Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias

Escuela de Matemática

Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas

Tarea TM1

Resuelva el siguiente problema usando conceptos de álgebra lineal vistos hasta ahora, o, en general, conceptos matemáticos previos que haya aprendido durante su formación matemática al día de hoy.

Abastecimiento de agua mediante un sistema de tuberías

El agua constituye uno de los recursos naturales más importantes de la vida. En una vivienda este recurso es disponible a la persona por medio de un sistema de tuberías, el cual queda formado por uniones de tubos que pueden o no tener el mismo grosor, dependiendo la presión con que se desee que salga el agua al pasar por el punto (nodo) donde se intersecan los tubos. Lo que sí bien se sabe es que en cualquier punto donde haya una unión de tubos (nodos), la cantidad de agua que entra por esa unión debe ser igual a la cantidad de agua que sale, o en términos más formales, el caudal del agua debe ser el mismo antes y después de pasar por el nodo.

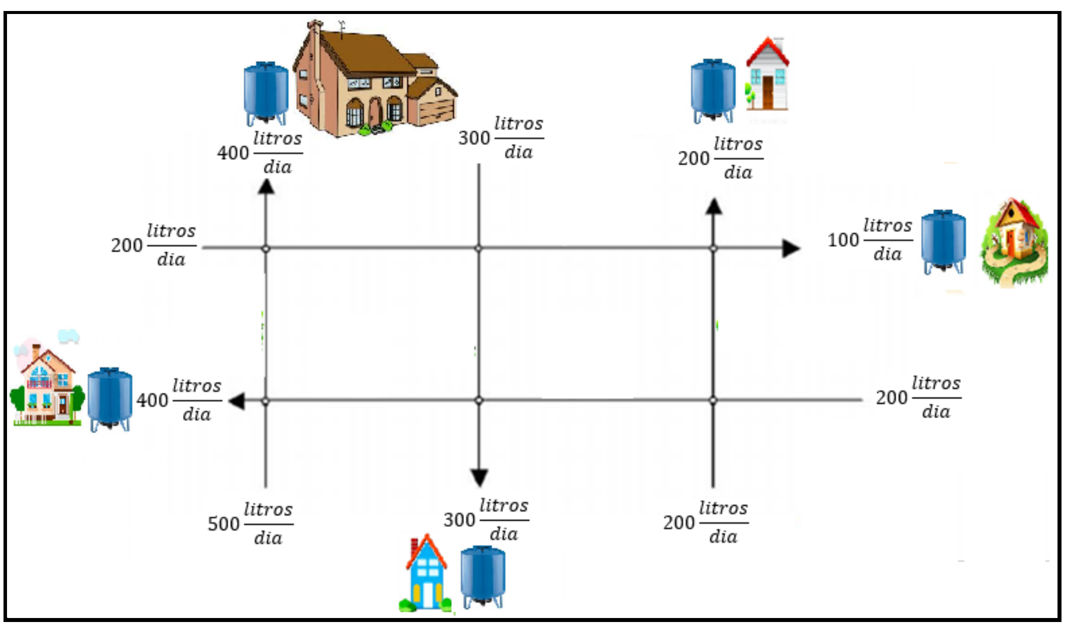


Fig 1. Plano de sistema de tubería para abastecimiento de agua

En la figura anterior se representa un plano de abastecimiento de agua por día elaborado por uno de los funcionarios de Acueductos y Alcantarillados para una localidad formada por cinco casas. El centro de control de Acueductos y Alcantarillados ha instalado sensores electrónicos que calculan el caudal de agua que pasa por un nodo en particular. Las flechas representan la dirección hacia donde fluye el agua y indican, el caudal, en litros por día, que fluye de manera constante a través de una parte de la tubería hasta llegar a los tanques de almacenamiento de agua en cada casa. En cada nodo hay piezas de tubos (uniones cruz) que permiten una distribución continua del flujo del agua a través de todo el sistema.

El centro de control está interesado en analizar las posibles opciones de abastecimiento de agua según el plano de la figura 1, esto con el fin de tener información recopilada en referencia al caudal mínimo y máximo que podría fluir por cada tubo y considerar las previsiones a tener en caso de que alguno de los tubos del sistema de tubería falle.

Como estudiante de ingenieria, ciencias exactas, u otras áreas de formación, se le ha solicitado ayuda por parte del funcionario que desarrolló el plano. Ayuda al funcionario a responder las siguientes preguntas:

1) Si pudiéramos establecer cantidades mínimas y máximas de flujo de agua por cada tubo que conforma el sistema de tubería (cada tramo)¿cuál sería esta cantidad para cada tramo?, es decir, ¿cuáles son las cantidades de flujo que circulan por cada tramo de forma a mantener el agua circulando con normalidad, según la figura 1?

2) ¿Es posible cerrar el flujo de agua por uno de los tubos que conforma el sistema de tubería manteniendo la normalidad de caudal indicada en la figura 1? Si es así, indica al menos un tramo de la tubería que se puede cerrar

3) ¿En qué otra situación de la vida cotidiana se podría usar su modelo matemático utilizado para resolver este problema?

Realice una redacción escrita donde le explique al funcionario qué estrategias usó para responder a las preguntas anteriores, los resultados que obtuvo y en qué criterios/hipótesis se basó para definir sus hipótesis. Muestre todos los pasos necesarios para llegar al resultado que obtuvo. Además, mencione y explique ¿cuáles son los desafíos que enfrentó en esta actividad?

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias

Escuela de Matemática

Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas

Tarea TM2

Resuelva el siguiente problema usando conceptos de álgebra lineal vistos hasta ahora, o, en general, conceptos matemáticos previos que haya aprendido durante su formación matemática al día de hoy.

Generador de claves dinámicas

Para proteger nuestras cuentas, en una determinada página web (e-mail, facebook,…,etc), de otras personas que quieran acceder a nuestra información de la cuenta sin autorización previa, han sido inventadas las claves dinámicas. Estas claves comunmente son matrices cuyas entradas son números de dos dígitos.

En el caso de algunos bancos estatales de Costa Rica, como el BCR, es solicitado el valor asociado a tres de esas entradas de la matriz, como ilustra la figura 1.

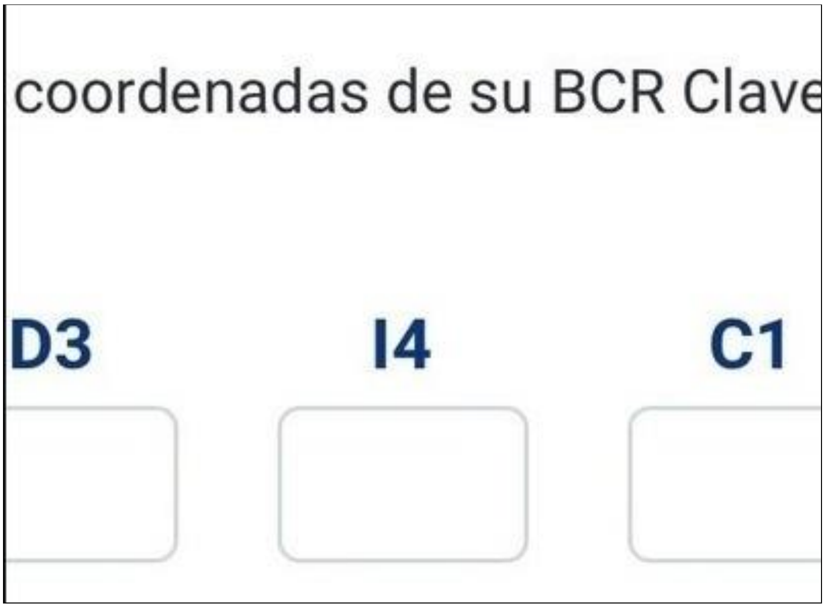


Figura 1. Ejemplo de valores de la clave dinámica solicitada en transacciones BCR

Una forma de generar estas claves dinámicas es utilizando vectores. Así, se pueden generar muchas claves dinámicas a partir de un conjunto arbitrario de vectores.

Suponga que uno de los bancos estatales está interesado en crear nuevas formas de generar claves dinámicas, por lo que ha recurrido a sus servicios para desarrollar un generador de claves dinámicas rápido a partir de sus conocimientos matemáticos. El banco desea que este generador de claves dinámicas considere lo siguiente:

a) cada clave dinámica debe poseer entradas correspondientes a números con dos dígitos.

b) La cantidad de entradas de la clave dinámica debe ser igual a la cantidad actual de las claves dinámicas que genera el banco (investigar).

c) Las claves dinámicas deben ser generadas usando vectores y la hoja de excel.

Considerando lo anterior:

1) Desarrolle un generador de contraseña temporal atendiendo a las expectativas del banco. Explique su construcción.

2) Utilizando una hoja de excell, genere al menos 3 claves dinámicas.

3) ¿Cuáles son los vectores que generan estas claves dinámicas?

4) ¿Existe algún otro generador de claves dinámicas que genere las mismas claves dinámicas que el suyo? De existir dicho generador explique cómo se asimila y diferencia este generador del desarrollado por usted para el banco.

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias

Escuela de Matemática

Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas

Tarea TM3

Resuelva el siguiente problema usando conceptos de álgebra lineal vistos hasta ahora, o, en general, conceptos matemáticos previos que haya aprendido durante su formación matemática al día de hoy.

El reflejo de la luna

Uno de los mecanismos tecnológicos que utilizamos a diario es el teléfono celular, y no necesariamente para la función original para la que fue fabricado, sino para capturar fotos, entre estas los llamados “selfies”.

El funcionamiento de una cámara está basado en la óptica geométrica, en donde a través de procesos de reflexión de la luz internos es logrado captar la imagen que deseamos guardar como una fotografía. Una de las maravillas de una fotografía es capturar la imagen de la realidad manteniendo proporciones de distancias entre los puntos de la imagen capturada, pudiendo llevar una réplica pequeña o aumentada de la realidad, en forma digital o en papel, lo que permite que podamos volver al pasado al mirar hacia una fotografía.

En términos del funcionamiento de la cámara digital, cuando se hace un zoom para disminuir o aumentar el tamaño de la imagen a capturar, esta ocurriendo internamente en la cámara una transformación, la cual reubica los pixeles en el plano imagen de fotografía y interpola los niveles de grises asociados a los niveles de intensidad de los pixeles en dicho plano imagen.

Dependiendo del zoom aplicado a la cámara cada objeto quedará en una escala menor (fig.1) o mayor (fig.2), siendo determinada esta escala a partir de lo que se conoce como la distancia focal y la distancia de enfoque. Al final la cámara fotográfica realiza una proyección de la realidad en un plano, capturando esta imagen real en forma bidimensional.

Figura 1

Figura 2

Suponga que una tienda de cámara fotográfica está interesada en saber el sistema matemático que permite tomar la figura 1 para representarla como la figura 2 (figura 1 reflejada sobre un eje vertical y aumentada en cierta escala). Para esto el administrador de la tienda contrata sus servicios.

1. ¿Qué elementos matemáticos (conceptos, procedimientos, etc) será necesario considerar en la construcción de este sistema matemático?

2. Construya el sistema matemático de zoom que permita representar la figura 1 como la figura 2. Explique dicho proceso.

3. Verifique que su sistema matemático obtenido es correcto.

Consideraciones con respecto a la entrega de la tarea

- Utilice lapicero azul o negro para la entrega del ejemplar final.
- En caso de utilizar software matemático, envíe el archivo con el trabajo efectuado con el software.

TAREA 1. Cifrado y descifrado de mensajes

Sabía que es durante diferentes épocas de la historia la codificación (sustitución de una palabra completa por otra) y el cifrado (sustitución de caracteres por otros) fueron recursos indispensables para transmitir información secreta.

Un dato histórico

El 17 de enero de 1917, la sección política británica conocida como Sala 40, descodificó el telegrama alemán enviado por el ministro alemán de Exteriores Arthur Zimmermann al embajador alemán en los Estados Unidos, Johann von Bernstroff, y al embajador alemán en México, Heinrich Von Eckhardt. Este telegrama, tiene importancia histórica en la declaración de guerra de los Estados Unidos a Alemania. Este telegrama (versión en inglés), su codificación y descodificación son presentados en la figura 1, 2 y 3 respectivamente (ver Anexos 1).

Matemática detrás del cifrado y codificación de mensajes

En el caso del cifrado, una forma de transmitir esta información es utilizando una matriz de mensaje M y una matriz de cifrado C. La matriz de mensaje M será un vector columna donde se coloca parte del mensaje, sustituyendo las letras del alfabeto por números del 0 al 27. Después, para cifrar esa parte del mensaje con seguridad se crea una matriz de cifrado C con la restricción de que su determinante sea 1, de forma que la matriz con la información cifrada sea I, tal que $I = C \cdot M$, y por tanto, $C^{-1} \cdot I = M$.

La dimensión del vector columna M se puede definir según las letras que desee cifrar la persona simultáneamente, teniendo que usar tantos vectores columna según la cantidad de letras del mensaje que se desea codificar. Además, dado que el producto $I = C \cdot M$ da el vector columna cifrado asociado al vector columna M que posee el mensaje original, el vector producto de $C \cdot M$ debe estar bien definido y dar un vector I cuyas entradas sean números entre 0 al 27. Para lograr esta segunda condición se recurre a la función módulo 28, la cual a cada entrada positiva del producto $C \cdot M$ le asocia el residuo de dividir dicho número por 28. Así por ejemplo:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -18 \end{pmatrix} módulo\ 28 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Dado que al dividir 30 entre 28 el residuo es 2, es decir, 30 mod(28)= 2. En el caso de -18, por ser negativo, primeramente sumamos 28 tantas veces como sea necesario hasta obtener un número positivo, en este caso basta hacer -18+28=10. Como 10 dividido entre 28 me da un residuo de 10 y un cociente de 0, se tendrá que -18 mod(28)= 10 mod(28)=10.

Lo anterior nos dice que si el vector las letras del alfabeto de la A a la Z se numeran con los números del 0 al 27, el vector columna de mensaje $\begin{pmatrix} 26 \\ 4 \end{pmatrix}$ sería el vector $\begin{pmatrix} Z \\ E \end{pmatrix}$, cuyo cifrado seguro, a dar a un posible receptor del mensaje, sería el vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ K \end{pmatrix}$. Es decir, en el mensaje cifrado se sustituye la Z por la C y la E por la K en esta parte del mensaje.

Para más detalles sobre este proceso de cifrado, ver lectura "*el cifrado de Hill*", compuesta por tres páginas.

Además, puede ver el archivo Excel llamado "*operaciones con matrices en Excel*", para observar cómo se puede realizar el cifrado anterior usando una hoja de Excel.

Cifrado en la química

En el caso de la química, es conocido que el jugo de limón se puede usar para transmitir mensajes "invisibles" escritos en papel, pudiendo observarse el mensaje al exponer la hoja ante una fuente de calor, debido a la reacción química que ocurre entre el ácido cítrico del jugo de limón presente en la hoja y el calor el cual tiende a oxidar dicho ácido.

Enunciado de la tarea

INDICACIONES GENERALES:

- Utilice lapicero con tinta azul o negro.
- Entregue en formato PDF (use camscanner), subiendo su solución a Googleclassroom.

Suponga que, como estudiante de MA1004 está interesado en transmitirle a un amigo en lenguaje matricial la ecuación química que describe la conversión del monóxido de carbono en metanol, explícitamente $CO + 3H_2 \rightarrow CH_4 + H_2O$. Sin embargo, no quiere que nadie en la clase se de cuenta, por lo cual decide usar cifrado de mensajes para transmitir dicha información usando matrices de mensaje y una matriz de cifrado que sólo usted y su colega conocen, asumiendo que su colega conoce este mecanismo de cifrado y descifrado. Si sólo dispone de papel, lapicero y acceso a una hoja de Excel para enviar el mensaje, responda a lo que se le solicita:

1) Indique la estrategia matemática de resolución escogida para resolver esta tarea de transmisión del mensaje, explicando el porqué de cada paso en su resolución, desde la lectura de la tarea hasta la solución dada a la situación real planteada.

2) Construya el modelo matemático que permite cifrar el mensaje (ecuación química).

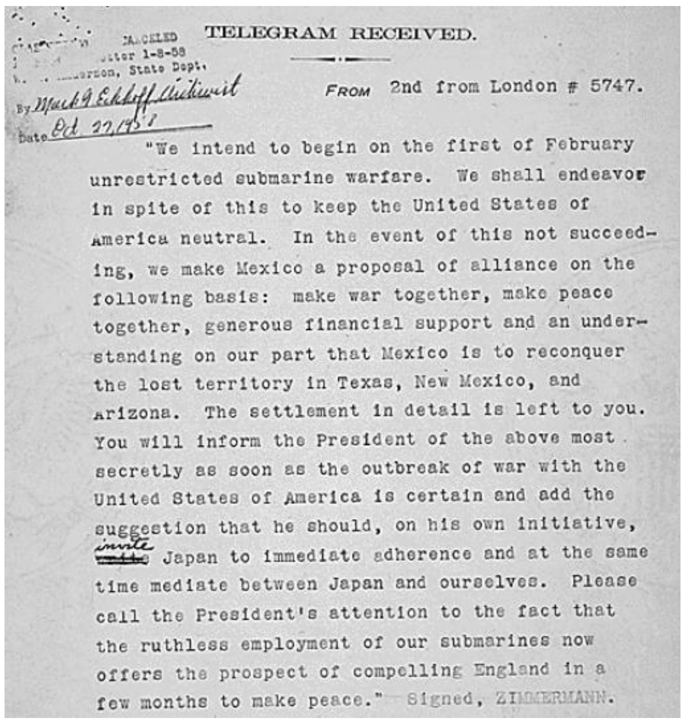
3) ¿Su modelo está bien definido en términos analíticos, siendo siempre posible para el receptor, de tener la información necesaria, encontrar el mensaje original, es decir, dado un

mensaje se puede siempre obtener la matriz cifrada y dada la matriz cifrada se puede siempre recuperar el mensaja original? Explique el porqué. De un ejemplo.

4) ¿Cuáles son las dificultades que sintió al trabajar la tarea?

5) ¿En qué otras situaciones reales, a parte de la codificación de mensajes, podría utilizar el modelo construido? Explique cómo se adapta su modelo a tal situación referenciada.

ANEXOS 1

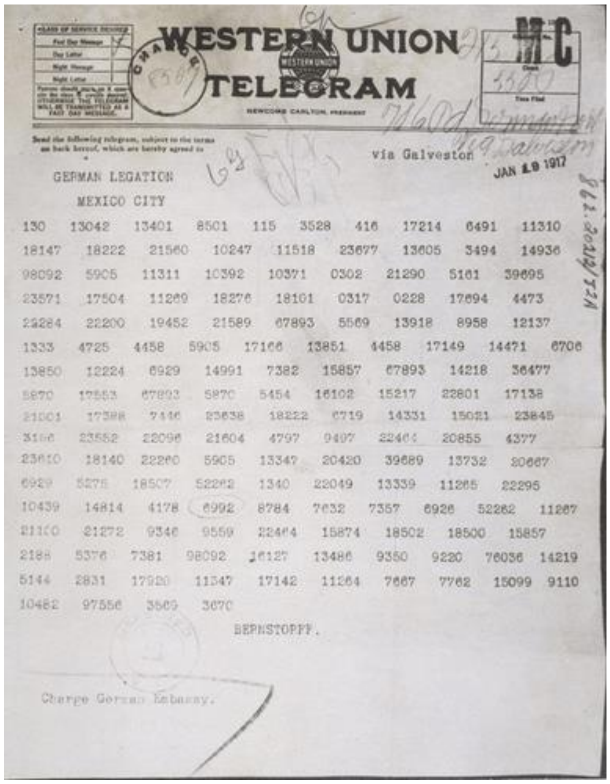


TELEGRAM RECEIVED.

FROM 2nd from London # 5747.

"We intend to begin on the first of February unrestricted submarine warfare. We shall endeavor in spite of this to keep the United States of America neutral. In the event of this not succeeding, we make Mexico a proposal of alliance on the following basis: make war together, make peace together, generous financial support and an understanding on our part that Mexico is to reconquer the lost territory in Texas, New Mexico, and Arizona. The settlement in detail is left to you. You will inform the President of the above most secretly as soon as the outbreak of war with the United States of America is certain and add the suggestion that he should, on his own initiative, invite Japan to immediate adherence and at the same time mediate between Japan and ourselves. Please call the President's attention to the fact that the ruthless employment of our submarines now offers the prospect of compelling England in a few months to make peace." Signed, ZIMMERMANN.

Fig 1. Telegrama Zimmermann



WESTERN UNION
TELEGRAM
NEWCOMB CARLTON, PRESIDENT

Send the following telegram, subject to the terms on back hereof, which are hereby agreed to

via Galveston

JAN 19 1917

GERMAN LEGATION

MEXICO CITY

130 13042 13401 8501 115 3528 416 17214 6491 11310
18147 18222 21560 10247 11518 23677 13605 3494 14936
98092 5905 11311 10392 10371 0302 21290 5161 39695
23571 17504 11269 18276 18101 0317 0228 17694 4473
22284 22200 19452 21589 67893 5569 13918 8958 12137
1333 4725 4458 5905 17166 13851 4458 17149 14471 6706
13850 12224 6929 14991 7382 15857 67893 14218 36477
5870 17553 67893 5870 5454 16102 15217 22801 17138
21001 17388 7446 23638 18222 6719 14331 15021 23845
3156 23552 22096 21604 4797 9497 22464 20855 4377
23610 18140 22260 5905 13347 20420 39689 13732 20667
6929 5275 18507 52262 1340 22049 13339 11265 22295
10439 14814 4178 6992 8784 7632 7357 6926 52262 11267
21100 21272 9346 9559 22464 15874 18502 18500 15857
2188 5376 7381 98092 16127 13486 9350 9220 76036 14219
5144 2831 17920 11347 17142 11264 7667 7762 15099 9110
10482 97556 3569 3670

BERNSTORFF.

Charge German Embassy.

Fig 2. Telegrama Zimmermann codificado mediante código denominado 007 Mensaje Zimmermann decodificado grupo por grupo como fue enviado por el embajador Bernstorff al ministro de Alemania Vonn Eckhardt en México en enero de 1917

130	Nr. 3	13851	stop	18507	hinzufuegen
13042		4458	gemeinsamen	52262	Japan
13401	Auswaertiges Amt	17149	Friedensschluss	1340	von
8501	telegraphiert	14471	stop	22049	sich
115	vom 16ten Januar	6706	reichliche	13339	aus
3528	colon	13850	finanzielle	11265	zu
416	Nr. 1	12224	Unterstuetzung	22295	sofortiger
17214	Ganz geheim	6929	und	10439	Beitretung
6491	Selbst	14991	Einverstaendnis	14814	einladen
11310	zu	7382	unsererseits	4178	infinitive with zu
18147	entziffern	15857	dass	6992	und
18222	stop	67893	Mexiko	8784	gleichzeitig
21560	Wir	14218	in	7632	zwischen
10247	beabsichtigen	36477	Texas	7357	uns
11518	am	5870	comma	6926	und
23677	ersten	17553	Neu	52262	Japan
13605	Februar	67893	Mexiko	11267	zu
3494	un	5870	comma	21100	vermitteln
14936	eingeschraenkten	5454	Ar	21272	stop
98092	U-boot	16102	iz	9346	Bitte
5905	krieg	15217	on	9559	den
11311	zu	22801	a	22464	Praesidenten
10392	beginnen	17138	frueher	15874	darauf
10371	stop	21001	verlorenes	18502	hinweisen
0302	Es wird	17388	Gebiet	18500	comma
21290	versucht	7446	zurueck	15857	dass
5161	werden	23638	erobert	2188	ruecksichtslose
39695	Vereinigte Staaten von	18222	stop	5376	Anwendung
	Amerika	6719	Regelung	7381	unserer
23571	trotzdem	14331	im	98092	U-boote
17504	neutral	15021	einzelnen	16127	jetzt
11269	zu	23845	Euer Hochwohlgeboren	13486	Aussicht
18276	erhalten	3156	ueberlassen	9350	bietet
18101	stop	23552	stop	9220	comma
0317	Fuer den Fall	22096	Sie	76036	England
0228	dass dies	21604	wollen	14219	in
17694	nicht	4797	Vorstehendes	5144	wenigen
4473	gelingen	9497	dem	2831	Monat
22284	sollte	22464	Praesidenten	17920	en
22200	stop	20855	streng	11347	zum
19452	schlagen	4377	geheim	17142	Frieden
21589	wir	23610	eroeffnen	11264	zu
67893	Mexiko	18140	comma	7667	zwingen
5569	auf	22260	sobald	7762	stop
13918	folgender	5905	Kriegs	15099	Empfang
8598	Grundlage	13347	ausbruch	9110	bestaetigen
12137	Buendnis	20420	mit	10482	stop
1333	vor	39689	Vereinigten Staaten	97556	Zimmermann
4725	stop	13732	fest	3569	stop
4458	Gemeinsame	20667	steht	3670	Schluss der Depesche
5905	Kriegs	6929	und		
17166	fuehrung	5275	Anregung		

Fig 3. Descodificación de telegrama Zimmermann

TAREA 2. Visita al Big Ben

Uno de los mecanismos tecnológicos que utilizamos a diario es el teléfono celular, y no necesariamente para la función original para la que fue fabricado, sino para capturar fotos, entre estas los llamados “selfies”.

El funcionamiento de una cámara está basado en la óptica geométrica, en donde a través de procesos de reflexión de la luz internos es logrado captar la imagen que deseamos guardar como una fotografía. Una de las maravillas de una fotografía es capturar la realidad en forma rotada, distorsionada, disminuida, etc a partir de una imagen capturada en forma digital o papel. Lo anterior permite que podamos volver al pasado al mirar hacia una fotografía que replica cierta realidad.

En términos del funcionamiento de la cámara digital, cuando se hace, por ejemplo, un zoom para disminuir o aumentar el tamaño de la imagen a capturar, está ocurriendo internamente en la cámara una transformación, la cual reubica los pixeles del plano real en el plano imagen de fotografía e interpola los niveles de grises asociados a los niveles de intensidad de los pixeles en dicho plano imagen.

Esta reubicación de los pixeles realmente aplica para cualquier otro tipo de reubicación de los pixeles de la figura original, ubicada en el plano real, no solamente para aumentos y disminuciones de escala, basta con conocer la relación que existe entre cada pixel ubicado en figura original (plano real) en relación a la nueva posición de dicho pixel en la fotografía (plano imagen). Por ejemplo, la figura 2 representa una reubicación de los pixeles de la figura 1 (figura frontal del reloj Big Ben, Londres), lo cual podría simbolizar que la figura 2 es la fotografía tomada de la figura 1 una vez reubicados los pixeles.

La figura 1 y figura 2 han sido representadas, en un mismo plano, también en el archivo de GeoGebra llamado **Big Ben fotografiado**. Al final la cámara fotográfica realiza una proyección de la realidad en un plano, capturando un conjunto de elementos de esa realidad en forma bidimensional.

Figura 1. Personas trabajando en el Big Ben [figura original].

Fig.2 Personas trabajando en el Big Ben [Reubicación de pixeles de figura original].

Enunciado de la tarea

INDICACIONES GENERALES:

- Utilice lapicero con tinta azul o negro.
- Entregue en formato PDF (use camscanner).

Suponga que una tienda de cámara fotográfica está interesada en saber el sistema matemático que permite tomar una imagen para representarla, inmediatamente, en otro plano y con reubicación de los pixeles que la conforman. Explícitamente, el dueño de la tienda desea conocer el modelo matemático que satisface que al fotografiar una situación real como la de la figura 1 la foto que se origina es un una foto en donde los pixeles de dicha figura se han reacomodado originando la figura 2, tal como se muestra en el archivo GeoGebra **Big Ben fotografiado**, archivo editable al cual puede acceder a partir del siguiente enlace https://drive.google.com/file/d/1hg1vaC-PHM1sf8Em-5ZqLc63vx0fB_gJ/view?usp=sharing o eventualmente abrir directamente a través del archivo GeoGebra que se adjunto con el enunciado de esta tarea.

El administrador de la tienda contrata sus servicios, solicitándole lo siguiente:

1. Indicar los objetos o conceptos matemáticos que como profesional consideraría necesario para construir el sistema matemático (modelo matemático) solicitado.
2. Obtener el modelo matemático específico, relación entre pixeles en el plano real y el plano imagen para la situación existente la figura 1 y figura 2, mostrando todo el procedimiento y justificaciones necesarias que dan origen al mismo.
3. Convencer al dueño de la tienda de que su modelo matemático funciona, usando para ello la figura 1 y figura 2.
4. ¿Cuáles son las dificultades que sintió al trabajar la tarea?
5. Suponiendo que es permitido ajustar algunos parámetros (valores numéricos) de su modelo matemático ¿En qué otras situaciones reales podría utilizar dicho modelo? Explique.
6. Explicar el papel que tuvo el recurso tecnológico para la resolución de esta tarea.

Tarea 3. Tránsito preventivo

Gracias a la ayuda de mecanismos como los semáforos y otros tipos de señalización, el tránsito vehicular se vuelve más seguro. Sin embargo, en ocasiones el tránsito puede volverse un caos, originando congestionamiento vial, sobre todo en las ciudades, siendo los lugares donde más flujo vehicular se puede observar. En las famosas “horas pico” el flujo vehicular tiende a ser lento en cada trayecto de una cuadra, y por lo general, se puede observar que el número promedio de vehículos entra en una cierta intersección de carretera es igual al número de vehículos que sale por esa misma intersección.

El estudio de cuántos vehículos en promedio pasan por un determinado punto en regiones de “horas pico” es importante para tomar decisiones a corto plazo sobre el abrir o cerrar ciertos trayectos de posible tránsito.

El caso de la calle 2 en San José

Si alguna vez a caminado por la avenida central en la capital de Costa Rica, habrá notado que existe cierto trayecto de la calle 2 que no es transitado por vehículos motores , siendo prohibido dicho tránsito. En particular, el trayecto de esta calle comprendido entre avenida 1 y avenida 3 es uno de los trayectos en donde sólo se permite el tránsito de peatones.

En la figura 1 se muestra la cuadra donde están localizados las instalaciones centrales de correos de Costa Rica, dicha imagen se ha tomado usando Google Maps. En la figura se han colocado flechas rojas para indicar los sentidos de flujo vehicular actuales en los tramos donde es permitido el tránsito, mientras que las flechas verdes simbolizan sentidos de flujo vehicular que se esperarían habilitar en caso de que se decidiera abrir el tránsito vehicular en dichos tramos de la calle 2.

Figura 1. Tránsito vehicular en zona con cuatro intersecciones

Enunciado de la tarea

<u>INDICACIONES GENERALES:</u>

- Utilice lapicero con tinta azul o negro.
- Entregue en formato PDF (use camscanner).

El centro de ingeniería de tránsito está interesado en analizar las posibles opciones de flujo vehicular promedio en los trayectos que conforman la cuadra representada en la figura 1, esto con el fin de tener información recopilada en referencia a la *cantidad mínima o máxima de vehículos* que podrían circular por hora por en dichos trayectos, y considerar así, previsiones a tener en caso de que alguno de los tramos se cierre o presente congestionamiento vial, como en las “horas pico”. Para ello, suponga que el centro de ingeniería de tránsito ha hecho un estudio de la cantidad de vehículos, por hora, que transitan por algunos de los trayectos que rodean la región, dicha información se presenta en la siguiente tabla:

	Punto 1 (intersección calle 4 y avenida 3)	Punto 2 (intersección calle 2 y avenida 3)	Punto 3 (intersección calle 2 y avenida 1)	Punto 4 (intersección calle 4 y avenida 1)
Número de vehículos que fluyen por hora en el tramo indicado y sentido del flujo	1200 vehículos saliendo de la intersección, por calle 4	1100 vehículos entrando a la intersección, por avenida 3	1000 vehículos entrando a la intersección, por avenida 1	1300 vehículos entrando a la intersección, por calle 4
	1000 vehículos saliendo de la intersección, por avenida 3			900 vehículos saliendo de la intersección, por avenida 1

Además, se desea que en los tramos A, B y C de la calle 2 se cumplan ciertas condiciones de flujo, explícitamente, que el flujo por el trayecto C sea de 500 vehículos, y en el trayecto A se desea analizar la opción de dejar un solo sentido y la de dejar dos sentidos de tránsito.

Como estudiante con conocimientos en álgebra lineal, se le ha solicitado ayuda por parte de Ingeniaría de Tránsito para estudiar cierta situación de flujo vehicular. Ayuda al funcionario a responder las siguientes preguntas:

1. ¿Qué condición o condiciones deben ser consideradas para que el flujo vehicular por los trayectos e intersecciones que rodean la región de la figura se mantenga normal?, es decir, sin congestionamiento vial.
2. Elabore un esquema que contemple la condición(es) propuesta(s).
3. Encuentre un modelo matemático que le permita saber el número promedio de vehículos que deberían circular por hora en cada trayecto solicitado. Trabaje el modelo matemático, es decir, indique para alguno de los cuatro trayectos de circulación el número de vehículos que pueden circular para mantener el tránsito en movimiento.
4. Imagine que es cerrado el trayecto de la calle 4 comprendido entre avenida 1 y 3.
   a) De acuerdo con su modelo, ¿esto afectaría el flujo de vehículos? Explique.
   b) En general, ¿si fuera necesario cerrar alguno(s) de los trayectos internos, su modelo le permite saber si es aconsejable o no? Explique a partir de su modelo.
5. En que otras situaciones reales podría usarse su modelo matemático.
6. ¿qué dificultades presentó al resolver la tarea?

Recursos tecnológicos online recomendados:

https://wims.univ-cotedazur.fr/wims/es_tool~linear~linsolver.es.html

http://es.onlinemschool.com/math/assistance/equation/gaus/

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias

Escuela de Matemática

Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas

RESOLUCIÓN TAREA TM1, IMPLEMENTACIÓN 1

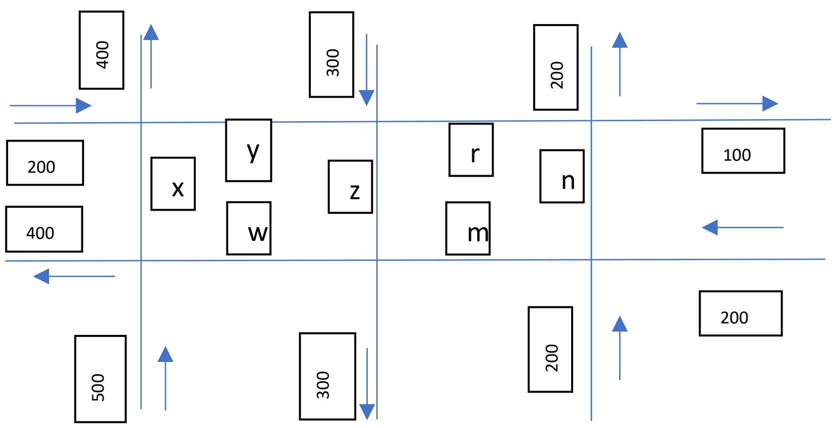
Al considerar la figura 1 ofrecida a los participantes se observa que cada intersección entre tubos representa un punto en donde la totalidad de flujo que entra por dicho punto debe ser la misma cantidad que sale por el mismo punto en un instante específico. Lo anterior traducido a lenguaje matemático quiere decir que en cada punto intersección entre tubos se puede plantear una ecuación, cuyos términos en cada lado de la ecuación representan flujos en los diferentes trayectos de tubo envueltos.

A continuación, se propone una solución de la tarea especificando fases envueltas en la resolución de la misma.

Solución propuesta a tarea de modelación "abastecimiento de agua mediante un sistema de tuberías"

Comprensión de la tarea

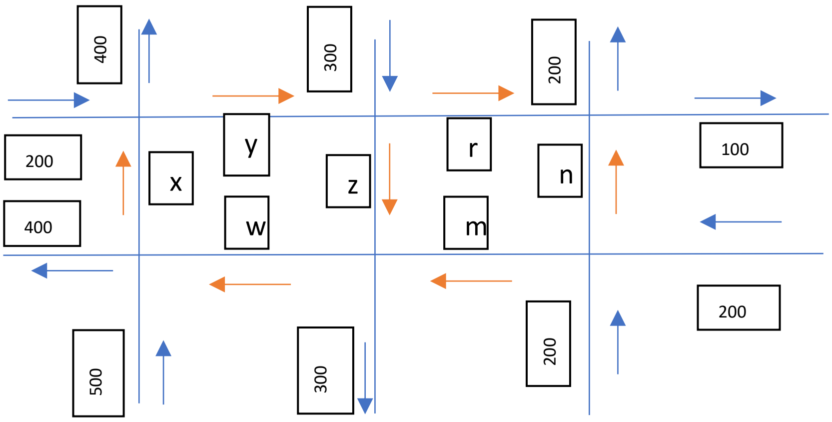
El problema nos presenta una situación de flujo de agua por distintos puntos en un sistema de tuberías. Podemos comenzar representando las cantidades de flujo dadas por los datos del enunciado, esquematizando la situación mediante un modelo de líneas verticales y horizontales que representen los tramos de flujo, y flechas que indiquen los sentidos del flujo en cada tramo.



Observando la esquematización de la situación, observamos que existen siete tramos donde desconocemos la cantidad de flujo, siendo estas cantidades desconocidas por ahora.

Simplificación y estructuración de la situación

Ahora bien, debemos indicar las direcciones de los flujos de estos tramos desconocidos de forma que tenga sentido cada dirección definida con las condiciones iniciales. Para efectos de simplificación de la situación consideramos como dirección de flujo de cada tramo la dada por los otros tramos que se ubican sobre el mismo segmento de recta, conforme al siguiente esquema:



Para saber el posible valor de estas cantidades de flujo desconocido podemos acudir a un modelo de sistemas de ecuaciones, pues vemos que en cada intersección la cantidad de flujo que entra debe ser igual a la cantidad de flujo que sale. Así, se genera un sistema de ecuaciones lineales formado por 6 ecuaciones (una por cada intersección) con 7 variables (flujos desconocidos en los tramos internos).

Construcción del modelo matemático

Una vez consideradas las simplificaciones anteriores se procede a construir el modelo matemático. Si designamos por x, y, z, w, r, m, n los valores de los flujos desconocidos, conforme al esquema anterior, y $I_1, I_2, \ldots, I_6$ las 6 ecuaciones que se generan en las distintas, obtenemos el siguiente modelo matemático.

$$\blacksquare = \begin{cases} I_1: 2000 + x = 400 + y \\ I_2: 500 + w = 400 + x \\ I_3: y + 300 = z + r \\ I_4: z + m = w + 300 \\ I_5: r + n = 200 + 100 \\ I_6: 200 + 200 = m + n \end{cases}$$

Trabajar matemáticamente el modelo

Hacemos uso del modelo para encontrar un resultado matemático. Para ello podemos usar software matemático, por ejemplo, Wolfram Mathematica. Usando el comando *Solve* en el programa obtenemos el siguiente resultado matemático:

$$\{\{y \to -200 + x, w \to -100 + x, r \to 100 + x - z, m \to 200 + x - z, n \to 200 - x + z\}\}$$

La salida anterior es equivalente a las siguientes expresiones:

$y = -200 + x;\ w = -100 + x;\ r = 100 + x - z;\ m = 200 + x - z;$

$n = 200 - x + z$; con x, z parámetros.

Interpretar la(s) solución(s) matemática(s)

Los resultados obtenidos y los datos de la situación problema nos permiten interpretar que las cantidades de flujo desconocidas pueden tomar diferentes valores, restringidos a que dichas cantidades sean números no negativos, pues se tratán de cantidades de flujo. Lo anterior permite interpretar que

$y = -200 + x > 0 \Rightarrow x > 200$

$w = -100 + x > 0 \Rightarrow x > 100$

$r = 100 + x - z > 0 \Rightarrow z < x + 100$

$m = 200 + x - z > 0 \Rightarrow z < x + 200$

$n = 200 - x + z > 0 \Rightarrow z > x - 200$

$x > 0; z > 0$

Lo cual se resume en las condiciones

$x > 200; 0 < z < x + 200$

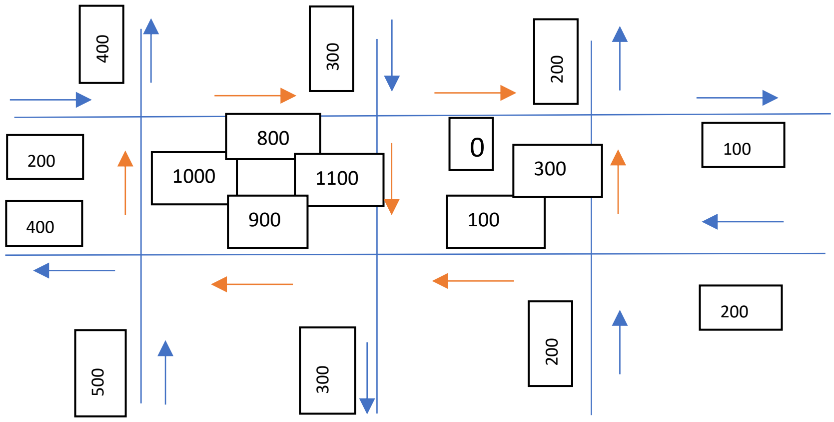
$y, w, r, m, n > 0$

Validar los resultados

Nuestra interpretación debe ser validada, para lo cual debemos tomar nuestra solución matemática propuesta y ver que satisface las demandas del problema, en este caso, nuestra esquematización del problema a partir de la interpretación de la solución matemática.

Por ejemplo, observando las condiciones interpretadas, una solución a la situación problema podría ser tomar $x = 1000, z = 1100,$ en cuyo caso $w = 900, y = 800,$ $r = 0, m = 100, n = 300.$

Ubicando estos valores en nuestro esquema modelo obtenemos



Observamos así que en todas las intersecciones se satisface que la cantidad de flujo que ingresa en la intersección es igual a la cantidad de flujo que sale de la misma intersección. Así, las condiciones de la situación modelo se satisfacen para estos valores, por lo que nuestro modelo es válido, existiendo todavía más posibilidades según los valores de los parámetros escogidos.

Exponer los resultados

Ha llegado el momento de exponer los resultados, respondiendo para eso a las preguntas solicitadas.

1) Si pudiéramos establecer cantidades mínimas y máximas de flujo de agua por cada tubo que conforma el sistema de tubería (cada tramo)¿cuál sería esta cantidad para cada tramo?, es decir, ¿cuáles son las cantidades de flujo que circulan por cada tramo de forma a mantener el agua circulando con normalidad, según la figura 1?

R/ Esas cantidades de flujo vienen dadas según los parámetros que escojamos en el conjunto solución del sistema lineal, que en el caso de ser x y z dichos parámetros, las condiciones serían $x > 200; 0 < z < x + 200;\ y, w, r, m, n > 0$

2) ¿Es posible cerrar el flujo de agua por uno de los tubos que conforma el sistema de tubería manteniendo la normalidad de caudal indicada en la figura 1? Si es así, indica al menos un tramo de la tubería que se puede cerrar.

R/ Sí es posible, podemos notarlo a partir de la posibilidad que escogimos para x y z, explícitamente, cuando $x = 1000$ y $z = 1100$ vemos que $r = 0$, luego es posible cerrar el tramo asociado al flujo que depende de la variable r y todavía tener normalidad de flujo en el sistema de tubería.

3) ¿En qué otra situación de la vida cotidiana se podría usar su modelo matemático utilizado para resolver este problema?

R/ El modelo matemático puede servir para modelar otras situaciones, como el flujo de tránsito vehicular, el flujo de corriente en cierta región de un circuito, y en general, flujos donde se mantiene la continuidad en cada punto intersección de la geometría descrita.

RESOLUCIÓN TAREA TM2, IMPLEMENTACIÓN 1

La tarea "generador de claves dinámicas" ofrece un contexto cercano a las personas ciudadanas, restringiendo aún más el contexto de la tarea al contexto costarricense. En la tarea se ha decidido usar el modelo de clave dinámica que proporciona el Banco de Costa Rica, sin embargo, también pudo haberse escogido el modelo de clave dinámica de cualquier otro banco que desempeñe funciones en Costa Rica.

A continuación, se propone una solución de la tarea especificando fases envueltas en la resolución de la misma.

Solución propuesta a tarea de modelación "generador de claves dinámicas"

Comprensión de la tarea

Al investigar un poco sobre las claves dinámicas que ofrece el Banco de Costa Rica (BCR) evidenciamos que la clave dinámica está formada por cinco filas (etiquetadas del 1 al 5) y diez columnas (etiquetadas de la A a la J). Esto nos dice que la clave dinámica a crear debe estar formada por la misma cantidad de filas y columnas.

Una clave dinámica es una matriz, donde cada columna de entradas representa un vector numérico, por lo que la situación problema que tenemos nos orienta a usar vectores columna o bien vectores fila para crear la clave dinámica.

Simplificación y estructuración de la situación

Para efectos de esta resolución, vamos a al menos dos vectores con diez entradas, los cuales sean linealmente independientes para garantizar que formen una base del subespacio vectorial de IR^{10} donde viven. Escogemos dos vectores para simplificar el modelo, aunque podemos escoger más vectores. Al escoger más vectores tendremos posibilidad de crear más vectores de diez entradas claro, y por tanto mayor diversidad de claves dinámicas.

Cada fila de la clave dinámica será generada a partir de la combinación lineal de los dos vectores escogidos, variando los valores de las coordenadas de la base dentro de un intervalo de valores que permitan tener entradas con 2 dígitos. Esta condición podemos también lograrla con el comando RESIDUO (x; 100) de Excel, el cual devuelve el residuo del número x al dividirlo por 100, en particular, un número entre 00 y 99.

Construcción del modelo matemático

Podemos usar los vectores $v_1 = (1,2,1,3,3,5,2,5,2,1)$ y $v_2 = (6,2,0,9,3,5,7,4,3,1)$

Luego generar cada fila de la clave dinámica a partir de la combinación lineal

$$\alpha v_1 + \beta v_2, \text{ con } \alpha, \beta \in IN.$$

Así, tendríamos que el modelo quedaría formado por las filas

$$f_1 : \alpha_1 v_1 + \beta_1 v_2$$

$$f_2 : \alpha_2 v_1 + \beta_2 v_2$$

$$f_3 : \alpha_3 v_1 + \beta_3 v_2$$

$$f_4 : \alpha_4 v_1 + \beta_4 v_2$$

$$f_5 : \alpha_5 v_1 + \beta_5 v_2$$

Con α_i, β_i valores comprendidos entre, por ejemplo, 0 y 100.

Trabajar matemáticamente el modelo

Usamos la hoja de Excel para trabajar el modelo y crear las claves dinámicas solicitadas.

Usamos la función ALEATORIO.ENTRE() para generar un número aleatorio entre 0 y 100 asociado a α_1, β_1. Seguidamente creamos la combinación lineal $\alpha_1 v_1 + \beta_1 v_2$ para generar la primera fila de la clave dinámica. Al hacer esto en Excel obtenemos algo como en la siguiente figura:

	alfa	v1										beta	v2									
F1	3	1	2	1	3	3	5	2	5	2	1	52	6	2	0	9	3	5	7	4	3	1
F2																						
F3																						
F4																						
F5																						

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	315	110	3	477	165	275	370	223	162	55
2										
3										
4										
5										

Aquí para obtener la casilla A1, por ejemplo, se ha obtenido la primera entrada de $\alpha_1 v_1 + \beta_1 v_2$, mediante la operación (3*1)+(52*6). Vemos que hay un problema, las entradas de esa primera fila en la clave dinámica NO son número con dos dígitos. Eso lo arreglamos colocando RESIDUO((3*1)+(52*6); 100) en vez de simplemente la operación (3*1)+(52*6). Hacemos lo mismo para el resto de entradas de esa primera fila, obteniendo algo como

alfa	v1										beta	v2									
20	1	2	1	3	3	5	2	5	2	1	72	6	2	0	9	3	5	7	4	3	1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	52	84	20	8	76	60	44	88	56	92
2										
3										
4										
5										

Observe que los valores de α_1 y β_1 han cambiado, pues cada vez modificamos alguna celda en a hoja de Excel se actualizan dichos valores, es decir, se genera un nuevo número aleatorio.

Se repite este procedimiento para las restantes filas, obteniendo algo como en la siguiente figura:

	alfa	v1										beta	v2									
F1	20	1	2	1	3	3	5	2	5	2	1	58	6	2	0	9	3	5	7	4	3	1
F2	81											25										
F3	97											65										
F4	73											36										
F5	61											100										

	Clave dinámica									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	68	56	20	82	34	90	46	32	14	78
2	31	12	81	68	18	30	37	5	37	6
3	87	24	97	76	86	10	49	45	89	62
4	89	18	73	43	27	45	98	9	54	9
5	61	22	61	83	83	5	22	5	22	61

Para generar nuevas claves dinámicas basta con dar doble click en cualquier de los de α_i o β_i luego la tecla *enter* para que se actualicen dichos valores, consecuentemente cada valor de la clave dinámica.

Interpretar la(s) solución(s) matemática(s)

En la clave dinámica mostrada en la figura anterior, se puede interpretar que la fila 1 es el resultado de hacer la combinación lineal

$20 * v_1 + 58 * v_2$

=20*(1,2,1,3,3,5,2,5,2,1) $+ 58 * (6,2,0,9,3,5,7,4,3,1)$

$= (368,156,20,582,234,390,446,332,214,78)$

Y luego tomar el residuo de cada entrada de ese vector por 100, obteniendo el vector

$(68,56,20,82,34,90,46,32,14,78)$

Validar los resultados

Validar resultados en este contexto quiere decir verificar si la clave dinámica cumple con las tres condiciones solicitadas en la tarea, explícitamente, toda entrada de la clave dinámica debe poseer dos dígitos, el diseño de la clave debe ser igual al diseño de claves que genera el BCR y las claves dinámicas deben ser generadas por vectores. Las tres condiciones son satisfechas a partir del modelo generado, con la única observación de que un número x de un dígito en la clave dinámica debe ser leído como $0x$, explícitamente, 01 en vez 1, 02 en vez 2, y así sucesivamente.

Exponer los resultados

Ha llegado el momento de exponer los resultados, respondiendo para eso a las preguntas solicitadas.

1) Desarrolle un generador de contraseña temporal atendiendo a las expectativas del banco. Explique su construcción.

R/ Este generador ya fue presentado en la sección **construcción del modelo matemático** en complemento con **trabajar matemáticamente el modelo**.

2) Utilizando una hoja de Excel genere al menos 3 claves dinámicas.

R/ Podemos variar los valores α_i y β_i para obtener fácilmente tres claves dinámicas, por ejemplo,

CLAVE DINÁMICA #1

																							Clave dinámica									
alfa	v1										beta	v2											A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	2	1	3	3	5	2	5	2	1	65	6	2	0	9	3	5	7	4	3	1	1	91	32	1	88	98	30	57	65	97	66
46											79											2	20	50	46	49	75	25	45	46	29	25
47											30											3	27	54	47	11	31	85	4	55	84	77
29											77											4	91	12	29	80	18	30	97	53	89	6
56											99											5	50	10	56	59	65	75	5	76	9	55

CLAVE DINÁMICA #2

																								Clave dinámica									
	alfa	v1										beta	v2											A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
F1	57	1	2	1	3	3	5	2	5	2	1	82	6	2	0	9	3	5	7	4	3	1	1	49	78	57	9	17	95	88	13	60	39
F2	17											40											2	57	14	17	11	71	85	14	45	54	57
F3	94											97											3	76	82	94	55	73	55	67	58	79	91
F4	39											8											4	87	94	39	89	41	35	34	27	2	47
F5	81											58											5	29	78	81	65	17	95	68	37	36	39

CLAVE DINÁMICA #3

																								Clave dinámica									
	alfa	v1										beta	v2											A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
F1	7	1	2	1	3	3	5	2	5	2	1	85	6	2	0	9	3	5	7	4	3	1	1	17	84	7	86	76	60	9	75	69	92
F2	38											46											2	14	68	38	28	52	20	98	74	14	84
F3	35											73											3	73	16	35	62	24	40	81	67	89	8
F4	21											48											4	9	38	21	95	7	45	78	97	86	69
F5	17											14											5	1	62	17	77	93	55	32	41	76	31

3) ¿Cuáles son los vectores que generan estas claves dinámicas?

R/ Los vectores usados son $v_1 = (1,2,1,3,3,5,2,5,2,1)$ y $v_2 = (6,2,0,9,3,5,7,4,3,1)$, aunque podría usarse cualesquiera otros con diez componentes, o inclusive más de dos. Entre más vectores linealmente independientes hay más diversidad de claves dinámicas que se pueden generar.

4) ¿Existe algún otro generador de claves dinámicas que genere las mismas claves dinámicas que el suyo? De existir dicho generador explique cómo se asimila y diferencia este generador del desarrollado por usted para el banco.

R/ Se puede crear perfectamente otro generador que genere las mismas claves dinámicas que genera el modelo usado, basta con usar vectores w_1 y w_2, por ejemplo, paralelos a v_1 y v_2, respectivamente, pues w_1 y w_2 genera el mismo subespacio vectorial que v_1 y v_2.

RESOLUCIÓN TAREA TM3, IMPLEMENTACIÓN 1

A continuación, se propone una solución de la tarea especificando fases envueltas en la resolución de la misma.

Solución propuesta a tarea de modelación "el reflejo de la luna"

Comprensión de la tarea

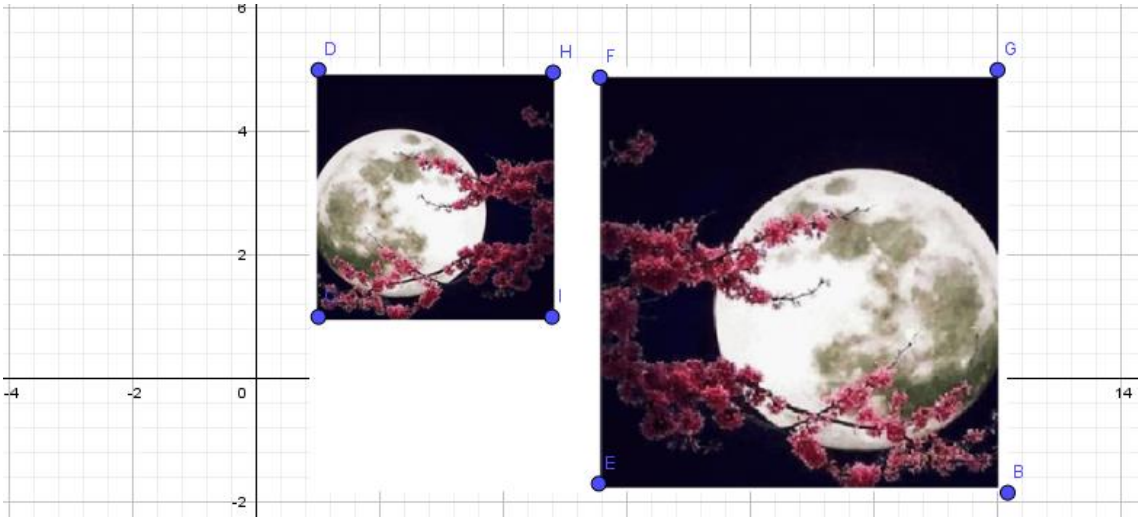
La tarea ilustra un problema de transformación de una imagen, lo que matemáticamente podemos trabajarlo a partir de una transformación lineal, dado que la transformación aplicada a la imagen de la figura 1 es una reflexión respecto al eje de las ordenadas junto con una dilatación de igual escala en la dirección de ambos ejes, es decir, una ampliación uniforme de imagen, estamos ante una situación donde se identifican transformaciones geométricas que preservan la linealidad.

Para trabajar la tarea podemos encontrar una base de vectores de IR^2 en el plano de partida y sus respectivos vectores imagen, a partir de los cuales se puede construir el modelo matemático que representa el criterio de transformación de la figura 1 en la figura 2.

Simplificación y estructuración de la situación

Ahora bien, como la dilatación es uniforme, se puede proceder de manera más geométrica, podemos encontrar el factor de escala de amplificación midiendo la distancia entre dos puntos de la figura 1 y la distancia entre los puntos homólogos ubicados en la figura 2, para posteriormente calcular la razón de distancias que nos indicará el factor de escala. Vamos a proceder a encontrar el modelo matemático de esta forma para simplificar el trabajo matemático.

Los dos puntos a escoger en la figura 1 podemos escogerlos de infinitas formas, sin embargo, para facilitar la parte visual vamos a escoger los vértices de la figura 1 localizados en el lado izquierdo de la figura y los respectivos puntos homólogos en la figura 2. Elegimos también los vértices ubicados en las bases de ambas figuras para garantizar que la expansión es uniforme.

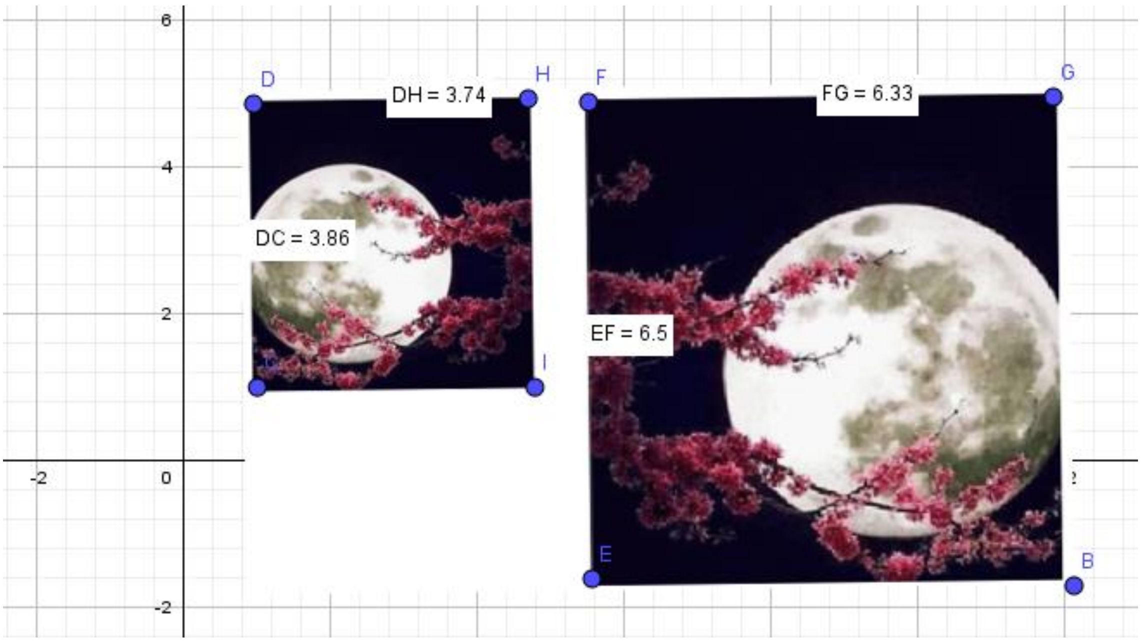


En la figura 1 (imagen de la izquierda) y figura 2 (imagen de la derecha) se han trazado los puntos preimagen e imagen, respectivamente. Específicamente, se identifica que F corresponde al punto imagen de D, G corresponde al punto imagen de H, E corresponde al punto imagen de C, y B corresponde al punto imagen de I.

Para encontrar el modelo matemático $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ vamos a necesitar encontrar la matriz A asociada a T en las bases canónicas. La dilatación uniforme nos indica que el criterio de T, sí solo hubiese dilatación uniforme, sería de la forma $D(x,y) = \alpha(x,y)$, con α el factor de amplificación; mientras que la reflexión respecto al eje de las ordenadas nos dice que si sólo hubiese reflexión el criterio de T sería $R(x,y) = (-x,y)$. Por tanto, el criterio de la transformación lineal buscada se puede obtener a través de una composición de los dos criterios anteriores.

Construcción y trabajo matemático del modelo

Usaremos Geogebra para encontrar el valor de α. En Geogebra podemos usar la función distancia para obtener la distancia entre los puntos seleccionados y posteriormente el valor de α, razón entre distancias.



De aquí tenemos entonces que

$$\alpha = \frac{6.5}{3.86} = \frac{6.33}{3.74} \approx 1.69$$

Así, vemos que efectivamente la dilatación que sufre la imagen original (figura 1) es uniforme. Luego $D(x, y) = 1.69(x, y)$,

Podemos ya obtener el modelo matemático buscado haciendo la composición de $D(x, y)$ con $R(x, y)$ o la composición de $R(x, y)$ con $D(x, y)$.

$$\Rightarrow T(x, y) = D(R(x, y)) = 1.69(-x, y) = (-1.69x, 1.69y)$$

$$\Rightarrow T(x, y) = (-1.69x, 1.69y)$$

Interpretar la(s) solución(s) matemática(s)

El modelo obtenido permite ver que la imagen de cualquier vector de la figura 1 depende de los valores x y y del vector escogido en dicha figura, siendo que la posición de dicho vector (x, y) de la figura 1 ocupara la posición $\begin{pmatrix} -1.69x \\ 1.69y \end{pmatrix}$ en la figura 2.

Validar los resultados

Nuestra interpretación debe ser validada, para lo cual debemos tomar nuestra solución matemática propuesta y ver que satisface las demandas del problema. Podemos verificar el modelo definiendo el vector $\vec{u}$ como aquel que va del punto C al punto D, y el vector $\vec{v}$ como aquel que va del punto E al punto F, de forma que se identifica que $\vec{v}$ debe ser el vector imagen de $\vec{u}$.

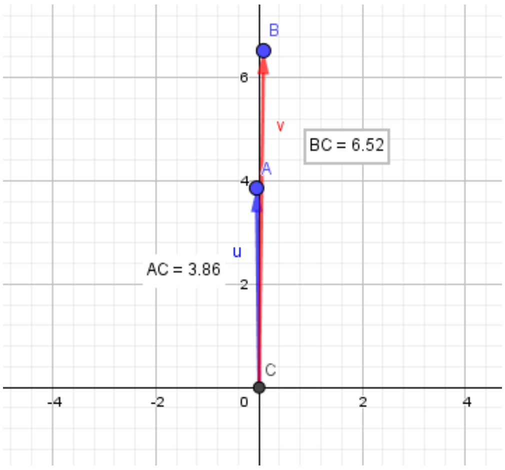
Podemos calcularlas fácilmente la imagen del vector $\vec{u}$ por medio del criterio, tendríamos:

$$\vec{u} = \overrightarrow{D - C} = (-0.05, 3.86)$$

$$T(\vec{u}) = T(-0.05, 3.86) = (-1.69 * -0.05, 1.69 * 3.86) = (0.0845, 6.5234)$$

$$T(-0.05, 3.86) = (0.0845, 6.5234)$$

Al trazar el vector $\vec{u}$ y su vector imagen en Geogebra obtenemos la siguiente figura



Se observa así que $\vec{u}$ ha sido reflejado respecto al eje de las ordenadas y dilatado en un factor de $\frac{6.52}{3.86} \approx 1.69$. De lo anterior se tiene que el modelo encontrado para T satisface las condiciones de la situación problema, por tanto, el modelo es válido.

Exponer los resultados

Ha llegado el momento de exponer los resultados, respondiendo para eso a las preguntas solicitadas.

1. ¿Qué elementos matemáticos (conceptos, procedimientos, etc) será necesario considerar en la construcción de este sistema matemático?

R/ Para construir el modelo matemático se puede considerar una transformación lineal de IR^2 a IR^2, la cual se obtiene a partir de la composición de una transformación de reflexión respecto al eje de las ordenadas con una transformación de dilatación, cuyo factor de amplificación es aproximadamente 1.69. Se puede usar Geogebra o algún otro software para encontrar la norma de un vector y de su respectivo vector imagen, es decir, calcular distancias entre puntos en el plano.

2. Construya el sistema matemático de zoom que permita representar la figura 1 como la figura 2. Explique dicho proceso.

R/ Este modelo ya fue considerado y discutido, en la sección **construcción y trabajo matemático del modelo**.

3. Verifique que su sistema matemático obtenido es correcto.

R/ Este punto se observa a partir de la explicación hecha en la sección **validar los resultados.**

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias

Escuela de Matemática

Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas

RESOLUCIÓN TAREA TM1, IMPLEMENTACIÓN 2

A continuación, se propone una solución de la tarea especificando fases envueltas en la resolución de la misma.

Solución propuesta a tarea de modelación "Cifrado y descifrado de mensajes"

Comprensión de la tarea

La tarea ilustra un problema de cifrado y descifrado de una ecuación química, lo que matemáticamente podemos trabajarlo a partir de operaciones con matrices, dado que las matrices permiten cifrar caracteres alfabético numéricos a partir de un arreglo de números con cierto orden.

Para la situación problema presentada necesitamos dos matrices, la matriz de mensaje, que deberá tener 14 entradas, una para símbolo de la ecuación, y una matriz de cifrado que permita definir bien el producto de la matriz de mensaje con esta última. Además, para garantizar el descifrado, vamos a necesitar que la matriz de cifrado sea invertible, y que su determinante sea 1 para garantizar la existencia de inverso en aritmética modular.

Simplificación y estructuración de la situación

Como ocupamos garantizar el descifrado, usaremos una matriz de mensaje cuadrada, en particular, la matriz de dimensión más pequeña que permita guardar todos los símbolos de la ecuación química, una matriz 4x4. La matriz de cifrado podemos escogerla de infinitas formas, pero usaremos en particular una matriz semejante a la identidad para facilitar los cálculos, puede ser la matriz cuya primera columna y la diagonal son unos y el resto de entradas son ceros.

Por último, debemos decidir por cual número será sustituido cada símbolo de la ecuación, para lo cual usamos la siguiente tabla de diseño propio:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	→
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	@ (Espacio)	+
27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38

Construcción del modelo matemático

Definimos la matriz de mensaje M colocando los símbolos ordenadamente por filas

$$M = \begin{pmatrix} C & O & + & 3 \\ H & 2 & \rightarrow & C \\ H & 4 & + & H \\ 2 & O & @ & @ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 14 & 38 & 29 \\ 7 & 28 & 26 & 2 \\ 7 & 30 & 38 & 7 \\ 28 & 14 & 37 & 37 \end{pmatrix}$$

Definimos la matriz de cifrado $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Definimos el modelo de cifrado,

$$I = C \cdot M_{mod\ 39} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 14 & 38 & 29 \\ 7 & 28 & 26 & 2 \\ 7 & 30 & 38 & 7 \\ 28 & 14 & 37 & 37 \end{pmatrix}_{mod\ 39}$$

Aquí la expresión $mod\ 39$ quiere decir que cada entrada de la matriz I deberá ser sustituida por el correspondiente residuo de dividir la entrada entre 39, de forma que obtengamos una matriz donde todas las entradas sean números entre 0 y 38, para posteriormente poder descifrar.

Trabajar matemáticamente el modelo

Podemos usar Wolfram Mathemtica o Excel para realizar el producto $C \cdot M$, verificando previamente que la matriz C tenga determinante 1. Usando Wolfram Mathematica tendríamos:

In[1]:= Det[$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$]
determinante

Out[1]= 1

In[2]:= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 14 & 38 & 29 \\ 7 & 28 & 26 & 2 \\ 7 & 30 & 38 & 7 \\ 28 & 14 & 37 & 37 \end{pmatrix}$

Out[2]= {{2, 14, 38, 29}, {9, 42, 64, 31}, {9, 44, 76, 36}, {30, 28, 75, 66}}

In[3]:= MatrixForm[$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 14 & 38 & 29 \\ 7 & 28 & 26 & 2 \\ 7 & 30 & 38 & 7 \\ 28 & 14 & 37 & 37 \end{pmatrix}$]
forma de matriz

Out[3]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 2 & 14 & 38 & 29 \\ 9 & 42 & 64 & 31 \\ 9 & 44 & 76 & 36 \\ 30 & 28 & 75 & 66 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, debemos calcular el residuo de dividir cada una de esas entradas por 39. En Excel podemos usar el comando *RESIDUO*, mientras que en Wolfram Mathematica usamos el comando *Mod*. Usando Wolfram obtenemos

```
In[5]:= ( Mod[2, 39]   Mod[14, 39]  Mod[38, 39]  Mod[29, 39]
          Mod[9, 39]   Mod[42, 39]  Mod[64, 39]  Mod[31, 39]
          Mod[9, 39]   Mod[44, 39]  Mod[76, 39]  Mod[36, 39]
          Mod[30, 39]  Mod[28, 39]  Mod[75, 39]  Mod[66, 39] )

Out[5]= {{2, 14, 38, 29}, {9, 3, 25, 31}, {9, 5, 37, 36}, {30, 28, 36, 27}}

In[6]:= MatrixForm[{{2, 14, 38, 29}, {9, 3, 25, 31}, {9, 5, 37, 36}, {30, 28, 36, 27}}]
        forma de matriz

Out[6]//MatrixForm=
 ( 2   14  38  29
   9   3   25  31
   9   5   37  36
   30  28  36  27 )
```

De esta forma, el cifrado de la matriz M viene dado por

$$I = \begin{pmatrix} 2 & 14 & 38 & 29 \\ 9 & 3 & 25 & 31 \\ 9 & 5 & 37 & 36 \\ 30 & 28 & 36 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & O & + & 3 \\ J & D & Z & 5 \\ J & F & @ & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Interpretar la(s) solución(s) matemática(s)

En este cifrado se interpreta que la primera fila de la matriz de mensaje $(C\ O + 3)$ no se modifica en la matriz de cifrado I, no obstante, las otras filas sí, pues, por ejemplo, la segunda fila de la matriz de mensaje $(H\ 2 \rightarrow C)$ se cifra como $(J\ D\ Z\ 5)$. Así sucesivamente con el resto de filas.

El hecho de que la primera fila permanezca igual al mensaje original es por la forma de la matriz de cifrado. Si escogiéramos una matriz más compleja, que todavía satisfaga las condiciones, posiblemente tendríamos que todas las filas de la matriz I serían diferentes a las filas de la matriz M.

Validar los resultados

Dado que $I = C \cdot M$, tenemos que $M = C^{-1} \cdot I$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 14 & 38 & 29 \\ 9 & 3 & 25 & 31 \\ 9 & 5 & 37 & 36 \\ 30 & 28 & 36 & 27 \end{pmatrix}_{mod\ 39}$$

Haciendo los cálculos en Wolfram Mathematica obtenemos

In[12]:=
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 14 & 38 & 29 \\ 9 & 3 & 25 & 31 \\ 9 & 5 & 37 & 36 \\ 30 & 28 & 36 & 27 \end{pmatrix}$$

```
Out[12]= {{2, 14, 38, 29}, {7, -11, -13, 2}, {7, -9, -1, 7}, {28, 14, -2, -2}}

In[13]:= MatrixForm[{{2, 14, 38, 29}, {7, -11, -13, 2}, {7, -9, -1, 7}, {28, 14, -2, -2}}]
         forma de matriz
```

Out[13]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 2 & 14 & 38 & 29 \\ 7 & -11 & -13 & 2 \\ 7 & -9 & -1 & 7 \\ 28 & 14 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Debemos ahora aplicar la función módulo 39 para obtener las entradas numéricas de la matriz de mensaje. Al hacer eso obtenemos como matriz resultado:

$$\begin{pmatrix} 2 & 14 & 38 & 29 \\ 7 & 28 & 26 & 2 \\ 7 & 30 & 38 & 7 \\ 28 & 14 & 37 & 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & O & + & 3 \\ H & 2 & \rightarrow & C \\ H & 4 & + & H \\ 2 & O & @ & @ \end{pmatrix}$$

Y esta matriz es la matriz original de mensaje. De esta forma, el modelo matemático se ha validado.

Exponer los resultados

Ha llegado el momento de exponer los resultados, respondiendo para eso a las preguntas solicitadas.

1) Indique la estrategia matemática de resolución escogida para resolver esta tarea de transmisión del mensaje, explicando el porqué de cada paso en su resolución, desde la lectura de la tarea hasta la solución dada a la situación real planteada.

R/ Esta estrategia ya fue considerada y discutida a través de las fases presentadas en la resolución de la tarea.

2) Construya el modelo matemático que permite cifrar el mensaje (ecuación química).

R/ Este modelo ya fue presentado en la sección **construcción del modelo matemático**.

3) ¿Su modelo está bien definido en términos analíticos, siendo siempre posible para el receptor, de tener la información necesaria, encontrar el mensaje original, es decir, dado un mensaje se puede siempre obtener la matriz cifrada y dada la matriz cifrada se puede siempre recuperar el mensaja original? Explique el porqué. De un ejemplo.

R/ Este punto se observa a partir de la explicación hecha en la sección **validar los resultados.**

4) ¿Cuáles son las dificultades que sintió al trabajar la tarea?

R/ Pueden surgir dificultades diferentes, por ejemplo, definir una matriz de cifrado no invertible o invertible, pero con determinante diferente de la unidad; dificultad para manejar software matemático, dificultad para encontrar el criterio a partir de la función módulo, entre otras.

5) ¿En qué otras situaciones reales, a parte de la codificación de mensajes, podría utilizar el modelo construido? Explique cómo se adapta su modelo a tal situación referenciada.

R/ El modelo de producto de matrices presentado se puede usar en otras situaciones de la vida real, por ejemplo, el cálculo de costos totales. En este caso, cada entrada de la primera matriz puede representar, por filas, el costo unitario de producir cierto producto en cierto departamento; mientras que cada entrada de la otra matriz, una matriz columna, puede indicar la cantidad de unidades producidas de dicho producto.

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias

Escuela de Matemática

Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas

RESOLUCIÓN TAREA TM2, IMPLEMENTACIÓN 2

A continuación, se propone una solución de la tarea especificando fases envueltas en la resolución de la misma.

Solución propuesta a tarea de modelación "visita al Big Ben"

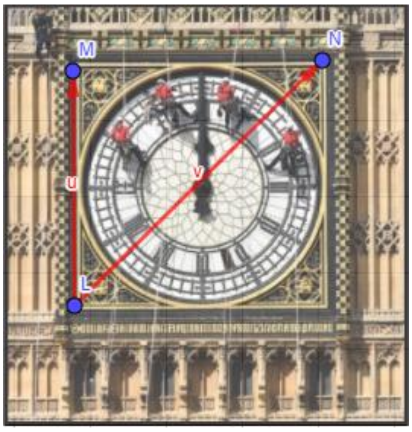
Comprensión de la tarea

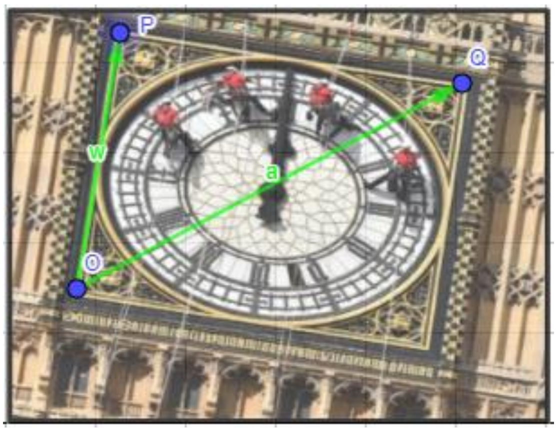
La tarea ilustra un problema de transformación de una imagen, lo que matemáticamente podemos trabajarlo a partir de una transformación lineal, dado que la transformación aplicada a la imagen de la figura 1 es una rotación junto con una dilatación de los ejes, es decir, tenemos transformaciones geométricas donde se conserva la linealidad.

Para trabajar la tarea podemos encontrar una base de vectores de IR^2 en el plano de partida y sus respectivos vectores imagen, a partir de los cuales se puede construir el modelo matemático que representa el criterio de transformación de la figura 1 en la figura 2.

Simplificación y estructuración de la situación

Los dos vectores a escoger en la figura 1 podemos escogerlos de infinitas formas, sin embargo, para facilitar la parte visual vamos a escoger vectores cuyos puntos finales sean los vértices superiores del cuadrado circunscrito al reloj y cuyo punto origen sea el vértice inferior izquierdo de ese mismo cuadrado, por tanto, el origen del sistema de coordenadas. Los puntos homólogos, o puntos imagen deben ser también ubicados en la figura 2, tal como se visualiza a seguir:





En la figura 1 (imagen de la izquierda) y figura 2 (imagen de la derecha) se han trazado los vectores preimagen e imagen, respectivamente, para ambos planos. Específicamente, se identifica que el w corresponde al vector imagen de u, mientras que a corresponde al vector imagen de v. Además, como u y v no son colineares, se garantiza que dichos vectores forman una base para IR^2, lo mismo para w y a.

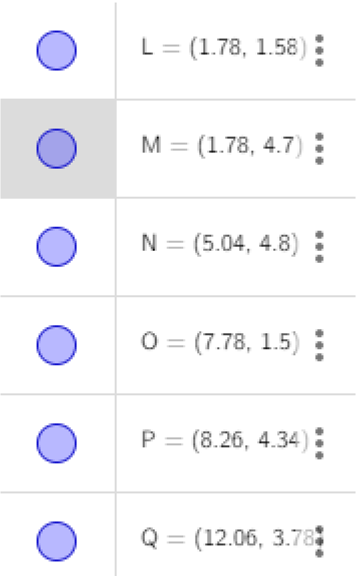
Lo anterior permite inferir que, si conocemos los puntos L, M, N, P, Q, O podemos saber quiénes son los vectores u,v,w,a.

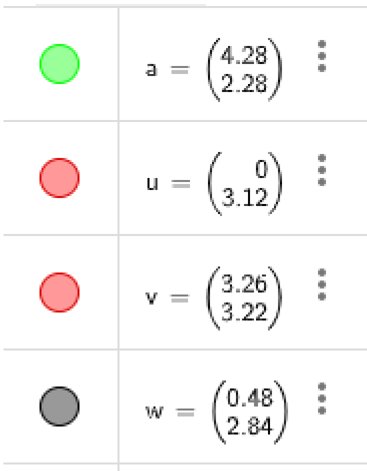
Para encontrar el modelo matemático $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ vamos a necesitar encontrar la matriz A asociada a T en las bases canónicas, o encontrar $T(\vec{x})$ a partir de otras bases del conjunto de partida y conjunto de llegada asociada a la transformación que también permitan obtener dicho criterio, este es el camino que escogemos para construir el modelo.

Construcción del modelo matemático

Usaremos Geogebra para encontrar las coordenadas de los puntos L, M, N, P, Q, O. En este caso, las infinidades de opciones dependen de donde ubiquemos las figuras en la zona de trabajo de Geogebra, pero independientemente de eso la magnitud y dirección de los vectores u,v,w,a se conserva, pues no estamos modificando la figura 1 o la figura 2 al desplazarla de un lado otro.

En Geogebra podemos visualizar directamente las coordenadas de los puntos , M, N, P, Q, O y de los vectores u,v,w,a a partir de la vista algebraica que genera Geogebra





De aquí tenemos entonces que

$$T(\vec{u}) = T(0{,}3.12) = (0.48{,}2.84) = \vec{w}$$

$$T(\vec{v}) = T(3.26{,}3.22) = (4.28{,}2.28) = \vec{a}$$

Luego, como $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ forma una base para IR^2, para cualquier vector (x, y) en el plano de partida tendremos que

$$(x, y) = r\vec{u} + s\vec{v}, \text{ para } r, s \text{ escalares.}$$

$$\Rightarrow T(x, y) = T(r\vec{u} + s\vec{v}) = rT(\vec{u}) + sT(\vec{v})$$

$$\Rightarrow T(x, y) = r\vec{w} + s\vec{a}$$

$$\Rightarrow T(x, y) = r(0.48, 2.84) + s(4.28, 2.28)$$

Para encontrar $T(x, y)$ necesitamos expresar r, s en función de x,y; es decir, encontrar las coordenadas de (x, y) en la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

$$(x, y) = r\vec{u} + s\vec{v}$$

$$\Rightarrow (x, y) = r(0, 3.12) + s(3.26, 3.22)$$

$$\Rightarrow (x, y) = (3.26s, 3.12r + 3.22s)$$

Esta última expresión forma un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas que podemos resolver con software matemático, por ejemplo, con Wolfram Mathematica, usando el comando *Solve*, obteniendo como salida:

$$\{\{r \to -0.31658x + 0.320513y, s \to 0.306748x\}\}$$

Es decir, usando tres decimales de precisión, $r = -0.317x + 0.321y; s = 0.307x$

Por tanto, el modelo buscado es

$$T(x, y) = (-0.317x + 0.321y)(0.48, 2.84) + 0.307x(4.28, 2.28)$$

Trabajar matemáticamente el modelo

Podemos trabajar el modelo un poco más para simplificar la expresión que lo define, para lo cual se puede usar el comando $Simplify$ en Wolfram Mathematica, obteniendo:

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} 1.1618x + 0.15408y \\ -0.20032x + 0.91164y \end{pmatrix}$$

Interpretar la(s) solución(s) matemática(s)

El modelo obtenido permite ver que la imagen de cualquier vector de la figura 1 del Big Ben depende de los valores x y y del vector escogido en dicha figura, siendo que la posición de dicho vector (x, y) de la figura 1 ocupara la posición $\begin{pmatrix} 1.1618x + 0.15408y \\ -0.20032x + 0.91164y \end{pmatrix}$ en la figura 2.

Validar los resultados

Nuestra interpretación debe ser validada, para lo cual debemos tomar nuestra solución matemática propuesta y ver que satisface las demandas del problema. Podemos verificar el modelo calculando las imágenes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ a través del modelo, por ejemplo.

Estas imágenes podemos calcularlas fácilmente usando Wolfram Mathematica, definiendo T como una función con el criterio indicado, y luego encontrando las imágenes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ a través de la función T definida, como se muestra a continuación:

```
In[5]:= T[x_, y_] := ( 1.1618 x + 0.15408 y
                      -0.20032 x + 0.91164 y )

In[6]:= T[0, 3.12]

Out[6]= {0.48073, 2.84432}

In[7]:= T[3.26, 3.22]

Out[7]= {4.28361, 2.28244}
```

Se observa que, al considerar sólo dos decimales de precisión,

$$T(\vec{u}) = T(0{,}3.12) = (0.48073{,}2.84432) = \vec{w}$$

$$T(\vec{v}) = T(3.26{,}3.22) = (4.28361{,}2.28244) = \vec{a}$$

De lo anterior se tiene que el modelo encontrado para T satisface las condiciones de la situación problema, por tanto, el modelo es válido.

Exponer los resultados

Ha llegado el momento de exponer los resultados, respondiendo para eso a las preguntas solicitadas.

1. Indicar los objetos o conceptos matemáticos que como profesional consideraría necesario para construir el sistema matemático (modelo matemático) solicitado.

R/ Para construir el modelo matemático se puede considerar una transformación lineal de IR^2 a IR^2.

2. Obtener el modelo matemático específico, relación entre pixeles en el plano real y el plano imagen para la situación existente la figura 1 y figura 2, mostrando todo el procedimiento y justificaciones necesarias que dan origen al mismo.

R/ Este modelo ya fue considerado y discutido, en la sección **construcción del modelo matemático**.

3. Convencer al dueño de la tienda de que su modelo matemático funciona, usando para ello la figura 1 y figura 2.

R/ Este punto se observa a partir de la explicación hecha en la sección **validar los resultados.**

4. ¿Cuáles son las dificultades que sintió al trabajar la tarea?

R/ Pueden surgir dificultades diferentes, por ejemplo, no poder determinar las coordenadas asociadas a los vectores preimagen e imagen; dificultad para manejar software matemático, dificultad para encontrar el criterio a partir de las imágenes de una base del conjunto de partida, entre otras.

5. Suponiendo que es permitido ajustar algunos parámetros (valores numéricos) de su modelo matemático ¿En qué otras situaciones reales podría utilizar dicho modelo? Explique.

R/ Si se ajustan los valores de algunos valores del modelo encontrado, el modelo podría servir para estudiar fenómenos asociados a la dilatación, reflexión, rotación de imágenes, entre otro tipo de transformaciones lineales.

6. Explicar el papel que tuvo el recurso tecnológico para la resolución de esta tarea.

R/ Wolfram Mathematica tuvo un papel muy importante en esta tarea, al igual que Geogebra. A partir de estos recursos fue posible identificar las coordenadas de puntos y los vectores asociados a dichos puntos. Además, los cálculos se simplifican bastante al usar Wolfram Mathematica, permitiendo resolver un sistema de ecuaciones con números no enteros.

RESOLUCIÓN TAREA TM3, IMPLEMENTACIÓN 2

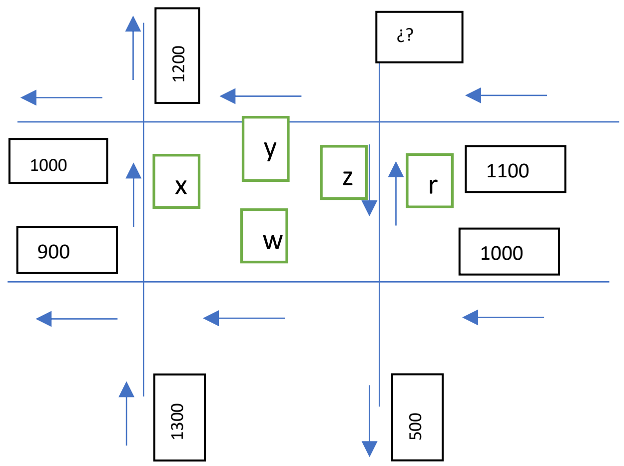
Al considerar la figura 1 ofrecida a los participantes se observa que en cada intersección entre calles y avenidas, dichas intersecciones representan puntos en donde la totalidad de vehículos que entran en una intersección específica, en un determinado intervalo de tiempo, debe ser igual a la cantidad de vehículos que salen por la misma intersección en el mismo intervalo de tiempo, lo cual rige una ley de conservación de masa. Lo anterior traducido a lenguaje matemático quiere decir que en cada punto intersección entre calles y avenidas se puede plantear una ecuación, cuyos términos en cada lado de la ecuación representan flujos de vehículos que entran y salen, respectivamente, por los diferentes tramos que rodean a la intersección.

A continuación, se propone una solución de la tarea especificando fases envueltas en la resolución de la misma.

Solución propuesta a tarea de modelación "abastecimiento de agua mediante un sistema de tuberías"

Comprensión de la tarea

El problema nos presenta una situación de flujo vehicular en cierta zona de la capital de Costa Rica. Podemos comenzar representando las cantidades de flujo promedio por hora dadas por los datos de la tabla del enunciado, esquematizando la situación mediante un modelo de líneas verticales y horizontales que represente las vías de tránsito, y flechas que indiquen los sentidos en cada vía conforme a la figura 1.

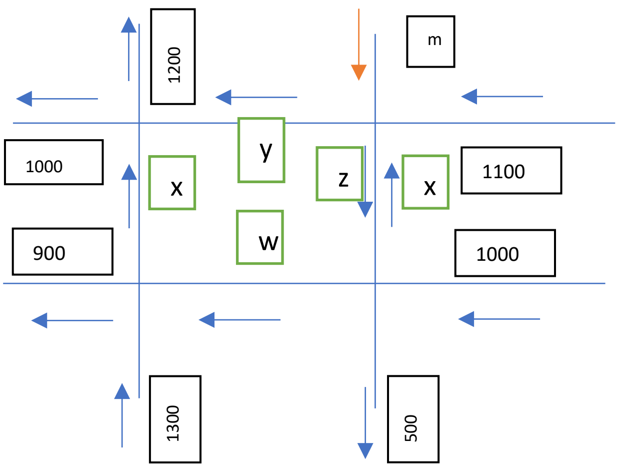


Observando la esquematización de la situación, vemos que existe cinco tramos de la zona donde se desconoce el flujo que circula, y un tramo donde la calle está cerrada pero se desea abrirla con un sentido de flujo. De esta forma, se desconoce la cantidad de flujo vehicular que circula por cada tramo interno de la cuadra, por lo que tendrá que ser estudiado.

Para saber estas cantidades de flujo desconocidas podemos acudir a un modelo de sistemas de ecuaciones, pues vemos que en cada intersección la cantidad de vehículos que entra debe ser igual a la cantidad de vehículos que sale, distribuidos por los diferentes sentidos posibles. Así, se genera un sistema de ecuaciones lineales formado por 4 ecuaciones (una por cada intersección) con 6 variables (flujos desconocidos en los tramos internos más el flujo correspondiente al tramo que se desea abrir).

Simplificación y estructuración de la situación

Como simplificaciones al problema, podemos suponer que en el trayecto que se desea abrir el sentido de vía es de norte a sur y que el flujo x es igual al flujo r, esta última suposición para disminuir la cantidad de variables del sistema.
Considerando estas simplificaciones obtenemos la siguiente esquematización de la situación problema.



Construcción del modelo matemático

Una vez consideradas las simplificaciones anteriores se procede a construir el modelo matemático. Si designamos por I_1, I_2, I_3, I_4 las ecuaciones que se generan en las distintas intersecciones denotadas como punto 1, punto 2, punto 3 y punto 4 en el enunciado, obtenemos el siguiente modelo matemático.

$$\blacksquare = \begin{cases} I_1: x + y = 1000 + 1200 \\ I_2: x + m + 1100 = y + z \\ I_3: z + 1000 = w + x + 500 \\ I_4: 1300 + w = 900 + x \end{cases}$$

Trabajar matemáticamente el modelo

Hacemos uso del modelo para encontrar un resultado matemático. Podemos usar software matemático para trabajar el modelo y obtener el conjunto solución del sistema. Al usar por ejemplo Wolfram Mathematica, y recurrir al comando *Solve* obtenemos como salida

$$\{\{y \to 2200 - x, z \to -900 + 2x, w \to -400 + x, m \to 200\}\}$$

La salida anterior es equivalente a las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} y = 2200 - x \\ z = -900 + 2x \\ w = -400 + x \\ m = 200 \end{cases}$$

con x un parámetro real positivo.

Interpretar la(s) solución(s) matemática(s)

Los resultados obtenidos y los datos de la situación problema nos permiten interpretar que las cantidades de flujo desconocidas pueden tomar diferentes valores, restringidos a que dichas cantidades sean números no negativos, pues se tratán de cantidades de flujo. Lo anterior permite interpretar que

$$y = 2200 - x > 0 \Rightarrow x < 2200$$

$$z = -900 + 2x > 0 \Rightarrow x > 450$$

$$w = -400 + x > 0 \Rightarrow x > 400$$

$$m = 200$$

$$y, z, w, m, x > 0$$

Lo cual se resume en las condiciones

$$450 < x < 2200;$$

$$m = 200; x = r;$$

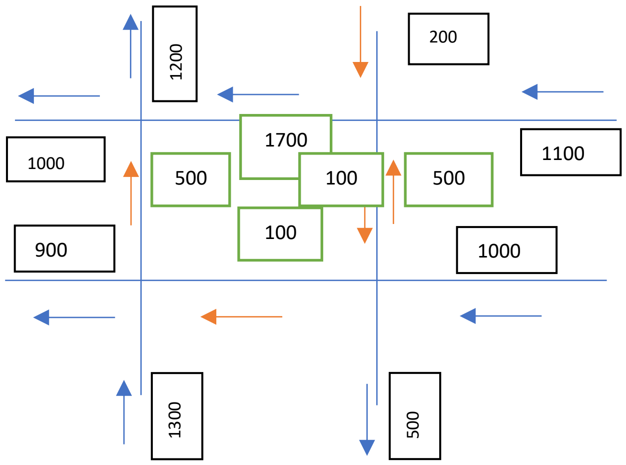
$$y = 2200 - x, z = -900 + 2x, w = -400 + x$$

Validar los resultados

Nuestra interpretación debe ser validada, para lo cual debemos tomar nuestra solución matemática propuesta y ver que satisface las demandas del problema, en este caso, nuestra esquematización del problema a partir de la interpretación de la solución matemática.

Por ejemplo, observando las condiciones interpretadas, una solución a la situación problema podría ser tomar $x = 500,$ en cuyo caso $r = 500, y = 1700, w = 100; z = 100; m = 200.$

Ubicando estos valores en nuestro esquema modelo obtenemos



Observamos así que por el punto 1 entran y salen 2200 vehículos por hora, por el punto 2 entran y salen 1800 vehículos por hora, por el punto 3 entran y salen 1100 vehículos, y por el punto 4 entran y salen 1400 vehículos. Así, las condiciones de la situación modelo se satisfacen para estos valores, por lo que nuestro modelo es válido, existiendo todavía más posibilidades según los valores de los parámetros escogidos.

Exponer los resultados

Ha llegado el momento de exponer los resultados, respondiendo para eso a las preguntas solicitadas.

1. ¿Qué condición o condiciones deben ser consideradas para que el flujo vehicular por los trayectos e intersecciones que rodean la región de la figura se mantenga normal?, es decir, sin congestionamiento vial.

R/ Será necesario considerar, por ejemplo, que en cada intersección el transito se mantenga circulando de forma tal que la cantidad de flujo vehicular que entra en una intersección determinada, entre calle y avenida, sea igual a la cantidad de flujo que sale de la intersección. Además, será necesario que las vías asignadas tengan sentido, de tal forma que no existan trayectos con salidas donde los vehículos no tienen para donde transitar.

2. Elabore un esquema que contemple la condición(es) propuesta(s).

R/ Este esquema fue elaborado ya al principio, en la sección **comprensión y esquematización de la situación modelo,** pudiendo considerar la información propuesta por el enunciado.

3. Encuentre un modelo matemático que le permita saber el número promedio de vehículos que deberían circular por hora en cada trayecto solicitado. Trabaje el modelo matemático, es decir, indique para alguno de los cuatro trayectos de circulación el número de vehículos que pueden circular para mantener el tránsito en movimiento.

R/ Este modelo ya fue considerado y discutido, en la sección **construcción del modelo matemático**.

4. Imagine que es cerrado el trayecto de la calle 4 comprendido entre avenida 1 y 3.
a) De acuerdo con su modelo, ¿esto afectaría el flujo de vehículos? Explique.
b) En general, ¿si fuera necesario cerrar alguno(s) de los trayectos internos, su modelo le permite saber si es aconsejable o no? Explique a partir de su modelo.

R/ Cerrar el tramo indicado implica considerar en nuestra esquematización del modelo $x = 0$ en las primeras dos ecuaciones, luego el modelo ■ se reduce a

$$■ = \begin{cases} I_1 : y = 1000 + 1200 \\ I_2 : m + 1100 = y + z \\ I_3 : z + 1000 = w + x + 500 \\ I_4 : 1300 + w = 900 + x \end{cases}$$

cuya solución es

$$\begin{cases} y = 2200 \\ z = -900 + 2x \\ w = -400 + x \\ m = 200 + 2x \end{cases}$$

Es decir, al cerrar el trayecto especificado aún se puede mantener la circulación del tránsito, habiendo ahora un flujo constante para el flujo y y un flujo variable para el flujo m.
Note que, si se cierra cualquier otro tramo, el conjunto solución del modelo original permite saber si hay circulación normal, basta hacer cero la variable asociada al tramo donde se desea cerrar el flujo, con la consideración $x = r$ cuando $x \neq 0$.

5. En que otras situaciones reales podría usarse su modelo matemático.

R/ El modelo matemático puede servir para modelar otras situaciones, como el flujo de corriente de agua por un sistema de mangueras, el flujo de corriente en cierta región de un circuito, y en general, flujos donde se mantiene la continuidad en cada punto intersección de la geometría descrita.