

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
SISTEMA DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**COMPARACIÓN DE TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE VARIANZA
EN DATOS FUNCIONALES PARA MEDICIONES
ESPECTROFOTOMÉTRICAS EXPERIMENTALES**

Tesis sometida a la consideración de la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Estadística para optar al grado y título de Maestría Académica en Estadística

ALEJANDRO ALONSO SALAS VARGAS

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio, Costa Rica

2020

Dedicatoria

A Dios por haberme dado la vida y permitirme haber llegado hasta este momento tan importante de mi formación profesional. A mi esposa Rosita Salazar Barquero por ser mi ayuda idónea, apoyo incondicional en todo este proceso y por sus valiosas observaciones a esta obra. A mis padres, Juan Salas García y Leticia Vargas Mora, por el gran ejemplo de lucha y perseverancia que me inculcaron desde niño.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por darme salud y la fuerza para culminar con éxito este proceso. A la directora de tesis, Dra. Marcela Alfaro Córdoba, por su valiosa dedicación, aportes y paciencia; a los profesores quienes fueron asesores en este trabajo: Dra. Marcela Hernández Jiménez y el Dr. Ricardo Alvarado Barrantes, por brindar a esta obra una lectura detallada y enriquecerla con sus valiosas sugerencias. A mi esposa Rosita Salazar Barquero por sus observaciones, sugerencias y por el apoyo incondicional aun en las vicisitudes.


“Esta tesis fue aceptada por la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Estadística de la Universidad de Costa Rica, como requisito parcial para optar al grado y título de Maestría Académica en Estadística”

GUANER DAVID ROJAS ROJAS (FIRMA)  Firmado digitalmente por GUANER DAVID ROJAS ROJAS (FIRMA)
Fecha: 2021.01.21 16:16:47 -06'00'

Dr. Guaner Rojas Rojas
Representante del Decano
Sistema de Estudios de Posgrado

Marcela Alfaro Córdoba  Digitally signed by Marcela Alfaro Córdoba
Date: 2021.01.05 12:07:14 -06'00'


Dra. Marcela Alfaro Córdoba
Directora de tesis

MARCELA HERNANDEZ JIMENEZ (FIRMA)  Firmado digitalmente por MARCELA HERNANDEZ JIMENEZ (FIRMA)
Fecha: 2021.01.05 08:29:10 -06'00'


Dra. Marcela Hernández Jiménez
Asesora

Ricardo Alvarado Barrantes  Firmado digitalmente por Ricardo Alvarado Barrantes
Fecha: 2021.01.18 10:44:00 -06'00'

Dr. Ricardo Alvarado Barrantes
Asesor

JOHNNY ANGEL MADRIGAL PANA (FIRMA)  Digitally signed by JOHNNY ANGEL MADRIGAL PANA (FIRMA)
Date: 2021.01.06 15:19:02 -06'00'

M.Sc. Johnny Madrigal Pana
Director
Programa de Posgrado en Estadística

ALEJANDRO ALONSO SALAS VARGAS (FIRMA)  Firmado digitalmente por ALEJANDRO ALONSO SALAS VARGAS (FIRMA)
Fecha: 2021.01.06 12:33:01 -06'00'

Alejandro Alonso Salas Vargas
Sustentante

Tabla de contenido

Dedicatoria	II
Agradecimientos	III
Aprobación	IV
Resumen	IX
Lista de cuadros	XIII
Lista de tablas	XV
Lista de figuras	XVI
Lista de gráficas	XVII
Lista de abreviaturas y símbolos	XX
1. Introducción	1
1.1. Justificación	3
1.2. Problema de investigación	4
1.3. Objetivo general	5
1.4. Objetivos específicos	5

2. Marco teórico	6
2.1. Análisis univariado de la varianza	6
2.1.1. Supuestos del ANOVA	9
2.2. Análisis multivariante de la varianza	9
2.2.1. Supuestos del MANOVA	12
2.3. Análisis funcional de la varianza	13
2.3.1. Supuestos del FANOVA	15
2.4. Pruebas FANOVA de una vía para datos funcionales	16
2.4.1. Prueba basada en la norma L^2	17
2.4.2. Prueba F puntual globalizada	18
2.4.3. Prueba tipo F propuesta por Zhang	19
2.5. Pruebas FANOVA de dos vías para datos funcionales	20
2.5.1. Prueba basada en la norma L^2	22
2.5.2. Prueba tipo F propuesta por Zhang	23
2.5.3. La prueba F puntual globalizada	24
2.6. Medición del color	25
2.6.1. Atributos del color	26
2.6.2. Sistemas CIExyz y CIELab	28
3. Marco Metodológico	33
3.1. Diseño de la simulación	33
3.1.1. El modelo de simulación	35
3.1.2. Los escenarios para la simulación	36
3.1.3. Ensayos para el modelo ANOVA de una vía	37
3.1.4. Ensayos para el modelo ANOVA de dos vías con interacción	39
3.1.5. Generación de los conjuntos de datos	40
3.1.5.1. En el análisis de la varianza de una vía	40
3.1.5.2. En el análisis de la varianza de dos vías con interacción	41

3.2. Caso de aplicación: Mediciones espectrofotométricas en escarabajos del género <i>Chrysina</i>	42
3.2.1. Fuente de datos	42
3.2.2. Definición de las variables	43
3.2.3. Evidencia de la calidad de las mediciones	44
3.3. Software estadístico y paquetes a emplear	45
4. Resultados	47
4.1. ANOVA de una vía	48
4.1.1. Potencia y tasas de error empírico tipo I en la descomposición CIE _{xyz}	48
4.1.2. Potencia y tasas de error empírico tipo I en la descomposición CIE _{lab}	54
4.2. Diferencia mínima por detectar en el ANOVA de una vía	59
4.3. ANOVA funcional de dos vías con interacción	70
5. Resultados del caso de aplicación	74
5.1. Mediciones espectrofotométricas en escarabajos del género <i>Chrysina</i>	74
5.1.1. Análisis exploratorio	75
5.1.2. Análisis funcional de la varianza	79
6. Conclusiones	82
6.1. ANOVA de una vía	82
6.2. ANOVA de dos vías con interacción	83
6.3. Recomendaciones prácticas	84
6.4. Recomendación para futuras investigaciones	85
Bibliografía	86
Anexos	91

Tabla de contenido

A. Análisis de varianza de una vía	91
B. Diferencia mínima por detectar en un análisis de varianza de una vía	99
C. Análisis de varianza de dos vías con interacción	103

Resumen

En la siguiente investigación se evalúa el desempeño de diferentes pruebas de análisis de la varianza para datos funcionales, en aquellos casos, en los que la variable de respuesta es toda una curva o cuando, por medio de transformaciones, se traslade esta variable, a un ámbito multivariado o univariado. Para este fin, se realiza un estudio de simulación en el cual se obtenga evidencia empírica de la estabilidad de estas pruebas, en cuanto, a las tasas de error tipo I, la potencia y la diferencia mínima por detectar, así como, la robustez ante el incumplimiento del supuesto de varianza constante en los grupos de tratamientos.

El estudio de simulación consta de once ensayos, los cuales están conformados por varios escenarios, que se obtienen de variar el tamaño de muestra, la desviación estándar de cada grupo (con un cierto grado de incumplimiento del supuesto de varianza constante), los valores verdaderos del error tipo I, así como, la diferencia mínima detectable. El modelo empleado es el clásico ANOVA orientado a datos funcionales, esto si se toma como variable de respuesta toda la curva o bien si se transforma la variable para emplear un ANOVA univariado o multivariado. Se realiza 1000 iteraciones para cada ensayo.

Los resultados obtenidos en la simulación mostraron que, en general, las pruebas de análisis funcional de la varianza L₂N, FN y GPF proporcionan mejores potencias, tanto para el caso de una vía como el de dos vías con interacción. Por lo que, en

términos de potencia, las tres pruebas de análisis funcional de la varianza, (FANOVA por sus siglas del inglés), tienen una mayor capacidad para detectar diferencias entre las curvas promedio.

Estas pruebas de FANOVA son robustas, ante el incumplimiento del supuesto de varianza constante en los grupos de tratamiento, además de ser estables respecto de sus tasas de error tipo I.

Abstract

The following research evaluates the performance of analysis of variance tests for functional data, in cases where the response variable is a whole curve or when, through transformations, this variable is transferred to a multivariate or univariate scope. For this purpose, a simulation study is carried out in which empirical evidence of the stability of these tests is obtained, in terms of type I error rates, the power, and the minimum difference to be detected, as well as the robustness to failure to meet the assumption of constant variance in the treatment groups.

The simulation study consists of eleven trials, which consist of several scenarios that are obtained from varying the sample size, the standard deviation of each group (with a certain degree of non-compliance with the assumption of constant variance), the true values of the type I error, as well as the minimum detectable difference. The model used is the classic functional ANOVA oriented to functional data, whether the curve is taken as the response variable or if the variable is transformed to use a univariate or multivariate ANOVA. 1000 iterations are performed for each trial.

The results obtained in the simulation showed that, in general, the L₂N, FN and GPF functional analysis of variance tests provide better powers, both for the case of one way and the two way with interaction. Therefore, in terms of power, the three functional variance analysis tests (FANOVA) have a greater ability to detect differences between average curves.

These FANOVA tests are robust, in the event of non-compliance with the assumption of constant variance in treatment groups, as well as being stable with respect to their type I error rates.

Lista de cuadros

4.1. Potencia empírica empleando la descomposición CIExyz, para cada tamaño de muestra y significancia estadística.	50
4.2. Tasas de error tipo I empíricas empleando la descomposición CIExyz, para cada tamaño de muestra y significancia estadística.	53
4.3. Potencia empírica empleando la descomposición CIElab, para cada tamaño de muestra y significancia estadística.	55
4.4. Tasas de error tipo I empíricas empleando la descomposición CIElab, para cada tamaño de muestra y significancia estadística.	57
4.5. Potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza para el ensayo E, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar.	61
4.6. Potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza para el ensayo F, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar.	64
4.7. Potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza para el ensayo G, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar.	67
4.8. Potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza para el ensayo H, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar.	69
4.9. Potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza de dos vías con interacción en cada ensayo, según nivel de significancia.	71
4.10. Tasas de error tipo I de las pruebas de análisis de varianza de dos vías con interacción en cada ensayo, según nivel de significancia.	73

5.1. Análisis funcional de la varianza de una vía y dos vías con interacción con la variable reflectancia como respuesta funcional.	80
A.1. Variabilidad de la potencia empírica empleando la descomposición CIExyz, para cada tamaño de muestra y significancia estadística.	92
A.2. Variabilidad de las tasas de error tipo I empíricas empleando la descomposición CIExyz, para cada tamaño de muestra y significancia estadística.	94
A.3. Potencia empírica empleando la descomposición CIElab, para cada tamaño de muestra y significancia estadística.	96
A.4. Variabilidad de las tasas de error tipo I empíricas empleando la descomposición CIElab, para cada tamaño de muestra y significancia estadística.	98
C.1. Variabilidad de la potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza de dos vías con interacción en cada ensayo, según nivel de significancia.	104
C.2. Variabilidad de las tasas de error tipo I de las pruebas de análisis de varianza de dos vías con interacción en cada ensayo, según nivel de significancia.	106

Lista de tablas

2.1.	Resumen del análisis de la varianza	8
2.2.	Resumen del análisis multivariado de la varianza	12
3.1.	Ensayos para el ANOVA de una vía	38
3.2.	Ensayos para el ANOVA de una vía que incluye la diferencia mínima δ por detectar	38
3.3.	Ensayos para el ANOVA de dos vías con interacción	39
3.4.	Variables a en el caso de aplicación	43

Lista de figuras

2.1.	Diagrama de cromaticidad CIE x, y	27
2.2.	Curvas espectrales para tres especies de escarabajo del género <i>Chrysina</i>	29
2.3.	Cálculo de los valores triestímulos CIExyz.	30
2.4.	Descomposición de las curvas de reflectancia espectral en componentes CIElab.	31
2.5.	Diagrama de cromaticidad CIE x, y	32
3.1.	Técnicas de análisis de la varianza empleadas en el estudio de simulación según la forma de descomponer la variable respuesta funcional.	34
3.2.	Micro-Espectrofotómetro empleado en las mediciones.	45

Lista de gráficas

4.1. Potencia empírica de las pruebas en cada ensayo y nivel de significancia para la descomposición CIExyz.	49
4.2. Tasas de error tipo I empírico de las pruebas en cada ensayo y nivel de significancia para la descomposición CIExyz	51
4.3. Potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza en cada ensayo y nivel de significancia para la descomposición en valores CIELab.	56
4.4. Tasas de error tipo I empírico de las pruebas de análisis de varianza en cada ensayo y nivel de significancia para la descomposición en valores CIELab	58
4.5. Potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza para el ensayo E, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar	62
4.6. Potencia empírica de las pruebas para el ensayo F, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar	63
4.7. Potencia empírica de las pruebas para el ensayo G, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar	66
4.8. Potencia empírica de las pruebas para el ensayo H, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar	68
4.9. Potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza de dos vías con interacción en cada ensayo, según nivel de significancia	70
4.10. Tasas de error tipo I de las pruebas de análisis de varianza de dos vías con interacción en cada ensayo, según nivel de significancia	72

5.1. Curvas de reflectancia espectral agrupadas según la especie, la apertura, el objetivo y la posición en el élitro.	76
5.2. Comparación de gráficas de violines y de cajas para las curvas medianas en cada apertura y objetivo, según la especie.	77
5.3. Comparación de gráficas de violines y de cajas para las curvas medianas en cada apertura y objetivo, según la posición en el élitro.	78
A.1. Variabilidad de la potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza en cada ensayo y nivel de significancia para la descomposición de la variable respuesta en valores CIExyz	91
A.2. Variabilidad de las tasas de error empírico tipo I de las pruebas de análisis de varianza en cada ensayo y nivel de significancia para la descomposición de la variable respuesta en valores CIExyz	93
A.3. Variabilidad de la potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza en cada ensayo y nivel de significancia para la descomposición de la variable respuesta en valores CIElab	95
A.4. Variabilidad de las tasas de error empírico tipo I de las pruebas de análisis de varianza en cada ensayo y nivel de significancia para la descomposición de la variable respuesta en valores CIElab	97
B.1. Variabilidad de la potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza para el ensayo E, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar	99
B.2. Variabilidad de la potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza para el ensayo F, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar	100
B.3. Variabilidad de la potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza para el ensayo G, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar	101

B.4. Variabilidad de la potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza para el ensayo H, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar	102
C.1. Variabilidad de la potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza de dos vías con interacción en cada ensayo, según nivel de significancia	103
C.2. Variabilidad de las tasas de error tipo I de las pruebas de análisis de varianza de dos vías con interacción en cada ensayo, según nivel de significancia	105

Lista de abreviaturas y símbolos

α	Significancia estadística.
ANOVA	Análisis de la varianza (siglas en inglés)
$\hat{}$	Estimado de valor poblacional.
CICIMA	Centro de Investigación en Ciencia e Ingeniería de materiales.
CIE	Comisión Internacional de la Iluminación (siglas en inglés)
F	Distribución F de Fisher-Snedecor.
FANOVA	Análisis funcional de la varianza (siglas en inglés)
FDA	Análisis de datos funcionales (siglas en inglés)
FN	Prueba tipo F con estimación ingenua.
gl	Grados de libertad.
GPF	Prueba F puntual globalizada
λ	Longitud de onda.
L^2	Norma Euclídea.
L_2N	Prueba basada en la norma L^2 con estimación ingenua.
MANOVA	Análisis multivariante de la varianza (siglas del inglés)
mín	Valor mínimo.
nm	Nanómetro.
\otimes	Producto Kronecker.
SP	Proceso estocástico (siglas del inglés)
tr	Traza de una matriz.



Autorización para digitalización y comunicación pública de Trabajos Finales de Graduación del Sistema de Estudios de Posgrado en el Repositorio Institucional de la Universidad de Costa Rica.

Yo, Alejandro Alonso Salas Vargas, con cédula de identidad 7 0154 0030, en mi condición de autor del TFG titulado Comparación de técnicas de análisis de varianza en datos funcionales para mediciones espectrofotométricas experimentales.

Autorizo a la Universidad de Costa Rica para digitalizar y hacer divulgación pública de forma gratuita de dicho TFG a través del Repositorio Institucional u otro medio electrónico, para ser puesto a disposición del público según lo que establezca el Sistema de Estudios de Posgrado. SI NO *

*En caso de la negativa favor indicar el tiempo de restricción: _____ año (s).

Este Trabajo Final de Graduación será publicado en formato PDF, o en el formato que en el momento se establezca, de tal forma que el acceso al mismo sea libre, con el fin de permitir la consulta e impresión, pero no su modificación.

Manifiesto que mi Trabajo Final de Graduación fue debidamente subido al sistema digital Kerwá y su contenido corresponde al documento original que sirvió para la obtención de mi título, y que su información no infringe ni violenta ningún derecho a terceros. El TFG además cuenta con el visto bueno de mi Director (a) de Tesis o Tutor (a) y cumplió con lo establecido en la revisión del Formato por parte del Sistema de Estudios de Posgrado.

INFORMACIÓN DEL ESTUDIANTE:

Nombre Completo: Alejandro Alonso Salas Vargas

Número de Carné: B58476 Número de cédula: 7 0154 0030

Correo Electrónico: alematetec@hotmail.com

Fecha: 20/11/2020 Número de teléfono: 8815-7962

Nombre del Director (a) de Tesis o Tutor (a): Marcela Alfaro Córdoba

ALEJANDRO
ALONSO SALAS
VARGAS (FIRMA)

Firmado digitalmente por
ALEJANDRO ALONSO SALAS
VARGAS (FIRMA)
Fecha: 2021.01.07 22:50:18
-06'00'

FIRMA ESTUDIANTE

Nota: El presente documento constituye una declaración jurada, cuyos alcances aseguran a la Universidad, que su contenido sea tomado como cierto. Su importancia radica en que permite abreviar procedimientos administrativos, y al mismo tiempo genera una responsabilidad legal para que quien declare contrario a la verdad de lo que manifiesta, puede como consecuencia, enfrentar un proceso penal por delito de perjurio, tipificado en el artículo 318 de nuestro Código Penal. Lo anterior implica que el estudiante se vea forzado a realizar su mayor esfuerzo para que no sólo incluya información veraz en la Licencia de Publicación, sino que también realice diligentemente la gestión de subir el documento correcto en la plataforma digital Kerwá.

1. Introducción

En la actualidad, el análisis de datos funcionales ha emergido como un área importante en la estadística y ha logrado avances significativos respecto de su base teórica. Es por esto que, en comparación con los datos tradicionales, que consisten en observaciones puntuales, los datos funcionales pueden contener información más detallada sobre el sistema subyacente que los genera, debido a que se toma en cuenta la curva y sus derivadas (Ramsay y Silverman, 2002).

En este contexto, el análisis de grandes datos que puedan verse como una realización de un proceso continuo, requieren la aplicación de nuevas técnicas estadísticas, como el análisis de datos funcionales (FDA por sus siglas en inglés), que considera los datos como funciones aleatorias en un intervalo T del espacio funcional de Hilbert L^2 (Ramsay et al., 2009; Ramsay y Silverman, 2005; J. Zhang, 2013).

Debido al desarrollo teórico que ha tenido el análisis funcional en las últimas décadas, se hace necesario realizar estudios que comparen los métodos de análisis funcional con sus equivalentes en el ámbito univariado y multivariado para brindar a la comunidad científica ventajas y desventajas del uso de una técnica u otra. En la revisión bibliográfica, específicamente, con la técnica de análisis de la varianza, se pudo observar que, actualmente, no hay estudios comparativos, que relacionen las técnicas de análisis de varianza en estudios experimentales.

El análisis funcional de la varianza es un problema fundamental en la inferencia estadística para determinar diferencias en las curvas medias o funciones promedio, al contrastar la hipótesis nula de igualdad de medias funcionales. Esto permite evaluar, en diseños experimentales funcionales con k grupos de curvas, el efecto que tiene un determinado tratamiento sobre una muestra y así inferir en una población determinada. Al contrastar la hipótesis de igualdad de curvas promedio, surge la pregunta si al descomponer las curvas, mediante alguna transformación y utilizar un análisis de varianza univariado o multivariado (ANOVA o MANOVA por sus siglas en inglés), se podría producir pérdida de potencia.

Esta investigación busca proporcionar a la comunidad científica una comparación empírica del desempeño de tres técnicas de análisis de varianza, en diferentes escenarios, para determinar en cuál de ellos se tiene un mejor desempeño cuando se presenta problemas con el supuesto de varianza constante, tamaño de muestra, diferencia mínima por detectar, así como las ventajas y desventajas de trabajar con datos funcionales. Los resultados obtenidos en este estudio se deben generalizar al caso de datos funcionales densos, es decir, en aquellos casos en los que cada función posee gran cantidad de nodos o puntos (X. Zhang, Wang et al., 2016)

A partir de los resultados generados del estudio de simulación, y como un ejercicio aplicado, se lleva a cabo el análisis de la varianza con la mejor técnica que muestre el estudio de simulación. En este caso aplicado los datos corresponden a reflectancia espectral de tres especies de escarabajos de apariencia metálica del género *Chrysina*, con el fin de proporcionar herramientas estadísticas que le permita al Centro de Investigación en Ciencia e Ingeniería de materiales (CICIMA), contextualizar las observaciones de los espectros de luz reflejada y sus propiedades ópticas, para luego aplicarlas en la elaboración de nuevos materiales y recubrimientos inspirados en la

biodiversidad costarricense, así como responder a algunas hipótesis globales de los investigadores de este centro de investigación.

Otro aporte de esta investigación al CICIMA, es brindar una técnica de análisis de la varianza más apropiada para detectar diferencias en el color cuando se emplea los sistemas colorimétricos CIExyz y CIElab, así como cuando se trabaja con la curva de reflectancia, sin realizar descomposiciones.

1.1. Justificación

Cuando se busca encontrar diferencias en las funciones promedio de k grupos de curvas se emplea un ANOVA funcional, aquí la variable de respuesta son funciones, pero en la mayoría de los estudios se descompone esta variable de respuesta con alguna transformación matemática o bien mediante componentes principales y, posteriormente, se utiliza para el análisis un ANOVA univariado, como es el caso de los trabajos de [Emengini et al. \(2013\)](#); [Ferreira et al. \(2013\)](#); [Gaikwad y Kakarwal \(2019\)](#); [Grill y Rush \(2000\)](#). En otros estudios, como por ejemplo, los realizados por [Luthria et al. \(2011\)](#) y [Zagajewski et al. \(2017\)](#) se emplea un ANOVA multivariado.

Al no haber estudios comparativos acerca de las diferentes técnicas de análisis de varianza surgen algunas interrogantes: ¿Cuál técnica de análisis de la varianza es más apropiada para encontrar diferencias en las curvas promedio?, ¿Se perderá potencia en las pruebas al realizar este tipo de transformaciones en los datos funcionales?, ¿Cuál de estas tres técnicas de análisis de la varianza tiene mayor porcentaje de equivocarse al buscar diferencias entre las curvas promedio?

Debido a esto, y para dar respuesta a las interrogantes anteriores, es pertinente

generar evidencias empíricas respecto de las ventajas y desventajas de trabajar con alguna transformación en la variable de respuesta, así como, de trabajar con toda la curva sin, realizar descomposiciones en ella.

1.2. Problema de investigación

Los datos funcionales son una muestra aleatoria de funciones independientes de valores reales correspondientes a una realización de un proceso estocástico unidimensional. Al considerar los datos como un conjunto de funciones, sus derivadas aportan información del procesos estocástico que lo genera, esto hace que los datos funcionales tengan la capacidad de obtener mayor información estadística (Ramsay y Silverman, 2002; Wang et al., 2015).

Partiendo del supuesto de que los datos funcionales brindan mayor información estadística, entonces se podría pensar que la técnica de análisis de la varianza para datos funcionales es superior a sus equivalentes multivariada y univariada. Es por esta razón, que en este estudio se quiere dar respuesta a la interrogante, ¿Cuál técnica de análisis de varianza es más robusta, estadísticamente, para distinguir diferencias entre curvas que representan datos funcionales?

Para esta investigación, el término robusto, hace referencia a la capacidad de la prueba para obtener valores de potencia altos y un bajo porcentaje de equivocación (error tipo I) en diferentes circunstancias simuladas, como: poca muestra, incumplimiento del supuesto de homocedasticidad y diferencia mínima por detectar (Ito, 1980).

1.3. Objetivo general

Comparar el desempeño de diferentes pruebas de análisis de varianza en datos funcionales, según se considere la variable de respuesta como univariada, multivariada o funcional, para proveer una guía de uso en los experimentos llevados a cabo con mediciones espectrofotométricas.

1.4. Objetivos específicos

1. Determinar similitudes teóricas entre las técnicas de análisis de varianza para respuesta funcional, multivariada y univariada mediante el uso de transformaciones para mediciones espectrofotométricas.
2. Comparar las pruebas estadísticas, según las diferentes formas que tome la variable de respuesta funcional, utilizando como medidas el error tipo I y II empíricos.
3. Analizar la estabilidad de las diferentes técnicas de análisis de varianza bajo diferentes escenarios de simulación en donde se relacione el tamaño de muestra, la varianza de los errores, la potencia de la prueba y la diferencia mínima por detectar.
4. Contrastar hipótesis globales establecidas por el Centro de Investigación en Ciencia e Ingeniería de Materiales para datos espectrofotométricos experimentales.

2. Marco teórico

En este apartado, se proporciona una breve explicación de algunos conceptos que corresponden a la base teórica en la que se fundamenta las tres técnicas de análisis de la varianza, sus supuestos fundamentales, así como la forma de descomponer la variable de respuesta funcional mediante la utilización de sistemas colorimétricos.

2.1. Análisis univariado de la varianza

El análisis de varianza (ANOVA por sus siglas en inglés) es una técnica que tiene como objetivo comparar los promedios de una variable, para varias poblaciones, a partir de muestras aleatorias. A menudo, las muestras surgen de la observación de unidades experimentales con diferentes tratamientos que se les aplica y se refiere a las poblaciones de sujetos a los cuales se les aplica. Los tamaños de muestra para los grupos son posiblemente diferentes y se supone que las muestras son todas independientes. Además, se tiene en cuenta el cumplimiento de supuestos tales como: cada población tiene la misma varianza y se distribuye normalmente ([Christensen, 2016](#)).

El modelo clásico de ANOVA es:

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

donde y_{ij} es la observación ij -ésima, μ_i es la media del nivel del factor o tratamiento

i -ésimo, ε_{ij} es un componente de error aleatorio que engloba las demás fuentes de variabilidad no explicada por los tratamientos. Otra forma de escribir el modelo de los datos es considerando el efecto de cada tratamiento:

$$\begin{aligned} y_{ij} &= \mu_i + \varepsilon_{ij} \\ y_{ij} &= \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde μ es la media global y τ_i es el efecto del i -ésimo tratamiento. Si se supone n_1, \dots, n_k , k muestras aleatorias de poblaciones independientes con medias poblacionales $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$, el análisis de varianza contrasta la hipótesis nula:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \\ H_1 &: \mu_i \neq \mu_j, \text{ para al menos un par } \mu_i, \mu_j; \end{aligned}$$

lo que es equivalente a contrastar:

$$\begin{aligned} H_0 &: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_k \\ H_1 &: \tau_i \neq 0, \text{ para al menos una } i \end{aligned}$$

En el análisis de la varianza se descompone la variabilidad total en variabilidad debida a los tratamientos y debida a los residuos, de la siguiente forma:

$$SC_{Tot} = SC_{Trat} + SC_{Res}$$

donde la **Suma de Cuadrados Total** se define como $SC_{Tot} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$, la **Suma de Cuadrados entre Tratamientos** por $SC_{Trat} = n \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})^2$ y finalmente, la **Suma de Cuadrados Residual** definida como $SC_{Res} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$, donde $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

En las expresiones anteriores, $\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n_i}$ representa el promedio de las observaciones bajo el i -ésimo tratamiento y $\bar{y}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n}$ es la media global de toda la muestra, donde n_i corresponde al tamaño del i -ésimo grupo con el mismo tratamiento.

También, se puede definir el **Cuadrado Medio de Tratamiento** de la siguiente forma: $CM_{Trat} = \frac{SC_{Trat}}{k-1}$ y el **Cuadrado Medio Residual** como $CM_{Res} = \frac{SC_{Res}}{n-k}$.

Para realizar el contraste de la hipótesis nula se utiliza el siguiente estadístico de prueba, el cual se distribuye como una F con $k-1$ y $n-k$ grados de libertad, este mediante la fórmula:

$$F_0 = \frac{SC_{Trat}/(k-1)}{SC_{Res}/(n-k)}.$$

Usualmente, los cálculos realizados en este análisis se resumen en una tabla de análisis de varianza. La forma comúnmente utilizada para esta tabla se da a continuación.

Tabla 2.1.
Resumen del análisis de la varianza.

FUENTE	GL	SC	CM	F ₀
Tratamiento	$k-1$	$SC_{Trat} = n \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})^2$	$\frac{SC_{Trat}}{k-1}$	$\frac{CM_{Trat}}{CM_{Res}}$
Residual	$n-k$	$SC_{Res} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$	$\frac{SC_{Res}}{n-k}$	
Total	$n-1$	$SC_{Tot} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$		

1/Se rechaza la hipótesis nula H_0 si se cumple que $F_0 > F_{\alpha, k-1, n-k}$, con un nivel de significancia de α ; es común encontrar en la literatura que los valores nominales empleados para α son 0.01, 0.05 y 0.1.

Fuente: Christensen (2016).

2.1.1. Supuestos del ANOVA

Se deben satisfacer algunos supuestos a la hora de contrastar la hipótesis nula, de que no hay diferencias entre las medias de los grupos, lo que es equivalente a decir que no hay un efecto entre los tratamientos. La expresión efecto del tratamiento se refiere al efecto causal de un tratamiento o intervención dada sobre una variable de interés (Montgomery, 2017, p.78), entre estos supuestos están:

- a. Los errores se distribuyen de manera normal (normalidad).
- b. Varianza constante entre tratamientos (homocedasticidad).
- c. Las muestras provienen de poblaciones independientes (independencia).

2.2. Análisis multivariante de la varianza

El análisis multivariado de la varianza (MANOVA por sus siglas en inglés) es una extensión del análisis univariado de la varianza, comúnmente llamado ANOVA, a varias variables dependientes (Rencher, 2012, p.156-167).

El enfoque multivariado es similar en muchos aspectos y requiere los mismos supuestos, estos adaptados al enfoque multivariado. En este caso se asume que k muestras aleatorias independientes de tamaño n se obtienen de p variables normales con matrices de covarianza iguales.

El modelo para cada vector de observación es $\mathbf{y}_{ij} = \boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$, para $i = 1, 2, \dots, k$ y $j = 1, 2, \dots, n$, donde a \mathbf{y}_{ij} se le llama vector de observaciones que también se puede expresar en términos de las p variables, se tendría la siguiente expresión

matricial:

$$\begin{pmatrix} y_{ij1} \\ y_{ij2} \\ \vdots \\ y_{ijp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{i1} \\ \mu_{i2} \\ \vdots \\ \mu_{ip} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{ij1} \\ \varepsilon_{ij2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{ijp} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{i1} \\ \tau_{i2} \\ \vdots \\ \tau_{ip} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{ij1} \\ \varepsilon_{ij2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{ijp} \end{pmatrix}$$

De modo que el modelo para la variable r -ésima, $r = 1, 2, \dots, p$, en cada vector \mathbf{y}_{ij} es $y_{ijr} = \mu_{ir} + \varepsilon_{ijr} = \mu_r + \tau_{ir} + \varepsilon_{ijr}$. Para este caso se desea comparar los vectores de medias de las k muestras para determinar si hay diferencias significativas o no, por lo que se realiza el siguiente contraste de hipótesis:

$$H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = \dots = \boldsymbol{\mu}_k$$

$$H_1 : \boldsymbol{\mu}_i \neq \boldsymbol{\mu}_j, \text{ para al menos un par } \boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\mu}_j.$$

Lo que es equivalente a:

$$H_0 : \begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{1p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \vdots \\ \mu_{2p} \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} \mu_{k1} \\ \mu_{k2} \\ \vdots \\ \mu_{kp} \end{pmatrix}.$$

De la misma forma, que en el caso univariado, la variabilidad total se descompone en variabilidad debida a los tratamientos y debida a los residuos. Así, de forma

análoga, se define la matriz que contiene la **Suma de Cuadrados Total**, definida como

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{y}_{ij} - \bar{\mathbf{y}}_{..}) (\mathbf{y}_{ij} - \bar{\mathbf{y}}_{..})',$$

esta es el resultado de sumar la matriz de la **Suma de Cuadrados de Tratamiento**, definida por $\mathbf{H} = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}_{..}) (\bar{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}_{..})'$,

más la matriz de la **Suma de Cuadrados Residual**, definida como

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{y}_{ij} - \bar{\mathbf{y}}_i) (\mathbf{y}_{ij} - \bar{\mathbf{y}}_i)',$$

donde el vector de medias de cada grupo es $\bar{\mathbf{y}}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{y}_{ij}}{n_i}$ y el vector con la media global $\bar{\mathbf{y}}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{y}_{ij}}{n}$.

La matriz \mathbf{H} tiene una suma de cuadrados en la diagonal para cada una de las p variables y los elementos fuera de la diagonal son sumas análogas de productos para cada par de variables; esta matriz \mathbf{H} es un análogo a la variabilidad entre tratamientos.

Suponiendo que no hay dependencias lineales en las variables, el rango de \mathbf{H} es el menor de p y $\min(p, k - 1)$, donde $k - 1$ representa los grados de libertad para la hipótesis en el caso unidireccional. La matriz residual \mathbf{R} , de $p \times p$, tiene una suma de cuadrados dentro de cada variable en la diagonal, con sumas análogas de productos fuera de la diagonal; esta matriz \mathbf{R} es un análogo a la variabilidad dentro de los grupos. El rango de \mathbf{R} es p , a menos que $k - 1$ sea menor que p . Es importante recordar que los elementos de \mathbf{R} son sumas de cuadrados y productos, no varianzas y covarianzas.

Usualmente, los cálculos realizados en este análisis se resumen en una tabla de análisis de varianza. La forma comúnmente utilizada para esta tabla se da a continuación.

Tabla 2.2.
Resumen del análisis multivariado de la varianza.

FUENTE	GL	SC	CM
Tratamiento	$k - 1$	H	$\frac{\mathbf{H}}{(k - 1)}$
Residual	$n - k$	R	$\frac{\mathbf{R}}{(n - k)}$
Total	$n - 1$	T=H+R	

1/En el caso multivariado hay diferentes estadísticos de prueba para el contraste de hipótesis, como por ejemplo el de Lawley-Hotelling, la raíz de Roy, lambda de Wilks y la traza de Pillai.

Fuente: Rencher (2012).

El estadístico de prueba empleado en este estudio es el de Pillai basado en los valores propios (eigenvalues) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ de la matriz $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}$, este viene dado por

$$V_s = \text{tr} \left((\mathbf{R} + \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H} \right) = \sum_{i=1}^s \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i}.$$

Según Rencher (2012), cuando los tamaños de muestra son iguales en todos los k grupos la traza de Pillai es el estadístico más robusto ante incumplimiento de los supuestos.

2.2.1. Supuestos del MANOVA

Los supuestos del MANOVA son los mismos que el ANOVA univariado, pero generalizados a varias variables.

- Las observaciones de todas las variables dependientes deben seguir una distribución normal multivariada en cada grupo.
- Las matrices de varianza-covarianza de la población para las variables dependientes en cada grupo deben ser iguales (supuesto de homocedasticidad).
- Las observaciones dentro de cada muestra deben ser al azar e independientes entre sí.

De la misma manera se debe comprobar el cumplimiento de los supuestos para garantizar la adecuación del modelo, para esto se estudia los vectores de residuos.

2.3. Análisis funcional de la varianza

La mayoría de las técnicas estadísticas del análisis univariado han sido implementadas en el enfoque funcional, por ejemplo, el ANOVA unidireccional para datos funcionales se desarrolla en [Cuevas et al. \(2004\)](#), este emplea un método paramétrico de bootstrap para su estudio y en [J. Zhang \(2013\)](#) se propone una prueba F puntual globalizada para contrastar la hipótesis nula de igualdad de medias funcionales (2.2). También se puede consultar trabajos relacionados con el análisis funcional de la varianza (FANOVA por sus siglas en inglés) en los trabajos realizados por [Abramovich y Angelini \(2006\)](#); [Abramovich et al. \(2004\)](#); [Antoniadis y Sapatinas \(2007\)](#); [Cuestas y Febrero \(2010\)](#); [Yang y Nie \(2008\)](#), entre otros más.

El análisis de la varianza con respuestas funcionales es un problema fundamental en la inferencia estadística para determinar diferencias en las curvas promedio o medias funcionales cuando se contrasta la hipótesis nula H_0 de igualdad de medias funcionales ([J. Zhang, 2013](#)); esto permite probar, en diseños experimentales funcionales, con k grupos de curvas, el efecto que tiene un determinado tratamiento sobre una muestra y así inferir sobre una población determinada. Pese a la importancia que tiene determinar la existencia de diferencias entre funciones promedio, este tema ha recibido menos atención, sin embargo, en los últimos años, han surgido dos enfoques generales diferentes para realizar la prueba FANOVA, expuestos en [Shen y Faraway \(2004\)](#), así como en otros similares ([Cuestas y Febrero, 2010](#); [Cuevas et al., 2004](#)), para un estadístico de prueba global (este es el enfoque que se desarrollará en este trabajo). Se dice que es global porque se usa para detectar diferencias en cualquier parte del dominio funcional completo (en cualquier lugar $t \in T$). Un enfoque alternativo consiste

en utilizar un estadístico de prueba puntual (o individual) para realizar la inferencia en t , es decir, identificar regiones específicas de t con una diferencia significativa entre las medias funcionales"(Ramsay y Silverman, 2005).

La prueba basada en la norma L^2 en el espacio de Hilbert fue estudiada, por primera vez, por Faraway (1997), quien propuso un enfoque bootstrap para aproximar la distribución nula, posteriormente, la prueba F puntual se adoptó en los estudios de Ramsay y Silverman (2005) para los modelos de regresión lineal funcional con respuestas funcionales. J. Zhang y Chen (2007) ampliaron la prueba basada en la norma L^2 para un problema de test de hipótesis lineal general, en el marco de modelos funcionales lineales con datos funcionales ruidosos observados. Se puede encontrar más detalles sobre la prueba basada en la norma L^2 en J. Zhang et al. (2010).

Gorécki y Smaga (2015) muestra que la prueba de tipo F es consistente con la raíz- n , por medio de un estudio de simulación demuestra que el método de sesgo reducido y el método ingenuo funcionan de manera similar cuando los datos están alta o moderadamente correlacionados, pero el primero supera de manera significativa al segundo cuando los datos están casi sin correlación.

Para Cuevas (2014), la prueba de tipo F tiene dos ventajas: La primera es que es invariante de escala y la segunda, su distribución nula se puede aproximar mediante un estadístico F usual con grados de libertad proporcionales a una constante κ que depende de la función de covarianza, esto permite una implementación fácil y rápida de la prueba de tipo F , siempre que κ se calcule, correctamente. Además, cuando las funciones se observan en una rejilla o cuadrícula moderada o grande de puntos de tiempo de diseño, las pruebas F puntual globalizada, basada en la norma de L^2 , la prueba F basada en la idea de B-Spline parecen funcionar mejor, aunque la prueba

la prueba F basada en la idea de B-Spline puede llevar mucho tiempo. La situación cambia cuando las funciones se observan en una cuadrícula corta de puntos de tiempo de diseño. Aquí, dependiendo de la estructura de los datos funcionales, la prueba F basada en la idea de B-Spline parece funcionar mejor y parece ser más rápida.

Para efectos de este trabajo se decidió emplear la prueba basada en la norma L^2 y la prueba tipo F , ambas con la estimación de κ mediante el método de estimación ingenua identificadas por $L2N$ y FN , respectivamente, y la Prueba F puntual globalizada identificada por GPF , ya que estas pruebas proporcionan un estadístico de prueba global, "Se dice que es global porque se usa para detectar diferencias en cualquier parte del dominio funcional completo, es decir en cualquier lugar $t \in T$ " (J. Zhang, 2013).

Para Gorécki y Smaga (2015), el problema que se presenta con las pruebas que no son globalizadas es que consume mucho tiempo, ya que debe realizarse para todo $t \in T$, además se puede dar el caso que en cada punto se rechace la hipótesis nula, pero de forma global no se garantiza el rechazo dicha hipótesis (2.2) para un nivel de insignificancia dado.

2.3.1. Supuestos del FANOVA

Para el caso funcional, los supuestos del modelo ANOVA son los siguientes.

- a. La muestra debe estar compuesta por funciones suavizadas.
- b. La variable dependiente funcional proviene de un proceso estocástico Gaussiano.
- c. Se asume igualdad de covarianzas de los procesos estocásticos de los cuales proceden las muestras (supuesto de homocedasticidad).
- d. Las observaciones dentro de cada muestra deben ser funciones aleatorias e independientes entre sí (cada muestra de funciones es un proceso estocástico de media funcional $m(t)$ y función de covarianza de $\gamma(s, t)$ con $s, t \in T$).

Un proceso estocástico Gaussiano es una colección de variables aleatorias, indexadas por tiempo o espacio, de modo que cada colección finita de esas variables aleatorias tiene una distribución normal multivariada, es decir, cada combinación lineal finita de ellas es normalmente distribuida. Se define como un proceso estocástico $X(t)$, donde $t \in T$ y con una función media de $\eta(t)$ y función de covarianza de $\gamma(s,t)$, $s,t \in T$, este se denota por $GP(\eta,\gamma)$, si y solo si para cualquier punto de tiempo p , t_j con $j = 1, \dots, p$, el vector $[y(t_1), \dots, y(t_p)]^T$ sigue una distribución normal multivariante $N_p(\boldsymbol{\eta}, \Gamma)$, donde $\boldsymbol{\eta} = [\eta(t_1), \dots, \eta(t_p)]^T$ y $\Gamma = (\gamma(t_i, t_j))$, matriz de $p \times p$. " Cuando el proceso es Gaussiano la norma en L^2 juega un papel de normalidad" (2013).

Tomando en cuenta estos supuestos, seguidamente, se definen cada una las pruebas de análisis funcional de la varianza que se emplea en este trabajo.

2.4. Pruebas FANOVA de una vía para datos funcionales

En este apartado se escriben las pruebas existentes para el problema ANOVA de una vía para datos funcionales. Este problema se puede formular de la siguiente manera: Sea $X_{i1}(t), X_{i2}(t), \dots, X_{in_i}(t)$ con $i = 1, \dots, k$, k grupos de funciones aleatorias definidas en un intervalo finito dado $T = [a, b]$ y su covarianza funcional $\gamma(s,t)$ con $s, t \in T$. Sea $SP(m, \gamma)$ un proceso estocástico con media funcional $m(t)$, con $t \in T$. Aquí se asume que las funciones $X_{i1}(t), X_{i2}(t), \dots, X_{in_i}(t)$ son idénticamente distribuidas y en ese proceso estocástico es común contrastar la hipótesis de igualdad de las k medias funcionales, para esto se define la siguiente hipótesis nula:

$$H_0: m_1(t) = \dots = m_k(t), \quad t \in T, \quad (2.2)$$

cuya hipótesis alternativa es la negación de esta igualdad.

Antes de ver las pruebas que se utilizan en este estudio, se debe definir primero la **Suma de Cuadrados de Regresión** y la **Suma de Cuadrado Residual o de Error**, SSR y SSE¹ por sus siglas en inglés, respectivamente (Cuevas et al., 2004; Gorécki y Smaga, 2015), estas se definen por $SSR_n(t) = \sum_{i=1}^k n_i \|\bar{X}_i(t) - \bar{X}(t)\|^2$ y $SSE_n(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \|X_{ij}(t) - \bar{X}_i(t)\|^2$. La norma usual en este caso es L^2 , se define por $\|x\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t) dt}$, la función media global y la función media para cada grupo, respectivamente por $\bar{X}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}(t)$ y $\bar{X}_i(t) = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}(t)$, con $i = 1, \dots, k$.

Sea la función de covarianza muestral agrupada $\gamma(s, t)$, la cual es estimada por el estimador insesgado:

$$\hat{\gamma}(s, t) = \frac{1}{n - k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} [X_{ij}(s) - \bar{X}_i(s)] [X_{ij}(t) - \bar{X}_i(t)], \quad (2.3)$$

y su traza está dada por $\text{tr}(\gamma) = \int_T \gamma(t, t) dt$.

Dadas las definiciones descritas, anteriormente, se procede a definir las pruebas por emplear en este estudio.

2.4.1. Prueba basada en la norma L^2

Esta prueba está basada en la norma L^2 y emplea el estadístico de prueba $T_n = \int_T SSR_n(t) dt$ (Faraway, 1997; J. Zhang y Chen, 2007), bajo la hipótesis nula definida en 2.2, se puede demostrar que $T_n \sim \beta \chi_d^2$ donde $\beta = \text{tr}(\gamma^{\otimes 2}) / \text{tr}(\gamma)$, $d = (k - 1) \kappa$, $\kappa = \text{tr}^2(\gamma) / \text{tr}(\gamma^{\otimes 2})$ y $\gamma^{\otimes 2}(s, t) = \int_I \gamma(s, u) \gamma(u, t) du$. Esta aproximación se emplea para

¹Se trabaja con esta notación debido a que la mayoría de artículos y textos científicos se encuentran en inglés.

el cálculo del valor p de T_n , $P(\chi_d^2 \geq T_n / \beta)$, con valor crítico $\beta \chi_d^2(1 - \alpha)$.

Los parámetros β, d y κ se pueden estimar de dos formas, esto genera dos pruebas diferentes, la primera llamada $L2N$ cuando se emplea el método ingenuo y $L2B$ cuando se emplea el de sesgo reducido.

Para el método ingenuo: Se tiene que $\hat{\beta} = \text{tr}(\hat{\gamma}^{\otimes 2}) / \text{tr}(\hat{\gamma})$, $\hat{d} = (k - 1)\hat{\kappa}$, $\hat{\kappa} = \text{tr}^2(\hat{\gamma}) / \text{tr}(\hat{\gamma}^{\otimes 2})$, donde $\hat{\gamma}(s, t)$ es la función de covarianza definida en 2.3.

Para el método de sesgo reducido: Se tiene que $\hat{\beta} = \widehat{\text{tr}(\gamma^{\otimes 2})} / \text{tr}(\hat{\gamma})$, $\hat{d} = (k - 1)\hat{\kappa}$, $\hat{\kappa} = \widehat{\text{tr}^2(\gamma)} / \widehat{\text{tr}(\gamma^{\otimes 2})}$, donde $\hat{\gamma}(s, t)$ es la covarianza definida en 2.3. Además, se define la traza de la función de covarianza de la siguiente manera:

$$\widehat{\text{tr}(\gamma^{\otimes 2})} = \frac{(n - k)^2}{(n - k - 1)(n - k + 2)} \left(\text{tr}(\hat{\gamma}^{\otimes 2}) - \frac{\text{tr}^2(\hat{\gamma})}{n - k} \right)$$

$$\widehat{\text{tr}^2(\gamma)} = \frac{(n - k)(n - k + 1)}{(n - k - 1)(n - k + 2)} \left(\text{tr}^2(\hat{\gamma}) - \frac{2\text{tr}(\hat{\gamma}^{\otimes 2})}{n - k + 1} \right)$$

2.4.2. Prueba F puntual globalizada

La globalización de la prueba F puntual (la prueba GPF propuesta por J. Zhang y Liang (2014), emplea un estadístico de prueba $T_n = \int_T F_n(t) dt$. Bajo la hipótesis nula 2.2, se puede demostrar que $T_n \sim \hat{\beta}_w \chi_{\hat{d}_w}^2$, aproximadamente, donde:

$$\hat{\beta}_w = \frac{(n - k - 2) \text{tr}(\hat{\gamma}_w^{\otimes 2})}{(k - 1)(n - k)(b - a)} \quad (2.4)$$

$$\hat{d}_w = \frac{(k - 1)(n - k)^2(b - a)^2}{(n - k - 2)^2 \text{tr}(\hat{\gamma}_w^{\otimes 2})} \quad (2.5)$$

$$\hat{\gamma}_w(s, t) = \hat{\gamma}(s, t) / \sqrt{\hat{\gamma}(s, s) \hat{\gamma}(t, t)} \quad (2.6)$$

Para $\hat{\gamma}(s,t)$ dado en 2.3. Esta distribución aproximada se puede usar para calcular el valor p de T_n o su valor crítico casi de la misma manera que para la prueba basada en la norma L^2 .

2.4.3. Prueba tipo F propuesta por Zhang

La prueba tipo F de J. Zhang (2011), está basada en la prueba puntual F de Ramsay y Silverman (2005) y su estadístico es:

$$F_n(t) = \frac{\int_T SSR_n(t)dt / (k-1)}{\int_T SSE_n(t)dt / (n-k)}$$

Bajo la hipótesis nula 2.2, se puede demostrar que $F_n \sim F_{d_1, d_2}$ aproximadamente, donde $d_1 = (k-1)\kappa$ y $d_2 = (n-k)\kappa$. De la misma manera hay dos formas para determinar el valor de κ , según el método ingenuo y de sesgo reducido visto en la prueba de la norma L^2 .

$$\kappa = \text{tr}^2(\gamma) / \text{tr}(\gamma^{\otimes 2})$$

Se debe tener presente que: cuando las k muestras no tienen una distribución normal y cuando los tamaños de muestra son pequeños esta prueba y la de la norma L^2 no son las más recomendables"(J. Zhang, 2013).

En relación con este trabajo, se utilizó el paquete fdANOVA proporciona la función denominada `fanova.tests()` para realizar los procedimientos de prueba para el análisis de varianza unidireccional para datos funcionales empleando diferentes tipos de test, entre ellos L_2N , FN , GPF .

2.5. Pruebas FANOVA de dos vías para datos funcionales

Un experimento de dos factores A y B , con niveles a y b , respectivamente, para este existirá $a \cdot b$ combinaciones de estos factores (Cuestas y Febrero, 2010). Para una muestra funcional aleatoria, en donde la (i, j) -ésima celda se puede representar como:

$$y_{ijk}(t) = \eta_0(t) + \alpha_i(t) + \beta_j(t) + \theta_{ij}(t) + v_{ijk}(t), \quad t \in T, \quad (2.7)$$

donde $i = 1, 2, \dots, a$; $j = 1, 2, \dots, b$; $k = 1, 2, \dots, n_{ij}$ y $v_{ijk}(t) \sim SP(0, \gamma(s, t))$, donde SP significa proceso estocástico (por sus siglas del inglés), $\gamma(s, t)$ es la función de covarianza común para todas las muestras, $\eta_0(t)$ es la media funcional global de la muestra, $\alpha_i(t)$ y $\beta_j(t)$ son el i -ésimo y el j -ésimo efectos funcionales principales de los factores A y B sobre la variable respuesta, respectivamente. $\theta_{ij}(t)$ es el (i, j) -ésimo efecto de la interacción entre los factores A y B sobre la variable respuesta.

Se formulan las siguientes hipótesis nulas:

$$\begin{aligned} H_0^A & : \alpha_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, a; \quad t \in T \quad (\text{No hay efecto del factor A}) \\ H_0^B & : \beta_j(t) = 0, \quad j = 1, \dots, b; \quad t \in T \quad (\text{No efecto del factor B}) \\ H_0^I & : \theta_{ij}(t) = 0, \quad i = 1, \dots, a; \quad j = 1, \dots, b; \quad t \in T \quad (\text{No hay efecto de la interacción}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

La primera hipótesis nula tiene como objetivo evaluar si los principales efectos del factor A sobre la variable de respuesta son significativos. Una prueba de los principales efectos del factor B sobre la variable de respuesta se puede manejar de manera similar. El último, tiene como objetivo comprobar si existe el efecto de la interacción sobre la variable de respuesta.

ANOVA bidireccional equilibrado con interacción

Luego, mediante el clásico ANOVA balanceado de dos vías, se tiene la siguiente descomposición:

$$SST_n(t) = SSA_n(t) + SSB_n(t) + SSI_n(t) + SSE_n(t),^2$$

donde se definen la **Suma de Cuadrados Total (SST)**, **Suma de Cuadrados del factor A (SSA)**, **Suma de Cuadrados del factor B (SSB)**, **Suma de Cuadrados de la interacción (SSI)** y **del Residual o del Error (SSE)** de la siguiente manera respectivamente:

$$\begin{aligned} SST_n(t) &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c [y_{ijk}(t) - \bar{y}_{...}(t)]^2 \\ SSA_n(t) &= bc \sum_{i=1}^a [\bar{y}_{i..}(t) - \bar{y}_{...}(t)]^2 \\ SSB_n(t) &= ac \sum_{j=1}^b [\bar{y}_{.j.}(t) - \bar{y}_{...}(t)]^2 \\ SSI_n(t) &= c \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b [\bar{y}_{ij.}(t) - \bar{y}_{i..}(t) - \bar{y}_{.j.}(t) + \bar{y}_{...}(t)]^2 \\ SSE_n(t) &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c [y_{ijk}(t) - \bar{y}_{ij.}(t)]^2, \end{aligned}$$

²SST, SSA, SSB, SSI, SSE provienen del inglés y corresponden a la respectiva suma de cuadrados en la descomposición de la varianza en el ANOVA.

y donde se define también las siguiente funciones promedio:

$$\begin{aligned}\bar{y}_{ij.}(t) &= \sum_{k=1}^c y_{ijk}(t)/c \\ \bar{y}_{i..}(t) &= \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c y_{ijk}(t)/bc \\ \bar{y}_{.j.}(t) &= \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^c y_{ijk}(t)/ac \\ \bar{y}_{ij.}(t) &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c y_{ijk}(t)/abc,\end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, a$; $j = 1, \dots, b$; $c = n_{ij}$.

2.5.1. Prueba basada en la norma L^2

La prueba basada en L^2 para contrastar las hipótesis nulas H_0^A , H_0^B y H_0^I (2.9), respectivamente, usa las siguientes estadísticas de prueba:

$$\begin{aligned}T_n^A(t) &= \int_T SSA_n(t) dt \sim \hat{\beta} \chi_{(a-1)\hat{\kappa}}^2, t \in T \\ T_n^B(t) &= \int_T SSB_n(t) \sim \hat{\beta} \chi_{(b-1)\hat{\kappa}}^2, t \in T \\ T_n^I(t) &= \int_T SSI_n(t) dt \sim \hat{\beta} \chi_{(a-1)(b-1)\hat{\kappa}}^2, t \in T,\end{aligned}$$

estos estadísticos dependen de la estimación de $\hat{\beta}$ y de $\hat{\kappa}$, según los siguientes métodos:

El **método ingenuo** emplea las fórmulas

$$\hat{\beta} = \frac{\text{tr}(\hat{\gamma}^{\otimes 2})}{\text{tr}(\hat{\gamma})}, \quad \hat{\kappa} = \frac{\text{tr}^2(\hat{\gamma})}{\text{tr}(\hat{\gamma}^{\otimes 2})}, \quad (2.9)$$

mientras que el **método de sesgo reducido** utiliza las fórmulas

$$\widehat{\beta} = \frac{\widehat{\text{tr}(\gamma^{\otimes 2})}}{\widehat{\text{tr}(\widehat{\gamma})}}, \quad \widehat{\kappa} = \frac{\widehat{\text{tr}^2(\widehat{\gamma})}}{\widehat{\text{tr}(\gamma^{\otimes 2})}}, \quad (2.10)$$

para ambos métodos

$$\widehat{\text{tr}^2(\gamma)} = \frac{(n-ab)(n-ab+1)}{(n-ab-1)(n-ab+2)} \left(\text{tr}^2(\widehat{\gamma}) - \frac{2\text{tr}(\widehat{\gamma}^{\otimes 2})}{n-ab+1} \right),$$

$$\widehat{\text{tr}(\gamma^{\otimes 2})} = \frac{(n-ab)^2}{(n-ab-1)(n-ab+2)} \left(\text{tr}(\widehat{\gamma}^{\otimes 2}) - \frac{\text{tr}^2(\widehat{\gamma})}{n-ab} \right)$$

y donde $\widehat{\gamma}(s,t)$ es la función de covarianza definida en 2.3.

2.5.2. Prueba tipo F propuesta por Zhang

Bajo la suposición que las muestras ab son Gaussianas con $n_{ij} \equiv c > 1$, entonces, los estadísticos de prueba para cada factor y la interacción se aproximan a una F con sus respectivos grados de libertad (J. Zhang, 2013, p.176).

$$F_n^A(t) = \frac{\int_T SSA_n(t) dt / (a-1)}{\int_T SSE_n(t) dt / [ab(c-1)]} \sim F_{(a-1)\widehat{\kappa}, ab(c-1)\widehat{\kappa}}, \quad t \in T \quad (2.11)$$

$$F_n^B(t) = \frac{\int_T SSB_n(t) dt / (b-1)}{\int_T SSE_n(t) dt / [ab(c-1)]} \sim F_{(b-1)\widehat{\kappa}, ab(c-1)\widehat{\kappa}}, \quad t \in T \quad (2.12)$$

$$F_n^I(t) = \frac{\int_T SSI_n(t) dt / [(a-1)(b-1)]}{\int_T SSE_n(t) dt / [ab(c-1)]} \sim F_{(a-1)(b-1)\widehat{\kappa}, ab(c-1)\widehat{\kappa}}, \quad t \in T \quad (2.13)$$

El valor de $\widehat{\kappa}$ se estima por el método ingenuo (2.9), o bien, por el de sesgo reducido (2.10), con $n_{ij} \equiv c > 1, \forall i = 1, \dots, a; \forall j = 1, \dots, b$.

2.5.3. La prueba F puntual globalizada

Para contrastar las hipótesis nulas descritas en 2.9 mediante la prueba F puntual globalizada, se emplea los siguientes estadísticos de prueba, suponga que $T = [t_1, t_2]$ y dos factores A y B cuyos niveles son a y b .

Para el primer factor:

$$T_n^A(t) = \int_T \frac{SSA_n(t)/(a-1)}{SSE_n(t)/(n-ab)} dt \sim \hat{\beta}_w \chi_{\hat{d}_w}^2, t \in T, \quad (2.14)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_w &= \frac{(n-a-2) \operatorname{tr}(\hat{\gamma}_w^{\otimes 2})}{(a-1)(n-a)(t_2-t_1)} \\ \hat{d}_w &= \frac{(a-1)(n-a)^2(t_2-t_1)^2}{(n-a-2)^2 \operatorname{tr}(\hat{\gamma}_w^{\otimes 2})}. \end{aligned}$$

Para el segundo factor:

$$T_n^B(t) = \int_T \frac{SSB_n(t)/(b-1)}{SSE_n(t)/(n-ab)} dt \sim \hat{\beta}_w \chi_{\hat{d}_w}^2, t \in T, \quad (2.15)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_w &= \frac{(n-b-2) \operatorname{tr}(\hat{\gamma}_w^{\otimes 2})}{(b-1)(n-b)(t_2-t_1)} \\ \hat{d}_w &= \frac{(b-1)(n-b)^2(t_2-t_1)^2}{(n-b-2)^2 \operatorname{tr}(\hat{\gamma}_w^{\otimes 2})}. \end{aligned}$$

Para la interacción de los factores:

$$T_n^I(t) = \int_T \frac{SSAB_n(t)/[(a-1)(b-1)]}{SSE_n(t)/(n-ab)} dt \sim \hat{\beta}_w \chi_{\hat{d}_w}^2, t \in T, \quad (2.16)$$

donde

$$\hat{\beta}_w = \frac{(n - ab - 2) \text{tr}(\hat{\gamma}_w^{\otimes 2})}{(a - 1)(b - 1)(n - ab)(t_2 - t_1)}$$

$$\hat{d}_w = \frac{(a - 1)(b - 1)(n - ab)^2 (t_2 - t_1)^2}{(n - ab - 2)^2 \text{tr}(\hat{\gamma}_w^{\otimes 2})}.$$

Para los tres estadísticos de prueba anteriores, se estima la función de covarianza mediante $\hat{\gamma}_w(s, t) = \hat{\gamma}(s, t) / \sqrt{\hat{\gamma}(s, s)\hat{\gamma}(t, t)}$.

Las pruebas de FANOVA de una vía son las mismas que se emplean para el caso de dos vías, pero el paquete `fdANOVA` no proporciona una función para el caso de dos vías ni para la interacción de factores, debido a esta limitación, se procedió a escribir una función en el lenguaje estadístico R, la cual se nombró como `fanova2()`. Esta función recibe por argumentos una matriz de datos funcionales `x` y los dos factores `factor1` y `factor2` y retorna los valores de p asociados a los estadísticos de prueba de los dos factores y de la interacción.

2.6. Medición del color

La determinación del color puede realizarse de forma visual y subjetiva, mediante la apreciación de un observador humano, o con instrumentos digitales en función de un sistema de colorimetría; lo último brinda un carácter objetivo a la medición. Para fines técnicos, el color se define en tres atributos: matiz, croma y brillo, términos acuñados en la ciencia del color ([Munsell, 1905](#)).

2.6.1. Atributos del color

El color posee los tres atributos:

Matiz: Conocido como tono, tinte, color, "hue" en inglés. Es caracterizado por la longitud de onda de la radiación y permite diferenciar un color de otro. Representa una coordenada en el diagrama de cromaticidad.

Cromaticidad: Saturación, intensidad, pureza, "chroma" en inglés. Define la intensidad o pureza espectral del color que va desde los tonos grises, pálidos, apagados a los más fuertes y vivos. Es el grado de color (incoloro, brillo, palidez).

Las coordenadas de cromaticidad x , y , z describen las cualidades de un estímulo de color aparte de su luminancia. Se derivan de los valores triestímulos que se definirán en la siguiente sección y que se obtienen de las siguientes expresiones:

$$x = \frac{X}{X + Y + Z}$$
$$y = \frac{Y}{X + Y + Z}$$
$$z = \frac{Z}{X + Y + Z}$$

La figura 2.1 muestra el diagrama de cromaticidad (y contra x). El contorno en forma de herradura es el lugar geométrico del espectro, que es una línea que conecta los puntos que representan las cromaticidades de los colores del espectro.

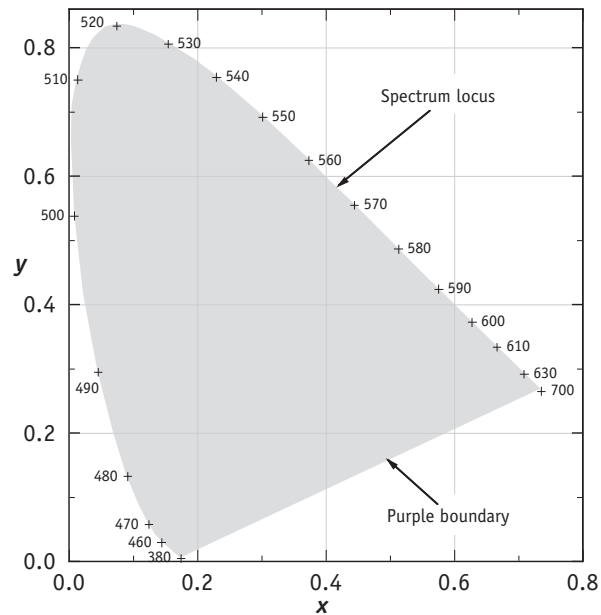


Figura 2.1.

Diagrama de cromaticidad CIE x , y Las coordenadas de cromaticidad definen las cualidades de un estímulo de color, además de su luminancia.

Fuente: Schanda (2007)

Luminosidad: Brillante, brillo, "brightness" en inglés . Es dado por el contenido total de energía. Da lugar a los colores claros y oscuros. Es el grado entre la oscuridad y el brillo máximo.

La Comisión Internacional de la Iluminación (CIE por sus siglas en inglés) ha desarrollado los sistemas más importantes y utilizados en la actualidad para la descripción y medición del color, los cuales se basan en la utilización de fuentes de iluminación, observadores estándares y los atributos del color antes mencionados. Los sistemas CIE usan tres coordenadas para ubicar un color en un espacio colorimétrico, usualmente, llamados valores triestímulo.

2.6.2. Sistemas CIExyz y CIELab

Reflectancia: La reflectancia de la superficie de un material es su efectividad para reflejar la energía radiante medida respecto de un estándar o referencia. En el caso de esta investigación, debido a la apariencia metálica de los escarabajos, se usó un espejo como referencia.

La reflectancia también se puede definir como la fracción de potencia electromagnética incidente que se refleja en una interfaz (Relación entre el flujo radiante o luminoso reflejado y el flujo incidente en condiciones específicas de irradiación). El espectro o la curva de reflectancia espectral es la gráfica de esta en función de la longitud de onda λ . La figura 2.2 muestra las curvas de reflectancia espectral de tres especímenes de escarabajo por longitud de onda.

La relación existente entre la reflectancia con los sistemas CIE es que las coordenadas de estos sistemas se calculan usando esta medida como base.

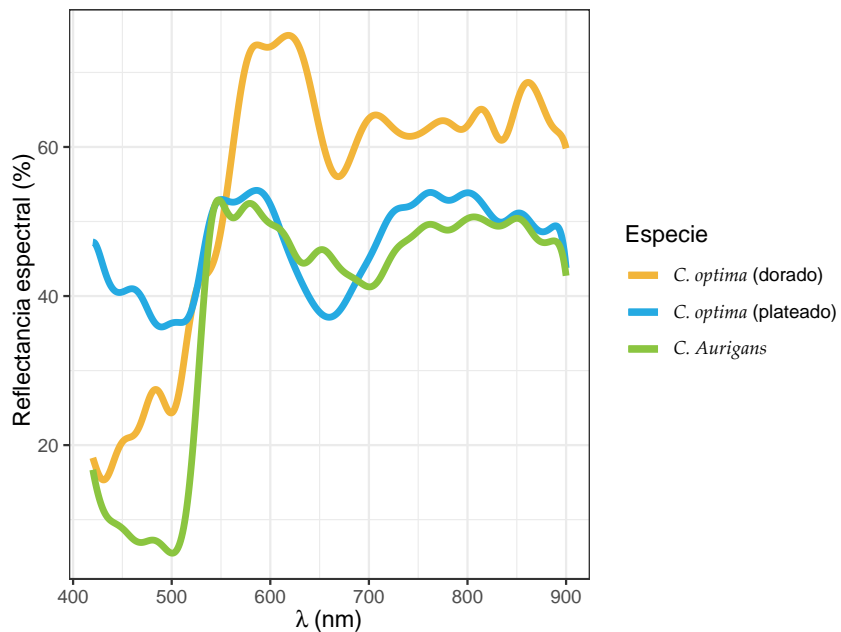


Figura 2.2.

Curvas espectrales para tres especies de escarabajo del género *Chrysina*.

1/Las especies presentes en el gráfico son *Chrysina aurigans*, *Chrysina optima* (dorado) y *Chrysina optima* (plateado.)

Fuente: Elaboración propia.

Valores triestímulo CIExyz: Según la percepción visual humana, la medición del color se basa en un sistema de tres valores de color que se denominan valores triestímulos. Este sistema refleja los receptores de color en el ojo humano, conocidos como células cónicas. Los valores triestímulos miden la intensidad de la luz en función de los tres valores de colores primarios, típicamente, representados por las coordenadas X, Y y Z. El sistema de valores triestímulos es la base del lenguaje del color, también conocido como sistema de color CIE, este se utiliza para comunicar valores de color precisos (Madden y Giorgianni, 2007).



Figura 2.3.

Cálculo de los valores triestímulos CIExyz.

1/De izquierda a derecha, la primera gráfica corresponde a la distribución de potencia espectral de una fuente de luz (CIE D65), la segunda corresponde a la reflectancia espectral de un objeto reflectante (o transmitancia espectral de un objeto transmisor) y en la tercera gráfica se observa las curvas $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$ y $\bar{z}(\lambda)$, las cuales son las funciones de coincidencia de colores del observador colorimétrico estándar CIE.

Fuente: Elaboración propia.

Las funciones de coincidencia de color del observador colorimétrico estándar de CIE se utilizan en el cálculo de los valores triestímulo CIExyz que cuantifican las características tricromáticas de los estímulos de color, estos valores triestímulo para un objeto dado (caracterizado por su reflectancia o transmitancia espectral) que está iluminada por una fuente de luz (caracterizada por su distribución de potencia espectral) se pueden calcular para el observador colorimétrico estándar CIE al sumar los productos de estas distribuciones en el rango de longitud de onda (λ), en el caso de este trabajo de 400 a 900 nm, se realiza mediante las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned}
 X &= k \sum_{\lambda} S(\lambda) R(\lambda) \bar{x}(\lambda) \Delta\lambda \\
 Y &= k \sum_{\lambda} S(\lambda) R(\lambda) \bar{y}(\lambda) \Delta\lambda \\
 Z &= k \sum_{\lambda} S(\lambda) R(\lambda) \bar{z}(\lambda) \Delta\lambda
 \end{aligned}$$

donde $S(\lambda)$ es la distribución de potencia espectral de una fuente de luz (CIE D65), $R(\lambda)$ es la reflectancia espectral de un objeto reflectante (o transmitancia espectral de un objeto transmisor); $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$ y $\bar{z}(\lambda)$ son las funciones de coincidencia de colores del observador colorimétrico estándar CIE 1976; y k es un factor de normalización, generalmente, se determina de manera que $Y = 100$ cuando el objeto es un blanco perfecto.

$$k = \frac{100}{\sum_{\lambda} S(\lambda) \bar{x}(\lambda) \Delta\lambda}$$

Valores CIElab: Son valores triestímulo en el sistema CIElab empleado comúnmente para comparaciones colorimétricas, estos valores se calculan a partir de los valores de triestímulo X , Y y Z , y los valores de triestímulo X_n , Y_n y Z_n del blanco de referencia asociado, de la siguiente manera:

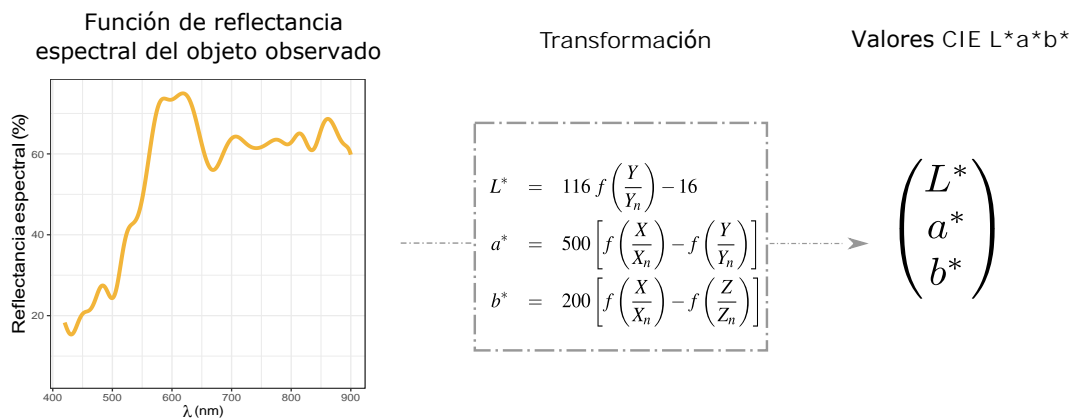


Figura 2.4.

Cálculo de los valores triestímulos CIElab.

1/En esta transformación $f(r) = r^{\frac{1}{3}}$ si $r > \left(\frac{24}{16}\right)^3$ y $f(r) = \left(\frac{841}{108}\right)r + \frac{16}{116}$ si $r \leq \left(\frac{24}{16}\right)^3$. En estas expresiones, los términos X_n , Y_n y Z_n representan el blanco de referencia asociado.

Fuente: Elaboración propia.

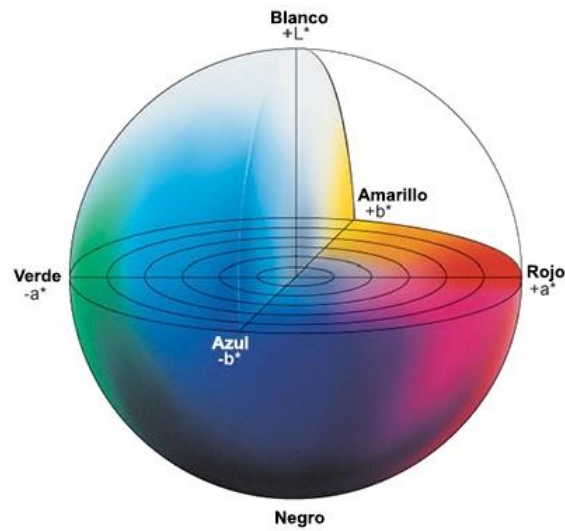


Figura 2.5.

Diagrama de las coordenadas cromáticas CIElab. L^* indica la luminosidad, mientras que, a^* y b^* son coordenadas de cromaticidad. a^* y b^* son direcciones de color: $+a^*$ es el eje rojo, $-a^*$ es el eje verde, $+b^*$ es el eje amarillo y $-b^*$ es el eje azul.

Fuente: Schanda (2007)

En la figura 2.5, se muestra una representación gráfica de las coordenadas de los valores CIElab, estos se calculan a partir de los valores triestímulos del sistema CIExyz descrito anteriormente.

3. Marco Metodológico

3.1. Diseño de la simulación

El aporte metodológico de esta investigación se centra en el estudio del comportamiento de las pruebas de análisis de varianza para datos funcionales, según la forma en la que se transforme la variable de respuesta. Dependiendo de la transformación que se elija para la variable de respuesta se puede aplicar un ANOVA funcional, multivariado o univariado.

En la actualidad no se cuenta con estudios comparativos que relacionen este tipo de pruebas, de aquí nace la necesidad de realizar estudios que produzcan evidencias empíricas que indiquen cuál de ellas es la más apropiada en ciertas condiciones. Debido a esto, se procede a generar evidencias mediante diferentes escenarios de simulación, los cuales relacionan el tamaño de muestra en los grupos de tratamiento, la varianza de los errores, la potencia de la prueba, la diferencia mínima por detectar y la tasa de error tipo I.

Como se mencionó en el marco teórico, "hay diferentes pruebas para el análisis de la varianza para datos funcionales"(J. Zhang, 2013), pero la prueba basada en la norma L^2 , de tipo F y la puntual globalizada GPF proporcionan una mejor potencia cuando se trabaja con muestras relativamente grandes (Gorécki y Smaga, 2015), tam-

bién, a través de algunos estudios de simulación se ha demostrado que, en términos de control de tamaño de prueba y potencia, la prueba GPF es en general comparable con la prueba basada en la norma L^2 y la prueba de tipo F adoptada para el problema ANOVA de una vía J. Zhang y Liang (2014). Es por esto, que en esta investigación se emplea estas tres pruebas de análisis de la varianza funcional las cuales se comparan con el ANOVA multivariado y el univariada.

Según como se aprecia en la figura 3.1, cuando la variable de respuesta funcional *Reflectancia* se descompone en valores CIExyz y CIElab se logra realizar la comparación de las tres técnicas de análisis de la varianza, es decir, se compara el FANOVA con sus equivalentes multivariada y univariada y así obtener evidencia empírica a favor de estas técnicas.

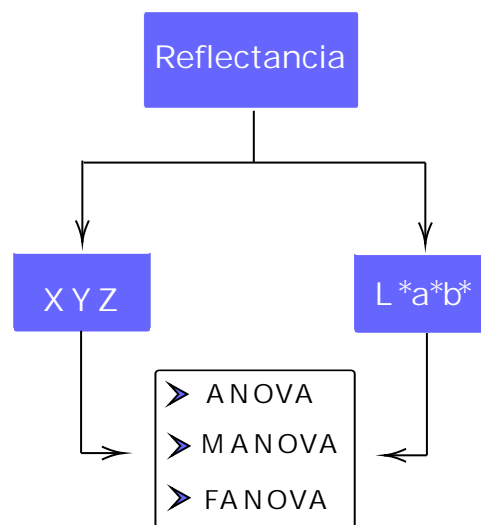


Figura 3.1.

Técnicas de análisis de la varianza empleadas en el estudio de simulación según la forma de descomponer la variable respuesta funcional.

1/ Al descomponer la variable de respuesta funcional en valores CIExyz y CIElab se logra realizar la comparación de las tres técnicas de análisis de la varianza.

Para obtener la variable de respuesta en los casos donde se aplica la técnica

de ANOVA univariado se emplea la norma euclídea, esto debida a que los sistemas CIExyz y CIElab corresponden a una base ortogonal.

Para la ejecución de la técnica de análisis funcional de la varianza de una vía se cuenta con el paquete `fdANOVA` desarrollado en R por los autores [Gorécki y Smaga \(2015\)](#) y para el caso de dos vías con interacción se elaboró una función en el mismo lenguaje de programación estadístico para realizar el ANOVA funcional de dos vías con interacción. Esta función desarrollada en R es uno de los aportes de esta investigación a la comunidad científica.

3.1.1. El modelo de simulación

El modelo empleado en esta investigación es el clásico análisis de la varianza de una vía y de dos vías con interacción, ambos balanceados, para datos funcionales, multivariados y univariados. Para el caso del ANOVA de una vía se emplea un factor con tres niveles o grupos de tratamiento, este modelo está dado por:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \quad (3.1)$$

donde μ corresponde a la media global, τ_i el efecto del i -ésimo tratamiento.

En el caso del ANOVA de dos vías con interacción se emplea dos factores, ambos con dos niveles y el número de grupos de tratamiento corresponden a cuatro. Este modelo está dado por:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \eta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \quad \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2) \quad (3.2)$$

donde μ corresponde a la media global, τ_i es el efecto del i -ésimo nivel del primer factor, η_j es el efecto del j -ésimo nivel del segundo factor y γ_{ij} es el efecto debido a la

interacción entre el i -ésimo nivel del primer factor y el j -ésimo nivel del segundo factor.

3.1.2. Los escenarios para la simulación

En los estudios de simulación es necesario fijar valores poblacionales o parámetros para establecer valores teóricos de referencia, los cuales servirán para comparar con los resultados obtenidos en los escenarios de simulación planteados. En este estudio para comparar las técnicas de análisis de la varianza, en el caso de una vía, se estableció un factor con tres niveles, es decir, tres grupos de tratamientos, los tamaños de muestra para estos grupos varían en $n = 10, 20, \dots, 90, 100$ y la desviación estándar de la perturbación del error, en los grupos, aumenta con el fin de incrementar el incumplimiento al supuesto de varianza constante en 0%, 10%, 20% y 30%, además de esto, se fijaron tres valores verdaderos para las tasas de error tipo I, los cuales son los más empleadas en la inferencia estadística (0,01, 0,05 y 0,1). La cantidad de ensayos en la simulación es de 4, al integrar la diferencia mínima por detectar δ , la cantidad total es de 8.

Para el caso del ANOVA de dos vías con interacción se consideraron dos factores con dos niveles cada uno, esto hace que la interacción sea de cuatro niveles o grupos de tratamiento; el tamaño de muestra para cada uno de estos grupos varía en $n = 50, 100, \dots, 500$, la desviación estándar de la perturbación del error para los cuatro grupos en la interacción irá en aumento con el fin de incrementar el incumplimiento al supuesto de varianza constante en 0%, 20% y 40%, de la misma forma se fijaron tres valores verdaderos para las tasas de error tipo I (0,01, 0,05 y 0,1); con respecto de la cantidad de ensayos, se realizan 3. En total la cantidad de ensayos de simulación en este estudio es de 11.

3.1.3. Ensayos para el modelo ANOVA de una vía

En el caso del análisis de la varianza de una vía se han establecido cuatro ensayos, los cuales se nombraron A, B, C y D, en cada uno de ellos, el factor contiene tres niveles, según como se aprecia en la tabla 3.1. Para el estudio de la potencia y las tasas de error tipo I se establecieron valores de tamaño de muestra de los grupos (la cantidad de grupos k es de 3) que varían en $n = 50, 100, \dots, 500$, se utilizan estos valores de muestra debido a que en la actualidad el obtener una muestra funcional podría tomar días, meses o años, además que se busca recopilar evidencia empírica del desempeño de las pruebas para valores de muestra, relativamente, pequeños.

En el caso del error tipo I, se emplearon los valores más utilizadas en la inferencia estadística, los cuales son: 0,01, 0,05 y 0,1 (Montgomery, 2017).

Para evidenciar, empíricamente, la robustez de las pruebas con respecto del incumplimiento del supuesto de varianza constante se establecen valores para la desviación estándar de los errores, estos valores van de 35 a 95, incrementando el incumplimiento del supuesto en 0%, 10%, 20% y 30% (J. Zhang y Liang, 2014).

La variable de respuesta, inicialmente, corresponde al porcentaje de reflectancia espectral la cual es un conjunto de funciones discretas con 531 nodos o puntos, en el caso de emplear toda la curva como variable dependiente la técnica utilizada será un ANOVA funcional y si se descompone en valores CIExyz o CIElab se procede a realizar el ANOVA multivariado y el univariado, esto con el fin de comparar las tres técnicas de análisis de la varianza.

Tabla 3.1.
Ensayos para el ANOVA de una vía.

Ensayos	Factores		
	n	σ	Error tipo I
A	10, 20, ..., 100	65, 65, 65	0,01, 0,05, 0,1
B	10, 20, ..., 100	55, 65, 75	0,01, 0,05, 0,1
C	10, 20, ..., 100	45, 65, 85	0,01, 0,05, 0,1
D	10, 20, ..., 100	35, 65, 95	0,01, 0,05, 0,1

$1/n$ corresponde al tamaño de muestra en cada grupo, con $k = 3$ grupos o niveles del factor, σ es la desviación estándar de los errores para cada grupo.

2/ El incumplimiento al supuesto de varianza constante se incrementa en 0%, 10%, 20% y 30%

Fuente: Elaboración propia.

Se establecen cuatro ensayos, denominados E, F, G y H, en estos se integra a la simulación la diferencia mínima por detectar, en estos se emplea la descomposición en valores CIExyz y se compara el desempeño de las pruebas, en cuanto a la potencia, tasas de error tipo I y robustez ante el incumplimiento del supuesto de la varianza constante.

Los valores para esta diferencia mínima detectable se establecieron en 0,25, 0,5, 0,75 y 1, siguiendo el estudio realizado por [J. Zhang y Liang \(2014\)](#).

Tabla 3.2.
Ensayos para el ANOVA de una vía que incluye la diferencia mínima δ por detectar.

Ensayos	Factores			
	n	σ	δ	Error tipo I
E	50, 100, ..., 500	65, 65, 65	0,25, 0,50, 0,75, 1	0,01, 0,05, 0,1
F	50, 100, ..., 500	55, 65, 75	0,25, 0,50, 0,75, 1	0,01, 0,05, 0,1
G	50, 100, ..., 500	45, 65, 85	0,25, 0,50, 0,75, 1	0,01, 0,05, 0,1
H	50, 100, ..., 500	35, 65, 95	0,25, 0,50, 0,75, 1	0,01, 0,05, 0,1

$1/n$ corresponde al tamaño de muestra en cada grupo, con $k = 3$ grupos o niveles del factor, σ es la desviación estándar de los errores, δ es la diferencia mínima por detectar.

2/ El incumplimiento al supuesto de varianza constante se incrementa en 0%, 10%, 20% y 30%

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 3.2 se especifican los ensayos con la diferencia mínima δ , son prácticamente, los mismos de la tabla 3.1, pero con la diferencia de que se aplican solo para la primera descomposición de la variable de respuesta funcional y el tamaño de muestra, para cada grupo, toma valores de 50 en 50 hasta 500, esto debido a que se requiere mayor muestra para detectar diferencias, relativamente, pequeñas.

3.1.4. Ensayos para el modelo ANOVA de dos vías con interacción

Los ensayos para evaluar el desempeño de las pruebas de análisis de la varianza de dos vías con interacción se denominaron I, J y K, con dos factores de dos niveles cada uno, esto da un total de $k = 4$ grupos de tratamiento (grupos en la interacción), donde los tamaños de muestra para estos grupos van de 50 en 50 hasta 500. Para evaluar la robustez de las pruebas, respecto del incumplimiento del supuesto de varianza constante, se establecen valores para la desviación estándar de los errores que incrementan de 45 a 105 unidades de reflectancia, estos valores hacen que se incumpla el supuesto en 0%, 20 y 40%.

Tabla 3.3.

Ensayos para el ANOVA de dos vías con interacción.

Ensayos	Factores		
	n	σ	Error tipo I
I	50, 100, ..., 500	65, 65, 65, 65	0,01, 0,05, 0,1
J	50, 100, ..., 500	55, 65, 75, 85	0,01, 0,05, 0,1
K	50, 100, ..., 500	45, 65, 85, 105	0,01, 0,05, 0,1

1/ n corresponde al tamaño de muestra en cada grupo, con $k = 4$ es el número de grupos o tratamientos en la interacción, σ es la desviación estándar de los errores.

2/La violación del supuesto de varianza constante se incrementa en 0%, 20% y 40%

Fuente: Elaboración propia.

Los ensayos especificados en la tabla 3.3, se llevan a cabo para la descomposición de la variable de respuesta en valores CIExyz y se comparan las tres técnicas de análisis de la varianza.

3.1.5. Generación de los conjuntos de datos

3.1.5.1. En el análisis de la varianza de una vía

Para generar los conjuntos de datos requeridos en cada escenario de simulación, en el caso del análisis de la varianza de una vía, se eligen como curvas medias generales a tres espectros, correspondientes a tres especies diferentes de escarabajos; de aquí que el efecto promedio de cada tratamiento está englobado en el hecho de que las especies son distintas. Estos conjuntos de datos se emplean para evaluar el desempeño de las pruebas respecto a la potencia y las tasas de error tipo I empíricos, así como en el incumplimiento del supuesto de varianza constante, estos están contruidos siguiendo el modelo de ANOVA como se especificó en la sección 3.1. Además, se tomó como referencia el trabajo realizado por [Gorécki y Smaga \(2015\)](#).

Respecto al incumplimiento del supuesto de varianza constante, se consideran valores que incumplen este supuesto de una forma incrementada de 0%, 10%, 20% y 30%, estos varían según las condiciones de la simulación.

Para cada uno de los escenarios se construyen mil conjuntos de datos diferentes mediante la función `map` del paquete `purrr`, a esta misma función se le indica que aplique el ANOVA indicado (funcional, multivariado o univariado) a los mil conjuntos de datos; de la misma función se obtiene los p-valores.

3.1.5.2. En el análisis de la varianza de dos vías con interacción

Para generar los conjuntos de datos requeridos en cada escenario, en el caso del análisis de la varianza de dos vías con interacción, se eligen como curvas medias generales a cuatro diferentes espectros (de estas cuatro medias generales se obtienen los niveles de la interacción), correspondientes a tres especies diferentes de escarabajos; a partir de estas cuatro medias se generan cuatro conjuntos de datos que serán los cuatro grupos de tratamientos de la interacción, finalmente, estos se unen en un solo conjunto de datos.

Este conjunto de datos se emplean para evaluar el desempeño de las pruebas con respecto a la potencia y las tasas de error tipo I empíricos, así como en el incumplimiento del supuesto de varianza constante, estos están contruidos siguiendo el modelo de ANOVA como se especificó en la sección 3.2 y siguiendo los trabajos de Cuestas y Febrero (2010) y Gorécki y Smaga (2015).

Respecto del incumplimiento del supuesto de varianza constante, se consideran valores que incumplen este supuesto de una forma incrementada de 0%, 20% y 40%, estos varían según las condiciones de la simulación.

Para cada uno de los escenarios se construyen mil conjuntos de datos diferentes mediante la función `map` del paquete `purrr`, a esta misma función se le indica que aplique el ANOVA indicado (funcional, multivariado o univariado) a los mil conjuntos de datos; de la misma función se obtiene los p-valores.

3.2. Caso de aplicación: Mediciones espectrofotométricas en escarabajos del género *Chrysina*

El conjunto de datos empleado en este trabajo, como caso de aplicación, corresponde a 400 mediciones espectrofotométricas tomadas de escarabajos con apariencia metálica, dichas mediciones fueron recolectadas por el Centro de Investigación en Ciencia e Ingeniería de Materiales (CICIMA) con el fin de estudiar y replicar el aspecto metálico de estos escarabajos en nuevos materiales tales como recubrimientos con aspecto dorado o plateado entre otros, pero sin las propiedades de los metales como la conducción eléctrica o térmica.

Una ventaja de estos materiales es su composición de moléculas orgánicas, por lo que sería biodegradable e inspirado en la biodiversidad costarricense. La industria se beneficiaría de los resultados de estas investigaciones ya que, reproducirían los mismos tonos y propiedades del color de los escarabajos con aspectos metálicos en la fabricación nuevos materiales.

Con el análisis de estos datos y la aplicación del análisis de la varianza funcional se pretende proporcionar al CICIMA de una guía de uso en los experimentos llevados a cabo con mediciones espectrales.

3.2.1. Fuente de datos

Los datos fueron recolectados en el Centro de Investigación en Ciencia e Ingeniería de Materiales (CICIMA) de la Universidad de Costa Rica, los cuales corresponden a $N_{\lambda} = 400$ mediciones espectrales ópticas para tres especies de escarabajos (*Chrysina*

aurigans, *Chrysina optima dorado* y *Chrysina optima plateado*), para longitudes de onda entre 400 a 900 nm. Estos datos son empleados por el CICIMA para estudiar el origen de la apariencia metálica de los escarabajos en diferentes regiones del élitro del insecto.

El instrumento utilizado para la recolección de los datos es un micro-espectrofotómetro CRAIC 508 PVTMUV-visible-NIR propiedad del CICIMA. La recolección de la muestra estuvo a cargo de una estudiante de física, asistente en este centro de investigación.

El conjunto de datos cuenta con los espectros de luz en el escarabajo según el tamaño del área en el élitro, así como la resolución del microscopio (5x, 10x, 50x, 100x) y la especie.

3.2.2. Definición de las variables

En la tabla 3.4, se muestra las diferentes variables que se consideraron en el análisis descriptivo del conjunto de datos de las mediciones hechas en escarabajos, junto con su abreviación, el tipo de variable y el valor de cada una de ellas, mismas que se definen, posteriormente.

Tabla 3.4.
Variables a en el caso de aplicación.

Variable	Abreviación	Tipo	Valor
Respuesta			
Porcentaje de reflectancia espectral	Y	Numérica	De 0 a 100%
CIExyz	XYZ	Numérica	Según función espectral
CIElab	Lab	Numérica	Según función espectral
Factores		Niveles	
Especie	especie	Nominal	Aurigans, dorado y plateado
Objetivo	objetivo	Nominal	5x, 10x, 20x, 50x, 100x
Apertura	apertura	Nominal	A1, A2, A3, A4
Posición	spot	Nominal	Derecho, inferior, izquierdo, superior

Fuente: Elaboración propia.

Longitud de onda (λ nm): En una onda periódica, la distancia entre dos puntos de fase correspondiente en ciclos consecutivos.

Especie: Se refiere a la especie de los escarabajos, todos del género *Chrysina*, especies *optima* y *aurigans*. Respecto de la especie *optima* se midieron dos subespecies, una con apariencia dorada y la otra plateada.

Objetivo: Es el tipo de lente objetivo que se empleó en la recolección de la muestra. Lente objetivo recoge la luz de la muestra, que se enfoca para producir la imagen real que se ve en la lente ocular. Esencialmente, las lentes objetivas se pueden clasificar en tres categorías principales en función de su poder de aumento. Estos incluyen: objetivos de bajo aumento (5x y 10x) objetivos de aumento intermedio (20x y 50x) y objetivos de alto aumento (100x).

Apertura: Es el área establecida donde incide la fuente de luz sobre el élitro del escarabajo.

Posición: Corresponde a la posición en el élitro del escarabajo donde se le tomó la medición, esta podría ser derecho, inferior, izquierdo y superior.

3.2.3. Evidencia de la calidad de las mediciones

La tecnología del micro-espectrofotómetro permite identificar estructuras con el espectro del color, de modo que su captación sea aun más exacta, en otras palabras, asegura la calidad de las mediciones espectrales y del color a la hora de determinar la cantidad de reflexión de la luz (para un mismo punto, los espectros medidos son

reproducibles a centésimas de nanómetro).



Figura 3.2.

Micro-Espectrofotómetro empleado en las mediciones.

1/Micro-Espectrofotómetro CRAIC 508 PVTMUV-visible-NIR.

Fuente: CICIMA.

3.3. Software estadístico y paquetes a emplear

Tanto el estudio de simulación como en análisis de los datos de las mediciones espectrofotométricas, en el caso del estudio de aplicación, se realizaron en el programa estadístico R en su versión 3.5.2 (R Core Team, 2018). Los paquetes por emplear en este trabajo son:

fda: Paquete para la implementación del análisis de datos funcionales (Ramsay y Silverman, 2005).

fdANOVA: Paquete para el análisis univariado y multivariado de la varianza funcional (Gorécki y Smaga, 2015).

fs: Paquete para el manejo de archivos en R, tales como: escritura, lectura, entre otros (Hester y Wickham, 2019).

ggplot2: Paquete para la creación de gráficos elegantes y complejos (Wickham, 2016).

Hmisc: Contiene muchas funciones útiles para el análisis de datos, gráficos de alto nivel, operaciones de utilidad tales como la creación avanzada de tablas, agrupación de variables, manipulación de cadenas de caracteres, conversión de objetos R a LaTeX y código html, y variables de recodificación (Harrell Jr et al., 2019).

onlinePCA: Paquete para datos funcionales y multivariados utiliza métodos de perturbación, métodos incrementales de bajo rango y métodos de optimización estocástica, así como creación de funciones base (Degras y Cardot, 2016).

purrr: Paquete que proporciona un conjunto completo y consistente de herramientas de programación funcional de R para trabajar con funciones y vectores. Contiene funciones que permiten reemplazar muchos bucles por códigos que sean más concisos y fáciles de leer (Henry y Wickham, 2019).

reshape2: Paquete que facilita la transformación de conjuntos de datos entre formatos anchos y largos (Wickham, 2007).

tidyverse: Es una colección de paquetes de R para la ciencia de datos, los cuales incluyen visualización, manipulación (lectura, escritura y ordenamiento) de conjuntos de datos, importación de datos, modelado entre otras. Hace que las rutinas y funciones escritas por el usuario sean más eficientes y eficaces (2017).

Esta investigación contó con el apoyo de una asignación computacional en la supercomputadora Kabré del Centro Nacional de Alta Tecnología de Costa Rica, la cantidad estimada de horas empleadas en las simulaciones realizadas en la supercomputadora fueron alrededor de 1 000 horas.

4. Resultados

Este capítulo se centra en la presentación de los resultados obtenidos del estudio de simulación propuesto para comparar el desempeño de diferentes pruebas de análisis de la varianza, respecto de la potencia y las tasas de error tipo I empíricos, así como su comportamiento ante el incumplimiento del supuesto de varianza constante entre grupos, esto en datos funcionales.

El incumplimiento del supuesto de homocedasticidad produce que los estadísticos habituales empleados en las pruebas de hipótesis pierdan validez, por esta razón se ha determinado un ensayo base, en el que se cumpla el supuesto de homocedasticidad, con el cual se comparan los resultados obtenidos en cada una de las variaciones de los ensayos planteados en las tablas 3.1, 3.2 y 3.3.

Este capítulo está dividido en tres secciones, en los cuales se analiza los resultados empíricos de la potencia y las tasas de error tipo I. La primera sección se proporciona los resultados de los ensayos en el ANOVA de una vía, en la segunda se detallan los hallazgos correspondientes a los ensayos, incluyendo la diferencia mínima por detectar y finalmente, en la tercera sección se estudia los resultados de los ensayos en el ANOVA de dos vías con interacción; en los tres casos.

4.1. ANOVA de una vía

Antes de iniciar con los resultados obtenidos, es importante recordar que, el ensayo A, corresponde al ensayo base, en este se cumple con el supuesto de igualdad de varianzas en los grupos, y se emplea para comparar con los otros ensayos que se establecieron en el estudio.

Seguidamente, se detalla los resultados de las potencias, tasas de error tipo I empíricas para el caso de un ANOVA de una vía y dos vías con interacción.

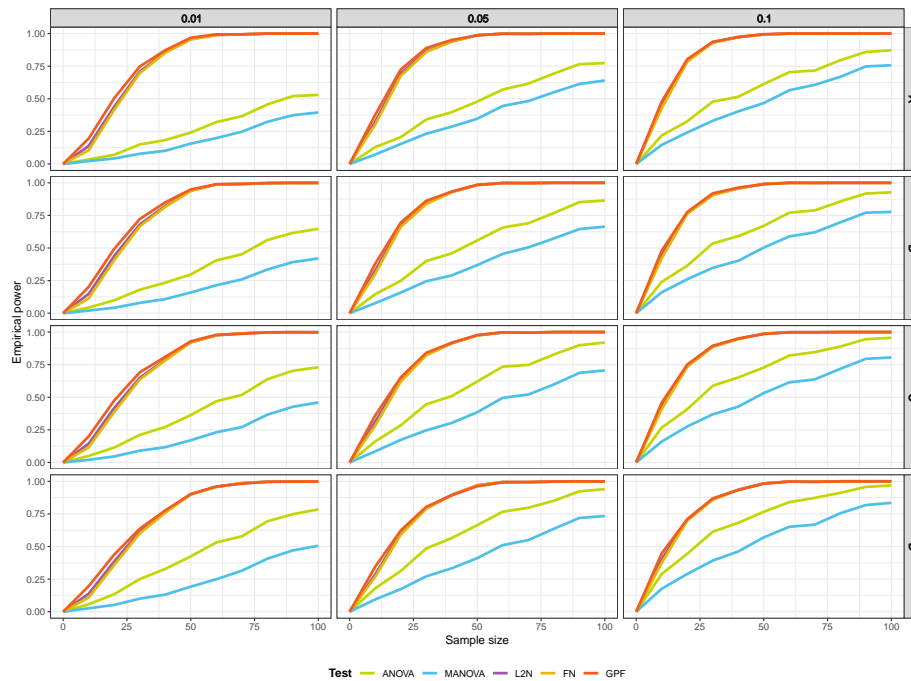
4.1.1. Potencia y tasas de error empírico tipo I en la descomposición CIExyz.

En el caso de las pruebas de análisis funcional de la varianza; L2N, FN y GPF, la variable de respuesta es toda la curva espectral, mientras que para las pruebas ANOVA y MANOVA se obtiene de la descomposición CIExyz.

Por otra parte, la potencia en el ensayo A (ensayo base), a pesar de cumplir con el supuesto de varianza constante entre los grupos, las pruebas de ANOVA y MANOVA proporcionaron potencias muy inferiores a 0.8, en todos los tamaños de muestra y para los tres niveles de significancia estadística; mientras que las potencias empíricas de las tres pruebas de FANOVA fueron superiores en comparación con las demás, en todos los tamaños de muestra de los grupos.

Ocurre lo mismo para los demás ensayos, las pruebas de FANOVA alcanzaron mayores potencias, en comparación con las demás pruebas en todos los tamaños de muestra. En los tres ensayos B, C y D se necesitaría, aproximadamente, con un tamaño de muestra de 50 para alcanzar una potencia de 0.8 (por convención se entiende que

una potencia es adecuada para una prueba estadística cuando es superior a 0,80). Entre estas pruebas de FANOVA, no se observa que haya alguna mejor que la otra, esto porque proporcionan potencias muy parecidas, según como se aprecia en el cuadro 4.1 y la gráfica 4.1.



Gráfica 4.1.

Potencia empírica de las pruebas en cada ensayo y nivel de significancia para la descomposición CIExyz.

1/En el caso funcional se toma toda la curva como variable de respuesta, para el multivariado las variables de respuestas son cada componente CIE_{xyz} y para el caso univariado se emplea la norma Euclídea $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$.

Fuente: Elaboración propia.

En la gráfica 4.1, se observa que las pruebas de FANOVA son robustas, ante el incumplimiento del supuesto de la varianza constante, ya que, en cada ensayo y nivel de significancia estadística sus potencias empíricas son muy similares en los tres ensayos donde se incumple en un 10%, 20% y un 30%, dicho supuesto.

Cuadro 4.1.

Potencia empírica empleando la descomposición CIExyz, para cada tamaño de muestra y significancia estadística.

Ensayos	FUNCIONAL															
	ANOVA			MANOVA			L2N			FN			GPF			
	N	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1
A	10	0,035	0,129	0,218	0,022	0,072	0,146	0,138	0,325	0,454	0,105	0,302	0,426	0,195	0,377	0,478
	20	0,07	0,205	0,327	0,042	0,153	0,241	0,439	0,693	0,789	0,416	0,675	0,783	0,504	0,724	0,803
	30	0,149	0,341	0,478	0,078	0,232	0,331	0,708	0,866	0,931	0,696	0,859	0,93	0,747	0,889	0,937
	40	0,183	0,397	0,515	0,101	0,286	0,403	0,858	0,939	0,973	0,853	0,939	0,972	0,872	0,951	0,974
	50	0,241	0,478	0,613	0,156	0,347	0,467	0,959	0,988	0,993	0,954	0,987	0,993	0,968	0,986	0,995
	60	0,321	0,571	0,704	0,198	0,445	0,565	0,989	0,999	1	0,989	0,999	1	0,994	0,999	1
	70	0,366	0,616	0,717	0,247	0,482	0,607	0,994	0,998	1	0,994	0,998	1	0,994	0,998	1
	80	0,456	0,693	0,796	0,323	0,55	0,668	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	90	0,52	0,765	0,859	0,374	0,613	0,748	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	100	0,53	0,774	0,872	0,395	0,64	0,757	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B	10	0,043	0,146	0,24	0,02	0,077	0,16	0,148	0,327	0,446	0,113	0,301	0,42	0,202	0,379	0,479
	20	0,099	0,248	0,364	0,042	0,158	0,26	0,439	0,676	0,766	0,407	0,661	0,762	0,493	0,695	0,776
	30	0,18	0,4	0,535	0,079	0,245	0,348	0,68	0,841	0,911	0,665	0,837	0,905	0,722	0,862	0,919
	40	0,234	0,459	0,591	0,108	0,29	0,402	0,823	0,93	0,957	0,815	0,929	0,957	0,85	0,933	0,963
	50	0,297	0,558	0,67	0,159	0,369	0,503	0,941	0,983	0,992	0,937	0,982	0,991	0,949	0,985	0,989
	60	0,405	0,657	0,771	0,214	0,455	0,589	0,988	0,999	1	0,987	0,999	0,999	0,989	0,988	1
	70	0,452	0,69	0,789	0,259	0,505	0,62	0,991	0,998	0,999	0,991	0,998	0,999	0,992	0,998	1
	80	0,561	0,768	0,857	0,335	0,573	0,697	0,997	1	1	0,997	1	1	0,999	1	1
	90	0,616	0,852	0,918	0,392	0,645	0,771	0,999	1	1	0,999	1	1	1	1	1
	100	0,647	0,864	0,927	0,42	0,664	0,777	1	1	1	0,999	1	1	0,999	1	1
C	10	0,05	0,161	0,267	0,02	0,085	0,16	0,144	0,313	0,432	0,116	0,282	0,408	0,2	0,361	0,458
	20	0,114	0,285	0,408	0,046	0,173	0,276	0,417	0,641	0,746	0,386	0,619	0,733	0,475	0,652	0,75
	30	0,211	0,446	0,588	0,09	0,246	0,369	0,649	0,825	0,889	0,636	0,822	0,886	0,691	0,841	0,895
	40	0,272	0,509	0,652	0,117	0,303	0,428	0,788	0,916	0,947	0,782	0,913	0,946	0,81	0,918	0,951
	50	0,363	0,621	0,728	0,17	0,385	0,532	0,922	0,975	0,988	0,92	0,974	0,988	0,929	0,977	0,985
	60	0,469	0,735	0,82	0,231	0,496	0,614	0,975	0,997	0,999	0,975	0,997	0,999	0,979	0,998	0,998
	70	0,518	0,748	0,846	0,271	0,521	0,637	0,99	0,996	0,999	0,99	0,996	0,999	0,987	0,995	0,998
	80	0,638	0,828	0,889	0,366	0,598	0,718	0,997	1	1	0,997	1	1	0,998	1	1
	90	0,703	0,899	0,946	0,427	0,687	0,795	0,999	1	1	0,999	1	1	0,999	1	1
	100	0,73	0,92	0,956	0,46	0,706	0,805	0,999	1	1	0,999	1	1	0,998	1	1
D	10	0,057	0,179	0,289	0,026	0,094	0,176	0,138	0,286	0,402	0,109	0,268	0,375	0,196	0,345	0,447
	20	0,134	0,312	0,444	0,052	0,173	0,289	0,385	0,603	0,706	0,357	0,591	0,698	0,438	0,623	0,709
	30	0,25	0,485	0,613	0,1	0,271	0,392	0,615	0,798	0,864	0,6	0,789	0,858	0,636	0,804	0,869
	40	0,328	0,565	0,682	0,131	0,333	0,462	0,768	0,896	0,936	0,759	0,893	0,934	0,777	0,893	0,933
	50	0,424	0,664	0,766	0,192	0,411	0,57	0,901	0,97	0,984	0,899	0,969	0,983	0,902	0,962	0,982
	60	0,531	0,767	0,84	0,249	0,511	0,651	0,958	0,995	0,998	0,957	0,995	0,998	0,96	0,992	0,998
	70	0,578	0,797	0,873	0,314	0,549	0,668	0,986	0,994	0,997	0,986	0,994	0,997	0,982	0,994	0,996
	80	0,693	0,851	0,912	0,406	0,636	0,755	0,997	0,998	1	0,997	0,998	1	0,996	0,998	1
	90	0,748	0,923	0,957	0,47	0,719	0,818	0,998	0,999	1	0,998	0,999	1	0,998	1	1
	100	0,785	0,94	0,969	0,506	0,734	0,835	0,999	0,999	1	0,999	0,999	1	0,998	0,999	1

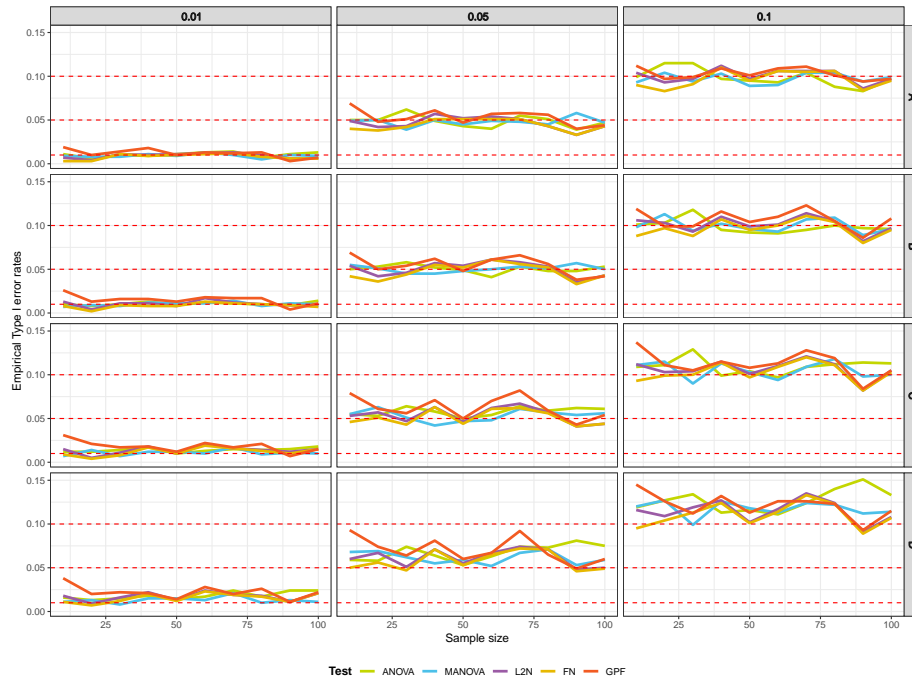
1/α corresponde al nivel de significancia estadística.

2/Estimadas a partir de 1000 iteraciones.

Fuente: Elaboración propia.

Los valores del cuadro 4.1 corresponden a las potencias de las pruebas de análisis de varianza para tamaño de muestra y valores de significancia estadística para cada ensayo, numéricamente, se observa que las potencias de las pruebas de FANOVA proporcionan valores mayores en cada tamaño de muestra y significancia estadística. Cada ensayo reúne 150 escenarios, y en cada uno de esos escenarios se realizaron 1000 iteraciones.

La variabilidad de estas potencias empíricas se encuentra dentro de lo esperado, es decir, que con el aumento de la muestra, la variabilidad de la potencia disminuya hasta alcanzar valores muy cercanos a cero (ver gráfica A.1 del anexo A).



Gráfica 4.2.

Tasas de error tipo I empírico de las pruebas en cada ensayo y nivel de significancia para la descomposición CIExyz.

1/En el caso funcional se toma toda la curva como variable de respuesta, para el multivariado se toman los componentes CIE_{xyz} y para el univariado se toma la norma Euclídea $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$.

2/Las líneas rojas discontinuas indican los valores verdaderos establecidos para las tasas de error tipo I.

Fuente: Elaboración propia.

En el cuadro 4.2, se observa que las tasas de error tipo I empíricas, en general resultaron muy cercanas a los valores verdaderos del error tipo I establecidos en el estudio de simulación para generar los datos, esto confirma que la simulación se ha desarrollado de forma adecuada, ya que, estas tasas de error se mantienen estables en todos los ensayos (ver gráfica 4.2).

Cuadro 4.2.

Tasas de error tipo I empíricas empleando la descomposición CIExyz, para cada tamaño de muestra y significancia estadística.

Ensayos	FUNCIONAL															
	ANOVA			MANOVA			L2N			FN			GPF			
	N	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1
A	10	0,01100	0,05000	0,09900	0,00900	0,04900	0,09300	0,00700	0,04900	0,10400	0,00300	0,04000	0,09000	0,01900	0,06900	0,11200
	20	0,00600	0,05000	0,11500	0,00800	0,05000	0,10400	0,00400	0,04200	0,09300	0,00300	0,03800	0,08300	0,01000	0,04800	0,09700
	30	0,01000	0,06200	0,11500	0,00800	0,03900	0,09400	0,01100	0,04300	0,09700	0,01100	0,04200	0,09100	0,01400	0,05100	0,09900
	40	0,00900	0,04900	0,09700	0,01100	0,05000	0,10300	0,01000	0,05700	0,11200	0,00900	0,05100	0,11000	0,01800	0,06100	0,10900
	50	0,01100	0,04300	0,09500	0,00900	0,04500	0,08900	0,01100	0,05200	0,09700	0,01000	0,05100	0,09500	0,01000	0,04700	0,10100
	60	0,01300	0,04000	0,09300	0,01300	0,04900	0,09000	0,01200	0,05400	0,10600	0,01100	0,05100	0,10600	0,01300	0,05700	0,10900
	70	0,01400	0,05500	0,10400	0,01000	0,04800	0,10400	0,01300	0,05100	0,10600	0,01200	0,05100	0,10500	0,01200	0,05800	0,11100
	80	0,00700	0,05100	0,08800	0,00500	0,04500	0,10400	0,01000	0,04300	0,10600	0,00800	0,04300	0,10600	0,01300	0,05600	0,10100
	90	0,01100	0,03900	0,08300	0,01000	0,05800	0,09400	0,00600	0,03300	0,08600	0,00600	0,03300	0,08400	0,00300	0,04000	0,09400
	100	0,01300	0,04700	0,09700	0,00900	0,04700	0,09900	0,00600	0,04300	0,09700	0,00600	0,04300	0,09500	0,00700	0,04400	0,09700
B	10	0,01000	0,05000	0,10100	0,00700	0,05500	0,09800	0,01300	0,05400	0,10600	0,00800	0,04200	0,08800	0,02600	0,06900	0,11900
	20	0,00800	0,05300	0,10300	0,00900	0,05100	0,11300	0,00400	0,04200	0,10300	0,00200	0,03600	0,09700	0,01300	0,05000	0,09900
	30	0,01000	0,05800	0,11800	0,00800	0,04500	0,09400	0,01100	0,04600	0,09300	0,00900	0,04400	0,08800	0,01600	0,05400	0,09900
	40	0,01300	0,05200	0,09500	0,01200	0,04500	0,10200	0,01100	0,05700	0,11000	0,00800	0,05500	0,10700	0,01600	0,06200	0,11600
	50	0,00900	0,04900	0,09200	0,01100	0,04800	0,09600	0,00800	0,05400	0,09900	0,00800	0,05200	0,09500	0,01300	0,04800	0,10400
	60	0,01200	0,04100	0,09100	0,01100	0,05000	0,09300	0,01700	0,06100	0,10100	0,01300	0,06100	0,10000	0,01800	0,06100	0,11000
	70	0,01100	0,05300	0,09500	0,01400	0,05300	0,10700	0,01200	0,05800	0,11400	0,01100	0,05600	0,11100	0,01700	0,06600	0,12300
	80	0,01000	0,04800	0,10000	0,00800	0,05100	0,10900	0,01000	0,05300	0,10500	0,01000	0,05200	0,10400	0,01700	0,05600	0,10500
	90	0,00900	0,04800	0,09700	0,01100	0,05700	0,08900	0,00900	0,03500	0,08200	0,00900	0,03300	0,08000	0,00400	0,03800	0,08600
	100	0,01400	0,05300	0,09600	0,01000	0,05000	0,09600	0,00800	0,04300	0,09700	0,00700	0,04300	0,09500	0,01100	0,04200	0,10800
C	10	0,01200	0,05500	0,10900	0,00700	0,05500	0,11100	0,01500	0,05300	0,11200	0,00900	0,04600	0,09300	0,03100	0,07900	0,13700
	20	0,01200	0,05300	0,11100	0,01400	0,06300	0,11500	0,00500	0,05700	0,10300	0,00400	0,05100	0,09900	0,02100	0,06100	0,11100
	30	0,01400	0,06400	0,12900	0,00700	0,05100	0,09000	0,01100	0,04700	0,10400	0,00800	0,04300	0,10000	0,01700	0,05600	0,10500
	40	0,01700	0,05800	0,09900	0,01200	0,04200	0,11300	0,01800	0,06300	0,11500	0,01700	0,06300	0,11400	0,01800	0,07100	0,11500
	50	0,01000	0,05000	0,10400	0,01200	0,04700	0,10300	0,01000	0,04600	0,10100	0,01000	0,04400	0,09700	0,01200	0,05000	0,10800
	60	0,01300	0,05400	0,09700	0,01000	0,04800	0,09400	0,02000	0,06200	0,11000	0,01900	0,06100	0,10900	0,02200	0,07000	0,11300
	70	0,01500	0,06400	0,10900	0,01700	0,06100	0,10900	0,01600	0,06700	0,12100	0,01600	0,06200	0,12000	0,01700	0,08200	0,12800
	80	0,01400	0,05900	0,11200	0,00900	0,05700	0,11800	0,01400	0,05700	0,11200	0,01300	0,05600	0,11100	0,02100	0,05900	0,11900
	90	0,01500	0,06200	0,11400	0,01100	0,05400	0,09800	0,01200	0,04100	0,08200	0,01000	0,04100	0,08200	0,00700	0,04300	0,08400
	100	0,01800	0,06100	0,11300	0,01000	0,05600	0,10000	0,01500	0,04400	0,10500	0,01500	0,04400	0,10300	0,01500	0,05400	0,10500
D	10	0,01600	0,05900	0,11900	0,01100	0,06800	0,12000	0,01800	0,06000	0,11600	0,01100	0,05000	0,09500	0,03800	0,09300	0,14500
	20	0,01300	0,05800	0,12700	0,01300	0,06900	0,12700	0,00900	0,06700	0,10900	0,00700	0,05600	0,10400	0,02000	0,07400	0,12600
	30	0,01500	0,07400	0,13400	0,00800	0,06200	0,09900	0,01600	0,05100	0,11900	0,01200	0,04700	0,11300	0,02200	0,06400	0,11200
	40	0,01800	0,06400	0,11300	0,01500	0,05500	0,12600	0,02200	0,07100	0,12700	0,02000	0,07100	0,12400	0,02100	0,08100	0,13200
	50	0,01400	0,05300	0,11600	0,01500	0,05900	0,11800	0,01300	0,05500	0,10200	0,01200	0,05300	0,10100	0,01400	0,06000	0,11300
	60	0,01700	0,06300	0,11100	0,01300	0,05200	0,11300	0,02400	0,06700	0,11700	0,02300	0,06500	0,11400	0,02800	0,06700	0,12600
	70	0,02400	0,07400	0,12400	0,02100	0,06700	0,12400	0,01900	0,07400	0,13500	0,01900	0,07200	0,13300	0,02000	0,09200	0,12600
	80	0,01700	0,07300	0,14000	0,01000	0,07100	0,12200	0,01800	0,07100	0,12400	0,01700	0,07100	0,12300	0,02600	0,06500	0,12300
	90	0,02400	0,08100	0,15100	0,01300	0,05300	0,11200	0,01100	0,04800	0,09100	0,01100	0,04600	0,08900	0,01100	0,04900	0,09300
	100	0,02400	0,07500	0,13300	0,01100	0,05900	0,11400	0,02100	0,05000	0,10800	0,02100	0,04900	0,10700	0,02200	0,06000	0,11500

1/ α corresponde al nivel de significancia estadística.

2/Estimadas a partir de 1000 iteraciones.

Fuente: Elaboración propia.

La variabilidad de estas tasas de error tipo I se encuentra dentro de lo esperado, es decir, que con el aumento de la muestra, la variabilidad de estas tasas disminuya hasta alcanzar valores muy cercanos a cero (ver gráfica A.2 del anexo A).

Los hallazgos, en esta primera parte donde la variable de respuesta se descompone en valores CIExyz, se resumen, en qué, en términos de potencia estadística las pruebas de FANOVA tienen mayor capacidad de detectar más rápidamente cambios entre las curvas promedio, con un menor tamaño de muestra, además que estas son más robustas ante el incumplimiento del supuesto de varianza constante.

4.1.2. Potencia y tasas de error empírico tipo I en la descomposición CIElab

La descomposición CIElab permite la comparación de las tres técnicas de análisis de varianza de la misma forma que en la descomposición CIExyz, se tomó toda la curva como variable de respuesta para el caso del FANOVA y los tres componentes triestímulo del CIElab se tomaron como respuestas para el MANOVA. En el caso de ANOVA univariado la variable de respuesta se obtuvo al aplicar la norma Euclídea sobre estos componentes triestímulo.

Los resultados proporcionados en el cuadro 4.3, muestran en todos los ensayos y nivel de significancia estadística, mayores potencias para las tres pruebas de análisis funcional de la varianza en comparación con las demás. En los ensayos B, C y D, con porcentajes de 10%, 20% y 30% de incumplimiento al supuesto de homocedasticidad, las tres pruebas de FANOVA resultaron ser más robustas.

Cuadro 4.3.
Potencia empírica empleando la descomposición CIElab, para cada tamaño de muestra y significancia estadística.

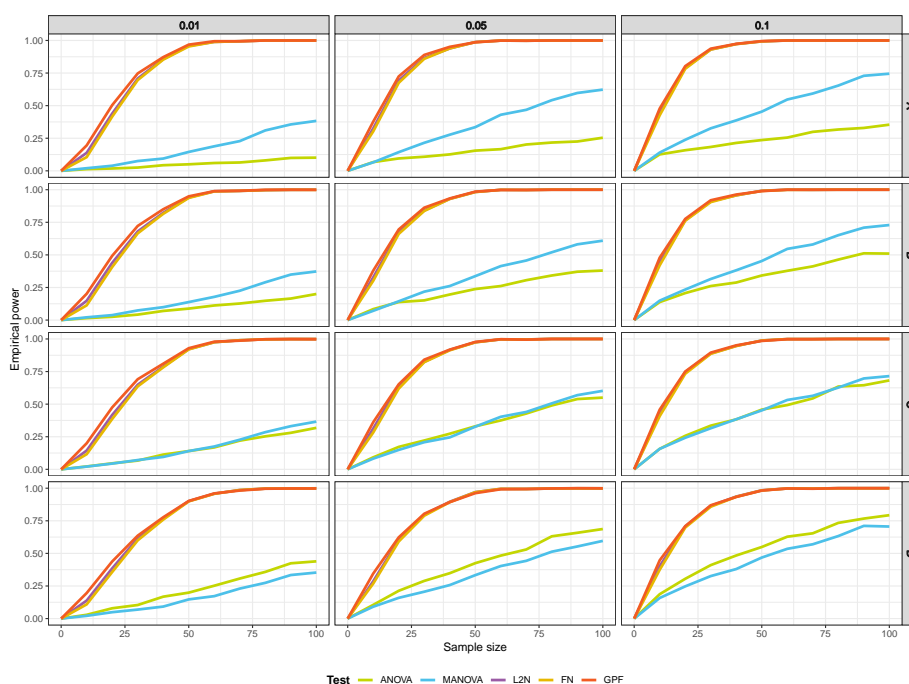
Ensayos	FUNCIONAL															
	ANOVA			MANOVA			L2N			FN			GPF			
	N	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	α			0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1
A	10	0,013	0,067	0,126	0,020	0,065	0,140	0,138	0,325	0,454	0,105	0,302	0,426	0,195	0,377	0,478
	20	0,018	0,095	0,158	0,039	0,143	0,238	0,439	0,693	0,789	0,416	0,675	0,783	0,504	0,724	0,803
	30	0,025	0,108	0,183	0,075	0,215	0,326	0,708	0,866	0,931	0,696	0,859	0,930	0,747	0,889	0,937
	40	0,043	0,126	0,214	0,094	0,277	0,387	0,858	0,939	0,973	0,853	0,939	0,972	0,872	0,951	0,974
	50	0,050	0,155	0,236	0,145	0,335	0,454	0,959	0,988	0,993	0,954	0,987	0,993	0,968	0,986	0,995
	60	0,060	0,166	0,255	0,188	0,430	0,547	0,989	0,999	1	0,989	0,999	1	0,994	0,999	1
	70	0,064	0,202	0,299	0,228	0,468	0,593	0,994	0,998	1	0,994	0,998	1	0,994	0,998	1
	80	0,080	0,217	0,317	0,310	0,542	0,654	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	90	0,099	0,225	0,329	0,356	0,597	0,729	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	100	0,101	0,254	0,354	0,383	0,623	0,745	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B	10	0,015	0,084	0,138	0,021	0,071	0,149	0,148	0,327	0,446	0,113	0,301	0,420	0,202	0,379	0,479
	20	0,025	0,138	0,207	0,038	0,144	0,234	0,439	0,676	0,766	0,407	0,661	0,762	0,493	0,695	0,776
	30	0,042	0,151	0,261	0,074	0,218	0,315	0,680	0,841	0,911	0,665	0,837	0,905	0,722	0,862	0,919
	40	0,070	0,196	0,288	0,099	0,261	0,382	0,823	0,930	0,957	0,815	0,929	0,957	0,850	0,933	0,963
	50	0,088	0,238	0,342	0,138	0,337	0,453	0,941	0,983	0,992	0,937	0,982	0,991	0,949	0,985	0,989
	60	0,112	0,261	0,378	0,178	0,414	0,546	0,988	0,999	1	0,987	0,999	0,999	0,989	0,998	1
	70	0,127	0,306	0,412	0,225	0,457	0,580	0,991	0,998	0,999	0,991	0,998	0,999	0,992	0,998	1
	80	0,148	0,342	0,464	0,290	0,520	0,651	0,997	1	1	0,997	1	1	0,999	1	1
	90	0,160	0,371	0,512	0,349	0,581	0,709	0,999	1	1	0,999	1	1	1	1	1
	100	0,200	0,380	0,510	0,373	0,609	0,729	1	1	1	0,999	1	1	1	1	1
C	10	0,022	0,092	0,157	0,021	0,082	0,157	0,144	0,313	0,432	0,116	0,282	0,408	0,200	0,361	0,458
	20	0,046	0,172	0,257	0,044	0,149	0,242	0,417	0,641	0,746	0,386	0,619	0,733	0,475	0,652	0,750
	30	0,067	0,221	0,335	0,071	0,208	0,315	0,649	0,825	0,889	0,636	0,822	0,886	0,691	0,841	0,895
	40	0,113	0,273	0,383	0,095	0,245	0,384	0,788	0,916	0,947	0,782	0,913	0,946	0,810	0,918	0,951
	50	0,140	0,330	0,458	0,140	0,327	0,452	0,922	0,975	0,988	0,920	0,974	0,988	0,929	0,977	0,985
	60	0,168	0,375	0,493	0,175	0,403	0,532	0,975	0,997	0,999	0,975	0,997	0,999	0,979	0,998	0,998
	70	0,220	0,428	0,544	0,227	0,440	0,564	0,990	0,996	0,999	0,990	0,996	0,999	0,987	0,995	0,998
	80	0,253	0,490	0,635	0,285	0,506	0,627	0,997	1	1	0,997	1	1	0,998	1	1
	90	0,280	0,539	0,645	0,331	0,569	0,697	0,999	1	1	0,999	1	1	0,999	1	1
	100	0,318	0,550	0,682	0,366	0,602	0,715	0,999	1	1	0,999	1	1	0,998	1	1
D	10	0,029	0,105	0,187	0,021	0,091	0,158	0,138	0,286	0,402	0,109	0,268	0,375	0,196	0,345	0,447
	20	0,079	0,213	0,305	0,049	0,159	0,247	0,385	0,603	0,706	0,357	0,591	0,698	0,438	0,623	0,709
	30	0,104	0,289	0,410	0,069	0,206	0,326	0,615	0,798	0,864	0,600	0,789	0,858	0,636	0,804	0,869
	40	0,168	0,348	0,484	0,092	0,257	0,380	0,768	0,896	0,936	0,759	0,893	0,934	0,777	0,893	0,933
	50	0,199	0,425	0,549	0,147	0,333	0,468	0,901	0,970	0,984	0,899	0,969	0,983	0,902	0,962	0,982
	60	0,252	0,483	0,628	0,172	0,403	0,535	0,958	0,995	0,998	0,957	0,995	0,998	0,960	0,992	0,998
	70	0,307	0,530	0,654	0,230	0,443	0,570	0,986	0,994	0,997	0,986	0,994	0,997	0,982	0,994	0,996
	80	0,358	0,631	0,734	0,274	0,513	0,633	0,997	0,998	1	0,997	0,998	1	0,996	0,998	1
	90	0,424	0,658	0,767	0,334	0,553	0,711	0,998	0,999	1	0,998	0,999	1	0,998	1	1
	100	0,439	0,687	0,793	0,353	0,596	0,706	0,999	0,999	1	0,999	0,999	1	0,998	1	1

1/ α corresponde al nivel de significancia estadística.

2/Estimadas a partir de 1000 iteraciones.

Fuente: Elaboración propia.

Otro resultado importante, y que se aprecia mejor en la gráfica 4.3, es que con un tamaño de muestra alrededor de 50 observaciones se obtuvo una potencia empírica de 0.8 o mayor en las tres pruebas de FANOVA; con ese mismo tamaño de muestra las potencias alcanzadas por las otras pruebas se ubican muy por debajo de 0.8.



Gráfica 4.3.

Potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza en cada ensayo y nivel de significancia para la descomposición en valores Lab.

1/Para el caso funcional, se usó toda la curva como variable de respuesta; para el multivariado las variables de respuestas son cada componente CIELab y para el caso univariado se emplea la norma Euclídea aplicada a estos valores $\sqrt{L^2 + a^2 + b^2}$.

Fuente: Elaboración propia.

Respecto de la variabilidad de las potencias empíricas, su comportamiento está dentro de lo esperado, es decir, que con el aumento del tamaño de la muestra la variabilidad de la potencia disminuye hasta alcanzar valores muy cercanos a cero (ver cuadro A.3 y gráfica A.3 del anexo A).

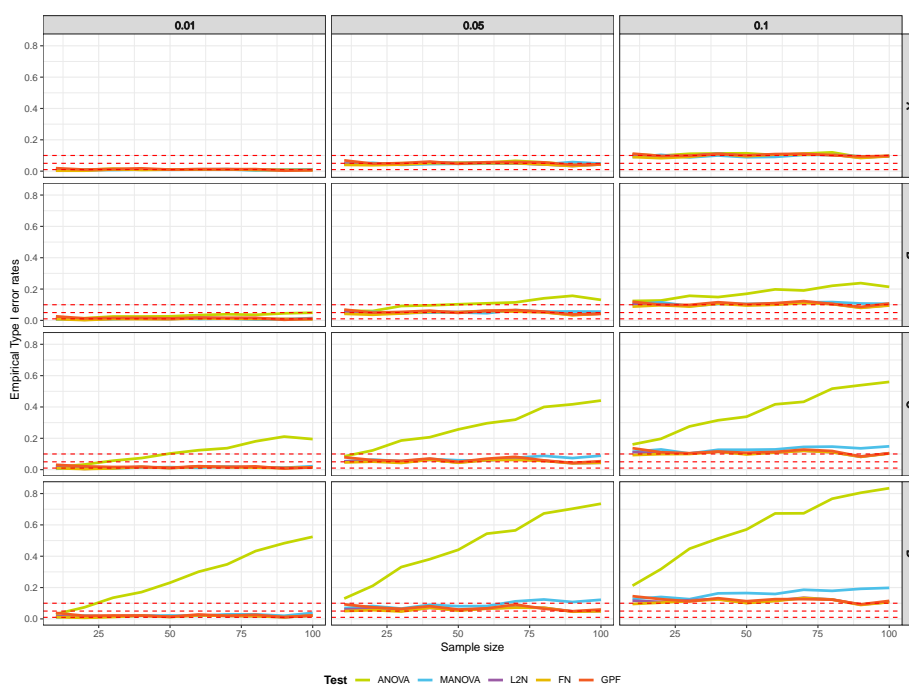
Cuadro 4.4.
Tasas de error tipo I empíricas empleando la descomposición CIElab, para cada tamaño de muestra y significancia estadística.

Ensayos	FUNCIONAL															
	ANOVA			MANOVA			L2N			FN			GPF			
	N	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1
A	10	0,01300	0,04700	0,10700	0,00900	0,04300	0,09000	0,00700	0,04900	0,10400	0,00300	0,04000	0,09000	0,01900	0,06900	0,11200
	20	0,00800	0,04700	0,09900	0,00900	0,05300	0,10400	0,00400	0,04200	0,09300	0,00300	0,03800	0,08300	0,01000	0,04800	0,09700
	30	0,01600	0,05100	0,11100	0,00700	0,04000	0,08800	0,01100	0,04300	0,09700	0,01100	0,04200	0,09100	0,01400	0,05100	0,09900
	40	0,00800	0,05100	0,11300	0,01000	0,04500	0,10000	0,01000	0,05700	0,11200	0,00900	0,05100	0,11000	0,01800	0,06100	0,10900
	50	0,01000	0,05400	0,11400	0,00900	0,04700	0,08900	0,01100	0,05200	0,09700	0,01000	0,05100	0,09500	0,01000	0,04700	0,10100
	60	0,01000	0,05400	0,10300	0,01000	0,04800	0,09100	0,01200	0,05400	0,10600	0,01100	0,05100	0,10600	0,01300	0,05700	0,10900
	70	0,01200	0,06600	0,11200	0,01200	0,04900	0,10400	0,01300	0,05100	0,10600	0,01200	0,05100	0,10500	0,01200	0,05800	0,11100
	80	0,00900	0,05600	0,12000	0,00400	0,04400	0,10300	0,01000	0,04300	0,10600	0,00800	0,04300	0,10600	0,01300	0,05600	0,10100
	90	0,01000	0,04200	0,08900	0,00800	0,05800	0,09500	0,00600	0,03300	0,08600	0,00600	0,03300	0,08400	0,00300	0,04000	0,09400
	100	0,01100	0,04700	0,09800	0,01000	0,04800	0,09300	0,00600	0,04300	0,09700	0,00600	0,04300	0,09500	0,00700	0,04400	0,09700
B	10	0,01200	0,06200	0,12400	0,00600	0,04800	0,10300	0,01300	0,05400	0,10600	0,00800	0,04200	0,08800	0,02600	0,06900	0,11900
	20	0,01400	0,06000	0,12700	0,01000	0,05400	0,11600	0,00400	0,04200	0,10300	0,00200	0,03600	0,09700	0,01300	0,05000	0,09900
	30	0,02500	0,09200	0,15700	0,00800	0,04700	0,09100	0,01100	0,04600	0,09300	0,00900	0,04400	0,08800	0,01600	0,05400	0,09900
	40	0,02500	0,09600	0,14900	0,01300	0,05000	0,10500	0,01100	0,05700	0,11000	0,00800	0,05500	0,10700	0,01600	0,06200	0,11600
	50	0,02600	0,10300	0,17000	0,01300	0,05100	0,10500	0,00800	0,05400	0,09900	0,00800	0,05200	0,09500	0,01300	0,04800	0,10400
	60	0,03400	0,10900	0,19800	0,00900	0,04600	0,10800	0,01700	0,06100	0,10100	0,01300	0,06100	0,10000	0,01800	0,06100	0,11000
	70	0,03900	0,11500	0,19100	0,01100	0,06600	0,11500	0,01200	0,05800	0,11400	0,01100	0,05600	0,11100	0,01700	0,06600	0,12300
	80	0,03600	0,14100	0,22100	0,00600	0,05600	0,11700	0,01000	0,05300	0,10500	0,01000	0,05200	0,10400	0,01700	0,05600	0,10500
	90	0,04500	0,15700	0,23800	0,00600	0,05700	0,10800	0,00900	0,03500	0,08200	0,00900	0,03300	0,08000	0,00400	0,03800	0,08600
	100	0,04900	0,13100	0,21400	0,01500	0,05600	0,10600	0,00800	0,04300	0,09700	0,00700	0,04300	0,09500	0,01100	0,04200	0,10800
C	10	0,01700	0,08500	0,16100	0,00600	0,05300	0,11400	0,01500	0,05300	0,11200	0,00900	0,04600	0,09300	0,03100	0,07900	0,13700
	20	0,03300	0,12300	0,19700	0,01100	0,06400	0,12900	0,00500	0,05700	0,10300	0,00400	0,05100	0,09900	0,02100	0,06100	0,11100
	30	0,05700	0,18600	0,27600	0,00800	0,05400	0,10300	0,01100	0,04700	0,10400	0,00800	0,04300	0,10000	0,01700	0,05600	0,10500
	40	0,07400	0,20700	0,31500	0,01400	0,06800	0,12700	0,01800	0,06300	0,11500	0,01700	0,06300	0,11400	0,01800	0,07100	0,11500
	50	0,10300	0,25700	0,33800	0,01600	0,06000	0,12700	0,01000	0,04600	0,10100	0,01000	0,04400	0,09700	0,01200	0,05000	0,10800
	60	0,12400	0,29600	0,41700	0,01200	0,05800	0,12900	0,02000	0,06200	0,11000	0,01900	0,06100	0,10900	0,02200	0,07000	0,11300
	70	0,13700	0,31900	0,43300	0,02000	0,07600	0,14500	0,01600	0,06700	0,12100	0,01600	0,06200	0,12000	0,01700	0,08200	0,12800
	80	0,18100	0,40000	0,51700	0,01400	0,08800	0,14700	0,01400	0,05700	0,11200	0,01300	0,05600	0,11100	0,02100	0,05900	0,11900
	90	0,21100	0,41700	0,53900	0,01200	0,07400	0,13600	0,01200	0,04100	0,08200	0,01000	0,04100	0,08200	0,00700	0,04300	0,08400
	100	0,19500	0,44100	0,56000	0,02200	0,08900	0,14900	0,01500	0,04400	0,10500	0,01500	0,04400	0,10300	0,01500	0,05400	0,10500
D	10	0,03100	0,13000	0,21200	0,01000	0,06900	0,12700	0,01800	0,06000	0,11600	0,01100	0,05000	0,09500	0,03800	0,09300	0,14500
	20	0,07400	0,21100	0,31800	0,02100	0,08200	0,14000	0,00900	0,06700	0,10900	0,00700	0,05600	0,10400	0,02000	0,07400	0,12600
	30	0,13500	0,33100	0,44800	0,01500	0,06600	0,12600	0,01600	0,05100	0,11900	0,01200	0,04700	0,11300	0,02200	0,06400	0,11200
	40	0,17100	0,38100	0,51300	0,02000	0,09000	0,16300	0,02200	0,07100	0,12700	0,02000	0,07100	0,12400	0,02100	0,08100	0,13200
	50	0,23100	0,44100	0,57100	0,02200	0,08100	0,16500	0,01300	0,05500	0,10200	0,01200	0,05300	0,10100	0,01400	0,06000	0,11300
	60	0,30100	0,54400	0,67300	0,01900	0,08200	0,15900	0,02400	0,06700	0,11700	0,02300	0,06500	0,11400	0,02800	0,06700	0,12600
	70	0,34800	0,56500	0,67400	0,02900	0,11200	0,18600	0,01900	0,07400	0,13500	0,01900	0,07200	0,13300	0,02000	0,09200	0,12600
	80	0,43300	0,67300	0,76700	0,02900	0,12400	0,17900	0,01800	0,07100	0,12400	0,01700	0,07100	0,12300	0,02600	0,06500	0,12300
	90	0,48300	0,70300	0,80500	0,02000	0,10800	0,19200	0,01100	0,04800	0,09100	0,01100	0,04600	0,08900	0,01100	0,04900	0,09300
	100	0,52400	0,73500	0,83400	0,03800	0,12200	0,19800	0,02100	0,05000	0,10800	0,02100	0,04900	0,10700	0,02200	0,06000	0,11500

1/ α corresponde al nivel de significancia estadística.

2/Estimadas a partir de 1000 iteraciones.

Fuente: Elaboración propia.



Gráfica 4.4.

Tasas de error tipo I empírico de las pruebas de análisis de varianza en cada ensayo y nivel de significancia para la descomposición en valores CIELab.

1/Para el caso multivariado las variables de respuestas son cada componente de color del sistema *CIELab* y para el caso univariado se emplea la distancia Euclídea aplicada a estos valores $\sqrt{L^2 + a^2 + b^2}$.
2/Las líneas rojas discontinuas indican los valores verdaderos establecidos para las tasas de error tipo I.

Fuente: Elaboración propia.

Se observa en la gráfica 4.4 que las tasas de error tipo I empíricas para las pruebas de FANOVA resultaron muy cercanas a los valores verdaderos del error tipo I que se establecieron en el estudio de simulación para generar los datos; comportamiento que se presenta en los cuatro ensayos. La prueba de ANOVA univariado incrementa sus tasas de error conforme aumenta el porcentaje de incumplimiento del supuesto de varianza constante, así como al aumentar el tamaño de muestra; mientras que estas tasas para la prueba de MANOVA resultaron muy cercanas a los valores verdaderos.

La variabilidad de estas tasas de error tipo I se encontró dentro de lo esperado,

es decir, que con el aumento de la muestra la variabilidad de estas tasas disminuye hasta alcanzar valores muy cercanos a cero (ver cuadro A.4 y gráfica A.4 del anexo A).

4.2. Diferencia mínima por detectar en el ANOVA de una vía

Uno de los factores que influye sobre la potencia estadística es la diferencia mínima detectable, esta es, la magnitud mínima encontrada entre las medias, para un tamaño de muestra y una potencia, previamente, establecidas. Cuanto mayor sea el tamaño del efecto que se desea detectar, mayor será la probabilidad de obtener hallazgos significativos y, por lo tanto, mayor será la potencia estadística.

Para esta parte del estudio de simulación se fijaron cuatro diferentes valores para la mínima diferencia detectable (δ), estos valores están dados en porcentaje de reflectancia espectral y sus valores son 0,25, 0,50, 0,75 y 1. El valor $\delta = 0,25$ se fijó para ilustrar que no es útil emplearlo en un experimento.

En el ensayo E, en este se cumple con el supuesto de varianza constante, para lograr detectar diferencias de 0,25 y 0,50, las pruebas requieren de tamaños de muestra muy superiores a 500 observaciones por grupo, para los diferentes niveles de significancia estadística. Por otra parte, para detectar diferencias de 0,75 y 1 las pruebas de FANOVA proporcionaron mayores potencias en comparación con las pruebas de MANOVA y ANOVA univariado. Para detectar un 80% de las veces una diferencia de 0,75, con un nivel de significancia del 5% con las pruebas de FANOVA, se requerirá de un tamaño de muestra en cada grupo de alrededor de 350 observaciones; ANOVA univariado requiere de al menos 500 observaciones, mientras que MANOVA requiere mucho más de 500.

El cuadro 4.5 muestra las potencias empíricas de las tres pruebas de análisis de varianza, según el tamaño de muestra, nivel de significancia estadística y diferencia mínima que se desea detectar. Una forma más fácil de observar las potencias es mediante las curvas de potencia proporcionadas en la gráfica 4.5.

Cuadro 4.5.

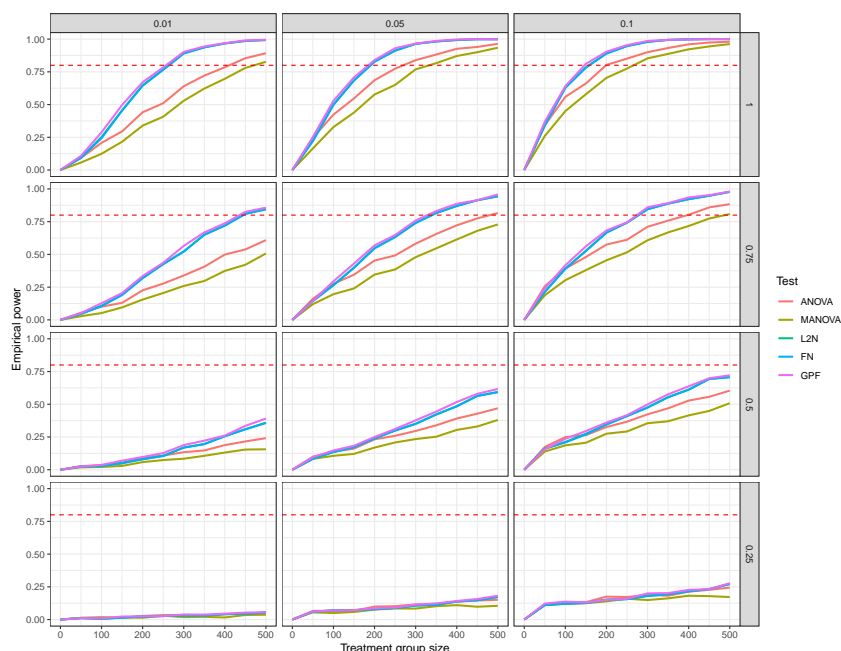
Potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza para el ensayo E, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar.

δ	N	FUNCIONAL														
		ANOVA			MANOVA			L2N			FN			GPF		
		0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1
1	50	0,092	0,246	0,342	0,057	0,165	0,26	0,095	0,224	0,343	0,093	0,221	0,34	0,108	0,253	0,369
	100	0,208	0,423	0,559	0,124	0,328	0,45	0,252	0,501	0,63	0,243	0,497	0,628	0,288	0,529	0,641
	150	0,295	0,547	0,661	0,216	0,439	0,579	0,456	0,685	0,784	0,454	0,684	0,782	0,497	0,708	0,811
	200	0,441	0,686	0,803	0,339	0,577	0,704	0,646	0,829	0,89	0,644	0,827	0,89	0,671	0,84	0,904
	250	0,51	0,774	0,851	0,407	0,65	0,775	0,769	0,912	0,947	0,765	0,912	0,947	0,784	0,93	0,954
	300	0,64	0,839	0,9	0,529	0,769	0,853	0,892	0,964	0,979	0,89	0,964	0,979	0,902	0,966	0,986
	350	0,721	0,882	0,932	0,622	0,816	0,887	0,938	0,982	0,994	0,936	0,982	0,994	0,944	0,986	0,994
	400	0,785	0,926	0,96	0,697	0,871	0,922	0,967	0,993	0,998	0,967	0,993	0,998	0,969	0,997	0,997
	450	0,854	0,94	0,974	0,78	0,9	0,944	0,986	0,999	1	0,986	0,999	1	0,99	1	1
	500	0,892	0,964	0,98	0,827	0,934	0,962	0,993	0,999	1	0,993	0,999	1	0,995	0,999	1
0,75	50	0,054	0,161	0,257	0,028	0,12	0,188	0,046	0,148	0,214	0,045	0,142	0,213	0,052	0,144	0,241
	100	0,101	0,276	0,392	0,052	0,196	0,303	0,107	0,266	0,391	0,105	0,264	0,39	0,127	0,295	0,417
	150	0,13	0,345	0,48	0,095	0,24	0,38	0,194	0,399	0,528	0,189	0,398	0,526	0,205	0,43	0,562
	200	0,226	0,453	0,575	0,155	0,346	0,455	0,32	0,549	0,667	0,318	0,546	0,666	0,335	0,569	0,683
	250	0,277	0,492	0,612	0,205	0,385	0,516	0,426	0,633	0,744	0,426	0,633	0,742	0,436	0,648	0,745
	300	0,339	0,582	0,711	0,259	0,479	0,608	0,523	0,741	0,845	0,521	0,74	0,845	0,565	0,759	0,86
	350	0,406	0,656	0,758	0,297	0,546	0,668	0,65	0,816	0,888	0,65	0,816	0,888	0,668	0,831	0,892
	400	0,499	0,722	0,803	0,374	0,614	0,717	0,721	0,87	0,922	0,72	0,87	0,922	0,738	0,887	0,935
	450	0,538	0,775	0,859	0,421	0,68	0,774	0,81	0,914	0,948	0,81	0,914	0,948	0,825	0,914	0,953
	500	0,609	0,816	0,884	0,507	0,729	0,808	0,846	0,944	0,978	0,844	0,944	0,978	0,857	0,958	0,98
0,50	50	0,028	0,1	0,174	0,018	0,083	0,139	0,025	0,085	0,161	0,023	0,083	0,16	0,024	0,096	0,156
	100	0,033	0,137	0,249	0,021	0,106	0,186	0,031	0,135	0,212	0,027	0,135	0,208	0,037	0,147	0,236
	150	0,048	0,161	0,264	0,029	0,121	0,206	0,054	0,173	0,274	0,049	0,172	0,27	0,069	0,183	0,295
	200	0,093	0,232	0,326	0,058	0,169	0,275	0,081	0,24	0,346	0,079	0,238	0,345	0,097	0,25	0,36
	250	0,108	0,259	0,367	0,074	0,208	0,292	0,105	0,299	0,411	0,105	0,299	0,409	0,127	0,311	0,417
	300	0,134	0,296	0,423	0,084	0,234	0,355	0,169	0,351	0,475	0,169	0,35	0,475	0,188	0,377	0,499
	350	0,147	0,339	0,469	0,106	0,252	0,37	0,196	0,423	0,554	0,196	0,421	0,554	0,222	0,444	0,576
	400	0,188	0,391	0,528	0,131	0,304	0,415	0,256	0,485	0,612	0,256	0,484	0,611	0,261	0,517	0,637
	450	0,216	0,428	0,557	0,154	0,33	0,449	0,309	0,564	0,694	0,309	0,563	0,693	0,335	0,58	0,699
	500	0,241	0,469	0,604	0,156	0,38	0,508	0,359	0,593	0,707	0,357	0,593	0,707	0,391	0,617	0,721
0,25	50	0,013	0,066	0,117	0,013	0,055	0,111	0,012	0,06	0,112	0,01	0,06	0,11	0,011	0,062	0,122
	100	0,018	0,067	0,134	0,013	0,05	0,119	0,005	0,071	0,123	0,005	0,069	0,122	0,009	0,069	0,137
	150	0,014	0,067	0,133	0,016	0,058	0,125	0,015	0,073	0,128	0,015	0,072	0,126	0,023	0,072	0,131
	200	0,028	0,099	0,175	0,014	0,076	0,139	0,023	0,079	0,152	0,023	0,079	0,152	0,025	0,086	0,15
	250	0,034	0,102	0,172	0,029	0,085	0,159	0,027	0,088	0,156	0,027	0,088	0,156	0,026	0,092	0,159
	300	0,032	0,116	0,189	0,019	0,084	0,149	0,032	0,107	0,181	0,031	0,107	0,18	0,039	0,114	0,2
	350	0,03	0,12	0,182	0,021	0,102	0,162	0,031	0,113	0,194	0,031	0,112	0,193	0,038	0,123	0,202
	400	0,041	0,137	0,213	0,016	0,11	0,182	0,042	0,138	0,217	0,041	0,138	0,215	0,045	0,142	0,227
	450	0,044	0,145	0,227	0,035	0,098	0,179	0,045	0,148	0,233	0,045	0,148	0,233	0,053	0,157	0,232
	500	0,057	0,151	0,244	0,037	0,105	0,172	0,053	0,173	0,272	0,053	0,172	0,271	0,056	0,182	0,278

1/ α corresponde al nivel de significancia estadística y δ la diferencia mínima por detectar.

2/Estimadas a partir de 1000 iteraciones.

Fuente: Elaboración propia.



Gráfica 4.5.

Potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza para el ensayo E, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar.

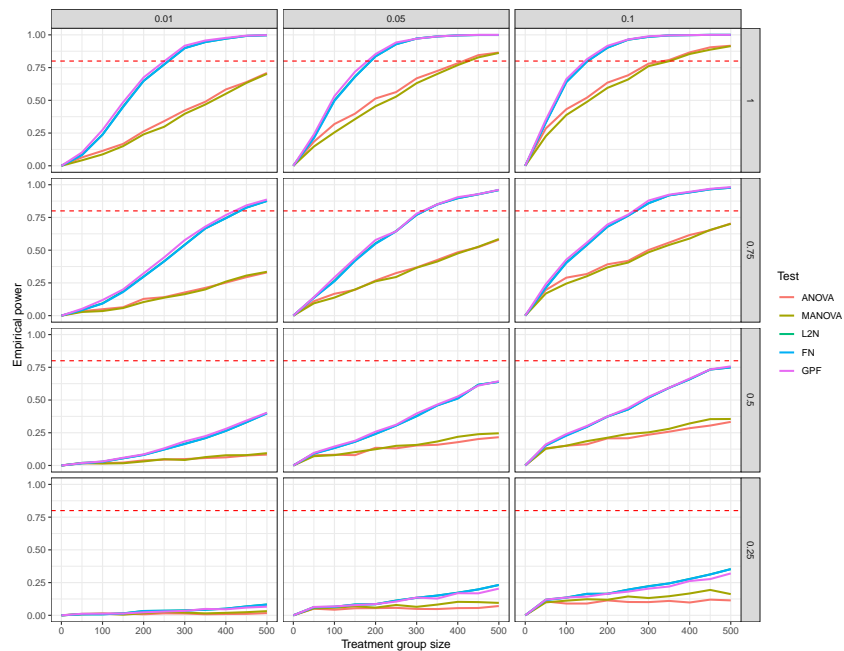
1/La línea roja discontinua indica una potencia de 0,8.

Fuente: Elaboración propia.

En el ensayo F se incumple con el supuesto de varianza constante en un 10%. De la misma forma que en el ensayo anterior, para lograr detectar diferencias de 0,25 y 0,50, las pruebas requieren de tamaños de muestra muy superiores a 500 observaciones por grupo, para los diferentes niveles de significancia estadística. Por otra parte, para detectar diferencias de 0,75 y 1 las pruebas de FANOVA proporcionaron mayores potencias en comparación con las pruebas de MANOVA y ANOVA univariado.

Para detectar un 80% de las veces una diferencia de 0,75, con un nivel de significancia del 5% con las pruebas de FANOVA, se requerirá de un tamaño de muestra en cada grupo de alrededor de 320 observaciones, mientras que para las pruebas de MANOVA y ANOVA univariado se requiere mucho más de 500.

El cuadro 4.6 muestra las potencias empíricas de las tres pruebas de análisis de varianza, según el tamaño de muestra, nivel de significancia estadística y diferencia mínima que se desea detectar. Una forma más fácil de observar las potencias es mediante las curvas de potencia proporcionadas en la gráfica 4.6.



Gráfica 4.6.

Potencia empírica de las pruebas para el ensayo F, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar.

1/La línea roja discontinua indica una potencia de 0,8.

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.6.

Potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza para el ensayo F, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar.

δ	N	FUNCIONAL														
		ANOVA			MANOVA			L2N			FN			GPF		
		0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1
α																
1	50	0,064	0,184	0,285	0,042	0,147	0,226	0,085	0,218	0,332	0,081	0,21	0,328	0,102	0,239	0,352
	100	0,114	0,319	0,432	0,087	0,255	0,388	0,238	0,501	0,641	0,238	0,496	0,639	0,274	0,532	0,662
	150	0,167	0,398	0,52	0,15	0,356	0,488	0,453	0,682	0,797	0,448	0,679	0,795	0,485	0,718	0,814
	200	0,263	0,514	0,635	0,24	0,455	0,595	0,649	0,836	0,902	0,648	0,836	0,902	0,675	0,853	0,916
	250	0,341	0,563	0,691	0,298	0,528	0,659	0,774	0,929	0,963	0,774	0,928	0,963	0,798	0,942	0,965
	300	0,423	0,668	0,78	0,397	0,631	0,761	0,9	0,972	0,985	0,898	0,972	0,985	0,917	0,971	0,989
	350	0,489	0,724	0,808	0,468	0,701	0,799	0,945	0,988	0,996	0,945	0,988	0,996	0,957	0,988	0,996
	400	0,583	0,783	0,866	0,55	0,769	0,854	0,971	0,996	0,998	0,971	0,996	0,998	0,977	0,996	0,998
	450	0,639	0,845	0,905	0,633	0,828	0,887	0,992	0,999	1	0,992	0,999	1	0,994	1	1
	500	0,709	0,865	0,917	0,702	0,862	0,914	0,997	0,999	1	0,997	0,999	1	0,998	1	1
0,75	50	0,034	0,11	0,196	0,028	0,094	0,169	0,044	0,138	0,214	0,042	0,136	0,213	0,052	0,141	0,24
	100	0,049	0,167	0,29	0,035	0,138	0,245	0,094	0,266	0,407	0,092	0,262	0,402	0,119	0,292	0,428
	150	0,064	0,197	0,318	0,058	0,2	0,301	0,186	0,423	0,54	0,18	0,418	0,539	0,2	0,437	0,558
	200	0,128	0,268	0,392	0,104	0,262	0,369	0,299	0,553	0,679	0,297	0,549	0,679	0,323	0,578	0,696
	250	0,141	0,325	0,418	0,137	0,295	0,405	0,416	0,646	0,764	0,414	0,644	0,762	0,445	0,644	0,771
	300	0,177	0,368	0,501	0,164	0,366	0,484	0,542	0,77	0,859	0,54	0,77	0,858	0,577	0,779	0,879
	350	0,212	0,425	0,558	0,2	0,413	0,54	0,666	0,85	0,919	0,666	0,848	0,919	0,68	0,85	0,924
	400	0,252	0,484	0,616	0,26	0,475	0,589	0,745	0,897	0,942	0,744	0,897	0,941	0,768	0,905	0,946
	450	0,294	0,523	0,652	0,306	0,526	0,655	0,825	0,927	0,965	0,825	0,927	0,965	0,842	0,928	0,969
	500	0,33	0,58	0,704	0,335	0,585	0,701	0,876	0,959	0,977	0,876	0,959	0,977	0,887	0,961	0,982
0,50	50	0,017	0,078	0,131	0,018	0,071	0,128	0,02	0,093	0,154	0,016	0,09	0,152	0,019	0,096	0,161
	100	0,018	0,082	0,151	0,015	0,079	0,151	0,029	0,135	0,232	0,028	0,133	0,228	0,031	0,145	0,24
	150	0,022	0,079	0,162	0,017	0,102	0,186	0,055	0,182	0,296	0,055	0,181	0,295	0,059	0,189	0,302
	200	0,039	0,135	0,207	0,031	0,124	0,212	0,082	0,242	0,374	0,08	0,241	0,373	0,085	0,258	0,375
	250	0,045	0,131	0,208	0,048	0,15	0,241	0,123	0,306	0,428	0,122	0,305	0,428	0,131	0,311	0,438
	300	0,049	0,153	0,235	0,042	0,157	0,253	0,166	0,378	0,519	0,164	0,376	0,517	0,184	0,397	0,525
	350	0,057	0,158	0,258	0,064	0,183	0,28	0,209	0,46	0,593	0,209	0,458	0,593	0,224	0,465	0,594
	400	0,062	0,178	0,285	0,078	0,219	0,321	0,265	0,513	0,659	0,264	0,511	0,658	0,28	0,527	0,664
	450	0,076	0,202	0,305	0,079	0,239	0,354	0,33	0,617	0,733	0,33	0,616	0,733	0,343	0,61	0,734
	500	0,083	0,216	0,333	0,094	0,246	0,355	0,401	0,639	0,749	0,397	0,639	0,749	0,403	0,644	0,757
0,25	50	0,008	0,051	0,106	0,011	0,053	0,099	0,008	0,063	0,12	0,008	0,061	0,116	0,012	0,064	0,12
	100	0,013	0,043	0,09	0,013	0,058	0,112	0,008	0,065	0,136	0,008	0,065	0,135	0,013	0,068	0,136
	150	0,014	0,054	0,09	0,005	0,069	0,123	0,015	0,083	0,164	0,014	0,082	0,164	0,014	0,078	0,143
	200	0,008	0,055	0,114	0,016	0,059	0,119	0,033	0,085	0,165	0,033	0,085	0,164	0,023	0,086	0,165
	250	0,015	0,057	0,102	0,026	0,079	0,144	0,035	0,113	0,196	0,035	0,112	0,196	0,029	0,105	0,181
	300	0,014	0,049	0,101	0,021	0,065	0,132	0,038	0,134	0,223	0,036	0,134	0,221	0,034	0,136	0,204
	350	0,008	0,048	0,11	0,015	0,082	0,146	0,043	0,151	0,244	0,043	0,151	0,244	0,049	0,128	0,22
	400	0,01	0,055	0,098	0,019	0,103	0,167	0,051	0,173	0,278	0,051	0,172	0,277	0,046	0,169	0,262
	450	0,011	0,056	0,12	0,024	0,101	0,194	0,068	0,198	0,313	0,068	0,198	0,312	0,059	0,168	0,277
	500	0,017	0,071	0,114	0,032	0,095	0,162	0,083	0,232	0,353	0,082	0,23	0,353	0,066	0,204	0,32

1/ α corresponde al nivel de significancia estadística y δ la diferencia mínima por detectar.

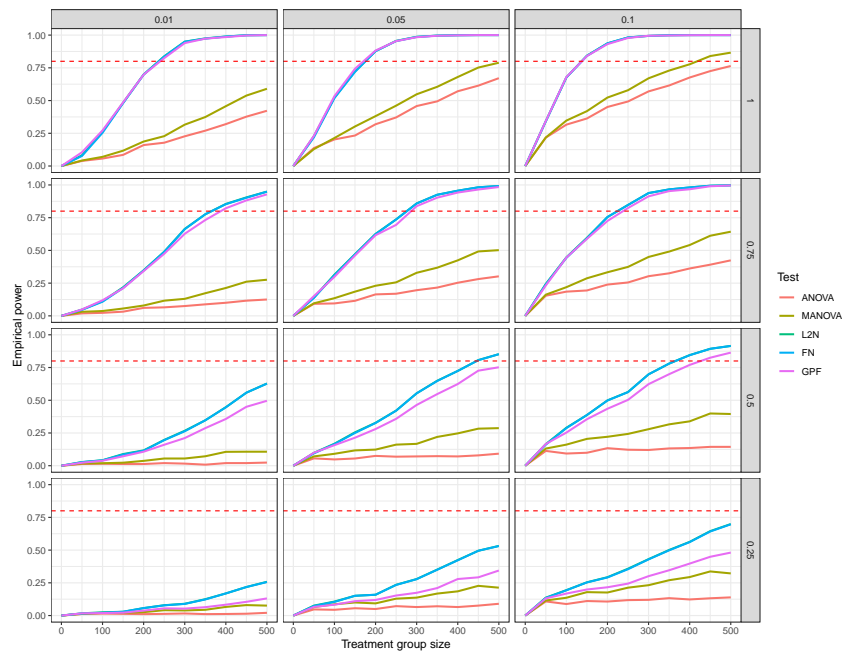
2/Estimadas a partir de 1000 iteraciones.

Fuente: Elaboración propia.

Para el caso del ensayo G, en este se incumple con el supuesto de varianza constante en un 20%. Para detectar diferencias de 0,25 y 0,50, las pruebas requieren de tamaños de muestra superiores a 500 observaciones por grupo, para los diferentes niveles de significancia estadística. Si se desea detectar diferencias de 0,75 y 1, las pruebas de FANOVA proporcionaron mayores potencias en comparación con las pruebas de MANOVA y ANOVA univariado.

Si se desea detectar el 80% de las veces una diferencia de 0,75, con un nivel de significancia del 5% con las pruebas de FANOVA, se requerirá de un tamaño de muestra en cada grupo 300 observaciones, mientras que para las pruebas de MANOVA y ANOVA univariado con tamaños de muestra superiores a 500 las potencias siguen siendo inferiores a 0,8.

El cuadro 4.7 muestra las potencias empíricas de las tres pruebas de análisis de varianza, según el tamaño de muestra, nivel de significancia estadística y diferencia mínima que se desea detectar. Una forma más fácil de observar las potencias es mediante las curvas de potencia proporcionadas en la gráfica 4.7.



Gráfica 4.7.

Potencia empírica de las pruebas para el ensayo G, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar.

1/La línea roja discontinua indica una potencia de 0,8.

Fuente: Elaboración propia.

Hasta el momento con los tres ensayos anteriores, se evidencia que, las pruebas de análisis funcional de varianza, requieren de menor muestra para proporcionar una mayor potencia, a pesar de la presencia de heterocedasticidad, lo que evidencia la robustez de las pruebas de FANOVA.

Cuadro 4.7.

Potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza para el ensayo G, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar.

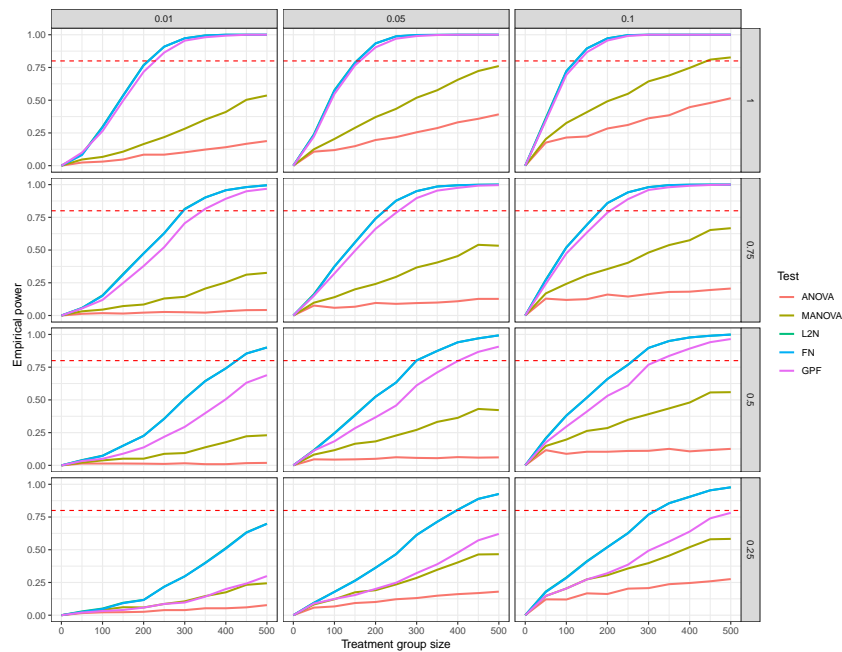
δ	N	FUNCIONAL														
		ANOVA			MANOVA			L2N			FN			GPF		
		0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	α			0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1
1	50	0,039	0,137	0,217	0,042	0,129	0,218	0,082	0,228	0,343	0,077	0,219	0,341	0,105	0,231	0,344
	100	0,057	0,203	0,316	0,07	0,214	0,347	0,264	0,523	0,677	0,254	0,519	0,676	0,272	0,534	0,679
	150	0,085	0,233	0,363	0,117	0,302	0,419	0,483	0,723	0,843	0,48	0,719	0,841	0,486	0,743	0,84
	200	0,16	0,319	0,451	0,187	0,381	0,523	0,699	0,878	0,937	0,698	0,877	0,937	0,698	0,882	0,931
	250	0,178	0,371	0,493	0,228	0,461	0,579	0,838	0,956	0,982	0,835	0,954	0,982	0,824	0,954	0,978
	300	0,227	0,458	0,57	0,316	0,548	0,67	0,95	0,987	0,994	0,949	0,986	0,994	0,939	0,984	0,995
	350	0,27	0,494	0,615	0,374	0,605	0,729	0,975	0,996	0,999	0,973	0,996	0,999	0,973	0,995	0,997
	400	0,32	0,571	0,676	0,457	0,68	0,777	0,989	0,999	1	0,989	0,999	1	0,985	0,998	0,999
	450	0,377	0,614	0,725	0,538	0,752	0,84	0,999	1	1	0,999	1	1	0,997	1	1
	500	0,422	0,671	0,764	0,59	0,789	0,866	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,75	50	0,019	0,092	0,154	0,031	0,096	0,162	0,048	0,139	0,244	0,046	0,137	0,24	0,049	0,151	0,232
	100	0,023	0,095	0,185	0,037	0,135	0,219	0,112	0,315	0,447	0,108	0,31	0,443	0,119	0,298	0,445
	150	0,032	0,115	0,194	0,056	0,185	0,287	0,218	0,471	0,596	0,213	0,469	0,592	0,21	0,461	0,588
	200	0,061	0,164	0,239	0,079	0,23	0,333	0,348	0,626	0,755	0,346	0,624	0,755	0,342	0,616	0,725
	250	0,065	0,169	0,255	0,116	0,256	0,374	0,49	0,737	0,847	0,488	0,736	0,847	0,474	0,695	0,824
	300	0,075	0,196	0,303	0,13	0,329	0,45	0,664	0,859	0,938	0,662	0,858	0,938	0,627	0,838	0,913
	350	0,088	0,216	0,325	0,173	0,368	0,491	0,776	0,925	0,966	0,776	0,925	0,966	0,732	0,903	0,953
	400	0,1	0,253	0,362	0,213	0,424	0,541	0,855	0,956	0,981	0,853	0,956	0,981	0,822	0,942	0,967
	450	0,116	0,281	0,391	0,261	0,492	0,612	0,905	0,982	0,994	0,902	0,982	0,994	0,882	0,965	0,99
	500	0,125	0,302	0,424	0,276	0,502	0,643	0,949	0,992	0,997	0,949	0,992	0,997	0,928	0,984	0,996
0,50	50	0,013	0,056	0,113	0,017	0,071	0,131	0,028	0,098	0,165	0,027	0,094	0,161	0,023	0,099	0,166
	100	0,015	0,048	0,093	0,019	0,091	0,161	0,042	0,168	0,29	0,041	0,165	0,287	0,038	0,157	0,253
	150	0,013	0,055	0,099	0,023	0,117	0,205	0,089	0,255	0,387	0,085	0,25	0,387	0,072	0,214	0,355
	200	0,013	0,075	0,134	0,037	0,123	0,221	0,117	0,328	0,499	0,114	0,326	0,498	0,107	0,28	0,435
	250	0,02	0,069	0,122	0,055	0,161	0,243	0,197	0,421	0,563	0,195	0,42	0,562	0,16	0,358	0,503
	300	0,016	0,071	0,12	0,055	0,167	0,279	0,267	0,553	0,698	0,263	0,553	0,698	0,211	0,464	0,623
	350	0,008	0,073	0,132	0,072	0,22	0,316	0,347	0,649	0,78	0,347	0,647	0,78	0,287	0,547	0,699
	400	0,02	0,071	0,135	0,106	0,247	0,339	0,447	0,724	0,845	0,446	0,724	0,844	0,357	0,624	0,77
	450	0,02	0,079	0,144	0,107	0,283	0,399	0,558	0,807	0,893	0,558	0,806	0,893	0,45	0,726	0,825
	500	0,024	0,092	0,144	0,107	0,287	0,395	0,628	0,852	0,915	0,627	0,852	0,915	0,496	0,752	0,864
0,25	50	0,012	0,047	0,108	0,013	0,065	0,115	0,017	0,076	0,137	0,016	0,073	0,134	0,017	0,066	0,131
	100	0,015	0,044	0,088	0,02	0,086	0,136	0,025	0,107	0,194	0,021	0,104	0,193	0,019	0,083	0,168
	150	0,013	0,056	0,111	0,021	0,1	0,179	0,029	0,151	0,254	0,029	0,151	0,253	0,022	0,111	0,199
	200	0,011	0,05	0,107	0,026	0,093	0,176	0,057	0,159	0,293	0,057	0,159	0,291	0,038	0,119	0,216
	250	0,013	0,072	0,118	0,041	0,129	0,213	0,079	0,235	0,358	0,078	0,234	0,354	0,055	0,153	0,244
	300	0,016	0,065	0,12	0,039	0,137	0,232	0,09	0,279	0,431	0,089	0,278	0,429	0,053	0,174	0,301
	350	0,011	0,071	0,133	0,044	0,168	0,27	0,125	0,351	0,501	0,123	0,35	0,498	0,064	0,21	0,346
	400	0,012	0,065	0,123	0,066	0,185	0,294	0,169	0,424	0,563	0,169	0,422	0,561	0,083	0,279	0,397
	450	0,014	0,076	0,132	0,08	0,227	0,337	0,218	0,495	0,645	0,218	0,495	0,642	0,105	0,292	0,449
	500	0,021	0,09	0,139	0,076	0,213	0,322	0,258	0,532	0,699	0,256	0,53	0,697	0,131	0,344	0,481

1/ α corresponde al nivel de significancia estadística y δ la diferencia mínima por detectar.

2/Estimadas a partir de 1000 iteraciones.

Fuente: Elaboración propia.

Para el caso del ensayo H, en este se incumple con el supuesto de varianza constante en un 30%. En general las pruebas de FANOVA proporcionaron valores de potencia mayores que las otras pruebas. La prueba de GPF proporcionó potencias más bajas que las otras pruebas de análisis funcional de la varianza, pero superiores a las pruebas de MANOVA y ANOVA univariado.



Gráfica 4.8.

Potencia empírica de las pruebas para el ensayo H, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar.

1/La línea roja discontinua indica una potencia de 0,8.

Fuente: Elaboración propia.

El cuadro 4.8 muestra las potencias empíricas de las tres pruebas de análisis de varianza, según el tamaño de muestra, nivel de significancia estadística y diferencia mínima que se desea detectar. Una forma más fácil de observar las potencias es mediante las curvas de potencia proporcionadas en la gráfica 4.8, las pruebas de FANOVA son más estables y robustas ante la falta de homocedasticidad.

Cuadro 4.8.

Potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza para el ensayo H, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar.

δ	N	ANOVA		MANOVA			FUNCIONAL									
							L2N			FN			GPF			
		0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	α								
1	50	0,024	0,107	0,176	0,047	0,125	0,203	0,087	0,239	0,364	0,081	0,234	0,353	0,1	0,222	0,344
	100	0,031	0,119	0,215	0,067	0,204	0,326	0,297	0,577	0,722	0,292	0,572	0,72	0,264	0,548	0,693
	150	0,047	0,149	0,223	0,107	0,289	0,409	0,536	0,788	0,896	0,533	0,785	0,895	0,496	0,766	0,867
	200	0,084	0,196	0,284	0,165	0,371	0,492	0,769	0,934	0,973	0,765	0,934	0,972	0,717	0,904	0,956
	250	0,084	0,218	0,311	0,218	0,434	0,549	0,909	0,988	0,997	0,909	0,988	0,997	0,864	0,97	0,991
	300	0,102	0,255	0,362	0,282	0,519	0,644	0,973	0,998	1	0,973	0,998	1	0,955	0,99	1
	350	0,123	0,287	0,385	0,352	0,576	0,689	0,995	0,999	1	0,994	0,999	1	0,981	0,998	1
	400	0,141	0,331	0,447	0,41	0,656	0,747	1	1	1	1	1	1	0,993	1	1
	450	0,167	0,358	0,479	0,503	0,723	0,81	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	500	0,188	0,392	0,515	0,536	0,761	0,827	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,75	50	0,013	0,076	0,129	0,032	0,098	0,169	0,058	0,163	0,274	0,057	0,155	0,27	0,054	0,151	0,242
	100	0,018	0,059	0,119	0,045	0,14	0,242	0,154	0,375	0,521	0,15	0,374	0,519	0,119	0,321	0,474
	150	0,015	0,067	0,125	0,072	0,2	0,308	0,317	0,56	0,694	0,311	0,557	0,692	0,248	0,495	0,634
	200	0,022	0,096	0,16	0,084	0,241	0,355	0,475	0,74	0,859	0,473	0,74	0,859	0,378	0,662	0,786
	250	0,027	0,089	0,145	0,13	0,295	0,403	0,629	0,877	0,941	0,628	0,877	0,941	0,522	0,785	0,889
	300	0,025	0,095	0,164	0,143	0,367	0,481	0,815	0,95	0,981	0,811	0,95	0,98	0,705	0,897	0,959
	350	0,022	0,099	0,18	0,206	0,405	0,538	0,902	0,986	0,996	0,901	0,985	0,996	0,815	0,954	0,98
	400	0,033	0,109	0,182	0,253	0,454	0,575	0,957	0,995	0,999	0,957	0,995	0,999	0,892	0,975	0,991
	450	0,041	0,127	0,195	0,312	0,54	0,653	0,981	0,999	1	0,981	0,998	1	0,949	0,992	0,997
	500	0,042	0,127	0,206	0,326	0,533	0,667	0,995	1	1	0,995	1	1	0,968	0,996	1
0,50	50	0,014	0,046	0,116	0,021	0,082	0,148	0,04	0,117	0,208	0,038	0,113	0,204	0,033	0,113	0,175
	100	0,014	0,044	0,088	0,038	0,116	0,197	0,074	0,247	0,381	0,072	0,244	0,379	0,05	0,184	0,296
	150	0,014	0,046	0,104	0,051	0,165	0,263	0,15	0,386	0,518	0,15	0,381	0,517	0,089	0,284	0,411
	200	0,013	0,05	0,104	0,051	0,183	0,285	0,226	0,525	0,66	0,225	0,524	0,659	0,137	0,367	0,531
	250	0,011	0,062	0,11	0,088	0,228	0,348	0,357	0,633	0,769	0,355	0,633	0,768	0,218	0,457	0,61
	300	0,016	0,057	0,111	0,094	0,271	0,391	0,51	0,802	0,897	0,508	0,801	0,897	0,294	0,611	0,769
	350	0,009	0,055	0,126	0,138	0,332	0,435	0,645	0,874	0,95	0,643	0,874	0,95	0,399	0,71	0,836
	400	0,009	0,063	0,107	0,177	0,363	0,48	0,741	0,94	0,977	0,741	0,94	0,977	0,505	0,797	0,892
	450	0,017	0,059	0,117	0,222	0,431	0,557	0,854	0,97	0,99	0,854	0,97	0,99	0,631	0,867	0,941
	500	0,019	0,061	0,126	0,23	0,422	0,559	0,901	0,993	0,999	0,9	0,993	0,999	0,689	0,907	0,965
0,25	50	0,016	0,058	0,121	0,022	0,082	0,147	0,029	0,095	0,181	0,025	0,094	0,177	0,02	0,089	0,147
	100	0,022	0,067	0,12	0,041	0,122	0,204	0,051	0,179	0,288	0,047	0,178	0,284	0,032	0,124	0,204
	150	0,023	0,093	0,167	0,061	0,175	0,274	0,095	0,265	0,413	0,092	0,262	0,409	0,04	0,154	0,273
	200	0,026	0,101	0,162	0,059	0,191	0,306	0,117	0,363	0,521	0,116	0,362	0,519	0,058	0,201	0,321
	250	0,039	0,122	0,203	0,086	0,235	0,357	0,218	0,467	0,628	0,217	0,466	0,626	0,086	0,248	0,386
	300	0,039	0,131	0,207	0,106	0,285	0,398	0,297	0,614	0,769	0,297	0,612	0,769	0,097	0,322	0,493
	350	0,053	0,149	0,237	0,146	0,347	0,455	0,401	0,714	0,856	0,398	0,713	0,855	0,142	0,389	0,563
	400	0,053	0,161	0,246	0,175	0,403	0,52	0,513	0,806	0,905	0,508	0,805	0,904	0,2	0,478	0,639
	450	0,06	0,169	0,259	0,232	0,464	0,58	0,633	0,889	0,954	0,63	0,888	0,954	0,242	0,572	0,74
	500	0,077	0,18	0,276	0,244	0,46	0,58	0,69	0,92	0,97	0,69	0,92	0,97	0,29	0,62	0,782

1/ α corresponde al nivel de significancia estadística y δ la diferencia mínima por detectar.

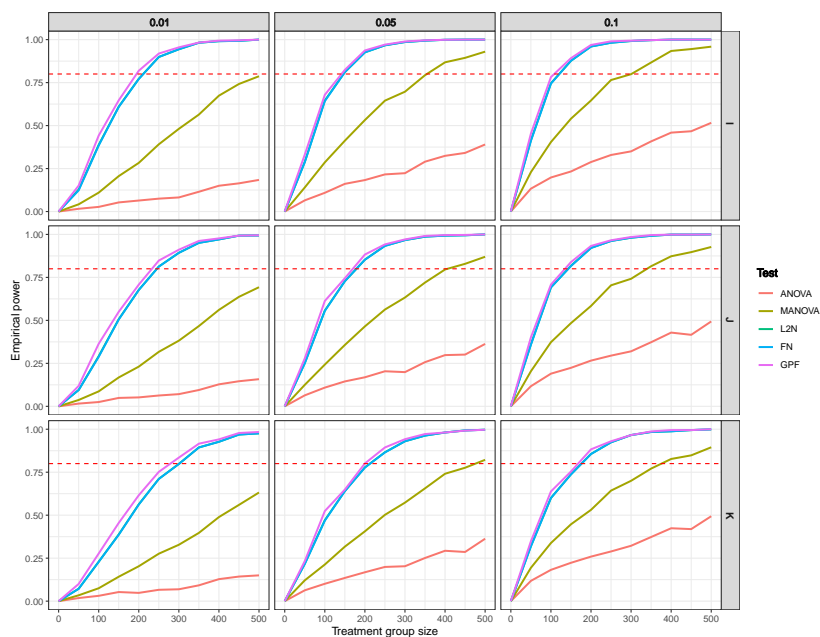
2/Estimadas a partir de 1000 iteraciones.

Fuente: Elaboración propia.

4.3. ANOVA funcional de dos vías con interacción

En esta parte de la simulación se emplea toda la curva como variable de respuesta para el FANOVA y la descomposición en valores triestímulo CIExyz para obtener las variables de respuesta para el MANOVA, así como para el ANOVA univariado.

En el ensayo I se cumple con el supuesto de varianza constante en los grupos, las pruebas de FANOVA proporcionaron potencias mayores que las demás pruebas. En el caso del MANOVA, se requiere de al menos una muestra de 500 observaciones para proporcionar una potencia de 0,8 para un nivel de significancia estadística del 1% y de 350 observaciones con una significancia del 5%.



Gráfica 4.9.

Potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza de dos vías con interacción en cada ensayo, según nivel de significancia.

1/La línea roja discontinua indica una potencia de 0,8.

Fuente: Elaboración propia.

En los ensayos J y K la heterocedasticidad es de un 20% y 40%, respectivamente;

se observa en el cuadro 4.9 y en las curvas de potencias de la gráfica 4.9 que las pruebas L2N, FN y GPF proporcionan mayores potencias en comparación con las otras, a pesar de la presencia de heterocedasticidad.

Cuadro 4.9.

Potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza de dos vías con interacción en cada ensayo, según nivel de significancia.

Ensayos	ANOVA	MANOVA		FUNCIONAL												
				L2N			FN			GPF						
				α												
N	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	
A	50	0,016	0,065	0,133	0,042	0,14	0,229	0,128	0,289	0,415	0,123	0,287	0,411	0,151	0,331	0,453
	100	0,027	0,109	0,198	0,11	0,286	0,404	0,388	0,646	0,746	0,384	0,642	0,744	0,442	0,679	0,782
	150	0,053	0,161	0,233	0,206	0,412	0,54	0,61	0,811	0,877	0,608	0,811	0,877	0,647	0,824	0,892
	200	0,064	0,183	0,288	0,283	0,532	0,646	0,772	0,926	0,96	0,771	0,926	0,96	0,819	0,937	0,969
	250	0,075	0,216	0,329	0,391	0,645	0,765	0,899	0,967	0,982	0,899	0,967	0,982	0,919	0,971	0,99
	300	0,082	0,223	0,35	0,481	0,697	0,799	0,944	0,986	0,992	0,944	0,986	0,992	0,955	0,989	0,994
	350	0,115	0,29	0,408	0,564	0,793	0,867	0,982	0,994	0,997	0,982	0,994	0,997	0,983	0,996	0,997
	400	0,15	0,324	0,459	0,674	0,868	0,934	0,991	0,999	1	0,991	0,999	1	0,994	0,999	1
	450	0,164	0,341	0,467	0,742	0,894	0,945	0,993	1	1	0,993	1	1	0,996	1	1
	500	0,184	0,39	0,516	0,787	0,93	0,959	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B	50	0,016	0,064	0,117	0,037	0,125	0,204	0,095	0,252	0,361	0,095	0,25	0,358	0,119	0,279	0,401
	100	0,025	0,109	0,19	0,087	0,243	0,373	0,292	0,557	0,692	0,288	0,555	0,692	0,364	0,613	0,708
	150	0,049	0,145	0,224	0,168	0,357	0,484	0,507	0,728	0,818	0,505	0,728	0,816	0,55	0,745	0,839
	200	0,052	0,169	0,266	0,231	0,465	0,584	0,677	0,853	0,922	0,677	0,853	0,921	0,708	0,883	0,933
	250	0,063	0,204	0,295	0,317	0,563	0,704	0,813	0,934	0,962	0,813	0,933	0,962	0,848	0,942	0,966
	300	0,071	0,199	0,32	0,382	0,633	0,742	0,893	0,967	0,981	0,893	0,967	0,981	0,911	0,971	0,985
	350	0,095	0,257	0,373	0,467	0,72	0,815	0,951	0,987	0,992	0,951	0,987	0,992	0,962	0,991	0,996
	400	0,128	0,298	0,429	0,561	0,796	0,873	0,971	0,993	0,999	0,971	0,993	0,999	0,977	0,996	0,999
	450	0,146	0,301	0,416	0,637	0,829	0,897	0,993	0,995	0,999	0,993	0,995	0,999	0,993	0,997	0,999
	500	0,158	0,363	0,494	0,693	0,87	0,927	0,994	1	1	0,994	1	1	0,995	1	1
C	50	0,018	0,063	0,118	0,034	0,121	0,194	0,072	0,218	0,321	0,072	0,216	0,318	0,1	0,233	0,348
	100	0,031	0,101	0,182	0,075	0,213	0,338	0,229	0,471	0,6	0,229	0,468	0,6	0,277	0,524	0,638
	150	0,053	0,135	0,223	0,142	0,317	0,447	0,388	0,64	0,738	0,386	0,64	0,737	0,455	0,649	0,754
	200	0,048	0,168	0,259	0,203	0,406	0,531	0,563	0,778	0,856	0,562	0,777	0,856	0,616	0,801	0,883
	250	0,066	0,199	0,289	0,276	0,502	0,643	0,711	0,866	0,924	0,711	0,865	0,924	0,752	0,894	0,93
	300	0,069	0,203	0,322	0,328	0,573	0,7	0,798	0,93	0,966	0,798	0,93	0,966	0,835	0,942	0,966
	350	0,092	0,251	0,373	0,397	0,656	0,771	0,894	0,963	0,984	0,894	0,963	0,984	0,916	0,972	0,987
	400	0,128	0,293	0,424	0,489	0,741	0,827	0,927	0,981	0,988	0,927	0,981	0,988	0,941	0,981	0,995
	450	0,143	0,286	0,419	0,56	0,776	0,848	0,969	0,993	0,995	0,969	0,993	0,995	0,978	0,992	0,995
	500	0,15	0,363	0,494	0,632	0,822	0,895	0,976	0,997	0,999	0,976	0,997	0,999	0,984	0,997	1

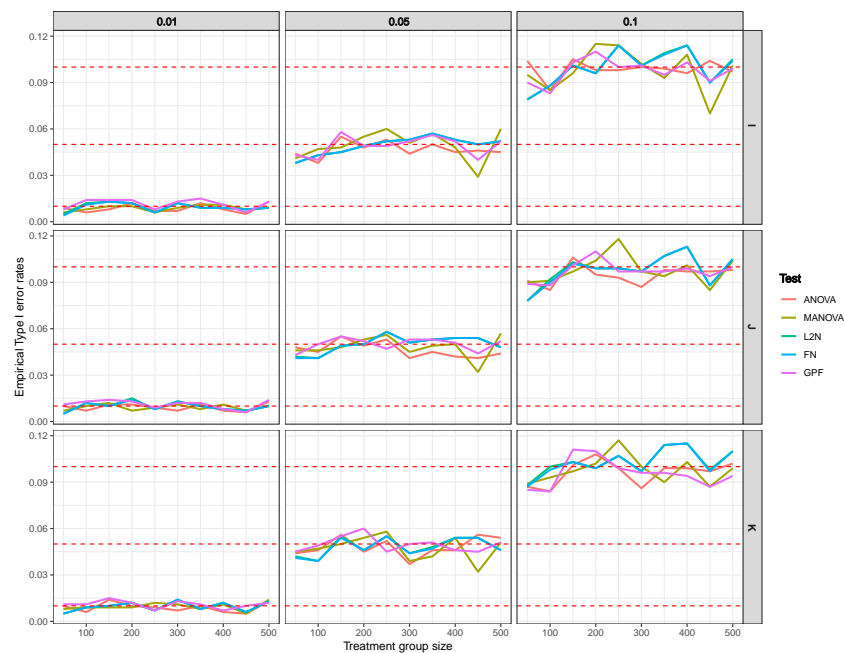
1/ α corresponde al nivel de significancia estadística.

2/Estimadas a partir de 1000 iteraciones.

Fuente: Elaboración propia.

Para el caso del ensayo J y un nivel de significancia estadística del 5% , las pruebas de FANOVA requieren de un tamaño de muestra de alrededor de 175 obser-

vaciones en cada grupo para obtener una potencia de 0,8. Por otra parte, en el ensayo K con el mismo nivel de significancia estadística del 5%, con un incumplimiento de homocedasticidad mayor, estas pruebas de análisis funcional de la varianza requieren de alrededor de 200 observaciones en cada grupo para obtener una potencia de 0,8; para las demás pruebas se requiere del doble de muestra para obtener la misma potencia.



Gráfica 4.10.

Tasas de error tipo I de las pruebas de análisis de varianza de dos vías con interacción en cada ensayo, según nivel de significancia.

1/Las líneas rojas discontinuas indican los valores verdaderos establecidos para las tasas de error tipo I.

Fuente: Elaboración propia.

Con respecto a la variabilidad de las potencias empíricas, su comportamiento está dentro de lo esperado, es decir, que con el aumento del tamaño de la muestra la variabilidad de la potencia disminuye hasta alcanzar valores muy cercanos a cero (ver cuadro C.1 y gráfica C.1 del anexo C); de la misma manera para la variabilidad de las tasas de error tipo I, estas se encontraron dentro de lo esperado, es decir, que con el

aumento de la muestra la variabilidad de estas tasas disminuye hasta alcanzar valores muy cercanos a cero (ver cuadro C.2 y gráfica C.2 del anexo C).

Cuadro 4.10.

Tasas de error tipo I de las pruebas de análisis de varianza de dos vías con interacción en cada ensayo, según nivel de significancia.

Ensayos	ANOVA			MANOVA			FUNCIONAL									
	N							L2N			FN			GPF		
		0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	α			0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1
A	50	0,0090	0,0440	0,1040	0,0060	0,0410	0,0950	0,0050	0,0380	0,0790	0,0040	0,0380	0,0790	0,0080	0,0430	0,09
	100	0,0060	0,0380	0,0850	0,0080	0,0470	0,0850	0,0120	0,0430	0,0880	0,0110	0,0430	0,0880	0,0140	0,0400	0,083
	150	0,0080	0,0550	0,1050	0,0100	0,0480	0,0960	0,0130	0,0450	0,1010	0,0130	0,0450	0,1010	0,0140	0,0580	0,103
	200	0,0120	0,0480	0,0980	0,0100	0,0550	0,1150	0,0120	0,0490	0,0960	0,0120	0,0490	0,0960	0,0140	0,0490	0,11
	250	0,0070	0,0530	0,0980	0,0060	0,0600	0,1140	0,0060	0,0520	0,1140	0,0060	0,0520	0,1140	0,0080	0,0490	0,1
	300	0,0070	0,0440	0,1000	0,0090	0,0510	0,1020	0,0120	0,0530	0,1010	0,0120	0,0530	0,1010	0,0130	0,0520	0,101
	350	0,0120	0,0500	0,0990	0,0110	0,0570	0,0930	0,0090	0,0570	0,1090	0,0090	0,0570	0,1080	0,0150	0,0560	0,095
	400	0,0080	0,0450	0,0960	0,0110	0,0480	0,1080	0,0090	0,0530	0,1140	0,0090	0,0530	0,1140	0,0110	0,0520	0,103
	450	0,0050	0,0460	0,1040	0,0080	0,0290	0,0700	0,0080	0,0500	0,0900	0,0080	0,0500	0,0900	0,0060	0,0400	0,091
	500	0,0130	0,0450	0,0970	0,0090	0,0600	0,1010	0,0090	0,0520	0,1050	0,0090	0,0520	0,1040	0,0130	0,0520	0,099
B	50	0,0100	0,0480	0,0910	0,0070	0,0460	0,0900	0,0050	0,0420	0,0780	0,0050	0,0410	0,0780	0,0110	0,0430	0,089
	100	0,0070	0,0450	0,0850	0,0100	0,0460	0,0910	0,0120	0,0410	0,0920	0,0120	0,0410	0,0900	0,0130	0,0500	0,088
	150	0,0110	0,0550	0,1060	0,0120	0,0480	0,0970	0,0100	0,0490	0,1030	0,0100	0,0490	0,1020	0,0140	0,0550	0,101
	200	0,0110	0,0490	0,0950	0,0070	0,0530	0,1040	0,0150	0,0500	0,0990	0,0140	0,0500	0,0990	0,0130	0,0520	0,11
	250	0,0090	0,0530	0,0930	0,0090	0,0560	0,1180	0,0080	0,0580	0,0990	0,0080	0,0580	0,0990	0,0090	0,0470	0,097
	300	0,0070	0,0410	0,0870	0,0110	0,0450	0,0970	0,0130	0,0510	0,0970	0,0130	0,0510	0,0970	0,0120	0,0530	0,097
	350	0,0110	0,0450	0,0980	0,0080	0,0490	0,0940	0,0100	0,0530	0,1070	0,0100	0,0530	0,1070	0,0120	0,0530	0,097
	400	0,0070	0,0420	0,0970	0,0110	0,0500	0,1010	0,0080	0,0540	0,1130	0,0080	0,0540	0,1130	0,0080	0,0510	0,099
	450	0,0060	0,0410	0,0970	0,0070	0,0320	0,0850	0,0070	0,0540	0,0880	0,0070	0,0540	0,0880	0,0060	0,0440	0,094
	500	0,0130	0,0440	0,0980	0,0100	0,0570	0,1040	0,0100	0,0480	0,1050	0,0100	0,0480	0,1050	0,0140	0,0520	0,1
C	50	0,0100	0,0440	0,0870	0,0080	0,0450	0,0890	0,0050	0,0420	0,0880	0,0050	0,0410	0,0870	0,0110	0,0450	0,085
	100	0,0060	0,0460	0,0840	0,0090	0,0470	0,0930	0,0090	0,0390	0,1000	0,0090	0,0390	0,0980	0,0110	0,0490	0,084
	150	0,0140	0,0560	0,1010	0,0090	0,0500	0,0970	0,0100	0,0550	0,1030	0,0100	0,0540	0,1030	0,0150	0,0550	0,111
	200	0,0100	0,0450	0,1080	0,0090	0,0540	0,1020	0,0120	0,0460	0,0990	0,0120	0,0460	0,0990	0,0120	0,0600	0,11
	250	0,0090	0,0520	0,0990	0,0120	0,0580	0,1170	0,0070	0,0550	0,1070	0,0070	0,0550	0,1070	0,0070	0,0450	0,099
	300	0,0070	0,0370	0,0860	0,0110	0,0390	0,1000	0,0140	0,0440	0,0970	0,0140	0,0440	0,0970	0,0130	0,0500	0,096
	350	0,0100	0,0460	0,0990	0,0080	0,0420	0,0900	0,0080	0,0480	0,1140	0,0080	0,0470	0,1140	0,0110	0,0510	0,096
	400	0,0060	0,0460	0,0990	0,0110	0,0540	0,1030	0,0120	0,0540	0,1150	0,0120	0,0540	0,1150	0,0070	0,0460	0,094
	450	0,0050	0,0560	0,0970	0,0050	0,0320	0,0870	0,0060	0,0540	0,0980	0,0060	0,0540	0,0970	0,0100	0,0450	0,087
	500	0,0130	0,0540	0,1020	0,0140	0,0510	0,0990	0,0130	0,0460	0,1100	0,0130	0,0460	0,1100	0,0120	0,0510	0,094

1/ α corresponde al nivel de significancia estadística.

2/Estimadas a partir de 1000 iteraciones.

Fuente: Elaboración propia.

En los tres ensayos las pruebas de análisis de la varianza funcional proporcionaron potencias empíricas superiores en comparación con las demás, estas pruebas son más robustas y estables ante el incumplimiento del supuesto de varianza constante.

5. Resultados del caso de aplicación

5.1. Mediciones espectrofotométricas en escarabajos del género *Chrysina*

En este capítulo se realiza la aplicación de los hallazgos del estudio de simulación a un caso práctico con el que se quiere estudiar los posibles efectos de uno o más factores sobre una curva media. Esto, con el fin de mostrar la utilidad de los resultados del capítulo anterior e ilustrar cómo aplicarlos en casos de análisis empíricos, donde la variable de respuesta es funcional.

Como se evidenció en los resultados de simulación, las pruebas empleadas para el análisis funcional de la varianza proporcionaron potencias superiores en comparación con las pruebas de MANOVA y ANOVA univariado. Frente al incumplimiento del supuesto de varianza constante, las pruebas de FANOVA mostraron mayor robustez.

Este capítulo se segmenta en dos secciones, en la primera se realiza un estudio exploratorio de los datos funcionales y en la segunda se aplica la técnica de análisis funcional de la varianza con las curvas de reflectancia espectral, como variable de respuesta.

5.1.1. Análisis exploratorio

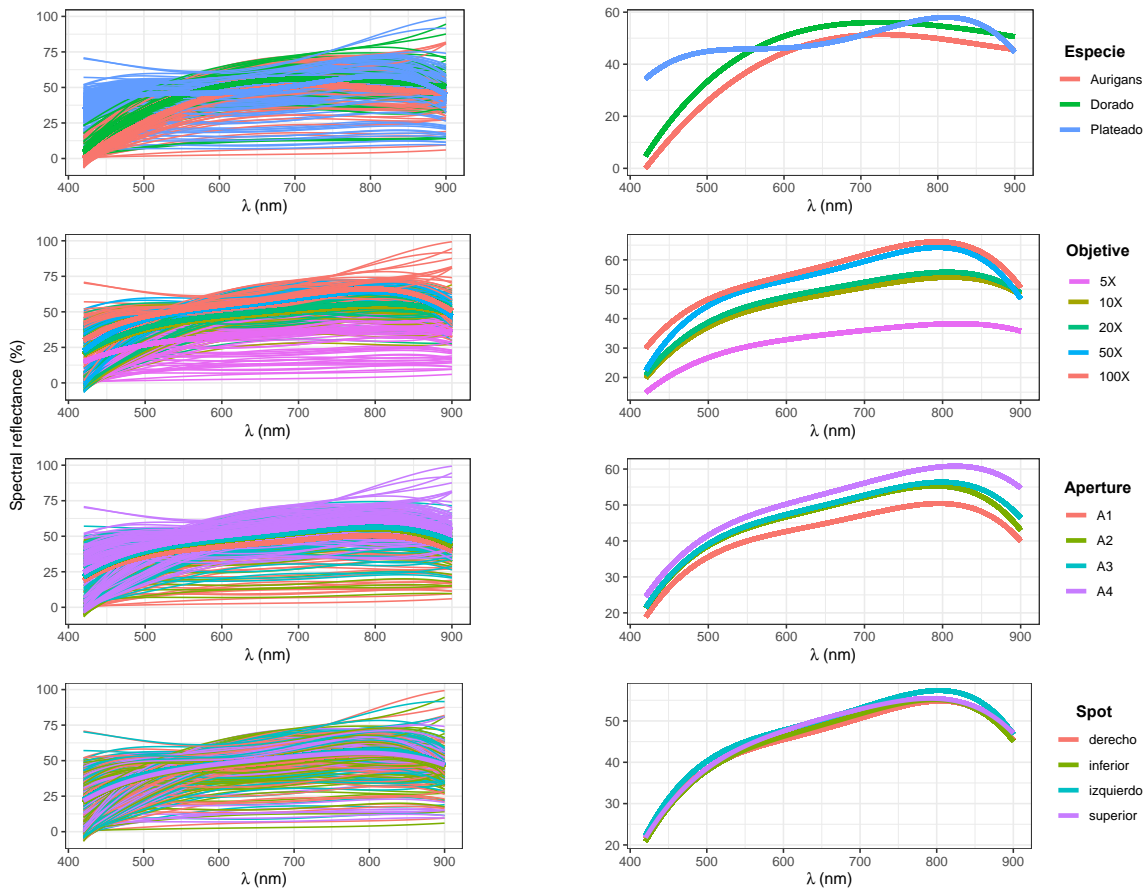
Como se mencionó en el capítulo 3, los datos fueron recolectados en el Centro de Investigación en Ciencia e Ingeniería de Materiales de la Universidad de Costa Rica, los cuales corresponden a 400 mediciones espectrales ópticas, para tres especies de escarabajos del género *Chrysina*, para longitudes de onda entre 400 a 900 nm.

Los conjuntos de datos empleados, ya sea, del porcentaje de reflectancia espectral o bien los obtenidos mediante las diferentes descomposiciones, se suavizaron a partir de un conjunto de funciones base B-spline y un conjunto de coeficientes que definen una combinación lineal de estas funciones base.

Según [Ramsay y Silverman \(2005\)](#), las funciones base B-spline son segmentos polinomiales unidos de extremo a extremo en valores denominados nodos, roturas o puntos de unión; estas son empleadas cuando las curvas no son periódicas, y además, tienen las ventajas de ser calculadas muy rápidamente y tener una gran flexibilidad.

A partir de los datos suavizados, se grafican las curvas de reflectancia espectral agrupadas por cada factor (especie, apertura, objetivo y posición en el élitro del escarabajo o spot), según como se observa en la gráfica [5.1](#), las curvas medias por especie tienen diferente forma, esto era de esperar, ya que, son tres diferentes especies de escarabajos.

Respecto del factor denominado objetivo, en todo el rango de longitud de onda, la curva media para 5X tiene menor porcentaje de reflectancia espectral a comparación de los demás objetivos. Para 10X y 20X las curvas medias tienen porcentajes de reflectancia muy similares desde 420 a 900 nm, de la misma forma para los objetivos 50X y 100X.



Gráfica 5.1.

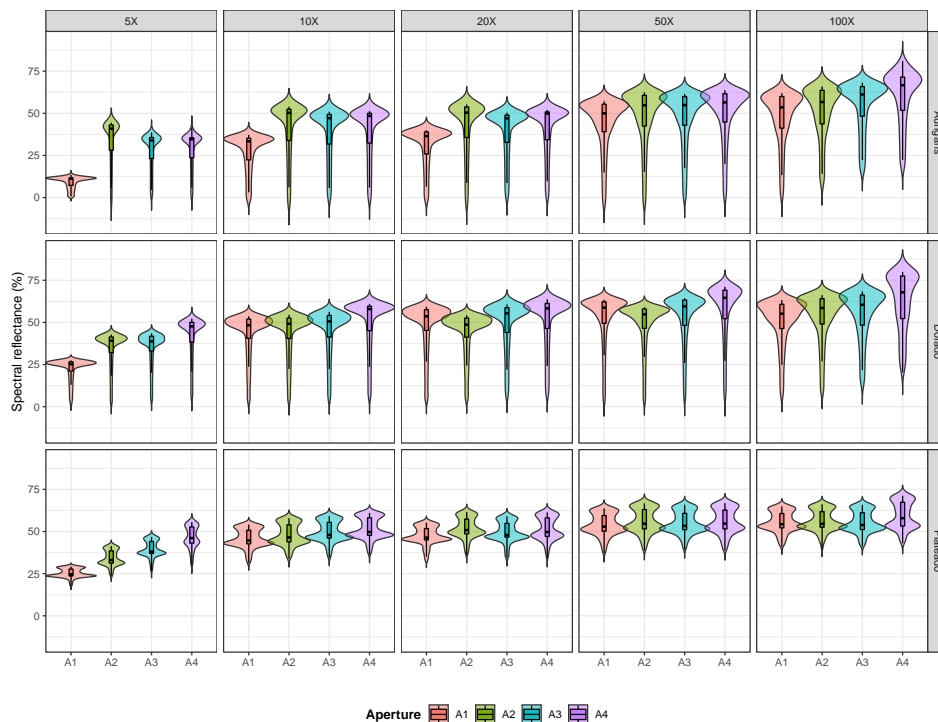
Curvas de reflectancia espectral agrupadas según la especie, la apertura, el objetivo y la posición en el élitro.

Fuente: Elaboración propia.

Las medias funcionales para las aperturas A2 y A3 tienen porcentajes de reflectancia muy parecidos en todo el rango de longitud de onda, mientras que para A1, la reflectancia es menor que las demás; la mayor reflectancia se obtuvo con la apertura A4.

Finalmente, las curvas medias para los niveles del factor spot (posición) parecen ser muy similares en cuanto al porcentaje de reflectancia espectral, es decir, parece que no hubiese diferencias en las curvas promedio respecto de la posición en el élitro del escarabajo.

Se determinaron las curvas medianas para cada objetivo y apertura, al controlar por especie, la apertura A1 bajo el objetivo 5X muestra una distribución diferente con una variabilidad, relativamente, baja en comparación con las demás curvas bajo los otros objetivos (10X, 20X, 50X, 100X), esto se presenta en las diferentes especies. Estos resultados se observan en la gráfica 5.2.



Gráfica 5.2.

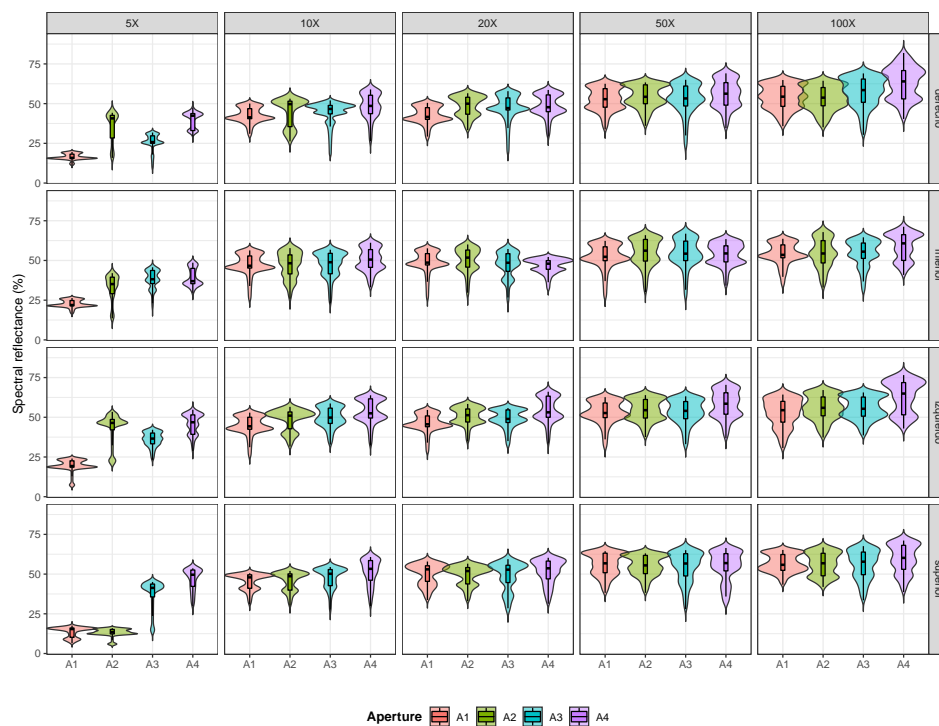
Comparación de gráficos de violines y de cajas para las curvas medianas en cada apertura y objetivo, según la especie.

1/Distribuciones del porcentaje de reflectancia espectral.

Fuente: Elaboración propia.

Para las especies Dorado y Plateado las distribuciones de las curvas medianas parecen ser muy similares de acuerdo con su variabilidad y porcentaje de reflectancia, esto para todas las combinaciones de apertura y objetivo, en la especie Aurigans, esto se presenta en todas las aperturas con los objetivos 50X y 100X.

La gráfica 5.3 muestra la comparación de las distribuciones de las curvas de reflectancia medianas para la combinación de objetivos y aperturas, se controla por la posición en el élitro del escarabajo. Para el caso de la combinación, aperturas bajo un objetivo de 5X las distribuciones de las curvas son, en apariencia, muy diferentes entre sí. Respecto de las demás combinaciones de aperturas y objetivos, las distribuciones se observan muy similares, incluso, el porcentaje de reflectancia espectral es también similar.



Gráfica 5.3.

Comparación de gráficos de violines y de cajas para las curvas medianas en cada apertura y objetivo, según la posición en el élitro.

1/Distribuciones del porcentaje de reflectancia espectral.

Fuente: Elaboración propia.

Seguidamente, se mostrará el resultado de aplicar la técnica de análisis funcional de la varianza de una vía y de dos vías con interacción, las variables de respuesta

funcional que se utilizan son las curvas del porcentaje de reflectancia, ya que, como se mencionó en los resultados de la simulación, las pruebas de FANOVA son las que proporcionan mejores potencias y son robustas ante la presencia de heterocedasticidad.

5.1.2. Análisis funcional de la varianza

El cuadro 5.1 muestra los valores de p al emplear la prueba FN, para una y dos vías, se evalúa cada hipótesis individual, con una corrección de $\alpha/m = 0,0167$, para la cual el número de hipótesis es $m = 3$ (corrección de Bonferroni) y un nivel de significancia estadística $\alpha = 0,05$. La variable de respuesta, para este análisis, es el porcentaje de reflectancia espectral.

Se encontraron diferencias en las curvas medias de los factores objetivo y apertura a un nivel de significancia estadística global del 5%, mientras que para la posición en el élitro (spot) no se hallaron. Según la interacción entre factores, se hallaron diferencias en las curvas medias para la interacción entre objetivo-apertura, objetivo-posición y apertura-posición al mismo nivel de significancia.

Para la interacción entre los factores objetivo y apertura, se desprende que, la influencia del tipo de la lente objetivo empleada en la medición sobre el porcentaje de reflectancia es distinta, según el área establecida donde incide la fuente de luz sobre el élitro del escarabajo.

Respecto de la interacción entre los factores objetivo y posición, se evidencia que, la influencia del tipo de la lente objetivo empleada en la medición sobre el porcentaje de reflectancia es distinta, según la posición en el élitro del escarabajo.

Finalmente, la influencia del tamaño del área, donde incide la fuente de luz

empleada en la medición, sobre el porcentaje de reflectancia es distinta, según la posición en el élitro del escarabajo.

Cuadro 5.1.

Análisis funcional de la varianza de una vía y dos vías con interacción con la variable reflectancia como respuesta funcional.

Respuesta	FANOVA	Factor	Interacción	p-Valor	
Reflectancia (%)	Una vía	Objetivo		0 *	
		Apertura		< 0,001 *	
		Posición (spot)		0,5807	
	Dos vías			Objetivo - Apertura	< 0,001 *
				Objetivo - Posición	0 *
				Apertura - Posición	< 0,001 *

1/La corrección de Bonferroni para evaluar cada hipótesis individual en α/m , con $alpha = 0,05$, corresponde a 0,0167.

2/La prueba que se empleó es FN.

Fuente: Elaboración propia.

Como se pudo observar, en los resultados de la simulación, las pruebas de FANOVA son robustas ante la presencia de heterocedasticidad; a pesar de esto, se recomienda que los grupos tengan la misma variabilidad. El objetivo y apertura recomendados, para este tipo de datos espectrales, deben ser la combinación de 20X o superior con aperturas de A2 y A3.

Suponiendo que se tienen diferentes grupos homogéneos de curvas del porcentaje de reflectancia espectral y se fija un error tipo I, ya sea de 0,01, 0,05 o 0,1; para obtener una potencia superior a 0,8 el tamaño mínimo de muestra requerido debe ser de 40 observaciones funcionales.

Ahora bien, si los datos tienen un alto grado de incumplimiento del supuesto de varianza constante y se desea obtener una potencia de 0,8 o superior, y se fija un

error tipo I de 0,01, 0,05 o de 0,1, el tamaño mínimo de muestra requerida es de 50 observaciones funcionales.

6. Conclusiones

6.1. ANOVA de una vía

Esta investigación evaluó el desempeño de diferentes pruebas de análisis de la varianza para datos funcionales, para los casos en que la variable de respuesta sea toda una curva o cuando por medio de transformaciones, se traslade esta, a un ámbito multivariado o univariado. Esto, mediante un estudio de simulación, en el cual, se obtenga evidencia empírica de la estabilidad de estas pruebas, en cuanto a las tasas de error tipo I, la potencia y la diferencia mínima por detectar, así como la robustez ante el incumplimiento del supuesto de varianza constante en los grupos de tratamientos.

Al aplicar las diferentes pruebas de análisis de la varianza en los datos funcionales obtenidos de la descomposición CIExyz, se evidenció que las pruebas de FANOVA denominadas L2N, FN y GPF proporcionan mayor potencia empírica, en todos los tamaños de muestra, en comparación de las pruebas de MANOVA y ANOVA. Estos valores de potencias para las tres pruebas de FANOVA son muy similares, por lo que, en términos de potencia, las tres pruebas tienen la misma capacidad de detectar diferencias entre las curvas promedio.

De acuerdo con las tasas de error tipo I empíricas (tanto en las descomposiciones CIExyz y CIElab, así como para las pruebas de FANOVA), estas oscilaron muy cerca

de los valores del error tipo I verdaderos que se establecieron en el estudio de simulación para generar los datos, lo que indica que estas potencias empíricas son buenas estimaciones. También se evidencia que las pruebas L₂N, FN y GPF son robustas ante la presencia de heterocedasticidad, aun con un bajo tamaño de muestra en cada grupo.

Si la variable de respuesta funcional se descompone en valores CIElab, las potencias proporcionadas por las tres pruebas de FANOVA son superiores a las obtenidas por las demás. Para obtener una potencia de 0,8 se requiere de un tamaño de muestra de alrededor de 50 observaciones. Las tasas de error tipo I varían muy cerca de los valores verdaderos establecidos en la simulación, a excepción de la prueba de ANOVA univariada cuyas tasas de error tipo I aumentan conforme aumenta el tamaño de muestra en los casos donde se presenta incumplimiento del supuesto de varianza constante.

Se establecieron cuatro valores para la diferencia mínima a detectar, estos son 0,25, 0,50, 0,75 y 1. En los cuatro ensayos E, F, G y H, las potencias empíricas de las pruebas de FANOVA son superiores a las otras pruebas, inclusive, en aquellos ensayos con presencia de heterocedasticidad.

6.2. ANOVA de dos vías con interacción

Para el caso del análisis de la varianza de dos vías con interacción, las pruebas L₂N, FN y GPF mostraron un mejor desempeño respecto de la potencia; este comportamiento se repite en todos los ensayos, inclusive en aquellos donde se incumple el supuesto de varianza constante. Se muestra más evidencia de la robustez de las pruebas de FANOVA ante la presencia de heterocedasticidad.

Las tasas de error tipo I empíricas resultaron muy cercanas a los valores verda-

deros establecidos en la simulación, esto indica que las potencias empíricas proporcionadas por las pruebas de FANOVA son buenas estimaciones.

En general, las pruebas de análisis funcional de la varianza L_2N , FN y GPF proporcionan mejores potencias, tanto para el caso de una vía como el de dos vías con interacción. Estas pruebas son robustas ante la presencia de heterocedasticidad, además de ser estables.

6.3. Recomendaciones prácticas

Las siguientes son recomendaciones prácticas que se deben considerar cuando se trabaja con datos de reflectancia espectral, estos considerados como datos funcionales, o bien si se realiza laguna transformación de la variable de respuesta en valores $CIExy$ o $CIElab$. El nivel de significancia estadística considerado es de 5%.

1. Los datos deben ser suavizados con algún método de suavizado de curvas, estas podrían ser funciones base B-Splines. La cantidad de funciones base deben ser no superior a 24 y además cúbicas.
2. Cuando se busca diferencias en las curvas medias de reflectancia espectral de los grupos considerados (el factor podría ser objetivo, apertura, spot, entre otros) se debe emplear el ANOVA funcional. Un experimento como este, se debe realizar como mínimo 40 veces para alcanzar una potencia en la prueba de 0,8, es decir, el tamaño de muestra en cada grupo o nivel del factor debe ser de 40 para obtener dicha potencia.
3. Cuando se busca diferencias en las medias de los grupos considerados (el factor podría ser objetivo, apertura, spot, entre otros) empleando componentes $CIExy$ como variable de respuesta, con la prueba de ANOVA univariada, se debe realizar

- el experimento unas 100 veces para obtener una potencia de 0,8.
4. Cuando se busca diferencias en las medias de los grupos considerados (el factor podría ser objetivo, apertura, spot, entre otros) empleando componentes CIElab como variable de respuesta, con la prueba de ANOVA univariada, se debe realizar el experimento unas 100 veces para obtener una potencia de 0,8.
 5. El objetivo y apertura recomendados, para este tipo de datos espectrales, deben ser la combinación de 20X o superior con aperturas de A2 y A3.
 6. La posición o spot donde se toma la medición no influye en la cantidad de reflectancia espectral.

6.4. Recomendación para futuras investigaciones

Este estudio comparó el desempeño de tres diferentes pruebas de análisis funcional de la varianza con las de MANOVA y ANOVA univariado, pero no se consideraron otras pruebas de FANOVA como las basadas en Bootstrap y las pruebas no paramétricas (J. Zhang, 2013). Queda abierta la expectativa para nuevas investigaciones que relacionen estas otras pruebas que no fueron consideradas en este estudio, así como diseños no equilibrados.

Bibliografía

- Abramovich, F. & Angelini, C. (2006). Testing in mixed-effects FANOVA models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 136(1), 4326-4348. <http://www.math.tau.ac.il/~felix/PAPERS/jspi2006.pdf> (vid. pág. 13)
- Abramovich, F., Antoniadis, A., Sapatinas, T. & Vidakovic, B. (2004). Optimal testing in a fixed-effects functional analysis of variance model. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 2(4), 323-349. <https://doi.org/10.1142/S0219691304000639> (vid. pág. 13)
- Antoniadis, A. & Sapatinas, T. (2007). Estimation and inference in functional mixed-effects models. *Computational Statistics and Data Analysis*, 51(10), 4793-4813. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2006.09.038> (vid. pág. 13)
- Christensen, R. (2016). *Analysis of Variance, Design, and Regression*. (Chapman & Hall, Eds.; 2.^a ed.). Chapman; Hall. <https://doi.org/10.1201/9781315370095>. (Vid. pág. 6)
- Cuestas, J. & Febrero, M. (2010). A simple multiway ANOVA for functional data. *TEST*, 19(3), 537-557. <https://doi.org/10.1007/s11749-010-0185-3> (vid. págs. 13, 20, 41)
- Cuevas, A. (2014). A partial overview of the theory of statistics with functional data. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 47(1), 1-23. <https://doi.org/10.1016/j.jspi.2013.04.002> (vid. pág. 14)
- Cuevas, A., Febrero, M. & Fraiman, R. (2004). An anova test for functional data. *Computational Statistics & Data Analysis*, 47(1), 111-122. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2003.10.021> (vid. págs. 13, 17)

- Degras, D. & Cardot, H. (2016). *onlinePCA: Online Principal Component Analysis* [R package version 1.3.1]. <https://CRAN.R-project.org/package=onlinePCA>. (Vid. pág. 46)
- Emengini, E., Ezeh, F. & Chigbu, N. (2013). Comparative Analysis of Spectral Responses of Varied Plant Species to Oil Stress. *International Journal of Scientific and Engineering Research*, 4, 1421-1427 (vid. pág. 3).
- Faraway, J. (1997). Regression Analysis for a Functional Response. *Technometrics*, 39(3), 254-261 (vid. págs. 14, 17).
- Ferreira, M. P., Grondona, A. E., Rolim, S. B. A. & Shimabukuro, Y. E. (2013). Analyzing the spectral variability of tropical tree species using hyperspectral feature selection and leaf optical modeling. *Journal of Applied Remote Sensing*, 7(1), 1-14. <https://doi.org/10.1117/1.JRS.7.073502> (vid. pág. 3)
- Gaikwad, C. M. & Kakarwal, S. N. (2019). Use of Spectral Reflectance for Sensitive Waveband Determination for Soil Contents. En K. C. Santosh & R. S. Hegadi (Eds.), *Recent Trends in Image Processing and Pattern Recognition* (pp. 323-328). Springer Singapore. (Vid. pág. 3).
- Gorécki, T. & Smaga, L. (2015). A comparison of tests for the one-way ANOVA problem for functional data. *Computational Statistics*, 30(4), 987-1010. <https://doi.org/10.1007/s00180-015-0555-0> (vid. págs. 14, 15, 17, 33, 35, 40, 41, 45)
- Grill, C. & Rush, V. (2000). Analysing spectral data: Comparison and application of two techniques. *Biological Journal of the Linnean Society*, 69, 121-138. <https://doi.org/10.1006/bjpl.1999.0360> (vid. pág. 3)
- Harrell Jr, F. E., with contributions from Charles Dupont & many others. (2019). *Hmisc: Harrell Miscellaneous* [R package version 4.2-0]. <https://CRAN.R-project.org/package=Hmisc>. (Vid. pág. 46)
- Henry, L. & Wickham, H. (2019). *purrr: Functional Programming Tools* [R package version 0.3.2]. <https://CRAN.R-project.org/package=purrr>. (Vid. pág. 46)

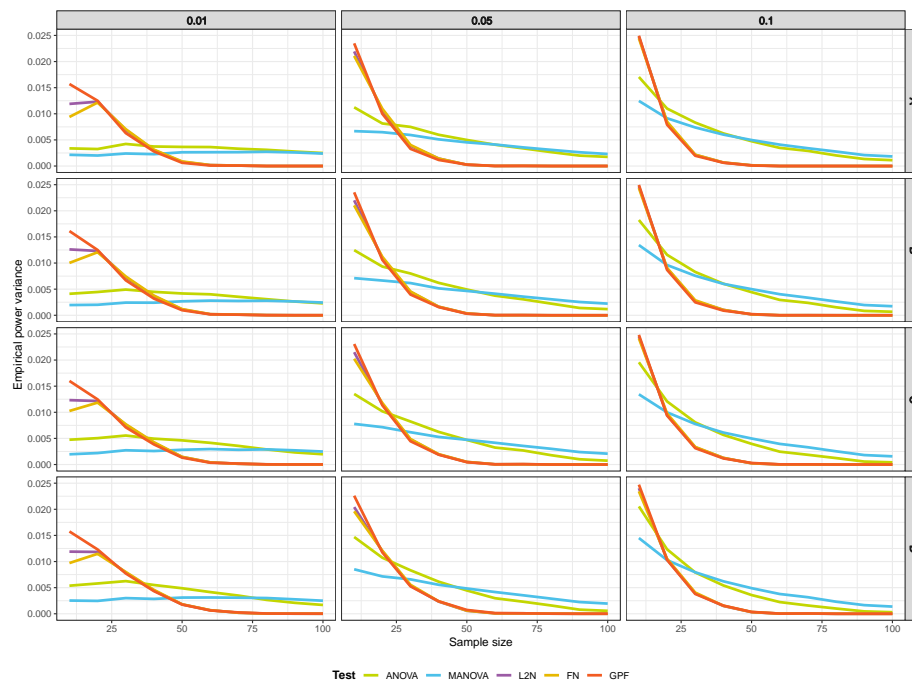
- Hester, J. & Wickham, H. (2019). *fs: Cross-Platform File System Operations Based on 'libuv'* [R package version 1.2.7]. <https://CRAN.R-project.org/package=fs>. (Vid. pág. 46)
- Ito, P. (1980). 7 Robustness of ANOVA and MANOVA test procedures. *Analysis of Variance* (pp. 199-236). Elsevier. [https://doi.org/10.1016/S0169-7161\(80\)01009-7](https://doi.org/10.1016/S0169-7161(80)01009-7). (Vid. pág. 4)
- Luthria, D., Mukhopadhyay, S., Lin, L. & Harnly, J. (2011). A comparison of analytical and data preprocessing methods for spectral fingerprinting. *Applied spectroscopy*, 65(3), 250-259. <https://doi.org/10.1366/10-06109> (vid. pág. 3)
- Madden, T. & Giorgianni, E. (2007). *Digital Color Management: Encoding Solutions*. (Wiley, Ed.; 2.^a ed.). Wiley. <https://doi.org/10.1002/9780470994375>. (Vid. pág. 29)
- Montgomery, D. (2017). *Design and Analysis of Experiments*. (Wiley & Sons, Eds.; 9th Edition). Wiley; Sons. (Vid. págs. 9, 37).
- Munsell, A. (1905). *A color notation – A measured color system based on the three qualities: Hue, value and chroma*. (G. H. E. Co, Ed.). (Vid. pág. 25).
- R Core Team. (2018). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. <https://www.R-project.org/>. (Vid. pág. 45)
- Ramsay, J., Hooker, G. & Graves, S. (2009). *Functional data analysis with R and MATLAB*. (Springer, Ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-98185-7>. (Vid. pág. 1)
- Ramsay, J. & Silverman, B. (2002). *Applied functional data analysis: methods and case studies*. (Springer, Ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/b98886>. (Vid. págs. 1, 4)
- Ramsay, J. & Silverman, B. (2005). *Functional data analysis*. (Springer, Ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/b98888>. (Vid. págs. 1, 14, 19, 45, 75)
- Rencher, A. (2012). *Methods of multivariate analysis* (Wiley & Sons, Eds.; 3th Edition). Wiley; Sons. <https://doi.org/10.1002/9781118391686>. (Vid. págs. 9, 12)

- Schanda, J. (2007). CIE Colorimetry. *Colorimetry* (pp. 25-78). John Wiley; Sons, Ltd. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/9780470175637.ch3>. (Vid. págs. 27, 32)
- Shen, Q. & Faraway, J. (2004). An F test for linear models with functional responses. *Statistica Sinica*, 14(4), 1239-1257. <https://people.bath.ac.uk/jjf23/papers/qing.pdf> (vid. pág. 13)
- Wang, J., Chiou, J. & Müller, H. (2015). Review of functional data analysis. *Annual Review of Statistics and Its Application*, 3(1), 257-295. <http://anson.ucdavis.edu/~mueller/Review151106.pdf> (vid. pág. 4)
- Wickham, H. (2007). Reshaping Data with the reshape Package. *Journal of Statistical Software*, 21(12), 1-20. <http://www.jstatsoft.org/v21/i12/> (vid. pág. 46)
- Wickham, H. (2016). *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. Springer-Verlag New York. <http://ggplot2.org>. (Vid. pág. 46)
- Wickham, H. (2017). *tidyverse: Easily Install and Load the 'Tidyverse'* [R package version 1.2.1]. <https://CRAN.R-project.org/package=tidyverse>. (Vid. pág. 46)
- Yang, X. & Nie, K. (2008). Hypothesis testing in functional linear regression models with Neyman's truncation and wavelet thresholding for longitudinal data. *Statistics in Medicine*, 27(6), 845-863 (vid. pág. 13).
- Zagajewski, B., Tømmervik, H., Bjerke, J., Raczko, E., Bochenek, Z., Kłos, A., Jarocinska, A., Lavender, S. & Ziolkowski, D. (2017). Intraspecific Differences in Spectral Reflectance Curves as Indicators of Reduced Vitality in High-Arctic Plants. *Remote Sensing*, 9, 1289. <https://doi.org/10.3390/rs9121289> (vid. pág. 3)
- Zhang, J. (2011). Statistical inferences for linear models with functional responses. *Statistica Sinica*, 21(3), 1431-1451. <http://www3.stat.sinica.edu.tw/sstest/oldpdf/A21n319.pdf> (vid. pág. 19)
- Zhang, J. (2013). *Analysis of variance for functional data* (Chapman & Hall, Eds.; 1st Edition). Chapman; Hall. <https://doi.org/10.1201/b15005>. (Vid. págs. 1, 13, 15, 16, 19, 23, 33, 85)

- Zhang, J. & Chen, J. (2007). Statistical inferences for functional data. *The Annals of Statistics*, 35(3), 1052-1079. <https://doi.org/10.1214/009053606000001505> (vid. págs. 14, 17)
- Zhang, J. & Liang, X. (2014). One-Way anova for Functional Data via Globalizing the Pointwise F-test. *Scandinavian Journal of Statistics*, 41(1), 51-71. <https://doi.org/10.1111/sjos.12025> (vid. págs. 18, 34, 37, 38)
- Zhang, J., Liang, X. & Xiao, S. (2010). On the two-sample Behrens-Fisher problem for functional data. *The Annals of Statistics*, 4(4), 571-587. <https://doi.org/10.1080/15598608.2010.10412005> (vid. pág. 14)
- Zhang, X., Wang, J.-L. et al. (2016). From sparse to dense functional data and beyond. *The Annals of Statistics*, 44(5), 2281-2321 (vid. pág. 2).

Anexo A.

Análisis de varianza de una vía



Gráfica A.1.

Variabilidad de la potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza en cada ensayo y nivel de significancia para la descomposición de la variable respuesta en valores CIExyz

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro A.1.

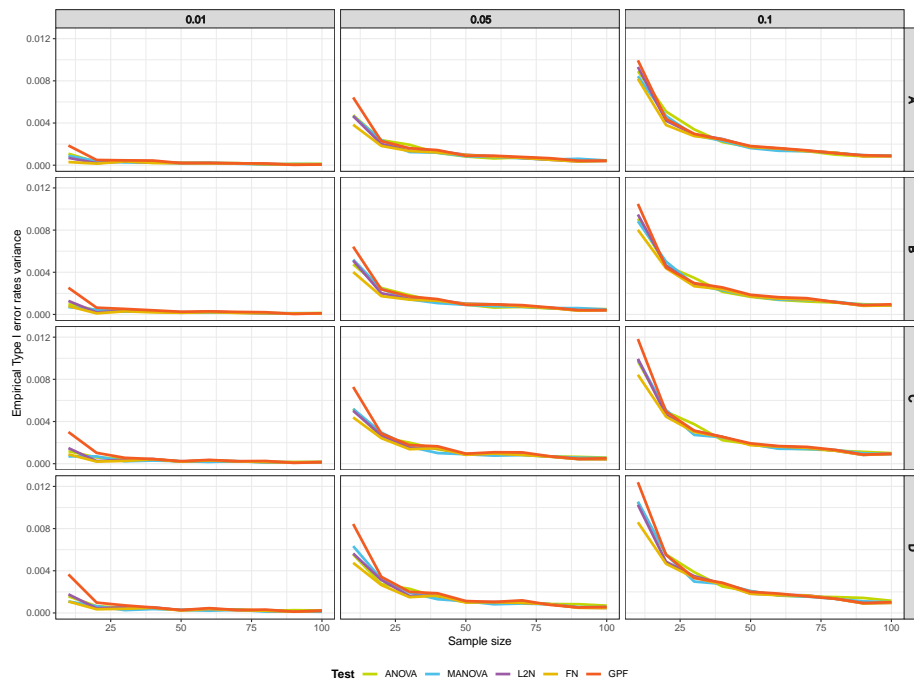
Variabilidad de la potencia empírica empleando la descomposición CIExyz, para cada tamaño de muestra y significancia estadística.

Ensayos	N	ANOVA			MANOVA			FUNCIONAL								
								L2N			FN			GPF		
		0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	α			0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1
A	10	0,00350	0,01290	0,02180	0,00220	0,00720	0,01460	0,01380	0,03250	0,04540	0,01050	0,03020	0,04260	0,01950	0,03770	0,04780
	20	0,00350	0,01025	0,01635	0,00210	0,00765	0,01205	0,02195	0,03465	0,03945	0,02080	0,03375	0,03915	0,02520	0,03620	0,04015
	30	0,00497	0,01137	0,01593	0,00260	0,00773	0,01103	0,02360	0,02887	0,03103	0,02320	0,02863	0,03100	0,02490	0,02963	0,03123
	40	0,00458	0,00993	0,01288	0,00253	0,00715	0,01008	0,02145	0,02348	0,02433	0,02133	0,02348	0,02430	0,02180	0,02378	0,02435
	50	0,00482	0,00956	0,01226	0,00312	0,00694	0,00934	0,01918	0,01976	0,01986	0,01908	0,01974	0,01986	0,01936	0,01972	0,01990
	60	0,00535	0,00952	0,01173	0,00330	0,00742	0,00942	0,01648	0,01665	0,01667	0,01648	0,01665	0,01667	0,01657	0,01665	0,01667
	70	0,00523	0,00880	0,01024	0,00353	0,00689	0,00867	0,01420	0,01426	0,01429	0,01420	0,01426	0,01429	0,01420	0,01426	0,01429
	80	0,00570	0,00866	0,00995	0,00404	0,00688	0,00835	0,01250	0,01250	0,01250	0,01250	0,01250	0,01250	0,01250	0,01250	0,01250
	90	0,00578	0,00850	0,00954	0,00416	0,00681	0,00831	0,01111	0,01111	0,01111	0,01111	0,01111	0,01111	0,01111	0,01111	0,01111
	100	0,00530	0,00774	0,00872	0,00395	0,00640	0,00757	0,01000	0,01000	0,01000	0,01000	0,01000	0,01000	0,01000	0,01000	0,01000
B	10	0,00430	0,01460	0,02400	0,00200	0,00770	0,01600	0,01480	0,03270	0,04460	0,01130	0,03010	0,04200	0,02020	0,03790	0,04790
	20	0,00495	0,01240	0,01820	0,00210	0,00790	0,01300	0,02195	0,03380	0,03830	0,02035	0,03305	0,03810	0,02465	0,03475	0,03880
	30	0,00600	0,01333	0,01783	0,00263	0,00817	0,01160	0,02267	0,02803	0,03037	0,02217	0,02790	0,03017	0,02407	0,02873	0,03063
	40	0,00585	0,01148	0,01478	0,00270	0,00725	0,01005	0,02058	0,02325	0,02393	0,02038	0,02323	0,02393	0,02125	0,02333	0,02408
	50	0,00594	0,01116	0,01340	0,00318	0,00738	0,01006	0,01882	0,01966	0,01984	0,01874	0,01964	0,01982	0,01898	0,01970	0,01978
	60	0,00675	0,01095	0,01285	0,00357	0,00758	0,00982	0,01647	0,01665	0,01667	0,01645	0,01665	0,01665	0,01648	0,01663	0,01667
	70	0,00646	0,00986	0,01127	0,00370	0,00721	0,00886	0,01416	0,01426	0,01427	0,01416	0,01426	0,01427	0,01417	0,01426	0,01429
	80	0,00701	0,00960	0,01071	0,00419	0,00716	0,00871	0,01246	0,01250	0,01250	0,01246	0,01250	0,01250	0,01249	0,01250	0,01250
	90	0,00684	0,00947	0,01020	0,00436	0,00717	0,00857	0,01110	0,01111	0,01111	0,01110	0,01111	0,01111	0,01111	0,01111	0,01111
	100	0,00647	0,00864	0,00927	0,00420	0,00664	0,00777	0,01000	0,01000	0,01000	0,00999	0,01000	0,01000	0,00999	0,01000	0,01000
C	10	0,00500	0,01610	0,02670	0,00200	0,00850	0,01600	0,01440	0,03130	0,04320	0,01160	0,02820	0,04080	0,02000	0,03610	0,04580
	20	0,00570	0,01425	0,02040	0,00230	0,00865	0,01380	0,02085	0,03205	0,03730	0,01930	0,03095	0,03665	0,02375	0,03260	0,03750
	30	0,00703	0,01487	0,01960	0,00300	0,00820	0,01230	0,02163	0,02750	0,02963	0,02120	0,02740	0,02953	0,02303	0,02803	0,02983
	40	0,00680	0,01273	0,01630	0,00293	0,00758	0,01070	0,01970	0,02290	0,02368	0,01955	0,02283	0,02365	0,02025	0,02295	0,02378
	50	0,00726	0,01242	0,01456	0,00340	0,00770	0,01064	0,01844	0,01950	0,01976	0,01840	0,01948	0,01976	0,01858	0,01954	0,01970
	60	0,00782	0,01225	0,01367	0,00385	0,00827	0,01023	0,01625	0,01662	0,01665	0,01625	0,01662	0,01665	0,01632	0,01663	0,01663
	70	0,00740	0,01069	0,01209	0,00387	0,00744	0,00910	0,01414	0,01423	0,01427	0,01414	0,01423	0,01427	0,01410	0,01421	0,01426
	80	0,00798	0,01035	0,01111	0,00458	0,00748	0,00898	0,01246	0,01250	0,01250	0,01246	0,01250	0,01250	0,01248	0,01250	0,01250
	90	0,00781	0,00999	0,01051	0,00474	0,00763	0,00883	0,01110	0,01111	0,01111	0,01110	0,01111	0,01111	0,01110	0,01111	0,01111
	100	0,00730	0,00920	0,00956	0,00460	0,00706	0,00805	0,00999	0,01000	0,01000	0,00999	0,01000	0,01000	0,00998	0,01000	0,01000
D	10	0,00570	0,01790	0,02890	0,00260	0,00940	0,01760	0,01380	0,02860	0,04020	0,01090	0,02680	0,03750	0,01960	0,03450	0,04470
	20	0,00670	0,01560	0,02220	0,00260	0,00865	0,01445	0,01925	0,03015	0,03530	0,01785	0,02955	0,03490	0,02190	0,03115	0,03545
	30	0,00833	0,01617	0,02043	0,00333	0,00903	0,01307	0,02050	0,02660	0,02880	0,02000	0,02630	0,02860	0,02120	0,02680	0,02897
	40	0,00820	0,01413	0,01705	0,00328	0,00833	0,01155	0,01920	0,02240	0,02340	0,01898	0,02233	0,02335	0,01943	0,02233	0,02333
	50	0,00848	0,01328	0,01532	0,00384	0,00822	0,01140	0,01802	0,01940	0,01968	0,01798	0,01938	0,01966	0,01804	0,01924	0,01964
	60	0,00885	0,01278	0,01400	0,00415	0,00852	0,01085	0,01597	0,01658	0,01663	0,01595	0,01658	0,01663	0,01600	0,01653	0,01663
	70	0,00826	0,01139	0,01247	0,00449	0,00784	0,00954	0,01409	0,01420	0,01424	0,01409	0,01420	0,01424	0,01403	0,01420	0,01423
	80	0,00866	0,01064	0,01140	0,00508	0,00795	0,00944	0,01246	0,01248	0,01250	0,01246	0,01248	0,01250	0,01245	0,01248	0,01250
	90	0,00831	0,01026	0,01063	0,00522	0,00799	0,00909	0,01109	0,01110	0,01111	0,01109	0,01110	0,01111	0,01109	0,01111	0,01111
	100	0,00785	0,00940	0,00969	0,00506	0,00734	0,00835	0,00999	0,00999	0,01000	0,00999	0,00999	0,01000	0,00998	0,00999	0,01000

1/ α corresponde al nivel de significancia estadística.

2/Estimadas a partir de 1000 iteraciones.

Fuente: Elaboración propia.



Gráfica A.2.

Variabilidad de las tasas de error empírico tipo I de las pruebas de análisis de varianza en cada ensayo y nivel de significancia para la descomposición de la variable respuesta en valores CIExyz.
Fuente: Elaboración propia.

Cuadro A.2.

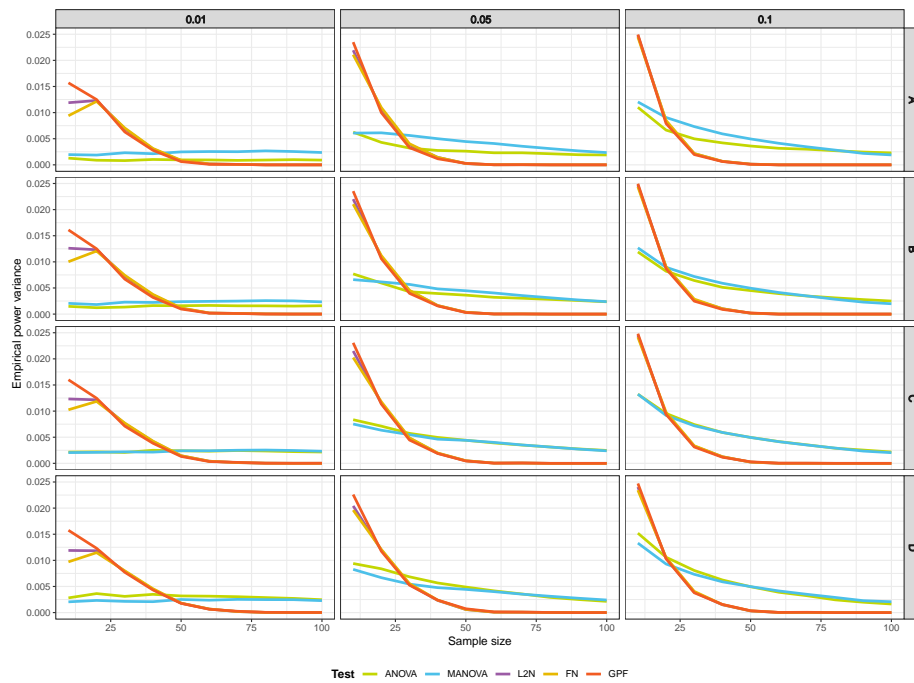
Variabilidad de las tasas de error tipo I empíricas empleando la descomposición CIExyz, para cada tamaño de muestra y significancia estadística.

Ensayos	ANOVA			MANOVA			FUNCIONAL									
	N							L2N			FN			GPF		
		0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	α			0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1
A	10	0,00110	0,00500	0,00990	0,00090	0,00490	0,00930	0,00070	0,00490	0,01040	0,00030	0,00400	0,00900	0,00190	0,00690	0,01120
	20	0,00030	0,00250	0,00575	0,00040	0,00250	0,00520	0,00020	0,00210	0,00465	0,00015	0,00190	0,00415	0,00050	0,00240	0,00485
	30	0,00033	0,00207	0,00383	0,00027	0,00130	0,00313	0,00037	0,00143	0,00323	0,00037	0,00140	0,00303	0,00047	0,00170	0,00330
	40	0,00023	0,00123	0,00243	0,00028	0,00125	0,00258	0,00025	0,00143	0,00280	0,00023	0,00128	0,00275	0,00045	0,00153	0,00273
	50	0,00022	0,00086	0,00190	0,00018	0,00090	0,00178	0,00022	0,00104	0,00194	0,00020	0,00102	0,00190	0,00020	0,00094	0,00202
	60	0,00022	0,00067	0,00155	0,00022	0,00082	0,00150	0,00020	0,00090	0,00177	0,00018	0,00085	0,00177	0,00022	0,00095	0,00182
	70	0,00020	0,00079	0,00149	0,00014	0,00069	0,00149	0,00019	0,00073	0,00151	0,00017	0,00073	0,00150	0,00017	0,00083	0,00159
	80	0,00009	0,00064	0,00110	0,00006	0,00056	0,00130	0,00013	0,00054	0,00133	0,00010	0,00054	0,00133	0,00016	0,00070	0,00126
	90	0,00012	0,00043	0,00092	0,00011	0,00064	0,00104	0,00007	0,00037	0,00096	0,00007	0,00037	0,00093	0,00003	0,00044	0,00104
	100	0,00013	0,00047	0,00097	0,00009	0,00047	0,00099	0,00006	0,00043	0,00097	0,00006	0,00043	0,00095	0,00007	0,00044	0,00097
B	10	0,00100	0,00500	0,01010	0,00070	0,00550	0,00980	0,00130	0,00540	0,01060	0,00080	0,00420	0,00880	0,00260	0,00690	0,01190
	20	0,00040	0,00265	0,00515	0,00045	0,00255	0,00565	0,00020	0,00210	0,00515	0,00010	0,00180	0,00485	0,00065	0,00250	0,00495
	30	0,00033	0,00193	0,00393	0,00027	0,00150	0,00313	0,00037	0,00153	0,00310	0,00030	0,00147	0,00293	0,00053	0,00180	0,00330
	40	0,00033	0,00130	0,00238	0,00030	0,00113	0,00255	0,00028	0,00143	0,00275	0,00020	0,00138	0,00268	0,00040	0,00155	0,00290
	50	0,00018	0,00098	0,00184	0,00022	0,00096	0,00192	0,00016	0,00108	0,00198	0,00016	0,00104	0,00190	0,00026	0,00096	0,00208
	60	0,00020	0,00068	0,00152	0,00018	0,00083	0,00155	0,00028	0,00102	0,00168	0,00022	0,00102	0,00167	0,00030	0,00102	0,00183
	70	0,00016	0,00076	0,00136	0,00020	0,00076	0,00153	0,00017	0,00083	0,00163	0,00016	0,00080	0,00159	0,00024	0,00094	0,00176
	80	0,00013	0,00060	0,00125	0,00010	0,00064	0,00136	0,00013	0,00066	0,00131	0,00013	0,00065	0,00130	0,00021	0,00070	0,00131
	90	0,00010	0,00053	0,00108	0,00012	0,00063	0,00099	0,00010	0,00039	0,00091	0,00010	0,00037	0,00089	0,00004	0,00042	0,00096
	100	0,00014	0,00053	0,00096	0,00010	0,00050	0,00096	0,00008	0,00043	0,00097	0,00007	0,00043	0,00095	0,00011	0,00042	0,00108
C	10	0,00120	0,00550	0,01090	0,00070	0,00550	0,01110	0,00150	0,00530	0,01120	0,00090	0,00460	0,00930	0,00310	0,00790	0,01370
	20	0,00060	0,00265	0,00555	0,00070	0,00315	0,00575	0,00025	0,00285	0,00515	0,00020	0,00255	0,00495	0,00105	0,00305	0,00555
	30	0,00047	0,00213	0,00430	0,00023	0,00170	0,00300	0,00037	0,00157	0,00347	0,00027	0,00143	0,00333	0,00057	0,00187	0,00350
	40	0,00043	0,00145	0,00248	0,00030	0,00105	0,00283	0,00045	0,00158	0,00288	0,00043	0,00158	0,00285	0,00045	0,00178	0,00288
	50	0,00020	0,00100	0,00208	0,00024	0,00094	0,00206	0,00020	0,00092	0,00202	0,00020	0,00088	0,00194	0,00024	0,00100	0,00216
	60	0,00022	0,00090	0,00162	0,00017	0,00080	0,00157	0,00033	0,00103	0,00183	0,00032	0,00102	0,00182	0,00037	0,00117	0,00188
	70	0,00021	0,00091	0,00156	0,00024	0,00087	0,00156	0,00023	0,00096	0,00173	0,00023	0,00089	0,00171	0,00024	0,00117	0,00183
	80	0,00018	0,00074	0,00140	0,00011	0,00071	0,00148	0,00018	0,00071	0,00140	0,00016	0,00070	0,00139	0,00026	0,00074	0,00149
	90	0,00017	0,00069	0,00127	0,00012	0,00060	0,00109	0,00013	0,00046	0,00091	0,00011	0,00046	0,00091	0,00008	0,00048	0,00093
	100	0,00018	0,00061	0,00113	0,00010	0,00056	0,00100	0,00015	0,00044	0,00105	0,00015	0,00044	0,00103	0,00015	0,00054	0,00105
D	10	0,00160	0,00590	0,01190	0,00110	0,00680	0,01200	0,00180	0,00600	0,01160	0,00110	0,00500	0,00950	0,00380	0,00930	0,01450
	20	0,00065	0,00290	0,00635	0,00065	0,00345	0,00635	0,00045	0,00335	0,00545	0,00035	0,00280	0,00520	0,00100	0,00370	0,00630
	30	0,00050	0,00247	0,00447	0,00027	0,00207	0,00330	0,00053	0,00170	0,00397	0,00040	0,00157	0,00377	0,00073	0,00213	0,00373
	40	0,00045	0,00160	0,00283	0,00038	0,00138	0,00315	0,00055	0,00178	0,00318	0,00050	0,00178	0,00310	0,00053	0,00203	0,00330
	50	0,00028	0,00106	0,00232	0,00030	0,00118	0,00236	0,00026	0,00110	0,00204	0,00024	0,00106	0,00202	0,00028	0,00120	0,00226
	60	0,00028	0,00105	0,00185	0,00022	0,00087	0,00188	0,00040	0,00112	0,00195	0,00038	0,00108	0,00190	0,00047	0,00112	0,00210
	70	0,00034	0,00106	0,00177	0,00030	0,00096	0,00177	0,00027	0,00106	0,00193	0,00027	0,00103	0,00190	0,00029	0,00131	0,00180
	80	0,00021	0,00091	0,00175	0,00013	0,00089	0,00153	0,00023	0,00089	0,00155	0,00021	0,00089	0,00154	0,00033	0,00081	0,00154
	90	0,00027	0,00090	0,00168	0,00014	0,00059	0,00124	0,00012	0,00053	0,00101	0,00012	0,00051	0,00099	0,00012	0,00054	0,00103
	100	0,00024	0,00075	0,00133	0,00011	0,00059	0,00114	0,00021	0,00050	0,00108	0,00021	0,00049	0,00107	0,00022	0,00060	0,00115

1/ α corresponde al nivel de significancia estadística.

2/Estimadas a partir de 1000 iteraciones.

Fuente: Elaboración propia.



Gráfica A.3.

Variabilidad de la potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza en cada ensayo y nivel de significancia para la descomposición de la variable respuesta en valores CIElab.

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro A.3.

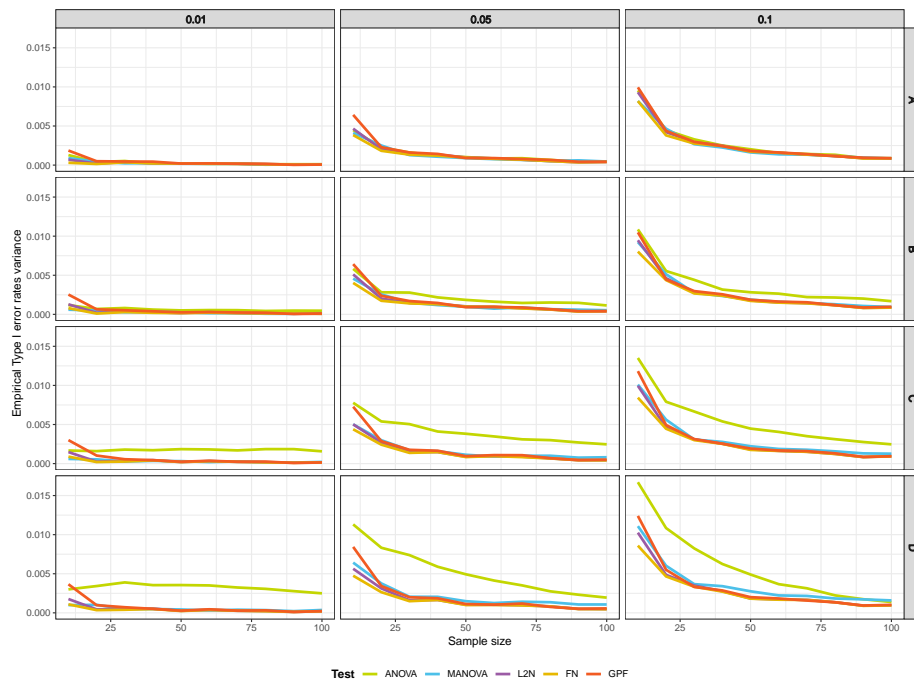
Potencia empírica empleando la descomposición CIElab, para cada tamaño de muestra y significancia estadística.

Ensayos	FUNCIONAL															
	ANOVA			MANOVA			L2N			FN			GPF			
	N	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1
A	10	0,00130	0,00670	0,01260	0,00200	0,00650	0,01400	0,01380	0,03250	0,04540	0,01050	0,03020	0,04260	0,01950	0,03770	0,04780
	20	0,00090	0,00475	0,00790	0,00195	0,00715	0,01190	0,02195	0,03465	0,03945	0,02080	0,03375	0,03915	0,02520	0,03620	0,04015
	30	0,00083	0,00360	0,00610	0,00250	0,00717	0,01087	0,02360	0,02887	0,03103	0,02320	0,02863	0,03100	0,02490	0,02963	0,03123
	40	0,00108	0,00315	0,00535	0,00235	0,00693	0,00968	0,02145	0,02348	0,02433	0,02133	0,02348	0,02430	0,02180	0,02378	0,02435
	50	0,00100	0,00310	0,00472	0,00290	0,00670	0,00908	0,01918	0,01976	0,01986	0,01908	0,01974	0,01986	0,01936	0,01972	0,01990
	60	0,00100	0,00277	0,00425	0,00313	0,00717	0,00912	0,01648	0,01665	0,01667	0,01648	0,01665	0,01667	0,01657	0,01665	0,01667
	70	0,00091	0,00289	0,00427	0,00326	0,00669	0,00847	0,01420	0,01426	0,01429	0,01420	0,01426	0,01429	0,01420	0,01426	0,01429
	80	0,00100	0,00271	0,00396	0,00388	0,00678	0,00818	0,01250	0,01250	0,01250	0,01250	0,01250	0,01250	0,01250	0,01250	0,01250
	90	0,00110	0,00250	0,00366	0,00396	0,00663	0,00810	0,01111	0,01111	0,01111	0,01111	0,01111	0,01111	0,01111	0,01111	0,01111
	100	0,00101	0,00254	0,00354	0,00383	0,00623	0,00745	0,01000	0,01000	0,01000	0,01000	0,01000	0,01000	0,01000	0,01000	0,01000
B	10	0,00150	0,00840	0,01380	0,00210	0,00710	0,01490	0,01480	0,03270	0,04460	0,01130	0,03010	0,04200	0,02020	0,03790	0,04790
	20	0,00125	0,00690	0,01035	0,00190	0,00720	0,01170	0,02195	0,03380	0,03830	0,02035	0,03305	0,03810	0,02465	0,03475	0,03880
	30	0,00140	0,00503	0,00870	0,00247	0,00727	0,01050	0,02267	0,02803	0,03037	0,02217	0,02790	0,03017	0,02407	0,02873	0,03063
	40	0,00175	0,00490	0,00720	0,00248	0,00653	0,00955	0,02058	0,02325	0,02393	0,02038	0,02323	0,02393	0,02125	0,02333	0,02408
	50	0,00176	0,00476	0,00684	0,00276	0,00674	0,00906	0,01882	0,01966	0,01984	0,01874	0,01964	0,01982	0,01898	0,01970	0,01978
	60	0,00187	0,00435	0,00630	0,00297	0,00690	0,00910	0,01647	0,01665	0,01667	0,01645	0,01665	0,01665	0,01648	0,01663	0,01667
	70	0,00181	0,00437	0,00589	0,00321	0,00653	0,00829	0,01416	0,01426	0,01427	0,01416	0,01426	0,01427	0,01417	0,01426	0,01429
	80	0,00185	0,00428	0,00580	0,00363	0,00650	0,00814	0,01246	0,01250	0,01250	0,01246	0,01250	0,01250	0,01249	0,01250	0,01250
	90	0,00183	0,00412	0,00569	0,00388	0,00646	0,00788	0,01110	0,01111	0,01111	0,01110	0,01111	0,01111	0,01111	0,01111	0,01111
	100	0,00200	0,00380	0,00510	0,00373	0,00609	0,00729	0,01000	0,01000	0,01000	0,00999	0,01000	0,01000	0,00999	0,01000	0,01000
C	10	0,00220	0,00920	0,01570	0,00210	0,00820	0,01570	0,01440	0,03130	0,04320	0,01160	0,02820	0,04080	0,02000	0,03610	0,04580
	20	0,00230	0,00860	0,01285	0,00220	0,00745	0,01210	0,02085	0,03205	0,03730	0,01930	0,03095	0,03665	0,02375	0,03260	0,03750
	30	0,00223	0,00737	0,01117	0,00237	0,00693	0,01050	0,02163	0,02750	0,02963	0,02120	0,02740	0,02953	0,02303	0,02803	0,02983
	40	0,00283	0,00683	0,00958	0,00238	0,00613	0,00960	0,01970	0,02290	0,02368	0,01955	0,02283	0,02365	0,02025	0,02295	0,02378
	50	0,00280	0,00660	0,00916	0,00280	0,00654	0,00904	0,01844	0,01950	0,01976	0,01840	0,01948	0,01976	0,01858	0,01954	0,01970
	60	0,00280	0,00625	0,00822	0,00292	0,00672	0,00887	0,01625	0,01662	0,01665	0,01625	0,01662	0,01665	0,01632	0,01663	0,01663
	70	0,00314	0,00611	0,00777	0,00324	0,00629	0,00806	0,01414	0,01423	0,01427	0,01414	0,01423	0,01427	0,01410	0,01421	0,01426
	80	0,00316	0,00613	0,00794	0,00356	0,00633	0,00784	0,01246	0,01250	0,01250	0,01246	0,01250	0,01250	0,01248	0,01250	0,01250
	90	0,00311	0,00599	0,00717	0,00368	0,00632	0,00774	0,01110	0,01111	0,01111	0,01110	0,01111	0,01111	0,01110	0,01111	0,01111
	100	0,00318	0,00550	0,00682	0,00366	0,00602	0,00715	0,00999	0,01000	0,01000	0,00999	0,01000	0,01000	0,00998	0,01000	0,01000
D	10	0,00290	0,01050	0,01870	0,00210	0,00910	0,01580	0,01380	0,02860	0,04020	0,01090	0,02680	0,03750	0,01960	0,03450	0,04470
	20	0,00395	0,01065	0,01525	0,00245	0,00795	0,01235	0,01925	0,03015	0,03530	0,01785	0,02955	0,03490	0,02190	0,03115	0,03545
	30	0,00347	0,00963	0,01367	0,00230	0,00687	0,01087	0,02050	0,02660	0,02880	0,02000	0,02630	0,02860	0,02120	0,02680	0,02897
	40	0,00420	0,00870	0,01210	0,00230	0,00643	0,00950	0,01920	0,02240	0,02340	0,01898	0,02233	0,02335	0,01943	0,02233	0,02333
	50	0,00398	0,00850	0,01098	0,00294	0,00666	0,00936	0,01802	0,01940	0,01968	0,01798	0,01938	0,01966	0,01804	0,01924	0,01964
	60	0,00420	0,00805	0,01047	0,00287	0,00672	0,00892	0,01597	0,01658	0,01663	0,01595	0,01658	0,01663	0,01600	0,01653	0,01663
	70	0,00439	0,00757	0,00934	0,00329	0,00633	0,00814	0,01409	0,01420	0,01424	0,01409	0,01420	0,01424	0,01403	0,01420	0,01423
	80	0,00448	0,00789	0,00918	0,00343	0,00641	0,00791	0,01246	0,01248	0,01250	0,01246	0,01248	0,01250	0,01245	0,01248	0,01250
	90	0,00471	0,00731	0,00852	0,00371	0,00614	0,00790	0,01109	0,01110	0,01111	0,01109	0,01110	0,01111	0,01109	0,01111	0,01111
	100	0,00439	0,00687	0,00793	0,00353	0,00596	0,00706	0,00999	0,00999	0,01000	0,00999	0,00999	0,01000	0,00998	0,00999	0,01000

1/ α corresponde al nivel de significancia estadística.

2/Estimadas a partir de 1000 iteraciones.

Fuente: Elaboración propia.



Gráfica A.4.

Variabilidad de las tasas de error empírico tipo I de las pruebas de análisis de varianza en cada ensayo y nivel de significancia para la descomposición de la variable respuesta en valores CIElab.
 Fuente: Elaboración propia.

Cuadro A.4.

Variabilidad de las tasas de error tipo I empíricas empleando la descomposición CIElab, para cada tamaño de muestra y significancia estadística.

Ensayos	FUNCIONAL															
	ANOVA			MANOVA			L2N			FN			GPF			
	N	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1
A	10	0,00130	0,00470	0,01070	0,00090	0,00430	0,00900	0,00070	0,00490	0,01040	0,00030	0,00400	0,00900	0,00190	0,00690	0,01120
	20	0,00040	0,00235	0,00495	0,00045	0,00265	0,00520	0,00020	0,00210	0,00465	0,00015	0,00190	0,00415	0,00050	0,00240	0,00485
	30	0,00053	0,00170	0,00370	0,00023	0,00133	0,00293	0,00037	0,00143	0,00323	0,00037	0,00140	0,00303	0,00047	0,00170	0,00330
	40	0,00020	0,00128	0,00283	0,00025	0,00113	0,00250	0,00025	0,00143	0,00280	0,00023	0,00128	0,00275	0,00045	0,00153	0,00273
	50	0,00020	0,00108	0,00228	0,00018	0,00094	0,00178	0,00022	0,00104	0,00194	0,00020	0,00102	0,00190	0,00020	0,00094	0,00202
	60	0,00017	0,00090	0,00172	0,00017	0,00080	0,00152	0,00020	0,00090	0,00177	0,00018	0,00085	0,00177	0,00022	0,00095	0,00182
	70	0,00017	0,00094	0,00160	0,00017	0,00070	0,00149	0,00019	0,00073	0,00151	0,00017	0,00073	0,00150	0,00017	0,00083	0,00159
	80	0,00011	0,00070	0,00150	0,00005	0,00055	0,00129	0,00013	0,00054	0,00133	0,00010	0,00054	0,00133	0,00016	0,00070	0,00126
	90	0,00011	0,00047	0,00099	0,00009	0,00064	0,00106	0,00007	0,00037	0,00096	0,00007	0,00037	0,00093	0,00003	0,00044	0,00104
	100	0,00011	0,00047	0,00098	0,00010	0,00048	0,00093	0,00006	0,00043	0,00097	0,00006	0,00043	0,00095	0,00007	0,00044	0,00097
B	10	0,00120	0,00620	0,01240	0,00060	0,00480	0,01030	0,00130	0,00540	0,01060	0,00080	0,00420	0,00880	0,00260	0,00690	0,01190
	20	0,00070	0,00300	0,00635	0,00050	0,00270	0,00580	0,00020	0,00210	0,00515	0,00010	0,00180	0,00485	0,00065	0,00250	0,00495
	30	0,00083	0,00307	0,00523	0,00027	0,00157	0,00303	0,00037	0,00153	0,00310	0,00030	0,00147	0,00293	0,00053	0,00180	0,00330
	40	0,00063	0,00240	0,00373	0,00033	0,00125	0,00263	0,00028	0,00143	0,00275	0,00020	0,00138	0,00268	0,00040	0,00155	0,00290
	50	0,00052	0,00206	0,00340	0,00026	0,00102	0,00210	0,00016	0,00108	0,00198	0,00016	0,00104	0,00190	0,00026	0,00096	0,00208
	60	0,00057	0,00182	0,00330	0,00015	0,00077	0,00180	0,00028	0,00102	0,00168	0,00022	0,00102	0,00167	0,00030	0,00102	0,00183
	70	0,00056	0,00164	0,00273	0,00016	0,00094	0,00164	0,00017	0,00083	0,00163	0,00016	0,00080	0,00159	0,00024	0,00094	0,00176
	80	0,00045	0,00176	0,00276	0,00008	0,00070	0,00146	0,00013	0,00066	0,00131	0,00013	0,00065	0,00130	0,00021	0,00070	0,00131
	90	0,00050	0,00174	0,00264	0,00007	0,00063	0,00120	0,00010	0,00039	0,00091	0,00010	0,00037	0,00089	0,00004	0,00042	0,00096
	100	0,00049	0,00131	0,00214	0,00015	0,00056	0,00106	0,00008	0,00043	0,00097	0,00007	0,00043	0,00095	0,00011	0,00042	0,00108
C	10	0,00170	0,00850	0,01610	0,00060	0,00530	0,01140	0,00150	0,00530	0,01120	0,00090	0,00460	0,00930	0,00310	0,00790	0,01370
	20	0,00165	0,00615	0,00985	0,00055	0,00320	0,00645	0,00025	0,00285	0,00515	0,00020	0,00255	0,00495	0,00105	0,00305	0,00555
	30	0,00190	0,00620	0,00920	0,00027	0,00180	0,00343	0,00037	0,00157	0,00347	0,00027	0,00143	0,00333	0,00057	0,00187	0,00350
	40	0,00185	0,00518	0,00788	0,00035	0,00170	0,00318	0,00045	0,00158	0,00288	0,00043	0,00158	0,00285	0,00045	0,00178	0,00288
	50	0,00206	0,00514	0,00676	0,00032	0,00120	0,00254	0,00020	0,00092	0,00202	0,00020	0,00088	0,00194	0,00024	0,00100	0,00216
	60	0,00207	0,00493	0,00695	0,00020	0,00097	0,00215	0,00033	0,00103	0,00183	0,00032	0,00102	0,00182	0,00037	0,00117	0,00188
	70	0,00196	0,00456	0,00619	0,00029	0,00109	0,00207	0,00023	0,00096	0,00173	0,00023	0,00089	0,00171	0,00024	0,00117	0,00183
	80	0,00226	0,00500	0,00646	0,00018	0,00110	0,00184	0,00018	0,00071	0,00140	0,00016	0,00070	0,00139	0,00026	0,00074	0,00149
	90	0,00234	0,00463	0,00599	0,00013	0,00082	0,00151	0,00013	0,00046	0,00091	0,00011	0,00046	0,00091	0,00008	0,00048	0,00093
	100	0,00195	0,00441	0,00560	0,00022	0,00089	0,00149	0,00015	0,00044	0,00105	0,00015	0,00044	0,00103	0,00015	0,00054	0,00105
D	10	0,00310	0,01300	0,02120	0,00100	0,00690	0,01270	0,00180	0,00600	0,01160	0,00110	0,00500	0,00950	0,00380	0,00930	0,01450
	20	0,00370	0,01055	0,01590	0,00105	0,00410	0,00700	0,00045	0,00335	0,00545	0,00035	0,00280	0,00520	0,00100	0,00370	0,00630
	30	0,00450	0,01103	0,01493	0,00050	0,00220	0,00420	0,00053	0,00170	0,00397	0,00040	0,00157	0,00377	0,00073	0,00213	0,00373
	40	0,00428	0,00953	0,01283	0,00050	0,00225	0,00408	0,00055	0,00178	0,00318	0,00050	0,00178	0,00310	0,00053	0,00203	0,00330
	50	0,00462	0,00882	0,01142	0,00044	0,00162	0,00330	0,00026	0,00110	0,00204	0,00024	0,00106	0,00202	0,00028	0,00120	0,00226
	60	0,00502	0,00907	0,01122	0,00032	0,00137	0,00265	0,00040	0,00112	0,00195	0,00038	0,00108	0,00190	0,00047	0,00112	0,00210
	70	0,00497	0,00807	0,00963	0,00041	0,00160	0,00266	0,00027	0,00106	0,00193	0,00027	0,00103	0,00190	0,00029	0,00131	0,00180
	80	0,00541	0,00841	0,00959	0,00036	0,00155	0,00224	0,00023	0,00089	0,00155	0,00021	0,00089	0,00154	0,00033	0,00081	0,00154
	90	0,00537	0,00781	0,00894	0,00022	0,00120	0,00213	0,00012	0,00053	0,00101	0,00012	0,00051	0,00099	0,00012	0,00054	0,00103
	100	0,00524	0,00735	0,00834	0,00038	0,00122	0,00198	0,00021	0,00050	0,00108	0,00021	0,00049	0,00107	0,00022	0,00060	0,00115

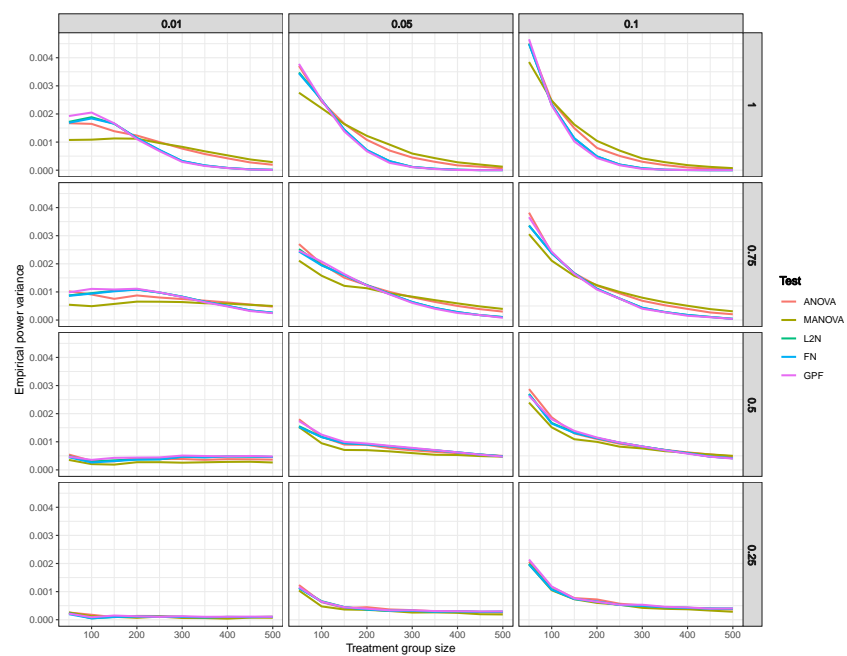
1/ α corresponde al nivel de significancia estadística.

2/Estimadas a partir de 1000 iteraciones.

Fuente: Elaboración propia.

Anexo B.

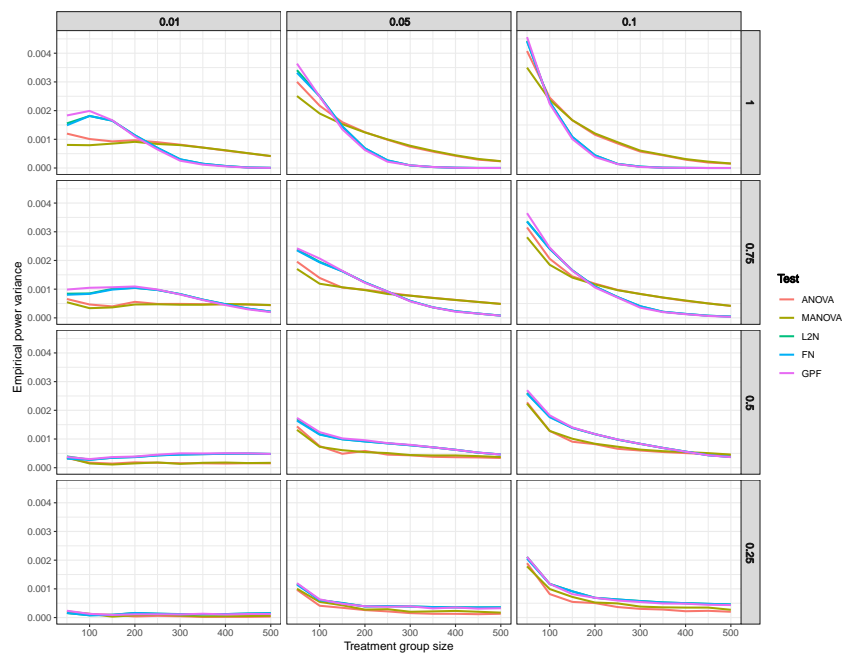
Diferencia mínima por detectar en un análisis de varianza de una vía



Gráfica B.1.

Variabilidad de la potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza para el ensayo E, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar.

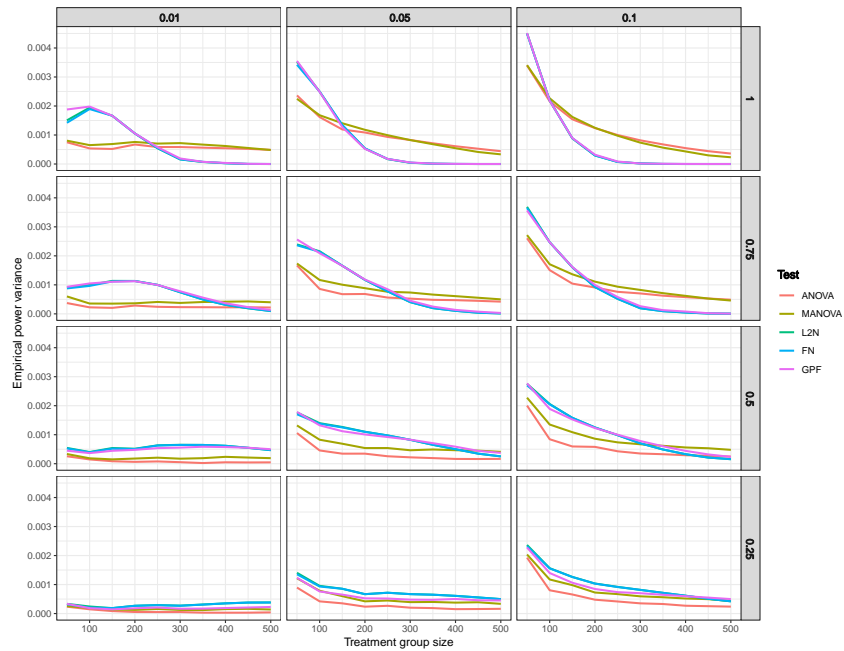
Fuente: Elaboración propia.



Gráfica B.2.

Variabilidad de la potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza para el ensayo F, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar.

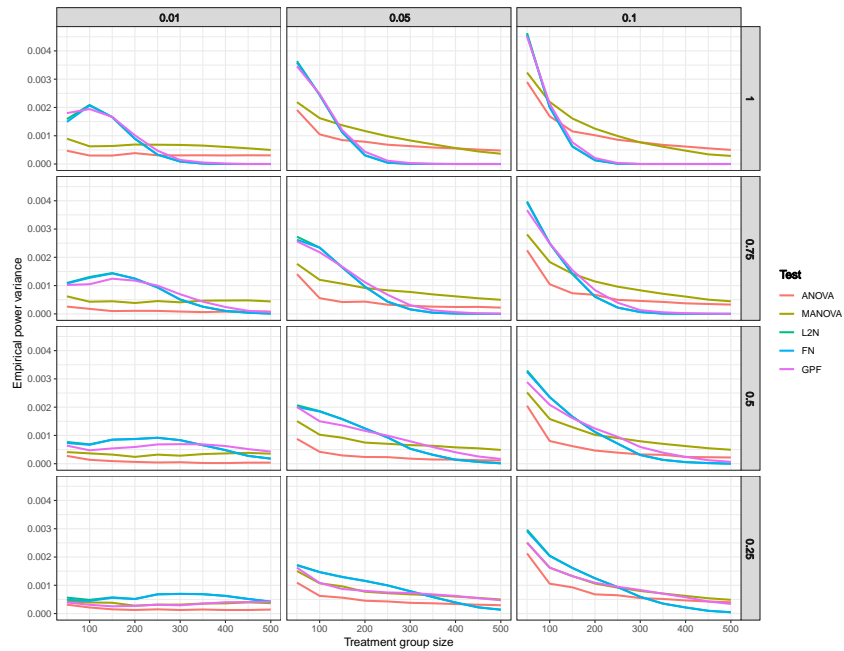
Fuente: Elaboración propia.



Gráfica B.3.

Variabilidad de la potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza para el ensayo G según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar.

Fuente: Elaboración propia.



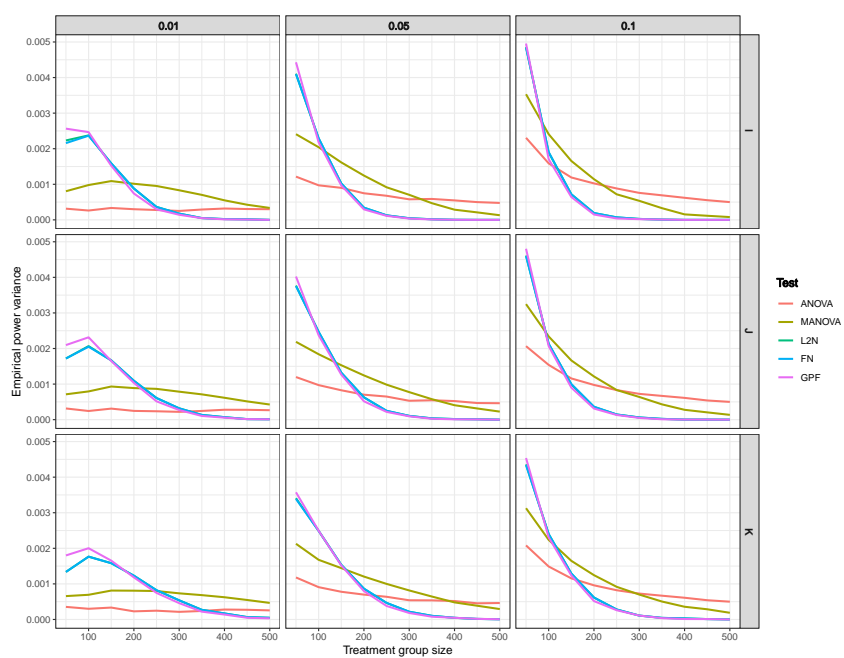
Gráfica B.4.

Variabilidad de la potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza para el ensayo H, según nivel de significancia y diferencia mínima por detectar.

Fuente: Elaboración propia.

Anexo C.

Análisis de varianza de dos vías con interacción



Gráfica C.1.

Variabilidad de la potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza de dos vías con interacción en cada ensayo, según nivel de significancia.

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro C.1.

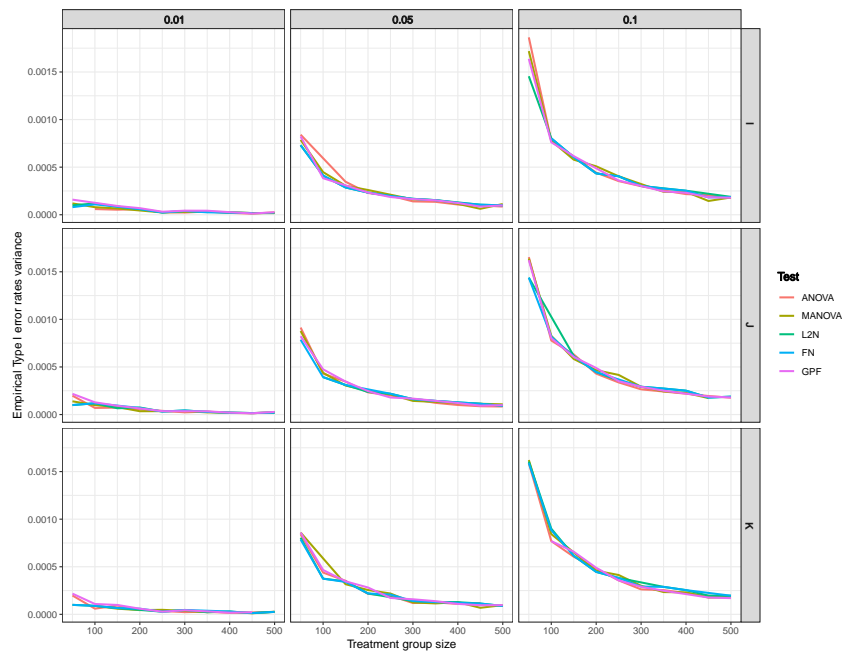
Variabilidad de la potencia empírica de las pruebas de análisis de varianza de dos vías con interacción en cada ensayo, según nivel de significancia.

Ensayos	ANOVA			MANOVA			FUNCIONAL									
	N							L2N			FN			GPF		
		0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	α			0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1
A	50	0,0003	0,0013	0,0027	0,0008	0,0028	0,0046	0,0026	0,0058	0,0083	0,0025	0,0057	0,0082	0,0030	0,0066	0,0091
	100	0,0003	0,0011	0,0020	0,0011	0,0029	0,0040	0,0039	0,0065	0,0075	0,0038	0,0064	0,0074	0,0044	0,0068	0,0078
	150	0,0004	0,0011	0,0016	0,0014	0,0027	0,0036	0,0041	0,0054	0,0058	0,0041	0,0054	0,0058	0,0043	0,0055	0,0059
	200	0,0003	0,0009	0,0014	0,0014	0,0027	0,0032	0,0039	0,0046	0,0048	0,0039	0,0046	0,0048	0,0041	0,0047	0,0048
	250	0,0003	0,0009	0,0013	0,0016	0,0026	0,0031	0,0036	0,0039	0,0039	0,0036	0,0039	0,0039	0,0037	0,0039	0,0040
	300	0,0003	0,0007	0,0012	0,0016	0,0023	0,0027	0,0031	0,0033	0,0033	0,0031	0,0033	0,0033	0,0032	0,0033	0,0033
	350	0,0003	0,0008	0,0012	0,0016	0,0023	0,0025	0,0028	0,0028	0,0028	0,0028	0,0028	0,0028	0,0028	0,0028	0,0028
	400	0,0004	0,0008	0,0011	0,0017	0,0022	0,0023	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025
	450	0,0004	0,0008	0,0010	0,0016	0,0020	0,0021	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022
	500	0,0004	0,0008	0,0010	0,0016	0,0019	0,0019	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020
B	50	0,0003	0,0013	0,0023	0,0007	0,0025	0,0041	0,0019	0,0050	0,0072	0,0019	0,0050	0,0072	0,0024	0,0056	0,0080
	100	0,0003	0,0011	0,0019	0,0009	0,0024	0,0037	0,0029	0,0056	0,0069	0,0029	0,0056	0,0069	0,0036	0,0061	0,0071
	150	0,0003	0,0010	0,0015	0,0011	0,0024	0,0032	0,0034	0,0049	0,0055	0,0034	0,0049	0,0054	0,0037	0,0050	0,0056
	200	0,0003	0,0008	0,0013	0,0012	0,0023	0,0029	0,0034	0,0043	0,0046	0,0034	0,0043	0,0046	0,0035	0,0044	0,0047
	250	0,0003	0,0008	0,0012	0,0013	0,0023	0,0028	0,0033	0,0037	0,0038	0,0033	0,0037	0,0038	0,0034	0,0038	0,0039
	300	0,0002	0,0007	0,0011	0,0013	0,0021	0,0025	0,0030	0,0032	0,0033	0,0030	0,0032	0,0033	0,0030	0,0032	0,0033
	350	0,0003	0,0007	0,0011	0,0013	0,0021	0,0023	0,0027	0,0028	0,0028	0,0027	0,0028	0,0028	0,0027	0,0028	0,0028
	400	0,0003	0,0007	0,0011	0,0014	0,0020	0,0022	0,0024	0,0025	0,0025	0,0024	0,0025	0,0025	0,0024	0,0025	0,0025
	450	0,0003	0,0007	0,0009	0,0014	0,0018	0,0020	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022
	500	0,0003	0,0007	0,0010	0,0014	0,0017	0,0019	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020
C	50	0,0004	0,0013	0,0024	0,0007	0,0024	0,0039	0,0014	0,0044	0,0064	0,0014	0,0043	0,0064	0,0020	0,0047	0,0070
	100	0,0003	0,0010	0,0018	0,0008	0,0021	0,0034	0,0023	0,0047	0,0060	0,0023	0,0047	0,0060	0,0028	0,0052	0,0064
	150	0,0004	0,0009	0,0015	0,0009	0,0021	0,0030	0,0026	0,0043	0,0049	0,0026	0,0043	0,0049	0,0030	0,0043	0,0050
	200	0,0002	0,0008	0,0013	0,0010	0,0020	0,0027	0,0028	0,0039	0,0043	0,0028	0,0039	0,0043	0,0031	0,0040	0,0044
	250	0,0003	0,0008	0,0012	0,0011	0,0020	0,0026	0,0028	0,0035	0,0037	0,0028	0,0035	0,0037	0,0030	0,0036	0,0037
	300	0,0002	0,0007	0,0011	0,0011	0,0019	0,0023	0,0027	0,0031	0,0032	0,0027	0,0031	0,0032	0,0028	0,0031	0,0032
	350	0,0003	0,0007	0,0011	0,0011	0,0019	0,0022	0,0026	0,0028	0,0028	0,0026	0,0028	0,0028	0,0026	0,0028	0,0028
	400	0,0003	0,0007	0,0011	0,0012	0,0019	0,0021	0,0023	0,0025	0,0025	0,0023	0,0025	0,0025	0,0024	0,0025	0,0025
	450	0,0003	0,0006	0,0009	0,0012	0,0017	0,0019	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022
	500	0,0003	0,0007	0,0010	0,0013	0,0016	0,0018	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020

1/ α corresponde al nivel de significancia estadística.

2/Estimadas a partir de 1000 iteraciones.

Fuente: Elaboración propia.



Gráfica C.2.

Variabilidad de las tasas de error tipo I de las pruebas de análisis de varianza de dos vías con interacción en cada ensayo, según nivel de significancia.

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro C.2.

Variabilidad de las tasas de error tipo I de las pruebas de análisis de varianza de dos vías con interacción en cada ensayo, según nivel de significancia.

Ensayos	ANOVA		MANOVA			FUNCIONAL										
						L2N			FN			GPF				
	N	α		α		α		α		α		α				
0,01		0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1	
A	50	0,00018	0,00088	0,00208	0,00012	0,00082	0,00190	0,00010	0,00076	0,00158	0,00008	0,00076	0,00158	0,00016	0,00086	0,00180
	100	0,00006	0,00038	0,00085	0,00008	0,00047	0,00085	0,00012	0,00043	0,00088	0,00011	0,00043	0,00088	0,00014	0,00040	0,00083
	150	0,00005	0,00037	0,00070	0,00007	0,00032	0,00064	0,00009	0,00030	0,00067	0,00009	0,00030	0,00067	0,00009	0,00039	0,00069
	200	0,00006	0,00024	0,00049	0,00005	0,00028	0,00058	0,00006	0,00025	0,00048	0,00006	0,00025	0,00048	0,00007	0,00025	0,00055
	250	0,00003	0,00021	0,00039	0,00002	0,00024	0,00046	0,00002	0,00021	0,00046	0,00002	0,00021	0,00046	0,00003	0,00020	0,00040
	300	0,00002	0,00015	0,00033	0,00003	0,00017	0,00034	0,00004	0,00018	0,00034	0,00004	0,00018	0,00034	0,00004	0,00017	0,00034
	350	0,00003	0,00014	0,00028	0,00003	0,00016	0,00027	0,00003	0,00016	0,00031	0,00003	0,00016	0,00031	0,00004	0,00016	0,00027
	400	0,00002	0,00011	0,00024	0,00003	0,00012	0,00027	0,00002	0,00013	0,00029	0,00002	0,00013	0,00029	0,00003	0,00013	0,00026
	450	0,00001	0,00010	0,00023	0,00002	0,00006	0,00016	0,00002	0,00011	0,00020	0,00002	0,00011	0,00020	0,00001	0,00009	0,00020
	500	0,00003	0,00009	0,00019	0,00002	0,00012	0,00020	0,00002	0,00010	0,00021	0,00002	0,00010	0,00021	0,00003	0,00010	0,00020
B	50	0,00020	0,00096	0,00182	0,00014	0,00092	0,00180	0,00010	0,00084	0,00156	0,00010	0,00082	0,00156	0,00022	0,00086	0,00178
	100	0,00007	0,00045	0,00085	0,00010	0,00046	0,00091	0,00012	0,00041	0,00092	0,00012	0,00041	0,00090	0,00013	0,00050	0,00088
	150	0,00007	0,00037	0,00071	0,00008	0,00032	0,00065	0,00007	0,00033	0,00069	0,00007	0,00033	0,00068	0,00009	0,00037	0,00067
	200	0,00006	0,00025	0,00048	0,00004	0,00027	0,00052	0,00008	0,00025	0,00050	0,00007	0,00025	0,00050	0,00007	0,00026	0,00055
	250	0,00004	0,00021	0,00037	0,00004	0,00022	0,00047	0,00003	0,00023	0,00040	0,00003	0,00023	0,00040	0,00004	0,00019	0,00039
	300	0,00002	0,00014	0,00029	0,00004	0,00015	0,00032	0,00004	0,00017	0,00032	0,00004	0,00017	0,00032	0,00004	0,00018	0,00032
	350	0,00003	0,00013	0,00028	0,00002	0,00014	0,00027	0,00003	0,00015	0,00031	0,00003	0,00015	0,00031	0,00003	0,00015	0,00028
	400	0,00002	0,00011	0,00024	0,00003	0,00013	0,00025	0,00002	0,00014	0,00028	0,00002	0,00014	0,00028	0,00002	0,00013	0,00025
	450	0,00001	0,00009	0,00022	0,00002	0,00007	0,00019	0,00002	0,00012	0,00020	0,00002	0,00012	0,00020	0,00001	0,00010	0,00021
	500	0,00003	0,00009	0,00020	0,00002	0,00011	0,00021	0,00002	0,00010	0,00021	0,00002	0,00010	0,00021	0,00003	0,00010	0,00020
C	50	0,00020	0,00088	0,00174	0,00016	0,00090	0,00178	0,00010	0,00084	0,00176	0,00010	0,00082	0,00174	0,00022	0,00090	0,00170
	100	0,00006	0,00046	0,00084	0,00009	0,00047	0,00093	0,00009	0,00039	0,00100	0,00009	0,00039	0,00098	0,00011	0,00049	0,00084
	150	0,00009	0,00037	0,00067	0,00006	0,00033	0,00065	0,00007	0,00037	0,00069	0,00007	0,00036	0,00069	0,00010	0,00037	0,00074
	200	0,00005	0,00023	0,00054	0,00005	0,00027	0,00051	0,00006	0,00023	0,00050	0,00006	0,00023	0,00050	0,00006	0,00030	0,00055
	250	0,00004	0,00021	0,00040	0,00005	0,00023	0,00047	0,00003	0,00022	0,00043	0,00003	0,00022	0,00043	0,00003	0,00018	0,00040
	300	0,00002	0,00012	0,00029	0,00004	0,00013	0,00033	0,00005	0,00015	0,00032	0,00005	0,00015	0,00032	0,00004	0,00017	0,00032
	350	0,00003	0,00013	0,00028	0,00002	0,00012	0,00026	0,00002	0,00014	0,00033	0,00002	0,00013	0,00033	0,00003	0,00015	0,00027
	400	0,00002	0,00012	0,00025	0,00003	0,00014	0,00026	0,00003	0,00014	0,00029	0,00003	0,00014	0,00029	0,00002	0,00012	0,00024
	450	0,00001	0,00012	0,00022	0,00001	0,00007	0,00019	0,00001	0,00012	0,00022	0,00001	0,00012	0,00022	0,00002	0,00010	0,00019
	500	0,00003	0,00011	0,00020	0,00003	0,00010	0,00020	0,00003	0,00009	0,00022	0,00003	0,00009	0,00022	0,00002	0,00010	0,00019

1/ α corresponde al nivel de significancia estadística.

2/Estimadas a partir de 1000 iteraciones.

Fuente: Elaboración propia.