) Usar el método clásico de Runge y Kutta con dos pasos de $h = 0.2$ para obtener el valor aproximado $x_2 \doteq 0.080524$ para $x(0.4)$.

(c) Resolver el problema con el método de series de potencias para verificar que

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{20} + \frac{t^8}{160} + \frac{7t^{11}}{8800} + \cdots$$

y comprobar que $x(0.4) \doteq 0.080516$ hasta 6 cifras decimales.

Ejercicio 5.8. Aplicar el método clásico de Runge y Kutta para aproximar los valores numéricos de sen(1) y cos(1), con dos pasos de $h = 0.5$, partiendo del problema de valor inicial de segundo orden:

$$x''(t) = -x(t), \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$$

⟦ Indicación: usar $y(t) := x'(t)$ para convertirlo en un problema de valor inicial para el vector $(x(t), y(t))$. Agregar otras columnas a la tabla del Ejercicio 5.5 para calcular $k_j := f_1(t^*, x^*, y^*)$ y $\tilde{k}_j := f_2(t^*, x^*, y^*)$, con $x_{m+1} := x_m + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$, $y_{m+1} := y_m + (\tilde{k}_1 + 2\tilde{k}_2 + 2\tilde{k}_3 + \tilde{k}_4)/6$. ⟧

Ejercicio 5.9. Aplicar los métodos de Runge y Kutta de tres etapas, definidos por los cuadros de Butcher del Ejemplo 5.12:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

para aproximar el valor $x(0.4)$ de la solución del problema (5.24) del Ejercicio 5.5, en dos pasos de tamaño $h = 0.2$.

En seguida, resolver el problema (5.24) para obtener la solución exacta. ¿Cuál de estos tres métodos da la mejor aproximación para $x(0.4)$?

Ejercicio 5.10. Es posible comprobar, con el uso de series de Taylor hasta tercer orden, que los coeficientes del método de Runge y Kutta de tres etapas (5.10) cumplen las siguientes relaciones algebraicas (solamente):

$$\begin{array}{lcr} c_2 = a_{21} & b_1 + b_2 + b_3 = 1 & b_2c_2 + b_3c_3 = \frac{1}{2} \\ c_3 = a_{31} + a_{32} & b_3a_{32}c_2 = \frac{1}{6} & b_2c_2^2 + b_3c_3^2 = \frac{1}{3} \end{array}$$

(a) Verificar que los tres tableros del Ejercicio 5.9 cumplen estas ligaduras.

(b) Hallar el tablero de Butcher de tres etapas que cumple $b_1 = 0$, $c_3 = 1$. Exhibir el algoritmo correspondiente.

Indíce General