REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

Volume 10, número 23 – 2017

ISSN 2359-2842

Construcción Social del Conocimiento Matemático: la serie trigonométrica de Fourier desde la Socioepistemología

Social Construction of Mathematical Knowledge: the trigonometric Fourier series from Socioepistemology

Rosa María Farfán Márquez[1]

Fabián Wilfrido Romero Fonseca[2]

RESUMEN

A través de una aproximación sistémica a la serie trigonométrica de Fourier desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, se realiza un estudio integrado de las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica observadas en su relación con los elementos sociales y culturales en las que se desenvuelven. El análisis de estas dimensiones permitió vislumbrar un esquema de prácticas anidadas como modelo preliminar para la construcción social de este conocimiento basado en prácticas sociales. Se observa que la serie surge al modelar e interpretar un fenómeno estacionario con variaciones periódico-acotadas, para el cual la serie trigonométrica de Fourier se convierte en una herramienta de predicción, en donde la estabilidad del sistema se evidencia en la convergencia de la serie. Además, sólo hasta que se haya visto esta relación se podrá entonces pasar a la generalización matemática, es decir, a determinar los coeficientes de la serie trigonométrica conociendo la función a la que esta converge.

PALABRAS CLAVE: Socioepistemología, Práctica Social, Serie Trigonométrica de Fourier.

ABSTRACT

Through a systemic approach to the trigonometric Fourier series from the Socioepistemological Theory of Mathematics Education is carried out an integrated study of the epistemological, cognitive and didactic dimensions observed in its relationship with the social and cultural elements in which they are developed. The analysis of these dimensions allowed us to glimpse a scheme of nested practices as a preliminary model for the social construction of this knowledge based on social practices. It is observed that the series arises when modeling and interpreting a stationary phenomenon with periodic-bounded variations, for which the trigonometric Fourier series becomes a tool of prediction. Where the stability of the system is evidenced in the

1 Rosa María Farfán Márquez es Investigadora Titular del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. E-mail: rfarfan@cinvestav.mx
2 Fabián Wilfrido Romero Fonseca es estudiante de Doctorado en el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional y profesor de la Escuela de Formación Docente de la Universidad de Costa Rica. E-mail: fabian.romero@ucr.ac.cr

convergence of the series. In addition, only until this relation is seen, one can go to mathematical generalization. That is to determine the coefficients of the trigonometric series, knowing the function to which it converges.
KEYWORDS: Socioepistemology, Social Practice, Trigonometric Fourier Series.

RESUMO

Através de uma aproximação sistêmica para a série trigonométrica de Fourier, por meio da Teoria Sócioespistemológica da Educação Matemática, realiza-se um estudo integrado das dimensões epistemológica, cognitiva e didática observadas e suas relações com os elementos sociais, culturais nos quais elas se desenvolvem. A análise dessas dimensões permitiu vislumbrar um esquema de práticas alinhadas como um modelo preliminar para a construção social deste conhecimento baseado em práticas sociais. Observa-se que a série surge ao modelar e interpretar um fenômeno estacionário com variações periódicas, para as quais a série trigonométrica de Fourier se torna uma ferramenta de previsão, na qual a estabilidade do sistema é evidenciada na convergência da série. Além disso, apenas depois que essa relação tenha sido vista é que se pode passar para uma generalização matemática, isto é, determinar os coeficientes da série trigonométrica conhecendo a função a que ela converge.
PALAVRAS-CHAVE: Socioepistemologia, Prática Social, Séries Trigonométrica de Fourier.

Introducción

La investigación educativa en el nivel superior tiene sus primeras investigaciones alrededor de la enseñanza y aprendizaje del cálculo (ARTIGUE, 1998b), cuya importancia radica en que este es un puente entre la matemática elemental y la matemática avanzada en la educación superior. Dentro del cálculo, la Serie Trigonométrica de Fourier (STF) es uno de los temas primordiales, pues epistemológicamente fue un punto de quiebre en el desarrollo del Análisis Matemático, así como parte importante en la evolución del concepto de función como lo conocemos hoy en día; por esta razón ha sido motivo de investigación en Matemática Educativa.

Las investigaciones en matemática educativa estudian las interacciones entre los partícipes del proceso de enseñanza y aprendizaje (fenómenos didácticos), como lo son el docente, el estudiante y un saber, en nuestro caso ese saber se corresponde con la STF. Las distintas investigaciones desarrolladas alrededor de ésta se han preocupado por aspectos como: el problema de la cuerda vibrante (FARFÁN, 2012; ULÍN, 1984), la determinación del estado estacionario como fenomenología intrínseca a la serie (FARFÁN, 2012; MARMOLEJO, 2006); y algunas nociones físicas y matemáticas relacionados con la STF como lo son el calor, la visualización, la periodicidad y la convergencia (MORALES, 2003, 2010; RODRÍGUEZ, 2009; VÁSQUEZ, 2006; MORENO, 1999).

Las investigaciones muestran que existen dos alternativas para el abordaje de la STF en el aula, una utiliza el ambiente fenomenológico que le dio origen, la determinación del estado estacionario (MURO, 2000, 2004). Para esto es necesario que dicho ambiente sea cercano al profesionista y que lo comprenda cabalmente pues es propio de su disciplina. En contraparte, se busca ambientes alternativos a la determinación del estado estacionario, lo cual permitiría hacer más accesible la STF a aquellos estudiantes que no están familiarizados con situaciones relacionadas a este. Esto porque su fenomenología intrínseca es una tarea cognitiva de las más complejas (FARFÁN, 2012), pero también haría posible que aquellos que si están familiarizados logren resignificar la STF desde su propio campo de estudio.

Por otra parte, Montiel (2011) hace un minucioso estudio socioepistemológico de la función trigonométrica, colocando a la serie trigonométrica como el estadio más avanzado en el desarrollo del pensamiento trigonométrico. Por lo que, para su construcción, se requiere que las funciones seno y coseno adquieran su carácter de objeto en el estudiante, pues gracias a sus propiedades (periódica y acotada) y a que sus variaciones sucesivas son de la misma naturaleza, las hacen una herramienta poderosa tanto en la matemática como en otras disciplinas científicas.

Las problemáticas abordadas alrededor de la STF hasta la fecha se sitúan estudiando sólo a la serie, en diferentes contextos, sin embargo, no se tienen estudios sobre su construcción articulada con la función trigonométrica como momento previo de construcción a la serie trigonométrica. Entonces se plantea como hipótesis que *lo trigonométrico evoluciona si las situaciones demandan su uso en la transición de la función a la serie y es en esta transición donde se puede significar la Serie Trigonométrica de Fourier*, es decir, se puede construir la STF en un contexto en el cual las funciones seno y coseno sean objetos susceptibles de manipulación.

Se reconoce al cálculo de los coeficientes de Fourier, como parte importante de la significación de la STF, esto debido a que matemáticamente el cálculo de los mismos fue el gran aporte de Fourier. Sin embargo, el problema de la determinación de éstos se ha considerado en las diversas investigaciones como un algoritmo ya establecido, por lo que se debe buscar su significación en el tratamiento de la serie.

Es así como, se busca significar las nociones matemáticas alrededor de la STF, poniendo especial atención en el cálculo de los coeficientes, mediante una *problematización del saber matemático*[3] que dé cuenta de su construcción social. Entonces, se pretende dilucidar las prácticas que acompañan la construcción de la STF en su contexto sociohistórico para proponer pautas para la escritura de diseños de intervención en el aula.

[3] Problematizar el saber matemático "radica en buscar las causas que conducen a los individuos a «a hacer lo que hacen» con el conocimiento en juego, es decir, hacer del saber matemático un problema «localizando y analizando su uso y su razón de ser»" (REYES, 2011, p. 39).

Por lo que este escrito está organizado de la siguiente manera: primero se abordan algunos elementos teóricos necesarios, seguidamente se da una mirada rápida a la metodología utilizada, luego el análisis del rol de las prácticas en la construcción social de la Serie Trigonométrica de Fourier, para finalizar con una epistemología de prácticas preliminar y algunas pautas para el diseño de situaciones de aprendizaje.

Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) se preocupaba por la construcción social del conocimiento matemático (CSCM) y su difusión institucional. En este sentido, los estudios socioepistemológicos van más allá del proceso de enseñanza y aprendizaje en la escuela (o en el centro de estudio) sino que también considera todo aquel conocimiento que se construye en sociedad, no solo dentro del ámbito de aula.

Bajo este enfoque se hace legítima "toda forma de saber, sea este popular, técnico o culto, pues en su conjunto constituyen la sabiduría humana" (CANTORAL, 2013, p. 26), es decir, desde la TSME se toman en cuenta todas las formas de saber[4] y no solamente el saber sabio, lo que permite asegurar que en toda actividad humana se puede construir conocimiento matemático, o, dicho de otra forma, las matemáticas son parte de la cultura de la sociedad.

Ahora bien, el saber matemático no fue hecho para ser enseñado, ya que se constituyó socialmente en ámbitos no escolares, por lo que sufre un proceso de transformación hasta llegar a la escuela, lo que provoca una marcada diferencia entre el conocimiento matemático (*saber sabio*) y lo que se enseña en la escuela (*matemática escolar*).

Cuando se introducen los saberes en la escuela existe un sistema de razón que norma la organización de la matemática escolar, además de generar las maneras de participación y consenso en el ámbito didáctico, la TSME ha nombrado este sistema de razón con el término discurso Matemático Escolar (dME), donde no sólo se consideran programas de estudio, libros de texto o el discurso escolar, sino también la conformación de consensos y significados compartidos (CANTORAL et al., 2006).

El dME posee ciertas características: el carácter utilitario y no funcional del conocimiento, la atomización en los conceptos, el carácter hegemónico del dME, la concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y continuo, falta de marcos de

---

[4] Se hace diferencia entre conocimiento y saber, entendiéndose el conocimiento como la información sin uso, y el saber como la acción intencional de utilizar el conocimiento para resolver una situación problemática (conocimiento en uso).

referencia para la resignificación de la matemática escolar. Ante estas características se pone en evidencia que el dME es un sistema de razón, que excluye a los actores del sistema didáctico (estudiantes y docentes) de la construcción del conocimiento matemático (SOTO; CANTORAL, 2014).

Para promover la CSCM, se requiere de un rediseño del dME; el cual, desde la perspectiva de la TSME, debe estar apoyado en sus principios fundamentales, los cuales, sin formar una secuencia lineal, son:

- El *principio de racionalidad contextualizada* alude a que la racionalidad del sujeto depende del contexto en el que este se encuentre en un momento y lugar determinado; por lo que la construcción del conocimiento es un producto sociocultural.
- El principio de *relativismo epistemológico* concibe que el saber es una multitud de saberes (popular, técnico y culto), con valores de verdad relativos a quién y dónde lo experimente, lo que provoca que se acepte la diversidad de opiniones ante los mismos hechos, ya que, al no haber una verdad única, se precisa comprender el porqué de las opiniones de cada sujeto, esto es, el salto del error al obstáculo.
- El principio de *resignificación progresiva* admite que, una vez que el conocimiento es puesto en uso, su validez será relativa a un entorno (racionalidad contextualizada) y de éste emergió su construcción y sus respectivas argumentaciones (relativismo epistemológico), en el momento en que ese saber evoluciona y de su interacción con diversos contextos, se resignificarán estos saberes enriqueciéndose con variantes significativas.
- El principio *normativo de la práctica social* es el eslabón fundamental para el funcionamiento de la teoría, pues la Socioepistemología asume que las prácticas sociales son la base y orientación en los procesos de construcción de conocimiento.

.

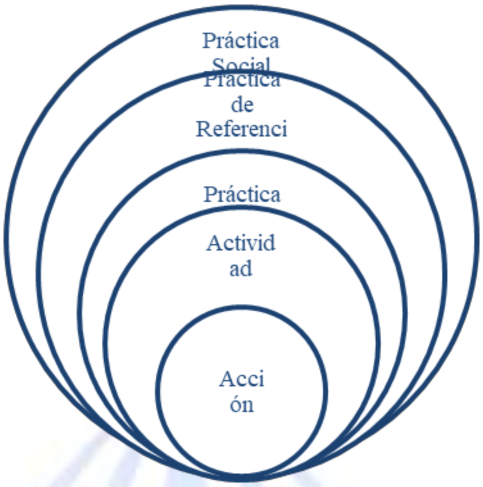

Figura 1 – Modelo de prácticas anidadas
Fuente: (CANTORAL, 2013, p. 334).

Estos principios actúan de manera articulada para develar la constitución del saber a partir de su construcción social (Figura 1), esto a través de una secuencia que permite explicar empírica y teóricamente el proceso de construcción social del sujeto (individual colectivo o histórico): se pasa de la *acción*, directa del sujeto ante el medio en tres acepciones (material o *entorno*, organizacional o *contexto*, social o *normativo*), esto se organiza como una *actividad* humana (situada socioculturalmente), para perfilar una *práctica socialmente compartida* (iteración deliberada del sujeto y regulada por el contexto); dicha práctica cae bajo la regulación de una *práctica de referencia* que es la expresión material e ideológica de un paradigma (ideológico, disciplinar y cultural), las que a su vez son normadas mediante sus cuatro funciones por la *práctica social* (normativa, identitaria, pragmática y discursiva-reflexiva).

La Ingeniería Didáctica

La Ingeniería Didáctica (ID) como metodología de investigación, ha evolucionado dentro de la TSME con ciertas diferencias respecto de sus inicios, esto con el fin de acercarse al fenómeno de la apropiación del conocimiento matemático a través de su construcción social. La ID cuenta con cuatro fases, las cuales corresponden a su esquema experimental de trabajo: análisis preliminar; diseño de secuencia y análisis a priori; puesta en escena, observación y toma de datos; análisis a posteriori y validación interna, lo aquí presentado corresponde a la primera fase de la ID.

En el análisis preliminar, las investigaciones enmarcadas en la TSME analizan el papel de la práctica social en la constitución del saber de manera sistémica, se consideran cuatro componentes fundamentales acerca del conocimiento:

La *dimensión epistemológica* estudia “las circunstancias que hicieron posible la construcción del conocimiento matemático” (CANTORAL, 2013, p. 147). Para este análisis se estudian diferentes momentos históricos: la discusión alrededor del problema de la cuerda vibrante, el problema de la propagación de calor; además del surgimiento de la ingeniería como ciencia, como práctica de referencia, que regula el trabajo matemático del tiempo de Fourier; un análisis epistemológico a profundidad se encuentra en (FARFÁN, 2012).

La *dimensión didáctica* se preocupa por el cómo vive el saber en el sistema didáctico, es decir su intencionalidad a la hora de enseñarlo, con el fin de ver cómo ha evolucionado ese saber en los entornos escolares y no escolares. Para este propósito se estudian libros de texto, planes y programas de estudio.

La *dimensión cognitiva* analiza las formas de apropiación y significación progresiva del conocimiento que vivencian los partícipes en una situación de aprendizaje con fines de construir conocimiento matemático.

La *dimensión social y cultural* es agregada al análisis preliminar de la ID por la TSME, pero esta no se observa separada de las demás, está inmersa en cada análisis, con el fin de identificar aquellas prácticas humanas que propician la apropiación del conocimiento matemático, el uso del saber.

La integración entre estas cuatro componentes es lo que en TSME se denomina una **problematización del saber matemático**. Se presenta a continuación el análisis integral de las dimensiones, para conocer más detalles se recomienda consultar (ROMERO, 2016).

Construcción social de la STF

Para plantear una **construcción social** se requiere de analizar la evolución del conocimiento e ideas en la historia que permitan encontrar las circunstancias, los escenarios, los medios, que posibilitaron la emergencia del conocimiento matemático (MONTIEL, 2011). Para ello se analizó el contexto de origen de la STF para reconocer los escenarios, los contextos, las problemáticas y las prácticas de referencia asociadas y que se consideran fundamentales para significar al concepto en escenario escolar.

Por otra parte, a partir de la dimensión didáctica, se considera el estado del dME predominante y cómo este influye en la didáctica; con la componente cognitiva analizamos las construcciones mentales de estudiantes y profesores y cómo este afecta la manera en que conciben la STF y los conceptos relacionados con la misma.

Se busca complementar la construcción social de las funciones trigonométricas (MONTIEL, 2011), ya que la STF corresponde al estadio más avanzado en el desarrollo del pensamiento trigonométrico, por lo que, haciendo la misma aclaración que Montiel acerca de las funciones trigonométricas, al referirnos a la STF lo haremos desde una problemática contextualizada y no sólo a una simple definición.

Por lo tanto, en lo que sigue, se hará evidente la presencia de las prácticas, en su escenario histórico, institucional y cultural, y su relación con el estado actual del sistema de enseñanza y las nociones de profesores y estudiantes acerca de la STF.

El problema de la cuerda vibrante

Taylor propone el problema de la cuerda vibrante en 1715, en su análisis concluye que las soluciones al problema son periódicas, pero considera que las vibraciones subsecuentes son proporcionales, mismo supuesto que toma Johann Bernoulli en su abordaje del problema, lo que no les permite construir la ecuación diferencial que modele el fenómeno.

Es D'Alembert quien, en 1747, propone el primer modelo matemático del problema mediante la ecuación diferencial: $a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Luego la discusión radica en cuál es la solución general de dicha ecuación; D'Alembert aseguraba que la solución debía ser una función continua, en el sentido de Euler[5], impar y periódica. Un año después Euler llega a la misma solución que D'Alembert, pero difiere en la forma inicial de la curva, pues no existen razones físicas para pensar que la forma inicial de la cuerda no pueda estar definida por distintas fórmulas analíticas.

Esto se relaciona con el rol que empezó a ocupar el álgebra dentro del Análisis Matemático durante el siglo XVIII y las nociones que sobre el concepto de función poseen hoy día los estudiantes, pues no consideran que una función definida a trozos sea función (ALBERT, 1996) y esto implica dificultades al definir algebraicamente una función de este tipo o un periódica (MORENO, 1999).

Cabe destacar que Euler acude al fenómeno físico para hacer sus argumentaciones, pues el problema físico no pone restricciones sobre la forma inicial de la cuerda, entonces la

---

[5] Continuidad, en el sentido de Euler, se entiende como invariabilidad, inmutabilidad de la ley de la ecuación que determina una función, sobre todo el dominio de valores de la variable independiente (Farfán, 2012).

discusión surge de que dada una función sólo hay una gráfica asociada, pero dada la gráfica no necesariamente hay una única función que le corresponda, en la definición de Euler.

Daniel Bernoulli, a partir de sus conocimientos musicales, propone que la solución al problema debe tener la forma: $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx)\cos(nt)$, donde los coeficientes a_n se deben elegir adecuadamente para que se satisfaga la ecuación diferencial. Note que al utilizar la condición $y(x,0) = f(x)$, la cual indica que la forma inicial de la cuerda es una función arbitraria $f(x)$, se tiene que: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx)$. Es decir, una función arbitraria se puede representar como suma de sinusoidales.

Euler rebate la solución de D. Bernoulli diciendo que la función inicial en el problema de la cuerda vibrante debe cumplir las propiedades de periodicidad y paridad que posee la función seno, pues los términos de la solución dada por D. Bernoulli son funciones sinusoidales. Esta argumentación se encuentra presente hoy día en las aulas, pues en (FARFÁN, 2012; MORENO, 1999) al solicitar a sujetos de investigación que graficaran las primeras cuatro sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx)$ y que además tratasen de hacer la gráfica en caso de considerar infinitos términos (la función a la que converge); la mayoría de los sujetos conserva la forma sinusoidal y las raíces inalterable en el límite, esto se relaciona con el obstáculo epistemológico del principio de permanencia de Leibniz (ARTIGUE, 1998a).

Por su parte D. Bernoulli sostiene que es la solución general del problema, sus argumentos están insertos en la física, pero se puede vislumbrar que comprendía a profundidad como se comportaba la superposición de ondas, lo cual indica que esto es esencial para la comprensión de la STF, pues al saber cómo se comportan las sumas parciales se pueden predecir ciertas propiedades del comportamiento general de la serie, donde lo que se requiere es acercarse al valor de convergencia, mediante la comprensión de las sumas parciales.

Es claro de los comentarios de Euler, que está sobre-generalizando las propiedades de procesos finitos a procesos infinitos. Esto sucede hoy día en las aulas, pues los estudiantes solo logran hablar del infinito potencial y no del infinito actual en la convergencia, pues ellos ven la posibilidad de seguir añadiendo términos a la suma (infinito potencial) pero no que esta suma pueda llegar a ser igual a un número finito (o una función en nuestro caso), aseguran que se acerca a dicho número, pero que no llega a ser ese número y es en esta igualdad donde está la comprensión del infinito actual (ALBERT, 1996).

El contexto del trabajo de Fourier

Ante el problema de la propagación de calor Fourier reconoce, en sus escritos, que no se pueden aplicar los principios de la Mecánica Racional ni del Análisis Matemático del siglo XVIII, de esto da cuenta la incapacidad que tuvieron los matemáticos de la época para dar una respuesta contundente al problema de la cuerda vibrante.

Al lado del trabajo de Fourier, se encuentra el desarrollo de la ingeniería como ciencia por sobre la práctica habitual del ingeniero. Para esto la Escuela Politécnica, en donde Fourier fue profesor, jugó un papel central para su consolidación. Por lo que los problemas que se resolvían estaban íntimamente ligados a la práctica de la ingeniería.

Así el análisis de Fourier sobre la propagación de calor "se da en el marco de la profesionalización de una *práctica de referencia*, la práctica de la ingeniería y por ende en el seno de la comunidad politécnica" (CANTORAL et al., 2006, p. 90). Por lo que el problema de propagación del calor nace ligado a la práctica de la ingeniería, en un momento en que se está consolidando la ingeniería como ciencia.

El establecimiento de la ecuación de propagación de calor

Biot establece la primera ecuación diferencial que modela el fenómeno de propagación del calor, a través de la noción de calórico y de mediciones con un termómetro, lo que provoca que no estudie el fenómeno en sí, sus cálculos están basados en la práctica experimental, además no explica la naturaleza de los coeficientes de la ecuación diferencial, lo que es propio del material y lo que no (conductividad, densidad, entre otros). En la experimentación de Farfán (2012), se observa que, en el contexto físico, la primera impresión sobre el fenómeno es perceptible, pero al solicitar su representación gráfica y analítica, se tienen tantas representaciones como respuestas, pues los sujetos no logran distinguir lo que varía respecto a qué es lo que produce tal variación, lo que no les permite predecir el estado futuro del sistema (FARFÁN, 2012).

Es con el trabajo de Fourier, en la *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822), donde se analiza el problema de la propagación del calor en los sólidos, donde la variación está presente y se significa en la ecuación general que modela el fenómeno. Esta ecuación es la misma que Biot había obtenido de forma empírica, sin el establecimiento de los coeficientes. Es así como el estudio del ambiente fenomenológico de la transferencia del calor propicia la construcción de la ecuación diferencial que modela el problema, considerando aquellas variables necesarias para su modelaje, las condiciones iniciales y de frontera (MARMOLEJO, 2006).

La serie trigonométrica y su convergencia

Después de establecer la ecuación de propagación del calor, Fourier presenta varios usos de la ecuación, entre ellos está el problema de la transferencia de calor en una lámina infinita[6], cuya ecuación diferencial omite la variable z y su correspondiente derivada parcial (el grosor de la lámina es infinitesimal), y además $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ (pues se trata de determinar el estado estacionario), para tener:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Para resolver la ecuación Fourier utiliza el *método de separación de variables,* que, desde un punto de vista matemático, es uno de sus grandes aportes a las técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales parciales, obteniéndose:

$$v(x,y) = ae^{-x}\cos y + be^{-3x}\cos 3y + ce^{-5x}\cos 5y + \cdots$$

Al considerar las condiciones de frontera de este problema se llega a que:

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + \cdots$$

Esta solución, al igual que la dada por D. Bernoulli en el problema de la cuerda vibrante, es una representación en serie trigonométrica de una constante, lo que logró hacer Fourier, que no hizo D. Bernoulli, fue proporcionar el cálculo de los coeficientes. Pero antes de esto vio necesario justificar dicha solución físicamente, lo que permite ver que Fourier como la comunidad de su época, están interesados en "anticipar el comportamiento de la naturaleza, en modelarla" (CANTORAL et al., 2006, p. 94). Se evidencia la necesidad que tiene Fourier de validar la matemática en el contexto físico, asegurándose que es acorde con el problema.

Después de esta justificación física, Fourier procede a hacer el cálculo de los coeficientes de la serie, para esto calcula diferenciaciones sucesivas de la ecuación, con lo que obtiene un sistema de infinitas ecuaciones con infinitas variables, con un gran dominio aritmético-algebraico resuelve dicho sistema utilizando un número finito de ecuaciones e incógnitas, generaliza sus resultados para el caso infinito, llegando a:

---

[6] El planteamiento del problema y una explicación detallada se encuentra en (FARFÁN, 2012).

$$\frac{\pi}{4} = \cos y - \frac{1}{3}\cos 3y + \frac{1}{5}\cos 5y - \frac{1}{7}\cos 7y + \cdots, \qquad con\, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Desde nuestro punto de vista el problema ya está resuelto, pero Fourier ve la necesidad de estudiar la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos[(2n-1)y]$$

La necesidad de este estudio de convergencia la podemos observar si ponemos atención a la solución general del problema dada por Fourier:

$$\frac{\pi}{4}v = e^{-x}\cos y - \frac{1}{3}e^{-3x}\cos 3y + \frac{1}{5}e^{-5x}\cos 5y + \cdots$$

Si se consideran los puntos que están muy alejados de la fuente de calor, el valor que toman las exponenciales es "despreciable", por lo que para que se logre la estabilidad la serie de cosenos debe ser convergente, lo que podríamos suponer llevó a Fourier a estudiar su convergencia, previo a dar la solución general.

El problema tiene la característica de presentar un estado inicial y uno final fijo (en palabras de Fourier), es decir, es un problema que inicia en un estado transitorio y con el paso del tiempo llega a su estado estacionario, representado por convergencia de la serie. Entonces, un ambiente de significación para la STF requiere de modelar un fenómeno estable con variación periódica y acotada en el paso del tiempo, en el cual, la estabilidad se vislumbra en la convergencia de la serie, es decir, en el estudio del límite de la sucesión de sumas parciales.

El cálculo de los coeficientes de Fourier

Para la representación en serie trigonométrica de una función arbitraria, Fourier hace uso de un gran dominio aritmético para hacer el cálculo de los coeficientes. Se discute aquí respecto de la estructura de la demostración seguida por Fourier.

Primeramente, Fourier demuestra que una función arbitraria e impar $\varphi(x)$ se puede representar como serie de senos, es decir, se pueden determinar los valores de a, b, c, d, … en la ecuación:

$$\varphi(x) = a\,\mathrm{sen}\,x + b\,\mathrm{sen}\,2x + c\,\mathrm{sen}\,3x + d\,\mathrm{sen}\,5x + \cdots$$

Luego, reinterpretando las ideas de Fourier al lenguaje matemático actual, desarrolla la función $\varphi(x)$ en serie de potencias alrededor de $x = 0$, y sustituye las derivadas sucesivas por constantes A, B, C, D, E, … con lo que obtiene un sistema con infinitas ecuaciones e infinitas incógnitas.

Posteriormente Fourier resuelve sistemas de ecuaciones particulares para generalizar sus resultados. Después de una gran cantidad de cálculos, evidencia de su gran dominio aritmético, concluye que, en general $\int_0^\pi \varphi(x) \operatorname{sen} nx\, dx$ es el coeficiente de $\operatorname{sen} nx$ en el desarrollo en serie trigonométrica de $\varphi(x)$.

Dicho cálculo de los coeficientes trae consigo un problema, en esa época la noción de integral es la de antiderivada, entonces viene la pregunta ¿a qué es igual la integral de una función arbitraria? Fourier, consciente de este detalle, señala algunas argumentaciones gráfico-geométricas al respecto y concluye que el coeficiente del término $\operatorname{sen}(nx)$ corresponde al área bajo la curva de $\varphi(x)\operatorname{sen}(nx)$ en el intervalo $(0,\pi)$.

Luego de hacer esto Fourier comenta el procedimiento que se utiliza hoy en día para demostrar el cálculo de los coeficientes de la serie trigonométrica, el cual consiste en considerar la serie:

$$\varphi(x) = b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + b_n \operatorname{sen} nx + \cdots$$

Se multiplica por $\operatorname{sen} nx$, con lo que resulta:

$$\varphi(x) \operatorname{sen} nx = b_1 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} nx + b_2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} nx + \cdots + b_n \operatorname{sen}^2 nx + \cdots$$

Se integra término a término desde 0 hasta π, con lo que se concluye que $b_n = \int_0^\pi \varphi(x) \operatorname{sen} nx$. Fourier realiza un análisis análogo para representar una función par $\psi(x)$ en serie de cosenos:

$$\psi(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots$$

Concluye que $a_n = \int_0^\pi \varphi(x) \cos nx$.

Ya demostrado que dos funciones, una impar y la otra par, se puede desarrollar en serie de senos y cosenos, respectivamente; Fourier presenta geométricamente la demostración de que una función cualquiera se puede representar como suma de dos funciones, una par y la otra impar. Luego da su demostración analítica, misma que se da hoy día en la escuela, pero se omite la construcción geométrica dada por Fourier, pues en el actual dME alrededor de la STF predomina el contexto algebraico (RODRÍGUEZ, 2009). Con esta demostración Fourier logra lo que deseaba generalizar.

En la forma de trabajo de Fourier, la manera de construir el cálculo de los coeficientes está ligado a la coordinación y articulación de diferentes miradas del objeto, una geométrica-gráfica y la otra algebraica-analítica, para validar la segunda en la primera. En este sentido, el cálculo de los coeficientes de Fourier es un problema con características propias independientes del ambiente fenomenológico en el que se origina.

Un esquema de prácticas anidadas preliminar

El análisis socioepistemológico presentado hasta ahora, basado en una problematización de la STF, evidenció la presencia de la **predicción** como práctica socialmente compartida (CANTORAL et al, 2006). Está regulada por un paradigma imperante alrededor del trabajo de Fourier, el desarrollo de la ingeniería como ciencia, por lo que denominamos a la práctica de referencia: el **surgimiento de la ingeniería como ciencia**. Es dentro de ésta donde Fourier hace el estudio de la propagación del calor, en la cual la actividad que permite la formación de funciones psicológicas superiores es el **estudio de la convergencia** de series trigonométrica particulares.

La predicción, **como práctica socialmente compartida**, surge ante la incapacidad del ser humano de controlar el tiempo a voluntad (CANTORAL, 2013), y ante la necesidad de conocer el comportamiento futuro de diferentes fenómenos de su entorno el ser humano *predice*. En este sentido, "la predicción se construye socialmente a partir de las vivencias y experiencias cotidianas de los individuos y de los grupos sociales" (CANTORAL, 2013, p. 91).

El problema inicial de Fourier requiere conocer el valor que tomará la temperatura cuando el flujo de tiempo no modifique el comportamiento del sistema (estado estacionario). Las STF se presenta como resultado de una situación que precisa de la predicción, cuya fenomenología intrínseca es la *determinación del estado estacionario* (FARFÁN, 2012). Es así como "la *predicción* en tanto que no es un objeto matemático tiene que entrar en la problemática teórica no como noción, o representación, sino como expresión de una *práctica social* […]: el *Prædiciere*" (CANTORAL, 2013, p. 93)[7].

La predicción, como práctica socialmente compartida es regulada por el surgimiento de la ingeniería matemática (práctica de referencia), va a significar la STF como un modelo de predicción para fenómenos estables con variación periódica y acotada, en el cual, la estabilidad se vislumbra en la convergencia de la serie trigonométrica; para lo que es

---

[7] Un análisis detallado del *Prædiciere* como práctica social se encuentra en (CANTORAL, 2013).

necesario la intervención de las acciones de *predecir*, *modelar* e *interpretar*, las cuales se describen a continuación:

- Predecir: Permite determinar el estado futuro de un fenómeno, el de la propagación de calor en este caso, esto a través del estudio sistemático de las causas que lo generan y los efectos que produce (CANTORAL, 2013). Lo que permite determinar el estado estable del sistema.
- Modelar: Fourier (1822), en su discurso preliminar, asegura que los problemas del mundo físico, descubiertos gracias a *la observación y a la interacción con los mismos*, se deben convertir en problemas del Análisis Matemático. Para esto Fourier cuenta con sus *hipótesis de partida* y ve la necesidad de presentar la interpretación física para *validar* sus argumentaciones matemáticas, así como revisar que esto se correspondiera con la evidencia empírica con la que contaba.
- Interpretar: bajo la idea de que un modelo no es una simple representación de un fenómeno, sino una herramienta para intervenir en la naturaleza, la acción de interpretar cobra importancia significativa en el proceso, pues es la que permite tomar los resultados del modelo y, con base en la interpretación de ellos, intervenir sobre el fenómeno. Fourier valida cada uno de sus argumentos matemáticos en el contexto físico, es un "ir y venir" entre el fenómeno y el modelo. Aunque las ideas físicas y las matemáticas estén separadas siempre busca que haya coherencia entre ambas.

El análisis anterior permite identificar las prácticas asociadas a la STF, donde **predecir, modelar e interpretar** corresponden a las *acciones* directas del sujeto sobre el medio; estas acciones se organizan para el **estudio de la convergencia** de series trigonométricas como *actividad* que provoca el surgimiento de funciones psicológicas superiores, para perfilar a la **predicción** como *práctica socialmente compartida*; dicha práctica cae bajo la regulación de una *práctica de referencia*, la cual es el **surgimiento de la ingeniería como ciencia**; la que a su vez es normada por la **Prædiciere** como *práctica social*.

.

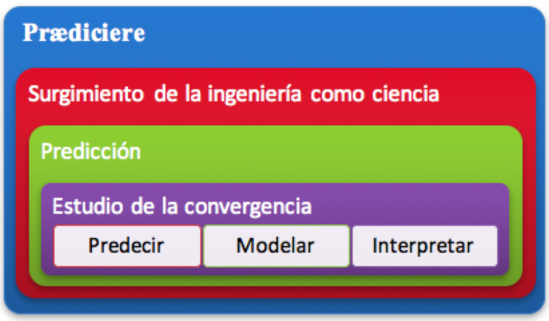

Figura 2 – Esquema de prácticas anidadas preliminar de la STF

Fuente: Los autores.

La construcción social de la STF requiere de dos momentos importantes: (1) el estudio de fenómenos estacionarios en el flujo del tiempo y (2) el estudio matemático de la representación de una función arbitraria en serie trigonométrica. Esto se evidencia en la historia, los grandes matemáticos que discutieron alrededor del problema de la cuerda vibrante no lograron llegar a lo segundo, fue hasta que Fourier estableció la convergencia de series trigonométricas específicas que se dio paso a la manera de calcular los coeficientes de Fourier.

Reconocemos en estos dos momentos, un cambio de mirada: trasladar el problema de la comprensión de la convergencia de series trigonométricas particulares, al problema de dado el valor de convergencia de la serie calcular sus coeficientes. El cálculo de los coeficientes emerge del trabajo de Fourier a partir de su ambiente fenomenológico, es una aportación matemática que surge de su quehacer, pero que trata de responder a la necesidad de formalidad y generalización propia de la época.

Rediseño del dme para la STF

Para realizar una propuesta de rediseño del dME se requiere de la comprensión del dME actual, esto mediante la consideración de sus características principales: el carácter utilitario y no funcional del conocimiento, la atomización en los conceptos, el carácter hegemónico del dME, la concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y continuo, falta de marcos de referencia para la resignificación de la matemática escolar (SOTO, 2010). A continuación, se hará un recorrido por el mapa del dME alrededor de la STF.

El *carácter utilitario* de la STF en el dME actual está asociado a que este saber es útil para resolver ciertas problemáticas, por lo que el centro de atención está en el tipo de problemas que resuelve la STF y no en cómo ha sido construida en su génesis, lo que no permite que esta construcción se perciba como resultado de la actividad humana. Esta mirada provoca que la matemática escolar privilegie la algoritmia por sobre las características de la circunstancias histórico-sociales que provocan el surgimiento de la STF.

Es así como desde la TSME se propone un esquema de prácticas anidadas preliminar para la STF (Figura 2), el cual promueve la construcción social de la misma a partir del uso culturalmente situado en contextos de significación cercanos al que aprende (individual o colectivo), es decir, que el aprendiz cuente con las herramientas necesarias para hacer frente al problema planteado por la situación de aprendizaje, en este caso convirtiendo a la STF en una herramienta de predicción.

En este sentido, el actual dME presenta a la STF como un procedimiento para calcular los coeficientes de una serie trigonométrica a partir de una función dada, lo que no le permite al estudiante construir un conocimiento funcional que tome sentido a partir de su contexto de significación. Esto a su vez provoca que al trabajar con la STF haya carencia de argumentaciones y significados que provengan de la actividad humana, ya que no entra en juego la práctica de referencia que hace emerger dicho conocimiento, ni tampoco el contexto de quien aprende, lo que hace manifiesta la presencia de la *atomización de los conceptos* en el dME alrededor de la STF. Es así, como la consideración de la evolución de lo trigonométrico (MONTIEL, 2011) es de vital importancia, ya que permite el surgimiento de nuevas argumentaciones al resignificar a la función trigonométrica, para pasar al estudio de propiedades más analíticas como lo es el estudio de la convergencia, característica primordial de las series trigonométricas.

Es importante aclarar en este punto que esta investigación no pretende significar la noción de convergencia de series, pues es un problema por demás complejo debido a la incapacidad que tiene el ser humano de percibir el infinito a través de los sentidos. El estudio de la convergencia se refiere, más bien, a la significación de las sumas parciales y la comprensión de su comportamiento; ¿cómo cambian? y ¿cuánto cambian?; para que a partir de esto el estudiante tenga una idea intuitiva más estable con respecto a la noción de convergencia de series trigonométricas, en particular de la STF.

El dME impone como argumentación que la STF se utiliza para aproximar una función (con ciertas características) a través de una serie trigonométrica (marco algebraico), lo que provoca que los significados y procedimientos alrededor de la misma también sean impuestos como una regla que se debe aplicar, lo que no permite que el estudiante se involucre en su construcción, esto evidencia el *carácter hegemónico* del dME alrededor de la STF. A partir del análisis hecho se puede notar como detrás de la STF hay otro tipo de argumentaciones (físicas, geométricas, algebraicas, empíricas) de las cuales pueden surgir diferentes significados y procedimientos a utilizar, lo que permite que sea el estudiante quien construya el conocimiento a la luz de las prácticas.

El hecho de ver a la STF como una regla, da cuenta de un dME que considera la matemática como un *conocimiento acabado y continuo*. La STF se presenta como un algoritmo que se debe memorizar y aplicar, lo cual provoca que no se cuestione acerca de la construcción de dicho concepto, sino que se considere preexistente al que aprende y que esto sólo debe asimilarlo, lo que no le permite dotarlo de otros significados en contextos diferentes (resignificarlo).

Lo anterior está íntimamente relacionado con la *falta de marcos de referencia* para significar a las STF, ya que las explicaciones en su introducción son meramente algorítmicas, carece de la consideración de otras áreas del conocimiento a las cuales la matemática responde, ni siquiera responde a un marco de referencia matemático, pues la mecanización y un solo tipo de argumentación son los privilegiados.

De esta manera se propone que para la significación de la STF se consideren las características esenciales de su contexto de origen, esto no quiere decir que se va a reproducir el mismo fenómeno en la clase de matemática (matematizar la transferencia de calor), más bien se consideran las características primordiales de dicho fenómeno para a partir de estas identificar contextos de significación para la serie cercanos al sujeto que aprende (individual o colectivo). Dichos contextos requieren de modelar un fenómeno estacionario con variación periódica y acotada, en el cual la STF se convierta en una herramienta de predicción.

Conclusiones

La problematización del saber matemático permitió identificar las prácticas y las circunstancias sociohistóricas que provocaron el surgimiento de la STF, así como el estado del dME actual a su alrededor. Con esto se logró identificar la trasformación sufrida por el objeto desde su surgimiento hasta su introducción en el sistema de enseñanza.

Las características del dME actual alrededor de la STF obliga a que cualquier propuesta de enseñanza para la misma requiera de cambios significativos al discurso (rediseño del dME), desde la TSME se propone el desarrollo del pensamiento matemático y la construcción social del conocimiento basado en prácticas sociales.

Gracias al análisis sistémico realizado se logró identificar aquellas prácticas que acompañan a la construcción social de la STF (Figura 2) y se proponen aquellos cambios necesarios en el dME predominante: 1) Presentar la STF como una herramienta de predicción para ciertos fenómenos, 2) El estudio de la convergencia permite resignificar a la función trigonométrica para provocar el desarrollo del pensamiento trigonométrico de la función a la serie trigonométrica, 3) Existen diversidad de argumentaciones detrás de la STF (físicas, geométricas, analíticas y algebraicas) que se deben considerar al construir este conocimiento, y 4) Se deben identificar diversidad de contextos propios para la construcción de la STF (modelaje e interpretación de fenómenos estacionarios de variación periódica-acotada) para que se enriquezca con nuevos significados. Estas pautas deben considerarse como variables macro-didácticas (en términos de la ID) las cuales guíen en forma global los diseños de intervención para el aula.

Aunado a esto, se proponen dos momentos importantes de construcción social de la STF: 1) el estudio de fenómenos estacionarios y 2) la representación de una función arbitraria en serie trigonométrica, esto en contra de la enseñanza usual. Puesto que, se suele privilegiar el segundo momento sin atender al primero, lo que provoca carencia de significados a partir de los contextos de uso.

Como indican (BELTRÁN; MONTIEL, 2015), ante un análisis socioepistemológico de este tipo, lo que sigue es diseñar situaciones bajo esta fundamentación para contrastar el análisis presentado con los datos empíricos, esto permitirá validar, mejorar y fortalecer el esquema de prácticas anidadas preliminar para la STF, pues como modelo de construcción social de este conocimiento será fundamental para el diseño de situaciones que se preocupen por significar a la serie en diferentes marcos de referencia, lo que permitirá acercar la teoría a la práctica, propósito muy importante para la investigación en Matemática Educativa.

Agradecimientos

Fabián W. Romero quiere agradecer a la Universidad de Costa Rica por su apoyo para la realización de esta investigación.

Referencias

ALBERT, J. A. **La convergencia de series en el nivel superior:** Una aproximación sistémica. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. D.F., México, 1996.

ARTIGUE, M. Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?. Revista **Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v.1, n.1, p.40-55, 1998a.

ARTIGUE, M. L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v.18, n.2, p.231-262, 1998b.

BELTRÁN, M.; MONTIEL, G. La modelación en el desarrollo del pensamiento funcional-trigonométrico en estudiantes mexicanas de nivel medio superior. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v.19, n.3, p.255-286, 2016.

CANTORAL, R. **Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.** Barcelona, España: Editorial Gedisa S.A., 2013.

CANTORAL, R.; FARFÁN, R.; LEZAMA, J.; MARTÍNEZ-SIERRA, G. Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, V.9, n.4, p.83-102, 2006.

FARFÁN, R. M. **Socioepistemología y ciencia:** El caso del estado estacionario y su matematización. 1. ed. Barcelona, España: Editorial Gedisa S. A., 2012.

FOURIER, J. **Théorie analytique de la chaleur.** París: Chez Firmin Didot, père et fils, 1822.

MARMOLEJO, R. Estudio de la noción de estado estacionario en el ámbito fenomenológico de la transferencia de calor. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. D.F., México, 2006.

MONTIEL, G. **Construcción de conocimiento trigonométrico:** Un estudio socioepistemológico. México: Diaz de Santos, 2011.

MORALES, F. **Acerca de la actividad de modelación: las temperaturas de la tierra**. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. D.F., México, 2003.

MORALES, F. **Causas y efectos de la ambigüedad en el tratamiento didáctico de la noción de calor: una caracterización del pensamiento fisicomatemático**. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. D.F., México, 2010.

MORENO, J. A. **Estudio de la noción de convergencia de series trigonométricas en un ambiente de simulación.** Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. D.F., México, 1999.

MURO, C. **Significación de la serie de Fourier en el contexto del proceso de transferencia de masa.** Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Hidalgo, México, 2000.

MURO, C. **Análisis del conocimiento del estudiante relativo al campo conceptual de la serie de Fourier en el contexto de un fenómeno de transferencia de masa**. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México, 2004.

REYES, D. **Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica**: estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. D.F., México. 2011.

RODRÍGUEZ, M. **Una matemática funcional para el ingeniero:** la serie trigonométrica de Fourier. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. D.F., México, 2009.

ROMERO, F. **Construcción social de la serie trigonométrica de Fourier:** pautas para un diseño de intervención en el aula. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. D.F., México, 2016.

SOTO, D. **El discurso matemática escolar y la exclusión:** una visión socioepistemológica. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. D.F., México, 2010.

ULÍN, C. **Análisis histórico-crítico de la difusión de calor: el trabajo de Fourier.** Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. D.F., México, 1984.

VÁSQUEZ, R. **Sobre el papel de la hipótesis de periodicidad en las series de Fourier.** Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. D.F., México, 2006.

Submetido em agosto de 2017

Aprovado em novembro de 2017