Una retrospección a la matemática griega

Joseph C. Várilly

De la revista *Laberintos*, diciembre del 2000

Este artículo apareció originalmente en la revista cultural semestral *Laberintos*, publicado por el Instituto de Enseñanza Superior ÉLAIOS, de Zaragoza, en un número dedicado al Año Mundial de las Matemáticas (2000). En el 2012, al cabo de unos 25 números, la revista cesó su publicación.

La matemática en los albores del siglo XXI se caracteriza por su gran complejidad y rápido desarrollo, hasta el punto de que sus cronistas han perdido el aliento hace muchos años. La mayoría de las historias de matemáticas que se encuentran en librerías terminan abruptamente antes de la Gran Guerra, dejando por fuera los impresionantes avances en álgebra abstracta, topología y probabilidad que marcaron los décadas posteriores a 1920.

Este crecimiento voraz y ramificante de la matemática actual exhibe un gran contraste con su estado estático en la Europa de la época de Gutenberg. El surgimiento de la matemática como disciplina intelectual es, a la luz de ese contraste, profundamente misterioso. Varias civilizaciones antiguas desarrollaron cálculos numéricos de gran sofisticación, cuyo mayor ejemplo fue la astrometría de los babilonios que nos ha legado la división de la noche en horas, minutos y segundos. Sin embargo, solamente a Grecia le cabe el honor de dar el salto hacia la formulación de teorías matemáticas.

Hoy en día, nos es difícil percibir el ambiente intelectual de la antigua Grecia, debido a la carencia total de fuentes documentales primarias (en contraste con los babilonios, quienes han dejado miles de archivos grabados en arcilla). Sin embargo, sabemos algo del culto de Pitágoras y su veneración de los números enteros como principio universal. Este culto floreció alrededor de 500 a.C. y centró su atención en las relaciones aritméticos entre números, representados por *psefoi* (guijarros, que los romanos llamaban *calculi*). Entre sus descubrimientos se halla una clasificación de tripletes de números enteros (A, B, C) que cumplen $A^2 + B^2 = C^2$: si N es un número impar, se puede tomar $A = N$, $B = (N^2 - 1)/2$, $C = (N^2 + 1)/2$.

Los pitagóricos descubrieron divisores comunes de dos enteros por *anthyfairesis* (sustracción repetida), mas tarde conocido como "el algoritmo euclidiano". Por ejemplo, para hallar el mayor divisor común de 16 y 22, se procede así: $22 - 16 = 6$, $16 - 6 = 10$, $10 - 6 = 4$, $6 - 4 = 2$, $4 - 2 = 2$; en cada paso se reemplaza el mayor de dos números por el resto, hasta obtener igualdad; tanto 16 como 22 son "medidos" por 2. Muy tardíamente, probablemente durante la guerra del Peloponeso, *circa* 430 a.C., se dieron cuenta de que este proceso es incapaz de producir una unidad de medición simultánea para el lado y la diagonal de un cuadrado. En el siglo IV a.C., esto dio lugar a una teoría de magnitudes no conmensurables, representados ahora por segmentos rectilíneos en vez de *psefoi*. Los trabajos de los sabios de este período se han perdido, pero muchos fueron recogidos por Euclides en sus *Elementos*.

Ese siglo también vio la creación de centros de estudio formales. Alrededor de 385 a.C., Platón organizó reuniones de filósofos en sus terrenos en un distrito llamado Akademia, al nordeste de Atenas. Poco a poco, tales lugares de reflexión crecieron hasta que un siglo mas tarde apareció el *Mouseion* en la Alejandría de los Tolomeos. El *Mouseion* fue un instituto de investigación filosófica y literaria de primera línea, con una biblioteca de muchos miles de papiros, que albergó a no pocos sabios, entre ellos Euclides, que se dedicaban a la investigación de problemas matemáticos.

Tomemos un solo ejemplo de tales problemas de investigación, el de la duplicación del cubo. Este fue uno de los tres grandes “problemas de construcción” de la época mas activa de la matemática griega (los otros fueron la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo). Dado un segmento rectilíneo AB, se pide hallar (mediante una construcción) otro segmento CD de tal manera que el cubo del lado CD sea igual en tamaño que dos cubos cuyos lados son copias del segmento original AB. Para poder abordar este problema, hay que tener claridad sobre la comparación de magnitudes de la misma especie. Por ejemplo, para hallar el lado del cuadrado de igual área a un rectángulo dado $ABCD$, se busca una “media proporcional” PQ; este es un segmento tal que $AB : PQ = PQ : BC$ y admite una construcción sencilla con regla y compás. Eudoxio estableció un cálculo sofisticado de razones (*logoi*) de magnitudes como $AB : PQ$ y de proporciones (*analogíai*, es decir, igualdades entre razones) que fue recopilado en el libro V de los *Elementos*. Hipócrates mostró que el problema de duplicar el cubo es equivalente a la construcción de “dos medios proporcionales”: a partir de dos segmentos dados AB y GH, se pide construir otros dos, CD y EF, tales que $AB : CD = CD : EF = EF : GH$.

Para el siglo III a.C. estos tres problemas de construcción conformaban un programa de investigación que fue perseguido tenazmente, con diversos éxitos, por gentes de la talla de Arquímedes, Apolonio, Nicómedes y Diocles. Antes del año 200 a.C., Nicómedes de Alejandría logró duplicar el cubo usando una curva auxiliar, el conchoide, que construyó con el método del segmento deslizante (*neusis*); hoy en día sabemos que la regla y compás no serían suficientes para tales construcciones. Es importante aclarar que los filósofos griegos no se limitaron al uso exclusivo de la regla y compás (en el estilo de los *Elementos*) sino que admitieron otros procedimientos como las *neusis* cuando fuera conveniente.

El sobreviviente principal del paso de los milenios (a través de numerosas copias y traducciones) es el tratado *Elementos* (*Stoicheia*) de Euclides. No es una obra de investigación propiamente, sino un tratado de recopilación y difusión, que parte de principios básicos y culmina con una exposición de las construcciones (debidas a Theateto) de los cinco poliedros regulares. Pese al carácter elemental de sus capítulos originales (Isaac Newton, al verlo por primera vez cuando cursaba estudios de pregrado en Cambridge, lo desdeñó como “un libro trivial”), hay que admitir que tampoco es un manual didáctico para adolescentes. Con su estilo de presentación, su precisión lógica y su desarrollo minucioso de proposiciones menores que conducen a teoremas mayores, hoy en día los *Elementos* serían clasificados como “texto de posgrado”. Cualquier persona que quiere tomar contacto con la mentalidad de los matemáticos modernos sin atravesar el desierto de una especialidad universitaria no tiene más que abrir y leer con atención el primer libro de los *Elementos*.

Misteriosamente, alrededor de 200 a.C., se perdió el gran impulso investigativo de los dos siglos anteriores. Después de la época de Arquímedes y Apolonio cesan abruptamente los avances de los que tenemos noticia. Aunque hubo un ligero repunte un cuarto de milenio después con Herón, Menelao, Tolomeo el astrónomo, el desarrollo inicial fue frenado irremediablemente. El recurso fácil de echar la culpa a la cultura militar de los romanos no es aceptable: cuando llegaron esos conquistadores alrededor de 150 a.C., ya habían pasado dos generaciones sin contribuciones notables. Por otra parte, se sabe que en el mundo helenístico predominaba la idea de un ciclo cósmico, con épocas de catástrofe y regeneración: bajo esa creencia, la gente tarde o temprano se convence de que la etapa de decaimiento ya ha llegado. Es probable, pues, que el deceso de la matemática griega fuese producto de una simple pérdida de confianza en el futuro. Más aún, me atrevo a afirmar que el continuo avance científico y matemático de nuestra era, que ha dejado atrás la idea del eterno retorno, constituye la única diferencia intelectual significativa entre la edad moderna y la época alejandrina.