

Procesos aleatorios

Introducción

Fabián Abarca Calderón

IE0405 – Modelos Probabilísticos de Señales y Sistemas

13

Tema IV



UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA

EIE

Escuela de
Ingeniería Eléctrica

Los procesos aleatorios (o *estocásticos*) son los terceros “objetos aleatorios” que analizaremos.

Incorporan una segunda variable independiente, *el tiempo*, que los hace útiles en la descripción de fenómenos cambiantes o dinámicos tales como...

las **señales** y los **sistemas**.

DRAE Perteneciente o relativo al azar.

Vox Que está sometido al azar y que es objeto de análisis estadístico.

Oxford Determinado aleatoriamente; que tiene una distribución de probabilidad aleatoria o patrón que puede ser analizado estadísticamente pero no predicho con precisión.

Es sinónimo de “aleatorio” y puede ser usado de forma intercambiable, excepto porque suena más *elegante* (en español, porque en inglés sigue siendo *random processes*).

De aquí se definen dos casos:

- **Proceso estocástico**

- **Secuencia estocástica**

...en donde...

Vox Conjunto de fases sucesivas de un fenómeno o hecho complejo.

En este contexto, **procesos** será utilizado para procesos **continuos** en el tiempo.



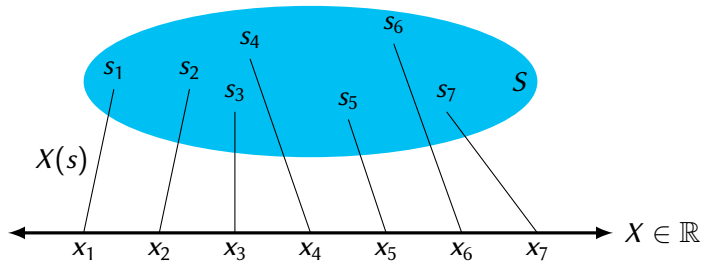
Vox ¹Serie de elementos que se suceden unos a otros y guardan relación entre sí. ²Orden o disposición de una serie de elementos que se suceden unos a otros.

En este contexto, **secuencias** será utilizado para procesos **discretos** en el tiempo.

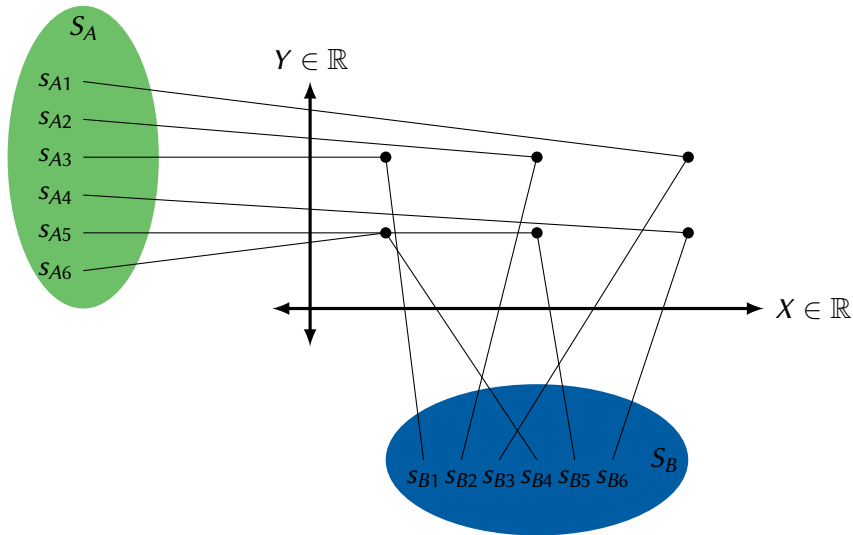


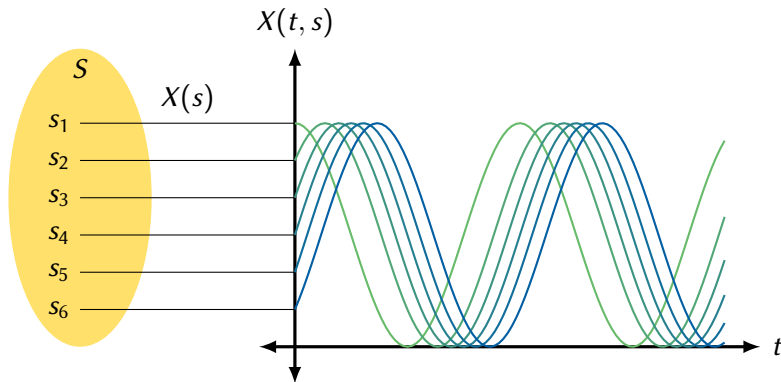
A partir de un espacio de eventos aleatorios S con resultados elementales s (a veces denominados ζ), se obtendrán los siguientes “objetos aleatorios”:

$X(s)$	$\mathbf{X}(s)$	$X(t, s)$
variable aleatoria	vector aleatorio	proceso aleatorio
X	$[X_1, \dots, X_N]$	$X(t)$
$X(s) \longrightarrow \mathbb{R}$	$\mathbf{X}(s) \longrightarrow \mathbb{R}^N$	$X(t) \longrightarrow \mathbb{R}, t$



Mapecto de las variables aleatorias múltiples





Concepto de un proceso estocástico

Proceso aleatorio

Una variable aleatoria X es una función de los posibles resultados s de un experimento, pero ahora es una función tanto de s como del tiempo. Se asigna una función

$$x(t, s) \quad (1)$$

a cada resultado s . La familia de todas estas funciones, denotada $X(t, s)$, es denominada un proceso aleatorio o proceso estocástico.

Todo resultado elemental s genera una función del tiempo.

Visualización de un proceso estocástico

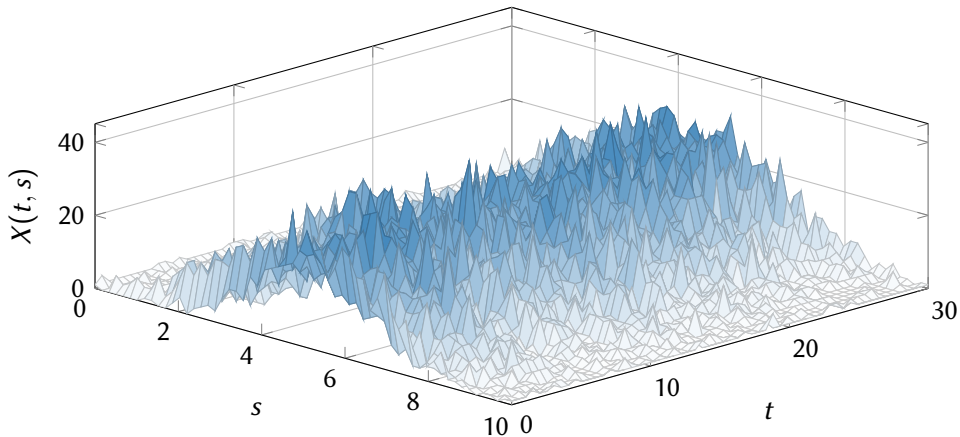


Figura: Muestras de un proceso aleatorio continuo.

Se usará a menudo la notación abreviada $x(t)$, para representar una onda específica de un proceso aleatorio denotado por $X(t)$.

- Un proceso aleatorio $X(t, s)$ representa una familia o agregado de funciones del tiempo cuando t y s son variables.
- Cada una de las funciones del tiempo, miembro del proceso estocástico, se llama una **función muestra** o **miembro del agregado** y, a veces, una **realización del proceso**.

Ejemplo de la caminata aleatoria (*random walk*) I

Una caminata aleatoria es una sucesión de decisiones donde las opciones en cada decisión tienen una distribución de probabilidad particular. En un ejemplo sencillo, en cada paso se elige aleatoriamente entre 1 y -1 con igual probabilidad. A continuación se grafican diez funciones muestra distintas. Cada una de estas realizaciones es una entre infinitas posibilidades.

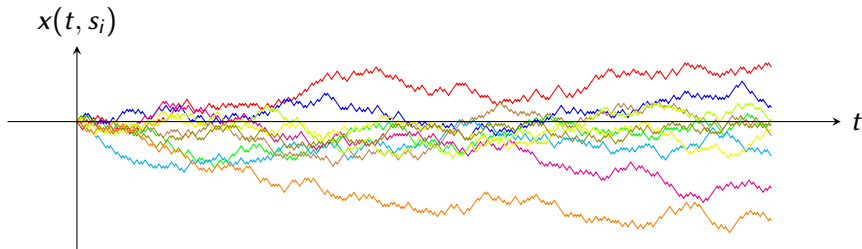


Figura: Ejemplo del proceso aleatorio llamada “caminata aleatoria” (*random walk*).

Función del tiempo Un proceso aleatorio representa una simple función del tiempo cuando t es una variable y s está fijo en un valor específico.

Variable aleatoria Un proceso aleatorio representa una variable aleatoria cuando t es fijo y s es una variable.

Número Un proceso aleatorio representa un simple número cuando t y s son ambos fijos.

- La variable aleatoria $X(t_1, s) = X(t_1)$ se obtiene del proceso cuando el tiempo se *congela* al valor t_1 . A menudo se usa la notación X_1 para denotar la variable aleatoria asociada con el proceso $X(t)$ en el tiempo t_1 .
- X_1 corresponde a una tajada transversal por el agregado en el tiempo t_1 . Las propiedades estadísticas de $X_1 = X(t_1)$ describen las propiedades estadísticas del proceso aleatorio en el tiempo t_1 .
- Se visualiza cualquier número de variables aleatorias X_i derivadas de un proceso aleatorio $X(t)$ en tiempos $t_i, i = 1, 2, \dots$, como

$$X_i = X(t_i, s) = X(t_i)$$

- El valor esperado de X_i es denominado el promedio del agregado así como el valor medio o esperado del proceso aleatorio en el tiempo t_i .
- Dado que t_i puede tener cualquier valor, el valor medio de un proceso puede no ser constante: es una función del tiempo:

$$E[X(t)]$$

Clasificación de procesos

Proceso aleatorio continuo El caso si X es un proceso continuo y t toma un continuo de valores.

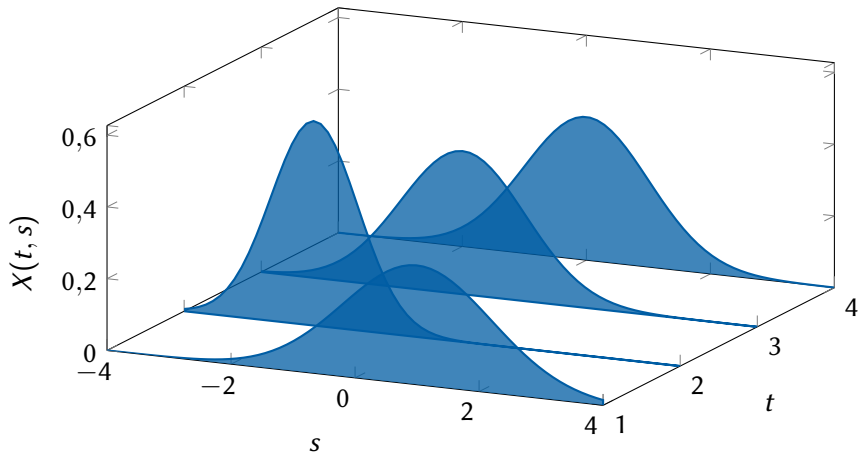
Proceso aleatorio discreto Corresponde a la variable aleatoria X que toma solamente valores discretos mientras que t es continuo.

Secuencia aleatoria continua Un proceso aleatorio para el que X es continuo pero el tiempo tiene solamente valores discretos (al muestrear periódicamente los miembros del agregado de un proceso aleatorio continuo).

Secuencia aleatoria discreta Corresponde al caso de variables aleatorias discretas y tiempo discreto.

	Valores continuos	Valores discretos
Tiempo continuo	Proceso aleatorio continuo	Proceso aleatorio discreto
Tiempo discreto	Secuencia aleatoria continua	Secuencia aleatoria discreta

Ejemplo de una secuencia aleatoria continua I



Procesos determinísticos y no determinísticos

Un proceso aleatorio puede describirse por **la forma de sus funciones muestra**.

- Si valores futuros de cualquier función muestra no pueden ser predichos exactamente de valores observados pasados, el proceso se denomina **no determinístico**.
- Un proceso se llama **determinístico** si los valores futuros de cualquier función muestra pueden ser predichos de valores pasados.

Ejemplo de proceso aleatorio determinístico con función exponencial I

Sea un proceso aleatorio definido por

$$X(t) = Ae^{-t}u(t)$$

donde A es una variable aleatoria discreta que puede tomar los valores $\{1, 2, 3\}$ con igual probabilidad.

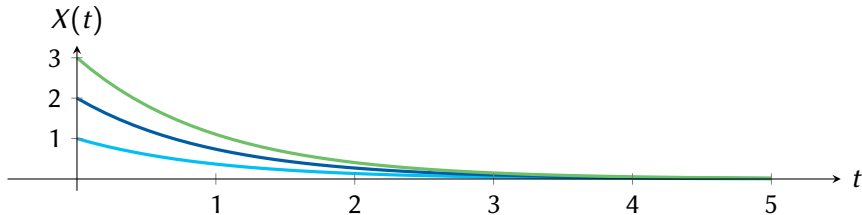


Figura: Familia de funciones del proceso aleatorio $X(t)$

Ejemplo de variaciones en la amplitud para una onda sinusoidal I

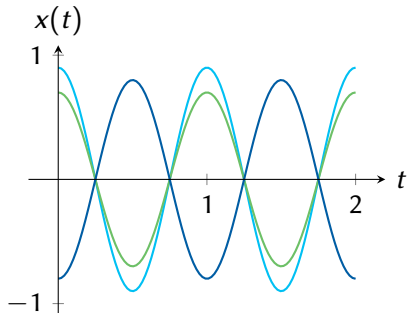
Una señal tiene la forma deseada $v(t) = v_0 + a \cos(\omega_0 t + \theta_0)$, pero su recepción puede estar seriamente afectada por un canal de transmisión que agrega ruido, inflexiones de onda, reverberaciones, etc. Se puede por ahora asumir que existen únicamente variaciones aleatorias en la amplitud, modeladas como un proceso aleatorio

$$X(t) = v_0 + A \cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

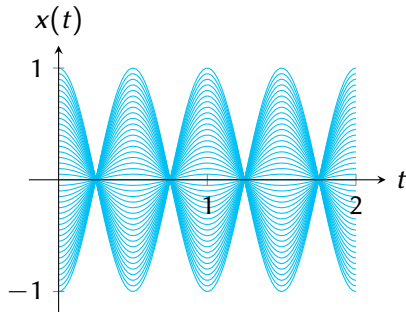
y que $A \sim \text{unif}(-1, 1)$.

Ejemplo de variaciones en la amplitud para una onda sinusoidal II

Para $A \sim \text{unif}(-1, 1)$, $v_0 = 0$, $\omega_0 = 2\pi$ y $\theta_0 = 0$ se tiene:



(a) $A = \{0,9, 0,7, -0,8\}$



(b) $A \sim \text{unif}(-1, 1)$

Figura: Ejemplo de variaciones aleatorias de amplitud en una función sinusoidal

Ejemplo de variaciones en la amplitud para una onda sinusoidal III

En general, para una función de la forma

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta) \quad (2)$$

A , Θ u ω_0 (o todos) pueden ser variables aleatorias. Cualquier función muestra corresponde a la ecuación (2) con valores particulares de estas variables aleatorias. Por consiguiente, el conocimiento de la función muestra con anterioridad a cualquier instante del tiempo, permite automáticamente la predicción de los valores futuros de la función muestra porque su forma es conocida, **determinística**.

Funciones de distribución de un proceso aleatorio

Para un tiempo particular t_1 , la función de probabilidad acumulativa asociada con la variable aleatoria $X_1 = X(t_1)$, será denotada $F_X(x_1; t_1)$ y es conocida más precisamente como la función acumulativa de primer orden del proceso $X(t)$. Se le define como

$$F_X(x_1; t_1) = P\{X(t_1) \leq x_1\} \quad (3)$$

para cualquier número real x_1 .

Función de probabilidad acumulativa de segundo orden

Para dos variables aleatorias $X_1 = X(t_1)$ y $X_2 = X(t_2)$, la función acumulativa conjunta de segundo orden es la extensión bidimensional de la fórmula anterior:

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\} \quad (4)$$

De manera similar, para N variables aleatorias $X_i = X(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, la función acumulativa conjunta de orden N es

$$F_X(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots, t_N) = P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_N) \leq x_N\} \quad (5)$$

Las funciones de densidad conjunta de interés se encuentran de las derivadas apropiadas de las tres fórmulas anteriores:

$$f_X(x_1; t_1) = \frac{d}{dx_1} F_X(x_1; t_1) \quad (6)$$

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (7)$$

$$f_X(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots, t_N) = \frac{\partial^N F_X(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots, t_N)}{\partial x_1 \cdots \partial x_N} \quad (8)$$

Ejemplo de función de densidad de un proceso con función exponencial I

¿Cuál es la función de densidad para este proceso aleatorio definido con anterioridad?

$$X(t) = Ae^{-t}u(t)$$

donde A es una variable aleatoria discreta que puede tomar los valores $\{1, 2, 3\}$ con igual probabilidad.

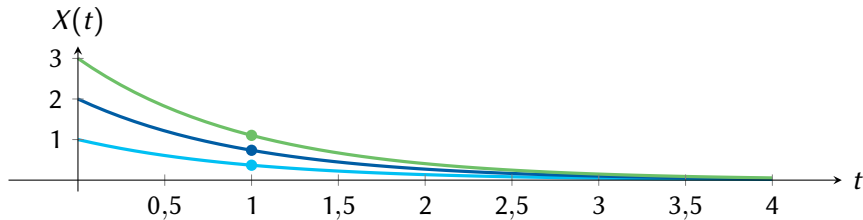


Figura: Familia de funciones del proceso aleatorio $X(t)$

Ejemplo de función de densidad de un proceso con función exponencial II

La función de densidad probabilística $f_X(x, t)$ puede deducirse analizando que:

- En $t = 1$ el proceso aleatorio $X(1)$ puede tomar los valores e^{-1} , $2e^{-1}$ o $3e^{-1}$, cada uno con probabilidad $\frac{1}{3}$, por tanto

$$f_X(x, 1) = \frac{1}{3}\delta(x - e^{-1}) + \frac{1}{3}\delta(x - 2e^{-1}) + \frac{1}{3}\delta(x - 3e^{-1})$$

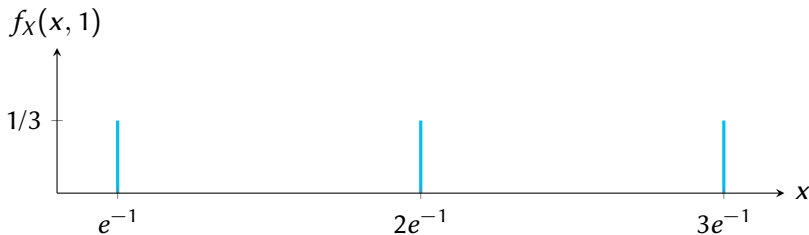


Figura: Función de densidad de probabilidad para el tiempo $t = 1$.

Ejemplo de función de densidad de un proceso con función exponencial III

- Esto se puede generalizar para cualquier t como

$$f_X(x, t) = \frac{1}{3}\delta(x - e^{-t}) + \frac{1}{3}\delta(x - 2e^{-t}) + \frac{1}{3}\delta(x - 3e^{-t})$$

La función de densidad, por tanto, es una *secuencia* de funciones definidas para cada instante de tiempo (ya sea discreto o continuo).

Ejemplo de función de densidad de un proceso con función exponencial IV

- De la misma forma, puede definirse la función de densidad **conjunta** para dos VA $X(t_1)$ y $X(t_2)$, que vienen del mismo proceso aleatorio pero en dos instantes de tiempo t_1 y t_2 ,

$$\begin{aligned} f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = & \frac{1}{3} \delta(x_1 - e^{-t_1}, x_2 - e^{-t_2}) \\ & + \frac{1}{3} \delta(x_1 - 2e^{-t_1}, x_2 - 2e^{-t_2}) \\ & + \frac{1}{3} \delta(x_1 - 3e^{-t_1}, x_2 - 3e^{-t_2}) \end{aligned}$$

Independencia estadística

Dos procesos $X(t)$ e $Y(t)$ son estadísticamente independientes si el grupo de variables aleatorias $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)$ es independiente del grupo $Y(t'_1), Y(t'_2), \dots, Y(t'_M)$ para cualquier escogencia de tiempos $t_1, t_2, \dots, t_N, t'_1, t'_2, \dots, t'_M$. La independencia requiere que la densidad conjunta sea factorizable por grupos:

$$f_{X,Y}(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M; t_1, \dots, t_N, t'_1, \dots, t'_M) = f_X(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots, t_N) f_Y(y_1, \dots, y_M; t'_1, \dots, t'_M) \quad (9)$$

Estacionaridad

- Un **proceso** aleatorio se convierte en una **variable** aleatoria cuando *el tiempo se fija* en un valor particular.
- La **variable** aleatoria poseerá propiedades **estadísticas**, tales como valor medio, momentos, varianza, etcétera, relacionados con su función de densidad.
- Si **dos variables** aleatorias se obtienen del proceso para dos instantes del tiempo, tendrán propiedades estadísticas (medias, varianzas, momentos conjuntos, etcétera) relacionados con su función de densidad conjunta.

Un proceso aleatorio se dice que es **estacionario** si todas sus propiedades estadísticas **no cambian con el tiempo**.

Otros procesos son denominados **no estacionarios**.

Estacionaridad de primer orden

Un proceso aleatorio es llamado estacionario de orden uno si su función de densidad de primer orden no cambia con un desplazamiento en el origen del tiempo. Es decir,

$$f_X(x_1; t_1) = f_X(x_1; t_1 + \Delta) \quad (10)$$

debe ser cierto para cualquier t_1 y cualquier número real Δ .

Como consecuencia de la ecuación (10), $f_X(x_1; t_1)$ es independiente de t_1 y el valor medio del proceso $E[X(t)]$ es una constante:

$$E[X(t)] = \bar{X} = \text{constante} \quad (11)$$

Para probar lo anterior se encuentran los valores medios de las variables aleatorias $X_1 = X(t_1)$ y $X_2 = X(t_2)$. Para X_1 :

$$E[X_1] = E[X(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1; t_1) dx_1 \quad (12)$$

Para X_2 :

$$E[X_2] = E[X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1; t_2) dx_1 \quad (13)$$

La variable x_2 de integración ha sido reemplazada por la variable alternativa x_1 por conveniencia.

Si se pone ahora $t_2 = t_1 + \Delta$ en la ecuación 13,

$$\begin{aligned} E[X_2] = E[X(t_2)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1; t_1 + \Delta) dx_1 = E[X(t_1 + \Delta)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1; t_1) dx_1 = E[X(t_1)] \\ &= E[X_1] \end{aligned}$$

Se concluye finalmente

$$E[X(t_1 + \Delta)] = E[X(t_1)]$$

que debe ser constante porque t_1 y Δ son arbitrarios.

Estacionaridad de segundo orden

Un proceso se llama estacionario de orden dos si su función de densidad de segundo orden cumple que

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; t_1 + \Delta, t_2 + \Delta) \quad (14)$$

para todo t_1, t_2 y Δ .

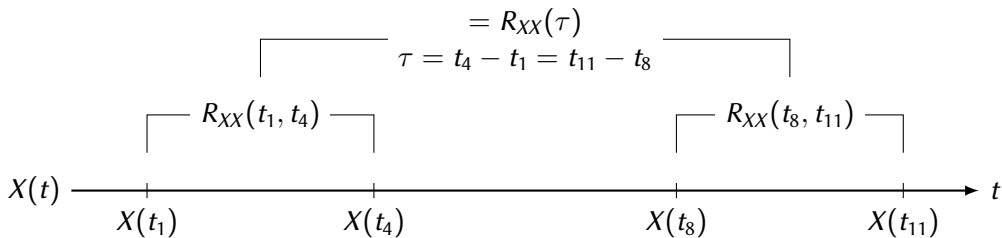
Pero aquí interviene una nueva relación de interés:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X_1 X_2] = E[X(t_1)X(t_2)] \quad (15)$$

recibe el nombre de **autocorrelación de un proceso aleatorio** $X(t)$ y será en general una función de t_1 y t_2 .

Una consecuencia de la ecuación (14) es que la autocorrelación de un proceso estacionario de segundo orden es una función solamente de las diferencias temporales y no del tiempo absoluto; es decir, si $\tau = t_2 - t_1$, entonces

$$R_{XX}(t_1, t_1 + \tau) = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] = R_{XX}(\tau) \quad (16)$$



Ejemplo de la distribución de estatura de una población I

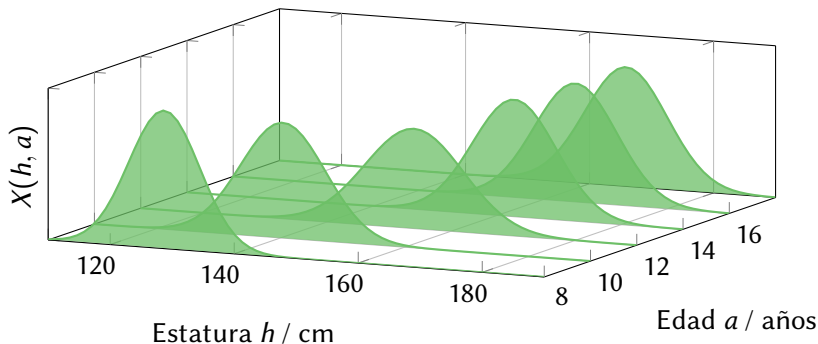


Figura: Ejemplo de una secuencia aleatoria no estacionaria.

Fuente: Trussell, J. Bloom, D. **A Model Distribution of Height or Weight at a Given Age.** *Human Biology*, Vol. 51, No. 4 (Diciembre 1979), pp. 523-536

Estacionaridad en sentido amplio

Muchos problemas prácticos requieren que se trate con la función de autocorrelación y el valor medio de un proceso aleatorio. Las soluciones se simplifican mucho si tales cantidades no dependieran del tiempo absoluto. La estacionaridad de segundo orden es suficiente para garantizar estas características. Empero, es a menudo más restrictivo que necesario y es deseable una forma más *relajada* de estacionaridad. La forma más útil es el **proceso estacionario en sentido amplio**, definido como aquel en donde

$$E[X(t)] = \bar{X} \quad (\text{constante}) \quad (17)$$

$$E[X(t)X(t + \tau)] = R_{XX}(\tau) \quad (18)$$

En inglés se conoce como **WSS**, de *wide sense stationarity*

Estacionaridad conjunta

Dos procesos aleatorios $X(t)$, $Y(t)$ son conjuntamente estacionarios en sentido amplio si cada uno es estacionario en sentido amplio y su función de correlación cruzada (*crosscorrelation*)

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] \quad (19)$$

es una función solamente de la diferencia temporal $\tau = t_2 - t_1$ y no del tiempo absoluto, es decir,

$$\begin{aligned} R_{XY}(t, t + \tau) &= E[X(t)Y(t + \tau)] \\ &= R_{XY}(\tau) \end{aligned} \quad (20)$$

Se demostrará que el proceso aleatorio

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta)$$

es estacionario en sentido amplio si se supone que A y ω_0 son constantes y Θ es una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $[0, 2\pi]$. El valor medio es

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \int_0^{2\pi} A \cos(\omega_0 t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

La función de autocorrelación con $t_1 = t$ y $t_2 = t + \tau$ se convierte¹ en

$$\begin{aligned} R_{XX}(t, t + \tau) &= E [A \cos(\omega_0 t + \Theta) A \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \Theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} E [\cos(\omega_0 \tau) + \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\Theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) \end{aligned}$$

La función de autocorrelación depende solamente de τ y el valor medio es una constante, por lo que $X(t)$ es estacionario en sentido amplio.

¹Se utiliza la identidad $\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$.