Proyecto
Comunidades de Aprendizaje Matemático

Sesión 1

Módulo de preparación en la componente matemática para la Prueba de Aptitud Académica de las universidades Públicas.

Proportionalidad

P.D $\left\{ \begin{array}{l} 4\,kg \xrightarrow{\div 2} 2\,kg \\ 2\,m \; \div 2 \; 1\,m \end{array} \right.$

Consiste en la igualdad entre las razones de dos elementos que están vinculados entre sí

$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$

P.I $\left\{ \begin{array}{l} 4\,kg \xrightarrow{\div 2} 2\,kg \\ 2\,m \xrightarrow{\times 2} 4\,m \end{array} \right.$

Proporcionalidad directa

$2 = \frac{4\,kg}{2\,m} = \frac{12\,kg}{6\,m} = 2$

$4\,kg \xrightarrow{\times 3} 12\,kg$

$2\,m \xrightarrow{\times 3} 6\,m$

Dos magnitudes son directamente proporcionales si al aumentar (disminuir) una de ellas en una razón *k*, la otra aumenta (disminuye) en la misma razón

Proporcionalidad inversa

$4\,kg \xrightarrow{\times 3} 12\,kg$

$2\,m \xrightarrow{\div 3} \frac{2\,m}{3}$

$\frac{4\,kg}{2\,m} = \frac{\frac{2\,m}{3}}{12\,kg}$

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al aumentar (disminuir) una de ellas en una razón *k*, la otra disminuye (aumenta) en la misma razón

Ejemplos: P. Directa

$$\frac{₡1000}{8p}$$

<u>Arroz</u>

$$\underbrace{1\text{ kg}}_{\text{masa}} = \underbrace{₡1000}_{\text{costo}} = \underbrace{8\text{ personas}}_{\text{personas}}$$

$5\text{ kg} = ₡5000$

$₡x = 35\text{ personas}$

$x\text{ kg} = 35\text{ personas}$

Ejemplos: P. Inversa

$$V = \frac{d}{t}$$

$$V = \frac{80km}{h} = \frac{80km}{1h}$$

$$V = \frac{40km}{h}$$

$$t = 2h$$

$$\div 2 \downarrow \begin{array}{l} 80km \longrightarrow 1h \\ 40km \longrightarrow 2h \end{array} \downarrow \times 2$$

Regla de Tres

Dados tres de los valores de una proporción, se puede hallar el cuarto aplicando una igualdad entre el producto de los medios y los extremos

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

$$ax = bc$$

$$x = \frac{bc}{a}$$

$$\left.\begin{array}{l} a \longrightarrow b \\ c \longrightarrow x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Conversiones

Realizar una conversión consiste en expresar una magnitud dada en cierta unidad en una unidad de medida mayor o menor

$m \longrightarrow L$

$1h \rightarrow 60m$

$1m \rightarrow 60s$

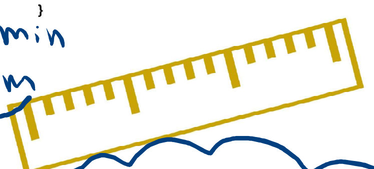
Longitud

$2h \longrightarrow x\,min$

$1h \rightarrow 60m$

$\frac{2h}{x} = \frac{1h}{60}$

$x = \underbrace{2\cancel{h}}_{b} \cdot \boxed{\frac{60\,min}{1\cancel{h}}} \overset{\frac{c}{a}}{=} 120\,min$



Masa

Tiempo

Resolución de Problemas

Suponga que en la confección de un mapa de Costa Rica se utilizó la escala 3/4cm equivale a 10km. Si en el mapa la distancia entre dos ciudades es 6cm, ¿cuál es la distancia real entre las ciudades?

A) 15km

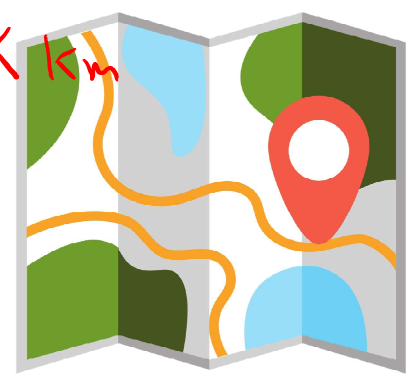
$\frac{3}{4}$cm → 10km

mapa   Realidad

B) 45km → ¡Cuidado!

6cm → X km

~~C~~) 80km



D) 60km

Fuente: Práctica Admisión ITCR

Camino 1:

Extremos – medios

numerador denominador

$$\frac{\frac{3\,cm}{4}}{10\,km} = \frac{6\,cm}{x\,km} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}}{\frac{10}{1}} = \frac{6}{x} \Rightarrow \frac{3}{40} = \frac{6}{x}$$

$$\Rightarrow 3x = 240$$

$$\Rightarrow x = \frac{240}{3} = 80\,km$$

Camino 2 :

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{10} = \frac{6}{x} \Rightarrow \frac{3}{4}\cdot x = 60 \Rightarrow 3x = 240$$

$$x = \frac{240}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$x = 60 \div \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{60}{1}\cdot\frac{4}{3} = \frac{240}{3} = 80$$

Camino 3:

$$10\,km \rightarrow \frac{3}{4}\,cm$$

$$\frac{6\,\cancel{cm}}{1}\cdot\frac{10\,km}{\frac{3}{4}\,\cancel{cm}} = \underbrace{\frac{60}{\frac{3}{4}}}_{\frac{60}{1}\div\frac{3}{4}=60\cdot\frac{4}{3}} = 60\cdot\frac{4}{3} = \frac{240}{3}$$

$$= 80\,km$$

$$60\cdot\frac{4}{3} = \left(60\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot 4 = \frac{60}{3}\cdot 4$$

$$\frac{10}{\frac{3}{4}} = \frac{x}{6} \Rightarrow \frac{a\{10}{b\{\frac{3}{4}}\cdot 6 = x = \boxed{60\div\frac{3}{4} = 6\cdot\frac{40}{3}}$$

Errores:

$\frac{4}{3}$ cm $\longrightarrow$

① $$6\,cm \cdot \frac{\frac{3}{4}\,cm}{10\,km} = \frac{9}{20}$$

② $$6\,\cancel{cm} \cdot \frac{10\,km}{\frac{4}{3}\,\cancel{cm}} = 60 \div \frac{4}{3} = 60 \cdot \frac{3}{4}$$

$$= \frac{180}{4} = \frac{90}{2} = 45$$

posibles opciones

Jaime desea poner cerámica a la sala de su casa, por lo cual necesita 180 cuadros de un tipo de cerámica. Resultó que posteriormente Jaime se decidió por otro tipo de cerámica, que era más grande que la primera que había considerado. Por cada 4 cuadros de la nueva cerámica se ocupaban 9 de la primera. ¿Cuántos cuadros de cerámica utilizó Jaime?

$4N \Rightarrow 9V$

$$\left(\frac{9V}{4N}\right)^{-1} = \left(\frac{180V}{xN}\right)^{-1} \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{x}{180} \Rightarrow \frac{4}{9}\cdot 180 = x$$

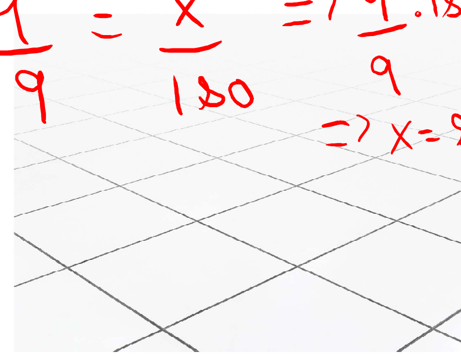
$$\Rightarrow x = 80$$

A) 20

B) 45

C) 80

D) 405



Fuente: Práctica PAA UCR

$$\frac{4}{9} = \frac{1 \cdot x}{180} \overset{?}{\iff} \frac{4}{x} = \frac{9}{180}$$

$$\frac{4}{9 \cdot x} = \frac{1}{180}$$

$$\frac{4}{x} = 9 \cdot \frac{1}{180} \Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{9}{180}$$

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & b \\ c & \longrightarrow & d \end{array}$$

1. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

$\rightarrow$ 2. $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$

Camino 2:

$$\frac{9}{4} = \frac{180}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{9}{4} \cdot x = 180$$

$$\Rightarrow \quad x = 180 \div \frac{9}{4} = 180 \cdot \frac{4}{9} = 80$$

$$\frac{4N}{xN} = \frac{9V}{180V}$$

Camino 3:

$$1 \text{ piso} = 180\cancel{Y} \cdot \frac{4N}{9\cancel{Y}} = \frac{180 \cdot 4}{9} N$$

$$= 20 \cdot 4 = 80N$$

Si el peso de 2 platos es igual al peso de 3 botellas y si el peso de 3 vasos es igual al de dos botellas, entonces el peso de 16 botellas es igual al peso de

A) 3 vasos y 8 platos X

$2p \rightarrow 3b$

$3v \rightarrow 2b$

$16b = \underbrace{6v}_{v} + \underbrace{8p}_{p}$

B) 6 vasos y 8 platos

$4b + 12b = 16b$

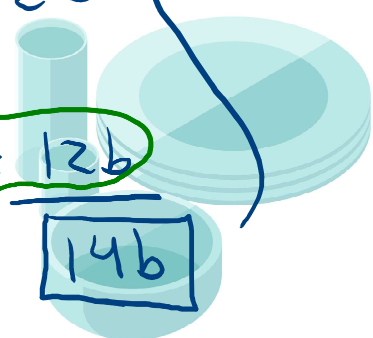
A) $3\cancel{v} \cdot \dfrac{2b}{3\cancel{v}} = 2b$

$8\cancel{p} \cdot \dfrac{3b}{2\cancel{p}} = 12b$

$\boxed{14b}$

C) 9 vasos y 6 platos

D) 3 vasos y 10 platos



Fuente: Práctica PAA UCR

$$6\cancel{x} \cdot \frac{2b}{3\cancel{x}} = 4b$$

$$8\cancel{p} \cdot \frac{3b}{2\cancel{p}} = \frac{12b}{\underline{\underline{16b}}}$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EMat Escuela de Matemática

Proyecto
Comunidades de Aprendizaje Matemático

Sesión 2

Módulo de preparación en la componente matemática para la Prueba de Aptitud Académica de las universidades Públicas.

En el país P una bicicleta cuesta 3000 gapes, mientras que en el país Q la misma bicicleta cuesta 5000 lapas. Si Carlos que vive en el país P se ahorra 500 gapes trayendo la bicicleta del país Q, entonces una lapa equivale a

A) 0,25 gapes

B) 0,5 gapes

C) 1 gape

D) 2 gapes

P 3000g → se ahorra 500

Q 5000l $\boxed{2500g}$

mitad

5000l = 2500g

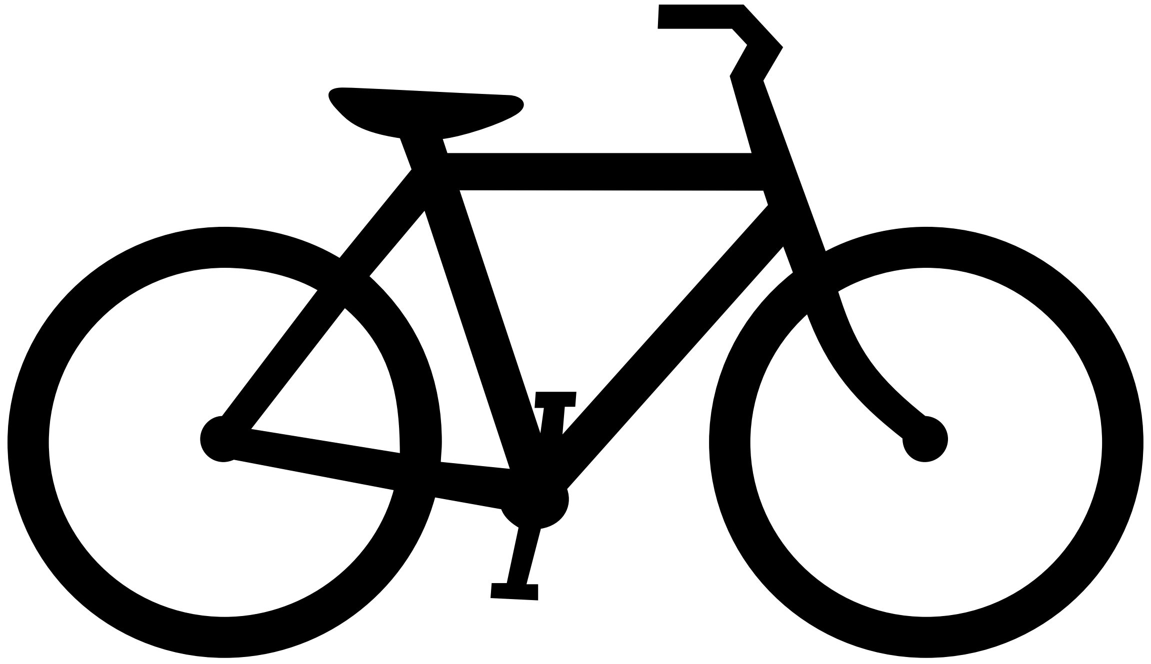
1l = 0,5g ✓

2500÷5000=0,5

$$\frac{5000l}{2500g} = \frac{1l}{?g}$$

$$\frac{2500g}{5000l} = \frac{?g}{1l}$$

$$\frac{5000l}{1l} = \frac{2500g}{?g}$$



Fuente: Práctica PAA UCR

La fecha para entregar un informe fue originalmente el sábado 13 de junio, pero se cambió la fecha para 228 días después de la fecha original. ¿Qué día de la semana es la nueva fecha de entrega?

A) Martes

B) Miércoles

C) Jueves

D) Sábado

$$\begin{array}{r|l} 228 & 7 \\ \hline -21 & 32 \\ 18 & \\ 14 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

32 → semanas.

sábado

1 → dom

2 → lunes

3 → martes

4 → miércoles.

Fuente: Práctica PAA UCR

Mariela lee un libro a una velocidad de 40 páginas por hora. Socorro lee una copia del mismo libro a una velocidad de 30 páginas por hora.

Si Socorro empieza a leer el libro a las 4:30pm y Mariela a las 5:20pm, entonces, ambas estarán leyendo la misma página a las

A) 9:00pm

~~B)~~ 7:50pm

C) 8:40pm

D)7:00pm

Mariela 40pág x 60min. $\frac{4\cancel{0}}{6\cancel{0}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Socorro 30pág x 60 min $\frac{30}{60} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

4:30pm ——— 5:20pm

50min

¿Cuántas pág a leido Socorro cuando Mariela empezó a leer?

$50 \cdot \frac{1}{2} = \frac{50}{2} = 25$ pág.

1: forma de resolver

20min → 10 pág

cantidad de pág $10 + 10 + 5 = 25$ pág

minutos $20 + 20 + 10 = 50$ min

2: Forma de resolver

Fuente: Práctica PAA UCR

$\text{Socorro} = 25 + \frac{1}{2}x$

$\boxed{5:20\text{pm}}$

$\text{Mariela} = \frac{2}{3}x$

$\boxed{5:20\text{pm}}$

x: el número de minutos transcurridos desde que las dos empezaron a leer.

$$25 + \frac{1}{2}\cancel{x} = \frac{2}{3}\cancel{x}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2\cdot 2 - 3\cdot 1}{3\cdot 2} = \frac{4-3}{6}$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$25 = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x$$

$$25 = \frac{1}{6}\cdot x$$

$$\frac{\frac{25}{1}}{\frac{1}{6}} = x$$

$$\frac{\frac{25}{1}}{\frac{1}{6}} = \frac{25\cdot 6}{1\cdot 1} = \frac{150}{1} = 150$$

Conversión

150 min → 2,5 h.

respuesta

$5:20\text{pm} \xrightarrow{+2,5} \boxed{7:50\text{pm.}}$

$15a = x$

Teoría de Números

Múltiplos

Un número a es múltiplo de un número b si al efectuar la división b entre a, el resultado es un número entero

¿Cuáles son los múltiplos de 7 menores a 51?

Propiedades de Múltiplos

- La suma de dos múltiplos del mismo número, también es múltiplo de ese número
- El producto de dos múltiplos del mismo número, también es múltiplo de ese número

Teoría de Números

Números Primos

A los números que sólo son divisibles entre 1 y sí mismos se les llama números primos

ejemplo

1 2 3 4 5 6 7

2, 5, $\boxed{7}$, 11, 13, 17, 19, 23,...

Números Compuestos

A los números que no son primos se les llama números compuestos. (tienen más divisores además de 1 y sí mismo)

ejemplo

1 2 3 4 5 6 7 8

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16,...

Ejemplos de Múltiplos y sus propiedades

Múltiplos de 7

Condición: Menores a 51

definición

$7 \times 1 = 7 \Rightarrow 7 \div 7 = 1$

$7 \times 2 = 14 \Rightarrow 14 \div 7 = 2$

$7 \times 3 = 21 \Rightarrow 21 \div 7 = 3$

$7 \times 4 = 28 \Rightarrow 28 \div 7 = 4$

$7 \times 5 = 35 \qquad \vdots$

$7 \times 6 = 42$

$7 \times 7 = 49 \Rightarrow 49 \div 7 = 7$

$7 \times 8 = 56$

Por lo tanto

Los múltiplos de 7 menores a 51 son:

$\{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$

Ejemplos de Múltiplos y sus propiedades

$\{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, \ldots\}$

Propiedades: de los múltiplos de un mismo número

$$\begin{array}{r} 21 \\ +\ 28 \\ \hline 49 \end{array}$$

Suma

$$\begin{array}{r} {}^{2}14 \\ \times\ 7 \\ \hline 98 \end{array}$$

Producto

verificación

$\boxed{98 \div 7 = 14}$

Cumple con la definición

ejemplos: múltiplos del 7

Ejemplos de Múltiplos y sus propiedades

}

Números Pares e Impares

Pares

A los números múltiplos de 2 se les llama números pares y tiene la forma 2k, donde k es entero

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

ejemplo

$-3 \cdot 2 = \underbrace{-6}_{\text{par}}$

Impares

A los números múltiplos que **no** son múltiplos de 2 se les llama números impares y tiene la forma 2k+1, donde k es entero

ejemplos:

$\boxed{k = 4}$

$2k+1$
$= 2 \cdot 4 + 1$
$= 8 + 1$
$= 9$

impar

$\boxed{k = -3}$

$2k+1$
$= 2 \cdot -3 + 1$
$= -6 + 1$
$= -5$

impar

Mínimo Común Múltiplo

Mínimo Común Múltiplo

(6 , 9)

1ª forma de solución

6: 6, 12, 18, 24, ...
9: 9, 18, 27, 36, ...

6	9	3
2	3	3
2	1	2
1	1	

$3 \cdot 3 \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18$

2ª forma de solución

Máximo Común Divisor

20 = 1, 2, 4, 5, 10, 20
18 = 1, 2, 3, 6, 9, 18

2

1ª forma

18	20	2
9	10	

2ª forma

Ejemplos de Mínimo Común Múltiplo

}

Ejemplos de Máximo Común Divisor

Resolución de Problemas

Considere que P y Q son números enteros positivos y que M = P (Q + 1)
¿Cuál de las siguientes afirmaciones, **con certeza,** es verdadera?

A) Si P es impar, entonces M es par ✗

B) Si P es par, entonces M es impar ✗

C) Si Q es impar, entonces M es impar ✗

~~D~~) Si P y Q son impares, entonces M es par

E) Si P y Q son impares, entonces M es impar ✗

Objetivo:
Buscar Contraejemplos

$\boxed{P = 3}$ $\boxed{Q = 2}$
par

$M = P(Q+1)$
$M = 3 \cdot (2+1)$
$M = 3 \cdot 3$
$M = 9$ impar

$P = 4$ $\boxed{Q = 7}$

$M = P(Q+1)$
$= 4(7+1)$
$= 4 \cdot 8$
$= 32$ par

$P = 3$ $Q = 5$

$M = P(Q+1)$
$M = 3(5+1)$
$M = 3 \cdot 6$
$M = 18$ par

Mariela número consecutivamente las páginas de un cuaderno empezando con 1 en la primera página. En el proceso de númeración utilizó 187 dígitos.
¿Cuántas páginas tiene el cuaderno?

A) 99

B) 98

C) 97

D) 96

E) 95

	Número de páginas	Total de dígitos
1 dígito	1, ... , 9	9 dígitos
2 dígitos	10, ... , 99 99−10 = 89	89 · 2 = 178 dígitos

9 + 178 = 187

R/ El cuaderno tiene 99 pág.

Fuente: Práctica PAA UCR

Si n representa un número entero positivo, ¿cuál de las siguientes fracciones es menor que la unidad?

$\frac{1}{2} = 0,5$

1, 2, 3, 4, 5, ...

1 → 0, negativo, fracción propia: $\frac{num}{den}$ num < den

$\frac{3}{4}$ $\frac{4}{3}$

A) $n + \frac{1}{2}$ NO > 1

B) $n + \frac{1}{n}$ > 1 NO

C) $\frac{n+2}{n+1}$ ¿$n+2 < n+1$? NO

n $n+1$ $n+2$

D) $\frac{2n}{n+1}$ NO

n $n+1$ $2n$

E) $\frac{n}{n+2}$ ✓

n $n+2$

si $n=2$:

A) 2,5 NO

B) $2 + \frac{1}{2} = 2,5$ NO

C) $\frac{2+2}{2+1} = \frac{4}{3}$ NO

Estaríamos tomando 4 partes de un total de 3. Por ejemplo: partir una pizza en 3 porciones y tomar 4. Eso es más grande que la unidad.

D) $\frac{2 \cdot 2}{2+1} = \frac{4}{3}$ NO

E) $\frac{2}{2+2} = \frac{2}{4}$

[redacted]uente: Práctica Admisión TEC

Alan y Pedro comen en la misma taquería, pero Alan asiste cada 20 días y Pedro cada 38. ¿Dentro de cuántos días volverán a encontrarse?

m.c.m

20	38	2
10	19	19
10	1	10
1	1	

$2 \cdot 19 \to 38$

$\boxed{380}$

A) 2

B) 380

C) 19

D) 5

Fuente: Matesfacil.com

David tiene 24 dulces para repartir y Fernando tiene 18. Si desean regalar los dulces a sus respectivos familiares de modo que todos tengan la misma cantidad y que sea la mayor posible, ¿cuántos dulces repartirán a cada persona?

A) 6

m.c.d

$$\begin{array}{cc|c} 24 & 18 & 2 \\ 12 & 9 & 3 \\ 4 & 3 & \end{array} \rightarrow \boxed{6}$$

B) 72

C) 3

D) 24

Fuente: Matesfacil.com

Dos números enteros positivos se dicen *equiparables* si la suma de sus cifras son iguales. Por ejemplo, 60 y 24 son equiparables, ya que ambas cifran suman 6.

15, 42, 51, 33 $6+0=6$ $2+4=6$

14, 23, 41, 32 y 50 son equiparables

$1+4=5$ $2+3=5$ $4+1=5$ $3+2=5$ $5+0=5$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? con certeza

A) Si P y Q son equiparables, y Q y R son equiparables, entonces P y R son equiparables

P = 60
Q = 24

Q = 24
R = 33

¿P y R?
¿60 y 33? sí

B)Si las cifras de [illegible] las unidades son iguales, entonces, los números son equiparables

23 → 2 + 3 = 5
33 → 3 + 3 = 6

NO

C) La suma de dos números equiparables es un número par

43 y 34 NO
$43+34=77$

D) La suma de dos números equiparables es un número impar

33 y 15 NO
$33+15=48$

Fuente: Práctica PAA UCR

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EMat Escuela de Matemática

Proyecto
Comunidades de Aprendizaje Matemático

Sesión 3

Módulo de preparación en la componente matemática para la Prueba de Aptitud Académica de las universidades Públicas.

Formas de organizar la información

Diagramas de Venn

Establece relaciones lógicas entre dos o más conjuntos de elementos

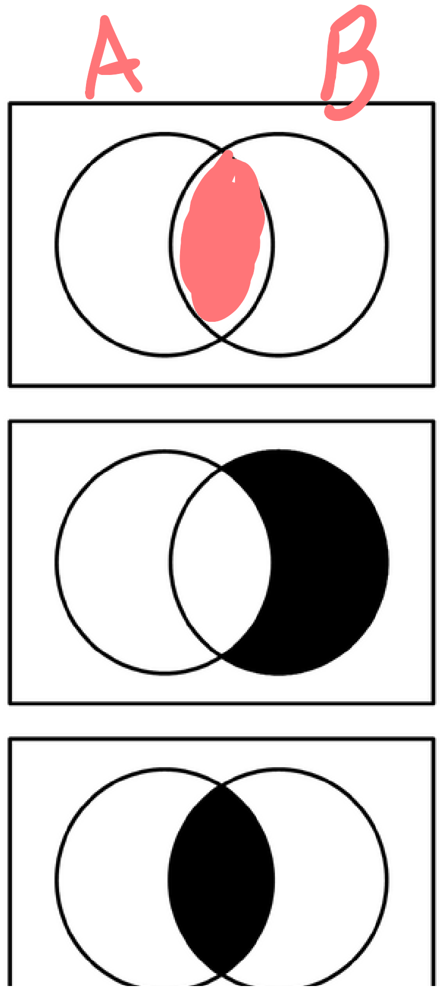


Diagrama del árbol

Consiste en una representación gráfica de posibles resultados de un experimento

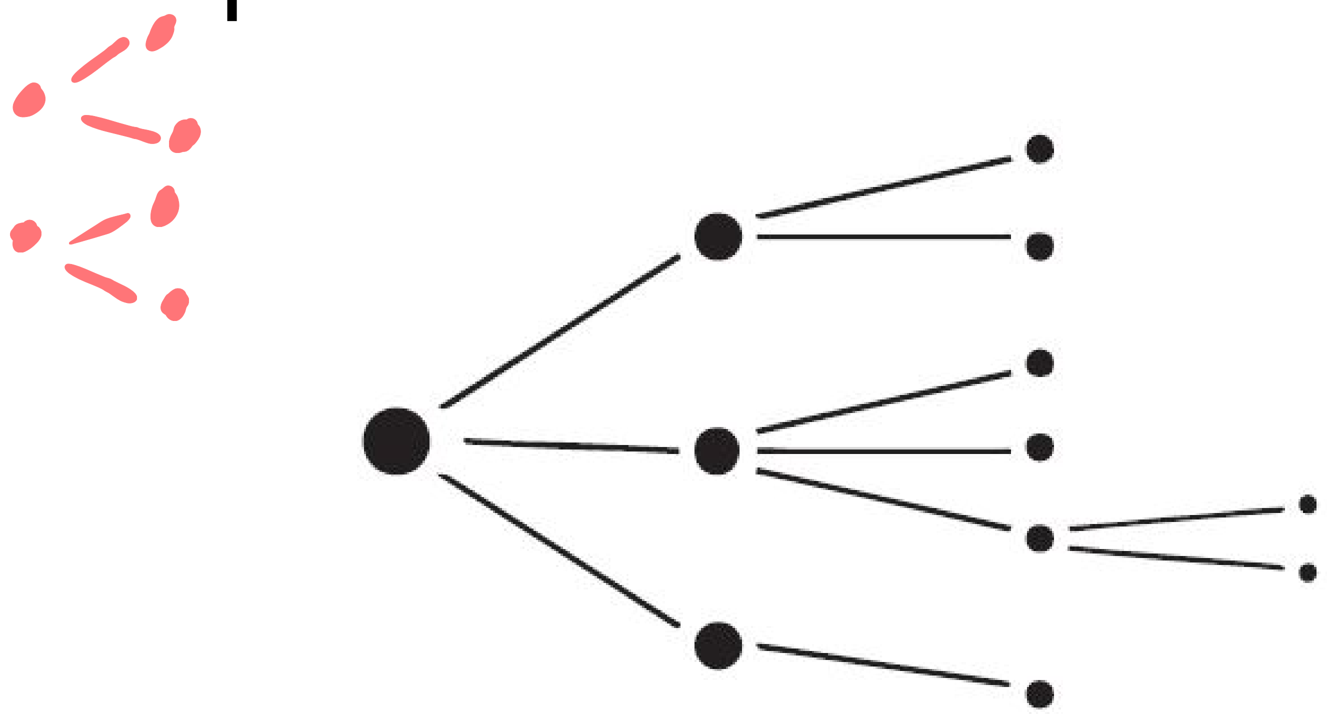
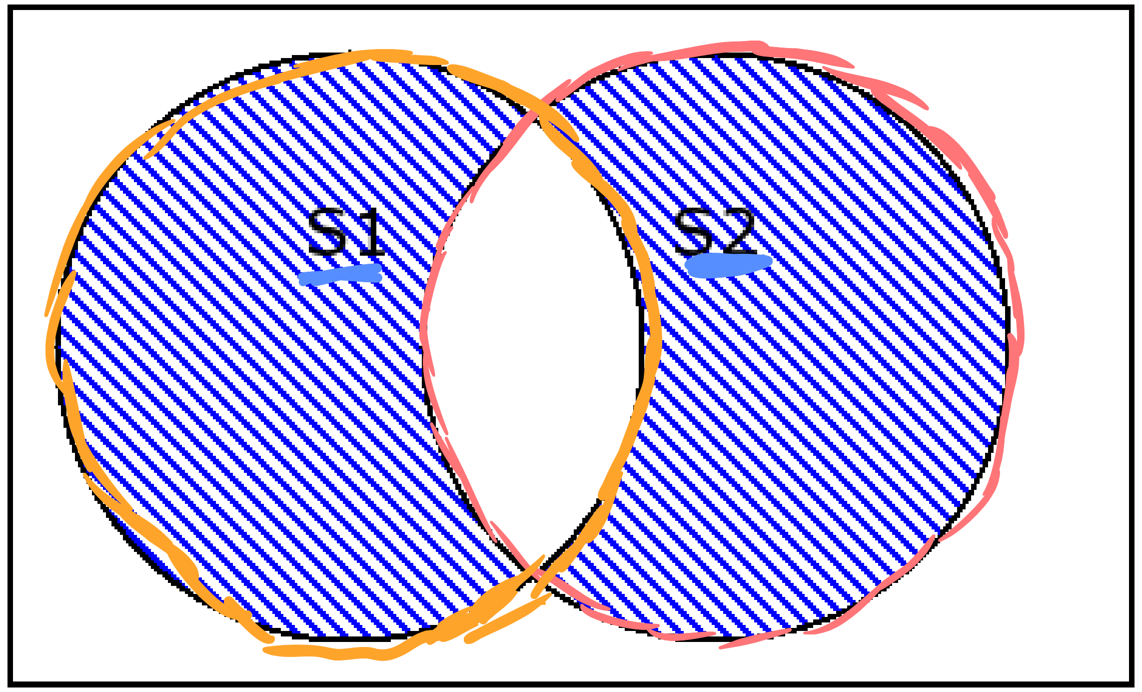
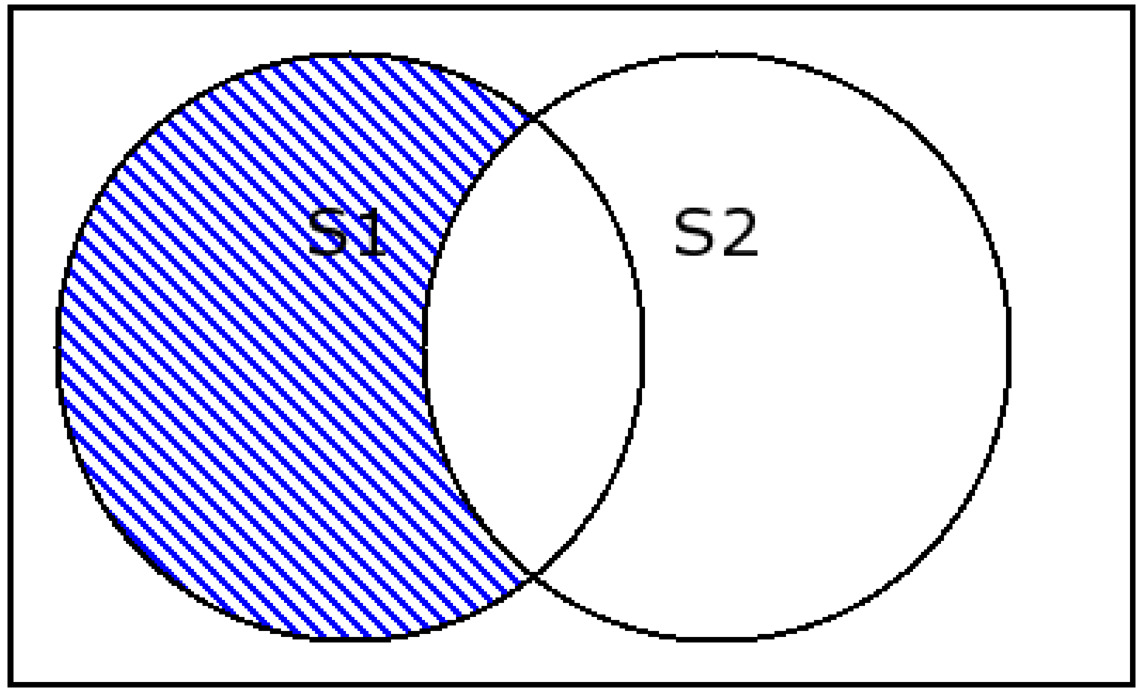


Diagrama de Venn

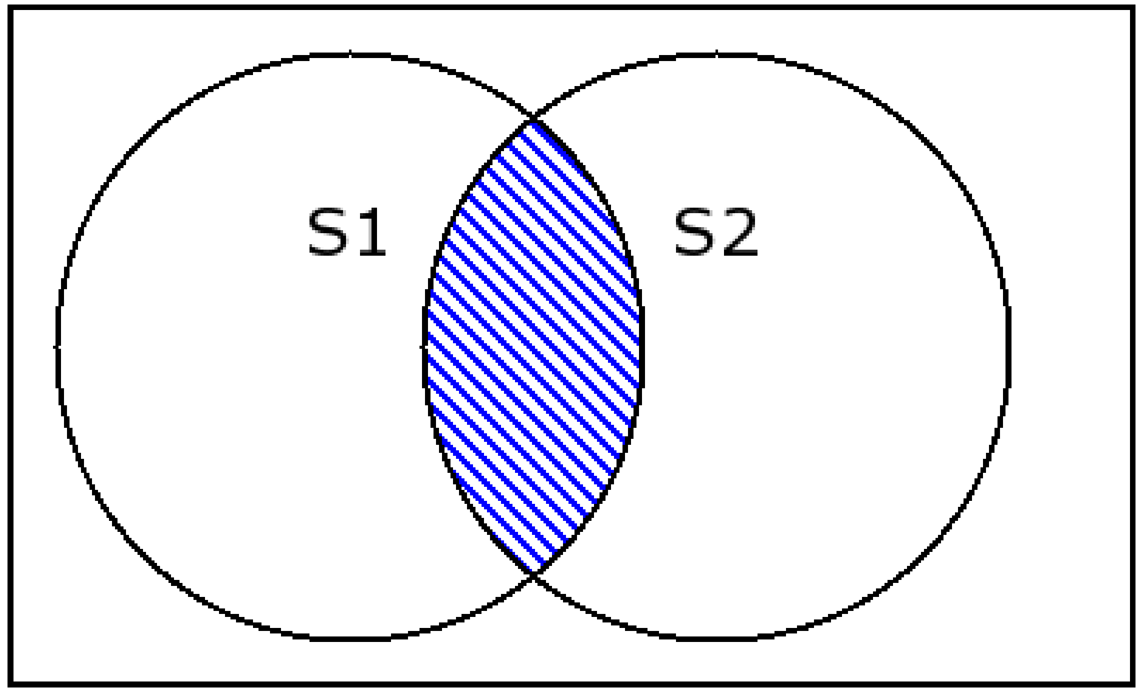
solo S1
y solo S2

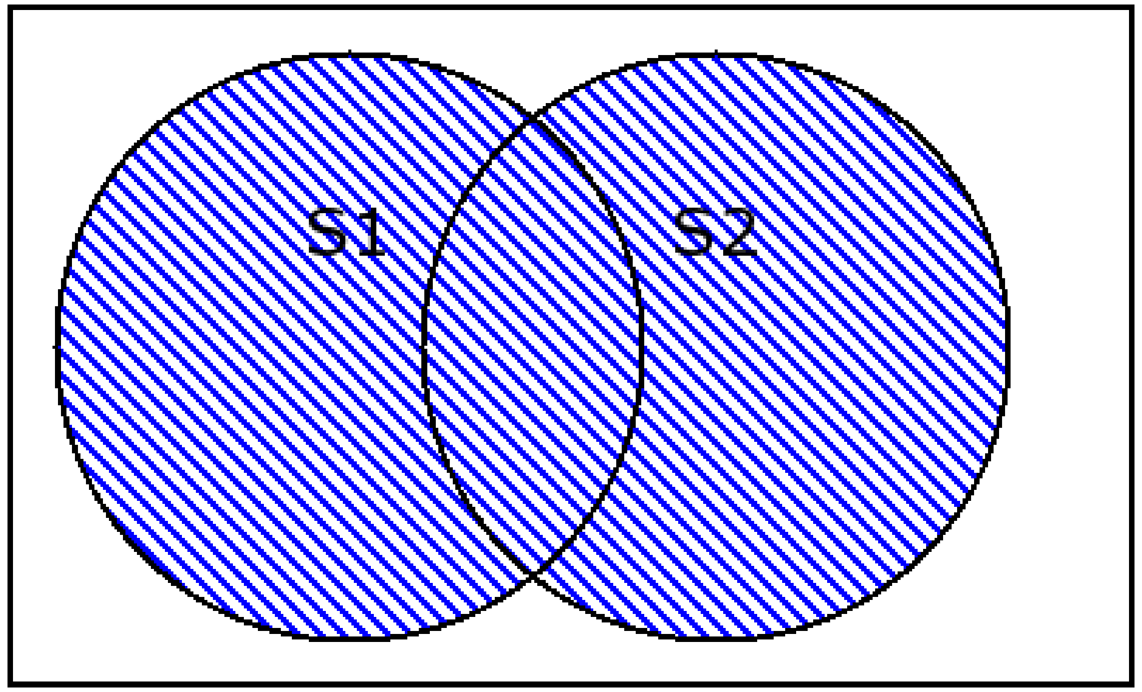




solo S1

S1 y S2
a la vez

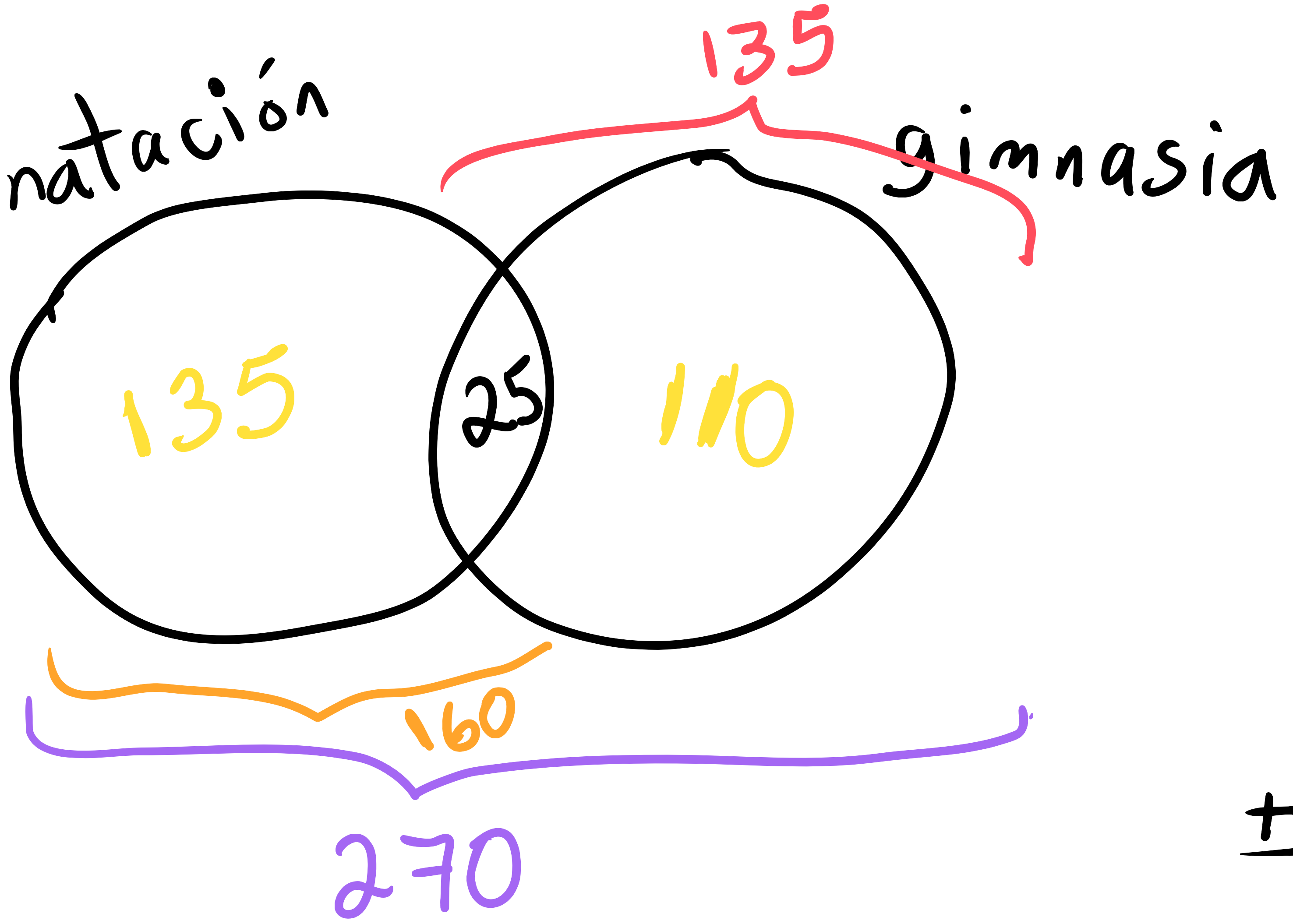




todos los
que están
en S1 o S2
o ambas.

Ejemplo

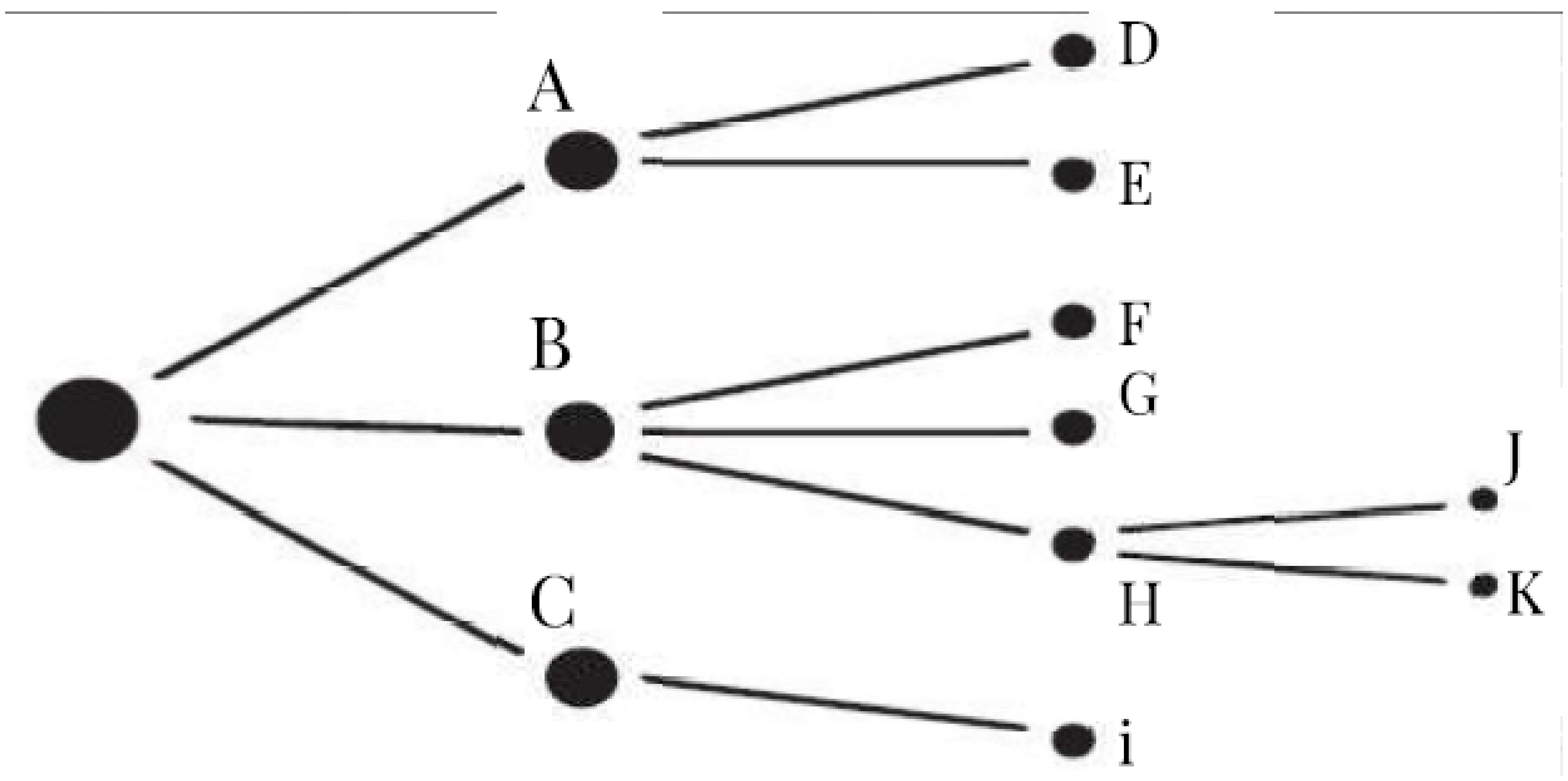
De los 300 integrantes de un club deportivo, 160 se inscribieron en natación y 135 en gimnasia. Si 30 no se inscribieron en ninguna disciplina, ¿cuántos se inscribieron en ambas disciplinas? $\boxed{\text{25 personas.}}$



$$\begin{array}{r} 300 \\ -\ 30 \\ \hline 270 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 160 \\ +\ 135 \\ \hline 295 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 295 \\ -\ 270 \\ \hline 25 \end{array}$$

Diagrama del árbol

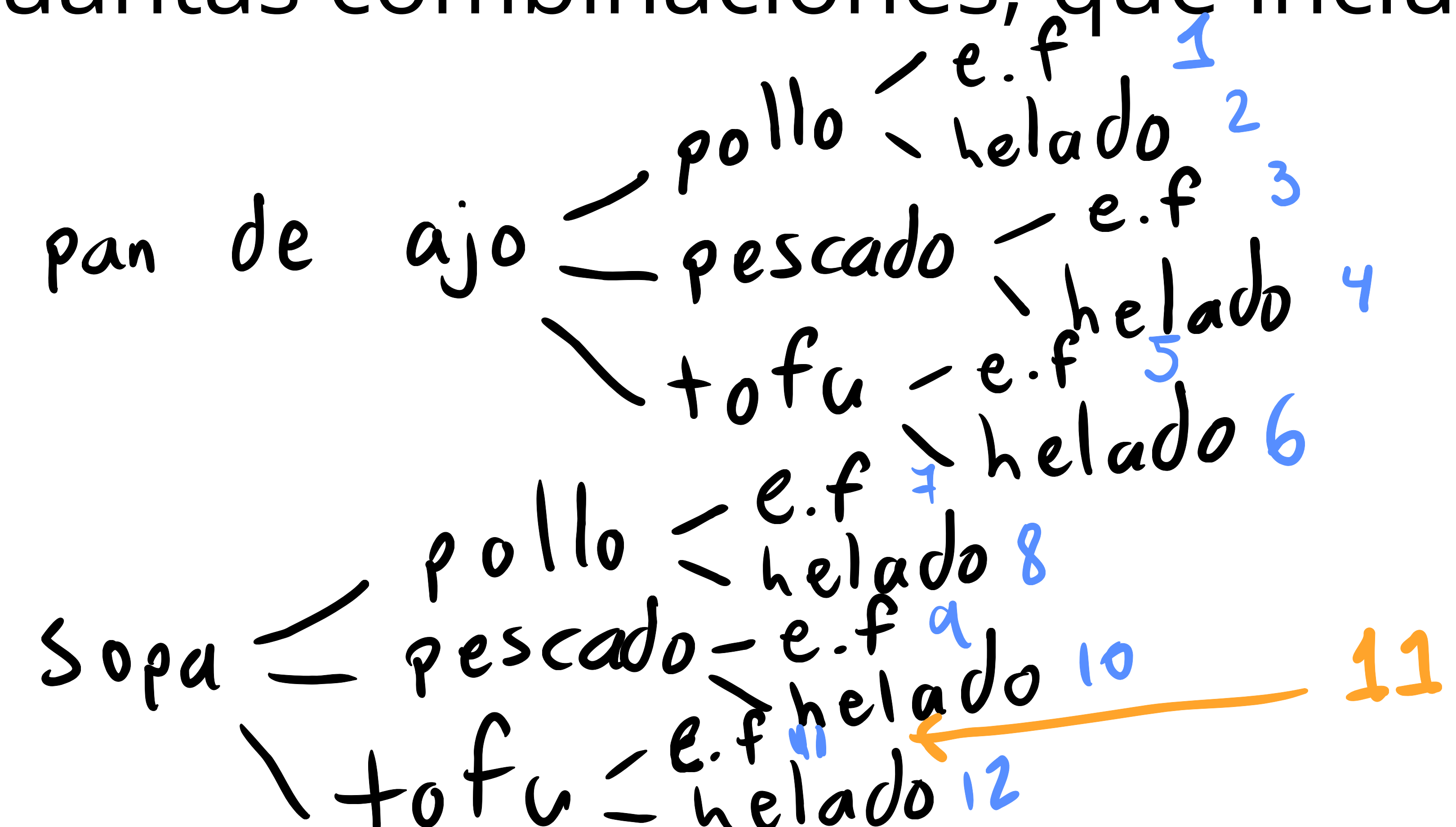


Inicialmente en un experimento puede ocurrir A, B o C
Si inicialmente sale A, entonces en un segundo experimento solo hay dos opciones, D o E, y así sucesivamente

Ejemplo

Una persona entra en un restaurante y decide comer un plato de entrada, un plato fuerte y un postre. Para el plato de entrada, el menú del restaurante ofrece dos opciones: pan de ajo y sopa. Para el plato fuerte el menú le ofrece tres opciones: pollo, pescado o tofu. Y para el postre le ofrecen las siguientes opciones: ensalada de frutas o helado

¿Cuántas combinaciones, que incluya los tres tipos de platos, hay?



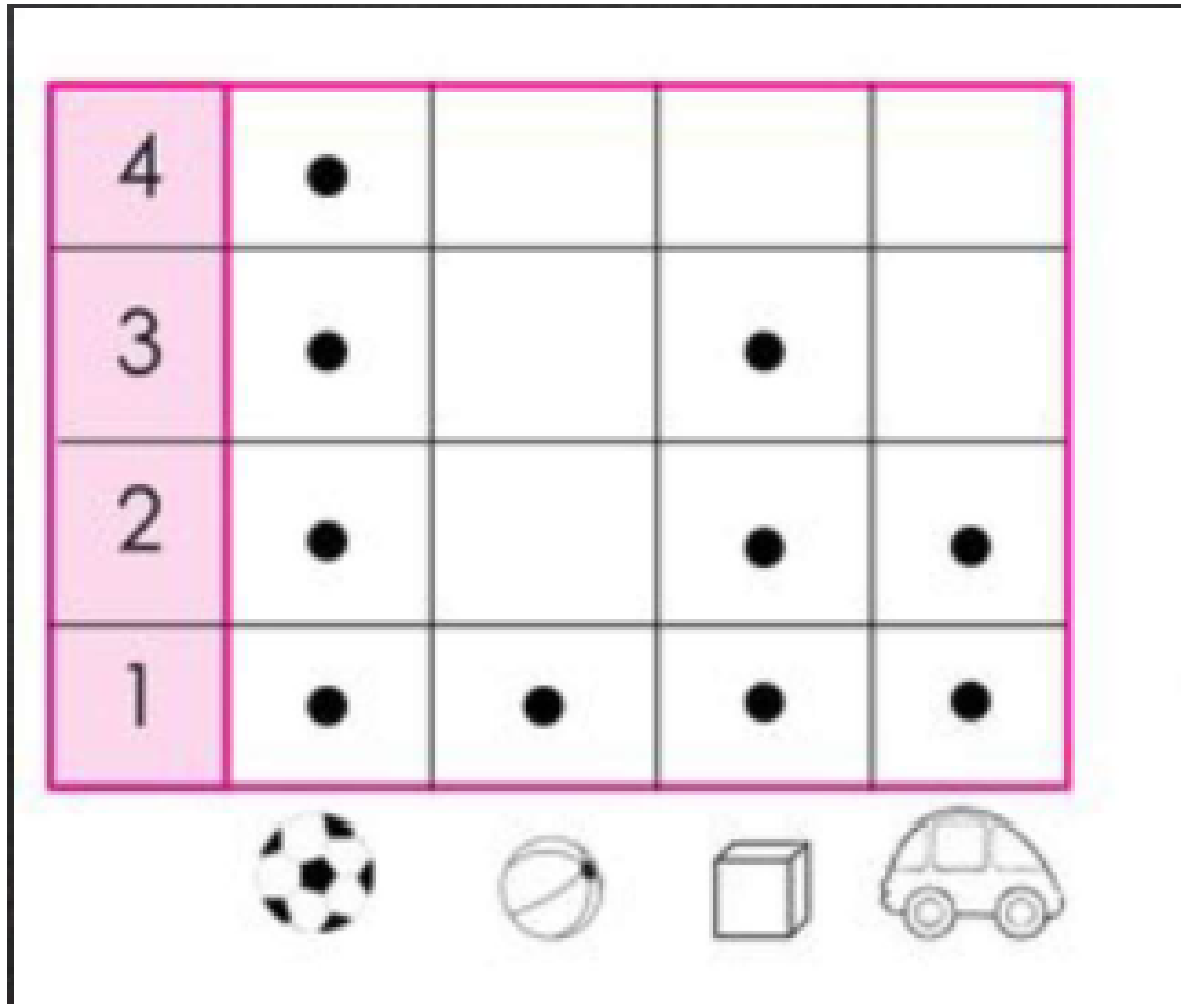
Hay 12 combinaciones.

Otras formas de organizar la información

	(1 1)	(1 2)	(1 3)	(1 4)	(1 5)	(1 6)
	(2 1)	(2 2)	(2 3)	(2 4)	(2 5)	(2 6)
	(3 1)	(3 2)	(3 3)	(3 4)	(3 5)	(3 6)
	(4 1)	(4 2)	(4 3)	(4 4)	(4 5)	(4 6)
	(5 1)	(5 2)	(5 3)	(5 4)	(5 5)	(5 6)
	(6 1)	(6 2)	(6 3)	(6 4)	(6 5)	(6 6)

← 2° dado

1° dado



Ejemplo

Manuel, Nadia, Celso y Dinora son 4 estudiantes universitarios que estudian una carrera cada uno. Se sabe que:

- Manuel quiere cambiarse de la facultad de economía a ciencias políticas ✓
- Dinora es amiga del estudiante de biología ✓
- Celso no estudia computación ✓
- Dinora es prima del estudiante de ciencias políticas ✓

¿Quién estudia computación?

Dinora.

	Economía	C. Política	Biología	Computación
Manuel	SI	NO	NO	NO
Nadia	NO			
Celso	NO			NO
Dinora	NO	NO	NO	SI

Solución del Ejemplo

Resolución de Problemas

En un cantón R se han enumerado del 1 al 8 y se han organizado para celebrar el 15 de setiembre en un colegio distinto cada año. Cada día de la semana en la que cae esta fecha es diferente: se corre un día en los años comúnes, mientras que en los bisiestos (ocurre cada 4 años) se corre dos.

20/8/22 → sábado, 20/8/23 → domingo, 20/8/24 → martes
bisiesto

Si en el octavo año, que resultó bisiesto, al octavo colegio le correspondió la celebración el día lunes, ¿qué día de la semana fue celebrada la actividad en el primer año?

A) Lunes

~~B)~~ Sábado

C) Miércoles

D) Viernes

				Bis.				Bis.
	1	2	3	4	5	6	7	8
día de la semana	sábado	domingo	lunes	miércoles	jueves	viernes	sábado	lunes

2 días menos

1 día menos

1 día menos

2 días menos

Fuente: Práctica PAA UCR

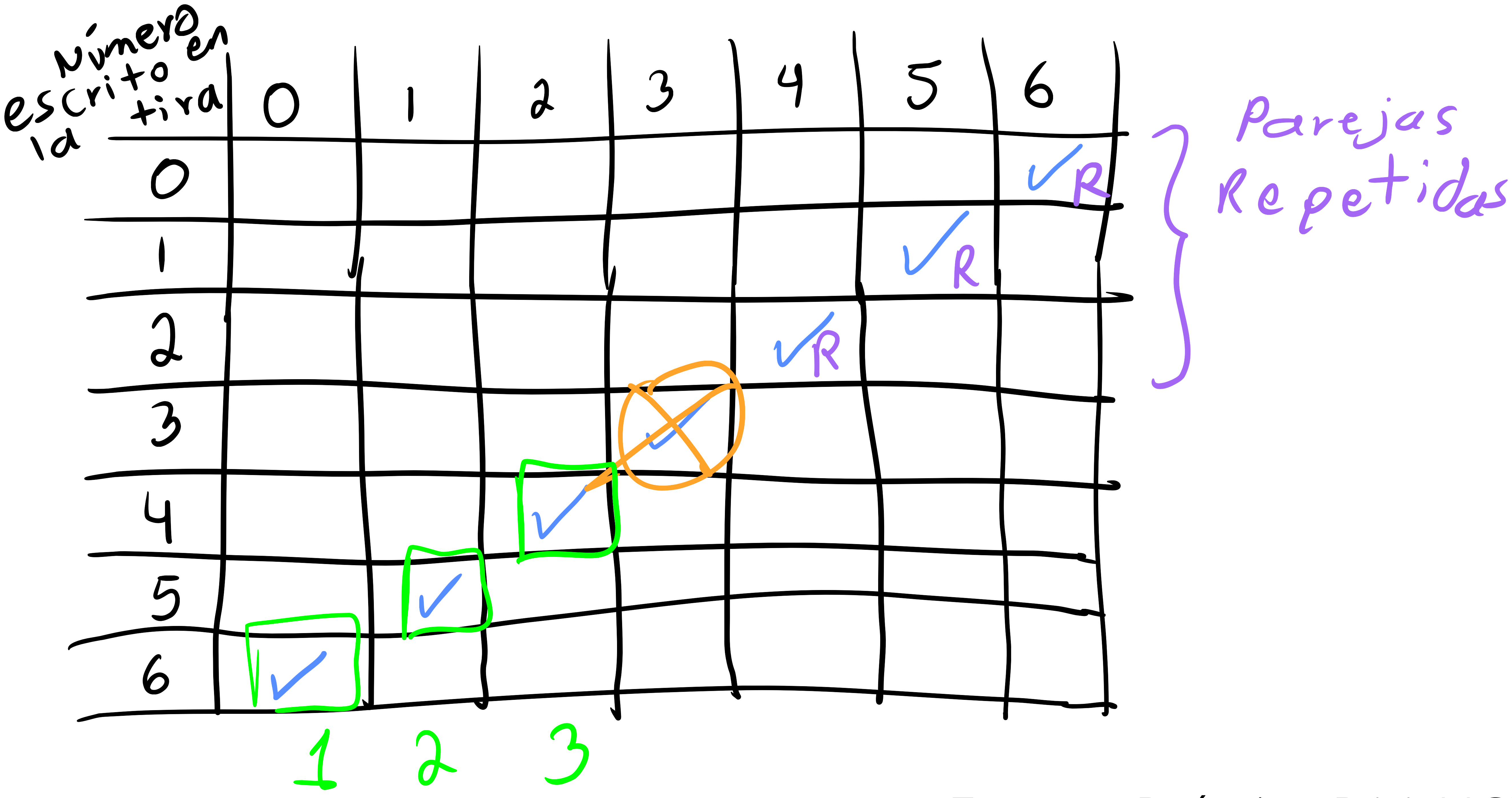
En una caja, se colocan siete tiras de papel, en cada una de ellas se ha escrito un número no repetidoentre 0 y 6. Se sacan 2 tiras al azar, ¿Cuál es el mayor número de parejas de tiras que pueden sacarse cuyos números suman 6?

~~A)~~ 3

B) 6

C) 2

D) 1



Fuente: Práctica PAA UCR

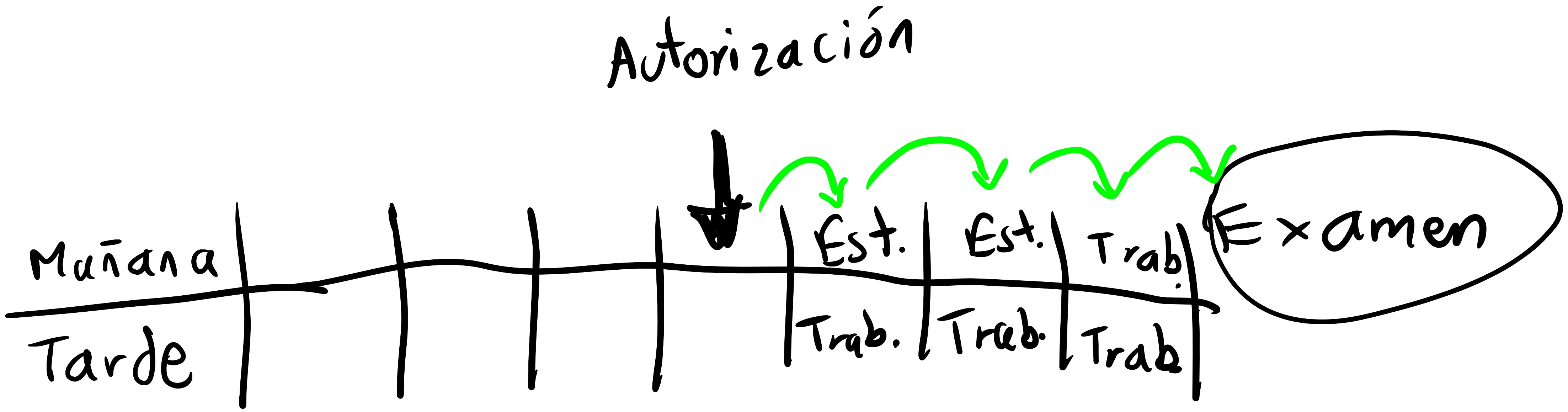
Días antes de un examen, el jefe de Carlos lo autorizó para tomar la mañana o la tarde de cada día para prepararse, siempre que el trabajo se lo permitiera. Carlos solo pudo estudiar durante dos de esos días porque tuvo que trabajar en total una mañana y tres tardes.
Entonces, ¿Cuántos días faltaban para el examen cuando el jefe autorizó a Carlos a estudiar en el trabajo?

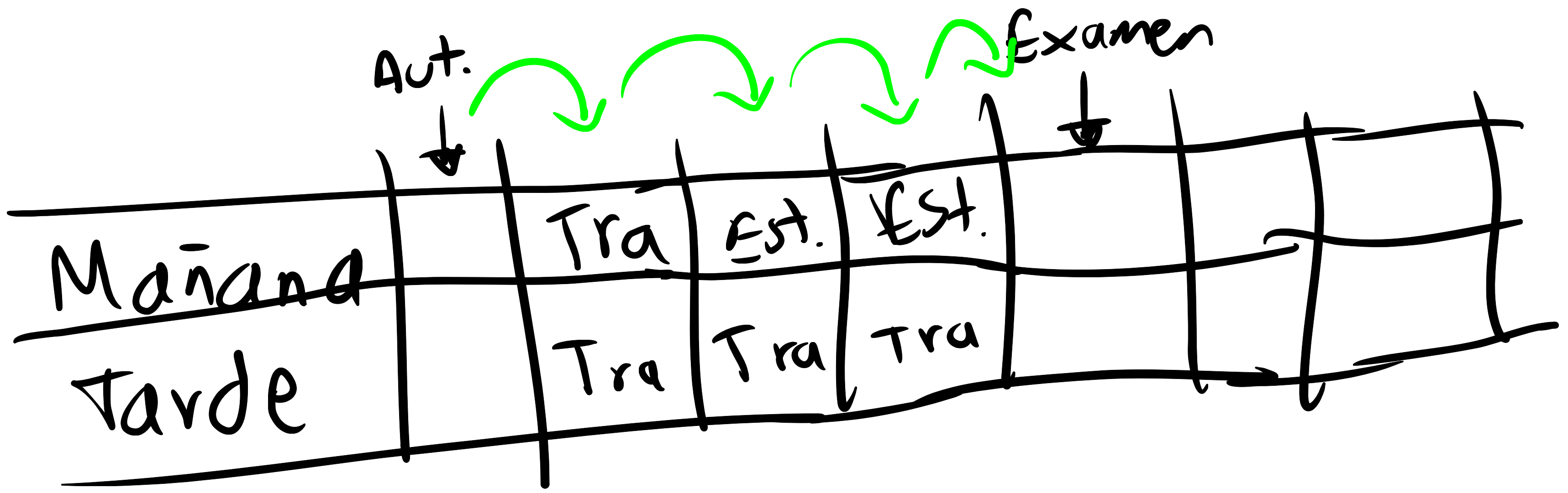
~~A)~~ 4 días

B) 6 días

C) 2 días

D) 1 día





Fuente: Práctica PAA UCR

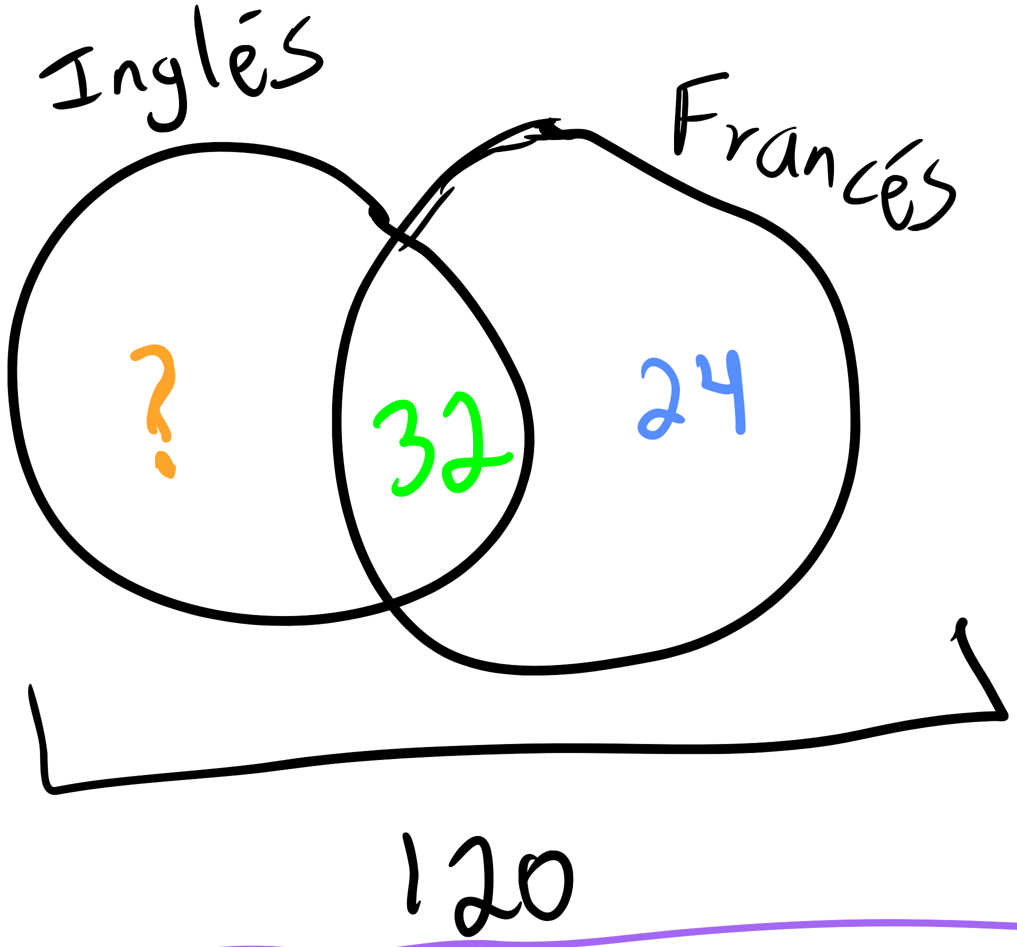
En un campamento hay 120 estudiantes y todos ellos escogen participar en, al menos uno de los talleres; inglés y francés, además 32 estudiantes escogen participar en ambos talleres, si 24 estudiantes escogieron solamente el taller de francés.¿cuanto estudiantes escogieron solamente el taller de ingles?

A) 24

B)48

C) 50

D) 64



$$\begin{array}{r} 32 \\ +\ 24 \\ \hline 56 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 120 \\ -\ 56 \\ \hline 64 \end{array}$$

$120-24-32=64$

$120-24=96$

¿Si nos hubieran preguntado cuántos escogieron el de inglés? $64+32=96$

Fuente: Práctica PAA UCR

Un tren sale de San José con cierto número de personas. En la primera parada, la mitad de los pasajeros abandona el tren y un pasajero sube. En la segunda parada un tercio de los pasajeros abandona el tren y sube un pasajero, con lo cual en el tren quedan 15 pasajeros.

¿Cuántos pasajeros abordaron el tren en San José?

$40 \longrightarrow 20+1=21 \longrightarrow 14+1=15$

SJ   1° parada   2° parada

$= 15$

40

$2 \cdot ☺ = 2 \cdot 20$

21

$3 \cdot \Delta =$
$3 \cdot 7 = 21$

$☺ + 1 = 21$

$☺ = 20$

$\Delta + \Delta + 1 = 15$

$\Delta + \Delta = 14$

$\Delta = 7$

~~A)~~ 40

B) 62

C) 58

D) 48

Fuente: Práctica PAA UCR

En una reunión de diez invitados, cada persona solo se puede comer 2 bocadillos, ya sean 2 del mismo tipo o 1 de un tipo y 1 de otro tipo.

Si se comieron 11 emparedados, 6 rosquillas y 3 empanadas, con certeza hubo, al menos, un invitado que

sandwich

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Boc 1	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
Boc 2	S	R	R	R	R	R	R	E	E	E

A) comió 2 rosquillas

B) comió una rosquilla y una empanada

C) comió un emparedado y una rosquilla

NO S

Boc 1	R	R	R	S	S	S	S	S	S	S
Boc 2	R	R	R	S	S	S	S	E	E	E

~~D)~~ no comió rosquillas ni empanadas

Fuente: Práctica PAA UCR

De 70 estudiantes se observa que 15 estudian solo ingles, 30 frances, 10 solo frances, 26 alemán, 8 solo alemán, 7 los 3 idiomas y 11 otros.

¿Cuantos estudian ingles?

A) 36

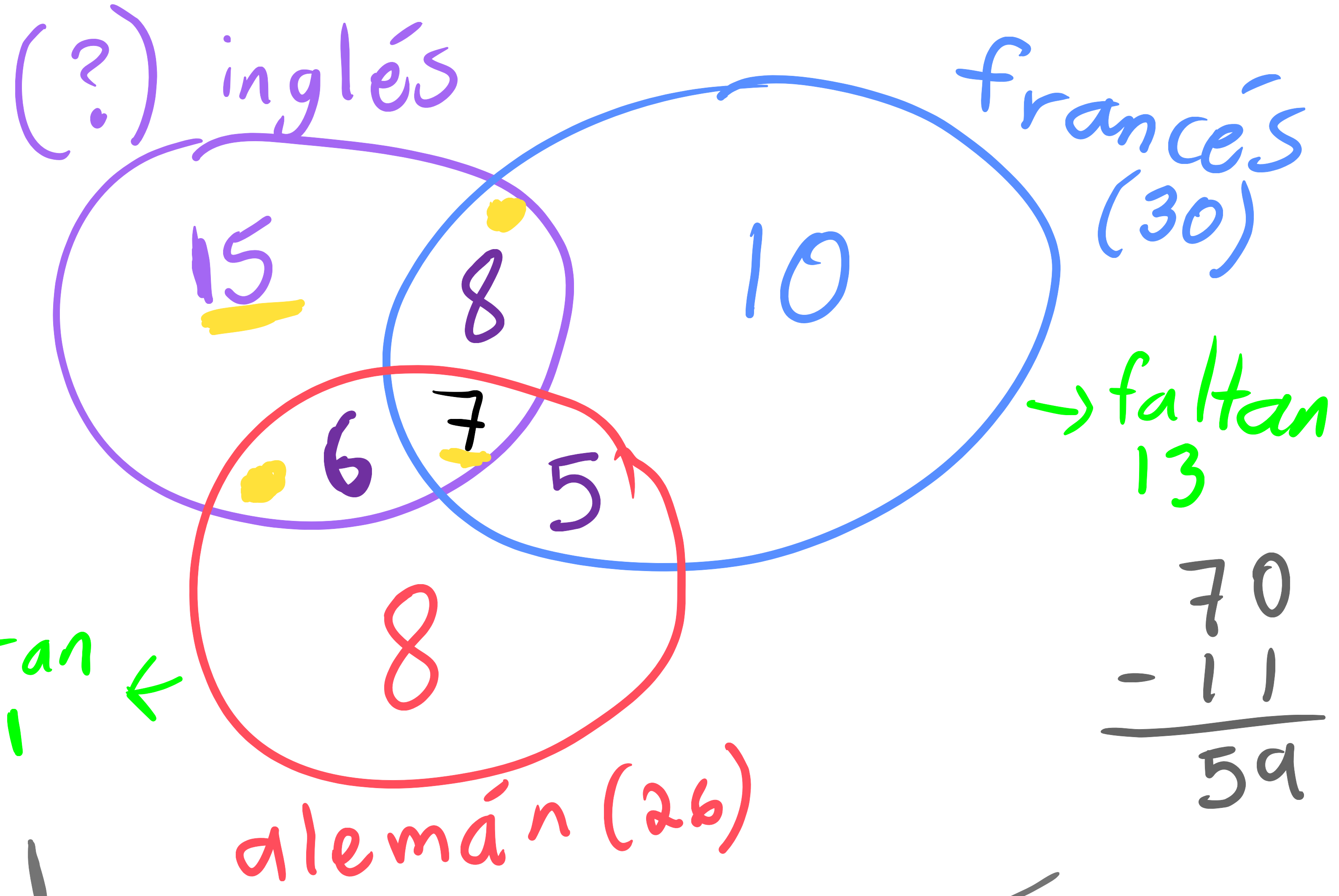
B) 40

C) 22

D) 25

$$15 + 8 + 7 + 6 = 36$$

$$26 - 8 = 18, \quad 18 - 7 = 11$$



otros

11

$$30 - 10 = 20, \quad 20 - 7 = 13$$

$$70 - 11 = 59$$

59 → faltan 19

$$59 - 10 = 49, \quad 49 - 15 = 34$$

$$34 - 8 = 26, \quad 26 - 7 = 19$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

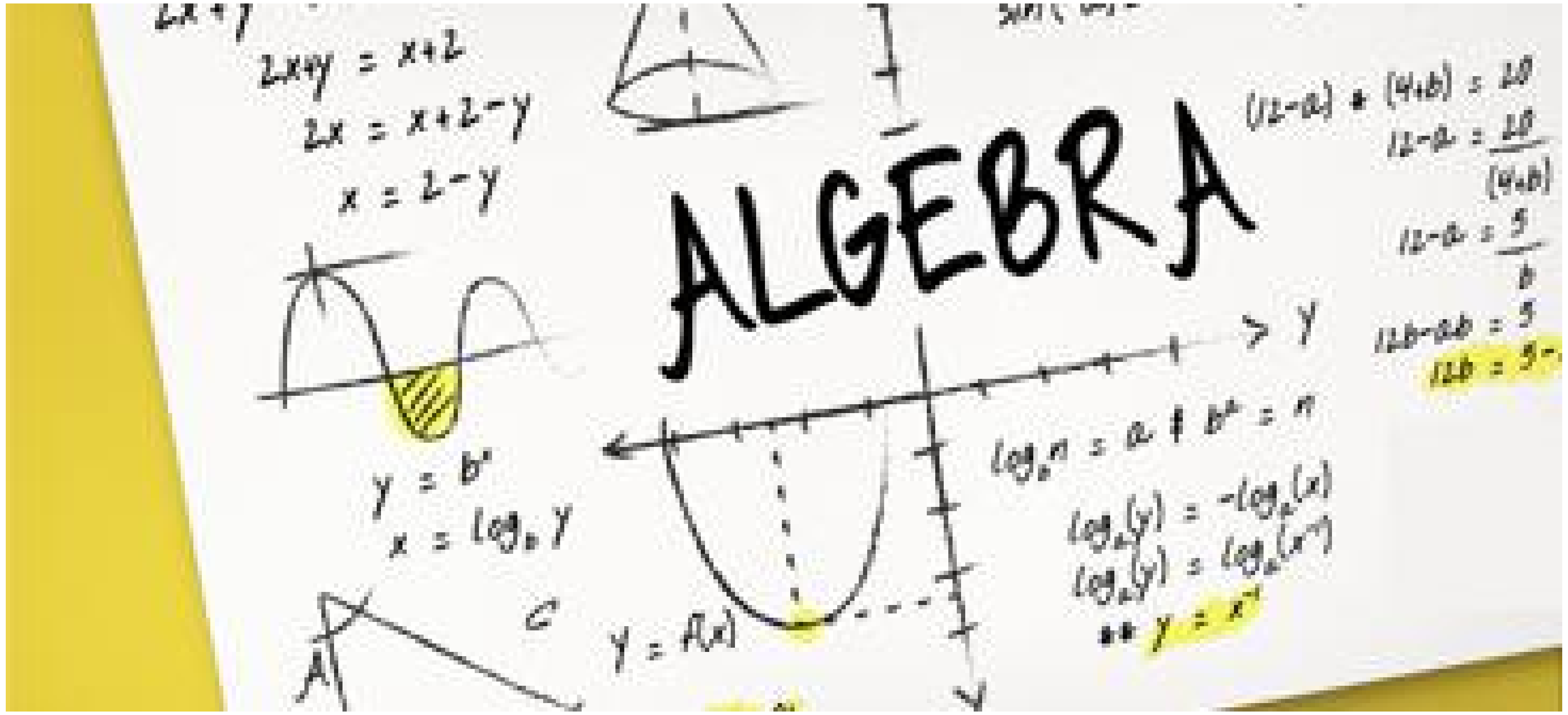
EMat Escuela de Matemática

Proyecto
Comunidades de Aprendizaje Matemático

Sesión 4

Módulo de preparación en la componente matemática para la Prueba de Aptitud Académica de las universidades Públicas.

¿Por qué Álgebra?



Lenguaje Algebraico

Lenguaje Cotidiano	Representación algebraica
El doble de $\boxed{\text{un número}}$ x	$2x$
El triple de un número	$3x$
Un $\underbrace{\text{número}}_{x}$ $\underbrace{\text{aumentado}}_{\text{suma}}$ en 1	$x+1$
Un número aumentado en 2	$x+2$

Lenguaje Algebraico

Lenguaje Cotidiano	Representación algebraica
La mitad de un número	$x \div 2$, $\frac{x}{2}$
El doble de un número, aumentado en 5	2x+5
La raíz cuadrada de un número	$\sqrt{x}$
La mitad de un número aumentado en 1	$\frac{x+1}{2}$, $(x+1) \div 2$
La mitad de un número aumentada en 1	$\frac{x}{2}+1$

M M

F M

F M

Ecuaciones

Concepto de Ecuación

Una ecuación es una igualdad algebraica en la cual aparecen letras (incógnitas) con valor desconocido que se relacionan mediante operaciones matemáticas.

Ejemplos de Ecuaciones

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$a = 3, b = 4, c = 5$

$a = 5, b = 12, c = 13$

$$2x + 1 = 3x \checkmark$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ 3 \cdot 1 = 3 \end{array}}$$

$$2x = 3x - 1$$

$$2x - 3x = -1$$

$$-x = -1$$

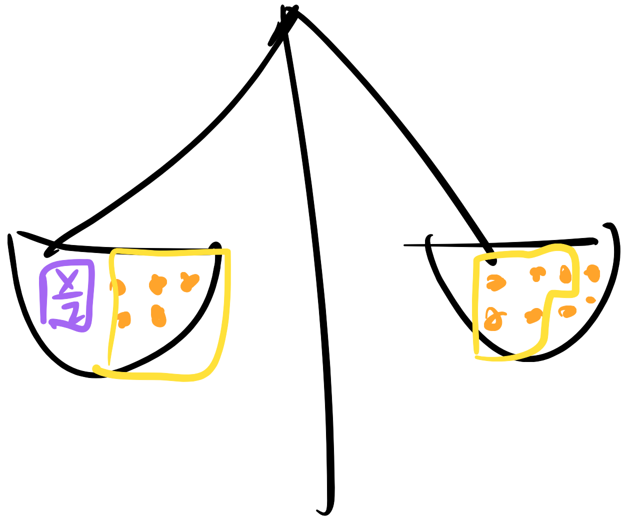
$$x = \frac{-1}{-1} = 1$$

Resolución de Ecuaciones

$$\frac{x}{2}+5=8$$

$$\frac{x}{2}=8-5$$

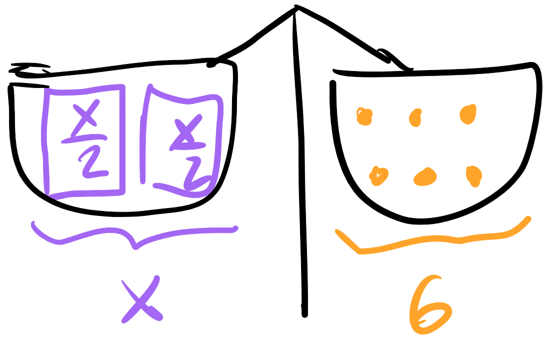
$\boxed{x}$



$$\frac{x}{2}=3$$

$$x=3\cdot 2$$

$$x=6$$



$$3x+2=2x-1$$

$$3x+2-2x=\cancel{2x}-1-\cancel{2x}$$

$$3x+\cancel{2}-2x-\cancel{2}=-1-2$$

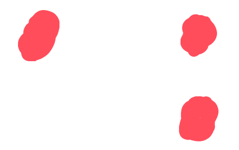
$$3x-2x=-1-2$$

$$x=-3$$

$$3\cdot\boxed{-3}+2=-9+2=-7$$

$$2\cdot\boxed{-3}-1=-6-1=-7$$

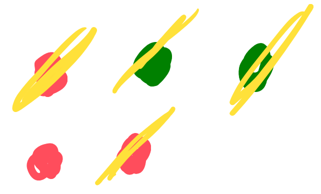
Repaso sobre signos.



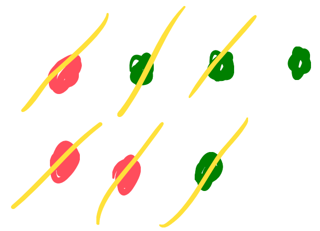
$$-1\boxed{-}2 = -1\boxed{+-}2 = -3$$

$- \rightarrow + -$

$- - \rightarrow +$



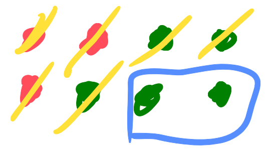
$$-3+2=-1$$



$$-3+4=1$$

Si sumo dos negativos, me da negativo. Si sumo dos positivos, me da positivo. Si sumo un negativo y un positivo, debo analizar su signo.

$$4\boxed{--}5 = 4\boxed{+}5 = 9$$



$$-3+5=2$$

En multiplicaciones:

positivo * positivo = positivo
negativo * negativo = positivo
positivo * negativo = negativo
negativo * positivo = negativo

$\leftarrow$ son igual para divisiones

$-20 \div -2 = 10$

no hace falta poner el +, pero el resultado es positivo

$+400 \div -4 = -100$

Problemas cuya solución involucra ecuaciones

Martín tiene 4 veces la edad que Lucía. ¿Qué edad tendrá cada uno dentro de 5 años? Si hoy Martín tiene 20 años.

$M = 20$

$M \rightarrow$ edad de Martín $\qquad L \rightarrow$ edad de Lucía

		La edad de Martín es 4 veces la de Lucía	¿Edad dentro de 5 años?
Martín	M	$4L$	$4L+5$
Lucía	L	L	$L+5$

$L = \frac{M}{4} \leftarrow 4L = M$

$4L = 20$

$L = \frac{20}{4} = 5 \rightarrow 5+5 = 10$

Errores

$5L$

$20L$

Errores

$L+4 = M$

$L^4 = M$

Problemas cuya solución involucra ecuaciones

Un número aumentado en dos es igual al doble de ese mismo número. ¿Cuál es el número?

$x \to$ número

Un número aumentado en dos : $x+2$

Doble de ese mismo : $2x$

Doble = dos veces = 2x
Triple = tres veces = 3x
Cuádruplo = cuatro veces = 4x

$$\boxed{x+2=2x}$$

SI ESTAMOS RESOLVIENDO UN PROBLEMA HAY QUE DAR UNA RESPUESTA A LA PREGUNTA

$$x-2x=-2$$
$$-x=-2$$
$$x=2$$

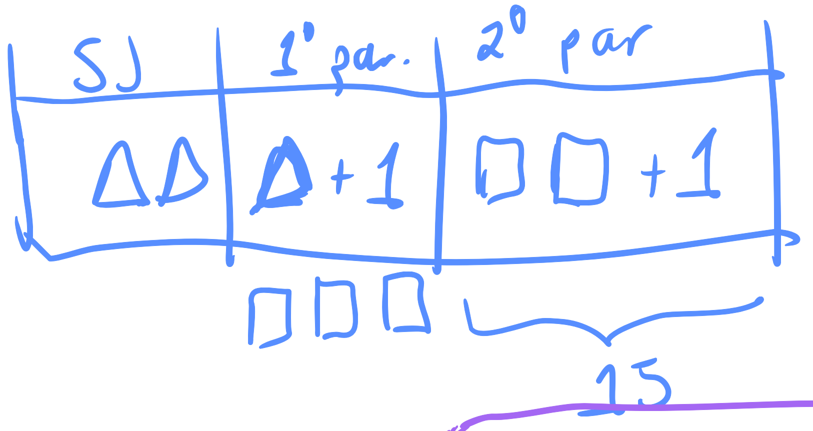
$$2=2x-x$$
$$2=x$$

El número es 2

Problemas cuya solución involucra ecuaciones

Un tren sale de San José con cierto número de personas. En la primera parada, la mitad de los pasajeros abandona el tren y un pasajero sube. En la segunda parada un tercio de los pasajeros abandona el tren y sube un pasajero, con lo cual en el tren quedan 15 pasajeros.

¿Cuántos pasajeros abordaron el tren en San José?



SJ → x

1° parada → $\underbrace{x - \frac{x}{2}}_{\text{se bajó la mitad}} + \underbrace{1}_{\text{se subió uno}} = \frac{x}{2} + 1 = y$

2° parada → $\underbrace{y - \frac{y}{3}}_{\text{se bajó un tercio}} + \underbrace{1}_{\text{se subió uno}} = 15$

$\underbrace{x - x \div 2}_{\text{se bajó la mitad}} + \underbrace{1}_{\text{se subió uno}}$

$x + 3x = 4x$

$x - \frac{x}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)x = \frac{1}{2}x$

① $\frac{2}{3}y + 1 = 15$	⑤ $2y = 42$
② $\frac{2}{3}y = 15 - 1$	⑥ $y = 42 \div 2$
③ $\frac{2}{3}y = 14$	⑦ $y = 21$
④ $2y = 14 \cdot 3$	

$\boxed{12}$ → un tercio → $\boxed{\frac{12}{3} = 4}$ → quedaron $\boxed{12 - 4 = 8}$

$\frac{x}{2}+1=y$ pero como ya sabemos que $y=21$, entonces

$$\frac{x}{2}+1=21$$

$$\frac{x}{2}=21-1$$

$$\frac{x}{2}=20$$

$$x=20\cdot 2$$

$$x=40$$

En SJ abordaron 40 pasajeros.

Problemas cuya solución involucra ecuaciones

En el planeta T7 las sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de dos números dan como resultado el número que se obtiene al realizar la operación respectiva, pero con los números duplicados. Así, por ejemplo, la operación $2 + 3$ da como resultado $4 + 6$. Entonces, con certeza se tiene que:

A) El resultado de las restas es el cuadruple en el planeta T7 que en la tierra

B)Las divisiones son iguales en el planeta T7 que en la tierra

C) Las divisiones son el doble en el planeta T7 que en la tierra

D) Las Multiplicaciones son dos veces en el planeta T7 que en la tierra

Operadores

Desde la escuela se enseñan operaciones básicas como suma, resta. multiplicación, divisiones, raíces, potencias,...

En Matemática es posible **definir muchas más operaciones** y en esta sesión se trabajarán algunas. Por ejemplo

Definamos la operación $\boxed{\&}$ como X&Y = $\boxed{2}$X+Y. Entonces, ¿cuál sería el valor de

X "y" Y es igual al doble de X más Y

$\underbrace{(2\&5)}\&3 = \underbrace{9}\&3 = \boxed{2}\cdot 9+3 = 18+3 = 21.$

$\boxed{2}\cdot 2+5 = 4+5 = 9$

Problemas con operadores

En el planeta P, se define la operación @ como X@Y = XY - XX, donde las operaciones resta y producto funcionan igual que en la tierra. Un habitante de ese plantea requiere calcular el valor de 5@4+3@3. De acuerdo a la definición de la operación, el valor correspondere a

(A) 30

(B) -5

(C) -30

(D) 5

$$5@4 = 5\cdot 4 - 5\cdot 5 = 20 - 25 = -5$$

$$3@3 = 3\cdot 3 - 3\cdot 3 = 9 - 9 = 0$$

$$\underbrace{5@4} + \underbrace{3@3} = \underbrace{-5} + \underbrace{0} = -5$$

Problemas con operadores

Considere la operación dada por P($)Q = PQ-P.

Entonces, el resultado de efectuar 6($)2-2($)1?

(A) 4

(B) 6

(C) 8

(D) 5

$6(\$)2 = 6\cdot 2 - 6 = 12 - 6 = 6$

$2(\$)1 = 2\cdot 1 - 2 = 2 - 2 = 0$

$\underbrace{6(\$)2} - \underbrace{2(\$)1} = \underbrace{6} - \underbrace{0} = 6$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

PROYECTO COMUNIDADES DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO

EMat Escuela de Matemática

SESIÓN 5

Curso de preparación en la componente matemática para la Prueba de Aptitud Académica de la universidades públicas

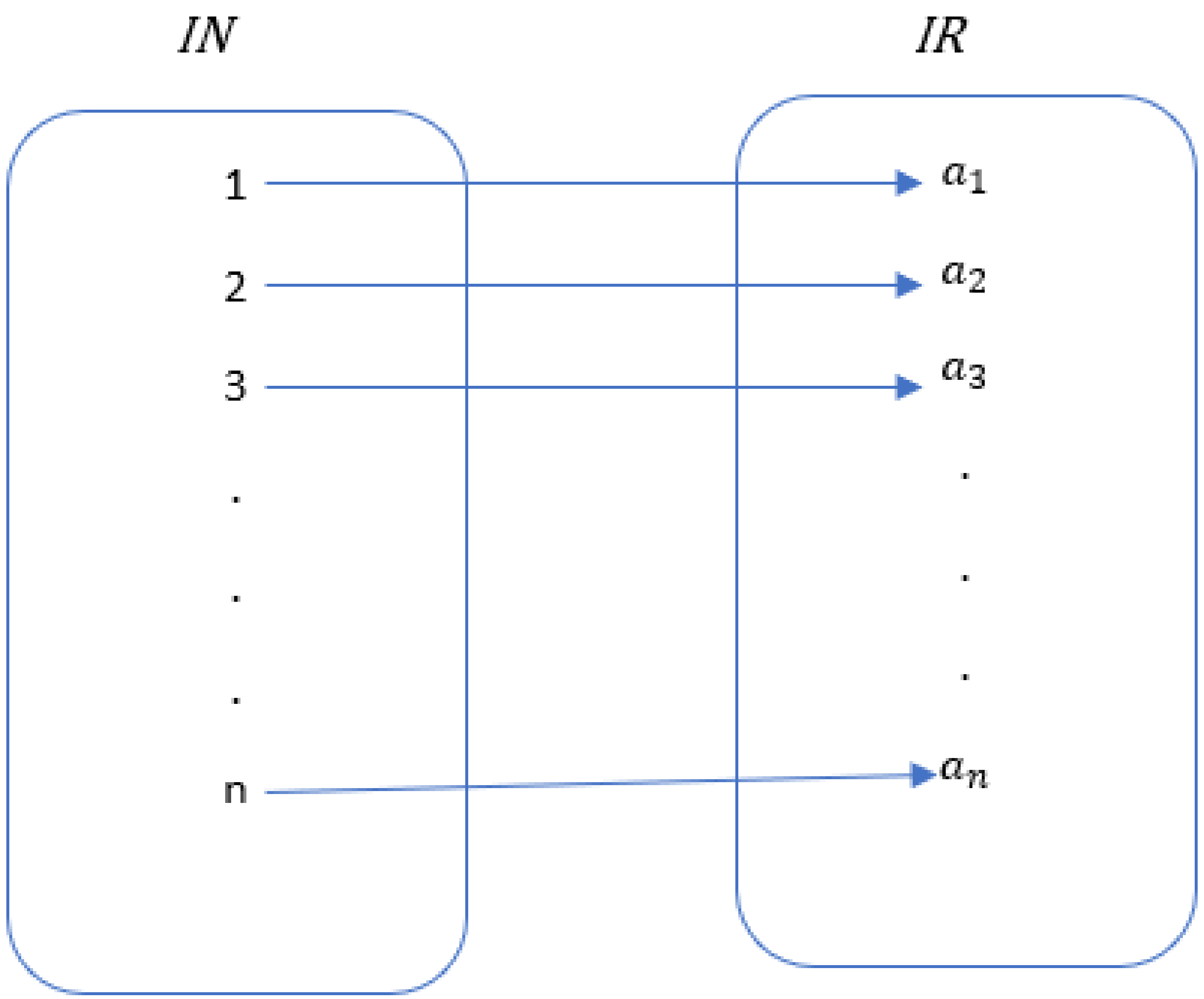
SUCESIONES NUMÉRICAS

Una sucesión es un conjutno ordenado de elementos (pueden ser números, letras, figuras.., de modo que cada uno ocupe un lugar establecido, tal que se peuda distiguir, el primero, segundo, tercero y así sucesicivamente; acorde a una ley de fromacion o fórmula de recurencia

DEFINICIÓN DE MANERA MÁS FORMA

Una sucesión de números reales es una funcion a_n definida en el conjunto de losnúmeros $IN = \{1,2,3, \dots\}$ naturales y que va tomando valores en el conjunto IR de los numero reales . Un valor a_n será llamado término enésimo o término general de la sucesión

SUCESIONES NÚMERICAS



EJEMPLO

Considere un sucesión cuyo término general es

$$a_n = 5n + 1$$

Encuentre el valor de

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_{15}$$

SOLUCIÓN

$$a_1 = 5 \cdot 1 + 1 = 6$$

$$a_2 = 5 \cdot 2 + 1 = 11$$

$$a_3 = 5 \cdot 3 + 1 = 16$$

$$a_4 = 5 \cdot 4 + 1 = 21$$

$$a_{15} = 5 \cdot 15 + 1 = 76$$

$$\begin{array}{r} {}^{2} \\ 15 \\ \cdot \; 5 \\ \hline 75 \end{array}$$

SUCESIONES NUMÉRICAS

En muchas ocasiones no conocemos el térmio general de una secesión, sólo sabesmo sus primeros términos. Entonces para saber el comportamiento de la sucesión se debe estudiar sus primeros elementos y con ello se puede determinar cuales son sus siguientes términos.

EJEMPLO DE UNA SUCESIÓN NUMÉRICA

$+3 \quad +3 \quad +3$

$a_1 = 1$

$a_2 = 4$

$a_n = 3 \cdot n - 2$

En la sucesión: 1,4,7,10,13,16,... podemos intuir que el número siguiente es sumar 3 al último término conocido, así es como se va formando esta sucesión. Esto es útil, sin embargo si la pregunta es: ¿Cuál es el término númerico 100? este método no es efeiciente.

Para estos casos lo más recomendable es encontrar una fórmula para el término geenral de la sucesión. En este caso note que el término general es:

$$a_n = 3 \cdot n - 2$$

$$a_n = 3n-2$$

$$a_{100} = 3 \cdot 100 - 2 = 298$$

Con "n" número natural {1, 2, 3,4,...}

SUCESIONES NUMÉRICAS DE PRIMER ORDEN

Note que uen la sucesión anterior la diferencia un término a otro es de 3 siempre. A este tipo de sucesioes se les llama suceciones de primer orden y siempre su término general, es así:

la diferencia entre mn y a_n para los conocidos: $b = a_n - mn$

$$a_n = \boxed{m}n+\boxed{b}$$

es el número que se va sumando

Es decir, es una función linelal donde

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2}$$

$$b = y_1 - mx_1$$

muy formal

puede ser confuso

EJEMPLO

Deacuerdo con la sigueintes secuencia: $\boxed{5}$, 11, 17, 23, 29...

El número correspondiente a la posición 47 corresponde

~~A)~~ 281
B) 282
C) 283
D) 284
E) 285

$+6 \quad +6 \quad +6 \quad +6$

$6 \cdot 1 = \boxed{6}$

$a_1 - 6 \cdot 1 = 5 - 6 = -1$

$6 \cdot 2 = 12 \quad a_2 = 11 \quad 11 - 12 = -1$

$a_n = 6n - 1$

$a_{47} = 6 \cdot 47 - 1 = 282 - 1 = 281$

$$\begin{array}{r} {}^{4}\\ 47 \\ 6 \\ \hline 282 \end{array}$$

SUCESIONES NUMÉRICAS DE SEGUNDO ORDEN

Por ejemplo, la sucesión 0, 1, 3, 6, 10, 15,... no es de primer orden pues la diferencia entre dos términos consecutivos no es constante. Las diferencias se muestran a continuación

0, 1, 3, 6, 10, 15,...

1, 2, 3, 4, 5...

1, 1, 1, 1...

Pero note que las diferencias forman una sucesión de primer orden, cuando una sucesión se comporta de esta manera se llama secesión de segundo orden.

En general, si una sucesión es de segundo orden su término general es de la forma

$$a_n = a(n-1)^2 + b(n-1) + c$$

$a,\ 0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \ldots$

$m = 1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5$

$+1 = r$

¿término 20?

$$a = \frac{r}{2}$$

$$b = m - \frac{r}{2}$$

$1 - \frac{1}{2}$

$$c = a_1$$

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots$

m

r

$$a_n = \frac{1}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{2}(n-1) + 0$$

$$a_{20} = \frac{1}{2}\cdot(20-1)^2 + \frac{1}{2}(20-1) = \frac{1}{2}\cdot 19^2 + \frac{1}{2}\cdot 19 = \frac{1}{2}\cdot 361 + \frac{1}{2}\cdot 19 = \frac{1}{2}\cdot 380 = 190$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times\ 19 \\ \hline 171 \\ 19 \\ \hline 361 \end{array}$$

EJEMPLO

De acuerdo con la siguiente secuencia

0, 2, 6, 12, 20,...

El número correspondiente a la posición 20 corresponde

$a_1 = 0,\ 2,\ 6,\ 12,\ 20,\ \ldots 30$

$m = 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10$

$r = 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2$

A) 378

B) 379

C) 380

D) 381

E) 382

$$a_n = \underbrace{1}_{\frac{r}{2}}\cdot(n-1)^2 + \underbrace{1}_{m-\frac{r}{2}}\cdot(n-1) + \underbrace{0}_{a_1}$$

$$= (n-1)^2 + (n-1)$$

$$a_{20} = (20-1)^2 + (20-1) = 19^2 + 19 = 361 + 19 = 380$$

OTROS TIPOS DE SUCESIONES NUMÉRICAS

Existen una gran variedad de sucesioenes numéricas que "esconden" fórmulas a veces complejas, para trabajar con este tipo de sucesiones lo recomendabe es analizar su patrón para podes descubrir sus términos por ejemplo analice el comportamiento y escbriba lso siguientes 5 términos de las sucesiones

- 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4,... 5, 5, 6, 6, 7, 7

- 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... $\underset{8+13}{21}$, $\overset{13+21}{34}$ Sucesión de Fibonacci

EJEMPLO

De acuerdo con la siguiente secuencia

1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4,...

El número correspondiente a la posición 109 coresponde

A) 54

~~B)~~ 55

C) 56

D) 108

E) 109

$a_{110} = 110 \div 2 = 55$

$a_{109} = 55$

EJEMPLO

Una bacteria, a la hora de ser introducia en un estanque, engendra otra bacteria y así cada hora mientras que esté viva. Cada bacteria, a la hora de ser engendada, comienza el mismo ciclo de la bacteria madre. De esta manera, si ninguna bacteria ha muerto, ¿cuántas bacterias habrá a las 13 horas de haberse introducido la primera bacteria al estanque?

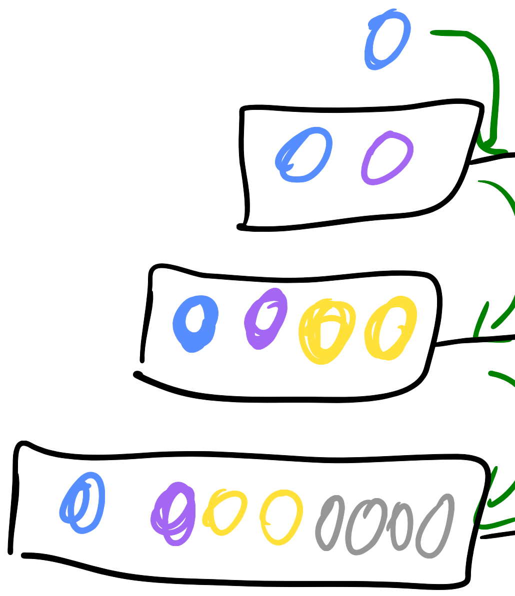
~~a)~~ 2^{13}

b) $2 \cdot 13$

c) $2 \cdot 13 + 1$

d) $2^{13} + 1$

e) $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{13}$



1 h $\rightarrow 2$

2 h $\rightarrow 4 = 2 \cdot 2 = 2^2$

3 h $\rightarrow 8 = 4 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$

4 h $\rightarrow 16 = 8 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$

$\vdots$

13 h $\rightarrow 2^{13}$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PROBLEMA 1

Considera las sigueintes sucesiones numéricas

- 4, 9, 14, 19,...
- 2, 9, 16, 23,...
- 5, 14, 23, 32,...

Se puede asegurar con certeza que el número que ocupa el sexto lugar en cda una de ellas respectivamente es

A) 24, 30, 41

B) 29, 37, 41

C) 24, 30, 50

D) 29, 37, 50

PROBLEMA 2

Federico reparte a sus nietos caramelos del modo siguiente:
a Paula 2; Andrea 7; Sebastián 12; Andrés 17; Anita 22, así sucesivamente. ¿Cuántos caramelos recibirá el el nieto número 24?

$$2 \xrightarrow{+5} 7 \xrightarrow{+5} 12 \xrightarrow{+5} 17 \xrightarrow{+5} 22$$

$a_1 = 2$

$5 \cdot 1 = 5$ $\quad -3$

A) 123

B) 120

C) 119

D) 121

~~E)~~ 117

$$a_n = 5n - 3$$

$$a_{24} = 5 \cdot 24 - 3 = 120 - 3 = 117$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 5 \\ \hline 120 \end{array}$$

PROBLEMA 3

Giovanna se propone leer una novela de la siguiente manera: la primera semana 3 páginas, la segunda semana 8 páginas, tercer semana 15 páginas, la cuarta 24 y así sucesivamente. ¿Cuántas páginas leyó la semana 9?

A) 98

~~B)~~ 99

C) 100

D) 101

E) 102

1º, 2º, 3º, 4º, 5º, 6º, 7º, 8º, 9º

$3, 8, 15, 24, \boxed{35}, \boxed{48}, \boxed{63}, \boxed{80}, \boxed{99}$

$+5 \quad +7 \quad +9 \quad +11 \quad +13 \quad +15 \quad +17 \quad +19$

$48 + 15$

También se puede resolver usando la fórmula que vimos, pero vea que como nos piden el noveno término, podría ser más rápido hacerlos todos.
Inténtelo con la fórmula vista.

PROBLEMA 4

Dada la siguiente sucesión:

$R_1 = 1 \cdot 2 + 3$

$R_2 = 2 + \underbrace{4}_{2\cdot 2} + 1$

$R_3 = 3 \cdot 4 + 3$

$R_4 = 4 + \underbrace{16}_{4\cdot 4} + 1$

$R_5 = 5 \cdot 6 + 3$

$R_6 = 6 + \underbrace{36}_{6\cdot 6} + 1$

Hallar el valor de $R_{12} + R_{15} = 157 + 243$

A) 421

B) 425

~~C)~~ 400

D) 440

E) 398

$R_{12} = \underline{12} + \underline{12 \cdot 12} + \underline{1} = 12 + 144 + 1 = 157$

$R_{15} = \underline{15} \cdot \underline{16} + \underline{3} = 240 + 3 = 243$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \cdot\ 16 \\ \hline 90 \\ +\ 15 \\ \hline 240 \end{array}$$

Calcular el número que continuá en la siguiente sucesión

PROBLEMA 5

$a_1 = 3$

$a_2 = 7 = 3 + 2^2$

$a_3 = 16 = 7 + 3^2$

$a_4 = 65 = 16 + 7^2$

El término a_5 corresponde a

A) 56

B) 65

C) 115

D) 231

E) 321

PROBLEMA 6

Considere la siguiente secuencia numérica:

$$u_2 = \left(\frac{2+1}{2}\right)$$

$$u_3 = \left(\frac{2+1}{2}\right)\left(\frac{3+1}{3}\right)$$

$$u_4 = \left(\frac{2+1}{2}\right)\left(\frac{3+1}{3}\right)\left(\frac{4+1}{4}\right)$$

$$u_n = \left(\frac{2+1}{2}\right)\left(\frac{3+1}{3}\right)\left(\frac{4+1}{4}\right)\dots\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Con base en la secuencia anterior, el valor de u_{100} equivale a

A) 1^{100}

B) 2^{100}

C) $\frac{100}{2}$

D) $\frac{101}{2}$

PROBLEMAS EXTRAS

PROBLEMA 7

Analice las siguientes igualdades y descubra la ley que se da en ellas:

- $2^2 - 1^2 = 2(1) + 1$
- $3^2 - 2^2 = 2(2) + 1$
- $4^2 - 3^2 = 2(3) + 1$
- $5^2 - 4^2 = 2(4) + 1$

Entonces, de acuerdo con la ley, es cierto que $100^2 - 99^2$ es igual a

A) $2(98) + 1$

B) $2(99) + 1$

C) $2(99)^2 + 1$

D) $2(100) + 1$

E) $2(100)^2 + 1$

PROBLEMA 8

De acuerdo con la siguiente secuencia

0, 2, 6, 12, 20,...

El número correspondiente en la posición 10 es

A) 40

B) 46

C) 90

D) 100

E) 102

PROBLEMA 9

El término que completa la sucesión

$$\frac{1}{n^2+1}, \frac{3}{n^4+2}, \frac{4}{n^6+3}, \_\_\_\_\_\_ es.$$

$$\frac{\boxed{}}{n^{\boxed{8}}+\boxed{4}}$$

A) $\frac{7}{n^8+3}$

B) $\frac{6}{n^8+3}$

C) $\frac{7}{n^8+4}$ ⟵ podría ser esta si se considera que cada término del numerador se obtiene sumando los dos anteriores

D) $\frac{6}{n^8+4}$ ⟵ podría ser esta si se considera que en el numerador los términos se obtienen $+1, +2, +1, +2, +1, +2, +1, +2$

PROBLEMA 10

Se define la operación $\odot$ de manera que

$2 \odot 1 = 4$

$2 \odot 2 = 12$

$2 \odot 3 = 24$

$2 \odot 4 = 40$

El resultado de realizar $2 \odot 8$ es

A) 50

B) 128

C) 144

D) 262

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EMat Escuela de Matemática

Curso de preparación en la componente matemática para la Prueba de Aptitud Académica de las universidades publicas

ESPACIO DE CONSULTAS

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EMat Escuela de Matemática

PROYECTO COMUNIDADES DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO

SESIÓN 7

Curso de preparación en la componente matemática para la Prueba de Aptitud Académica de las Universidades Públicas

LÓGICA PROPOSICIONAL

LÓGICA MATEMÁTICA

Es un método de razonamiento que incluye contenidos lógicos que se pueden estudiar y modelar matemáticamente.

LÓGICA PROPOSICIONAL

Es un sistema lógico encargado de estudiar el razonamiento con base en las proposiciones. Este sistema está constituido por el conjunto de símbolos y reglas para el conjunto de proposiciones que solo admiten dos valores de verdad V o F.

Indecible:

El caballo del rey de Francia es blanco.

ENUNCIADOS O PROPOSICIONES

Una proposición es una oración que puede ser verdadera o falsa pero nunca ambas. Por ejemplo:

- Ayer llovió. V
- Costa Rica tiene 7 provincias. V
- Los triángulos tienen 6 lados. F

CONECTORES LÓGICOS

Permiten unir dos proposiciones simples para convertirlas en una compuesta. Por ejemplo:

- Negación (no).
- Conjunción (y).
- Disyunción (o).
- Implicación (entonces).
- Contrapositiva.

P	no P
V	F
F	V

P	Q	P y Q
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

P	Q	P ó Q
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

antecedente ← $P \rightarrow Q$ → consecuente

Si está lloviendo, entonces necesito una sombrilla.

Está lloviendo o no está lloviendo
necesito una sombrilla o no está lloviendo

$\underbrace{Q}_{\text{consecuente}}$ ó $\underbrace{\text{no } P}_{\text{no antecedente}}$

$\cancel{Q \rightarrow P}$

Si necesito una sombrilla, entonces ¿¿¿???

Si no necesito una sombrilla, entonces no está lloviendo.

$\underbrace{\text{no } Q}_{\text{no consecuente}} \longrightarrow \underbrace{\text{no } P}_{\text{no antecedente}}$ ← contrapositiva

no necesito una sombrilla → no está llov.

EJEMPLO

- Costa Rica tiene 7 provincias y 80 cantones. F
- Dos es un número par o 3 es un número par. V
- Un pentágono no es un paralelogramo. V
- Si descanso entonces tengo energía. V
- No tengo energía, entonces no descansé. V

V F V F

Si no como verduras, entonces me enfermo.

Si no me enfermo, entonces comí verduras.

no no

si → condicional

sí → afirmación

EJEMPLO

Implicaciones.

lo que pasa primero

Lea las siguientes proposiciones y en cada una identifique el antecedente y el consecuente.

si...

lo que pasa después

entonces...

- Si Juana es más joven, entonces Antonia es más vieja.
- Si Luis es el cuarto, entonces Carlos es el quinto.
- Si usted pierde el autobús, entonces tendrá que caminar.
- Jaime es tesorero si Pedro es presidente.
- Si María está equivocada entonces Rafel tiene la razón.

EJEMPLO

¿Qué conclusión se puede sacar de los siguientes enunciados?

- Si usted está en Costa Rica, entonces su reloj señala la misma hora que en Guatemala. Usted está en Costa Rica. → mi reloj marca la misma hora que en Guatemala
- Si son las cinco , entonces la oficina está cerrada. La oficina está abierta. → no son las cinco
- Si vivo en la capital de Costa Rica entonces no vivo en ninguna de las otras 6 provincias. Vivo en Guanacaste. → no vivo en la capital de Costa Rica

Resolución de problemas

Problema #1

Lorena tiene 4 hijos: José, Sofía, Pablo y Elena. Si se sabe que:

- José tiene 5 años más que Sofía.
- Elena tiene 4 años menos que Pablo.
- Entre Sofía y Elena hay 4 años de diferencia.
- Todos tienen edades diferentes.

entonces se puede afirma con certeza que:

A) José es el mayor

~~B~~) Pablo es el mayor

C) Elena es mayor que José

D) José es mayor que Pablo

E) Sofía es mayor que Elena

Problema #2

Considere las siguientes proposiciones

- Si M es campeón, entonces P gana o Q gana.
- Si P gana, entonces M no es campeón.
- Si Q gana, entonces L no gana.
- De hecho M es campeón.

tiene que ser falso

P gana → $\boxed{\text{M no campeón}}$ F

$\boxed{\text{M campeón}}$ V

Q gana → L no gana

tiene que ser verdadera

tiene que ser verdadera

De lo anterior se refiere que:

A) P gana

B) L gana

C) Q gana y L gana

~~D~~) L no gana

E) M pierde y P gana

Problema #3

Alguien ha cometido un robo. Se interroga a 5 personas que declaran lo siguiente:

- Alberto: Yo no fui.
- Carlos: Fue Felipe.
- Felipe: Juan es inocente.
- Juan: Fue Carlos.
- David: Yo no fui.

Si se sabe que solo el que robó miente, entonces, ¿Quién es el ladrón?

A) Felipe

B) Alberto

C) Juan

D) David

~~E)~~ Carlos

Escenario #1: Alberto miente
Alberto robó
Felipe robó

Escenario #2: Carlos miente
no fue Felipe
no fue Alberto
no fue Juan
Carlos robó
no fue David

Escenario #3: Felipe miente
Juan robó
contradicción

Escenario #4: Juan miente
no fue Carlos
no fue Alberto
Felipe robó
no fue Juan
contradicción

Escenario #5: David miente
no fue Alberto
Felipe robó
contradicción

Problema #4

En una librería hay dos lapiceros. La caja G solo tiene lapcieros de marca G y la caja S solo tiene lapiceros de la marca S. Cierto día se sacan 15 lapiceros de la caja G y se depositan en la caja S, luego se revuelven todos los lapiceros que están en la caja S y se sacan de esta 9 lapiceros que se depositan en la caja G.

Entonces, sucedió con certeza, que en la caja

A) S no quedaron lapiceros de la marca G
B) G no quedaron lapiceros de la marca G
C) S quedó, al menos, un lapicero de marca S
D) S quedó almenos, un lapicero de la marca G
E) G quedó, almenos, un lapicero de la marca S

Problema #5

Se tienen 3 recipientes iguales. Cada recipiente tiene una cántidad de agua desconocida. Luis se da cuenta de que con el agua que hay en los tres recipientes se llena exactamente un recipiente de los utilizados.

Entonces no es posible que:

A) los tres recipientes tengan igual cantidad de agua.
B) los tres recipientes tengan diferentes cantidades de agua.
C) un recipiente tenga mas agua que la obtenida al juntar el agua de los dos recipientes restantes.
D) un recipiente contenga la octava parte del total del agua, otro, la cuarta parte, y otro, la mitad.
E) un recipiente contenga la sexta parte del total del agua, otro la tercera parte y otro la mitad

Problema #6

Considere las siguientes afirmaciones:

- Afirmación 1: Todo estudiante que cursa Matemática estudia alguna ingeniería.
- Afirmación 2: Si algún estudiante no cursa matemática, entonces no cursa Física.
- Afirmación 3: Ricardo cursó Física. → cursa matemática → estudia ingeniería
  no no

se puede concluir que Ricardo.

A) cursa Cálculo.

B) no cursa matemática.

~~C)~~ es estudiante de ingeniería.

D) no es estudiante de ingenría.

PROBLEMAS EXTRAS

Problema #7

Una empresa distribuye sus 84 empleados en varios grupos de 7 personas. Si en todos los grupos la cantidad de mujeres es mayor que la de los hombres, no es posible que en la empresa haya.

A) 48 mujeres
B) 24 hombres
C) 36 hombres
D) más de 60 mujeres
E) más de 40 hombres

Problema #8

Una mesa cuadrada tiene una silla de cada lado, de las cuales dos las ocupan mujeres y una la ocupa un hombre, entonces, se puede afirmar, con certeza, que:

A) las mujeres están a la par
B) las mujeres están de frente
C) el hombre está frente a una mujer
D) el hombre está junto a la silla vacía
E) una mujer está junto a la siilla vacía

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EMat Escuela de Matemática

PROYECTO COMUNIDADES DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO

SESIÓN 7

Curso de preparación en la componente matemática para la Prueba de Aptitud Académica de las Universidades Públicas