Los grupos clásicos y su clasificación

Joseph C. Várilly

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

10 de agosto del 2011

Los grupos de transformaciones, en la terminología de Sophus Lie (1890), son grupos parametrizados por un juego finito de números reales [1]. En muchos casos, sus elementos son transformaciones lineales de un espacio vectorial —es decir, forman *grupos de matrices*. Además, dichos elementos pueden dejar invariante una forma de volumen, o bien una forma bilineal sobre el espacio vectorial. Estos grupos matriciales se llaman **grupos clásicos**.

Un ejemplo sencillo es el grupo $\mathrm{SO}(2)$ de *rotaciones* del plano $\mathbb{R}^2$. Se requiere un sólo parámetro, el ángulo θ de la rotación. Como transformación lineal de $\mathbb{R}^2$, la rotación $g(\theta)$ es una matriz real 2×2:

$$g(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

El grupo $\mathrm{SO}(3)$ de rotaciones de $\mathbb{R}^3$ requiere tres parámetros angulares. Estos podrían ser, por ejemplo, las coordenadas esféricos (θ, ϕ) del eje de la rotación, junto con el angúlo ψ de giro en torno a este eje. Los elementos de $\mathrm{SO}(3)$ son matrices reales 3×3.

Estas parametrizaciones dan lugar a una definición más abstracta de un **grupo de Lie**: es un grupo que es a su vez una variedad diferencial, en donde las operaciones de grupo $(g,h) \mapsto gh$ y $g \mapsto g^{-1}$ son funciones diferenciales (y además, analíticas). En un grupo de Lie G, un vecindario suficientemente pequeño de la identidad 1 es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$, donde n es la dimensión (real) de la variedad. El espacio tangente en 1 es un espacio vectorial real $\mathfrak{g}$, dotado de una operación bilineal antisimétrica, el *corchete de Lie*, la cual es trivial si el grupo es abeliano: esta $\mathfrak{g}$ es el **álgebra de Lie** del grupo.

La estructura de un grupo de Lie entonces depende de dos aspectos:

estructura local: las propiedades algebraicas del álgebra de Lie; y

estructura global: aspectos topológicos de la variedad del grupo.

Por ejemplo, $\mathrm{SO}(2)$ tiene álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2)$, con elementos

$$X = \theta J = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{para} \quad \theta \in \mathbb{R},$$

y corchete trivial: $[X,Y] \equiv XY - YX = 0$. Topologícamente, $\mathrm{SO}(2)$ es *conexo* y *compacto*: de hecho, es homeomorfo al círculo $\mathbb{S}^1 = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\,\}$ mediante $g(\theta) \leftrightarrow (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

Hay una *aplicación exponencial* $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$, dado por la serie de Taylor de e^x para grupos matriciales. En el caso de $\mathrm{SO}(2)$, fíjese que

$$g(\theta) = \exp(\theta J) = 1 + \theta J + \mathrm{O}(\theta^2).$$

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ no abeliano[1] es **simple** si no posee un *ideal* propio (un subespacio $\mathfrak{h}$ tal que $[X,Y] \in \mathfrak{h}$ todo vez que $Y \in \mathfrak{h}$, $X \in \mathfrak{g}$). Dícese que $\mathfrak{g}$ es **semisimple** si es una suma directa de ideales simples. (Las mismas palabras se aplican, de modo levemente incorrecto, a los grupos de Lie correspondientes.)

Además de $\mathbb{R}$ como cuerpo de base, se puede considerar el cuerpo complejo $\mathbb{C}$ y el “cuerpo no conmutativo” $\mathbb{H}$ de los **cuaterniones**:

$$\mathbb{H} = \{\, t_0 + t_1\, i + t_2\, j + t_3\, k : t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \,\} = \{\, z_0 + z_1\, j : z_0, z_1 \in \mathbb{C} \,\},$$

donde $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; $ij = k = -ji$. Como espacios vectoriales reales, $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$. (También hay un álgebra de división $\mathbb{O} \simeq \mathbb{R}^8$, no asociativa — los *octoniones* [2] — que no es relevante para los grupos clásicos.)

1 Grupos complejos de matrices y sus formas reales

En lo sucesivo, $\mathbb{F}$ puede ser $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$.

El **grupo general lineal** $\underline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})} \equiv \underline{\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})}$ consta de todas las matrices *invertibles* $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$. Si $A \in M_n(\mathbb{F})$ es una matriz $n \times n$ cualquiera, se sabe que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ si y sólo si $\underline{\det A \neq 0}$.

Su álgebra del Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ es el espacio vectorial $M_n(\mathbb{F})$ con el corchete $[X,Y] := XY - YX$. Tiene un ideal abeliano: los múltiplos de la matriz identidad 1_n; luego $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ no es simple, sino que $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) = \mathbb{F}\,1_n \oplus \mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})$, donde

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F}) := \{\, X \in M_n(\mathbb{F}) : \underline{\operatorname{tr} X = 0} \,\}.$$

Esta es un álgebra de Lie *simple*. Le corresponde el **grupo especial lineal**,

$$\underline{\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})} \equiv \underline{\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})} := \{\, A \in M_n(\mathbb{F}) : \underline{\det A = 1} \,\}.$$

La fórmula $\det(\exp X) = e^{\operatorname{tr} X}$ muestra que $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})$ es el álgebra de Lie de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$.

[1] Un álgebra de Lie es **abeliano** si su corchete es trivial: $[X,Y] = 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.

El grupo $\mathrm{SL}(1,\mathbb{F}) = \{1\}$ es trivial; y el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(1,\mathbb{F}) = \{0\}$ es también trivial. En el caso complejo, la *primera serie de Cartan* consta de las álgebras de Lie complejas simples

$$\underline{A_n}: \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C}), \quad \text{para} \quad n = 1,2,3,\dots$$

El álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R})$ es una **forma real** de $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$.

En cuanto a los grupos, hay un grupo complejo simple $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ cuya álgebra de Lie es A_{n-1}. El grupo $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ es una *forma real* de este grupo complejo.

Hay una *conjugación compleja* τ de matrices, $\tau(A) := \overline{A}$, que deja invariante la forma real $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. Otra posibilidad es $\tau(A) := (A^{-1})^*$. En este caso, la forma real consta de matrices *unitarias* con $\det A = 1$. Este grupo es el **grupo especial unitario**,

$$\underline{\mathrm{SU}(n)} := \{\, A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) : \underline{A^* = A^{-1}} \,\}.$$

Este grupo de Lie es *compacto*.

Hay una tercera posibilidad en algunas dimensiones. Si $J \in M_{2n}(\mathbb{C}) \leftrightarrow j\,1_{n_1} \in M_{n+1}(\mathbb{H})$, las matrices invariantes bajo la conjugación $\tau(A) := J\overline{A}J^{-1}$ forman un grupo de Lie llamado $\underline{\mathrm{SU}^*(2n)} \simeq \mathrm{SL}(n,\mathbb{H})$. Esta forma real de $\mathrm{SL}(2n,\mathbb{C})$ *no* es compacto.

Entonces el panorama es el siguiente. Para cada álgebra de Lie complejo simple, hay un grupo de Lie complejo simple, el cual posee varios formas reales. Uno de éstos es un grupo compacto simple, pero hay una o más formas reales no compactas.

2 Formas bilineales simétricas y grupos ortogonales

Si $d\colon \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ es una forma bilineal simétrica, las matrices $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ que preservan d forman un grupo:

$$\{\, A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F}) : \underline{d(Au,Av) = d(u,v)} \text{ para } u,v \in \mathbb{F}^n \,\}.$$

Para la forma bilineal estándar,

$$d(u,v) = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n,$$

el grupo se denota por $\underline{\mathrm{O}(n,\mathbb{F})} = \{\, A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F}) : A^tA = 1_n \,\}$. En el caso real $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, se escribe $\underline{\mathrm{O}(n)} = \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. El grupo $\mathrm{O}(n)$ es *compacto*, ya que $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 = \operatorname{tr}(A^tA) = n$, de modo que $\mathrm{O}(n)$ es homeomorfo a una parte acotada y cerrada de $\mathbb{R}^{n^2}$.

La relación $(\det A)^2 = \det(A^tA) = 1$ implica que $\det A = \pm 1$ para $A \in \mathrm{O}(n)$. El **grupo especial ortogonal** es el subgrupo

$$\underline{\mathrm{SO}(n)} := \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{\, A \in \mathrm{O}(n) : \underline{\det A = 1} \,\}.$$

Este es un grupo semisimple para $n \geq 3$. Su álgebra de Lie es

$$\mathfrak{so}(n) := \{\, X \in M_n(\mathbb{R}) : \underline{X^t = -X},\ \underline{\operatorname{tr} X = 0} \,\}.$$

Fíjese que $(\exp X)^t = \exp X^t = \exp(-X) = (\exp X)^{-1}$ y $\det(\exp X) = e^{\operatorname{tr} X} = e^0 = 1$, de manera que $\exp X \in \mathrm{SO}(n)$ cuando $X \in \mathfrak{so}(n)$.

Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, todo forma bilineal simétrica no degenerada[2] tiene la forma estándar con respecto a una base conveniente de $\mathbb{C}^n$. Para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, para $n = p+q$ hay que considerar la forma bilineal simétrica

$$d_{p,q}(u,v) := u_1v_1 + \cdots + u_pv_p - u_{p+1}v_{p+1} - \cdots - u_{p+q}v_{p+q}.$$

El grupo de simetría de esta forma $d_{p,q}$ se denota $\mathrm{O}(p,q)$, donde $\mathrm{O}(n,0) = \mathrm{O}(0,n) = \mathrm{O}(n)$. Si $1 \leq p \leq n-1$, hay un **grupo ortogonal indefinido** dado por

$$\underline{\mathrm{O}(p,q)} = \{\, A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) : A^t I_{p,q} A = I_{p,q} \,\}, \quad \text{donde} \quad I_{p,q} = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}.$$

Se ve que $\mathrm{O}(p,q) \simeq \mathrm{O}(q,p)$ mediante un cambio de base.

La relación $A^t I_{p,q} A = I_{p,q}$ también implica que $\det A = \pm 1$. Entonces hay que considerar el subgrupo

$$\underline{\mathrm{SO}(p,q)} := \mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{SL}(p+q,\mathbb{R}).$$

Este grupo no es compacto si $1 \leq p \leq n-1$. Tampoco es conexo; de hecho, tiene dos componentes conexas. La componente neutra (la que contiene el elemento unidad 1) se denota por $\underline{\mathrm{SO}_0(p,q)}$.

El grupo $L = \mathrm{O}(3,1)$ es el **grupo de Lorentz**, el grupo de simetría lineal del espacio de Minkowski $M^4 = (\mathbb{R}^4, d_{3,1})$. Tiene cuatro componentes conexas; su componente neutra se denota por $L_+^\uparrow = \mathrm{SO}_0(3,1)$.

3 Formas hermíticas y grupos unitarios

Para el caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, se puede considerar la forma hermítica

$$\delta(w,z) = \bar{w}_1 z_1 + \bar{w}_2 z_2 + \cdots + \bar{w}_n z_n,$$

cuyo grupo de simetría es el **grupo unitario**

$$\underline{\mathrm{U}(n)} := \{\, A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) : A^*A = 1_n \,\}$$

donde $A^* = (\overline{A})^t$ es el conjugado hermítico de A. Este grupo es *compacto*, en vista de la relación $\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 = \mathrm{tr}(A^*A) = n$.

La relación $|\det A|^2 = \det(A^*A) = 1$ implica que $|\det A| = 1$ para $A \in \mathrm{U}(n)$. El **grupo especial unitario** es el subgrupo

$$\underline{\mathrm{SU}(n)} := \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) = \{\, A \in \mathrm{U}(n) : \underline{\det A = 1} \,\}.$$

Este es un grupo semisimple para $n \geq 2$. Su álgebra de Lie es

$$\mathfrak{su}(n) := \{\, X \in M_n(\mathbb{C}) : \underline{X^* = -X},\ \underline{\mathrm{tr}\, X = 0} \,\}.$$

[2] La forma d es **no degenerada** si $d(u,v) = 0$ para todo v implica que $u = 0$.

Análogamente al caso real, hay *grupos unitarios indefinidos*

$$\underline{\mathrm{U}(p,q)} = \{ A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) : A^* I_{p,q} A = I_{p,q} \}; \qquad \underline{\mathrm{SU}(p,q)} := \mathrm{U}(p,q) \cap \mathrm{SL}(p+q,\mathbb{C});$$

para $1 \leq p \leq n-1$, $p+q=n$.

4 Formas bilineales alternadas y grupos simplécticos

Si $s\colon \mathbb{F}^m \times \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}$ es una forma bilineal alternada (esto es, antisimétrica), posee un grupo de simetría

$$\{ A \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{F}) : \underline{s(Au,Av) = s(u,v)} \text{ para } u,v \in \mathbb{F}^n \}.$$

Una forma bilineal alternada sobre $\mathbb{R}^m$ o $\mathbb{C}^m$ es no degenerada sólo si $m=2n$ es par; en cuyo caso, se puede elegir una base tal que

$$s(u,v) = u_1 v_{n+1} - u_{n+1} v_1 + \cdots + u_n v_{2n} - u_{2n} v_n.$$

El **grupo simpléctico**, para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, se define como

$$\underline{\mathrm{Sp}(n,\mathbb{F})} = \{ A \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{F}) : A^t J_n A = J_n \}, \quad \text{donde} \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Resulta que estos grupos son *conexos* [3], así que la condición $\det A = +1$ es automática.

Los grupos $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ y $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$ no son compactos, pero hay un **grupo simpléctico unitario**

$$\underline{\mathrm{Sp}(n)} \equiv \underline{\mathrm{SpU}(n)} := \mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}) \cap U(2n),$$

el cual sí es compacto, por ser subgrupo cerrado de $U(2n)$.

Otra manera de definir el grupo compacto $\mathrm{Sp}(n)$ es considerrlo como el grupo de simetra de la forma hermítica δ sobre $\mathbb{H}^n$, donde el conjugado de un cuaternión se define por

$$w = t_0 + t_1\,i + t_2\,j + t_3\,k \implies \bar{w} = t_0 - t_1\,i - t_2\,j - t_3\,k.$$

Al identificar $\mathbb{H}^n$ con $\mathbb{C}^{2n}$ y $M_n(\mathbb{H})$ con una subálgebra (real) de $M_{2n}(\mathbb{C})$, se puede comprobar que

$$\mathrm{Sp}(n) = \{ A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{H}) : A^* A = 1_n \}.$$

Las mismas identificaciones son concordantes con la notación $\mathrm{SU}^*(2n) \simeq \mathrm{SL}(n,\mathbb{H})$.

Para $1 \leq p \leq n-1$, $p+q=n$, también hay un grupo

$$\underline{\mathrm{Sp}(p,q)} = \{ A \in \mathrm{GL}(p+q,\mathbb{H}) : A^* I_{p,q} A = I_{p,q} \}.$$

En el caso $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, hay una *forma antihermítica* $\sigma\colon \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}$, dada por

$$\sigma(w,z) = \bar{w}_1 j z_1 + \bar{w}_2 j z_2 + \cdots + \bar{w}_n j z_n.$$

Su grupo de simetría se puede identificar [4] con

$$\underline{\mathrm{SO}^*(2n)} := \{ A \in \mathrm{SO}(2n,\mathbb{C}) : \overline{A} = -J_n A J_n \}.$$

Esto completa el catálogo de los grupos clásicos.

5 Los grupos de espín

Dado cualquier grupo clásico G de la lista anterior, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ asociada con G queda determinada: como espacio vectorial, es su espacio tangente en 1; y su corchete está dada por la fórmula matricial $[X,Y] = XY - YX$ en todos los casos.

En la dirección contraria, para un álgebra de Lie matricial $\mathfrak{g}$ dada, se puede ensayar la construcción de un grupo al tomar todas las matrices $\exp X$, para $X \in \mathfrak{g}$. En general, la aplicación $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ es un difeomorfismo de un vecindario de $0 \in \mathfrak{g}$ en un vecindario de $1 \in G$; pero en general exp no es inyectivo ni sobreyectivo. Además, la misma álgebra de Lie puede servir para varios grupos: por ejemplo, $\mathrm{O}(n)$ y $\mathrm{SO}(n)$ tienen álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n)$. Sin embargo, hay un **teorema de Lie y Cartan** que garantiza la existencia y unicidad de un grupo de Lie G, que es *simplemente conexo*, cuya álgebra de Lie coincide con $\mathfrak{g}$.

En general, un grupo de Lie conexo G posee un grupo de Lie recubridor $\widehat{G}$, que es simplemente conexo, con un homomorfismo $\pi\colon \widehat{G} \to G$ cuyo núcleo es un grupo discreto. El *grupo fundamental* $\pi_1(G)$ es isomorfo a este núcleo.[3]

Por ejemplo, se sabe que hay un homeomorfismo $\mathrm{SO}(3) \approx \mathbb{RP}^3$ y en consecuencia

$$\pi_1(\mathrm{SO}(3)) \simeq \pi_1(\mathbb{RP}^3) \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Entonces hay un grupo recubridor simplemente conexo G y un homomorfismo $\pi\colon G \to \mathrm{SO}(3)$ con $\ker\pi \simeq \mathbb{Z}_2$. Concretamente, se puede tomar $G = \mathrm{SU}(2)$. Al usar las *matrices de Pauli*:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $A = t_0\,1_2 + i(t_1\sigma_1 + t_2\sigma_2 + t_3\sigma_3) \in \mathrm{SU}(2)$ si y sólo si $\det A = t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1$, se obtiene $\mathrm{SU}(2) \approx \mathbb{S}^3$. La receta $T \mapsto ATA^{-1}$, para $T \in \mathbb{R}\text{-}\mathrm{lin}\langle\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\rangle \simeq \mathbb{R}^3$ define una rotación de $\mathbb{R}^3$, $\pi(A) = A(\cdot)A^{-1} \in \mathrm{SO}(3)$, con $\ker\pi = \{1_2, -1_2\} \simeq \mathbb{Z}_2$. Se escribe

$$\mathbb{Z}_2 \to \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$$

para denotar esta situación: el grupo $\mathrm{SU}(2)$ es un **recubridor doble** de $\mathrm{SO}(3)$.

Para cada $n \geq 3$, hay un grupo simplemente conexo que recubre $\mathrm{SO}(n)$ dos veces, llamado **grupo de espín**:

$$\mathbb{Z}_2 \to \underline{\mathrm{Spin}(n)} \to \mathrm{SO}(n),$$

que generalmente no cuenta como grupo clásico, salvo el caso $n = 3$ donde $\mathrm{Spin}(3) \simeq \mathrm{SU}(2)$. [Es posible dar una definición matricial de $\mathrm{Spin}(n)$, como grupo de elementos unitarios de un álgebra de Clifford: pero esta es otra historia.]

[3] Hay que recordar que un grupo conexo G es simplemente conexo si y sólo si $\pi_1(G)$ es trivial.

6 La clasificación de Cartan

Para clasificar todos los grupos listados anteriormente, se procede así:

1. clasificar las álgebras de Lie complejas simples;
2. identificar uno o más grupos de Lie complejos asociados con cada álgebra de Lie;
3. identificar formas reales, compactos y no compactos, de cada uno de estos grupos complejos.

La primera parte de este programa fue efectuado en la tesis de Élie Cartan [5], quien descubrió cuatro series infinitas de álgebras de Lie complejas simples y tambíen cinco álgebras de Lie excepcionales. Las series *clásicas* aparecen en la siguiente tabla.

Series	dim	Algebra de Lie	Grupo Complejo	Grupo Compacto
A_n	$n(n+2)$	$\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$	$\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{C})$	$\mathrm{SU}(n+1)$
B_n	$n(2n+1)$	$\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$	$\mathrm{SO}(2n+1,\mathbb{C})$	$\mathrm{SO}(2n+1)$
C_n	$n(2n+1)$	$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$	$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$	$\mathrm{Sp}(n)$
D_n	$n(2n-1)$	$\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$	$\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$	$\mathrm{SO}(2n)$

Las dimensiones listados son complejas para las columnas tercera y cuarta, pero son dimensiones *reales* para la quinta columna (formas reales compactos). Al subíndice n se le llama el **rango** del álgebra de Lie, o bien del grupo.

Los álgebras de Lie excepcionales se llaman $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$, $\mathfrak{e}_8$, $\mathfrak{f}_4$ y $\mathfrak{g}_2$. Los correspondientes grupos de Lie compactos simples son E_6, E_7, E_8, F_4 y G_2. Es posible dar una construcción "clásica" de cada uno de estos grupos, con el uso del álgebra $\mathbb{O}$ de los octoniones [2].

El la tabla, hay que excluir D_1 —el grupo $\mathrm{SO}(2)$ y el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2,\mathbb{C})$ son abelianos— porque no corresponde con un caso simple. El caso D_2 tampoco es simple; pero sí es semisimple, y se permite incluir D_2 con esta advertencia.

La coincidencia de dimensiones $\dim B_n = \dim C_n = n(2n+1)$ advierte una posible coincidencia entre ellos; pero resulta que $B_n \neq C_n$ para $n \geq 3$. Resulta que las únicas coincidencias entre las entradas de la tabla ocurren para rangos bajos. Concretamente, hay cuatro **identidades de Cartan**:

Identidades de Cartan	Isomorfismos de grupos compactos
$A_1 = B_1 = C_1$	$\mathrm{SU}(2) \simeq \mathrm{Spin}(3) \simeq \mathrm{Sp}(1)$
$B_2 = C_2$	$\mathrm{Spin}(5) \simeq \mathrm{Sp}(2)$
$A_3 = D_3$	$\mathrm{Spin}(6) \simeq \mathrm{SU}(4)$
$D_2 = B_1 + B_1$	$\mathrm{Spin}(4) \simeq \mathrm{Spin}(3) \times \mathrm{Spin}(3)$

7 Los diagramas de Dynkin

Una manera esquemática de entender la *falta de isomorfismos* entre las álgebras de Lie clásicas, aparte de los cuatro casos notados por Cartan, es el empleo de los llamados **diagramas de Dynkin**. Cada álgebra de Lie complejo simple de rango n, como $A_n = \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$ por ejemplo, incluye n copias de $A_1 = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Hay un algoritmo que asocia a la serie una base[4] del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, de manera que el ángulo φ entre dos vectores es recto u obtuso y cumple $4\cos^2\varphi \in \{0,1,2,3\}$. El cuadrado de la longitud de cada vector básico debe ser 1, 2 ó 3. Se arma un diagrama con las siguientes propiedades:

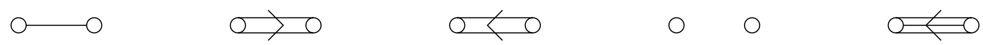
(a) cada vector básico corresponde con un vértice $\circ$ del diagrama;

(b) si entre dos vectores básicos hay un ángulo φ, se traza $4\cos^2\varphi$ aristas entre sus vértices;

(c) cuando $4\cos^2\varphi = 2$ ó 3, los vectores tienen longitudes distintas; estas aristas deben ser decorados con una flecha desde el más largo al más corto.

En rango dos, por ejemplo, hay cinco posibilidades:

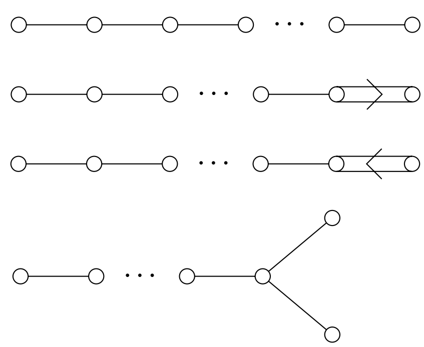
A_2 B_2 C_2 D_2 G_2



Los ángulos entre los dos vectores básicos son, respectivamente, $\varphi = 2\pi/3$, $3\pi/4$, $3\pi/4$, $\pi/2$ y $5\pi/6$.

Los diagramas de las series "clásicas" son:

A_n :
B_n :
C_n :
D_n :



El *teorema de clasificación* ahora dice que dos álgebras de Lie complejos son isomorfos si y sólo si sus diagramas de Dynkin son grafos de la misma especie. El cuadro anterior hace patente que *no hay* tales isomorfismos, salvo en los casos ya mencionados de las cuatro identidades de Cartan.

[4] Los elementos de una tal base se llaman **raíces simples**, en la terminología de la teoría de álgebras de Lie.

References

[1] M. S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, Teubner, Leipzig, 1890.

[2] J. C. Baez, “The octonions”, Bull. Amer. Math. Soc. **39**, 145–205 (2002).

[3] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1978.

[4] R. Goodman and N. R. Wallach, *Symmetry, Representations, and Invariants*, Graduate Texts in Mathematics **255**, Springer, New York, 2009.

[5] E. Cartan, “Sur la structure des groupes de transformations finis et continus”, thèse de doctorat, Paris, 1894.