105 - A APRENDIZAGEM DOS CONCEITOS DE ACONTECIMENTOS DISJUNTOS E COMPLEMENTARES COM RECURSO AO GEOGEBRA

Guillermo Ramírez-Montes; Ana Henriques[2]

[1] Universidad de Costa Rica; [2] Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
[1]grm1905@gmail.com; [2]achenriques@ie.ulisboa.pt

Resumo

Nesta comunicação, apresentamos os resultados de um estudo que visa compreender como alunos costarriquenhos do 10.º ano aprendem conceitos básicos de Probabilidade, no âmbito de uma experiência de ensino apoiada em tarefas exploratórias com recurso à simulação no Geogebra. Analisamos, em particular, as aprendizagens evidenciadas pelos alunos na resolução de uma tarefa que envolve os conceitos de acontecimentos disjuntos e complementares e os contributos do GeoGebra para essas aprendizagens. O estudo, de natureza qualitativa e interpretativa, teve por base os dados recolhidos através da observação participante, das resoluções escritas dos alunos da tarefa e de um questionário aplicado aos alunos no final da experiência de ensino. Os resultados evidenciam que o trabalho em torno da tarefa exploratória promoveu a aprendizagem dos alunos destes conceitos, ajudando-os a inferirem algumas propriedades de probabilidades associadas aos acontecimentos disjuntos e complementares. Ainda assim, o conceito de acontecimentos complementares revelou-se difícil para os alunos que, no final da experiência de ensino, mantêm algumas dificuldades. O Geogebra permitiu a visualização de representações dos conceitos e a sua exploração dinâmica, facilitando a inferência das referidas propriedades e motivando os alunos.

Palavras chave: acontecimentos disjuntos, acontecimentos complementares, tarefas exploratórias, Geogebra, simulação.

Abstract

In this paper, we present the results of a study aiming to understand how Costa Rican 10th grade students learn basic concepts of Probability, in a context of a teaching experiment based on exploratory tasks using Geogebra for simulation. We analyze, in particular, the students' learning when solving a task that involves the concepts of disjoint and complementary events and the contributions of GeoGebra to those learnings. The study, of a qualitative and interpretive nature, was based on data collected through participant observation, the students' written work on the task and a questionnaire applied to the students at the end of the teaching experiment. The results show that the work around the exploratory task promoted the students' learning of these concepts, helping them to infer some properties of probabilities associated to disjoint and complementary events. Yet, the concept of complementary events has proved to be difficult for students who, at the end of the teaching experiment, still showed some difficulties. The Geogebra allowed the visualization of representations of the concepts and the dynamic exploration of them, facilitating the inference of the referred properties and motivating the students.

Keywords: Disjoint events, complementary events, exploratory tasks, Geogebra, simulation.

INTRODUÇÃO

Um dos tópicos matemáticos que nos últimos anos tem vindo a ganhar relevância nas orientações curriculares, passando a constar nos currículos de diversos países, é a Probabilidade (Franklin et al., 2007; MEP, 2012). Assim, países como a Costa Rica com reformas recentes no seu currículo, procuram dar uma maior saliência à Probabilidade, considerando-a no Programa de Matemática proposto pelo Ministério de Educação Publica (MEP) como um tema que deve ser ensinado desde os primeiros anos de escolaridade e, junto com a Estatística, é vista como “parte obrigatória dos conhecimentos que o cidadão deve ter” (MEP, 2012, p.15).

A experiência partilhada dos professores tem revelado que os alunos chegam ao último nível do ensino secundário revelando incompreensão e um conhecimento incompleto de vários conceitos probabilísticos, entre os quais estão os conceitos de acontecimentos disjuntos e complementares. Mesmo os alunos que mostram conhecer a definição destes conceitos, frequentemente não a sabem aplicar na resolução de problemas que os envolvem no cálculo de probabilidades. Estas dificuldades são atribuídas, comummente, à forma tradicional de abordar os conceitos probabilísticos. Na prática, o ensino da Probabilidade tem permitido pouco o protagonismo e a interação dos alunos na sala de aula por ser frequentemente focado na memorização de fórmulas e procedimentos que não promovem a compreensão dos conceitos, dificultando também o desenvolvimento de capacidades como a inferência de propriedades (Chaves, 2016; Santos & Mota, 2009). Para além disso, a falta de contextualização dos conceitos em temas que sejam de interesse para o aluno também é salientada na literatura (Munisamy & Doraisamy, 1998).

Para enfrentar tal situação, têm sido sugeridas mudanças no processo de ensino e aprendizagem que contemplem a integração das TIC (Tecnologias da Informação e Comunicação). De particular importância é a utilização da simulação recorrendo a software educativo de Matemática, permitindo diminuir o tempo de trabalho (Bielher, 2003; Erickson, 2006) e a exploração de conceitos probabilísticos pelos alunos (Erickson, 2006; Fernandes, Batanero, Contreras, & Diaz, 2009; Mercado, 2013). A simulação com o Geogebra surge, assim, como um recurso que ajuda o aluno na construção do seu próprio conhecimento ao permitir-lhe a visualização de diferentes representações associadas ao conceito (Inzunza, 2014).

Este estudo orienta-se, assim, a contribuir para aprofundar o conhecimento no campo da educação probabilística, no que respeita às aprendizagens dos alunos, quando novas abordagens de ensino, com recurso às tecnologias e que estimulem a autonomia e a participação mais efetiva dos alunos, são implementadas em sala de aula. O seu objetivo é analisar as aprendizagens evidenciadas por alunos costarriquenhos do 10º ano ao trabalharem numa tarefa de exploração orientada para o estudo dos conceitos probabilísticos de acontecimentos disjuntos e complementares, com o Geogebra. Pretende-se também identificar os contributos do Geogebra, como recurso, para a aprendizagem destes conceitos num ambiente de simulação.

A APRENDIZAGEM DA PROBABILIDADE E DOS CONCEITOS DE ACONTECIMENTOS DISJUNTOS E COMPLEMENTARES

2.1 Ensino e aprendizagem da Probabilidade

As constantes mudanças da sociedade exigem que também sejam feitas alterações ao nível no currículo de Matemática. Como parte destas exigências, salienta-se a formação de cidadãos capazes de compreender, interpretar e analisar dados estocásticos (MEP, 2012).

As orientações curriculares internacionais, como as normas do NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), destacam a Análise de Dados e a Probabilidade como um dos cinco temas pilares do currículo em Educação Matemática (Franklin et al., 2007). Por seu lado, o programa de Matemática da Costa Rica (MEP, 2012) também salienta que o ensino de Matemática deve permitir aos alunos identificarem, recolherem e interpretarem informação necessária para a resolução de tarefas estocásticas, apoiando-se no uso da simulação e modelação de situações do seu contexto quotidiano. Em particular, o programa outorga um papel de relevo à Probabilidade, mencionando que esta deve ser tratada desde os primeiros anos da Educação Básica, aumentando o grau de abstração dos conceitos à medida que se avança nos níveis de ensino e sugerindo o uso de tecnologias que permitam uma aproximação à realidade que enquadra o conceito probabilístico (MEP, 2012).

Autores como Batanero (2006), defendem que a Probabilidade tem que ser incluída na educação obrigatória dos indivíduos por duas razões: 1) por ser um tópico da Matemática e usado em muitas outras disciplinas; e 2) por estar presente na vida quotidiana dos cidadãos quando enfrentam fenómenos aleatórios. Apesar da importância conferida ao ensino da Probabilidade, a literatura menciona diversas dificuldades que se identificam na aprendizagem de conceitos probabilísticos: 1) dificuldades no tratamento formal da Probabilidade (Inzunza, 2014); 2) dificuldade na utilização de termos probabilísticos com sentidos quotidianos ou intuitivos (Groth et al., 2016; Ortiz et al.,2001); e 3) dificuldades na compreensão dos conceitos probabilísticos (Munisamy & Doraisamy, 1998).

2.2 O Geogebra na aprendizagem da Probabilidade

Perante as dificuldades evidenciadas pelos alunos nos conceitos probabilísticos, diversos investigadores em Educação Matemática procuram estudar o impacte da utilização das TIC na sala de aula de Matemática. Em particular, o uso do Geogebra para simulação tem sido objeto de investigação nos últimos anos, com foco no seu contributo para o ensino e aprendizagem de conceitos probabilísticos como probabilidade frequêncial, probabilidade condicional e distribuições de frequência (Inzunza, 2014; Mercado, 2013).

Autores como Bielher (2003) e Erickson (2006) também destacam que a simulação com computador promove a exploração de conceitos, o dinamismo da turma e a análise de dados. Especificamente no que respeita à Probabilidade, estes autores referem que a simulação ajuda a fazer muitas repetições de uma experiência aleatória, tanto simples como composta, num curto espaço de tempo, permitindo que o aluno se foque na interpretação dos resultados em vez dos cálculos que existem por meio. Biehler (2003) e Inzunza (2014) enfatizam, ainda, a simulação como meio para fomentar a inferência de propriedades probabilísticas, pois através de programas como o Geogebra, a simulação converte-se num meio dinâmico para que o aluno possa observar distintas representações do conceito, permitindo-lhe estabelecer relações entre elas (Franklin et al., 2007; Inzunza, 2014).

As ferramentas que o Geogebra dispõe, como os seletores, botões, folha de cálculo e folha gráfica, permitem ao aluno realizar variações dos dados de entrada para obter diferentes simulações e, portanto, observar diversas representações do conceito probabilístico e identificar relações entre os resultados associados ao conceito (Inzunza, 2014). Um exemplo, é a simulação da experiência do lançamento dum dado para o estudo do conceito de lei dos grandes números (figura 1).

Figura 1. Simulação do lançamento de um dado para inferir a Lei dos grandes números, no Geogebra (Inzunza, 2014, p. 8).

Na figura anterior, olhando para a folha gráfica, pode-se apreciar que à medida que o número de ensaios do lançamento do dado (eixo X) aumenta, as frequências correspondentes aos acontecimentos simples (obter um número específico entre 1 e 6, eixo Y) vão-se estabilizando.

2.3 Inferência de propriedades probabilísticas associadas aos conceitos de acontecimentos disjuntos e complementares

Autores como Oliveira (1990) fazem referência à definição formal de probabilidade, aludindo a esta como uma função que deve cumprir certos axiomas:

1. $P(A) \geq 0$; A: acontecimento qualquer.
2. $P(U) = 1$; U: espaço amostral.
3. Se $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Neste tratamento formal do conceito de probabilidade aparecem implícitos os conceitos de acontecimentos disjuntos e complementares, pois o axioma 3 define o que se entende por acontecimentos disjuntos, enquanto o axioma 2 junto com o axioma 3 definem o que se entende por acontecimentos complementares no caso de se ter também $A \cup B = U$.

No que se refere a dificuldades associadas a estes conceitos, pouco tem sido investigado, pois as investigações em Probabilidade a nível do ensino secundário têm estado orientadas para a compreensão intuitiva dos conceitos probabilísticos e para o estudo da probabilidade condicionada (Díaz & de la Fuente, 2007). Escassas investigações como a investigação de Munisamy e Doraisamy (1998) mencionam explicitamente os conceitos de acontecimentos disjuntos e complementares. Estes autores realizam um estudo com alunos de idades compreendidas entre 12 e 15 anos, identificando que estes apresentam dificuldades em: 1) compreender o conceito da lei aditiva de probabilidades, isto é, inferir a propriedade; 2) aplicar a lei aditiva ao cálculo de probabilidades de acontecimentos; e 3) compreender o conceito de acontecimentos complementares.

Neste sentido, os diagramas podem ajudar a superar estas dificuldades de intuição e inferência, em particular, os diagramas de Venn, pois permitem trabalhar com representações de acontecimentos que simplificam a análise probabilística, reduzindo a dependência das fórmulas e facilitando a identificação de relações entre elementos associados ao conceito (MEP, 2012). Assim, por exemplo, Mercado (2013) utiliza diagramas de Venn para trabalhar a exploração de propriedades probabilísticas, tal como mostra a figura 2. Neste caso, a partir de variações nos dados de entrada, $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$, ajustam-se imediatamente os valores das outras probabilidades como são as probabilidades condicionais de acontecimentos definidos a partir dos acontecimentos A e B.

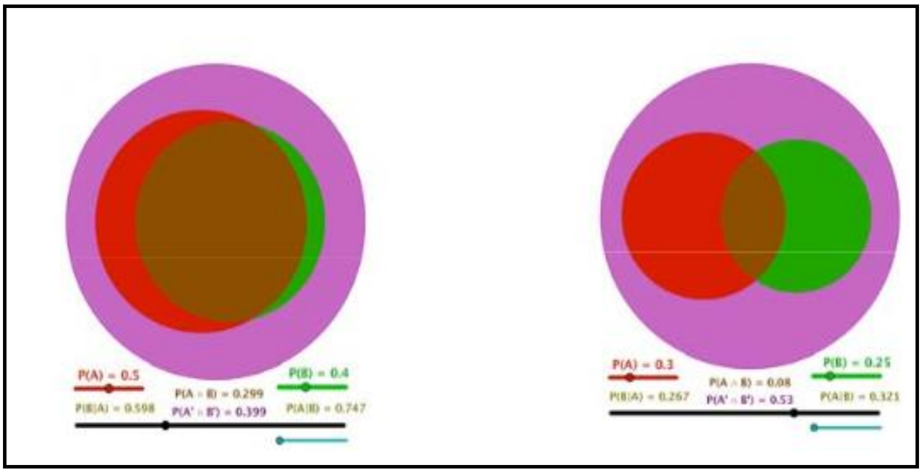


Figura 2. Diagrama de Venn e exploração de propriedades de probabilidade (Mercado, 2013, p. 312).

METODOLOGIA

Este estudo é parte de uma investigação mais alargada que teve por base a realização de uma experiência de ensino, apoiada numa sequência de 5 tarefas exploratórias com recurso ao Geogebra, visando a aprendizagem de conceitos básicos de Probabilidade presentes no atual programa de Matemática da Costa Rica (MEP, 2012). A experiência foi realizada no ano letivo de 2016/17 com 28 alunos (14 raparigas e 14 rapazes) de uma turma de 10.º ano de uma escola secundária localizada perto de San José, capital da Costa Rica. O investigador (primeiro autor desta comunicação) assumiu o papel de professor da turma na lecionação das 5 aulas de 90 minutos onde foram aplicadas as tarefas. Estas aulas seguiram uma estrutura de ensino exploratório (Canavarro, 2011): apresentação da tarefa aos alunos; trabalho autónomo dos alunos, em pares, na realização da tarefa com o Geogebra; discussão coletiva das resoluções dos alunos mediada pelo Geogebra; e síntese das aprendizagens com formalização dos conceitos, pelo professor.

Nesta comunicação apresentamos os resultados respeitantes ao trabalho desenvolvido pelos alunos na resolução da quarta tarefa da sequência que foi implementada na experiencia de ensino. Esta tarefa visa introduzir os conceitos de acontecimentos disjuntos e complementares e inferir relações matemáticas de igualdade de probabilidades associadas a estes acontecimentos, como sejam as propriedades da união e complemento para dois acontecimentos disjuntos ou não disjuntos. Na primeira parte da tarefa, os alunos, dispondo de um computador por par, simularam numa applet disponibilizada pelo professor num ficheiro de Geogebra, diferentes posições relativas de dois acontecimentos através da sua representação em 'Diagramas de Venn' (figura 3).

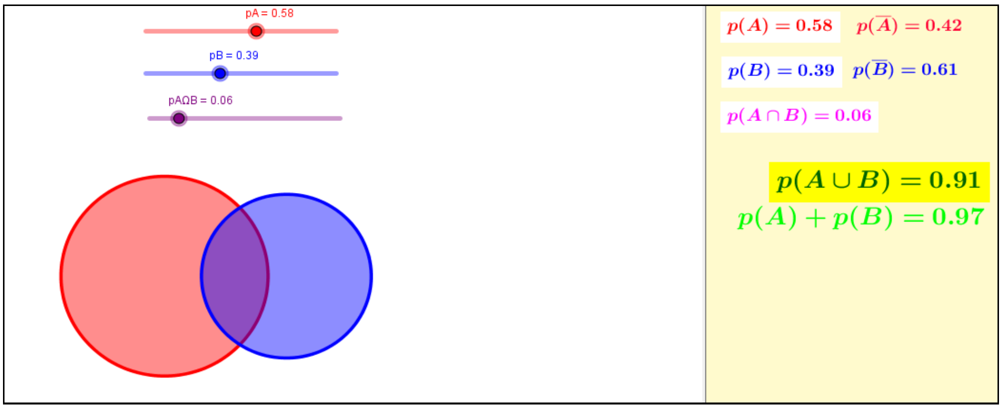


Figura 3. Applet do Geogebra disponibilizado para trabalhar na tarefa

Os alunos realizaram as simulações que consideraram necessárias, registando numa tabela os dados correspondentes a probabilidades associadas aos acontecimentos (figura 4).

Probabilidad	Eventos disjuntos	Eventos NO disjuntos
$P(A)$		
$P(\bar{A})$		
$P(B)$		
$P(\bar{B})$		
$P(A)+P(B)$		
$P(A \cup B)$		

Figura 4. Tabela de registo de dados

Assim, à medida que as posições relativas dos acontecimentos mudavam também se observavam alterações nas probabilidades associadas à união e interseção dos acontecimentos, orientando os alunos para a exploração dos conceitos e a estabelecerem conexões entre a representação gráfica e a representação simbólica da probabilidade de acontecimentos com os dados registados na tabela.

Na segunda parte da tarefa os alunos trabalham sem o Geogebra, sendo convidados a construir um 'Diagrama de Venn' a partir da informação disponibilizada num problema sobre a frequência de realização de exercício físico. A partir da construção deste diagrama foram solicitados aos alunos alguns cálculos de probabilidade esperando que eles se baseassem neles para reconhecerem e justificarem quando é que dois acontecimentos são disjuntos e/ou complementares.

O estudo segue uma metodologia qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), tendo os dados sido recolhidos a partir das resoluções escritas dos alunos na tarefa proposta e numa tarefa de avaliação final, das suas respostas a um questionário final sobre a experiência de ensino e de registos da atividade dos alunos no computador com o Geogebra. A análise dos dados, descritiva e interpretativa (Wolcott, 2009), centra-se em identificar as aprendizagens e dificuldades evidenciadas pelos alunos quanto aos conceitos de acontecimentos disjuntos e complementares e propriedades matemáticas de igualdade de probabilidades associadas a estes acontecimentos. Nessa análise procuramos também identificar os contributos do Geogebra para a aprendizagem destes conceitos probabilísticos.

Na secção seguinte apresentamos alguns excertos do trabalho realizado pelos alunos, cujos nomes são fictícios, que foram escolhidos a fim de evidenciar a diversidade de resultados que emergiram da análise.

RESULTADOS

A análise permitiu observar que todos os alunos são capazes de identificar os conceitos de acontecimentos disjuntos e complementares, e inferir propriedades que lhes estão associadas, como evidencia a resolução de António e Marcos nas figuras 5 a 7.

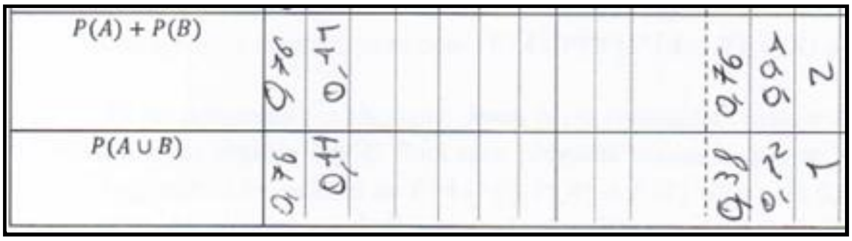
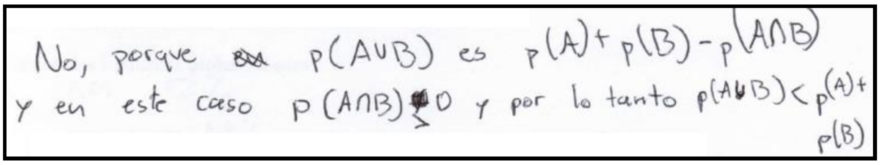


Figura 5. Resolução de António e Marcos. Tabela de registo de dados



[não, porque $P(A \cup B)$ é $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ e neste caso $P(A \cap B) > 0$ e portanto $P(A \cup B) < P(A) + P(B)$]

Figura 6. Resolução de António e Marcos (questão 3b)

Figura 7. Simulação de António e Marcos para acontecimentos não disjuntos.

Na tabela (figura 5) observamos do lado esquerdo os dados registados para acontecimentos disjuntos e do lado direito os dados registados para acontecimentos não disjuntos. António e Marcos, depois de fazerem duas simulações, concluem que quando os acontecimentos são disjuntos verifica-se a igualdade entre as probabilidades $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Para além disso, no caso de os acontecimentos não serem disjuntos, evidencia-se pela tabela que eles precisaram de mais simulações para identificar uma relação entre as probabilidades mas chegam a inferir que a igualdade $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ não se cumpre neste caso (figura 6) mas que $P(A \cup B)= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Os alunos ainda justificam que não se cumpre a igualdade $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ por termos $P(A \cap B) > 0$ (figura 6). António e Marcos tiram partido de ambas as representações (gráfica e simbólica) proporcionadas pela simulação no Geogebra, observando que no caso onde existe interseção entre os acontecimentos A e B, a soma $P(A) + P(B)$ permanecerá constante independentemente do valor de $P(A \cap B)$ mas que o valor de $P(A \cup B)$ vai variar conforme o valor $P(A \cap B)$, chegando por exploração dos dados da tabela à igualdade que se pretendia.

Outros alunos, como Tiago e Simão (figura 8), inferem a mesma propriedade baseando a sua inferência numa análise gráfica após a simulação com o Geogebra.

No, porque cuando hacemos $p(A \cup B)$ se cuenta solo una vez la intersección $p(A \cap B)$. mientras que $p(A)+p(B)$ se cuenta la probabilidad de $p(A \cup B)+p(A \cap B)$

[não, porque quando fazemos $P(A \cup B)$ só se conta uma vez a interseção $P(A \cap B)$, enquanto que $P(A) + P(B)$ se considera as probabilidades de $P(A \cup B) + P(A \cap B)$]

Figura 8. Resolução de Tiago e Simão (questão 3b)

Tiago e Simão afirmam que no caso de os acontecimentos A e B não serem disjuntos, o valor de $P(A) + P(B)$ considera $P(A \cap B)$ duas vezes em relação ao valor $P(A \cup B)$ pois $P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$ e $P(B) = P(A \cap B) + P(B - A)$, enquanto $P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A - B) + P(B - A)$.

No caso da exploração de acontecimentos complementares, todos os alunos chegaram à igualdade $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ sem dificuldades, tal como evidenciam a resolução de Laura e Johan da tarefa (figura 9) e as imagens do seu trabalho de simulação com o Geogebra (figura 10).

$P(\bar{A})$ y $P(\bar{B})$ van a ser lo que le falta a $P(A)$ y $P(B)$ respectivamente para ser 1

[$P(\bar{A})$ y $P(\bar{B})$ vão ser o que falta a $P(A)$ e $P(B)$ respetivamente para ser 1]

Figura 9. Resolução de Laura e Johan (questão 3c)

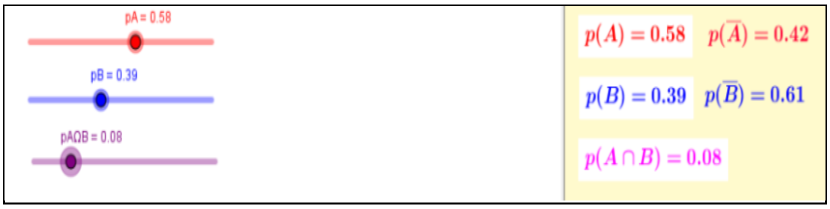
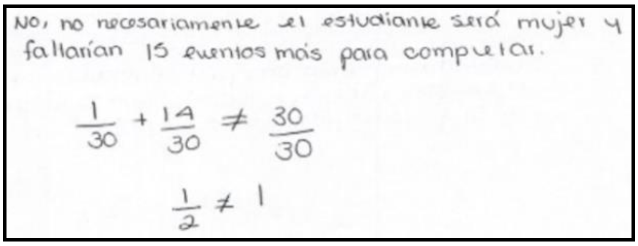


Figura 10. Simulação de Laura e Johan para acontecimentos complementares.

Das imagens anteriores pode interpretar-se que Laura e Johan apoiam-se nas representações simbólicas do lado direito da simulação (figura 10) para concluir que a soma das probabilidades de qualquer acontecimento e o seu complementar deve ser igual a 1 (figura 9), observando na resolução da tarefa que "a probabilidade não muda por serem ou não disjuntos".

Na segunda parte da tarefa os alunos foram convidados a aplicar os conhecimentos adquiridos na exploração da sua primeira parte, tendo sido capazes de resolver corretamente as questões em que tinham que desenhar um diagrama de Venn e identificar acontecimentos disjuntos e complementares. Os resultados evidenciam que embora alguns alunos recorram à definição de acontecimentos disjuntos e complementares para justificar a sua classificação, outros como Ana e Dádiva (figura 11) recorrem às propriedades de probabilidades trabalhadas na primeira parte da tarefa.



[não, o estudante não será necessariamente mulher, e faltariam 15 acontecimentos mais para completar]

Figura 11. Resolução de Ana e Dádiva (questão 4c).

Da resolução anterior pode-se interpretar que as alunas reconhecem que não se verifica a igualdade $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, pelo que as probabilidades de $\frac{1}{30}$ e $\frac{14}{30}$ não podem corresponder a acontecimentos complementares.

O teste de avaliação permitiu evidenciar que alguns alunos ainda têm dificuldades na compreensão do conceito de acontecimentos complementares, nomeadamente quando um acontecimento é subconjunto do outro. É o caso de Pedro, como se pode observar da sua resolução na figura 12, ao considerar que sendo Z subconjunto de A, isso é suficiente para estabelecer que são acontecimentos complementares. Da sua resposta podemos inferir que para Pedro o significado de acontecimentos complementares está associado a um conceito intuitivo de que qualquer subconjunto (as partes) complementa o conjunto que o contém (o todo).

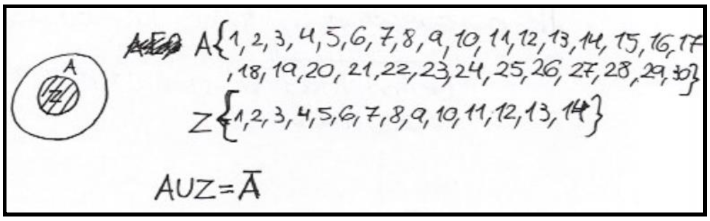
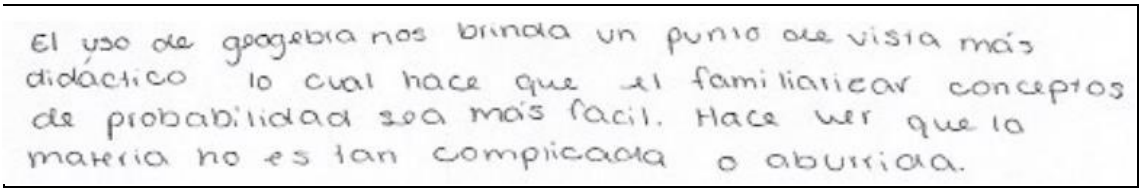


Figura 12. Resolução de Pedro (questão 1, teste de avaliação)

Finalmente, da aplicação do questionário, identificamos alguns comentários dos alunos respeitantes à sua aprendizagem dos conceitos trabalhados durante a experiência de ensino com tarefas apoiadas no Geogebra, que vêm confirmar o que as resoluções apresentadas acima evidenciam. Um dos alunos (os questionários são anónimos), referindo-se a esta tarefa, salienta que uma das vantagens do Geogebra é "a habilidade de olhar para a Probabilidade em diferentes escalas", isto é, a possibilidade de estudar a Probabilidade utilizando diferentes representações, como a gráfica e simbólica, simultaneamente. Para além disso, os alunos enfatizam que o trabalho com tarefas exploratórias os motivou e, em particular, o Geogebra os ajudou a trabalhar conceitos matemáticos de Probabilidade, como mostra o comentário a seguir dum dos alunos no preenchimento do questionário.


El uso de geogebra nos brinda un punto de vista más didáctico lo cual hace que el familiarizar conceptos de probabilidad sea más fácil. Hace ver que la materia no es tan complicada o aburrida.

[O uso do Geogebra oferece um ponto de vista mais didático, que facilita a familiarização com conceitos de Probabilidade. Faz ver que a matéria não é tão complicada ou aborrecida]

Figura 13. Resposta de aluno sobre vantagem do Geogebra na resolução da tarefa (questão 1, III parte do questionário)

Desta resposta pode-se interpretar que o aluno via a Probabilidade como um tópico "complicado e aborrecido", possivelmente devido ao formalismo com que a tem trabalhado na sala de aula, mas o trabalho com o Geogebra motivou-o e facilitou-lhe a compreensão dos conceitos de Probabilidade.

CONCLUSÕES

Os resultados evidenciam que o trabalho com tarefas exploratórias motivou os alunos no seu trabalho com conceitos probabilísticos. Em particular, o trabalho com tarefas apoiadas no Geogebra tornou-se mais rápido na simulação de várias experiências (Erickson, 2006).

Quanto às aprendizagens, os alunos revelaram ser capazes de inferir as propriedades de probabilidades associadas à união de dois acontecimentos e a acontecimentos complementares, embora alguns revelem dificuldade em compreender este último conceito, tal como referem Munisamy e Doraisamy (1998) no seu estudo.

A utilização do recurso de simulação no Geogebra favoreceu a exploração de relações entre os dados disponibilizados nas diversas representações utilizadas na simulação com o Geogebra, confirmando o que Inzunza (2014) observou, facilitando a inferência das propriedades probabilísticas de acontecimentos disjuntos e complementares.

Desta forma, resulta pertinente o uso em sala de aula de metodologias de simulação com o Geogebra para trabalhar os conceitos de Probabilidade, como sugerido em Inzunza (2014) e MEP (2012), e em particular para a aprendizagem de propriedades probabilísticas que são comummente fornecidas aos alunos para memorizar em vez de se promover a sua inferência.

Este estudo pode fornecer, assim, um referencial para professores trabalharem os conceitos de acontecimentos disjuntos e complementares, concordando no entanto com Díaz e de la Fuente (2007) sobre a necessidade de mais estudos focados no tratamento destes conceitos probabilísticos, quer com o Geogebra quer com outros software educativos.

AGRADECIMENTOS

Trabalho financiado pela bolsa OAICE-CAB-08-125-2016 atribuída pela Universidade da Costa Rica ao primeiro autor para a realização do seu mestrado.

Este estudo foi realizado no âmbito do Projeto *Technology Enhanced Learning at Future Teacher Education Lab*, financiado por fundos nacionais pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia (contrato PTDC/MHC-CED/0588/2014).

REFERÊNCIAS

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. In P. Flores & J. Lupiañez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar* [CD-ROM]. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales.

Biehler, R. (2003). Interrelated learning and working environments for supporting the use of computer tools in introductory classes. In L. Weldon & J. Engel (Eds.), *Proceedings of IASE Conference on Teaching Statistics and the Internet*. Berlin [CD-ROM]. Voorburg, The Netherlands: IASE.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11-17.

Chaves, E. (2016). La enseñanza de la Estadística y la probabilidad, más allá de procedimientos y técnicas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *15*, 21-31.

Díaz, C. & de la Fuente, I. (2007). Dificultades en la resolución de problemas que involucran el Teorema de Bayes. Un estudio exploratorio en estudiantes de psicología*. Educación Matemática, 18* (2), 75-94.

Erickson, T. (2006). Using simulation to learn about inference. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the 7th International Conference on Teaching Statistics* (pp. 2-7). Voorburg, The Netherlands: International Statistics Institute.

Fernandes, J. A., Batanero, C., Contreras, J. M., & Díaz, C. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: Potencialidades e limitações. *Quadrante, XVIII* (1), 161-183.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Schaeffer, R. (2007). *The GAISE* (*Guidelines for assessment and instruction in statistics education) report: A pre-K-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association.

Groth, R. E., Butler, J., & Nelson, D. (2016). Overcoming challenges in learning probability vocabulary. *Teaching Statistics*, *38*(3), 102-107.

Inzunza, S. (2014). Geogebra: Una herramienta cognitiva para la enseñanza de la probabilidad. In J. Asenjo, O. Macías, & J. C. Toscano (Eds.), *Actas do Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación* (pp. 141-146). Buenos Aires: OEI.

Mercado, M. (2013). Exploración de conceptos de probabilidad con Geogebra. In J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea, & P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 309-317). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Ministerio de Educación Publica. (2012). *Programas de Estudio de Matemática.* San José, Costa Rica: autor. Disponível em http://www.mep.go.cr

Munisamy, S., & Doraisamy, L. (1998). Levels of understanding of probability concepts among secondary school pupils. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 29*(1), 39-45. DOI: 10.1080/0020739980290104

Oliveira, J. T. (1990). *Probabilidades e Estatística: conceitos, métodos e aplicações*. Lisboa: McGraw-Hill.

Ortiz, J. J., Batanero, C., & Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma*, *38*, 5-14.

Santos J. A., & Moita, F. M. (2009, agosto). Objetos de Aprendizagem e o Ensino de Matemática: Análise de sua importância na aprendizagem de conceitos de probabilidade. Trabalho apresentado no *2° Encontro regional de educação matemática* –EREM, Rio Grande do Norte, Brasil.

Wolcott, H. (2009). *Writing up qualitative research* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: SAGE.