El problema de los subespacios invariantes

Carl Pearcy

Department of Mathematics, University of Michigan, Ann Arbor, MI 48109, USA

Minicurso ofrecido en la UCR, noviembre de 1983

Notas tomadas por Joseph C. Várilly, Escuela de Matemática, UCR

Resumen

El Prof. Carl Pearcy, de la Universidad de Michigan en Ann Arbor, visitó la Escuela de Matemática en noviembre de 1983, y ofreció un minicurso de tres sesiones sobre el problema de los subespacios invariantes. Dicho problema pide averiguar si un operador acotado sobre un espacio de Banach posee un subespacio cerrado no trivial invariante. El Dr. Pearcy era un experto en esta rama del análisis funcional. Estas notas del minicurso, tomados por Joseph Várilly, circularon como manuscrito mecanografiado durante varios años.

1. Una breve historia del problema

El problema de los subespacios invariantes surge de la investigación de la estructura de operadores sobre un espacio de Hilbert. Recordamos que un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial (complejo), dotado con un producto escalar $\langle x \mid y\rangle$, lineal en y, antilineal en x y definida positiva, con una métrica natural $\operatorname{dist}(x, y) := \|x - y\| := \langle x - y \mid x - y\rangle^{1/2}$, que es además completa en esta métrica. La "dimensión ortogonal" de $\mathcal{H}$ es la cardinalidad de una base ortonormal de $\mathcal{H}$ (la cual es una colección de elementos $\{e_i\}$ de $\mathcal{H}$ tales que $\langle e_i \mid e_j\rangle = \delta_{ij}$ para todo i, j).

Denotamos por $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ el conjunto de aplicaciones lineales continuas $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$; como T es continuo si y solo si es acotado, la norma $\|T\|$ definida por $\|T\| := \inf\{\, M : \|Tx\| \leqslant M\|x\|\,\}$ convierte $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ en un espacio de Banach. Si $\dim \mathcal{H} = m$ es finita, tenemos $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \simeq M_m(\mathbb{C})$, las matrices complejas $m \times m$, y el análisis de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ se reduce al álgebra lineal. De ahora en adelante, por lo tanto, supondremos que la dimensión ortogonal de $\mathcal{H}$ es numerablemente *infinita*.

Llamamos **subespacio** a una parte $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ que es un espacio vectorial y que es además *cerrado* en la topología de $\mathcal{H}$. Un subespacio $\mathcal{M}$ se dice *invariante* bajo un operador T si $T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$. Para cualquier $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, los subespacios triviales $\{0\}$ y $\mathcal{H}$ son invariantes. Cualquier otro subespacio invariante bajo T se llama un **subespacio invariante no trivial** (SIN) para T.

La teoría de operadores nació alrededor de 1930 con los trabajos de John von Neumann y Marshall Stone. Algunos años después (sería difícil señalar una fecha exacta) se tomó conciencia del siguiente problema.

Problema. *¿Es cierto que cada $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ posee un SIN ?*

El primer resultado de importancia fue obtenido por Aronszajn y Smith [1] en 1950 (y luego en 1954 extendieron su teorema a espacios de Banach).

Teorema 1. *Cada operador* compacto *posee un SIN.*

Un operador K es **compacto** si la imagen $K(\mathcal{H}_1)$ de la bola unitaria de $\mathcal{H}$ es compacta en la topología (de la norma) de $\mathcal{H}$. Recordemos que los operadores compactos forman un *ideal* $\mathcal{K}$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ y que además $\mathcal{K}$ es el único ideal cerrado tal que $\{0\} \subsetneq \mathcal{K} \subsetneq \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Después de haber obtenido este resultado, Halmos y otros plantearon el siguiente problema: ¿qué pasa si $T \notin \mathcal{K}$ pero $T^2 \in \mathcal{K}$? La respuesta fue obtenida con una sorprendente aplicación [2] del "análisis no estándar" de Abraham Robinson en 1966.

Teorema 2 (Bernstein, Robinson)**.** *Si $p(T)$ es compacto, donde $p(x)$ es un polinomio cualquiera, entonces T tiene un SIN.*

(Posteriormente, Halmos [3] logró desenredar la demostración del Teorema 2 y la convirtió a análisis "estándar".)

En el período 1967–70, se desarrolló un estudio de una clase de operadores llamados *cuasitriangulares*. Brevemente, T es **cuasitriangular** (CT) si se puede escribir $T = K + T_0$, donde K es compacto y T_0 es *triangular*, es decir, posee una matriz triangular respecto de alguna base ortonormal de $\mathcal{H}$; en tal caso se tiene

$$T_0 e_n = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn}\, e_m \quad \text{con} \quad \alpha_{mn} = 0 \text{ si } m > n.$$

(Si se escribe $\mathcal{M}_n := \operatorname{lin}\langle e_1, e_2, \dots, e_n\rangle$, tenemos $T_0(\mathcal{M}_n) \subseteq \mathcal{M}_n$ para todo n, así que T_0 posee toda una cadena de SINes.)

La teoría de la clase (CT) es bastante difícil. Pero su utilidad fue mostrada por el siguiente teorema que fue demostrado en 1973 por unos rumanos [4].

Teorema 3. *Si T* no es *cuasitriangular, entonces su operador adjunto T^* tiene autovalores: para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathcal{M}_\lambda := \{\, x \in \mathcal{H} := T^* x = \lambda x \,\}$ no es $\{0\}$.*

Corolario 4. *El complemento ortogonal $\mathcal{M}_\lambda^\perp$ es un SIN para T.*

A raíz de este teorema, el problema se reduce a la búsqueda de SINes para operadores cuasitriangulares que no son compactos. Un resultado parcial en este contexto es el siguiente teorema [5, 6] que será el tópico principal de la segunda sección.

Teorema 5 (Deckard, Douglas, Pearcy, 1969)**.** *Si T es cuasitriangular, si $\{p_n(x)\}$ es una sucesión de polinomios y si $\{K_n\}$ es una sucesión de operadores compactos tales que:*

(a) $\|p_n(T) - K_n\| \to 0$*; y*

(b) $K_n \to B$ *en la topología débil de operadores, con* $B \neq 0$*;*

entonces T posee un SIN.

En 1973, Lomonosov logró un progreso importante, aplicando unas ideas nuevas. La clave de su trabajo [7] fue la aplicación del teorema de Schauder y Tijonov sobre puntos fijos de transformaciones *no* (necesariamente) lineales de una manera bastante brillante. Este teorema será el tópico de la tercera sección. Para enunciarlo, necesitamos una definición preliminar.

Definición 6. Se acostumbra escribir $R \smile S$ (R conmuta con S) si $RS = SR$. Se dice que un subespacio $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ es **hiperinvariante** bajo S si $R \smile S \implies R(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$. Como es claro que $S \smile S$, un subespacio hiperinvariante es invariante.

Teorema 7 (Lomonosov)**.** *Si $K \in \mathcal{K}$ con $K \neq 0$, si S es un operador no escalar ($S \notin \{\, \lambda 1 : \lambda \in \mathbb{C}\,\}$) con $S \smile K$, entonces S tiene un subespacio hiperinvariante no trivial (SHIN).*

Corolario 8. *Al tomar $S = T$, $K = p(T)$, el Teorema 2 es inmediato, porque $T \smile p(T)$ obviamente.*

Corolario 9. *Bajo las hipótesis del Teorema 7, cada operador T que conmuta con S tiene un SIN.*

Para obtener más detalles sobre la teoría de operadores cuasitriangulares, se recomienda el artículo de Douglas y Pearcy [8] en Notas de Springer 345. Deberíamos mencionar algunas clases de operadores que sí tienen SINes: si H es autoadjunto ($H = H^*$) o si N es normal ($N \smile N^*$), entonces el teorema espectral proporciona SINes (basta considerar el rango de cualquier proyector espectral de H ó N). Pero el caso de operadores de tipo $N + K$, donde N es normal y K es compacto, es *un caso no resuelto*.

Ejemplo 10. Sea H un operador autoadjunto *diagonalizable* [es decir, se puede encontrar una base ortonormal de autovectores de H: $He_n = \lambda_n e_n$; entonces H posee una matriz diagonal en esta base, $H = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$.] Sea K el operador de rango uno $|x\rangle\langle y|$ (que lleva z en $\langle y \mid z \rangle\, x$); aún en este caso aparentemente simple, no se sabe si $H + K$ posee un SIN necesariamente. Ahora, está claro que este problema es bien conocido y aún así no se ha resuelto, lo cual indica que no es trivial. Sin embargo, es muy posible que se pueda resolver si se le aplica la idea de Lomonosov "correctamente".

Para terminar, mencionamos algunos trabajos de Atzmon [9] sobre el problema de los SINes en espacios de Fréchet; él ha logrado construir:

(i) un cierto espacio de Fréchet E y un operador $T \in \mathcal{L}(E)$ tal que T es invertible pero T y T^{-1} no tienen un SIN *en común*, y en consecuencia T no tiene un SHIN;

(ii) un espacio de Fréchet E y un $T \in \mathcal{L}(E)$ tal que T no posee un SIN.

No es claro si sus métodos se pueden adaptar para construir un operador sin SIN alguna sobre un espacio de Hilbert.

2. El teorema de Deckard, Douglas y Pearcy

El espacio $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ posee varias topologías interesantes; entre ellas señalamos las topologías *uniforme* $\mathcal{T}_u$, que es la topología de la norma natural de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$; *fuerte* $\mathcal{T}_s$, *débil* $\mathcal{T}_w$ y *ultradébil* $\mathcal{T}_{uw}$. En términos de convergencia de redes, se puede definir estas topologías así:

- $T_\lambda \xrightarrow{u} T$ si y solo si $\|T_\lambda - T\| \to 0$ [norma de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$],
- $T_\lambda \xrightarrow{s} T$ si y solo si $\|T_\lambda x - Tx\| \to 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ [norma de $\mathcal{H}$],
- $T_\lambda \xrightarrow{w} T$ si y solo si $\langle y \mid T_\lambda x - Tx\rangle \to 0$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$,
- $T_\lambda \xrightarrow{uw} T$ si y solo si $\sum_{k=1}^\infty \langle y_k \mid T_\lambda x_k - Tx_k\rangle \to 0$ para todas las sucesiones $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ en $\mathcal{H}$ tales que $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\| < \infty$, $\sum_{k=1}^\infty \|y_k\| < \infty$.

Es claro que estas topologías satisfacen $\mathcal{T}_w \leqslant \mathcal{T}_s \leqslant \mathcal{T}_u$ y además $\mathcal{T}_w \leqslant \mathcal{T}_{uw} \leqslant \mathcal{T}_u$. En esta exposición no se va a necesitar la topología $\mathcal{T}_{uw}$.

Señalamos algunas propiedades bien conocidas de estas nociones de convergencia.

Lema 11. (a) *si* $T_\lambda \xrightarrow{w} T$, *entonces* $T_\lambda^* \xrightarrow{w} T^*$;

(b) *si* $T_\lambda \xrightarrow{w} T$ *y si* K *es compacto, entonces* $K T_\lambda \xrightarrow{s} K T$;

(c) *si* $A_n \xrightarrow{w} A$ *y* $B_n \xrightarrow{s} B$, *entonces* $A_n B_n \xrightarrow{w} AB$.

En el caso (c), es importante que la sucesión que converge fuertemente esté a la derecha; es en general *falso* que $B_n A_n \xrightarrow{w} BA$; además, es importante que en (c) se usa sólo *sucesiones* y no redes más generalas. Sin embargo, esta última restricción no es muy inconveniente, dado que la bola unitaria en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es compacta en la topología débil (w) y además es metrizable en esa topología, así que es suficiente trabajar con sucesiones de operadores siempre y cuando haya una cota uniforme sobre sus normas.

A raíz del Teorema 3, la búsqueda de subespacios invariantes no triviales para un operador T se reduce al caso donde T es cuasitriangular. Para empezar, recordemos la situación en dimensión finita. Si V es un espacio de Hilbert (complejo) de dimensión finita n, se sabe que es posible hallar una base ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ con respecto a la cual T tiene una matriz triangular. Así, al colocar $\mathcal{M}_j := [e_1, \dots, e_j]$,[1] se obtiene una cadena de subespacios invariantes para T:

$$\{0\} = \mathcal{M}_0 \leqslant \mathcal{M}_1 \leqslant \mathcal{M}_2 \leqslant \cdots \leqslant \mathcal{M}_j \leqslant \cdots \leqslant \mathcal{M}_n = V,$$

tales que $\mathcal{M}_{j+1} \ominus \mathcal{M}_j$ es de dimensión 1 para todo j.

El teorema que sigue da una construcción de un subespacio invariante para un operador T que cumple ciertas hipótesis; para usarlo en la producción de un SIN para T, hace falta demostrar que el subespacio así producido es no trivial.

[1]La notación $[S]$ indica el subespacio cerrado generado por el conjunto S.

Teorema 12. *Sea T un operador en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$; sea $\{P_n\}$ una sucesión de proyectores ortogonales en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ tales que* $\operatorname{rango}(P_n) = n$ *para todo n y $P_n \xrightarrow{s} 1$, Sean u, v dos vectores unitarios en $\mathcal{H}$ con $\langle u \mid v\rangle = 0$ y defínase un funcional lineal positivo ρ sobre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ por $\rho(A) := \frac{1}{2}\langle u \mid Au\rangle + \frac{1}{2}\langle v \mid Av\rangle$. Para cada n, sea*

$$\{0\} \leqslant \mathcal{M}_1^{(n)} \leqslant \mathcal{M}_2^{(n)} \leqslant \cdots \leqslant \mathcal{M}_n^{(n)} = P_n\mathcal{H}$$

la cadena de subespacios que trianguliza $T_n := P_nTP_n$ sobre el espacio $P_n\mathcal{H}$. Entonces:

(a) *ρ es débilmente continua y $\rho(E) \leqslant \frac{1}{2}$ para todo proyector ortogonal E de rango* 1.

(b) *Para cada n, se puede escoger $j \leqslant n$ de manera que el proyector Q_n sobre el subespacio $\mathcal{M}_j^{(n)}$ satisface $\frac{1}{4} \leqslant \rho(Q_n) \leqslant \frac{3}{4}$.*

(c) *Hay una subsucesión $\{Q_{n_k}\}$ que converge débilmente a un operador Q.*

(d) *Los dos subespacios $\{\, x \in \mathcal{H} : Qx = x \,\}$ y $[Q\mathcal{H}]$ son invariantes bajo T.*

Demostración. (I) Si E es un proyector ortogonal de rango uno, entonces $E = |x\rangle\langle x|$ para algún vector unitario x (este x es cualquier vector unitario en la imagen unidimensional de E). Entonces

$$\rho(|x\rangle\langle x|) = \tfrac{1}{2}\langle u \mid x\rangle\langle x \mid u\rangle + \tfrac{1}{2}\langle v \mid x\rangle\langle x \mid v\rangle = \tfrac{1}{2}|\langle u \mid x\rangle|^2 + \tfrac{1}{2}|\langle v \mid x\rangle|^2 \leqslant \tfrac{1}{2}\|x\|^2 = \tfrac{1}{2}$$

por la desigualdad de Bessel, ya que $\{u, v\}$ es parte de una base ortonormal de $\mathcal{H}$.

(II) La continuidad débil de ρ es clara. Como $P_n \xrightarrow{s} 1$, entonces $P_n \xrightarrow{w} 1$, así que $\rho(P_n) \to \rho(1) = 1$; luego $\rho(P_n) > \frac{3}{4}$ para n suficientemente grande. Considerando ahora la cadena de subespacios $\{\, \mathcal{M}_j^{(n)} : j = 0, 1, \dots, n \,\}$, la parte (i) muestra que $\rho\big(\mathcal{M}_{j+1}^{(n)} \ominus \mathcal{M}_j^{(n)}\big) \leqslant \frac{1}{2}$ para todo j y n, así que $\rho\big(\mathcal{M}_j^{(n)}\big) \leqslant \rho\big(\mathcal{M}_{j+1}^{(n)}\big) - \frac{1}{2}$. [Aquí caemos en la costumbre de identificar un proyector ortogonal con el subespacio que es su imagen.]

Luego, si n es grande, es posible escoger $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ tal que $\frac{1}{4} \leqslant \rho\big(\mathcal{M}_k^{(n)}\big) \leqslant \frac{3}{4}$. Sea Q_n el proyector ortogonal con imagen $\mathcal{M}_k^{(n)}$.

(III) Por su definición, el espacio $\mathcal{M}_k^{(n)}$ es invariante bajo T. En términos de proyectores, esta invariancia es equivalente a la ecuación $Q_nT_nQ_n = T_nQ_n$. Ahora tenemos

$$Q_nT_nQ_n = T_nQ_n = P_nTP_nQ_n = P_nT_nQ_n\,, \qquad Q_nT_nQ_n = Q_nP_nTP_nQ_n = Q_nTQ_n\,,$$

ya que $[Q_n\mathcal{H}] \subseteq [P_n\mathcal{H}]$ para todo n; así se obtiene

$$Q_nTQ_n = P_nTQ_n \quad \text{para todo } n. \tag{1}$$

(IV) Como cada Q_n es un proyector ortogonal, vale $\|Q_n\| = 1$. Los Q_n pertenecen a la bola unitaria de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, la cual es compacta y metrizable en la topología $\mathcal{T}_w$. Luego hay una subsucesión convergente: $Q_{n_k} \xrightarrow{w} Q$ para algún operador Q en esta bola. Sin perder generalidad, podemos suponer que $Q_n \xrightarrow{w} Q$.

(v) Póngase $\mathcal{N} := \{ x \in \mathcal{H} : Qx = x \} = \ker(1 - Q)$.

Sea $x \in \mathcal{N}$. Se quiere mostrar que $Tx \in \mathcal{N}$, es decir, que $QTx = Tx$. Ahora tenemos

$$\begin{aligned}\|Q_n x - x\|^2 &= \langle Q_n x - x \mid Q_n x - x\rangle = \langle Q_n x \mid Q_n x\rangle - 2\mathfrak{R}\langle x \mid Q_n x\rangle + \langle x \mid x\rangle \\ &\to \langle Qx \mid Qx\rangle - 2\mathfrak{R}\langle x \mid Qx\rangle + \langle x \mid x\rangle = 0.\end{aligned}$$

Tenemos $Q_n \xrightarrow{w} Q$, luego $Q_n T \xrightarrow{w} QT$ y $Q_n x \to x$ para $x \in \mathcal{N}$; de ahí

$$Q_n T Q_n x \to QTx \quad \text{débilmente en } \mathcal{H}, \text{ para} \quad x \in \mathcal{N}.$$

Además, como $P_n \xrightarrow{s} 1$, luego $P_n T \xrightarrow{s} T$, tenemos $P_n T Q_n x \to Tx$ en $\mathcal{H}$. De (1) sigue

$$\langle y \mid QTx\rangle = \lim_n \langle y \mid Q_n T Q_n x\rangle = \lim_n \langle y \mid P_n T Q_n x\rangle = \langle y \mid Tx\rangle \quad \text{para todo} \quad y \in \mathcal{H}.$$

Por lo tanto $QTx = Tx$ para $x \in \mathcal{N}$, es decir, $\mathcal{N}$ es invariante bajo T.

(vi) Obsérvese que $Q^* = \text{w-lim}_n Q_n^* = \text{w-lim}_n Q_n = Q$; y que $y \in \ker Q^*$ si y solo si $\langle y \mid Qx\rangle = 0$ para todo x, si y solo si $y \in [Q\mathcal{H}]^\perp$.

Por lo tanto, para mostrar que $[Q\mathcal{H}]$ es invariante bajo T, basta mostrar que $[Q\mathcal{H}]^\perp = \ker Q^* = \ker Q$ es invariante bajo T^*.

Ahora $z \in \ker Q \implies \|Q_n z\|^2 = \langle Q_n z \mid Q_n z\rangle \to \langle Qz \mid Qz\rangle = 0$, así que $Q_n z \to 0$ y luego $T^* Q_n z \to 0$, $Q_n T^* Q_n z \to 0$. Además, $Q_n \xrightarrow{w} Q$, $T^* P_n \xrightarrow{s} T^*$ muestran que $Q_n T^* P_n \xrightarrow{w} QT^*$ y con la ayuda de (1) obtenemos para todo $y \in \mathcal{H}$:

$$\langle y \mid QT^* z\rangle = \lim_n \langle y \mid Q_n T^* P_n z\rangle = \lim_n \langle y \mid Q_n T^* Q_n z\rangle = \langle y \mid 0\rangle = 0,$$

y por lo tanto $QT^* z = 0$, es decir, $T^* z \in \ker Q$ toda vez que $z \in \ker Q$. □

Observación 1. El papel del funcional ρ es el de evitar, hasta donde sea posible, que estos dos subespacios invariantes sean triviales. En efecto, la continuidad débil de ρ y la condición $\frac{1}{4} \leqslant \rho(Q_n) \leqslant \frac{3}{4}$ garantizan que $\frac{1}{4} \leqslant \rho(Q) \leqslant \frac{3}{4}$ y por lo tanto, que $0 \neq Q \neq 1$. En consecuencia:

(a) como $Q \neq 1$, se tiene que $\mathcal{N} = \ker(1 - Q) \neq \mathcal{H}$;

(b) como $Q \neq 0$, se tiene que $[Q\mathcal{H}] \neq \{0\}$.

Lo que hace falta, entonces, es alguna hipótesis sobre T que garantiza que o bien $\mathcal{N} \neq \{0\}$ o bien $[Q\mathcal{H}] \neq \mathcal{H}$. Esta hipótesis, o mejor dicho una hipótesis de este tipo, es dada por el teorema siguiente.

Definición 13. Se dice que un operador T es **cuasitriangular** si existe una sucesión de proyectores ortogonales $\{P_n\}$, con $\text{rango}(P_n) = n$, en orden creciente ($P_n \leqslant P_{n+1}$ es lo mismo que $P_n\mathcal{H} \subseteq P_{n+1}\mathcal{H}$) con $P_n \xrightarrow{s} 1$, tal que $\|P_n T P_n - T P_n\| \to 0$.

Esta definición de cuasitriangularidad es equivalente a la de la sección 1: en efecto, se toma $\mathcal{M}_n := P_n\mathcal{H}$ y se puede mostrar que $T = T_0$ puede ser aproximado (en la norma) por los operadores de rango finito $P_n T P_n$.

Teorema 5 (de nuevo)**.** *Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y si existen sucesiones $\{K_n\} \subset \mathcal{K}$ y $\{p_n\}$ de polinomios con $\|p_n(T) - K_n\| \to 0$ y $K_n \xrightarrow{w} B$ donde $B \neq 0$, entonces T posee un subespacio invariante no trivial.*

Demostración. Debido al Teorema 3, se puede suponer que T es cuasitriangular. Por su definición, hay una sucesión de proyectores de rango finito $\{P_n\}$ asociada a T y $P_n \xrightarrow{s} 1$. Ahora se puede aplicar el Teorema 12 para construir una sucesión de proyectores $\{Q_n\}$ y un operador Q tal que $Q_n \xrightarrow{w} Q$ (pasando a una subsucesión si fuere necesario), donde $\mathcal{N} := \ker(1 - Q)$ y $[Q\mathcal{H}]$ son subespacios invariantes para T.

(I) Es necesario mostrar que estos subespacios no son triviales; es decir, que $[Q\mathcal{H}] \neq \mathcal{H}$ o bien que $\mathcal{N} \neq \{0\}$.

Supongamos entonces que $[Q\mathcal{H}] = \mathcal{H}$; se debe mostrar que $\mathcal{N} \neq \{0\}$. Como $B \neq 0$ por hipótesis, y como $BQ = 0 \implies B = 0$ sobre $[Q\mathcal{H}] \implies B = 0$, se concluye que $BQ \neq 0$. Luego hay un vector $x \in \mathcal{H}$ con $BQx \neq 0$ en $\mathcal{H}$.

Entonces, para demostrar el teorema, es suficiente mostrar que $QBQ = BQ$, pues entonces $QBQx = BQx \neq 0$ y BQx es un vector no nulo en $\mathcal{N}$.

(II) $QBQ = BQ$ si y solo si $\langle y \mid QBQx\rangle = \langle y \mid BQx\rangle$ para todo x, y, si y solo si

$$\lim_n \bigl|\langle y \mid QK_nQx\rangle - \langle y \mid K_nQx\rangle\bigr| = 0 \quad \text{para todo} \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, escoja k_0 tal que $k \geqslant k_0 \implies \|p_k(T) - K_k\| < \varepsilon/5$. Tómese $k \geqslant k_0$; basta mostrar que $\bigl|\langle y \mid QK_kQx\rangle - \langle y \mid K_kQx\rangle\bigr| < \varepsilon$ si $\|x\| = \|y\| = 1$.

(III) Tenemos

$$\begin{aligned}
\bigl|\langle y \mid QK_kQx\rangle - \langle y \mid K_kQx\rangle\bigr| \leqslant{} & \bigl|\langle y \mid QK_kQx\rangle - \langle y \mid Q_nK_kQ_nx\rangle\bigr| && \text{(2a)}\\
& + \bigl|\langle y \mid Q_nK_kQ_nx\rangle - \langle y \mid Q_np_k(T)Q_nx\rangle\bigr| && \text{(2b)}\\
& + \bigl|\langle y \mid Q_np_k(T)Q_nx\rangle - \langle y \mid p_k(T)Q_nx\rangle\bigr| && \text{(2c)}\\
& + \bigl|\langle y \mid p_k(T)Q_nx\rangle - \langle y \mid p_k(T)Qx\rangle\bigr| && \text{(2d)}\\
& + \bigl|\langle y \mid p_k(T)Qx\rangle - \langle y \mid K_kQx\rangle\bigr| && \text{(2e)}
\end{aligned}$$

para cualquier n; ahora es suficiente escoger n tan grande que cada uno de estos cinco términos es menor que $\varepsilon/5$.

(IV) Es inmediato que $|\text{(2e)}| \leqslant \|y\|\,\|p_k(T) - K_k\|\,\|Q\|\,\|x\| < \varepsilon/5$.

Mostramos que (2a), (2b) y (2d) tienden a cero cuando $n \to \infty$. Para (2a), nótese que

$$Q_n \xrightarrow{w} Q \implies K_kQ_n \xrightarrow{s} K_kQ \implies Q_nK_kQ_n \xrightarrow{w} QK_kQ,$$

usando las reglas (b) y (c) del Lema 11.

Para (2b), tenemos $\|Q_nK_k - Q_np_k(T)\| \leqslant \|Q\|\,\|K_k - p_k(T)\| < \varepsilon/5$.

Para (2d), tenemos que $Q_n \xrightarrow{w} Q \implies p_k(T)Q_n \xrightarrow{w} p_k(T)Q$.

(v) Para mostrar que (2c) es pequeño, basta mostrar que $\|Q_n p(T) Q_n - p(T) Q_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, para todo polinomio p. Esto se demuestra por inducción sobre el grado de p.

Caso $p(T) = T$: la relación (1) del teorema anterior es válida, así que

$$\|Q_n T Q_n - T Q_n\| = \|P_n T Q_n - T Q_n\| = \|P_n T P_n Q_n - T P_n Q_n\| \leqslant \|P_n T P_n - T P_n\| \to 0$$

por hipótesis (tenemos $Q_n = P_n Q_n$ porque $Q_n \mathcal{H} \subseteq P_n \mathcal{H}$ por construcción de Q_n).

Caso $p(T) = T^2$: se tiene

$$\begin{aligned}
&\|Q_n T^2 Q_n - T^2 Q_n\| \\
&\qquad \leqslant \|Q_n T^2 Q_n - Q_n T Q_n T Q_n\| + \|Q_n T Q_n T Q_n - T Q_n T Q_n\| + \|T Q_n T Q_n - T^2 Q_n\| \\
&\qquad \leqslant \|Q_n T Q_n - T Q_n\| \big(\|Q_n\|\,\|T\| + \|T\|\,\|Q_n\| + \|T\|\big) \to 0.
\end{aligned}$$

Es claro cómo continuar la inducción para el caso $p(T) = T^m$, $m \geqslant 3$. Luego $|(2c)| < \varepsilon/5$ para n suficientemente grande, y todo queda demostrado. □

Observación 2. El Teorema 2 es un corolario inmediato, al tomar sucesiones constantes $p_n = p$, $K_n = K(= B)$ porque $p(T) = K \neq 0$.

Observación 3. Sería interesante obtener la conclusión de este teorema con hipótesis menos restrictivas. Desafortunadamente, se conocen ejemplos de operadores T donde toda construcción del operador asociado Q conduce a un par de espacios invariantes triviales, así que esta técnica no es suficiente, por sí sólo, para producir SINes para cualquier T.

3. El teorema de Lomonosov

El teorema de Lomonosov proporciona un criterio bien general para la existencia de un subespacio invariante no trivial de un operador. Además, el resultado es aplicable no solamente en espacios de Hilbert, sino en cualquier espacio de Banach. (Recuérdese que el Teorema 1, de Aronszajn y Smith, es válido para operadores sobre espacios de Banach.)

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach (complejo) y sea $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ su álgebra de operadores acotados. Denotamos por $\mathcal{K}$ su ideal de operadores compactos; sobre un espacio de Banach, un operador se llama *compacto* si la imagen de la bola unitaria es relativamente compacta (es decir, $K \in \mathcal{K}$ si y solo si $\overline{K(\mathcal{X}_1)}$ es compacta en la topología de la norma de $\mathcal{X}$). Una *subálgebra* $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ se llama **transitiva** si no posee subespacios invariantes no triviales (es decir, si $T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ para todo $T \in \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{M} = \{0\}$ ó $\mathcal{M} = \mathcal{X}$).

El método está basada en el uso apropiada de un teorema de puntos fijos.

Teorema 14 (Schauder, Tijonov)**.** *Si $\mathcal{L}$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo y si $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$ es compacto y convexo, entonces cada función continua $f\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ tiene un punto fijo: hay un punto $x_0 \in \mathcal{K}$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Corolario 15. *Si $\mathcal{C}$ es una parte cerrada y convexa de un espacio de Banach, si $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es una función continua, y si existe un conjunto compacto $\mathcal{K}$ tal que $f(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}$, entonces existe $x_0 \in \mathcal{C}$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Demostración. Escribimos $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{K})$ para denotar la *clausura convexa* de $\mathcal{K}$; es inmediato que $\mathcal{K} \subseteq \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{C}$. Además, es sabido que la clausura convexa de un compacto es también compacta, así que $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{K})$ es compacta, se sigue que $f(\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{K})) \subseteq \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{K})$ y por lo tanto hay un punto fijo x_0 de f en $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{K})$. □

En 1973, Lomonosov y Voiculescu [7, 10] extendieron el teorema de Aronszajn y Smith al caso de dos operadores compactos que conmutan.

Teorema 16. *Si $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, con $K_1 \smile K_2$, entonces K_1 y K_2 tienen un SIN en común.*

Una extensión de este teorema es la siguiente.

Teorema 17. *Cada $K \in \mathcal{K}$ posee un subespacio* hiperinvariante *no trivial.*

El Teorema 17 es claramente un corolario del resultado que sigue.

Teorema 7 (de nuevo)**.** *Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ con $T \notin \{\lambda 1 : \lambda \in \mathbb{C}\}$, y si $K \in \mathcal{K}$ con $K \neq 0$ tal que $TK = KT$, entonces T posee un SHIN.*

Una extensión del Teorema 7, formulado en el lenguaje de álgebras de operadores, es la siguiente.

Teorema 18. *Si $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{L}(\mathcal{X})$ es una subálgebra transitiva y si existe $K \in \mathcal{A} \cap \mathcal{K}$ con $K \neq 0$, entonces $\overline{\mathcal{A}}^s = \mathcal{L}(\mathcal{X})$.*

Nota. En $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ se pueden considerar las topologías *uniforme* (la de la norma) y *fuerte* (la de convergencia puntual: $T_\lambda \xrightarrow{s} T$ si y solo si $\|T_\lambda x - Tx\| \to 0$ para todo $x \in \mathcal{X}$. Si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $\overline{\mathcal{B}}^s$ denota su clausura en la topología fuerte, que es en general más grande que su clausura uniforme $\overline{\mathcal{B}}$.

Demostración de (Teorema 18) $\Longrightarrow$ (Teorema 7). Sea $\mathcal{A}'_T := \{ S \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : S \smile T \}$. Por la hipótesis del Teorema 7, $\mathcal{A}'_T \cap \mathcal{K} \neq \{0\}$.

Si $\mathcal{A}'_T$ fuera transitiva, el Teorema 18 mostraría que $\overline{\mathcal{A}'_T}^s = \mathcal{L}(\mathcal{X})$. Pero es fácil ver que $\mathcal{A}'_T$ es fuertemente cerrada, así que $\mathcal{A}'_T = \mathcal{L}(\mathcal{X})$. Pero entonces T conmutaría con todo $\mathcal{L}(\mathcal{X})$, así que sería un operador escalar, contrario a hipótesis. Por lo tanto, $\mathcal{A}'_T$ no es transitiva, así que posee un SIN, el cual es un SHIN para T. □

La parte esencial del Teorema 7 es el siguiente resultado.

Teorema 19 (Lomonosov)**.** *Si $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{L}(\mathcal{X})$ es una subálgebra transitiva y si $K \in \mathcal{K}$ con $K \neq 0$, entonces existe $T \in \mathcal{A}$ tal que el operador compacto TK tiene 1 como autovalor.*

Observación 4. Obsérvese que no hay conexión alguna entre el álgebra $\mathcal{A}$ y el operador compacto K.

Observación 5. Recuerde que si un operador A es compacto, su *espectro* $\mathrm{sp}(A)$ es una parte acotada y numerable de $\mathbb{C}$, con 0 como único posible punto de acumulación; y cada $\lambda \in \mathrm{sp}(A) \setminus \{0\}$ es un autovalor de multiplicidad finita. Luego, 1 es un autovalor de TK si y solo si $1 \in \mathrm{sp}(TK)$.

Demostración de (Teorema 19) $\Longrightarrow$ (Teorema 7). Si $\mathcal{A}'_T$ fuera transitiva, por el Teorema 19 existiría $S \in \mathcal{A}'_T$ tal que $1 \in \mathrm{sp}(SK)$.

Luego $\mathcal{N} := \ker(SK - 1)$ sería un subespacio no trivial de $\mathcal{X}$: no es $\{0\}$ pues $1 \in \mathrm{sp}(SK)$, tampoco es $\mathcal{X}$ pues su dimensión es finita.

Ahora $T(SK-1) = TSK - T = STK - T = SKT - T = (SK-1)T$, así que $\mathcal{N}$ sería un SIN para T.

Como $\mathcal{N}$ es de dimensión finita, T tendría un autovalor $\mu \in \mathbb{C}$, y $\ker(T - \mu\,1)$ sería un subespacio invariante para $\mathcal{A}'_T$.

Pero $\ker(T - \mu\,1) \neq \{0\}$ por la definición de μ, y $\ker(T - \mu\,1) \neq \mathcal{X}$ porque $T \neq \mu\,1$ por hipótesis. Esta contradicción muestra que $\mathcal{A}'_T$ no es transitiva y por lo tanto T posee un SHIN. □

Demostración del Teorema 19. (i) Sin perder generalidad, podemos suponer que $\|K\| = 1$.

Escojamos $x_0 \in \mathcal{X}$ con $\|Kx_0\| > 1$. Como $\|Kx_0\| \leqslant \|K\|\,\|x_0\|$, esto implica que $\|x_0\| > 1$.

Sea $\mathcal{S} := \{\, x \in \mathcal{X} : \|x - x_0\| \leqslant 1 \,\}$. Como $\mathcal{S}$ es una bola cerrada, la compacidad de K dice que $\mathcal{D} := \overline{K\mathcal{S}}$ es compacto en $\mathcal{X}$.

(ii) Para cada $T \in \mathcal{A}$, sea $\mathcal{U}_T := \{\, y \in \mathcal{X} : \|Ty - x_0\| < 1 \,\}$. Como $\mathcal{U}_T = T^{-1}(\operatorname{Int}\mathcal{S})$, $\mathcal{U}_T$ es abierto.

Afirmación: $\bigcup\{\, \mathcal{U}_T : T \in \mathcal{A} \,\} = \mathcal{X} \setminus \{0\}$.

Es claro que 0 no está en esta unión porque $0 \notin \mathcal{S}$ pues $\|x_0\| > 1$.

Si $z \neq 0$, $z \notin \bigcup \mathcal{U}_T$, entonces $[\mathcal{A}z]$ sería un subespacio invariante del álgebra $\mathcal{A}$, no nula pues $z \neq 0$ y $\mathcal{A}$ no aniquila $\mathbb{C}z$, tampoco igual a $\mathcal{X}$ porque $\operatorname{dist}(x_0, [\mathcal{A}z]) \geqslant 1$; lo cual contradiría la transitividad de $\mathcal{A}$.

(iii) Obsérvese que $0 \notin \mathcal{D}$ porque $\|Kx_0\| > 1$ y $x \in \mathcal{S} \implies \|Kx - Kx_0\| \leqslant \|K\|\,\|x - x_0\| \leqslant 1$. Luego, $\operatorname{dist}(0, \mathcal{D}) \geqslant \|Kx_0\| - 1 > 0$. Esto implica que $\{\, \mathcal{U}_T : T \in \mathcal{A} \,\}$ es un cubrimiento abierto de $\mathcal{D}$.

Por lo tanto, existen $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{A}$ con $\mathcal{D} \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}_T$.

(iv) Si $x \in \mathcal{S}$, entonces $Kx \in \mathcal{D}$ y luego Kx está en algún $\mathcal{U}_T$; al aplicar T_j se regresa a $\mathcal{S}$ (es decir, $T_jKx \in \mathcal{S}$) y se puede aplicar K de nuevo. Como hay más de un T_j, construiremos el operador T del enunciado como un "promedio" de los T_j con una adecuada partición de la unidad.

(v) Para cada $j = 1, 2, \dots, n$, sea $\alpha_j(y) := \max\{0, 1 - \|T_jy - x_0\|\}$ para $y \in \mathcal{X}$; fíjese que $0 \leqslant \alpha_j(y) \leqslant 1$ y que α_j es continua.

Además, por la parte (iii), $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(y) > 0$ para $y \in \mathcal{D}$. Podemos entonces normalizar esta suma a 1 para puntos de $\mathcal{D}$, al colocar

$$\beta_j(y) := \frac{\alpha_j(y)}{\alpha_1(y) + \cdots + \alpha_n(y)} \quad \text{para} \quad y \in \mathcal{D}.$$

Ahora los β_j son funciones continuas sobre $\mathcal{D}$ y $\sum_{j=1}^{n} \beta_j(y) = 1$ en $\mathcal{D}$, es decir, los β_j forman una *partición de la unidad* sobre $\mathcal{D}$.

(vi) Defínase $f : \mathcal{S} \to \mathcal{X}$ por $f(x) := \sum_{j=1}^{n} \beta_j(Kx)\, T_jKx$.

Es claro que f es continua; además $f(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$ porque

$$\|f(x) - x_0\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \beta_j(Kx)\, \|T_jKx - x_0\| \leqslant \sum_{\alpha_j(Kx)\neq 0} \beta_j(Kx) \leqslant 1 \quad \text{para} \quad x \in \mathcal{S}.$$

Queremos concluir que f tiene un punto fijo en $\mathcal{S}$; por el Corolario 15, es suficiente mostrar que hay un conjunto compacto $\mathcal{K}$ tal que $f(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{S}$; basta entonces demostrar que $f(\mathcal{S})$ es relativamente compacto.

(vii) Sea $\{x_m\}$ una sucesión en $\mathcal{S}$; $\{f(x_m)\}$ es una sucesión en $f(\mathcal{S})$.

Ahora $\{Kx_m\} \subseteq K(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{D}$ y $\mathcal{D}$ es compacto; luego hay una subsucesión $\{x_{m_k}\}$ de $\{x_m\}$ tal que $Kx_{m_k} \to y_0 \in \mathcal{D}$. Entonces $\beta_j(Kx_{m_k}) \to \beta_j(y_0)$ para todo j. Así,

$$f(x_{m_k}) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j(Kx_{m_k})\, T_j K x_{m_k} \to \sum_{j=1}^{n} \beta_j(y_0)\, T_j x_0\,.$$

Por lo tanto, cada sucesión en $f(\mathcal{S})$ tiene una subsucesión convergente; es decir, $f(\mathcal{S})$ es relativamente compacto.

(viii) De ahí se puede concluir que existe $x \in \mathcal{S}$ tal que $f(x) = x$. En otras palabras:

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j(Kx)\, T_j K x = x.$$

Ahora colóquese $T := \sum_{j=1}^{n} \beta_j(Kx)\, T_j$; como combinación lineal de los T_j, es claro que T pertenece a $\mathcal{A}$.

También es claro que x es un autovector de TK asociado al autovalor 1, y con esto el teorema queda demostrado. $\square$

El tema de las álgebras transitivas ha sido extensamente estudiado cuando el espacio de base es un espacio de Hilbert. En efecto, hay una conjetura de Kadison al respecto.

Conjetura. *Si $\mathcal{A} \leq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es una subálgebra transitiva, entonces $\overline{\mathcal{A}}^{s} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

Obsérvese que el Teorema 18 de Lomonosov dice que esta conjetura es válida bajo la hipótesis suplementaria de que $\mathcal{A}$ contenga un operador compacto no cero. Una línea de investigación recomendable es la obtención de otras hipótesis suplementarias que permiten verificar esta conjetura. Por ejemplo, se conoce el siguiente resultado de Arveson [11]. Se dice que un operador autoadjunto H tiene "multiplicidad uno" si es unitariamente equivalente al operador de multiplicación por x en un espacio $L^2(\mathbb{R}, dm)$, con m una medida de Borel apoyada en $\operatorname{sp}(H)$.

Teorema 20 (Arveson)**.** $\overline{\mathcal{A}}^{s} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *si $\mathcal{A}$ es una subálgebra de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ que contiene un operador no cero $H = H^*$ de multiplicidad uno.*

Para más detalles sobre estos tópicos, se recomienda el libro [12] de Radjavi y Rosenthal: *Invariant Subspaces*, Springer, 1973.

Referencias

[1] N. Aronszajn and K. T. Smith, "Invariant subspaces of completely continuous operators", Ann. Math. **60** (1954), 345–390.

[2] A. Bernstein and A. Robinson, "Solution of an invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos", Pac. J. Math. **16** (1966), 421–431.

[3] P. R. Halmos, "Invariant subspaces of polynomially compact operators", Pac. J. Math. **16** (1966), 433–437.

[4] C. Apostol, C. Foiaş and L. Zsidó, "Some results on nonquasitriangular operators", Indiana U. Math. J. **22** (1973), 1151–1161.

[5] D. Deckard, R. Douglas and C. M. Pearcy, "On invariant subspaces of quasitriangular operators", Amer. J. Math. **91** (1969), 637–647.

[6] C. M. Pearcy, *Some Recent Developments in Operator Theory*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics **36**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1978.

[7] V. J. Lomonosov, "Invariant subspaces for operators commuting with compact operators", Funct. Anal. Appl. **7** (1973), 55–56.

[8] R. G. Douglas and C. M. Pearcy: "Invariant subspaces of non-quasitriangular operators", in *Proceedings of a Conference on Operator Theory*, Lecture Notes in Mathematics **345**, Springer, Berlin, 1973, pp. 13–57.

[9] A. Atzmon, "An operator without invariant subspaces on a nuclear Fréchet space", Ann. Math. **117** (1983), 669–694.

[10] D. Voiculescu, "Some extensions of quasitriangularity", Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 18 (1973), 1439–1456.

[11] W. Arveson, "Subalgebras of C^*-algebras", Acta Math. **123** (1969), 141–224.

[12] H. Radjavi and P. Rosenthal, *Invariant Subspaces*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **77**, Springer, Berlin, 1973.