

Valor esperado y momentos de una variable aleatoria

Fabián Abarca Calderón

IE0405 – Modelos Probabilísticos de Señales y Sistemas

6

Tema I



UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA

EIE

Escuela de
Ingeniería Eléctrica

El valor esperado y los “momentos” (su generalización) permiten caracterizar numéricamente el comportamiento o las tendencias de una variable aleatoria.

Valor esperado de una variable aleatoria, $E[X]$

El valor esperado de una variable aleatoria es uno de los resultados más importantes y más frecuentemente utilizados. Ya lo conocíamos en su forma discreta como “promedio”.

Ejemplo de la *escala de Apgar I*

Interpretación del valor esperado de una variable aleatoria

Los bebés son evaluados en la *escala de Apgar*, creado por Virginia Apgar, quien le puso el retrónimo ingenioso **A**ppearance, **P**ulse, **G**rimace, **A**ctivity, **R**espiration. Sea X el puntaje de Apgar de un niño seleccionado aleatoriamente en cierto hospital durante el año siguiente, y suponga que la función de densidad discreta (PMF) $P(X)$ es

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(x)$	0,002	0,001	0,002	0,005	0,02	0,04	0,18	0,37	0,25	0,12	0,01

Si elegimos un niño(a) al azar, ¿cuál valor de X esperaríamos?

Ejemplo de la *escala de Apgar II*

Interpretación del valor esperado de una variable aleatoria

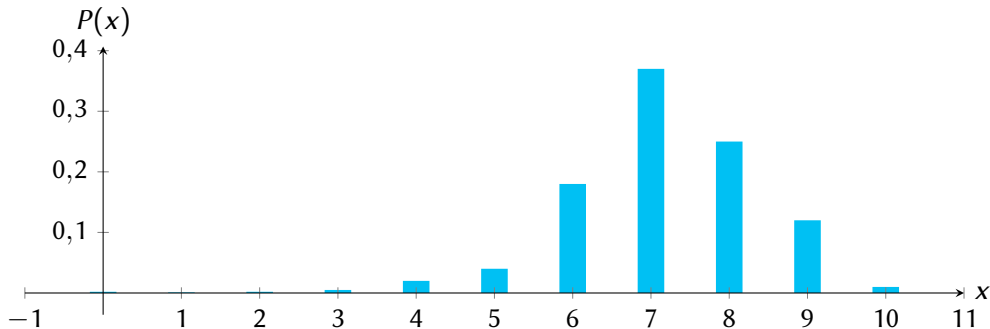
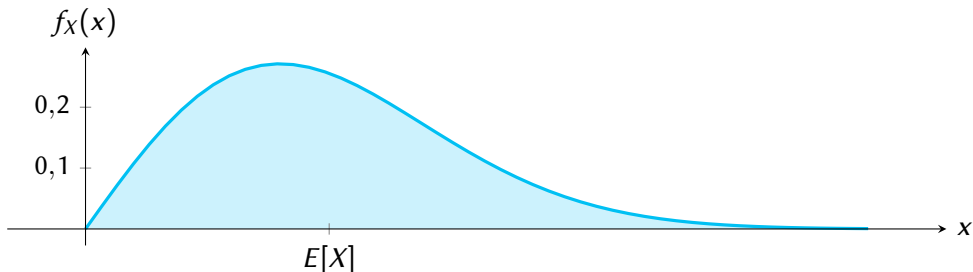


Figura: Ejemplo de evaluación del estado de salud de recién nacidos en un hospital dado, en una escala del 0 al 10 (Apgar), donde 7 parece ser un valor esperable.

Valor esperado de una variable aleatoria

El *valor esperado* es un operador denotado $E[\cdot]$ y se le conoce también como la esperanza matemática, el valor medio, la media o el promedio estadístico de X .



Un promedio es “el número que es simultáneamente el más cercano a todos los números del conjunto, en el sentido de que la suma de las distancias desde él a todos los puntos en el conjunto es la más pequeña”. Similar a un *centro de gravedad*.

Valor esperado de una VA continua

El valor esperado de cualquier VA X es

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \triangleq \bar{X} \quad (1)$$

El valor esperado se obtiene utilizando la función de densidad (PDF), $f_X(x)$, de forma que le da un “peso” a cada valor infinitesimal de x .

Ejemplo del promedio de una distribución exponencial I

Sea X una VA con distribución exponencial cuya función de densidad está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

¿Cuál es su valor esperado o promedio?

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \stackrel{\text{por partes}}{=} -x e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Valor esperado de una variable aleatoria **discreta**

Si X es una VA discreta con N posibles valores x_i con probabilidades $P(x_i)$, entonces

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \sum_{i=1}^N P(x_i) \delta(x - x_i) dx \\ &= \sum_{i=1}^N P(x_i) \int_{-\infty}^{\infty} x \delta(x - x_i) dx = \sum_{i=1}^N x_i P(x_i) \end{aligned} \quad (2)$$

Valor esperado de una VA discreta

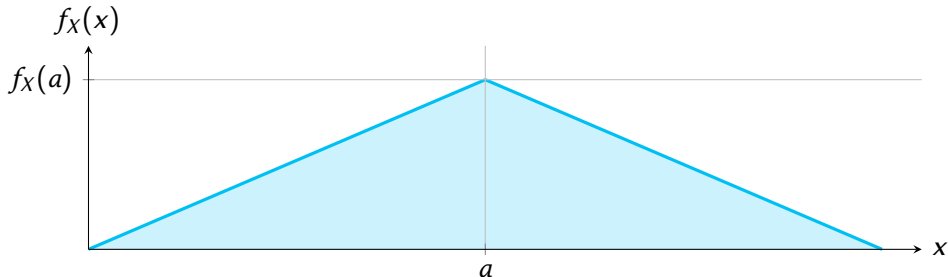
El promedio o “suma ponderada” (*weighted sum*) es

$$E[X] = \sum_{i=1}^N x_i P(x_i) \triangleq \bar{X} \quad (3)$$

Valor esperado de una variable aleatoria simétrica

Si la función de densidad de una variable aleatoria tiene **simetría par** alrededor de una recta $x = a$, entonces $E[X] = a$, es decir

$$E[X] = a \quad \text{si} \quad f_X(x+a) = f_X(-x+a)$$



Valor esperado de una función, $E[g(X)]$

Valor esperado de una función de una VA $g(X)$

Para una función real $g(x)$ de una VA X , $g(X)$, su valor esperado está dado por

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x) dx \quad (4)$$

Si, en cambio, X es una variable aleatoria discreta,

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^N g(x_i)P(x_i) \quad (5)$$

donde N puede ser infinito para algunas variables aleatorias.

En general, $E[g(X)] \neq g(E[X])$.

Ejemplo de la potencia disipada en un resistor I

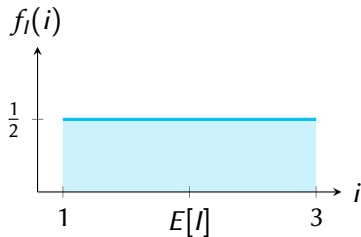
Sea I una VA que denota la corriente en un resistor R de valor 1Ω . I tiene una distribución uniforme en el intervalo de 1 a 3 A, es decir:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases} \quad f_I(i) = \begin{cases} 1/2 & 1 < i < 3 \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

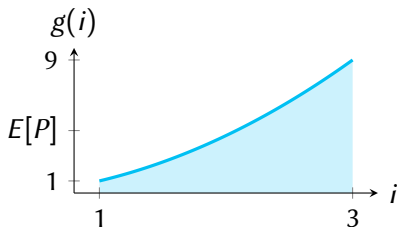
¿Cuál es el promedio de la corriente I ? ¿Cuál es el promedio de la potencia disipada en R , $P = g(I) = I^2 R$?

Ejemplo de la potencia disipada en un resistor II

$$\begin{aligned} E[I] &= \int_{-\infty}^{\infty} i f_I(i) \, di \\ &= \int_1^3 i \frac{1}{2} \, di \\ &= 2 \, \text{A} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} E[P] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(i) f_I(i) \, di \\ &= \int_1^3 i^2(1) \frac{1}{2} \, di \\ &= 13/3 \approx 4.33 \, \text{W} \end{aligned}$$

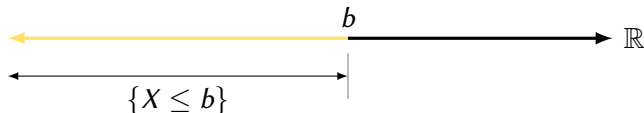


Valor esperado condicional, $E[X \mid B]$

El valor esperado condicional de X , denotado por $E[X | B]$, es un nuevo promedio que ahora depende de la *función de densidad condicional*

$$E[X | B] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x | B) dx \quad (6)$$

Caso especial $B = \{X \leq b\}$



Si $B = \{X \leq b\}$ con $-\infty < b < \infty$, se sabe que

$$f_X(x | \{X \leq b\}) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{\int_{-\infty}^b f_X(x) dx} \left(\equiv \frac{P(X \cap B)}{P(B)} \right) & x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases} \quad (7)$$

Sustituyendo se tiene entonces,

$$\begin{aligned}
 E[X \mid \{X \leq b\}] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x \mid B) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\frac{f_X(x)}{\int_{-\infty}^b f_X(x) dx} \right] dx \\
 &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx}{\int_{-\infty}^b f_X(x) dx} \\
 E[X \mid B] &= \frac{E[X]}{P(B)}
 \end{aligned}$$

que es el valor medio de X cuando X está restringido al conjunto $\{X \leq b\}$.

Momentos de una variable aleatoria

El valor esperado es un caso especial de una categoría más general, denominada “momentos de una variable aleatoria”. Son valores que resumen o sintetizan propiedades de la variable aleatoria.

Mientras que la función de densidad probabilística (PDF) es una **descripción completa** de la VA, los momentos cuantifican ciertas propiedades tales como el “valor esperado”, la “dispersión”, la “inclinación” o “lo llano” de una VA y son una herramienta estadística valiosa para el análisis de su comportamiento.

Momentos alrededor del origen

La función $g(X) = X^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, da los *momentos alrededor del origen de la variable aleatoria* X , haciendo

$$\begin{aligned} m_n &= E[X^n] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx \end{aligned}$$

Casos especiales

El valor $m_0 = 1$ es el área de la función $f_X(x)$, en tanto que $m_1 = \bar{X} = E[X]$ es el valor esperado de X .

Momentos centrales

Los momentos alrededor del valor medio de X se llaman momentos centrales y se denotan por μ_n . Son el valor esperado de la función $g(X) = (X - \bar{X})^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, es decir,

$$\begin{aligned}\mu_n &= E[(X - \bar{X})^n] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^n f_X(x) dx\end{aligned}\tag{8}$$

Casos especiales

El valor $\mu_0 = 1$ es el área de $f_X(x)$, mientras que $\mu_1 = 0$, ¿por qué?

Momentos ordinarios (alrededor del origen)

$$E[X^n]$$

Momentos centrales (alrededor de la media)

$$E[(X - \bar{X})^n]$$

Momentos generalizados (alrededor de un número cualquiera)

$$E[(X - a)^n]$$

Momentos absolutos (momentos alrededor del origen con los valores absolutos de la variable aleatoria)

$$E[|X|^n]$$

Aparte de la media, algunos momentos particulares tienen nombres especiales y son los más comúnmente utilizados para describir las variables aleatorias. Ellos son:

Varianza y desviación estándar medida de la “dispersión”

Sesgo medida de la “inclinación”

Curtosis medida del “abultamiento”

A μ_2 se le da el nombre *varianza* y tiene la notación σ_X^2 .

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= E \left[(X - \bar{X})^2 \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^2 f_X(x) \, dx \\ &= E \left[X^2 - 2X\bar{X} + \bar{X}^2 \right] \\ &= E[X^2] - 2(E[X])^2 + \bar{X}^2 \\ &= E[X^2] - \bar{X}^2 \\ &= m_2 - m_1^2\end{aligned}$$

La raíz cuadrada positiva de la varianza, σ_X , se denomina la **desviación estándar** de X . Es una medida de la dispersión de la función $f_X(x)$ alrededor de la media.

$\mu_3 = E[(X - \bar{X})^3]$ es una medida de la **asimetría** de $f_X(x)$ alrededor de su valor medio. Se le llama la inclinación (*skewness*) de la función de densidad.

- Si una densidad es simétrica alrededor de $x = \bar{X}$, tiene cero inclinación, de hecho, $\mu_n = 0$ para valores impares de n .
- El tercer momento central normalizado μ_3/σ_X^3 es conocido como el *coeficiente de inclinación* de la función de densidad,

$$S_X = E \left[\left(\frac{X - m_1}{\sigma_X} \right)^3 \right] \quad (9)$$

que es un número adimensional que describe la inclinación o el sesgo del pdf. Si S_X es 0, la pdf es simétrica, y si es negativo o positivo tiende a la izquierda o la derecha, respectivamente.

κ_X es definido como

$$\kappa_X = E \left[\left(\frac{X - m_1}{\sigma_X} \right)^4 \right] - 3 \quad (10)$$

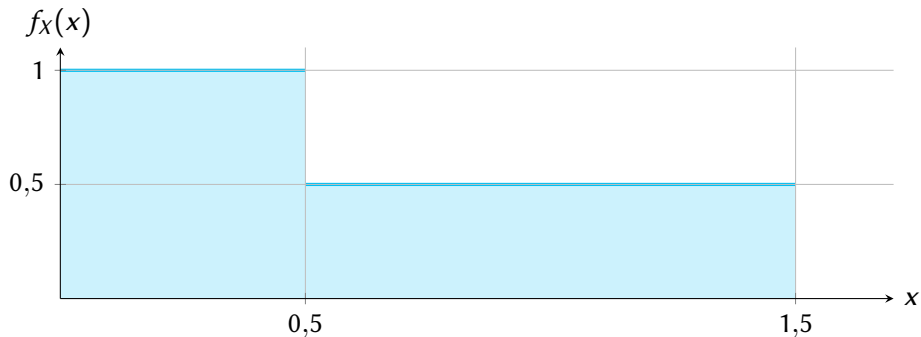
y es un número adimensional descriptor del **abultamiento** de la variable aleatoria...

- ...si está “achataada” ($\kappa_X < 0$) (*platicúrtica*)
- ...o es prominente ($\kappa_X > 0$) (*leptocúrtica*).

La sustracción del 3 es una comparación con la distribución normal (que siempre es $\kappa_X = 3$) la cual se diría no es ni achatada ni prominente.

Ejemplo para un $f_X(x)$ de los primeros cuatro momentos I

Para el siguiente PDF, $f_X(x)$, determine los primeros cuatro momentos de la VA.



¿Primeras impresiones sobre la media, la dispersión, la inclinación y la kurtosis?

Ejemplo para un $f_X(x)$ de los primeros cuatro momentos II

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \leq x < 1,5 \\ 0 & \text{el resto} \end{cases} \quad (11)$$

La media momento ordinario de orden uno,

$$m_1 = E[X] = \int_0^{0,5} x \cdot 1 \, dx + \int_{0,5}^{1,5} x \cdot 0,5 \, dx = 0,625$$

Ejemplo para un $f_X(x)$ de los primeros cuatro momentos III

La **varianza** momento central de orden dos,

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= E[(X - m_1)^2] \\ &= E[X^2] - m_1^2 \\ &= \int_0^{0,5} x^2 \cdot 1 \, dx + \int_{0,5}^{1,5} x^2 \cdot 0,5 \, dx - 0,625^2 \\ &= 0,1927\end{aligned}$$

El significado de este número usualmente se aprecia en relación con otras densidades probabilísticas (¿qué tan disperso es uno en comparación con el otro?), y puede tener algún significado importante para el experimento (la precisión de fabricación, por ejemplo).

Ejemplo para un $f_X(x)$ de los primeros cuatro momentos IV

La inclinación (*skewness*) momento central de orden tres,

$$\begin{aligned} S_X &= \left[\left(\frac{X - m_1}{\sigma_X} \right)^3 \right] \\ &= \int_0^{0,5} \left(\frac{x - 0,625}{0,439} \right)^3 \cdot 1 \, dx \\ &\quad + \int_{0,5}^{1,5} \left(\frac{x - 0,625}{0,439} \right)^3 \cdot 0,5 \, dx \\ &= 0,416 \end{aligned}$$

lo que implica que está sesgado a la derecha.

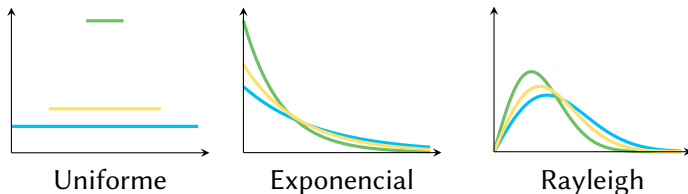
Ejemplo para un $f_X(x)$ de los primeros cuatro momentos V

La *kurtosis* momento central de orden cuatro,

$$\begin{aligned}\kappa_X &= \left[\left(\frac{X - m_1}{\sigma_X} \right)^4 \right] \\ &= \int_0^{0,5} \left(\frac{x - 0,625}{0,439} \right)^4 \cdot 1 \, dx \\ &\quad + \int_{0,5}^{1,5} \left(\frac{x - 0,625}{0,439} \right)^4 \cdot 0,5 \, dx - 3 \\ &= -0,105\end{aligned}$$

lo que implica que tiene una cima achatada.

Ejemplos de momentos para distribuciones usuales I



PDF	$\frac{1}{b-a}$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$
Media	$\frac{1}{2}(b-a)$	λ^{-1}	$\sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
Varianza	$\frac{1}{12}(b-a)^2$	λ^{-2}	$\frac{4-\pi}{2} \sigma^2$
Inclinación	0	2	$\frac{2\sqrt{\pi}(\pi-3)}{(4-\pi)^{3/2}} \approx 0,63$
Kurtosis	$-6/5$	6	$-\frac{6\pi^2-24\pi+16}{(4-\pi)^2} \approx 0,24$

- **The Expected Value and Variance of Discrete Random Variables**
jbstatistics, <https://youtu.be/Vyk8HQOckIE>