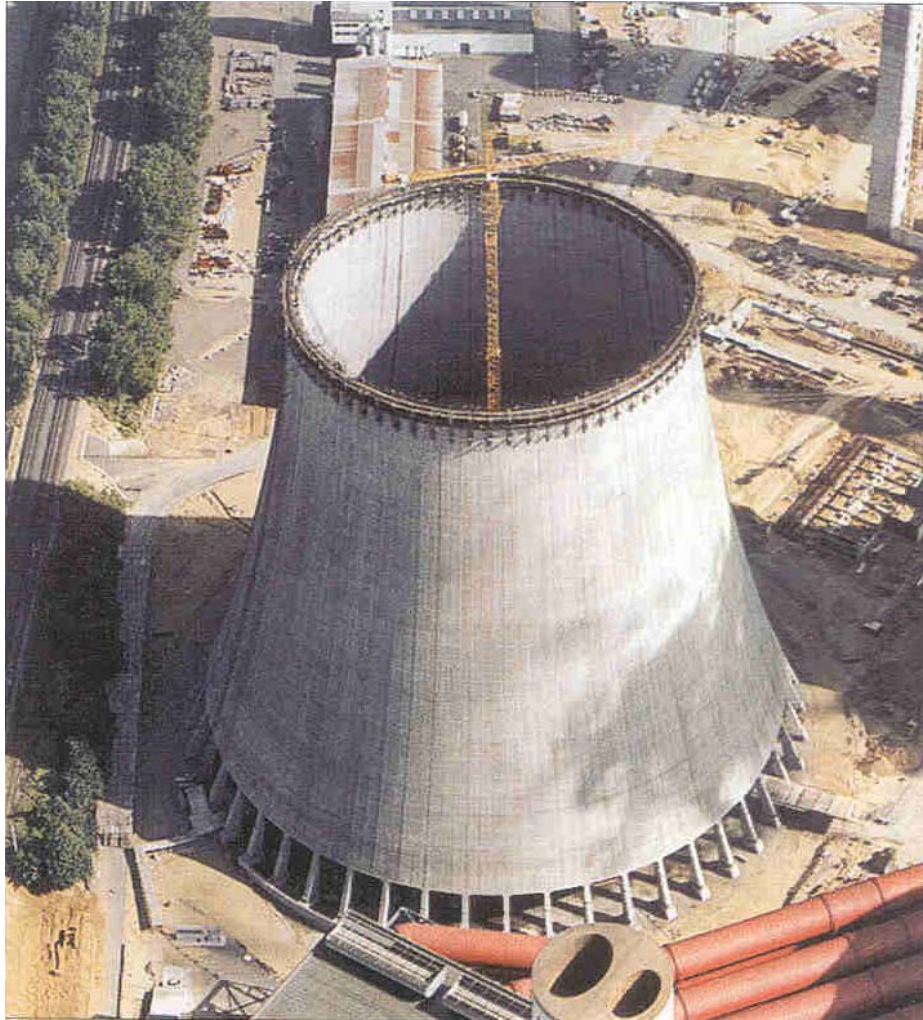


Concreto Estructural

Comportamiento y Diseño



Ing. Guillermo Santana, Ph.D.
Miembro del Comité 318 del ACI
Escuela de Ingeniería Civil
Universidad de Costa Rica

2012



American Concrete Institute®
Advancing concrete knowledge

Capítulo de Costa Rica

Texto preparado únicamente como respaldo para los cursos de Concreto Estructural impartidos en la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad de Costa Rica por el Prof. Guillermo Santana. Se utilizaron como base para la preparación de este documento el reglamento **ACI 318S-11 : Reglamento para Concreto Estructural y Comentario**, el texto **Reinforced Concrete : Mechanics and Design 6Ed** de los profesores J.K. Wight y James G. MacGregor y el **Código Sísmico de Costa Rica 2010**. No se recomienda el uso de este texto para ninguna otra finalidad más que para la aquí establecida.

INDICE

1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 Estructuras de Concreto Reforzado.....	1
1.2 Mecánica del Concreto Reforzado	1
1.3 Elementos de concreto reforzado	2
1.4 Factores incidentes en la escogencia del concreto para una estructura	3
2. PROCESO DE DISEÑO	11
2.1 Objetivos del Diseño	11
2.2 Proceso de Diseño	11
2.3 Estados Límite y el Diseño del Concreto Reforzado.....	12
2.3.1 Estados Límite	12
2.3.2 Diseño para Estados Límite.....	13
2.3.3 Relación Básica de Diseño	14
2.4 Seguridad Estructural.....	15
2.5 Cálculo probabilístico de los factores de seguridad.....	16
2.6 Procedimientos de diseño especificados por la norma ACI	18
2.6.1 Diseño por Resistencia	18
2.6.2 Diseño por Esfuerzos de Trabajo.....	18
2.6.3 Diseño Plástico	18
2.7 Factores y combinaciones de carga en el ACI 318S-08	20
2.7.1 Terminología y Notación.....	21
2.7.2 Factores de carga y combinaciones de carga en las secciones 9.2.1 a 9.2.5 de la norma ACI.....	21
2.7.3 Factores de reducción de resistencia, ϕ , sección 9.3 norma ACI.....	25
2.8 Cargas y solicitaciones.....	26
2.8.1 Solicitaciones Directas e Indirectas	26
2.8.2 Clasificación de cargas.	26
2.8.3 Especificaciones de cargas	27
2.8.4 Cargas muertas	27
2.8.5 Cargas vivas debidas a uso y ocupación.....	29
2.8.6 Clasificación de edificaciones para cargas de viento, nieve y sismo	31
2.8.7 Cargas de techo, L_r , y cargas de lluvia, R	31
2.8.8 Cargas de construcción.....	31
2.8.9 Cargas de viento	32
2.8.10 Cargas autoequilibrantes.....	34
3. MATERIALES	47
3.1 Concreto	47
3.2 Resistencia del concreto	47
3.2.1 Mecanismo de agrietamiento y falla del concreto sometido a compresión.....	47
3.2.2 Resistencia del Concreto a la Compresión	50
3.2.3 Resistencia del Concreto a la Tracción.....	52
3.2.4 Resistencia bajo cargas biaxiales y triaxiales	55
3.3 Propiedades mecánicas del concreto	57
3.3.1 Curva esfuerzo-deformación para concreto normal en compresión	57
3.3.2 Curva de esfuerzo-deformación para concreto normal en tracción	60
3.4 Refuerzo	60
3.4.1 Barras corrugadas laminadas en caliente	61
4. FLEXIÓN	83
4.1 Introducción.....	83

4.1.1 Regiones B y Regiones D	83
4.1.2 Análisis versus Diseño.....	83
4.1.3 Resistencia requerida y resistencia de diseño	84
4.1.4 Momentos positivos y momentos negativos	84
4.1.5 Símbolos y abreviaciones	84
4.2 Teoría de Flexión	85
4.2.1 Teoría de flexión para concreto reforzado	85
4.3 Análisis de vigas de concreto reforzado	88
4.3.1 Análisis de la capacidad a flexión de una viga de sección transversal general.....	88
4.3.2 Fallas controladas por Tracción y Compresión y Falla Balanceada	89
4.3.3 Análisis de vigas rectangulares con refuerzo de tracción únicamente	91
4.4 Diseño de vigas rectangulares.....	100
4.4.1 Factores generales que afectan el diseño de vigas rectangulares	100
4.4.2 Diseño de Vigas Rectangulares con Refuerzo de Tracción	106
4.5 Vigas T	117
4.5.1 Introducción.....	117
4.5.2 Aplicaciones prácticas de vigas T.....	117
4.5.3 Ancho efectivo del ala y refuerzo transversal.....	117
4.5.4 Análisis de Vigas T.....	118
4.5.5 Diseño de vigas T	124
4.6 Vigas con acero de compresión.....	127
4.6.1 Efecto del refuerzo de compresión sobre la resistencia y el comportamiento	127
4.6.2 Razones para usar refuerzo a compresión.....	127
4.6.3 Análisis de vigas con refuerzo de tracción y compresión.....	128
4.6.5 Aros para refuerzo de compresión	131
5. CORTANTE EN VIGAS.....	163
5.1 Introducción y teoría básica.	163
5.1.1 Esfuerzos en vigas elásticas no-agrietadas	163
5.1.2 Esfuerzo cortante promedio entre grietas	165
5.1.3 Acción de viga y acción de arco.....	165
5.1.4 Refuerzo a cortante.....	166
5.2 Comportamiento de vigas durante la falla en cortante	166
5.2.1 Comportamiento de vigas sin refuerzo en el alma.....	167
5.2.2 Regiones B y D.....	168
5.2.3 Agrietamiento inclinado	168
5.2.4 Fuerzas internas en una viga sin estribos.....	169
5.2.5 Factores que afectan la resistencia al cortante en vigas sin refuerzo en alma.....	170
5.2.6 Comportamiento de vigas con refuerzo en el alma.....	171
5.3 Análisis y diseño de vigas de R/C ante cortante (ACI).....	172
5.3.1 Estados límite de falla de cortante: Vigas sin refuerzo en el alma.....	172
5.3.2 Estados límite de falla de cortante: Vigas con refuerzo en el alma	173
5.3.3 Refuerzo mínimo en el alma.....	175
5.3.4 Factor de reducción de resistencia al cortante	175
5.3.5 Ubicación del cortante máximo para el diseño de vigas.....	175
5.3.6 Cortante al centro de vigas cargadas uniformemente	176
5.4 Cortante en vigas y columnas sujetas a carga axial.....	179
5.4.1 Tracción axial	180
5.4.2 Compresión axial.....	180
6. TORSIÓN	199
6.1 Introducción.....	199
6.1.1 Esfuerzos cortantes debidos a torsión en elementos no-agrietados	199
6.1.2 Esfuerzos principales debidos a torsión.....	202
6.2 Comportamiento de elementos de concreto reforzado sujetos a torsión.....	203

6.2.1 Torsión pura.....	203
6.2.2 Cortante, Momento y Torsión combinados	204
6.3 Métodos de diseño para torsión.....	204
6.3.1 Método de diseño por flexión sesgada–ACI 1971 a 1989	204
6.4 Método de cercha espacial plástica/tubo de pared delgada	206
6.4.1 Límite inferior para la consideración de la torsión	206
6.4.2 Area de estribos para torsión	207
6.4.3 Area de refuerzo longitudinal	208
6.4.4 Valor de θ	211
6.4.5 Momento y torsión combinados	211
6.5 Diseño para flexión, cortante y torsión–ACI 318-08.....	212
6.5.1 Selección de sección transversal para torsión.....	212
6.5.2 Ubicación de sección crítica para torsión	212
6.5.3 Definición de <i>Acp</i> y <i>pcp</i>	212
6.5.4 Definición de <i>Aoh</i>	213
6.5.5 Refuerzo para la torsión: Cantidades y detalles.....	213
6.6 Aplicación del método de diseño para torsión–ACI 318-08	216
6.6.1 Repaso de los pasos en el método de diseño	216

7. DESARROLLO, ANCLAJE Y EMPALME DEL REFUERZO DE ACERO 235

7.1 Introducción.....	235
7.1.1 Esfuerzo promedio de adherencia en un viga	235
7.1.2 Esfuerzos de adherencia en prisma cargado axialmente.....	236
7.1.3 Esfuerzo de adherencia real en un viga	236
7.1.4 Prueba de extracción para esfuerzos de adherencia	237
7.2 Mecanismo de transferencia por adherencia	237
7.3 Longitud de desarrollo	238
7.3.1 Longitud de desarrollo para tracción	238
7.3.2 Longitudes de desarrollo para compresión	240
7.3.3 Longitudes de desarrollo para barras aglomeradas	240
7.4 Anclajes mediante ganchos.....	241
7.4.1 Comportamiento de ganchos de anclaje	241
7.4.2 Diseño de ganchos de anclaje	241
7.5 Diseño para anclajes.....	242
7.6 Corte de barras y longitud de desarrollo de barras en elementos a flexión	247
7.6.1 Por qué se cortan las barras	247
7.6.2 Ubicación de puntos de corte por flexión	248
7.6.3 Desarrollo de refuerzo (barras) en puntos de fuerza máxima en la barra	250
7.6.4 Desarrollo de barras en regiones de momento positivo	250
7.6.5 Efecto de discontinuidades en puntos de corte de barras.....	253
7.6.6 Requisitos para integridad estructural.....	254
7.7 Cálculo de puntos de corte de barras.....	254
7.7.1 Procedimiento general	254
7.7.2 Cálculo gráfico de puntos de corte por flexión.....	262
7.8 Empalmes	263
7.8.1 Traslapos de tracción	263
7.8.2 Traslapos de compresión	264
7.8.3 Empalmes soldados, mecánicos y extremo-a-extremo	264

8. CONDICIONES DE SERVICIO 287

8.1 Introducción.....	287
8.2 Análisis elástico de secciones de viga	287
8.2.1 Cálculo de EI.....	287

8.2.2 Esfuerzos debidos a cargas de servicio en viga agrietada.....	290
8.2.3 Sección transformada corregida por edad.....	291
8.3 Agrietamiento	291
8.3.1 Tipos de Grietas.....	291
8.3.2 Normativa para el Control de Agrietamiento	293
8.3.3 Refuerzo en las caras laterales del alma	293
8.4 Deflexiones en Vigas de Concreto	294
8.4.1 Comportamiento de carga-deflexión de una viga de concreto.....	294
8.4.2 Rigidez a la Flexión y Momento de Inercia.....	294
8.4.3 Deflexiones instantáneas y adicionales ante carga sostenida.....	296
8.5 ACI 318-08 Artículo 8.3 Métodos de análisis	303

9. COLUMNAS 315

9.1 Introducción	315
9.2 Columnas con aros y columnas helicoidales	315
9.2.1 Comportamiento de columnas con aros y columnas helicoidales.....	316
9.2.2 Capacidad de columnas cargadas axialmente	317
9.3 Diagramas de interacción	317
9.4 Diagramas de Interacción para Columnas de Concreto	318
9.4.1 Solución mediante compatibilidad de deformaciones unitarias.....	318
9.4.2 Diagramas de interacción para columnas circulares	327
9.4.3 Propiedades de los diagramas de interacción para columnas de concreto reforzado.....	328
9.4.4 Diagramas de interacción simplificados	329
9.5 Diseño de columnas cortas	330
9.5.1 Tipo de cálculos—Análisis y diseño	330
9.5.2 Factores que inciden en la ecogencia de columnas	331
9.5.3 Empalmes de barra	333
9.5.4 Espaciamiento y requisitos constructivos de aros.....	333
9.5.5 Ejemplos de diseño	334

10. LOSAS EN DOS DIRECCIONES: COMPORTAMIENTO, ANÁLISIS Y DISEÑO..... 359

10.1 Introducción	359
10.2 Antecedentes históricos de las losas en dos direcciones	360
10.3 Comportamiento de losa cargada a falla en flexión	361
10.4 Análisis de Momentos en losas en dos direcciones	362
10.5 Distribución de momentos en losas	365
10.5.1 Relación entre curvaturas y momentos en losas	365
10.5.2 Momentos en losas apoyadas sobre muros o vigas rígidas.....	366
10.5.3 Momentos en losas apoyadas sobre columnas aisladas	367
10.6 Diseño de losas	368
10.6.1 Pasos en el diseño de losas	369
10.6.2 Razón de rigidez entre viga y losa, α_f	370
10.6.3 Espesor mínimo de losas en dos direcciones	371
10.7 El método directo de diseño	373
10.7.1 Limitaciones en el uso del método directo de diseño	373
10.7.2 Distribución interna de momentos en paneles – Losas sin vigas entre apoyos.....	374
10.7.3 Transferencia de Momentos a las Columnas	383
10-8 Métodos de Pórticos Equivalentes	384
10-9 Uso de Computadores para el Análisis de Pórticos Equivalentes	384
10-10 Resistencia de Cortante en Losas en Dos Direcciones	384
10-11 Transferencia de cortante y momento combinados en losas en dos direcciones	386
10.11.1 Conexiones losa-columna cargadas con cortante y momento	386
10.11.2 Propiedades del perímetro de cortante.....	389

10.11.3 Patrones de carga para esfuerzo cortante máximo debido a transferencia de cortante y momento combinados.....	392
10.11.4 Cálculo del momento alrededor del centroide del perímetro de cortante	392
10.11.5 Consideración de transferencia de momento en ambas direcciones principales.....	393
10.11.6 Análisis alterno del máximo esfuerzo de cortante debido a transferencia de cortante y momento combinados en conexiones exteriores	394
10.11.7 Refuerzo de cortante para conexiones losa-columna que transfieren cortante y momento	394
10-12 Requisitos de Detalle y de Refuerzo.....	399
10.12.1 Abacos	399
10.12.2 Capiteles de Columnas	400
10.12.3 Descolgado para cortante.....	401
10.12.4 Refuerzo	401
10-13 Diseño de Losas sin Vigas	404
10-14 Diseño de Losas con Vigas en Dos Direcciones	404
10-15 Cargas de Construcción en Losas	411
10-16 Deflexiones en Sistemas de Losas en Dos Direcciones.....	412
10-17 Uso de Postensionamiento	412

11 LOSAS EN DOS DIRECCIONES: ANÁLISIS ELÁSTICO Y DE LÍNEA DE FLUENCIA 461

12 DISEÑO SISMO RESISTENTE 475

12.1 Introducción.....	475
12.1.1 Requisitos para diseño sísmico.....	475
12.2 Espectro de Respuesta Sísmico.....	476
12.2.1 Espectros de Velocidad y de Desplazamiento	476
12.2.2 Factores que afectan los espectros de respuesta pico.....	476
12.2.3 Efecto de la rigidez del suelo de cimentación sobre el espectro de respuesta	478
12.3 Requisitos para Diseño Sísmico	478
12.3.1 Categorías de Diseño Sísmico	478
12.3.2 Sistemas estructurales para resistencia de fuerzas laterales.....	479
12.3.3 Efecto de la configuración de la edificación.....	480
12.4 Fuerzas Sísmicas en Estructuras	482
12.4.1 Método de fuerza lateral equivalente para el cálculo de las fuerzas sísmicas.....	482
12.4.2 Distribución de fuerzas laterales en la altura de la edificación.....	484
12.5 Ductilidad en Elementos de Concreto Reforzado	486
12.6 Disposiciones Generales del ACI para Diseño Sísmico.....	487
12.6.1 Aplicabilidad	487
12.6.2 Materiales	487
12.6.3 Factores de carga, combinaciones de carga y factores de reducción de resistencia.....	488
12.6.4 Factores de carga y de resistencia—Secciones 9.2 y 9.3 de la norma ACI	488
12.6.5 Diseño por capacidad.....	488
12.6.6 Diseño de Columna Fuerte – Viga Débil.....	489
12.7 Elementos en flexión en Pórticos Especiales.....	490
12.7.1 Límites geométricos en secciones transversales de vigas.....	490
12.7.2 Clasificación de los momentos resistentes.....	490
12.7.3 Refuerzo longitudinal (horizontal)	491
12.7.4 Desarrollo y empalme de refuerzo de flexión.....	492
12.7.5 Refuerzo transversal	492
12.8 Columnas en Pórticos Especiales	500
12.8.1 Capacidad requerida y refuerzo longitudinal.....	500
12.8.2 Refuerzo transversal	502
12.9 Juntas de Unión en Pórticos Especiales	504
12.10 Diafragmas Estructurales	506

12.11 Muros Estructurales.....506

12.12 Elementos de Pórticos no Diseñados para Resistir Fuerzas Inducidas por Movimientos
Sísmicos506

12.13 Estructuras Prefabricadas Especiales.....506

12.14 Cimentaciones507

REFERENCIAS 525

APÉNDICES 527

Programa del Curso527

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Estructuras de Concreto Reforzado

El concreto y el concreto reforzado son usados como materiales de construcción en todos los países. En muchos de ellos, y tal es el caso de Costa Rica, el concreto reforzado es el material estructural dominante en la construcción tecnificada. Esta naturaleza universal del concreto reforzado proviene de la amplia disponibilidad de las barras de refuerzo de acero y de los elementos constituyentes del concreto: arena, piedra y cemento; además de la relativa sencillez de las destrezas necesarias para su fabricación y su economía comparado con otras formas constructivas. El concreto y el concreto reforzado son usados en puentes, edificios de toda índole (ver figuras 1-1, 1-2 y 1-3), estructuras subterráneas, tanques de almacenamiento, torres de televisión, estructuras de exploración y producción petrolera, represas e incluso barcos.

1.2 Mecánica del Concreto Reforzado

El concreto es muy resistente a la compresión pero muy débil a la tracción. Como resultado, la aplicación de cargas, los cambios de temperatura o la contracción restringidos pueden dar paso a esfuerzos de tracción en exceso de su resistencia, produciéndose grietas. En la viga de *concreto simple* mostrada en la figura 1-5b el momento alrededor del punto O debido a las cargas aplicadas es resistido por un par interno de tracción-compresión que produce tracción en el concreto. Tal viga falla abrupta y completamente una vez que se forma la primera grieta. En una viga de *concreto reforzado* (figura 1-5c), se colocan barras de acero dentro del concreto de tal forma que las fuerzas de tracción necesarias para lograr el equilibrio de momentos después del agrietamiento es provisto por las barras.

De forma alternativa, se pueden colocar barras de refuerzo en un ducto cerca de la cara inferior de la viga, como se muestra en la figura 1-6, para luego estirarlas o *preesforzarlas*, de forma tal que reaccionen con el concreto de la viga. Esto pondría al refuerzo en tracción y al concreto en compresión. Esta compresión retrazaría el agrietamiento de la viga. A un elemento como el descrito se le denominaría una viga de *concreto pre-esforzado*. Al refuerzo de una viga como la descrita se le denomina *tendón de pre-esforzamiento* y consiste de acero de muy alta resistencia.

La construcción de un elemento de concreto reforzado requiere de la utilización de una formaleta o encofrado con la forma del elemento a construir. La formaleta debe ser lo suficientemente fuerte como para soportar el peso y la presión hidrostática del concreto húmedo así como todas las cargas aplicadas a éste por los trabajadores, el equipo de construcción utilizado, y otras fuerzas a las que pueda estar sujeta la estructura de la cual forma parte el elemento en cuestión: viento, sismo, etc. El concreto debe ser colocado en

la formaleta durante el proceso de colado. Una vez que éste ha endurecido, se puede proceder a remover el encofrado.

1.3 Elementos de concreto reforzado

Las estructuras de concreto reforzado están compuestas de una serie de *elementos* individuales que interactúan para soportar las cargas aplicadas a la misma. El segundo piso del edificio mostrado en la figura 1-7 está construido a base de losa y viguetas. Aquí una serie de nervaduras o viguetas paralelas soportan la carga proveniente de la losa. Las reacciones que soportan a las viguetas aplican a su vez cargas sobre las vigas, las cuales están apoyadas sobre las columnas. En este tipo de piso, la losa tiene dos funciones: (1) transfiere las cargas vivas y muertas hacia las viguetas, y (2) sirve como ala superior de las viguetas, las cuales se comportan como vigas **T** que transmiten las cargas a las vigas principales ubicadas formando ángulo recto con éstas. El primer piso del edificio de la figura 1-7 está formado de un arreglo de losa y vigas en dos direcciones perpendiculares. La losa se apoya directamente sobre las vigas, las cuales descansan sobre las columnas. Las cargas en las columnas son transmitidas a las fundaciones, las cuales distribuyen la carga sobre un área de suelo lo suficientemente grande como para evitar una sobrecarga del mismo. Algunos tipos de suelos podrían requerir el uso de fundaciones de pilotes u otros tipos de fundaciones profundas. En el perímetro del edificio, las cargas de piso son transferidas directamente a los muros (figura 1-7) o bien a columnas exteriores (figura 1-8). Los muros y las columnas están a su vez apoyados en muros de sótano (figura 1-8) o muros de fundación (figura 1-7).

Suponemos que las losas en la figura 1-7 transfieren las cargas en la dirección Norte-Sur hacia las viguetas (2° piso) o las vigas (1er piso), éstas a su vez transfieren las cargas en la dirección Este-Oeste a otras vigas, columnas o muros. A este comportamiento se le denomina como acción de *losa en una dirección* y es análogo al de un piso de madera en una casa, en la cual la estructura de entrepiso transmite las cargas a las viguetas ubicadas perpendicularmente a ella, y luego éstas a las vigas principales, etc.

La posibilidad de encofrar y construir losas de concreto hace posible encontrar tipos de las losas o placas como las mostradas en la figura 1-8. En ellas, las cargas aplicadas al techo y al piso intermedio son transmitidas en dos direcciones hacia las columnas mediante acción de *placa*. A estas losas se les conoce como *losas en dos direcciones*.

El primer piso de la figura 1-8 está construido con una losa plana que contiene áreas de mayor espesor denominadas *ábacos* y ubicadas en la intersección con las columnas. Adicionalmente, la parte superior de las columnas está ensanchada en forma de *capiteles*. Este engrosamiento provee una profundidad adicional para aumentar la resistencia al momento y al cortante adyacente a las columnas. Además contribuyen a disminuir las deflexiones de la losa.

El techo del edificio mostrado en la figura 1-8 tiene un espesor uniforme siempre. A este tipo especial de *losa plana* se le denomina *placa plana*. Pisos a base de placas planas son

muy usados en construcción habitacional porque el envés de la losa es plano y puede ser usado de cielo raso del piso inferior. De igual importancia resulta el hecho de que la formaleta de una placa plana es generalmente más barata que la de losas planas con *ábacos* o para pisos con losas y vigas en una dirección.

Un tipo de entrepiso muy usado en Costa Rica se basa en la utilización de *viguetas pretensadas* que son colocadas sobre vigas secundarias perpendiculares a éstas. A la vez, las vigas secundarias pueden descansar sobre vigas principales o muros. El espacio entre viguetas es rellenado con bloques de concreto de tipo cajón. Este espacio entre viguetas es luego nivelado con una loseta de muy pequeño espesor. La figura 1-4 presenta una vista parcial de un entrepiso de viguetas pretensadas antes del colado de la loseta. Los bloques de concreto terminan formando una serie de ductos internos en el entrepiso que permite la colocación de tuberías para conducción de los diferentes servicios en el edificio: agua, electricidad, etc. Adicionalmente, estos entrepisos resultan de un espesor mucho más grande que el de una losa plana. Usualmente de 200 a 300 mm, lo que les da una mayor rigidez y por lo tanto evita las deflexiones excesivas. Además por esta misma característica, termina teniendo una apariencia similar a las placas planas porque su envés resulta en una superficie plana muy atractiva para construcción habitacional y para locales comerciales pequeños.

1.4 Factores incidentes en la escogencia del concreto para una estructura

La escogencia de si una estructura deberá ser construida de concreto, acero, mampostería, o madera depende de la disponibilidad de los materiales y de un número de decisiones de índole económico y social. Algunas de las consideraciones pueden resumirse de la siguiente manera:

- 1. Economía.** Frecuentemente, la consideración más importante es el costo total de la estructura. Este es, desde luego, función de los costos de los materiales, de la mano de obra y del tiempo necesario para concluir la obra. Los entrepisos de concreto tienden a ser más delgados que los de sistemas en acero estructural porque las vigas principales, las secundarias y las viguetas todas caben dentro del mismo peralte, como se mostró en la figura 1-7, o bien los entrepisos son placas planas como se mostró en la figura 1-8. Esto termina produciendo una reducción en la altura total del edificio comparado con la misma construcción en acero. Este hecho conduce a menores cargas de viento porque habrá menos área expuesta y a ahorros en fachadas y en dispositivos mecánicos y eléctricos. Sin embargo, es frecuente que el costo total se vea más afectado por el tiempo total de construcción debido a que el contratista así como el dueño deben poner su dinero para realizar la construcción y no tendrán ganancia en su inversión hasta tanto la edificación no esté lista para ser ocupada. Como resultado, el ahorro financiero debido a una construcción rápida puede resultar mucho más ventajoso que cualquier ahorro en materiales y encofrados. Los materiales para edificaciones de concreto reforzado tienen

gran disponibilidad y pueden ser producidos conforme se vayan necesitando, en contraposición al acero estructural, el cual debe ser ordenado y pagado en forma parcial de antemano. Cualquier medida que el diseñador pueda implementar para estandarizar la geometría de los elementos y sus formaletas redundará en un ahorro global. Por ejemplo, los tamaños de las columnas pueden ser iguales para varios pisos con el objeto de ahorrar dinero en formaletas, aunque compensando la estandarización mediante cambios en la resistencia del concreto o en el porcentaje de refuerzo de acero utilizado que reflejen la variación sobre la resistencia requerida de las columnas.

2. **Pertinencia del material ante su función arquitectónica y estructural.** Un sistema estructural a base de concreto reforzado con frecuencia permite al diseñador combinar tanto las funciones estructurales como las arquitectónicas. El concreto tiene la ventaja de que es colocado en una condición plástica y se le da la forma deseada y la textura mediante formaletas y técnicas de acabados. Esto permite que elementos tales como placas planas y otros tipos de losas sirvan como elementos de carga mientras proveen a la vez el entrepiso acabado y las superficies de cielo raso. En forma similar, los muros de concreto reforzado pueden proveer superficies arquitectónicamente atractivas en adición a tener la habilidad de resistir cargas de gravedad, viento o fuerzas sísmicas. Finalmente, la escogencia del tamaño y la forma es definida por el diseñador y no es impuesta mediante la disponibilidad de elementos manufacturados.
3. **Resistencia al fuego.** La estructura en un edificio debe resistir los efectos del fuego y permanecer en pie mientras el edificio es evacuado y el fuego es extinguido. Un edificio de concreto tiene una resistencia al fuego de 1 a 3 horas sin necesidad de ningún tratamiento especial. Los edificios de acero estructural o de madera deben ser sometidos a revestimientos especiales para lograr un comportamiento similar al mencionado para el concreto.
4. **Rigidez.** Los ocupantes de un edificio pueden encontrar molestas las oscilaciones causadas por el viento o las vibraciones en los entrepisos encontradas en los edificios de acero. En el caso de los edificios de concreto reforzado, debido a su mayor masa y rigidez, las vibraciones mencionadas rara vez ocurren.
5. **Bajo mantenimiento.** Los elementos de concreto inherentemente requieren menor mantenimiento que los de acero o madera. Esto es particularmente cierto si se ha usado concreto denso, con inclusión de aire, en estructuras expuestas a efectos ambientales y si se ha tenido el cuidado de diseñar desagües que no interfieran con la estructura.
6. **Disponibilidad de materiales.** Arena, piedra, cemento y las instalaciones apropiadas para realizar la mezcla del concreto son elementos ampliamente disponibles. Adicionalmente, el acero de refuerzo es más fácilmente transportable a los sitios de construcción que el acero estructural. Como resultado, el concreto estructural es utilizado aun en localidades muy remotas.

Por otro lado, hay un número de factores que pueden hacer que se escoja otro material diferente. Estos incluyen:

1. **Baja resistencia a la tracción.** Como se dijo anteriormente, la resistencia a la tracción del concreto es mucho más baja que su resistencia a la compresión (aproximadamente 1/10), y consecuentemente, el concreto está sujeto al agrietamiento. En casos de uso estructural, este problema es superado mediante el uso de acero de refuerzo el cual toma las fuerzas de tracción y a la vez limita los anchos de grietas a valores aceptables. Adicionalmente, deben tomarse las precauciones necesarias durante el diseño y la construcción para que las grietas que se presenten no causen sensación de inseguridad a los usuarios, ni que permitan la penetración del agua.
2. **Encofrados y apuntalamiento.** La construcción en concreto reforzado colado en sitio requiere de tres pasos que no son necesarios para las construcciones en acero o en madera. Estos son (a) la instalación de encofrados, (b) la remoción de los encofrados y (c) el apuntalamiento del nuevo concreto para soportar su peso hasta que éste alcance una resistencia adecuada. Cada uno de estos pasos requiere de mano de obra y materiales innecesarios para otros métodos constructivos.
3. **Resistencia por unidad de peso o volumen relativamente baja.** La resistencia a la compresión del concreto es de un 8 a un 15 % de la del acero, mientras que su densidad es aproximadamente un 30% de la del acero. Como resultado, una estructura de concreto requiere un mayor volumen y mayor peso que lo que requiere una estructura comparable de acero estructural. Por esta razón, usualmente se utiliza acero estructural para estructuras de luces muy grandes.
4. **Cambios de volumen en el tiempo.** Tanto el concreto como el acero estructural se ven sometidos a las mismas expansiones y contracciones térmicas. Como hay menos masa de acero sometida a estos cambios de temperatura, y además como el acero es un mejor conductor, el efecto térmico es más evidente sobre éste que sobre el concreto. Por otro lado, el concreto sufre contracciones por resecamiento que pueden causar deflexiones y agrietamiento. Más aun, las deflexiones tienden a crecer con el tiempo debido a la viscoelasticidad del concreto (flujo plástico ante cargas constantes).

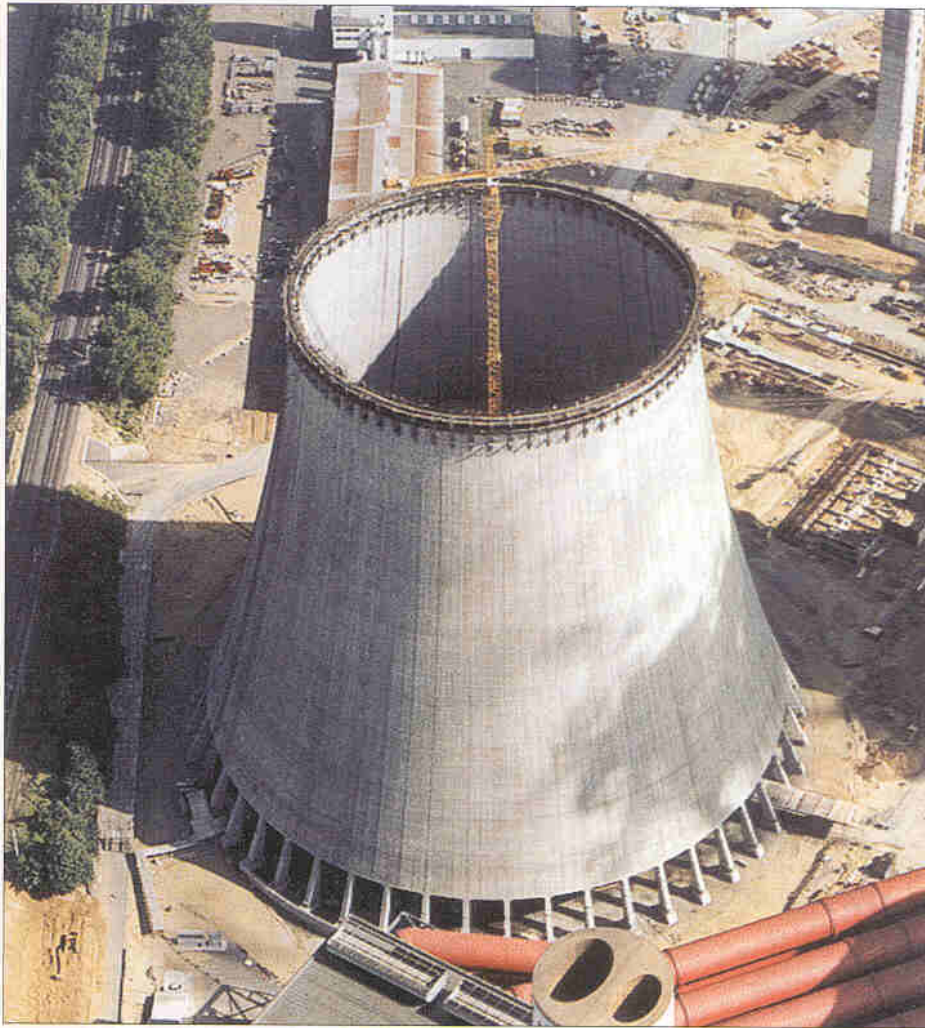


Fig. 1: Aerial view of the tower under construction in August 1999 (Heitkamp)

Figura 1–1 Torre de enfriamiento con 200 m de alto y 153 m de diámetro basal y espesor que varía de 0.27 a 0.21 m apoyado sobre 48 columnas de 14.7 m de alto. Niederaussem, Alemania. (Tomado de SEI Vol 11, n 2, mayo 2001).



Figura 1–2 Ayuntamiento de Toronto, Canadá. Dos torres de 20 y 27 pisos de altura con un auditorio circular entre ellas. Estas estructuras y las terrazas, estanques y plaza que las rodean ilustran el grado al cual arquitectura e ingeniería estructural pueden combinarse para crear una escultura viviente.(Tomado de Neish Owen Rowland & Roy, Arquitectos Ingenieros, Toronto, Canadá)



Figura 1-3 Puesto postensado de suspensión, con un claro central de 124 metros, sobre el Río Colorado, Ruta Nacional 1, Costa Rica (Diseño T.Y. Lin Internacional-Indeca Ltda.; supervisión MOPT-BEL Ingeniería; construcción Carrez Int. S.A.).



Figura 1-4 Detalle de la instalación de un entrepiso de viguetas pretensadas en las vigas coladas en sitio (Cortesía de Holcim-Costa Rica).

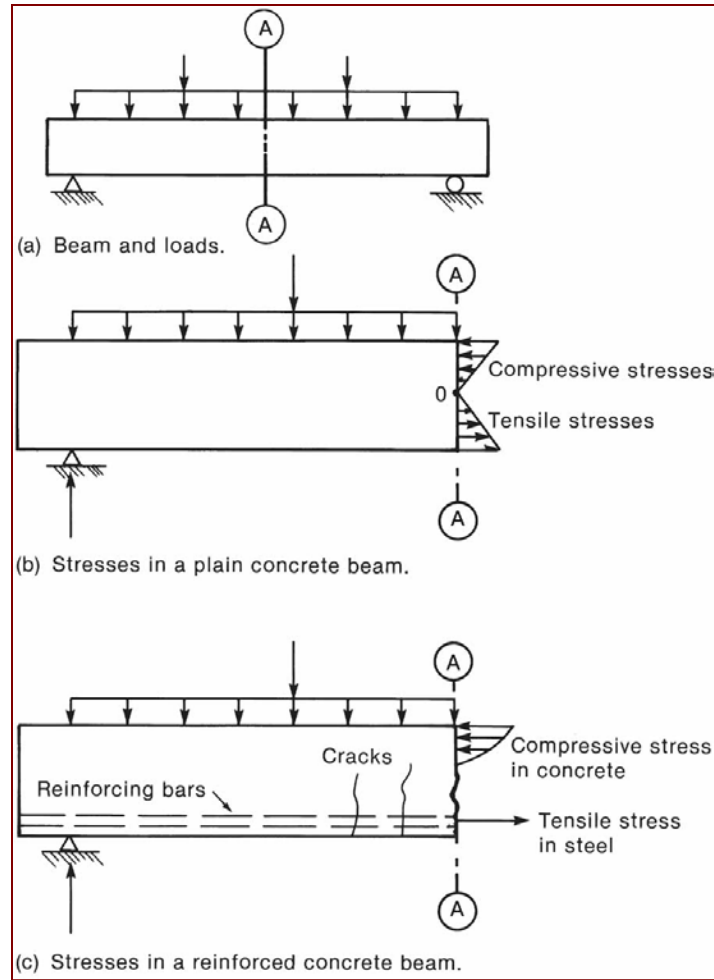


Figura 1-5 Vigas de concreto simple y concreto reforzado.

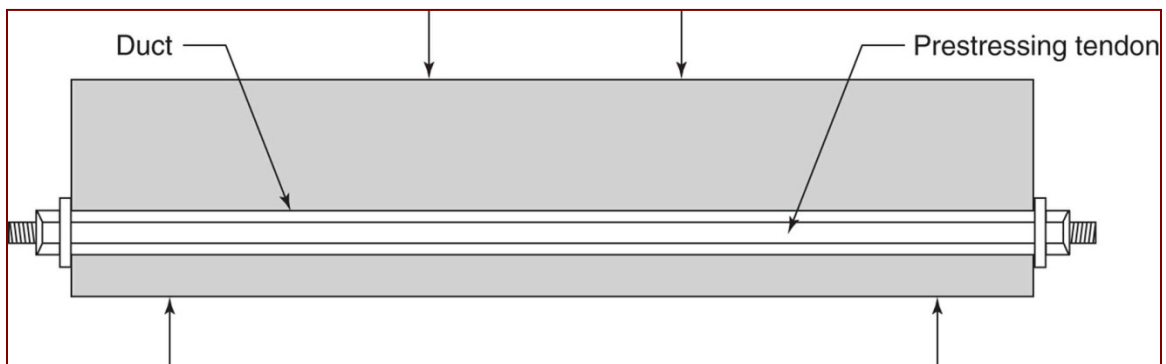


Figura 1-6 Viga de concreto pre-esforzado.

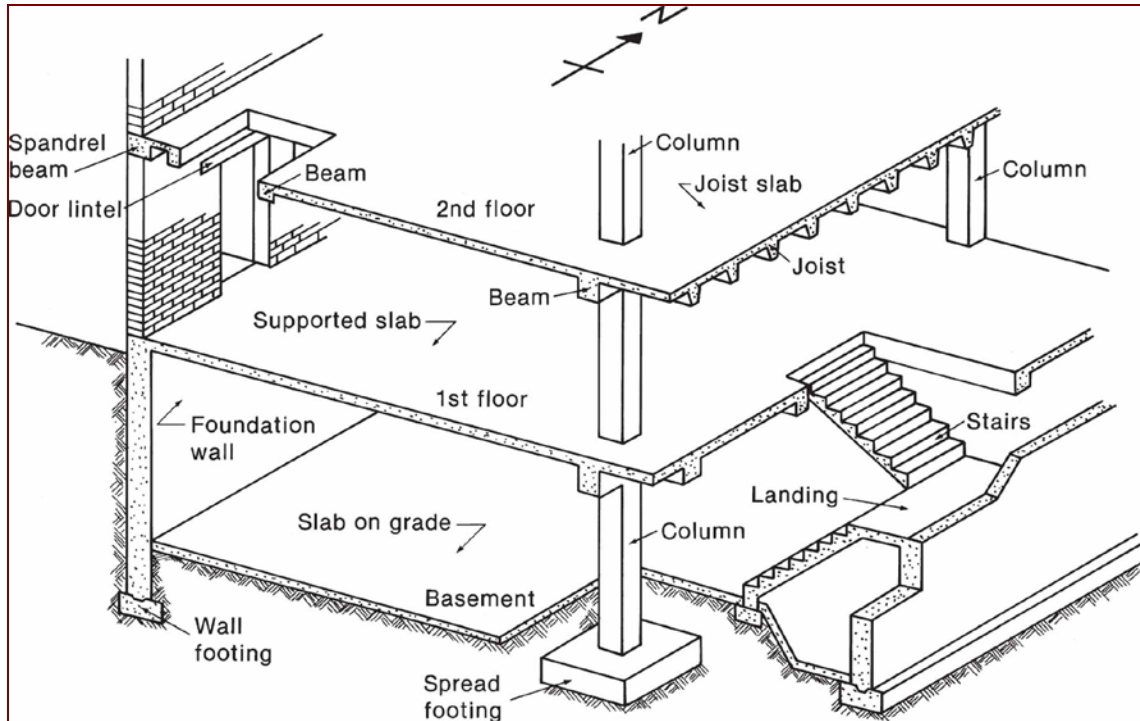


Figura 1-7 Elementos de un edificio de concreto reforzado. (Tomado de CRSI, 1971)

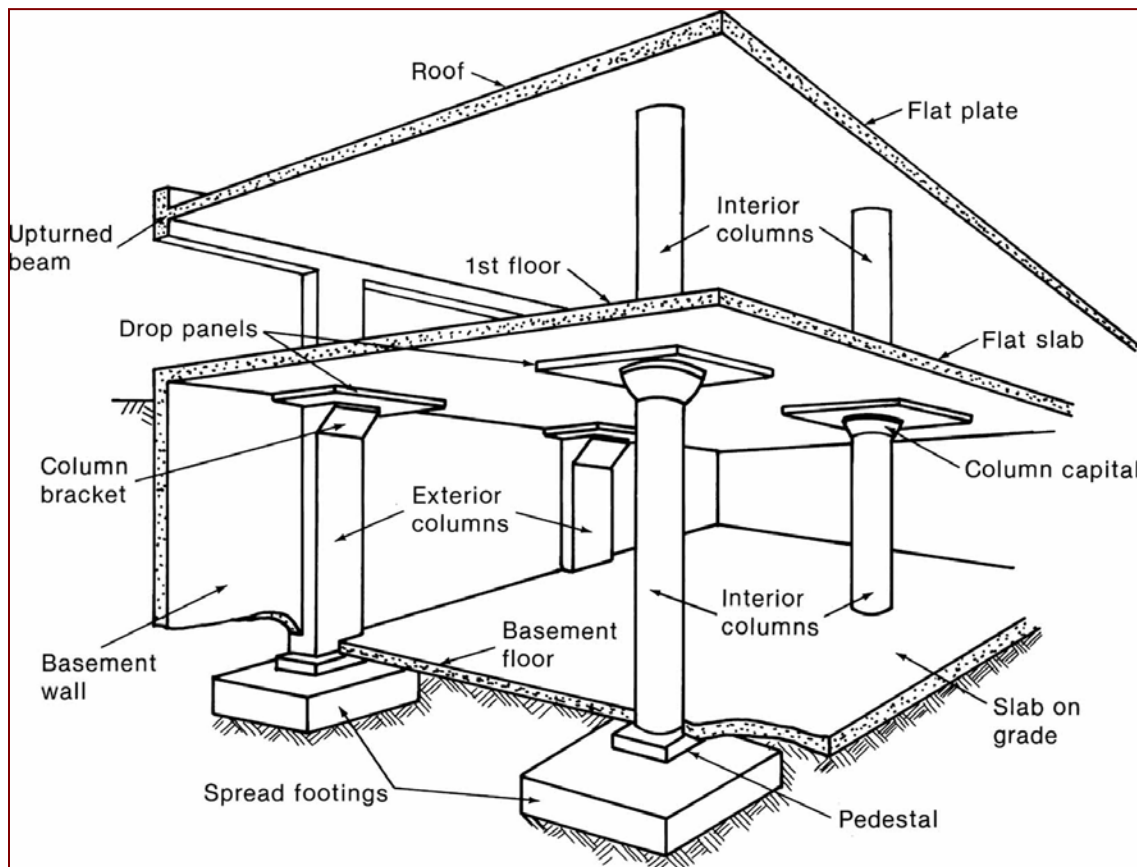


Figura 1-8 Elementos de un edificio de concreto reforzado. (Tomado de CRSI, 1971)

2. PROCESO DE DISEÑO

2.1 Objetivos del Diseño

El ingeniero estructural forma parte de un equipo cuyos miembros trabajan en conjunto para diseñar un edificio, un puente, o cualquier otro tipo de estructura. En el caso de un edificio, el arquitecto provee la concepción global y los ingenieros mecánicos, eléctricos y estructurales diseñan los sistemas correspondientes del edificio.

La estructura debe satisfacer cuatro criterios principales:

1. **Conveniencia.** La disposición de espacios, luces, altura de cielos, accesos y flujo de tránsito deben complementar el uso buscado. La estructura debe calzar con su entorno.
2. **Economía.** El costo total no debe exceder el presupuesto del cliente. El trabajo en equipo ayuda a alcanzar esta meta.
3. **Suficiencia estructural.** Se trata de dos aspectos principales: (a) La estructura debe ser lo suficientemente fuerte para soportar todas las cargas anticipadas y (b) la estructura no debe deflectarse, ladearse, vibrar o agrietarse de ninguna manera que impida su funcionalidad.
4. **Mantenibilidad.** La estructura deberá ser diseñada de manera que requiera el menor y más simple mantenimiento posible.

2.2 Proceso de Diseño

El proceso de diseño es un proceso de toma de decisión secuencial e iterativo. Las tres principales fases son:

1. **Definición de las necesidades y prioridades del cliente.** Todos los edificios y demás estructuras son construidas para llenar una necesidad. Es importante que el dueño o usuario se involucre en la determinación de los atributos del edificio propuesto. Esto incluye requisitos funcionales, de estética y de presupuesto. Este último incluye costo inicial, velocidad de construcción para ocupación temprana, mantenimiento mínimo y otros factores.
2. **Conceptualización del proyecto.** Se desarrollan una serie de soluciones posibles basadas en las necesidades y prioridades del cliente. Se elaboran presupuestos preliminares y se hace la escogencia final sustentada en la satisfacción de las necesidades en relación con el presupuesto disponible. Durante esta fase, se escoge el diseño conceptual y se lleva a cabo el diseño preliminar basado en la satisfacción de las demandas de momentos, cortantes y fuerzas axiales mediante la asignación de dimensiones preliminares a los elementos. Una vez hecho esto es posible obtener costos de cada una de las opciones consideradas.

- 3. Diseño de sistemas individuales.** Una vez que el concepto estructural del proyecto está definido, se puede proceder al diseño final del sistema estructural. El diseño estructural involucra tres pasos principales. Basado en el diseño preliminar de la fase 2, se ejecuta un *análisis estructural* para determinar momentos, cortantes y fuerzas axiales en la estructura. Luego se *dimensionan* los elementos individuales para resistir esas fuerzas. El dimensionamiento, también denominado *diseño de elementos*, debe tomar en cuenta también la estética global, la constructibilidad del diseño, y la mantenibilidad de la estructura final. El paso final en el proceso de diseño consiste en la preparación de los planos constructivos y sus especificaciones.

2.3 Estados Límite y el Diseño del Concreto Reforzado

2.3.1 Estados Límite

Se dice que una estructura o un elemento estructural alcanzan su *estado límite* cuando éste no es apto para satisfacer las demandas propuestas. Los estados límite para estructuras de concreto reforzado pueden ser divididos en tres grupos básicos:

- 1. Estados Límite Últimos.** Involucran el colapso estructural de una parte o de toda la estructura. Tal estado límite deberá tener una probabilidad de ocurrencia muy baja por cuanto puede conducir a pérdida de vidas y a pérdidas financieras grandes. Los principales estados límite últimos son:
 - ❑ **Pérdida de equilibrio** de una parte o de toda la estructura como cuerpo rígido. Tal tipo de falla en general incluiría ladeo o deslizamiento de la estructura y ocurriría si las reacciones necesarias para satisfacer equilibrio no pudieran ser alcanzadas.
 - ❑ **Ruptura** de porciones críticas de la estructura, conducentes a colapso parcial o total. La mayoría de lo tratado en este curso se refiere a este estado límite: fallas por flexión, fallas por cortante, etc.
 - ❑ **Colapso progresivo.** En algunos casos una falla menor puede causar que elementos adyacentes sean sobrecargados y fallen, iniciando un proceso que no concluye sino hasta que la estructura entera haya colapsado. El colapso progresivo es evitado o disminuido mediante el correcto detallamiento estructural para lograr unir a la estructura proveyendo rutas alternas de carga en caso de fallas locales. Tales fallas pueden ocurrir durante la construcción por lo que el diseñador debe tener presente las cargas durante y debidas al proceso constructivo. Se dice que una estructura tiene *integridad estructural general* si es resistente al colapso progresivo.
 - ❑ **Formación de un mecanismo plástico.** Una estructura se transforma en un mecanismo cuando fluyen las barras de refuerzo formando rótulas plásticas en suficientes secciones como para tornar inestable a la estructura.
 - ❑ **Inestabilidad** por deformación de la estructura. Este tipo de falla involucra pandeo.
 - ❑ **Fatiga.** Ruptura de elementos como consecuencia de la repetición de ciclos de esfuerzos debidos a cargas de servicio puede causar colapso.

2. **Estados Límite de Funcionalidad.** Involucran trastorno del uso funcional de la estructura pero no el colapso como tal. Como hay menor riesgo de pérdida de vidas, generalmente se acepta una probabilidad de ocurrencia mayor que para los casos de estado límite último. Los principales estados límite de funcionalidad incluyen:
 - **Deflexiones excesivas** durante servicio normal. Deflexiones excesivas pueden causar mal funcionamiento de maquinaria, pueden resultar visualmente inaceptables, y pueden conducir a daño en elementos no estructurales o a cambios en la distribución de fuerzas. En el caso de techos muy flexibles, las deflexiones debidas al peso del agua pueden crecer de forma tal que la capacidad del techo sea excedida.
 - **Espesor excesivo de grietas.** Aun cuando el concreto reforzado debe agrietarse para que la barra de refuerzo entre en funcionamiento, es posible detallar el refuerzo para que los espesores de las grietas sean minimizados. Espesores excesivos de grietas conducen a infiltraciones, corrosión de la barra de refuerzo, y deterioro gradual del concreto.
 - **Vibraciones indeseables.** Vibraciones verticales en entresijos y en puentes y vibraciones laterales y torsionales en edificios altos pueden resultar muy molestas para los usuarios. Este no es un problema usual en concreto reforzado.
3. **Estados límite especiales.** Esta clase de estados límite involucra daños o fallas debidas a condiciones o sollicitaciones anormales e incluyen:
 - Daño o colapso a consecuencia de sismos extremos
 - Efectos estructurales debidos a fuego, explosiones o colisiones vehiculares
 - Efectos estructurales debidos a corrosión o deterioro
 - Inestabilidad física o química de largo plazo

2.3.2 Diseño para Estados Límite

El *diseño para estados límite* es un proceso que involucra:

1. Identificación de todos los modos de falla posibles (i.e., identificación de los estados límite significativos).
2. Definición de los niveles de seguridad aceptables ante la ocurrencia de cada estado límite. Para estructuras normales, este paso es llevado a cabo por las autoridades a cargo de la elaboración de normas de diseño y construcción, quienes especifican combinaciones de cargas a utilizar y revisan los factores usados. Para estructuras inusuales el ingeniero a cargo del proyecto puede revisar si los niveles normales de seguridad son adecuados.
3. Diseño para los estados límite significativos.

Para edificios, el diseño para estado límite se lleva a cabo dimensionando los elementos para resistir los estados límite último y luego efectuando una revisión del comportamiento ante estados límite de funcionalidad. Esta secuencia obedece a la necesidad de garantizar que los elementos estructurales en edificios resistan cargas sin poner en peligro a los usuarios. Sin embargo, a manera de ejemplo, para un tanque de

agua el estado límite de excesivo espesor de grietas tiene igual importancia que cualquiera de los estados límite últimos si la estructura debe permanecer sin fugas. En una estructura como ésta, el diseño puede empezar con la consideración del estado límite para espesor de grieta, seguido de una revisión de los estados límite mencionados. En el diseño de vigas de soporte para un monoriel elevado, las deflexiones de las mismas son extremadamente importantes, y el estado límite de deflexión podría entonces dominar el diseño.

2.3.3 Relación Básica de Diseño

En la figura 2-1a se muestra una viga que sostiene su propio peso w , más unas cargas aplicadas P_1 , P_2 , y P_3 . Estas causan momentos flexores, distribuidos según se indica en la figura 2-1b. Los momentos flexores se obtienen directamente de las cargas aplicadas utilizando las leyes de la estática. Se define a los momentos flexores como un *efecto de carga*. Otros tipos de efectos de carga serán, las fuerzas de cortante, las fuerzas axiales, el torque, las deflexiones y las vibraciones.

La figura 2-2a muestra la distribución de esfuerzos en la sección transversal de la viga. Los esfuerzos de compresión y de tracción pueden ser sustituidos por sus resultantes, C y T , como se muestra en la figura 2.2b. Al par resultante se le denomina *momento resistente interno*. Al momento resistente interno se le denomina *momento resistente* o *capacidad de momento de la sección* cuando se alcanza la falla de la sección transversal. El término *resistencia* también es utilizado para denotar la capacidad a cortante y fuerza axial.

La viga mostrada en la figura 2-2 soportará las cargas impuestas de manera segura si para cada sección, la resistencia del elemento excede los efectos de las cargas:

$$\text{Resistencia} \geq \text{Efecto de Carga} \quad (2-1)$$

Se utilizan *factores de reducción de resistencia* ϕ , menores que 1, y *factores de carga* α , mayores que 1, para permitir la posibilidad de que la resistencia real sea menor que la calculada y que los efectos de las cargas sean mayores que los calculados. De esta forma, la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\phi R_n \geq \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots \quad (2-2a)$$

en donde R_n representa la resistencia nominal y los S_i representan los efectos de las cargas. En términos de momentos flexores, se tendría

$$\phi_M M_n \geq \alpha_D M_D + \alpha_L M_L + \dots \quad (2-2b)$$

en donde M_n representa la *resistencia nominal de momento*. El término “nominal” implica que esta resistencia es un valor calculado con base en las resistencias específicas del concreto y del acero y en las dimensiones de los elementos según se indica en los planos. M_D y M_L son los momentos flexores debidos a la carga permanente (muerta) y a

la carga temporal (viva). El coeficiente ϕ es el factor de reducción de resistencia y los coeficientes α son los factores de mayoración de carga muerta y viva respectivamente. A éstos últimos se les denomina también *factores de resistencia*.

Ecuaciones similares pueden ser planteadas para cortante y fuerza axial:

$$\phi_v V_n \geq \alpha_D V_D + \alpha_L V_L + \dots \quad (2-2c)$$

$$\phi_p P_n \geq \alpha_D P_D + \alpha_L P_L + \dots \quad (2-2d)$$

La ecuación 2-1 es la relación básica de diseño por estados límite. Las ecuaciones 2-3 son expresiones particulares de la relación básica. Estas ecuaciones son iguales a las usadas por el ACI 318-08, excepto que en algunas ocasiones se usa denominar el lado derecho como S_u , las *fuerzas mayoradas* o bien la *resistencia requerida*.

2.4 Seguridad Estructural

Existen tres razones principales por las cuales es necesario usar algún tipo de factores de seguridad tales como los factores de carga y resistencia en el diseño estructural:

1. **Variabilidad de la Resistencia.** Las resistencias reales de vigas, columnas y otros elementos estructurales casi siempre diferirán de los valores calculados por el diseñador. Las razones principales para esto son:
 - ✚ Variabilidad de las resistencias del concreto y del acero de refuerzo
 - ✚ Diferencias entre las dimensiones finales y las dimensiones en planos
 - ✚ Efecto de las suposiciones simplificadoras hechas durante el cálculo de la resistencia de cada elemento

La figura 2-3 muestra un histograma de la razón entre la capacidad de momento obtenida mediante pruebas de laboratorio con respecto a la capacidad calculada por el diseñador. Aun cuando la resistencia media es de 1.05 veces la resistencia nominal en esta muestra, existe una alta posibilidad de que algunas de las vigas tengan una capacidad menor a la calculada.

2. **Variabilidad en solicitaciones.** Todas las cargas son variables, especialmente las cargas temporales (vivas) y las solicitaciones debidas a viento y a sismo. En la figura 2-4a se compara la carga viva en un conjunto de muestras tomadas en áreas de oficina de 15 m². Aun cuando el promedio es de 64 kg/m², 1% de las cargas medidas exceden 215 kg/m². Para este tipo de ocupación y área, los códigos de construcción recomiendan utilizar una carga viva de 250 kg/m². Para áreas más grandes, el promedio de carga viva continúa siendo de 64 kg/m² pero la variabilidad decrece, como se puede ver en la figura 2-4b. Una parte adicional que podría ser considerada como carga viva transitoria que representa cargas inusuales como almacenamiento temporal, reuniones grandes, etc. debe ser adicionada a la medición obtenida. Al final

de este capítulo se incluye la Tabla 2-1 que presenta los valores de carga viva de uso rutinario en Costa Rica.

- 3. Consecuencias de la falla.** Una serie de factores subjetivos deben ser considerados en la determinación del nivel de seguridad aceptable para una clase específica de estructuras. Estas incluyen cosas como:
- Posible pérdida de vidas humanas. Puede ser necesario tener un factor de seguridad mayor para un auditorio que para una bodega.
 - Costo social por tiempo perdido, lucro cesante o pérdidas indirectas debidas a la falla. Por ejemplo, la falla de un puente puede resultar en costos intangibles debidos a congestionamiento de tránsito y otros que pueden alcanzar valores similares al costo del daño.
 - Tipo de falla, aviso de la inminencia de la falla, existencia de rutas de carga alternas. Si la falla del elemento es precedida por deflexiones excesivas, como en el caso de la falla a flexión de una viga de concreto reforzado, las personas en peligro por la falla inminente tienen oportunidad de abandonar el recinto con suficiente antelación.
 - Costo de limpieza de escombros y reemplazo de la estructura y sus contenidos.

2.5 Cálculo probabilístico de los factores de seguridad

En la figura 2-5 se muestra la distribución de una población de resistencias, R , de un grupo de estructuras similares. Esta es comparada con la distribución de los efectos de carga máximos, S , que se espera que ocurran en esas estructuras durante sus ciclos de vida, graficada en el eje vertical de la misma figura. Por consistencia, tanto las resistencias como los efectos de carga están expresados en términos de un parámetro tal como el momento flexor. La línea de 45° en esta figura corresponde a un efecto de carga igual a la resistencia. Las combinaciones de S y R que caigan por encima de esta línea corresponden a $S > R$ y, por lo tanto, a falla. Así, el efecto de carga S_1 actuando en una estructura con resistencia R_1 causaría falla, mientras que un efecto de carga S_2 actuando en una estructura con resistencia R_2 representa una combinación segura.

Para una distribución de efectos de carga dada, la probabilidad de falla puede ser reducida incrementando las resistencias. Esto correspondería a correr la distribución de resistencias hacia la derecha en la figura 2-5. La probabilidad de falla también puede reducirse disminuyendo la dispersión de las resistencias.

El término $Y = R - S$ se le denomina *margen de seguridad*. Por definición, la falla ocurrirá si Y es negativo, representado por la zona achurada de la figura 2-6. La probabilidad de falla, P_f , es la probabilidad de que una combinación particular de R y S de un valor negativo de Y . Esta probabilidad es igual al área achurada dividida entre el área total bajo la curva en la figura 2-6. Esto puede expresarse como

$$P_f = \text{probabilidad de } [Y < 0] \quad (2-3)$$

La función Y tiene un valor medio \bar{Y} y una desviación estándar σ_Y . De la figura 2-6 se puede observar que $\bar{Y} = 0 + \beta\sigma_Y$, en donde $\beta = \bar{Y}/\sigma_Y$. La distribución se corre hacia la derecha mediante el incremento la resistencia, haciendo \bar{Y} mayor, β también se hará mayor y el área achurada P_f decrecerá. Por lo tanto, P_f es función de β . Al factor β se le denomina *índice de seguridad*.

Si Y es una distribución estadística estándar, y si \bar{Y} y σ_Y son conocidos, entonces la probabilidad de falla puede calcularse a partir de tablas estadísticas como una función del tipo de distribución y del valor de β . Consecuentemente, si Y es una distribución normal y β es 3.5, entonces $\bar{Y} = 3.5\sigma_Y$, y, de las tablas para distribuciones normales, P_f es $1/909$, o 1.1×10^{-4} . Esto indica que a grosso modo 1 de cada 10,000 elementos estructurales diseñados sobre la base de que $\beta = 3.5$ fallarán debido a carga excesiva o subresistencia en algún momento de su vida útil.

Los valores apropiados de P_f (y por lo tanto de β) se escogen tomando en cuenta las consecuencias de la falla. En la práctica de diseño actual, β se toma entre 3 y 3.5 para fallas dúctiles con consecuencias de falla normales y entre 3.5 y 4 para fallas repentinas o fallas que tengan serias consecuencias.

Como las resistencias y las cargas varían de manera independiente, es aconsejable tener un factor, o una serie de factores, que tomen en cuenta la variabilidad en resistencias y una segunda serie de factores para considerar la variabilidad en los efectos de carga. A estos se les denomina como *factores de reducción de resistencia (factores de resistencia)*, ϕ , y *factores de mayoración de carga (factores de carga)*, α respectivamente. Las ecuaciones de diseño resultante son las ecuaciones (2-2a) a (2-2d).

La derivación de las ecuaciones probabilísticas para calcular valores de ϕ y α son resumidas y aplicadas en varios trabajos publicados en el pasado (MacGregor, 1983).

Los factores de resistencia y carga en las ediciones de 1971 a 1995 de la norma ACI estaban basados en un modelo estadístico que suponía que si había una oportunidad en 1000 de una “sobrecarga” y una oportunidad en 100 de una “subresistencia,” la oportunidad de que una “sobrecarga” y una “subresistencia” ocurrieran simultáneamente fuera $1/1000 \times 1/100$ o bien 1×10^{-5} . Por lo tanto, los factores ϕ fueron deducidos originalmente para que una resistencia de ϕR_n excediera los efectos de carga en 99 de 100 ocasiones. Los factores ϕ para columnas fueron divididos entonces por 1.1, porque la falla de una columna tiene serias consecuencias. Los factores ϕ para columnas con estribos cerrados que fallen de manera frágil fueron divididos por 1.1 una segunda vez para reflejar las consecuencias del modo de falla. La derivación original se presenta como un resumen en el apéndice de (MacGregor, 1976). Aun cuando este modelo se simplifica ignorando el traslape en las distribuciones de R y de S en las figuras 2-5 y 2-6, da una estimación intuitiva de las magnitudes relativas de la subresistencia y de la sobrecarga.

2.6 Procedimientos de diseño especificados por la norma ACI

2.6.1 Diseño por Resistencia

En la norma ACI 318S-08, el diseño está basado en *resistencias requeridas* calculadas a partir de combinaciones de cargas mayoradas y *resistencias de diseño* obtenidas como ϕR_n , en donde ϕ es el *factor de resistencia*, también denominado como *factor de reducción de la resistencia*, y R_n es la resistencia nominal. A este proceso se le denomina *diseño por resistencia*. En la normativa para diseño de acero del AISC, a este mismo proceso de diseño se le conoce como LRFD (Diseño por Factores de Carga y Resistencia). Diseño por resistencia y LRFD son métodos de diseño basados en estados límite pero concediendo atención primaria a los estados límite últimos con verificación posterior de los estados límite de *funcionalidad* (del inglés *serviceability*). Se especifican claramente en los incisos 9.1.1 (resistencia) y 9.1.2 (funcionalidad: deflexiones y grietas) del ACI 318-08.

9.1.1—*Las estructuras y los elementos estructurales deben ser diseñados para que tengan en cualquier sección una resistencia de diseño al menos igual a la resistencia requerida, calculada esta última para las cargas y fuerzas mayoradas en las condiciones establecidas en este reglamento.*

El término *resistencia de diseño* se refiere a ϕR_n , y el término *resistencia requerida* se refiere a los efectos de carga calculados con las cargas mayoradas, $\alpha_D D + \alpha_L L + \dots$.

9.1.2—*Los elementos estructurales también deben cumplir todos los demás requisitos de este reglamento para garantizar un comportamiento adecuado al nivel de carga de servicio.*

Esta cláusula se refiere primordialmente al control de deflexiones y a los anchos de grieta excesivos.

2.6.2 Diseño por Esfuerzos de Trabajo

Antes de 2002, el Apéndice A de la norma ACI 318 permitía ambos el diseño de estructuras de concreto por resistencia o mediante *diseño por esfuerzos de trabajo*. Este apéndice fue eliminado en 2002. El comentario a la **Sección 1.1 del ACI 318S-08** aun permite el uso de diseño por esfuerzos de trabajo, siempre que la autoridad local adopte una excepción a la norma ACI permitiendo su uso. El capítulo 8 sobre condiciones de servicio presenta algunos conceptos de diseño por esfuerzos de trabajo. Allí, el diseño se basa en *cargas de trabajo*, también denominadas *cargas de servicio* o *cargas no mayoradas*. En flexión, los esfuerzos máximos calculados elásticamente no pueden exceder los *esfuerzos permisibles* o *esfuerzos de trabajo* de 0.4 a 0.5 veces la resistencia tanto del concreto como del acero.

2.6.3 Diseño Plástico

El *diseño plástico*, también denominado *diseño límite* (no confundir con diseño por estados límite) o *diseño por capacidad*, es un proceso de diseño que considera la redistribución de momentos conforme van fluyendo las secciones transversales en los elementos, formando *rótulas plásticas* conducentes a la generación de un mecanismo plástico. Estos conceptos son de considerable importancia para el diseño sismo-resistente, en donde la ductilidad estructural conduce a la reducción de las fuerzas a ser resistidas por la estructura.

Teoremas de Plasticidad

Varios aspectos del diseño de estructuras de concreto estáticamente indeterminadas se justifican en parte mediante el uso de la teoría de plasticidad. Estos incluyen el diseño por resistencia última de pórticos continuos y losas en dos direcciones para cargas y momentos calculados elásticamente y el uso de modelos de puntal y tensor para diseño de concreto. Antes de presentar los teoremas de plasticidad, se requieren varias definiciones:

- Se dice que una distribución de fuerzas internas (momentos, fuerzas axiales y cortantes) o los correspondientes esfuerzos es *estáticamente admisible* si está en equilibrio con las cargas aplicadas y sus correspondientes reacciones.
- Una distribución de resistencias de secciones transversales se denomina como *segura* si iguala o excede las fuerzas, los momentos o los esfuerzos estáticamente admisibles en cada sección transversal de la estructura.
- Se dice que una estructura es un *mecanismo de colapso* si el número de rótulas plásticas supera en uno o más el número requerido para equilibrio estable.
- Se denomina como *cinemáticamente admisible* a la distribución de cargas aplicadas, fuerzas y momentos que resulte en suficientes rótulas plásticas para producir un mecanismo de colapso.

La teoría de plasticidad se expresa en términos de los siguientes teoremas:

Teorema de cota inferior. Si una estructura se somete a una distribución estáticamente admisible de fuerzas internas y si las secciones transversales de los elementos son escogidas para brindar una distribución segura de resistencias para la estructura y solicitación dadas, la estructura no colapsará o estará justo al punto de colapso. La distribución de fuerzas internas y momentos resultante corresponde a una solicitación de falla que representa una cota inferior para la solicitación de colapso. A ésta se le llama de cota inferior porque la solicitación de falla calculada es menor o igual a la solicitación de colapso real.

Teorema de cota superior. Una estructura colapsará si existe un conjunto de rótulas plásticas cinemáticamente admisible que resulte en un mecanismo plástico de colapso. Para cualquier mecanismo plástico de colapso cinemáticamente admisible, se puede calcular una solicitación de colapso igualando el trabajo interno al trabajo externo. La solicitación calculada por este método será mayor o igual que la solicitación real de colapso. Por lo tanto, la solicitación calculada es una cota superior para la solicitación de colapso.

Teorema de unicidad. Si el teorema de cota inferior envuelve las mismas fuerzas, rótulas y desplazamientos que la solución de cota superior, la sollicitación de colapso resultante es la sollicitación de colapso verdadera o *única*.

Para que ocurran las soluciones de cota inferior y superior, la estructura debe tener suficiente ductilidad como para permitir que momentos y fuerzas del conjunto original sea redistribuido a aquellos correspondientes a los límites de la soluciones de plasticidad.

El diseño del concreto reforzado se basa usualmente en análisis elásticos. Las secciones transversales se proporcionan para que tengan resistencias nominales reducidas, ϕM_n , ϕP_n y ϕV_n mayores o iguales que M_u , P_u y V_u resultantes del análisis elástico. Como los momentos y las fuerzas elásticas son una distribución de fuerzas estáticamente admisibles y como el diagrama de momento resistente es escogido por el diseñador como una distribución segura, la resistencia de la estructura resultante es una cota inferior.

En forma similar, los modelos de puntal-tensor presentados en el Apéndice A del ACI 318S-08 representan una cota inferior de la capacidad de estructuras de concreto si

- (a) el modelo de puntal-tensor de la estructura representa una distribución admisible de fuerzas,
- (b) las resistencias de los puntales, tensores y zonas nodales son escogidas para que sean seguras con respecto a las fuerzas calculadas en el modelo de puntal-tensor, y
- (c) los elementos y juntas de unión tienen suficiente ductilidad para permitir que las fuerzas internas, los momentos y los esfuerzos hagan la transición de fuerzas y momentos de puntal-tensor a la distribución final de fuerzas y momentos.

Por lo tanto, si se provee ductilidad adecuada el modelo puntal-tensor dará una estimación denominada como segura, la cual es una estimación de cota inferior de la resistencia del modelo de puntal-tensor. Soluciones de plasticidad son usadas para desarrollar el método de línea de fluencia y el método de franjas para el análisis de losas.

2.7 Factores y combinaciones de carga en el ACI 318S-08

La norma ACI 318S-08 presenta factores de carga y combinaciones de carga en las secciones 9.2.1 a 9.2.5 provenientes del ASCE/SEI 7-05, *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures*, con algunas pequeñas modificaciones. Los factores de carga de la sección 9.2 deben usarse con los factores de reducción de resistencia de las secciones 9.3.1 a 9.3.5. Estos factores de carga y factores de reducción de resistencia fueron derivados por Ellingwood et al (Ellingwood, Galambos, MacGregor, & Cornell, 1980) para uso en el diseño de estructuras de acero, madera, mampostería y concreto y son utilizados por la norma LRFD del AISC para estructuras de acero. Para estructuras de concreto, factores de resistencia compatibles con los factores de carga fueron derivados por el Comité ACI 318 y por Nowak (Nowak & Szerszen, 2003).

2.7.1 Terminología y Notación

La norma ACI usa el subíndice u para designar la resistencia requerida, la cual es un efecto de carga calculado a partir de las combinaciones de cargas mayoradas. La suma de las cargas mayoradas se denota U , por ejemplo en

$$U = 1.2D + 1.6L \quad (2-4)$$

donde U y el subíndice u se usan para denotar la suma de las cargas mayoradas en términos de cargas propiamente o en términos de efectos de carga, M_u , V_u y P_u .

Las resistencias de los elementos calculadas usando las resistencias especificadas de los materiales, f'_c y f_y , y las dimensiones nominales, mostradas en los planos, se denominan *resistencia nominal de momento*, M_n , *resistencia nominal de cortante*, V_n y así sucesivamente. La *resistencia nominal reducida* o resistencia de diseño es la resistencia nominal multiplicada por el factor de reducción de resistencia, ϕ . De esta forma, la ecuación de diseño es:

$$\phi M_n \geq M_u \quad (2-2b)$$

$$\phi V_n \geq V_u \quad (2-2c)$$

y así sucesivamente.

2.7.2 Factores de carga y combinaciones de carga en las secciones 9.2.1 a 9.2.5 de la norma ACI

Combinaciones de carga. Las fallas estructurales ocurren usualmente debido a la combinación de varias cargas. En años recientes estas combinaciones han sido presentadas en lo que se denomina como *formato de acción acompañante*. Este es un intento de modelar las combinaciones de carga esperadas.

Las combinaciones de carga en la **Sección 9.2.1 del ACI 318S-08** representan ejemplos de *combinaciones de carga de acción acompañante* escogidas para representar combinaciones de carga realistas que puedan presentarse. En principio, cada una de estas combinaciones incluye uno o más *cargas permanentes* (D , F y T) con factores de carga de 1.2, más la *carga variable principal* o dominante (L , S , W u otras) con factores de carga de 1.6, más uno o más *cargas variables de acción acompañante*. Las cargas de acción acompañante se calculan multiplicando las cargas especificadas (L , S , W u otras) por *factores de carga de acción acompañante* de entre 0.2 y 1.0. Estos últimos factores fueron escogidos para proveer resultados para efectos de carga de acción acompañante que fueran probables durante una instancia en la cual la carga variable principal es magnificada.

En el diseño de elementos estructurales en edificios que no están sujetos a fuerzas sísmicas o de viento significativas las cargas mayoradas se calculan con alguna de las ecuaciones (2-5, ACI Ec. 9-1) o (2-6, ACI Ec. 9-2):

$$U = 1.4(D + F) \quad (2-5)$$

donde D es la carga muerta especificada y F es la carga debido al peso y la presión de fluidos con densidades bien definidas y en tanques en los cuales la altura máxima del fluido está controlada.

Para combinaciones que incluyan carga muerta; carga viva, L ; y cargas de techo:

$$U = 1.2(D + F + T) + 1.6(L + H) + 0.5(L_r \text{ o } S \text{ o } R) \quad (2-6)$$

en donde:

- D = Carga muerta
- F = Carga debida a fluidos con presiones bien definidas y alturas máximas
- H = Carga debida a empuje de suelo, empuje de agua subterránea, o empuje de materiales a granel
- L = Carga viva
- L_r = Carga viva en el techo
- R = Carga de lluvia en el techo
- S = Carga de nieve en el techo
- T = Efecto de carga producido por las acciones combinadas de temperatura, flujo plástico, retracción, asentamiento diferencial, cemento para compensación de retracción

Cada uno de los sumandos en las ecuaciones (2-5) a (2-11) pueden ser expresados como *cargas directas* (tales como cargas distribuidas provenientes de peso propio o peso temporal) o *efectos de carga* (tales como momentos y cortantes causados por las cargas dadas). El diseño de una estructura de techo, o de las columnas y las cimentaciones que lo soportan en conjunto con uno o más pisos, tomaría la carga viva de techo igual a la mayor de las tres cargas (L_r , D o R), con las otras dos cargas de techo tomadas como cero. Si alguno de T , F o H es cero, el término correspondiente desaparece de la ecuación (2-6, ACI 9-2). Por lo tanto, para el caso común de un elemento que soporta carga muerta y viva únicamente, la ecuación ACI (9-2) se reduce a

$$U = 1.2D + 1.6L \quad (2-4)$$

Si la carga del techo excede la carga viva de piso o si una columna soporta una carga total de techo que excede la carga viva total de piso soportada por la columna:

$$U = 1.2D + 1.6(L_r \text{ o } S \text{ o } R) + (1.0L \text{ o } 0.8W) \quad (2-7)$$

Las cargas de techo son *solicitaciones variables principales* en la ecuación (2-7, ACI 9-3) y son *solicitaciones variables acompañantes* en la ecuación (2-8, ACI 9-4 y 9-2).

$$U = 1.2D + 1.6W + 1.0L + 0.5(L_r \text{ o } S \text{ o } R) \quad (2-8)$$

La carga de viento es la sollicitación variable principal en la ecuación (2-8, ACI 9-4) y es una sollicitación variable acompañante en la ecuación (2-7, ACI 9-3).

Cargas Sísmicas. Si las cargas sísmicas son significativas:

$$U = 1.2D + 1.0E + 1.0L + 0.2S \quad (2-9)$$

donde el factor de carga 1.0 para carga sísmica corresponde a un *sismo de nivel de resistencia* el cual tiene un periodo de retorno mucho más largo y por lo tanto es mayor que el *sismo de nivel de servicio*. Si la norma utilizada en una jurisdicción específica está basada en el sismo de nivel de servicio, el factor de carga para *E* es 1.4 en vez de 1.0 (ver el **Inciso 9.2.1(c) de ACI 318S-08**).

Cargas muertas que estabilizan volcamiento y corrimiento. Si los efectos de las cargas muertas estabilizan la estructura contra cargas de viento y de sismo,

$$U = 0.9D + 1.6W + 1.6H \quad (2-10)$$

o

$$U = 0.9D + 1.0E + 1.6H \quad (2-11)$$

Factor de carga para cargas vivas pequeñas. El **Inciso 9.2.1(a) de ACI 318S-08** permite que el factor de carga de 1.0 para *L* en las ecuaciones (9-3), (9-4) y (9-5) puede ser reducido a 0.5 excepto para

- (a) garajes
- (b) áreas ocupadas como lugares de reunión pública, y
- (c) todas las áreas en donde la carga viva es mayor que 500 kg/m².

Direccionalidad de la carga de viento y de la presión lateral de suelo. Antes de 1998, ASCE 7 suponía que la dirección de la carga de viento mayor coincidía con la dirección del arreglo estructural más débil. Este procedimiento requería un factor de carga de viento de 1.3. En el ASCE/SEI 7-05, las ecuaciones usadas para calcular la presión debida a la velocidad del viento, *q*, se multiplican por un *factor de direccionalidad*, *K_d*, igual a 0.85 para edificios rectangulares y 0.9 o 0.95 para tanques y chimeneas circulares. Si la carga de viento calculada no incluye este factor, el factor de carga de 1.6 para viento en las **Ecuaciones (9-4) y (9-6) del ACI 318S-08** puede ser reducido a 1.3. Para obtener los mismos valores para el viento de diseño como en versiones anteriores de la norma ACI, el factor de carga para viento debería ser $(1.3/0.85) = 1.53$. Esto fue redondeado a 1.6. El factor de carga para *H* debe ser tomado como cero en las ecuaciones (9-6) y (9-7) si el efecto de *H* se contrapone a los efectos de *W* o *E*. Cuando la presión lateral de suelo provee resistencia a los efectos estructurales provenientes de otras fuerzas, entonces no se

incluye en el cálculo de H . En su lugar, los componentes de resistencia de la presión de suelo se incluyen en la resistencia de diseño.

En el análisis de un pórtico para un edificio, frecuentemente es mejor analizar la estructura elásticamente tres veces—una para $1.0D$, otra para $1.0L$ y una para $1.0W$ —y combinar los momentos, cortantes, etc., resultantes para cada elemento según las ecuaciones (2-4) a (2-11). (La excepción a esto son los análisis de casos en los cuales la superposición lineal no aplica, tal como en el caso de análisis de segundo-orden para pórticos. En estos casos el análisis debe hacerse al nivel de cargas mayoradas.) El procedimiento se ilustra en el Ejemplo 2-1.

Ejemplo 2-1 Cálculo de efectos de carga mayorados

La figura 2-8 muestra una viga y una columna pertenecientes a un pórtico de concreto. Las cargas por metro sobre la viga son, carga muerta $w_D = 2.36$ Mg/m y carga viva $w_L = 1.12$ Mg/m. Adicionalmente, la carga de viento se representa mediante cargas concentradas en las juntas de unión. Los momentos en una de las vigas y las columnas encima y debajo de ella debidos a $1.0D$, $1.0L$ y $1.0W$ se muestran en las figuras 2-8b, c y d. Calcule las resistencias requeridas usando las ecuaciones 2-4 a 2-11.

Solución:

Para el momento en la sección A, se deben considerar cuatro combinaciones de carga:

$$U = 1.4(D + F)$$

ACI (9-1)

Como la viga no soporta un tanque conteniendo fluido, $F = 0$ y
 $U = 1.4 \times -5.40 = -7.56$ Mg-m

$$U = 1.2(D + F + T) + 1.6(L + H) + 0.5(L_r \text{ o } S \text{ o } R)$$

ACI (9-2)

Para una viga interior típica, $F = 0$ y $H = 0$.

Suponiendo que no hay asentamiento diferencial entre las columnas interiores y las exteriores y suponiendo que no hay retracción restringida, las acciones autoequilibrantes, T , son cero.

Como la viga en consideración no es una viga de techo, L_r , S y R son cero. (Notar que la carga axial en las columnas incluye fuerzas axiales de la carga del techo y de la carga viva de la losa.)

La ecuación (9-2) se reduce a

$$U = 1.2D + 1.6L$$

$$U = 1.2 \times -5.4 + 1.6 \times -2.63 = -10.7$$
 Mg-m

La ecuación (2-7) no gobierna porque no se trata de una viga de techo

ACI (9-3)

Para la ecuación (2-8):

ACI (9-4)

<p>$U = 1.2D + 1.6W + 0.5L + 0.5(L_r \text{ o } S \text{ o } R)$ donde la sección 9.2.1(a) permite la reducción de 1.0 a 0.5L, $U = 1.2 \times -5.40 \pm 1.6 \times 11.6 + 0.5 \times -2.63$ $U = -7.80 \pm 18.6$ $U = -26.4 \text{ o } 10.8 \text{ Mg-m}$ Los valores positivos y negativos del momento debido a carga de viento se deben a la posibilidad de que los vientos soplen alternativamente contra los dos lados del edificio.</p>	
<p>Los momentos debidos a carga muerta pueden contrarrestar una porción de los momentos de viento y carga viva Esto hace necesario considerar la ecuación (2-10): $U = 0.9D + 1.6W + 1.6H$ $U = 0.9 \times -5.40 \pm 1.6 \times 11.6$ $U = -4.86 \pm 18.6$ $U = -23.4 \text{ o } 13.7 \text{ Mg-m}$</p>	<p>ACI (9-6)</p>
<p>Respuesta: Las resistencias requerida, M_u, en la sección A son 13.7 Mg-m y -26.4 Mg-m. <input type="checkbox"/></p>	

2.7.3 Factores de reducción de resistencia, ϕ , sección 9.3 norma ACI

La norma ACI permite el uso de uno de dos grupos de combinaciones de carga en diseño, y también de dos grupos de factores de reducción de resistencia. Uno de los grupos de factores de carga está dado en la sección 9.2.1, con los correspondientes factores de reducción de resistencia, ϕ , dados en la sección 9.3.1. En forma alternativa, se pueden usar los factores de carga de la sección C.9.2.1 y los correspondientes factores de reducción de resistencia en la sección C.9.3.1. En este curso solo se usarán los factores de carga y de reducción de resistencia dados en el capítulo 9 de la norma ACI.

El factor de reducción de resistencia ϕ se define entonces de acuerdo a la Tabla 2-4. La figura 2-12 presenta la variación del factor de reducción de resistencia para elementos sujetos a flexión y carga axial. El gráfico presenta la variación del factor ϕ para acero de Grado 60 (4200 kg/cm²).

En regiones de alta actividad sísmica, como ciertas zonas de Costa Rica, se recomienda usar factores de reducción para cortante aun más bajos. En el **Inciso 9.3.4 del ACI 318S-08**, se puntualiza que en estructuras que resisten efectos sísmicos a base de los así denominados *pórticos especiales resistentes a momento* o *muros estructurales especiales*, los factores de reducción de resistencia de cortante ϕ deberán ser disminuidos hasta un valor de 0.60, según allí se explica.

2.8 Cargas y solicitaciones

2.8.1 Solicitaciones Directas e Indirectas

Una sollicitación es cualquier acción que de origen a esfuerzos en una estructura. El término *carga* o *solicitud directa* se refiere a las fuerzas concentradas o distribuidas que resultan del peso propio de la estructura y sus contenidos, o a presiones debidas a viento, agua o suelo. Una *solicitud indirecta* o *deformación impuesta* es un movimiento o deformación que no proviene de cargas aplicadas, pero que causa esfuerzos en una estructura. Algunos ejemplos lo constituyen asentamientos diferenciales en los apoyos de vigas continuas y retracción del concreto si la viga tiene restricción al desplazamiento axial.

Como los esfuerzos debidos a las deformaciones impuestas no resisten una carga aplicada, en general son del tipo *autoequilibrante*. Considere por ejemplo un prisma de concreto con una barra de refuerzo a lo largo de su eje. Conforme el concreto se retrae, su acortamiento es resistido por el refuerzo. El resultado es que se desarrollan una fuerza de compresión en el acero y una fuerza de tracción igual y opuesta en el concreto, como se muestra en la figura 2-8. Si el concreto se agrieta por la tracción, la fuerza de tracción en el concreto desaparece y, por equilibrio, la fuerza en el acero deberá desaparecer también. La sección 1.3.3 del ASCE/SEI 7 denomina a las deformaciones impuestas como *fuerzas autodeformantes*.

2.8.2 Clasificación de cargas.

Las cargas pueden ser clasificadas según su variabilidad con respecto al tiempo y a la ubicación. Una carga *permanente* se mantiene aproximadamente constante una vez que la estructura está terminada. Cargas *variables*, tales como cargas por uso y por viento, cambian con el tiempo. Las cargas variables pueden ser *cargas sostenidas* de larga duración, tales como el peso de archivadores en una oficina, o cargas de *corta duración* tales como el peso de las personas en la misma oficina. Deformaciones por flujo plástico en estructuras de concreto son resultado de cargas permanentes y de la porción sostenida de las cargas variables. Una tercera categoría es la de *cargas accidentales*, que incluyen colisiones vehiculares y explosiones.

Las cargas variables pueden ser *fijas* o *libres* en su ubicación. Así, la carga viva en un edificio de oficinas es libre, porque puede ocurrir en cualquier punto del área disponible. La carga de un tren en un puente no es fija longitudinalmente, pero es fija transversalmente debido a los rieles.

Las cargas son frecuentemente clasificadas como *cargas estáticas* si no causan ninguna aceleración o vibración apreciable en los elementos o en la estructura y como *cargas dinámicas* si lo hacen. Las aceleraciones pequeñas son generalmente tomadas en cuenta incrementando la carga estática especificada para de esa manera considerar los incrementos en esfuerzo debidos al efecto dinámico. Las aceleraciones más grandes, tales como las que ocurren en puentes de carreteras, rieles de grúas viajeras o soportes de

elevadores se consideran mediante la multiplicación del efecto de la carga viva por un *factor de impacto*. De forma alterna, se puede usar análisis dinámico.

Tres niveles de carga viva o de carga de viento pueden ser de importancia. La carga usada en los cálculos que involucran estados límite últimos deberían representar la carga máxima en la estructura en su vida útil. Por lo tanto en donde sea posible las cargas viva, de nieve o de viento especificadas deberían representar el valor promedio de la carga máxima correspondiente para su vida útil. Una carga acompañante es la porción de la carga variable que está presente en una estructura cuando alguna otra carga variable está en su máximo. Durante la revisión de los estados límite de funcionalidad, puede resultar deseable usar una carga viva *frecuente*, la cual es una fracción de la carga máxima promedio durante la vida útil (generalmente, de un 50 a un 60 porciento); para estimar las deflexiones debidas a carga sostenida, puede ser conveniente considerar una carga viva sostenida o cuasi-permanente, la cual es generalmente entre un 20 y un 30 porciento de la carga viva especificada. Esta diferenciación no se incluye en la norma ACI, que asume que la toda la carga especificada será la carga presente normalmente. Como resultado, las deflexiones de carga de servicio y las deflexiones debidas a flujo plástico de columnas esbeltas tienden a sobreestimarse.

2.8.3 Especificaciones de cargas

En el territorio costarricense la norma de diseño que se debe emplear es el Reglamento de Construcciones promulgado por el INVU en 1983 y actualizado en 1988. Para la consideración de las solicitaciones sísmicas, se debe considerar adicionalmente la norma denominada Código Sísmico de Costa Rica, (CSCR, 2003). Las cargas se especifican en esta última norma y están basadas en los valores de carga recomendados por las ediciones del Recommended Lateral Force Requirements and Commentary (Blue Book) de la Asociación de Ingenieros Estructurales de California (SEAOC). En años recientes, se ha dado la responsabilidad de emitir las especificaciones de cargas a la Sociedad Estadounidense de Ingenieros Civiles (ASCE) mediante el documento *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures*, ASCE/SEI 7. La versión utilizada por el ACI 318S-08 es la de 2005. Actualmente se encuentra disponible una nueva versión del ASCE/SEI 7 publicada en 2010.

En la sección a continuación, se revisan los tipos de carga presentados en el ASCE/SEI 7-05. Esta revisión intenta describir las características de las cargas variables. Para valores específicos, el lector deberá consultar directamente el CSCR más reciente.

2.8.4 Cargas muertas

La *carga muerta* en un elemento estructural es el peso del elemento mismo, más los pesos de todos los materiales incorporados permanentemente en la estructura y soportados por el elemento en cuestión. Esto incluye los pesos de las particiones permanentes, los pesos de las tuberías, alimentadores eléctricos, equipo mecánico permanente, etc. En el ASCE/SEI 7 se presentan tablas de cargas muertas.

En el diseño de un elemento de concreto estructural, es necesario estimar inicialmente el peso del elemento. En el capítulo 4 de este texto se presentan métodos para hacer estas estimaciones. Una vez que el tamaño del elemento ha sido calculado, su peso se calcula multiplicando el volumen por la densidad del concreto, tomada como 2300 kg/m^3 para concreto simple y como 2400 kg/m^3 para concreto reforzado (los 100 kg/m^3 se añaden para contabilizar el peso del refuerzo). Para elementos de concreto liviano, la densidad del concreto debe ser determinada con muestras o especificada por el productor. En elementos con mucho refuerzo, la densidad del concreto puede exceder los 2400 kg/m^3 cuando se incluye el peso del refuerzo longitudinal y el de los estribos.

Si se trabaja con unidades S.I., el peso del elemento se calcula multiplicando el volumen por la densidad de masa del concreto y por la constante gravitacional, 9.81 N/kg . En este cálculo, es usual tomar la densidad de masa de concreto normal con un contenido promedio de refuerzo (2 por ciento por volumen) como 2450 kg/m^3 , constituido por 2300 kg/m^3 para el concreto y 150 kg/m^3 para el refuerzo. El peso de un metro cúbico de concreto reforzado es entonces $(1 \text{ m}^3 \times 2450 \text{ kg/m}^3 \times 9.81 \text{ N/kg}) / 1000 = 24.0 \text{ kN}$, y el peso unitario es 24 kN/m^3 .

La carga muerta utilizada en la ecuaciones (9-1) a (9-7) de la norma ACI318S-08 es la carga calculada a partir de las dimensiones mostradas en los planos y de las densidades supuestas. Por lo tanto es un valor cercano al valor medio de esta carga. La carga muerta real diferirá del valor calculado porque las dimensiones reales y las densidades pueden ser diferentes a las usadas en los cálculos. Algunas veces los materiales son escogidos para el techo, las particiones o paredes mediante licitaciones distintas y sus pesos reales pueden no ser conocidos al momento del diseño. Los valores tabulados de densidades de materiales tienden frecuentemente a subestimar las cargas muertas reales del material colocado en la estructura.

Algunos tipos de carga muerta tienden a ser de alta incertidumbre. Estos incluyen pavimentos sobre puentes, los cuales pueden ser pavimentados varias veces durante un lapso de tiempo, o donde un espesor mayor de pavimento puede ser aplicado para corregir problemas de flecha o de alineamiento. De manera similar, el relleno sobre una estructura subterránea puede ser más profundo que lo supuesto y puede o no saturarse con agua. En la construcción de cascarones para techos u otros techos livianos, el espesor del concreto puede exceder los valores de diseño y el techo puede resultar más pesado de lo supuesto originalmente.

Si los momentos, fuerzas o esfuerzos debidos a carga muerta actúan en forma contraria a las cargas vivas o de viento, el diseñador debería examinar cuidadosamente si el efecto de la carga muerta va a estar presente siempre. Por lo tanto, las cargas muertas debidas a suelo o maquinaria pueden ser aplicadas tarde en el proceso constructivo y pudieran no ser aplicadas en forma pareja y al mismo tiempo a todos los componentes de la estructura, conduciendo a un conjunto crítico de momentos, fuerzas o esfuerzos bajo cargas parciales.

En general no es necesario tablear el peso propio de la estructura usando factores de carga 501-50a muerta α_D de 0.9 y 1.2 o 1.4 en claros sucesivos, porque las cargas muertas estructurales en claros sucesivos de una viga tienden a estar altamente correlacionados. Por otro lado, podría ser necesario tablear la carga muerta superimpuesta usando factores de carga muerta α_D de 0 o 1.2 en casos en donde la carga muerta contrariante esté ausente durante etapas constructivas o durante etapas una vez en uso.

2.8.5 Cargas vivas debidas a uso y ocupación

La mayoría de las normas constructivas contienen una tabla de cargas vivas de diseño o cargas vivas especificadas. Para simplificar los cálculos, estas se expresan como cargas uniformes sobre una área de piso. En general, una carga viva para edificio consiste de una porción sostenida debido al uso diario (ver Fig. 2-4) y una porción variable generada por eventos inusuales. La parte sostenida cambia un número de veces durante la vida útil del edificio—cuando cambian los inquilinos, cuando se reasignan las oficinas, etc. Ocasionalmente, ocurren altas concentraciones de carga viva durante periodos cuando espacios adyacentes están siendo remodelados, cuando se hacen fiestas en una oficina o cuando se almacenan materiales temporalmente. Las cargas dadas en normas de construcción tratan de representar la suma máxima de aquellas cargas que ocurrirán sobre una pequeña área durante la vida de la edificación. En la tabla 2-1 se presentan cargas vivas típicas.

En edificios en donde las particiones no permanentes puedan ser erigidas o reacomodadas durante la vida del edificio, se deben tomar las provisiones para tomar en cuenta el peso de estas particiones. El ASCE/SEI 7-05 especifica que se deben tomar en cuenta el peso de las particiones, aun cuando las particiones no se muestren en planos, a menos que la carga viva especificada sea de 400 kg/m^2 . Se acostumbra representar el peso de las particiones con una carga uniforme de 100 kg/m^2 o bien una carga uniforme calculada con el peso real o el anticipado de las particiones colocadas en su ubicación probable. ASCE/SEI 7-05 considera esto una carga viva, porque puede o no estar presente en un caso dado.

Conforme crece el área cargada, la carga promedio máxima de vida decrece porque, aun cuando es muy posible tener una carga pesada en un área pequeña, es poco probable que esto ocurra en un área grande. Esto es tomado en cuenta multiplicando las cargas vivas especificadas por un *factor de reducción de carga viva*.

En el ASCE/SEI 7-05, este factor se basa en el *área de influencia*, A_I , para el elemento que se está diseñando. El concepto de líneas de influencia y áreas de influencia se discute en el capítulo 5. Para entender el área de influencia de un elemento dado, se puede suponer que el elemento en cuestión se levanta una unidad, digamos, una pulgada como se muestra en la figura 2-9. La porción del área cargada que se levanta cuando se hace esto se denomina el área de influencia, A_I , porque las cargas que actúan en cualquier punto del área tendrán un impacto significativo sobre los efectos de carga en el elemento en cuestión. Este concepto se ilustra en la figura 2-9 para una viga de piso interior y para una columna de borde.

Contrariamente, el *área tributaria*, A_T , se extiende desde la viga o la columna hasta las líneas de cero cortante en el piso alrededor del elemento en consideración. Para la viga en la figura 2-9a, los límites de A_T están dados por las líneas de puntos a mitad de camino de las vigas adyacentes. Las áreas tributarias se muestran en tono oscuro en las figuras 2-9a y 2-9b. Examinando la figura 2-9a se nota que A_T es la mitad de A_I para la viga interior. Para la columna en la figura 2-9b, A_T es una cuarta parte de A_I . Debido a que el diseño de losas en dos direcciones se basa en los momentos totales en un panel de losa, al área de influencia para una losa como esa el ASCE/SEI la toma como el área del panel.

Versiones anteriores del ASCE 7 permitían el uso de carga viva reducida, L , en el diseño de elementos, basado en el área de influencia A_I . Sin embargo, el concepto de área de influencia no es tan conocido como el de área tributaria, A_T . En el ASCE/SEI 7-05, el área de influencia está dada por $A_I = K_{LL} A_T$, donde A_T es el área tributaria del elemento que se está diseñando y K_{LL} es la razón A_I/A_T . La carga viva reducida, L , está dada por

$$L = L_o \left[0.25 + \frac{15}{\sqrt{K_{LL} A_T}} \right] \tag{2-12}$$

donde L_o es la carga viva no reducida. Los valores de K_{LL} se toman como:

Columnas interiores y columnas exteriores sin losas en voladizo	$K_{LL} = 4$
Columnas exteriores con losas en voladizo	$K_{LL} = 3$
Columnas esquineras con losas en voladizo	$K_{LL} = 2$
Vigas interiores y vigas de borde sin losas en voladizo	$K_{LL} = 2$
Todos los demás elementos, incluyendo paneles de losas en dos direcciones	$K_{LL} = 1$

La reducción de carga viva solo aplica para cargas vivas debidas a uso y ocupación (ni nieve ni otras). No se hace reducción para áreas usadas como lugares de reunión pública, para garajes, o para techos. En el ASCE/SEI 7-05, la carga viva reducida no puede ser menor que el 50 por ciento de la carga viva sin reducir para columnas que soportan un piso o para elementos en flexión, ni menor del 40 por ciento para otros elementos.

Las cargas uniformes reducidas se aplican entonces a aquellas luces o segmentos de luces que den el cortante o el momento máximos, etc., para cada sección crítica.

El ASCE/SEI 7-05 requiere que los pisos de oficinas y garajes y pasillos sean diseñados para que soporten de manera segura o la carga uniforme reducida o una carga concentrada de 1000 lb o de 8000 lb (dependiendo del tipo de ocupación), distribuida en un área de 75 cm por 75 cm, la que cause el efecto mas desfavorable. Las cargas concentradas suponen la presencia de ítemes pesados tales como cajas fuertes, piano, ejes de vehículos, etc.

Revisando la capacidad ante cargas concentradas, es necesario en general suponer un ancho efectivo del piso para llevar la carga a los apoyos. Para pisos en una dirección, este

es usualmente el ancho de la reacción de carga concentrada más un espesor efectivo de losa a cada lado de la carga. Para losas en dos direcciones, se muestra en el capítulo 10 que una carga concentrada aplicada en varios puntos de la losa da los momentos máximos (a mitad de la luz y cerca de las columnas de apoyo) que son similares en magnitud a aquellas calculadas para un panel completo sujeto a una carga uniforme. En muchos casos, esto hace innecesario la revisión del efecto de la carga concentrada en losas en dos direcciones.

Las cargas vivas se suponen lo suficientemente grandes para tomar en consideración los efectos de impacto debidos a tránsito y uso normal. Factores especiales de impacto se dan en especificaciones de cargas para apoyos de equipo de elevadores, grandes máquinas reciprocantes o rotativas, y grúas.

2.8.6 Clasificación de edificaciones para cargas de viento, nieve y sismo

Los requisitos del ASCE/SEI 7-05 para diseño por viento, nieve y sismo se vuelven progresivamente más restrictivas conforme se incrementa el nivel de riesgo para la vida humana en el evento de un colapso. A éstos se les denomina como *categorías de uso u ocupación*:

I	Edificaciones y otras estructuras que representan una baja amenaza a la vida humana en caso de falla, tales como instalaciones agrícolas.
II	Edificaciones y otras estructuras que no caen dentro de las categorías I, III o IV.
III	Edificaciones y otras estructuras que representan una amenaza substancial a la vida humana en caso de falla, tales como lugares de asamblea, escuelas, universidades, cárceles y edificaciones con cantidades significativas de sustancias tóxicas o explosivas.
IV	Edificaciones y otras estructuras designadas como esenciales.

2.8.7 Cargas de techo, L_r , y cargas de lluvia, R

Los techos deben ser diseñados para cargas vivas mínimas (L_r) para tomar en cuenta el peso de los trabajadores y los materiales de construcción durante el proceso de erección de la estructura o cuando se hacen reparaciones. Se debe considerar también a las cargas debidas a lluvia, R . Como los desagües son rara vez inspeccionados para remover hojas y otras basuras, el ASCE/SEI 7-05 pide que los techos sean capaces de sostener la carga de toda el agua de lluvia que se pueda acumular en una porción particular del techo si el desagüe principal está bloqueado. Frecuentemente, se usan desagües de flujo controlado. Estos reducen el flujo de desagüe del agua de lluvia del techo. Esto reduce los costos de tuberías y canoas para tormentas pero añaden costos para la estructura de techo.

Si la luz del techo es mayor que 7.5 m, el agua de lluvia tenderá a formar empozamientos en las áreas de mayor deflexión. El peso del agua en estas regiones causará un incremento en las deflexiones, permitiendo mayor acumulación de agua y así sucesivamente. Si el techo no es lo suficientemente rígido, ocurrirá una falla por empozamiento cuando el peso del agua acumulada alcance la capacidad de los elementos del techo.

2.8.8 Cargas de construcción

Durante la construcción de edificaciones de concreto, el peso del concreto fresco es soportado por la formaleta, la cual frecuentemente descansa en los pisos inferiores de la estructura. Adicionalmente, los materiales de construcción usualmente se aplican en los pisos o los techos durante la construcción. La norma ACI en su inciso 6.2.2.2 establece lo siguiente:

No se pueden soportar en la estructura sin cimbra cargas de construcción que excedan la suma de las cargas muertas más vivas utilizadas en el diseño, a menos que por medio de un análisis estructural se demuestre que existe resistencia suficiente para sostener estas cargas adicionales.

2.8.9 Cargas de viento

La presión ejercida por el viento es proporcional al cuadrado de su velocidad. Debido a la rugosidad de la superficie del terreno, la velocidad del viento en un instante en particular consiste de una velocidad promedio más turbulencias superimpuestas, denominadas *ráfagas*. Como resultado, una estructura sometida a cargas de viento asume una posición deflectada promedio debido a la velocidad promedio y vibra alrededor de esta posición en respuesta a la presión de ráfaga. Adicionalmente, en general habrá deflexiones transversales al viento (debidas a descarga de vórtices) conforme el viento pasa por la edificación. La vibración debida a las ráfagas son función de (1) la relación entre la energía natural de las ráfagas y la energía necesaria para desplazar la edificación, (2) la relación entre las frecuencias de ráfaga y la frecuencia natural de la edificación y (3) el amortiguamiento de la edificación.

En el ASCE/SEI 7-05 se especifican tres procedimientos para el cálculo de las presiones de viento sobre edificaciones: el *procedimiento simplificado*, limitado en su aplicación a edificaciones de cinco niveles o menos; el *procedimiento analítico*, limitado a edificaciones regulares que no estén sujetas a carga de viento cruzado, descarga de vórtice o canalización del viento debido a obstrucciones viento arriba; y el *procedimiento de túnel de viento*, usado para edificaciones complejas. Se considerará aquí el procedimiento analítico. Variaciones de este método aplican al diseño de los sistemas principales de resistencia de fuerza de viento en edificaciones y al diseño de componentes y elementos de fachada.

En el procedimiento analítico, la presión del viento sobre el sistema principal resistente a fuerza de viento es

$$p = qGC_p - q_i(GC_{pi}) \quad (2-13)$$

donde $q = q_z$, la velocidad de la presión evaluada a la altura z desde la superficie en la pared de barlovento, $q = q_h$, la presión (succión) en el techo, pared de sotavento, que está dado por el primer término de mano derecha de la ecuación (2-13) más el segundo término, p_i , el cual toma en cuenta la presión interna. La presión interno, p_i , es la misma en todas las superficies internas para un instante de tiempo dado. De esta forma, la presión interna o la succión en el interior de la pared de barlovento es igual pero opuesta en dirección de la presión interna o succión en la parte interna de la pared de sotavento.

Como resultado, las fuerzas de viento interior sobre paredes opuestas se cancelan en la mayoría de los casos, dejando solamente la presión externa a ser resistida por el sistema principal de resistencia a fuerzas de viento. Los términos de la ecuación (2-13) se definen como:

1. **Presión de diseño, p .** La presión de diseño es una presión estática equivalente o succión en kg/m^2 que se supone actúa perpendicularmente a la superficie en cuestión. En algunas superficies, varía con la altura; en otras, se supone constante.
2. **Presión de la velocidad de viento, q .** La presión de la velocidad de viento sobre la pared de barlovento, $q_z \text{ kg/m}^2$, es la presión ejercida por el viento sobre una placa plana suspendida en el flujo del viento. Se calcula como

$$q_z = 0.00256 K_z K_{zt} K_d V^2 I \quad (2-14)$$

donde

V = velocidad de ráfaga básica de 3 segundos en km/h a una altura de 10 m sobre la superficie en terreno abierto (1 en 50 probabilidad de ser excedida en un año)

K_z = coeficiente de exposición de presión de la velocidad, que se incrementa con la altura sobre la superficie y refleja la rugosidad de la superficie del terreno

K_{zt} = el factor topográfico que considera los incrementos en la velocidad del viento cuando pasa sobre colinas

K_d = factor de direccionalidad igual a 0.85 para edificaciones rectangulares y 0.90 a 0.95 para tanques circulares y similares

I = factor de importancia, que es una función de la categoría de uso de la edificación discutido anteriormente

La constante 0.00256 refleja la densidad de masa del aire y toma en cuenta la mezcla de unidades en la ecuación (2-14).

La norma ASCE/SEI incluye mapas y tablas para V . Se debe dar atención especial para terrenos montañosos, cañones, y promontorios sujetos a condiciones de viento inusuales y regiones sujetas a tornados. El factor de importancia, I , varía entre 0.87 para categoría de uso I, a 1.0 para edificación normales (categoría de uso II), a 1.15 para categorías III y IV. Estos valores corresponden a intervalos promedio de recurrencia de 1 en 25 años para categoría de uso I, 1 en 50 años para categoría de uso II, y 1 en 100 años para categorías de uso III y IV.

En cual ubicación, la velocidad media del viento depende de la rugosidad del terreno en la dirección del viento desde el edificio en cuestión. A la altura de 200 m a 450 m, el viento alcanza una velocidad constante, como se muestra mediante las líneas verticales en los gráficos de K_z en la figura 2-10. Por debajo de esta altura, la velocidad decrece y la turbulencia, o ráfagas, se incrementa conforme uno se acerca a la superficie. Estos efectos son mayores en las áreas urbanas que en las áreas rurales, debido a la mayor rugosidad de la superficie en las áreas construidas. El factor K_z en la ecuación (2-14) relaciona la presión del viento para cualquier elevación z metros con respecto a 10 m por encima de la superficie para exposición abierta. El ASCE/SEI 7-05 da tablas y ecuaciones para K_z

como una función del tipo de exposición (urbana, de campo, etc.) y la altura sobre la superficie.

Para paredes laterales, paredes sotavento y superficies de techos, q_h es una succión constante (presión negativa) evaluada usando h igual a la altura promedio del techo.

1. Factor de respuesta a ráfaga, G . El factor de ráfaga, G , en la ecuación (2-13) relaciona las propiedades dinámicas del viento y de la estructura. Para edificios flexibles, se calcula. Para la mayoría de edificaciones que tienden a ser rígidos, se toma como igual a 0.85.
2. Coeficiente de presión externa, C_p . Cuando sopla el viento por una estructura, aplica una presión positiva en la pared de barlovento y una presión negativa (succión) en la pared de sotavento, las paredes laterales y el techo según se muestra en la figura 2-11. Las presiones globales a utilizar en el diseño de un pórtico estructural se calculan con la ecuación (2-13), donde C_p es la suma o diferencia en los coeficientes de presión para paredes de barlovento y sotavento. Así, $C_p = +0.80$ (presión) en la pared de la izquierda (barlovento) en la figura 2-11 y $C_p = -0.50$ (succión) en la de la derecha (sotavento) se suman para producir la carga en el pórtico porque tienen la misma dirección. El ASCE/SEI 7-05 da los valores de los coeficientes de presión. En la figura 2-11 se muestran los valores para una edificación con la forma y las proporciones indicadas. Para una edificación rectangular con el viento en el lado angosto, C_p para la pared de sotavento varía entre -0.5 y -0.2 .

2.8.10 Cargas autoequilibrantes

La mayoría de las cargas resultan de cosas como peso de la estructura o cargas externas aplicadas, tales como cargas vivas o cargas de viento. Estas cargas causan fuerzas y momentos internos que están en equilibrio con las cargas externas. Muchas estructuras están sujetas a *deformaciones impuestas* o *restringidas*, que son independientes de las cargas aplicadas. Ejemplos incluyen asentamientos diferenciales, esfuerzos no lineales de temperatura en tableros de puentes, retracción restringida y preesforzado de estructuras indeterminadas. Estas deformaciones causan un conjunto de fuerzas y momentos internos que se autoequilibran, como se muestra en la figura 2-8. El ASCE/SEI 7-05 las denomina *fuerzas autodeformantes*. Como estos casos de carga no involucran cargas aplicadas, la magnitud de las fuerzas y los momentos internos resultan de

- (a) la magnitud de la deformación impuesta, y
- (b) la resistencia de la estructura a la deformación (una función de la rigidez de la estructura en el momento en que ocurre la deformación).

Considere una viga de dos luces en la cual el apoyo central se asienta con respecto a los apoyos externos. La estructura resiste el asentamiento diferencial, generando fuerzas y momentos internos. Si la viga no está agrietada cuando es sometida al asentamiento diferencial, las fuerzas internas son mayores que lo que serían si la viga estuviera agrietada. Si la viga sufre flujo plástico, la magnitud de las fuerzas y momentos internos

decrece, como lo demostraron experimentalmente Ghali, Dilger y Neville (Ghali, Dilger, & Neville, 1969).

De forma similar, preesfuerzo en una viga continua de dos luces puede tender a levantar la reacción central de su apoyo, cambiando las reacciones. Esto a su vez causa fuerzas internas y los así denominados momentos secundarios que están en equilibrio con el cambio en las reacciones. La magnitud de estas fuerzas y momentos es mayor en una viga no-agrietada que en una viga agrietada. Pueden ser disipadas parcialmente por causa del flujo plástico.

El inciso 9.2.1 de la norma ACI usa el símbolo T para referirse a las fuerzas y momentos resultantes de la imposición o restricción de deformaciones y les asigna un factor de carga de 1.2. El inciso 9.2.3 establece que:

Los estimativos de asentamientos diferenciales, el flujo plástico, la retracción, la expansión de concretos de retracción compensada o las variaciones de temperatura deben basarse en una evaluación realista de tales efectos que puedan ocurrir durante la vida útil de la estructura.

El comentario para el inciso establece que:

El término “evaluación realista” se utiliza para indicar que deben usarse los valores más probables y no los valores del límite superior de las variables.

Los diseñadores usualmente toman en cuenta las deformaciones impuestas detallando cosas tales como juntas de expansión u otros medios de disipación de los efectos de deformaciones.

Tabla 2-1 Cargas Vivas¹

Sobrecargas Mínimas	Sobrecarga (kg/m ²)	Sobrecarga (kPa)
Destino del piso		
Habitación (casas de habitación, apartamentos, viviendas, dormitorios, cuartos de hotel, edificios para internados en escuelas, cuarteles, cárceles, correcciones, hospitales y similares)	200	2
Oficinas, despachos y laboratorios	250	2.5
Comunicación de uso público par peatones: pasillos, escaleras, rampas, vestíbulos y pasajes de acceso libre al público	400	4
Estadios, salones de baile y lugares de espectáculo desprovistos de asientos fijos	500	5
Lugares de reunión con asientos fijos (templos, cines, teatros, gimnasios, salones de baile, restaurantes, salones de lectura, aulas, salas de juego y similares)	500	5
Comercios, bodegas y fábricas de mercancía ligera	500	5
Comercios, bodegas y fábricas de mercancía con peso intermedio	650	6.5
Comercios, bodegas y fábricas de mercancía pesada	800	8
Techos de fibrocemento, láminas de acero galvanizado y otros	40	0.4
Azoteas con pendiente superior a 5%	100	1
Azoteas con pendiente inferior a 5%	200	2
Voladizos en vía pública (marquesinas, balcones y similares)	200	2
Garages y aparcamientos (para automóviles exclusivamente)	300	3
Andamios y cimbras para concreto	80	0.8
Archivos, bibliotecas (almacenaje de libros) y librerías (comercio)	600	6
Escenarios para teatros	800	8
Imprentas	900	9
Tabiques móviles	50	0.5

¹Las cargas dadas en esta tabla son tomadas del CSCR-02 y del Reglamento de Construcciones, INVU.

Tabla 2-2 Cargas de Viento¹

Altura sobre el terreno (m)	Presión Básica del Viento: q (kg/m ²)	
	Construcciones situadas en la ciudad o lugares de rugosidad comparable	Construcciones en campo abierto, frente al mar y sitios similares
0	55	70
1	55	70
7	65	95
10	70	105
15	75	120
20	85	125
30	95	135
40	105	145
50	110	150
75	120	165
100	130	170

¹Los valores dados en esta tabla son tomados del Reglamento de Construcciones, INVU. Para alturas intermedias a las anotadas, deberá interpolarse linealmente.

Tabla 2-3 Pesos de diferentes elementos constructivos¹

A. Partes de obra	kg/m²	kPa
Entrepisos de viguetas pretensadas constituídas por viguetas y bloques con losa de 5 cm de espesor	315	3.15
Pisos de baldosín de cemento y mortero adicional	100	1
Pisos de mosaico terrazo y mortero adicional para la pega	120	1.2
Pisos de cerámica y mortero adicional para el afinado	50	5
Pisos de mármol y mortero adicional	100	1
Pisos y peldaños de granito en escaleras	120	1.2
Enchapados de piedra arenisca para fachadas (espesor 20 mm)	80 a 90	0.8 a 0.9
Enchapados de marmol para fachadas (espesor 20 mm)	100	1
Placa ondulada de asbesto-cemento (espesor 6 mm)	15	0.15
Lámina lisa de hierro galvanizado (calibre 26)	3.8	0.038
Lámina lisa de aluminio (calibre 22)	2	0.02
Vigalit	22	0.22
Ondulit	15	0.15
Teja de barro incluido el mortero	75	0.75
Placa de concreto por centímetro de espesor	24	0.24
Listón de madera de 2 centímetros	12	0.12
Tablilla para forros (espesor 13 mm)	15	0.15
Impermeabilización	15	0.15
Cielos rasos livianos	5 a 10	0.05 a 0.1
Cielos rasos medianamente pesados (madera)	30 a 50	0.3 a 0.5

B. Densidad de materiales	kg/m³	pcf
Concreto reforzado	2400	150
Concreto simple	2300	145
Acero	7900	490
Madera de Cedro	650 a 1040	40.6 a 65
Madera de Pochote	650 a 1110	40.6 a 69.3
Madera de Laurel	650 a 1040	40.6 a 65
Madera de Caobilla	490 a 860	30.6 a 53.7
Madera de Surá	720 a 1100	45 a 68.7
Magnesio	1820	114
Mampostería de ladrillo hueco	1300	81.2
Mampostería de bloques de concreto hueco	1650	103
Mampostería de bloques de concreto sólido	2000	125
Mortero de cement	2100	131
Piedra caliza	2200	137
Pizarra	2800	175
Plomo	11400	712
Travertino	2400	150
Yeso	1250 a 1600	78 a 99.9
Zinc fundido	6900	431
Zinc laminado	7200	450

C. Densidad de materiales de almacenaje	kg/m³	pcf
Cal en bultos	1000	62.4
Cemento en bultos	1600	99.9
Cemento en polvo	1200	74.9
Estanterías, archivos, etc.	600	37.5
Harina en bultos	500	31.2
Libros y planillas, apilados	850	53.1
Papel	1100	68.7
Vidrio, en places	2600	162

D. Densidad de tierras y materiales granulares	kg/m³	pcf
Arena y grava, con humedad natural	1800	112
Arena y grava, mojadas	2000	125
Cantos rodados	1900	119
Tierra común, con humedad natural	1700	106
Tierra y arcilla	2000	125

¹Tomado del Catálogo General, Productos de Concreto S.A., Decimocuarta Edición, 1992.

NOTA. Debe tenerse en cuenta que dentro del sistema de unidades internacional (SI) el kg es una unidad de masa, por lo tanto para calcular la carga muerta debida a los efectos gravitacionales que actúan sobre la masa de los materiales, ésta debe multiplicarse por la aceleración debida a la gravedad ($g = 9.81 \text{ m/s}^2 \approx 10 \text{ m/s}^2$), para obtener densidades en N/m^3 , newtons por metro cúbico. El newton por definición es la fuerza que ejerce una masa de 1 kg al ser acelerada 1 m/s^2 . ($\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$). Así, por ejemplo para el concreto reforzado, una losa de $h = 0.5 \text{ m}$ de espesor produce una carga muerta de: $m \cdot g \cdot h = 2400 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0.5 \text{ m} = 12000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \cdot 1/\text{m}^2 = 12000 \text{ N/m}^2 = 12 \text{ kN/m}^2$. Para convertir de toneladas fuerza (1000 kgf) a kN se multiplica por 10 (1 ton = 10 kN, o 1 kN = 0.1 ton)

TABLA 2-4 FACTOR DE REDUCCIÓN DE RESISTENCIA	ϕ
Flexión o flexión con carga axial	
Secciones controladas por tracción	0.90
Secciones controladas por compresión	
a) Elementos con refuerzo helicoidal según 10.9.3	0.75
b) Otros elementos reforzados	0.65
Cortante ordinario	0.75
Cortante en elementos de <i>pórticos especiales resistentes a momento y muros estructurales especiales</i> en zonas de alta sismicidad	≥ 0.60
Torsión	0.75
Carga sobre concreto	0.65
Modelo puntal-tensor	0.75

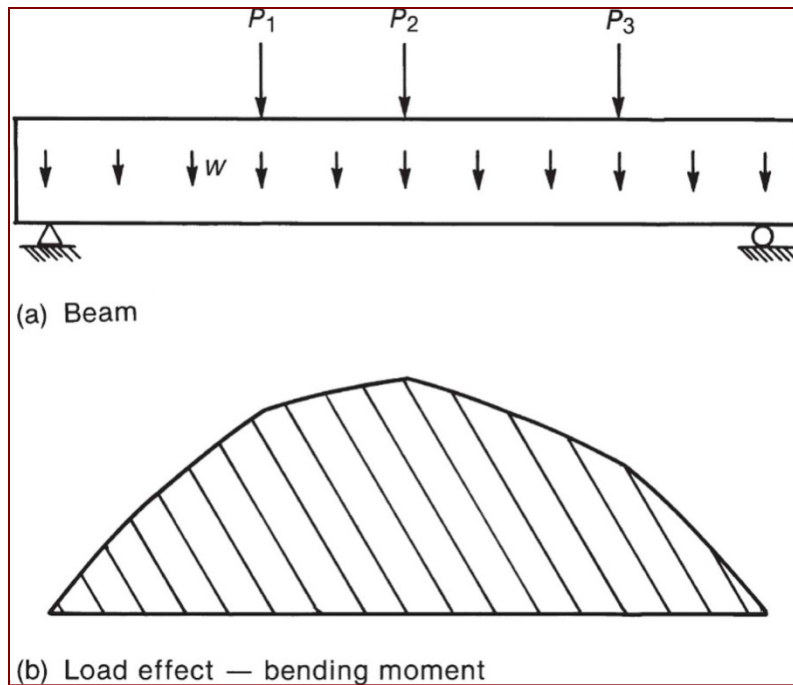


Figura 2–1 Cargas y efectos de cargas.

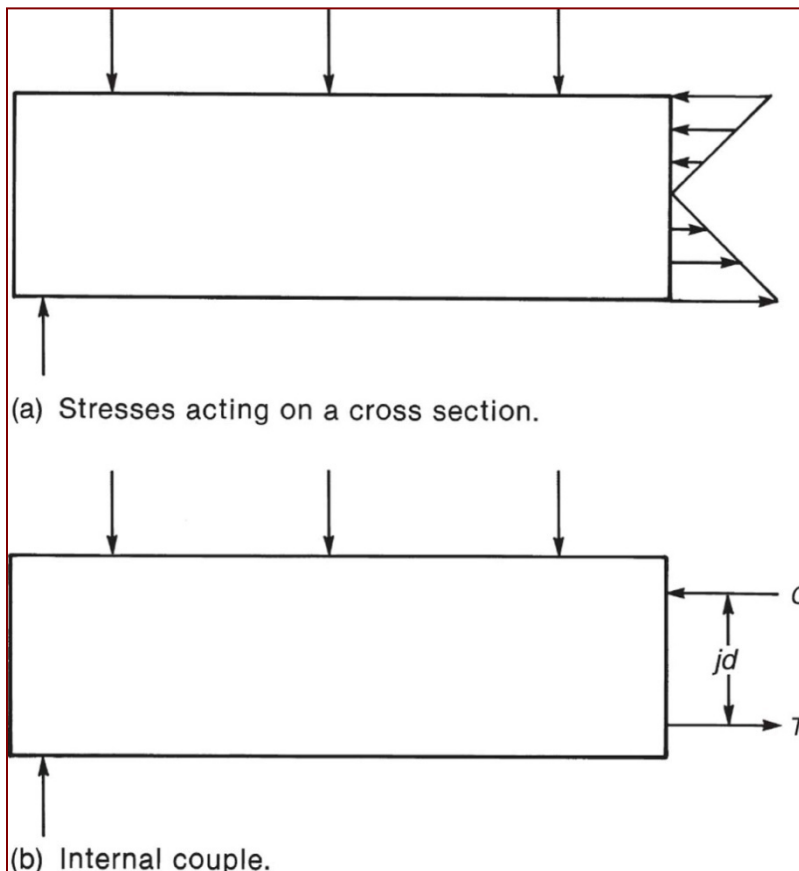


Figura 2–2 Momento resistente interno.

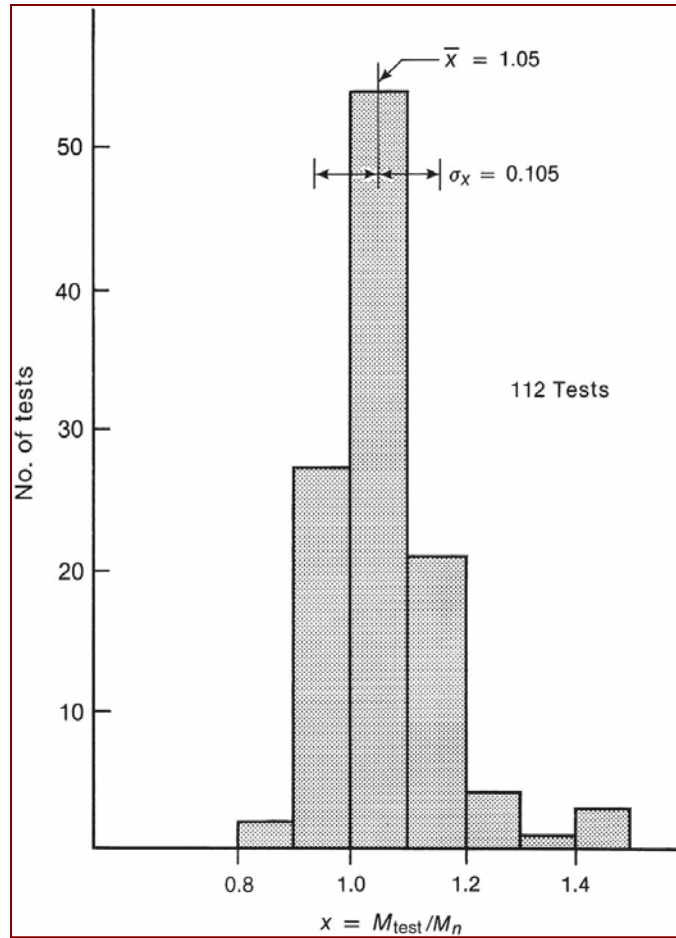


Figura 2-3 Comparación entre momentos de falla medidos y calculados basado en todos los datos para vigas de concreto reforzado con $f'_c > 140 \text{ kg/cm}^2$. (Tomado de Mattock et al., 1961)

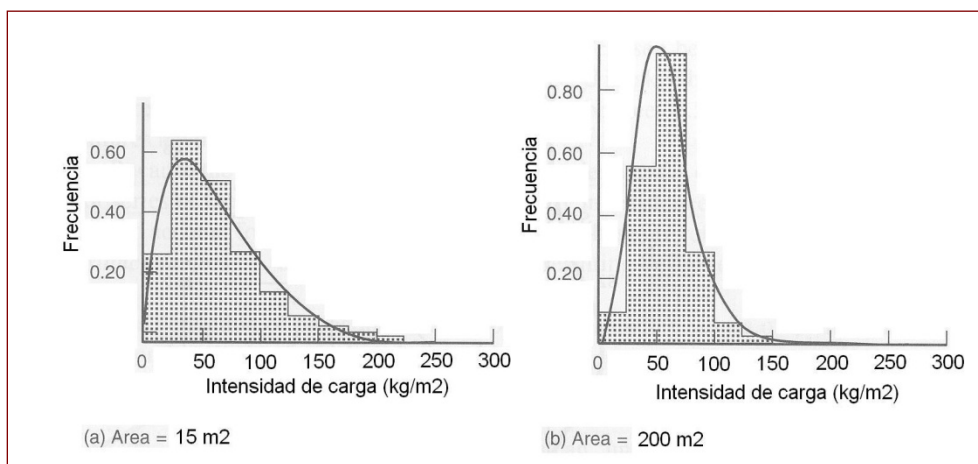


Figura 2-4 Distribución de frecuencias del componente de aplicación prolongada de la carga temporal en oficinas. (Tomado de Jong-Cherng & Cornell, 1973)

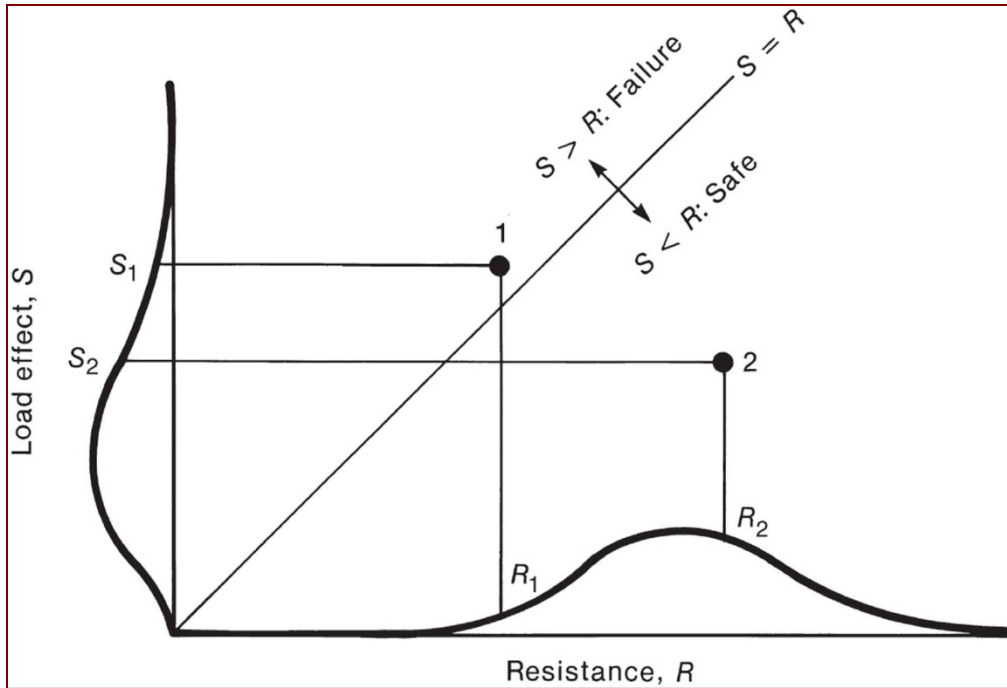


Figura 2-5 Combinaciones seguras e inseguras de cargas y resistencias. (Tomado de MacGregor, 1976)

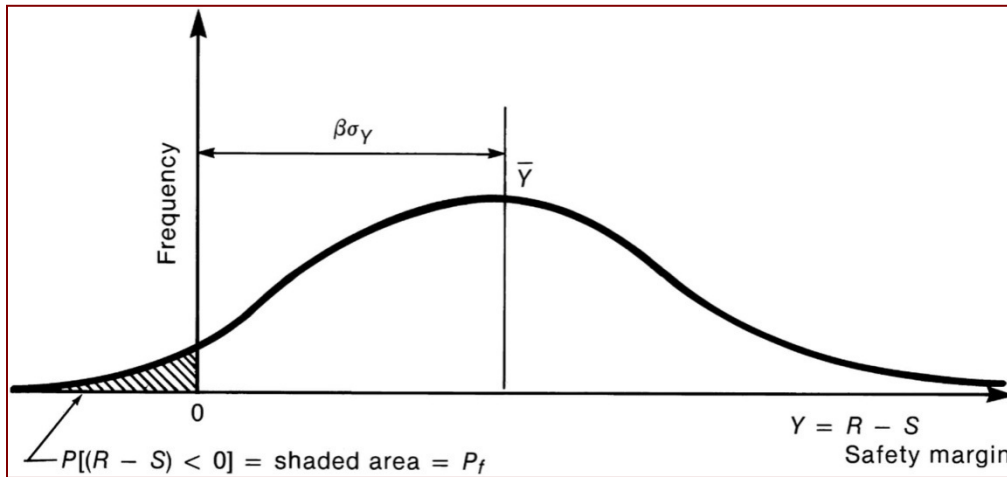


Figura 2-6 Margen de seguridad, probabilidad de falla e índice de seguridad. (Tomado de MacGregor, 1976)

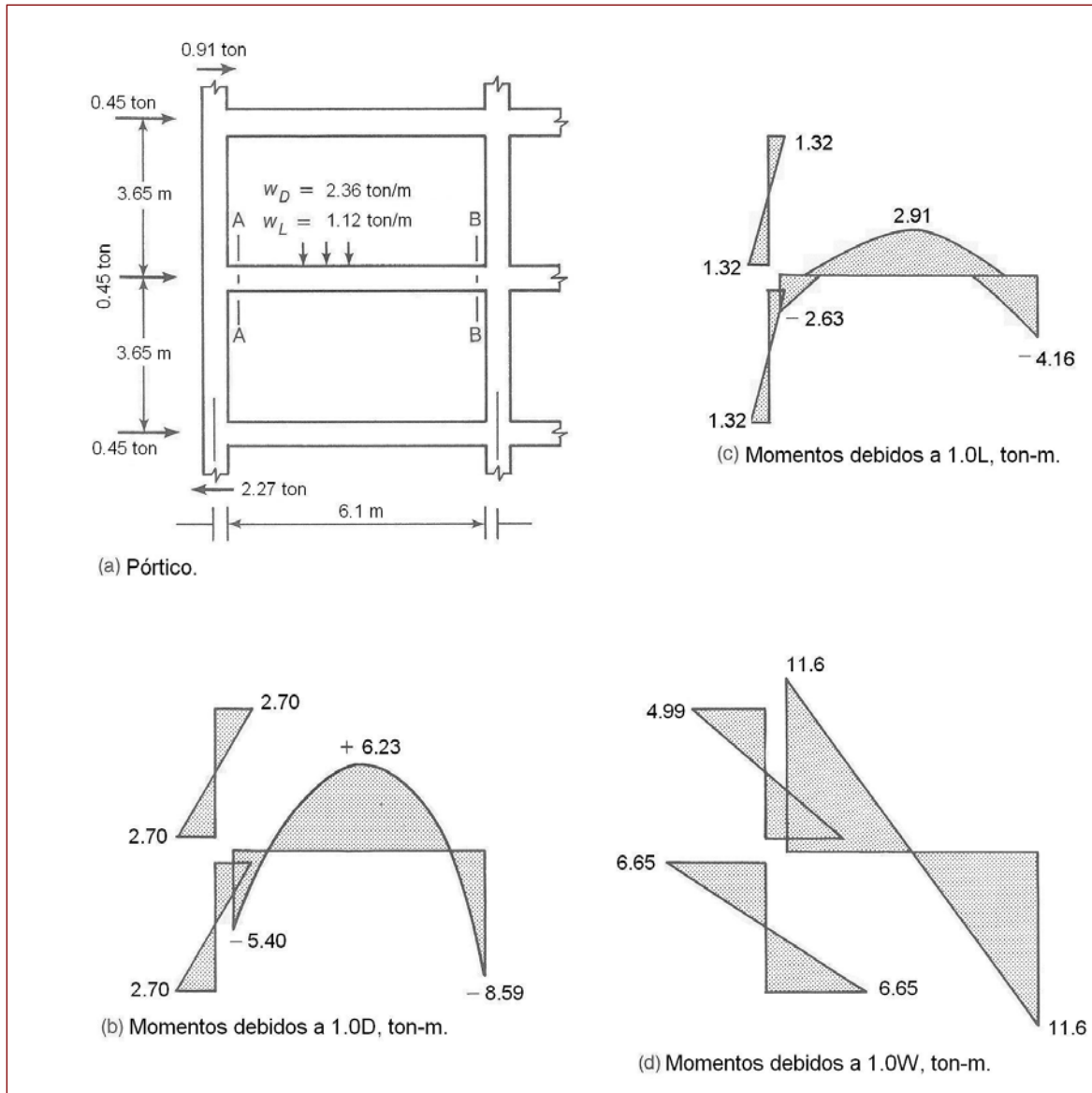


Figura 2-7 Diagramas de momentos—Ejemplo 2-1.

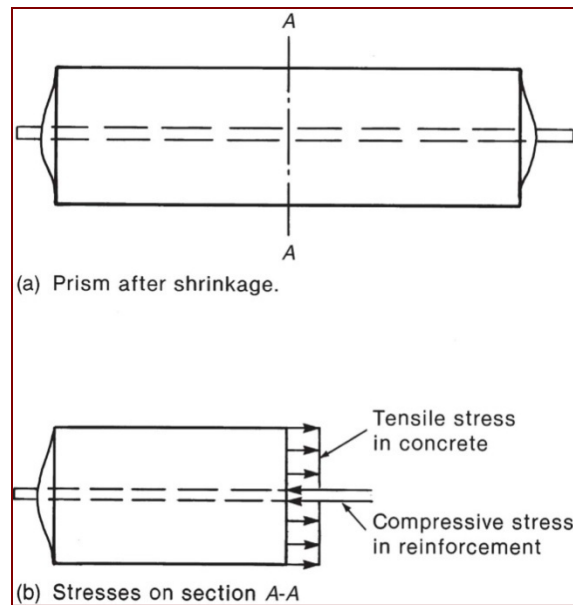


Figura 2–8 Esfuerzos autoequilibrantes debidos a contracción.

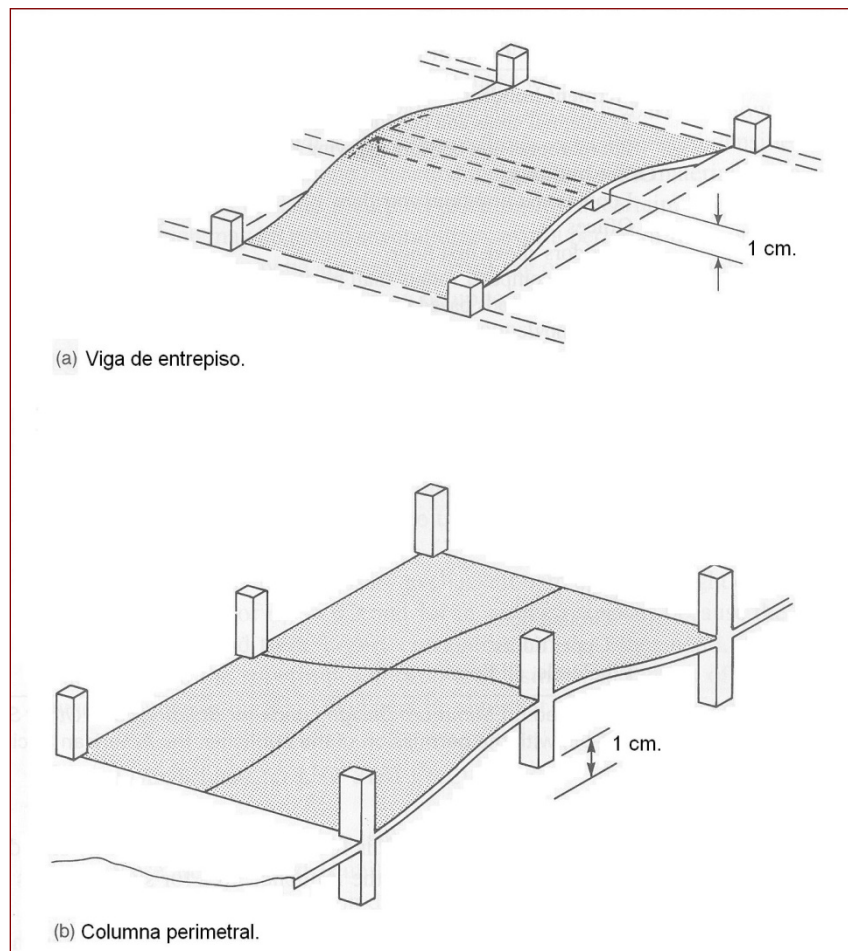


Figura 2–9 Areas de influencia.

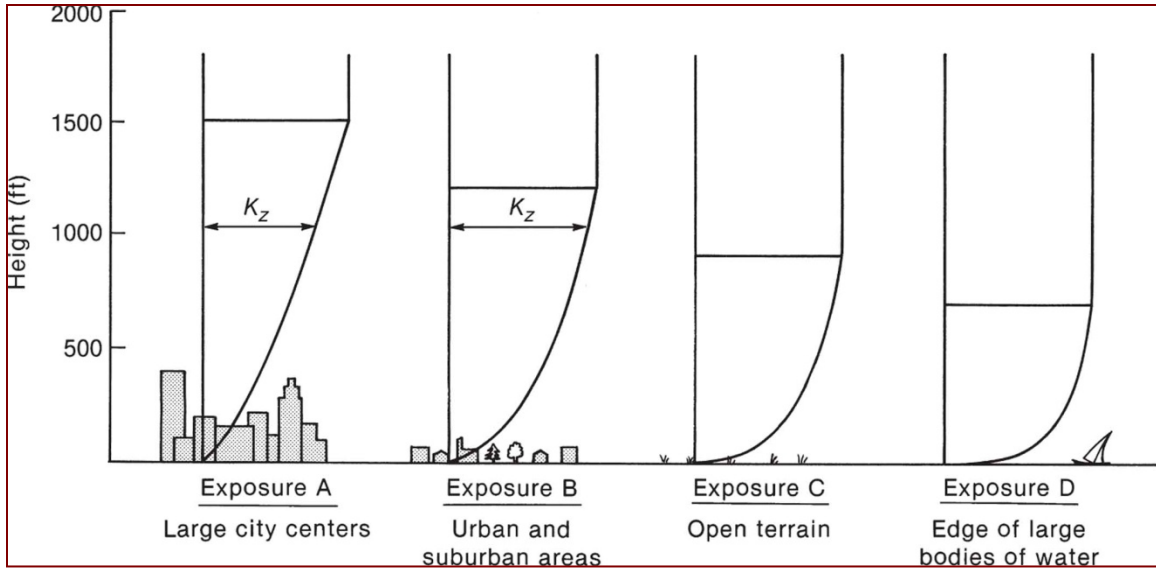


Figura 2-10 Perfiles del coeficiente de velocidad de presión de exposición, K_z , para diferentes tipos de terreno.

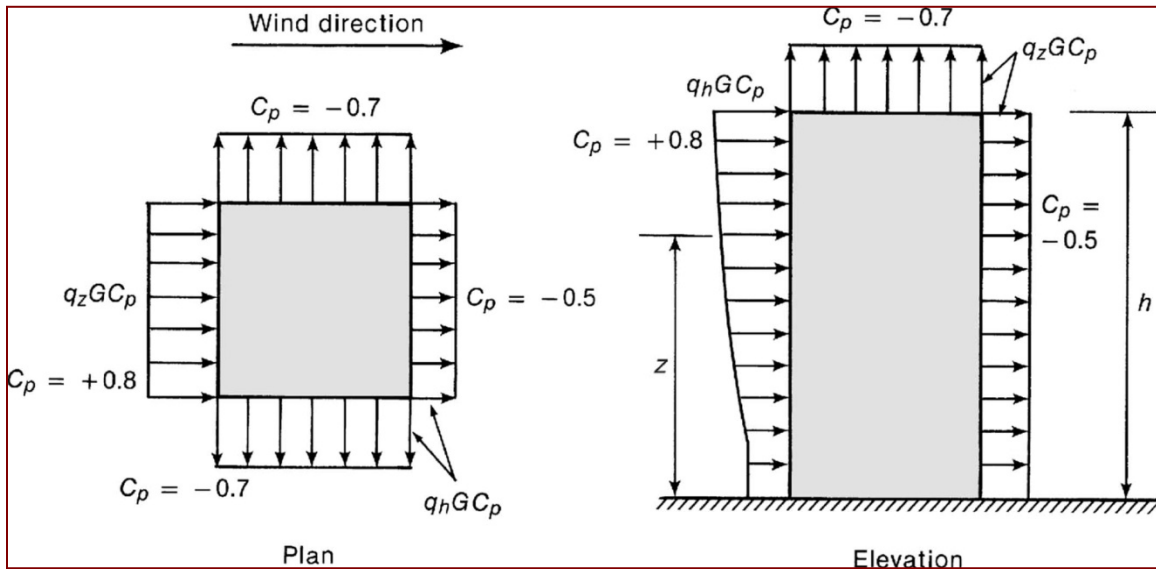


Figura 2-11 Presión y succión debidas a viento en un edificio.

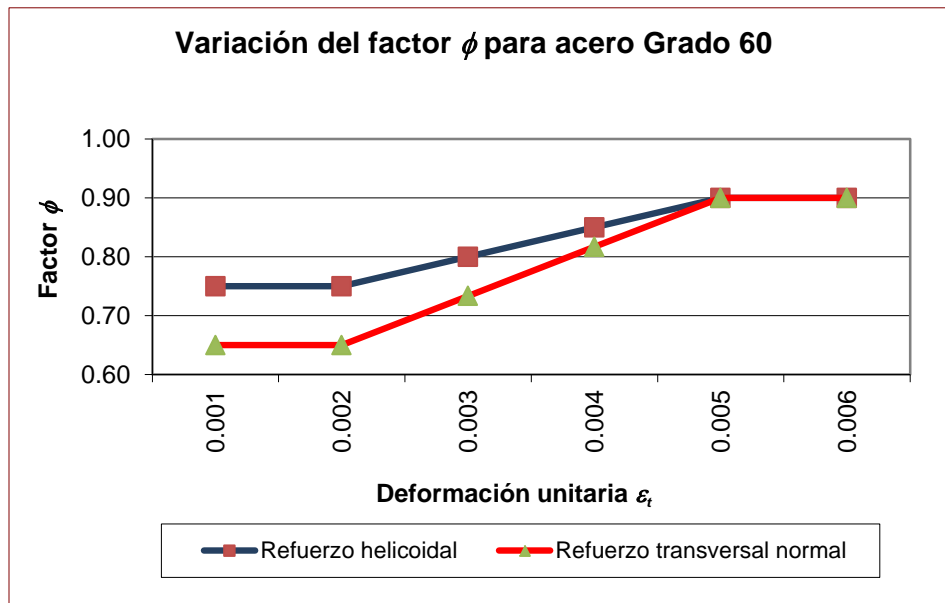


Figura 2–12 Variación del factor de reducción de resistencia para elementos sujetos a flexión y carga axial con refuerzo de acero Grado 60.

3. MATERIALES

3.1 Concreto

El *concreto* es un material compuesto de agregado, generalmente arena y grava, unido químicamente mediante *cemento* portland hidratado. El agregado es graduado de acuerdo al tamaño de arena a grava, con un tamaño máximo de grava de 19 mm, aun cuando pueden usarse agregados gruesos de 10 mm o hasta de 38 mm.

3.2 Resistencia del concreto

3.2.1 Mecanismo de agrietamiento y falla del concreto sometido a compresión

El concreto es una mezcla de pasta de cemento y agregado, cada una de las cuales tiene una relación de esfuerzo-deformación esencialmente de material frágil. Los materiales frágiles tienden a desarrollar fracturas de tracción perpendiculares a la dirección de la deformación unitaria de elongación (tracción). De esta forma, cuando el concreto es sometido a compresión uniaxial, las grietas que se generan son paralelas al máximo esfuerzo de compresión. En la prueba del cilindro de compresión, la fricción entre las cabezas de la máquina de prueba y los extremos del cilindro previenen la expansión lateral de los mismos de manera que las grietas verticales se restringen en esta región. Esto fortalece las zonas cónicas en cada extremo del cilindro y la superficie de falla parece consistir de dos conos.

A pesar de que el concreto está hecho a base de materiales esencialmente elásticos y frágiles, su curva de esfuerzo-deformación no es lineal y muestra cierta ductilidad. Esto se debe posiblemente a la generación de *microfisuramiento* del concreto y la consiguiente redistribución interna de esfuerzos. Las microfisuras son grietas internas que miden de 3 mm a 13 mm de longitud. Las microfisuras que ocurren a lo largo de la interfase entre la pasta y el agregado se denominan *grietas de adherencia*; las que cruzan el mortero se denominan *grietas de mortero*.

Se pueden definir cuatro etapas principales en la generación de microfisuras y en la falla del concreto sometido a compresión uniaxial:

1. La retracción de la pasta durante hidratación y secado del concreto es restringida por el agregado. El estado de esfuerzos traccionales resultante conduce al *agrietamiento por adherencia* aún sin presencia de carga. Estas grietas tienen poco efecto sobre el concreto ante cargas bajas y la curva de esfuerzo-deformación se mantiene lineal hasta un 30% de la resistencia a la compresión del concreto, tal como se muestra en la figura 3-1.

2. Cuando el concreto es sometido a esfuerzos mayores que 30% a 40% de su resistencia a la compresión, los esfuerzos en las superficies inclinadas de las partículas de agregado excederán las resistencias de tracción y de cortante de la interfase pasta-agregado desarrollándose nuevas grietas denominadas *grietas por adherencia*. Estas grietas son estables y se propagan únicamente si se incrementa la carga. Una vez que se forma esta grieta, cualquier carga adicional que hubiera sido transferida a través de la superficie inclinada es redistribuida a las restantes interfaces no alteradas y al mortero. La redistribución de carga causa pérdida de linealidad en la curva de esfuerzo-deformación para esfuerzos superiores al 40% de la resistencia de corto plazo. La pérdida de adherencia conduce a una acción de cuña causando tracciones transversales por encima y por debajo de la pieza de agregado.
3. Conforme la carga es incrementada por encima de 50 a 60% del valor último, se desarrollan *grietas de mortero* entre las grietas de adherencia. Estas grietas se generan paralelamente a la carga de compresión y se deben a las deformaciones unitarias transversales. Durante esta etapa, habrá una propagación estable de grietas; el agrietamiento se incrementa conforme se aumenta la carga pero no aumenta si la carga se mantiene constante. Al inicio de esta etapa de carga se le denomina *límite de discontinuidad*.
4. Con 75 a 80% de la carga última, el número de grietas de mortero empieza a incrementar y se empieza a formar un patrón continuo de microfisuramiento. Como resultado, habrán menos porciones no dañadas que puedan tomar la carga y la curva de esfuerzo-deformación longitudinal deja de ser lineal. El esfuerzo al inicio de esta etapa de agrietamiento se denomina *esfuerzo crítico*.

En la figura 3-1 se grafica la deformación unitaria lateral, ϵ_3 , contra el esfuerzo de compresión longitudinal σ_1 . Las deformaciones laterales son traccionales e inicialmente crecen, como es de esperarse, debido al efecto de Poisson. Conforme el microfisuramiento se hace más extensivo, estas grietas contribuyen a la deformación unitaria lateral aparente. Cuando la carga excede un 75 a un 80% de la resistencia última de compresión, las grietas y las deformaciones unitarias laterales crecen rápidamente, y la deformación volumétrica (incremento relativo de volumen), ϵ_v , empieza a crecer tal como se muestra en la figura 3-1.

El esfuerzo crítico es significativo por varias razones. El inminente incremento en volumen causa una presión hacia afuera sobre aros, espirales y otros refuerzos confinantes, y éstos a la vez actúan para restringir la expansión lateral del concreto, retardando así su desintegración.

Igualmente importante es el hecho de que la estructura del concreto tiende a volverse inestable ante cargas superiores a la carga crítica. Cuando los esfuerzos superan el 75% de la resistencia de corto plazo, las deformaciones unitarias crecen más y más rápidamente hasta que ocurre la falla. La figura 3-2a muestra la respuesta de esfuerzo-deformación unitaria-tiempo para concreto cargado rápidamente hasta alcanzar varias fracciones de su resistencia de corto plazo, sosteniendo luego la carga alcanzada por un

período de tiempo prolongado o hasta alcanzar la falla. Como se puede ver en la figura 3-2b, el concreto sometido a carga axial sostenida mayor que la carga crítica fallará eventualmente bajo esa carga.

Bajo cargas cíclicas de compresión, el concreto cargado axialmente tiene un límite de *degradación* aproximadamente igual al inicio de agrietamiento significativo del mortero cuando se alcanza el esfuerzo crítico. Esfuerzos axiales cíclicos más altos que el esfuerzo crítico causarán eventualmente la falla.

Conforme se extiende el agrietamiento del mortero a través del concreto, el concreto pierde más y más su estructura. Eventualmente, la capacidad de soportar carga de las porciones no agrietadas del concreto alcanza un valor máximo denominado *resistencia a la compresión*, f'_c , (figura 3-1). Deformaciones mayores se verán acompañadas por una caída en el esfuerzo que puede ser resistido por el concreto, como se puede observar en la traza de puntos para la curva ϵ_1 en la figura 3-1. El esfuerzo crítico está entre $0.75f'_c$ y $0.8f'_c$.

Cuando el concreto es sometido a compresión producida por un gradiente de deformaciones, como puede ocurrir en la zona de compresión de una viga, el efecto de la fase de propagación de grietas inestables mostrado en la figura 3-1 se reduce porque conforme el agrietamiento en el mortero suaviza al concreto altamente deformado, la carga es transferida al concreto más rígido y estable ubicado en los puntos de menor deformación cercanos al eje neutro. Adicionalmente, el aumento de la deformación y el consiguiente agrietamiento del mortero en las zonas de alto esfuerzo son evitados por el estado de deformaciones estable en el concreto cercano al eje neutro. Como resultado, la fase de propagación estable de grietas se prolonga hasta casi alcanzar el esfuerzo último en el concreto.

Pruebas realizadas sugieren que no hay diferencias significativas entre las curvas de esfuerzo-deformación para concreto cargado con o sin gradiente de deformaciones hasta el punto de esfuerzo máximo. Sin embargo, la presencia de un gradiente de deformaciones si parece incrementar los valores de deformaciones máximas que se pueden alcanzar en el elemento.

Bajo cargas uniaxiales de tracción, se inician pequeñas grietas en puntos de concentración de deformaciones traccionales. Estas grietas tienden a aliviar las concentraciones de deformaciones. Esta fase inicial de carga resulta en una curva de esfuerzo-deformación esencialmente lineal durante la etapa de inicio de grietas estables. Después de un breve intervalo de propagación estable de grietas, ocurren la propagación inestable de grietas y la falla. La dirección de agrietamiento es perpendicular al esfuerzo y la deformación principales de tracción.

3.2.2 Resistencia del Concreto a la Compresión

Generalmente, el término *resistencia del concreto* se refiere a la resistencia a la compresión uniaxial del concreto, medido mediante la prueba de compresión de un cilindro estándar. Por conveniencia, otros parámetros de resistencia, tales como la resistencia a la tracción o la de adherencia, son tomados en función de la resistencia a la compresión. La resistencia del concreto se obtiene mediante la prueba ASTM C 39/39M-05.

PRUEBAS ESTÁNDAR DE RESISTENCIA A LA COMPRESIÓN

Para que los cilindros sean aceptados como prueba, se les debe permitir fraguar en los moldes por 24 horas en el sitio de construcción a temperaturas entre 16°C y 27°C protegidos de la pérdida de humedad y del calor excesivo, y luego deben ser curados a 23°C en un cuarto húmedo o inmersos en agua saturada con cal viva (CaO). La prueba de aceptación estándar se lleva a cabo cuando el concreto tiene 28 días de colado.

Los cilindros de prueba curados en el campo se usan frecuentemente para determinar cuando se puede remover la formaleta o cuando está lista la estructura para ser utilizada. Estos deben almacenarse tan cerca del concreto de la estructura como sea posible, y deben ser curados de una manera tan similar al curado del concreto de la estructura como sea posible.

La prueba de resistencia estándar es el promedio de las resistencias de dos cilindros tomados de la misma muestra y probados a los 28 días, o antes, si así se especifica. Estos se prueban a una tasa de carga de 2.4 kg/cm² por segundo, produciendo la falla del cilindro en un intervalo de tiempo de 1.5 a 3 minutos. Para el concreto de alta resistencia, las pruebas de aceptación frecuentemente se llevan a cabo a los 56 o a los 90 días porque los concretos de alta resistencia se toman más tiempo que los concretos normales en alcanzar la resistencia de diseño.

VARIACIONES ESTADÍSTICAS EN LA RESISTENCIA DEL CONCRETO

El concreto es una mezcla de agua, cemento, agregados y aire. Las variaciones en las propiedades o proporciones de estos constituyentes, así como las variaciones en el transporte, colocación y compactación del concreto, conducen a variaciones en la resistencia del concreto terminado. Adicionalmente, discrepancias en las pruebas conducirán a aparentes diferencias en resistencia. El área achurada de la figura 3-3 muestra la distribución de resistencias de una muestra de 176 pruebas de resistencia de concreto. El media o el promedio es de 271 kg/cm², pero el rango va desde una resistencia de 139 kg/cm² hasta una resistencia de 420 kg/cm².

En general, si se dispone de más de 30 pruebas, las resistencias aproximarán una distribución normal. La curva de distribución normal, mostrada como la línea de trazos en la figura 3-3, es simétrica con respecto a la media, \bar{x} , de los datos. La dispersión de los datos puede ser medida con la desviación estándar muestral, s , es decir, la raíz media cuadrática de la desviación de las resistencias con respecto al valor de la media:

$$s = \frac{\sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}}{n - 1} \quad (3-1)$$

La desviación estándar dividida entre la media se denomina coeficiente de variación, V :

$$V = \frac{s}{\bar{x}} \quad (3-2)$$

El coeficiente de variación permite expresar el grado de dispersión como una fracción o porcentaje en vez de un valor absoluto. Los datos de las pruebas de resistencia concreto de la figura 3-3 tienen una desviación estándar de 43 kg/cm^2 y un coeficiente de variación de $43/276 = 0.156$ o 15.6%.

Si los datos corresponden a una distribución normal, su distribución puede predecirse a partir de las propiedades de dicha curva. De esta forma, 68.3% de los datos caerán dentro de una desviación estándar por encima o por debajo de la media. Es decir, 15.9% de los datos tendrán valores menores que $(\bar{x} - s)$. De forma similar, para una distribución normal, 10% de los datos, o una prueba en 10, tendrá valores menores que $\bar{x}(1 - aV)$, en donde $a = 1.282$. Los valores de a correspondientes a otras probabilidades pueden ser encontrados en los textos de estadística.

La figura 3-4 muestra la resistencia media requerida del concreto, f'_{cr} , para diferentes valores del coeficiente de variación, si se quiere que a lo sumo una de cada 10 pruebas resulte en una resistencia menor que 210 kg/cm^2 . Como se muestra en la figura, conforme se reducen los coeficientes de variación, la resistencia media requerida también se reduce.

Basado en la experiencia del *Bureau of Reclamation* de los Estados Unidos, el comité 214 del ACI ha definido varios estándares de control para concretos de resistencia moderada. Un coeficiente de variación de 15% representa control promedio (ver figura 3-4). Aproximadamente una décima parte de los proyectos estudiados por ellos tenían coeficientes de variación menores que 10%, lo cual fue considerado como control excelente, y otra décima parte tenía valores mayores que aproximadamente 20%, lo cual fue considerado como control pobre. Para concretos de baja resistencia, el coeficiente de variación correspondiente a control promedio tiene un valor $V = 0.15 f'_c$. Por encima de una resistencia media de aproximadamente 280 kg/cm^2 , la desviación estándar tiende a ser independiente de la resistencia media, y para control promedio el valor s alcanza aproximadamente 40 kg/cm^2 .

DEFINICIÓN DE LA RESISTENCIA A LA COMPRESIÓN SEGÚN LA NORMATIVA

La resistencia a la compresión especificada, f'_c , se mide mediante pruebas de compresión de cilindros de $150 \text{ mm} \times 300 \text{ mm}$ realizadas después de 28 días de curado. Esta es la resistencia especificada en los planos constructivos y la usada en los cálculos. Como se

muestra en la figura 3-4, la resistencia especificada es menor que la resistencia promedio. La resistencia media requerida del concreto, f'_{cr} , deber ser al menos (ACI 318 Art. 5.3.2)

$$f'_{cr} = f'_c + 1.34s \quad (3-3)$$

o

$$f'_{cr} = f'_c + 2.33s - 35 \quad (3-4)$$

donde s es la desviación estándar determinada de acuerdo con ACI 318-08 Art. 5.3.1. Cuando la desviación estándar no se conoce se deben usar reglas especiales.

FACTORES QUE AFECTAN LA RESISTENCIA A LA COMPRESIÓN

Dentro del gran número de factores que afectan la resistencia del concreto a la compresión, las siguientes son probablemente las más importantes para los concretos usados en estructuras.

1. Razón Agua/Material Cementante
2. Tipo de Cemento
3. Materiales cementantes suplementarios
4. Agregado
5. Condiciones de humedad durante el curado
6. Temperatura durante el curado
7. Edad del concreto
8. Madurez del concreto
9. Tasa de carga

RESISTENCIA DEL CONCRETO EN UNA ESTRUCTURA

La resistencia del concreto en una estructura tiende a ser un tanto menor que la resistencia de los cilindros de control hechos del mismo concreto. Esta diferencia se debe a: 1) los efectos de diferentes procedimientos de colado, compactación y curado; 2) los efectos de la migración vertical del agua durante el colado del concreto en elementos profundos; 3) los efectos de diferencia en tamaño y forma y 4) los efectos de diferentes gradientes de esfuerzo en la estructura y en los especímenes.

El concreto en la parte superior de elementos de mucha altura tiende a ser más débil que el concreto subyacente, probablemente debido a la mayor razón de agua/material cementante en la parte superior como consecuencia de la migración vertical del agua después del colado y por la mayor compactación del concreto subyacente debido al peso del concreto de la parte superior.

3.2.3 Resistencia del Concreto a la Tracción

La resistencia del concreto a la tracción varía entre 8 y 15% de la resistencia a la compresión. El valor real se ve afectado considerablemente por el tipo de prueba llevada a cabo para determinar la resistencia a la tracción; el tipo de agregado; la resistencia del

concreto a la compresión y la presencia de esfuerzos compresivos normales a los esfuerzos de tracción.

PRUEBAS ESTÁNDAR DE TRACCIÓN

Se usan dos tipos de prueba de manera generalizada. El primer tipo se denomina *módulo de ruptura* o *prueba a flexión* (ASTM C78-08), en la cual una viga de concreto simple, generalmente de 150 mm × 150 mm × 750 mm de largo, se carga en flexión en los tercios medios de una luz de 600 mm hasta que se alcanza la falla debido a agrietamiento en la cara de tracción. La resistencia a la tracción de ruptura, f_r , obtenida mediante esta prueba se calcula usando la siguiente ecuación, que supone comportamiento elástico lineal:

$$f_r = \frac{6M}{bh^2} \quad (3-5)$$

en donde, M = momento, b = ancho del espécimen, h = peralte o altura del elemento.

El segundo tipo de prueba de tracción es la prueba de *tracción simple por compresión diametral*, en la cual un cilindro estándar de 150 mm × 300 mm se coloca sobre el lado y se carga a compresión a lo largo del diámetro como se muestra en la figura 3-9a.

En esta prueba, un elemento en el diámetro vertical del espécimen estará sometido a esfuerzos biaxiales de tracción y de compresión, como se muestra en la figura 3-9c. Los esfuerzos que actúan a través del diámetro vertical van desde alta compresión transversal arriba y abajo hasta casi tracción uniforme a través del resto del diámetro, como se muestra en la figura 3-9d. La resistencia a la tracción, f_{ct} , obtenida en la prueba de compresión diametral se calcula según

$$f_{ct} = \frac{2P}{\pi \ell d} \quad (3-6)$$

donde P = la carga máxima aplicada en la prueba, ℓ = longitud del espécimen, d = diámetro del espécimen.

En general, la resistencia decrece conforme el volumen de concreto sometido a esfuerzos traccionales altos es mayor. Con la prueba de módulo de ruptura según ASTM C78-08 se obtiene una resistencia de ruptura f_r de aproximadamente $1.5f_{ct}$, mientras que con un prisma cuadrado de 150 mm sometido a tracción pura se obtiene una resistencia de aproximadamente $0.86f_{ct}$.

RELACIÓN ENTRE LAS RESISTENCIAS A LA COMPRESIÓN Y A LA TRACCIÓN DEL CONCRETO

Aun cuando la resistencia a la tracción del concreto se incrementa conforme se incrementa la resistencia a la compresión, la razón entre resistencia a la compresión y resistencia a la tracción disminuye conforme se incrementa la resistencia a la compresión.

Así, la resistencia a la tracción se toma como aproximadamente proporcional a la raíz cuadrada de la resistencia a la compresión. La resistencia media de cilindro fracturado, f_{ct} , calculado a partir de un gran número de pruebas se ha tomado como

$$\bar{f}_{ct} = 1.71\sqrt{f'_c} \quad (3-7)$$

en donde \bar{f}_{ct} , f'_c y $\sqrt{f'_c}$ están en kg/cm^2 . En la figura 3-10, la ecuación 3-7 se compara con los datos de pruebas de cilindros. La razón entre resistencia de fractura medida y la resistencia calculada define una distribución esencialmente normal para los concretos de resistencia a la compresión también normal.

De manera similar, la media de la resistencia de ruptura, \bar{f}_r , puede ser expresada como

$$\bar{f}_r = 2.21\sqrt{f'_c} \quad (3-8)$$

Nuevamente, hay dispersión en los datos del módulo de ruptura. La razón entre resistencia de ruptura medida a la calculada define una distribución log-normal.

El ACI Art. 9.5.2.3 propone para el cálculo de deflexiones una resistencia de ruptura de:

$$f_r = 2\lambda\sqrt{f'_c} \quad (3-9)$$

y para los cálculos de resistencia, se propone un valor menor (ACI Art. 11.3.3.1):

$$f_r = 1.6\lambda\sqrt{f'_c} \quad (3-10)$$

FACTORES QUE AFECTAN LA RESISTENCIA A LA TRACCIÓN DEL CONCRETO

La resistencia a la tracción del concreto se ve afectada por los mismos factores que la resistencia a la compresión. Adicionalmente, la resistencia a la tracción del concreto hecho a base de roca triturada puede ser hasta un 20% mayor que la del concreto de roca redonda. La resistencia a la tracción del concreto liviano tiende a ser menor que la resistencia del concreto normal.

La resistencia a la tracción del concreto se alcanza más rápidamente que la resistencia a la compresión. Por lo tanto, cosas tales como la resistencia al cortante y la resistencia de adherencia, que se ven considerablemente afectadas por la resistencia a la tracción del concreto, tienden a alcanzarse más rápidamente que la resistencia a la compresión.

Al mismo tiempo, sin embargo, la resistencia a la tracción crece más lentamente de lo que se sugiere con la raíz cuadrada de la resistencia de compresión para una edad dada. De esta forma, un concreto con una resistencia de compresión a los 28 días de 210

kg/cm^2 tendría una resistencia de fractura de aproximadamente $1.71\sqrt{f'_c} = 24.8 \text{ kg/cm}^2$. A los 7 días este concreto habría tenido una resistencia a la compresión de 147 kg/cm^2 (0.70 veces 210) y una resistencia a la tracción de unos 19 kg/cm^2 (0.75 veces 24.8). Esto es menos que la resistencia a la tracción de $1.71\sqrt{147} = 20.7 \text{ kg/cm}^2$ que uno calcularía a partir de la resistencia a la compresión del concreto a los 7 días. Esto es importante en la escogencia de los tiempos de remoción de las formaletas de entrepisos de concreto, los cuales tienden a ser gobernados por la resistencia al cortante de la junta losa-columna.

3.2.4 Resistencia bajo cargas biaxiales y triaxiales

CARGAS BIAXIALES

Se entiende por concreto cargado biaxialmente a aquel que está cargado a lo largo de dos ejes mutuamente perpendiculares, sin esfuerzos o restricciones a la deformación en el tercer eje, tal como se muestra en la figura 3-11a. Un ejemplo muy común de esta condición de carga se presenta en el *tramo de cortante* del segmento de viga mostrado en la figura 3-11b.

La resistencia y el modo de falla del concreto sujeto a estados biaxiales de esfuerzo varían de acuerdo a la combinación de esfuerzos según se muestra en la figura 3-12. El trazo en forma de pera de la figura 3-12a representa las combinaciones de esfuerzo biaxial, σ_1 y σ_2 , que causan falla en el concreto. Este trazo pasa por la resistencia a la compresión uniaxial, f'_c , en A y A' y por la resistencia a la tracción uniaxial, f'_t , en B y B' .

Bajo tracción biaxial (σ_1 y σ_2 ambos de tracción) la resistencia es similar a la de tracción uniaxial, tal como se muestra en la región $B - D - B'$ (zona 1) en la figura 3-12a. Aquí la falla ocurre por fractura perpendicular al esfuerzo principal máximo de tracción como se muestra en la figura 3-12b, el cual corresponde al punto B en la figura 3-12a.

Cuando un esfuerzo principal es de tracción y el otro es de compresión, como se muestra en la figura 3-11a, el concreto falla a esfuerzos menores que los de falla para tracción o compresión uniaxiales. Esto se puede ver en las regiones $A - B$ y $A' - B'$ en la figura 3-12a. En esta región, zona 2 de la figura 3-12a, la falla ocurre debido a fractura de tracción en planos perpendiculares al esfuerzo principal de tracción. La menor resistencia en esta región sugiere que la falla puede estar gobernada por una *deformación unitaria de tracción límite* en vez de un esfuerzo de tracción límite.

Bajo compresión uniaxial (puntos A y A' y zona 3 en la figura 3-12a), la falla se inicia por la formación de grietas de tracción en planos paralelos a la dirección de los esfuerzos compresivos. Estos planos son planos de deformación principal máxima de tracción.

Bajo compresión biaxial (región $A - C - A'$ y zona 4 en la figura 3-12a) el patrón de falla cambia a una serie de superficies de fractura paralelas en planos paralelos a los lados

descargados del elemento como se muestra. Estos planos están sujetos a deformaciones traccionales máximas. La carga de compresión tanto biaxial como triaxial retarda la formación de grietas de adherencia y de mortero. Como resultado, el período de propagación de grietas estables es más largo y el concreto resulta más dúctil. Como se puede ver en la figura 3-12a, la resistencia del concreto a la compresión biaxial es mayor que la resistencia a la compresión uniaxial. Bajo esfuerzos biaxiales compresivos, la resistencia es aproximadamente un 7% mayor, como se puede ver en el punto C.

En el alma de las vigas, los esfuerzos principales de tracción y de compresión conducen a un estado de esfuerzos biaxiales como se muestra en la figura 3-11b. Bajo esta carga, las resistencias a la tracción y a la compresión son menores que lo que serían bajo esfuerzo uniaxial, como se muestra en el cuadrante $A - B$ o $A' - B'$ en la figura 3-12a. Un campo de esfuerzos similar se presenta en la prueba del cilindro fracturado como se puede ver en la figura 3-9c. Esto explica en parte por qué la resistencia de fractura es menor que la resistencia a la tracción de ruptura.

En las zonas 1 y 2 en la figura 3-12, la falla ocurre cuando el concreto *se agrieta*, y en las zonas 3 y 4, la falla ocurre cuando el concreto *es aplastado*.

CARGAS TRIAXIALES

Ante esfuerzos compresivos triaxiales, el modo de falla incluye ya sea fractura paralela al esfuerzo compresivo máximo—y por lo tanto ortogonal a la máxima deformación unitaria de tracción, si tal existiese—o bien, un modo de falla de cortante. La resistencia y la ductilidad del concreto ante compresión triaxial exceden a las de compresión uniaxial, como se puede observar en la figura 3-15. Esta figura presenta las curvas de esfuerzo-deformación longitudinal para cilindros sujetos a presión hidrostática lateral uniforme $\sigma_2 = \sigma_3$, en donde el esfuerzo longitudinal, σ_1 , se incrementa hasta alcanzar la falla. Estas pruebas sugieren que el esfuerzo longitudinal de falla se puede estimar como

$$\sigma_1 = f'_c + 4.1\sigma_3 \quad (3-11)$$

Para concretos livianos y para concretos de alta resistencia, las pruebas realizadas sugieren que sus respectivas resistencias a la compresión se ven menos influenciadas por la presión de confinamiento, con el resultado de que el coeficiente de 4.1 de la ecuación 3-11 baja hasta un valor cercano a 2.0.

La resistencia del concreto ante esfuerzos combinados puede también ser expresada usando la *envolvente de ruptura de Mohr*. Los círculos de Mohr graficados en la figura 3-16 corresponden a tres de los casos graficados en la figura 3-15. Los círculos de Mohr son tangentes a la envolvente de ruptura mostrada con el trazo exterior.

En columnas de concreto y en juntas viga – columna, el concreto en compresión está algunas veces envuelto en aros o espirales de acero distribuidos muy densamente. Cuando el grosor del elemento de concreto se incrementa debido al efecto de Poisson y al microagrietamiento, estos aros o espirales son elongados en tracción, causando de vuelta

un esfuerzo de compresión sobre el *concreto confinado*. El estado triaxial de esfuerzos resultante en el *concreto confinado* por los aros o espirales incrementa su ductilidad y su resistencia.

3.3 Propiedades mecánicas del concreto

El comportamiento y la resistencia de los elementos de concreto reforzado es controlada por el tamaño y la forma de los elementos y por las propiedades de esfuerzo-deformación del concreto y del refuerzo. El comportamiento de esfuerzo-deformación presentado a continuación será el utilizado para generar relaciones para resistencia y comportamiento de vigas y columnas de concreto reforzado.

3.3.1 Curva esfuerzo-deformación para concreto normal en compresión

En la figura 3-17a se muestran las curvas de esfuerzo-deformación típicas para concretos de diferentes resistencias. Estas curvas fueron obtenidas mediante pruebas de unos 15 minutos de duración en especímenes semejantes a la zona de compresión de una viga, como se muestra en la figura 3-17b.

Todas estas curvas alcanzan un valor de esfuerzo máximo para valores de deformación unitaria que van desde 0.0015 hasta 0.003, seguido luego de una rama descendente. La forma de estas curvas se debe a la generación gradual de microgrietas dentro de la estructura del concreto, tal como se discutió anteriormente.

La longitud de la rama descendente se ve afectada enormemente por las condiciones de la prueba. Usualmente, un cilindro de concreto cargado axialmente falla explosivamente en el punto de esfuerzo máximo. Esto ocurre en máquinas de prueba flexibles axialmente si la energía de deformación, liberada por la máquina de prueba conforme decae la carga, excede la energía que el espécimen puede absorber. En un elemento a flexión, o a flexo-compresión, la rama descendente existe porque, conforme el esfuerzo decae en las fibras de mayor deformación unitaria, otras fibras sometidas a menor deformación unitaria pueden resistir la carga, retrasando así la falla de las primeras.

Las curvas esfuerzo-deformación de la figura 3-17a muestran cinco propiedades usadas en la definición de los modelos matemáticos mostrados en la figura 3-18 para concreto en compresión:

1. La pendiente inicial de la curva (módulo de elasticidad inicial tangente) se incrementa conforme crece la resistencia a la compresión.

El módulo de elasticidad del concreto, E_c , depende del módulo de elasticidad de la pasta de cemento y del módulo de elasticidad del agregado. Un incremento en la relación agua/material cementante incrementa la porosidad de la pasta, reduciendo así su módulo de elasticidad y su resistencia. Esto es tomado en cuenta en el diseño a través de expresar E_c como una función de f'_c .

De igual importancia es el módulo de elasticidad del agregado. Los agregados de peso normal tienen valores de módulo de elasticidad en el rango de 1.5 a 5 veces el de la pasta de cemento. Por esta razón, la fracción del volumen total constituido por agregado grueso también afecta el valor de E_c . Los agregados livianos tienen módulos de elasticidad similares a los de la pasta y por lo tanto la fracción de agregado tiene poco efecto sobre el E_c para concreto liviano.

El módulo de elasticidad del concreto se calculará según la indicación del [Artículo 8.5.1 del ACI 318S-08](#):

$$E_c = 0.14w^{1.5}\sqrt{f'_c} \quad (3-12)$$

en donde w es el peso del concreto en kg/m^3 . Esta ecuación fue obtenida a partir de pruebas de carga rápida en concretos con pesos unitarios de 1500 y 2500 kg/m^3 y corresponde al módulo de elasticidad secante a aproximadamente $0.50f'_c$. El módulo de elasticidad inicial tangente es aproximadamente un 10% mayor. Como esta ecuación no toma en cuenta el tipo de agregado, la dispersión de los datos es muy amplia. La ecuación 3-12 sobreestima sistemáticamente el valor de E_c en regiones en donde predominan los agregados de bajo módulo de elasticidad. Si las deflexiones o las vibraciones son críticas en un diseño, se debe medir el E_c para el concreto que se va a utilizar.

Para concretos de peso normal, con un peso unitario de 2400 kg/m^3 , el [Artículo 8.5.1 del ACI 318S-08](#) recomienda calcular el módulo de elasticidad según:

$$E_c = 15,100\sqrt{f'_c} \text{ kg/cm}^2 \quad (3-13)$$

2. La porción creciente de la curva esfuerzo-deformación semeja una parábola con su vértice en el esfuerzo máximo.
3. La deformación unitaria, ε_0 , a la cual ocurre el esfuerzo máximo se incrementa conforme crece la resistencia del concreto.
4. La pendiente de la rama descendente de la curva esfuerzo-deformación tiende a ser menor que la de la rama ascendente para concretos de resistencia moderada. Esta pendiente crece conforme aumenta la resistencia a la compresión.
5. La deformación unitaria máxima alcanzada, ε_{cu} , decrece conforme se incrementa la resistencia del concreto.

La parte descendente de la curva esfuerzo-deformación, después de alcanzado el esfuerzo máximo, es muy variable y altamente dependiente del procedimiento de prueba. De forma similar, la deformación unitaria límite, ε_{cu} , es altamente dependiente del tipo de espécimen, tipo de carga, y tasa de prueba. La deformación unitaria límite tiende a ser mayor si existe la posibilidad de redistribución de la carga ante solicitaciones altas. En pruebas a flexión el rango de valores medido va desde 0.0025 hasta 0.006.

Las dos representaciones más comunes de la curva de esfuerzo-deformación consisten de una parábola seguida de un segmento descendente como se muestra en la figura 3-18a,

terminando en una deformación unitaria límite de 0.0038, o una parábola seguida de un segmento horizontal que termina en una deformación unitaria límite de 0.003 a 0.0035, muy usada en Europa. El diagrama de esfuerzo-deformación de la figura 3-18a es conocido como la curva modificada de esfuerzo-deformación de Hognestad.

La curva de esfuerzo-deformación mostrada en la figura 3-18b resulta conveniente para estudios analíticos porque es una función continua. El punto más alto de la curva, f_c'' , se toma igual a $0.9f_c'$ para dar propiedades de bloque de esfuerzos similar al bloque rectangular de esfuerzos usado en flexión cuando $\varepsilon_{ult} = 0.003$ para concretos de hasta 350 kg/cm^2 de resistencia. La deformación unitaria ε_0 , correspondiente al esfuerzo máximo, se toma como $1.71f_c'/E_c$. Para cualquier deformación ε dada, $x = \varepsilon/\varepsilon_0$. El esfuerzo correspondiente a esa deformación unitaria es

$$f_c = \frac{2f_c''x}{1+x^2} \quad (3-14)$$

El esfuerzo promedio bajo el bloque de esfuerzos desde $\varepsilon = 0$ hasta ε es $\beta_1 f_c''$, donde

$$\beta_1 = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \quad (3-15)$$

El centro de gravedad del área de la curva esfuerzo-deformación entre $\varepsilon = 0$ y ε está a una distancia $k_2\varepsilon$ de ε , donde

$$k_2 = 1 - \frac{2(x - \tan^{-1} x)}{x^2 \beta_1} \quad (3-16)$$

donde x está en radianes para el cálculo de $\tan^{-1} x$. La curva de esfuerzo-deformación es satisfactoria para concretos con relaciones constitutivas que presentan una reducción gradual posterior al valor máximo. Por esta razón es recomendada para concretos de peso normal y de resistencia de hasta 350 kg/cm^2 .

Como se muestra en la figura 3-15, una presión lateral de confinamiento causa un incremento en la resistencia a la compresión del concreto y un gran incremento de la deformación unitaria al momento de falla. La resistencia y la ductilidad adicional del concreto confinado son usadas en las *regiones de rótulas* que se forman en ciertos tipos de estructuras utilizadas en zonas de sismicidad de moderada a alta.

Cuando un espécimen es cargado y descargado varias veces, la historia de carga y descarga genera una curva de esfuerzo-deformación como la que se muestra en la figura 3-19. La envolvente de los ciclos de carga y descarga es muy similar a la curva de esfuerzo-deformación para la carga monotónica. Este hecho aunado a las grandes deformaciones residuales que permanecen después de descargado, sugieren que la respuesta inelástica se debe al daño en la estructura interna del concreto tal como se deriva de la teoría de microagrietamiento explicada anteriormente.

3.3.2 Curva de esfuerzo-deformación para concreto normal en tracción

La respuesta de esfuerzo-deformación del concreto con carga axial de tracción puede ser dividida en dos fases. Previa al esfuerzo máximo, la curva de esfuerzo-deformación es levemente no lineal. El diagrama se mantiene lineal hasta aproximadamente el 50% de la resistencia a la tracción. La deformación unitaria cuando se alcanza el esfuerzo máximo es aproximadamente de 0.0001 en tracción pura y 0.00014 a 0.0002 en flexión. La parte creciente de la curva de esfuerzo-deformación puede aproximarse ya sea como una línea recta con pendiente E_c y un esfuerzo máximo igual a la resistencia a la tracción, f_t' , o como una parábola con una deformación unitaria máxima, $\varepsilon_t' = 1.8f_t'/E_c$, y un esfuerzo máximo, f_t' . Esta última curva se muestra en la figura 3-20a.

Después de alcanzada la resistencia a la tracción, ocurre un microagrietamiento en una *zona de proceso de fractura* adyacente al punto de esfuerzo máximo de tracción, y la capacidad de tracción del concreto cae rápidamente conforme se incrementa su elongación. En esta etapa del comportamiento, las elongaciones se concentran en la zona de proceso de fractura mientras que el resto del concreto se está descargando elásticamente. La respuesta de descarga queda mejor descrita mediante un diagrama de esfuerzo versus abertura de grieta como el que se muestra en la figura 3-20b. Los anchos de grieta mostrados en esta figura son del orden de magnitud correcto; los valores reales dependen de cada caso. La capacidad de tracción se vuelve nula cuando la grieta se ha formado completamente. Esto ocurre a un ancho de grieta muy pequeño.

RAZÓN DE POISSON

A esfuerzos menores que el esfuerzo crítico (figura 3-1) la razón de Poisson para el concreto varía desde 0.11 hasta 0.21 aproximadamente y usualmente cae dentro del rango de 0.15 a 0.20. Basado en pruebas de concreto cargado biaxialmente, Kupfer et al. (1969), reportan valores de la razón de Poisson de 0.20 para concreto cargado en compresión en una y dos direcciones, 0.18 para concreto cargado en tracción en una y dos direcciones, y 0.18 a 0.20 para concreto cargado en tracción y compresión. La razón de Poisson permanece aproximadamente constante ante cargas sostenidas.

3.4 Refuerzo

Debido a que el concreto es muy débil en tracción, se utiliza en conjunto con barras o alambre de acero que resisten los esfuerzos de tracción. Los tipos más comunes de refuerzo para elementos no preesforzados son las barras y las mallas electrosoldadas de alambre corrugado laminado en caliente. Para este curso solo se usarán los primeros, sin embargo, los principios de diseño valen con muy pocas excepciones para miembros reforzados con malla electrosoldada de acero corrugado o con barras corrugadas forjadas en frío.

La norma ACI 318 requiere que el refuerzo sea de barras o de alambre de acero. Se requieren modificaciones significativas al proceso de diseño si se usan como refuerzo materiales tales como barras plásticas reforzadas con fibra (FRP), porque tales materiales resultan frágiles y no tienen la ductilidad que se ha incorporado en el proceso de diseño para concreto reforzado con barras de acero. Adicionalmente, se debe prestar atención al anclaje de refuerzo FRP.

3.4.1 Barras corrugadas laminadas en caliente

Las barras de refuerzo son básicamente de sección transversal circular con corrugaciones laminadas en su superficie para ayudar en el anclaje al concreto. La figura 3-21 presenta varios ejemplos de barras. Estas se producen de acuerdo a las siguientes especificaciones del ASTM, las cuales regulan dimensiones y propiedades químicas y mecánicas:

1. **ASTM A 615:** *Especificación estándar para barras corrugadas y lisas de lingote para concreto reforzado.*
2. **ASTM A 996:** *Especificación estándar para barras corrugadas y lisas de acero de riel y de ejes para concreto reforzado.*
3. **ASTM A 706:** *Especificación estándar para barras corrugadas y lisa de acero de baja aleación para concreto reforzado.*

Las barras de refuerzo están disponibles en cuatro grados, con resistencias de cedencia de 2800, 3500, 4200 y 5250 kg/cm², se les denomina como de Grado 40, 50, 60 y 75, respectivamente. El acero de Grado 60 es el más comúnmente usado en edificios y puentes. No siempre se encuentran disponibles todos los grados de acero enumerados. El acero de Grado 75 se usa en columnas grandes. El acero de Grado 40 es el más dúctil, seguido de los de Grado 60, 75 y 50, respectivamente.

Las barras corrugadas de refuerzo de Grado 60 están disponibles en los once tamaños listados en la Tabla A-1. Los tamaños se refieren a los diámetros nominales expresados en octavos de pulgada. Así, una barra No. 4 tiene un diámetro de 4/8 in. o 1/2 in., es decir 12.7 mm. El área nominal de la sección transversal puede ser calculada directamente a partir del diámetro nominal excepto por las barras No. 10 y superiores, las cuales tienen diámetros ligeramente mayores que 10/8 in., 11/8 in., etc. El tamaño y el grado son laminados en las barras para propósitos de identificación, tal como se muestra en la figura 3-27. Las barras de Grado 40 solo están disponibles en tamaños del No. 3 al No. 6. Las barras de Grado 75 solo están disponibles en tamaños del No. 6 al No. 18.

PROPIEDADES MECÁNICAS

Las relaciones de esfuerzo-deformación idealizadas se presentan en la figura 3-22 para barras de refuerzo normales, de Grados 40 y 60 y para la barra de alta resistencia, de Grado 75 y finalmente también para una malla electrosoldada. El módulo de elasticidad inicial tangente para todas las barras puede ser tomado como 2.03×10^6 kg/cm². Las barras de Grado 40 muestran un valle de cedencia bastante pronunciado, como se puede observar en la figura 3-22. Aun cuando este mismo fenómeno se presenta para las barras

de acero de Grado 60, su extensión es mucho más pequeña. Los aceros de alta resistencia en general no presentan este fenómeno ni tampoco muestran por consiguiente un punto de cedencia claramente identificable.

La figura 3-23 es un histograma de las pruebas de resistencia a la cedencia de refuerzo de acero de Grado 60 con una resistencia esperada de 4200 kg/cm^2 . Como se puede ver en esta figura, hay una variación considerable en la resistencia de cedencia, con cerca de un 10% de las pruebas presentando resistencias iguales o superiores a 5600 kg/cm^2 , es decir, 133% superior a la cedencia nominal. El coeficiente de variación de las resistencias de cedencia graficadas en la figura 3-23 es de 9.3%.

Las especificaciones del ASTM basan la resistencia de cedencia en este tipo de pruebas, las cuales son llevadas a cabo a altas tasas de carga. Para tasas de carga más bajas, asociadas con cargas muertas o muchas de las cargas vivas, se puede aplicar la *resistencia de fluencia estática*. Esta es unos 300 kg/cm^2 menor que la obtenida en la prueba mencionada.

3.5 Refuerzo de polímeros fibro-reforzados (FRP)

Desde 1990 se vienen realizando investigaciones exhaustivas en estructuras reforzadas con polímeros fibro-reforzados (FRP) en forma de barras o bien como parrillas bidimensionales. Este tipo de refuerzo consiste de fibras alineadas dentro de una resina endurecida y que son manufacturados mediante diversos procesos, incluyendo *pultrusión*¹, trenzado y tejido, como se muestra en las figuras 1, 2, 3 y 4. El refuerzo FRP ha sido usado en estructuras sujetas a corrosión y en aplicaciones que requieren barras no-magnetizables, tales como pisos para dispositivos médicos (tales como Resonancia Magnética). Ver figuras 5, 6, 7 y 8. Los tipos más comunes son GFRP (hecho a base de fibra de vidrio), AFRP (hecho a base de fibras Aramid) y CFRP (hecho a base de fibras de carbón).

3.5.1 Propiedades de refuerzo FRP

Todos los tipos de refuerzo FRP tienen curvas de esfuerzo-deformación elásticas frágiles, con resistencias últimas de tracción de 4200 kg/cm^2 a $21,000 \text{ kg/cm}^2$. Las resistencias y el módulo de elasticidad varían, dependiendo del tipo de fibra y del la razón de volumen de fibra contra volumen de las barras FRP. La figura 9 muestra las curvas de esfuerzo-deformación para diferentes tipos de refuerzo FRP y para acero normal y acero de alta resistencia. Valores típicos de módulo de elasticidad en tracción, expresados como

¹ *Pultrusión* es un proceso de manufactura para producir tramos continuos de perfiles estructurales FRP. La materia prima incluye una mezcla de resina líquida (conteniendo resina, rellenos y aditivos especializados) y fibras de refuerzo. El proceso consiste en halar estas materias primas (en vez de empujarlas como en el caso de la extrusión) a través de un molde de acero caliente mediante un dispositivo de halado continuo.

porcentaje del módulo para el acero de refuerzo, van de 20 a 25% para GFRP, de 20 a 60% para AFRP, y de 60 a 300% para CFRP. El módulo de elasticidad en compresión varía de 80 a 85% del módulo de GFRP en tracción para CFRP y es de 100% para AFRP. De manera similar, resistencias de compresión del orden de 55%, 78% y 20% de la resistencia a la tracción han sido reportados (**ACI 440.1R-03**) para GFRP, CFRP y AFRP, respectivamente. En algunas barras, se presenta un efecto de escala debido al cizallamiento retardado entre la superficie y el centro de la barra, conducente a una resistencia aparente a la tracción menor porque las fibras internas no están esforzadas completamente al inicio de la ruptura de las barras.

El FRP es susceptible a la ruptura por flujo plástico bajo altas cargas sostenidas de tracción. Las resistencias extrapoladas después de 500,000 de horas de carga sostenida son variables, son del orden de 47 a 66% de la resistencia última inicial para AFRP y de 79 a 91% para CFRP, dependiendo de método de prueba utilizado.

La resistencia de adherencia entre las barras FRP y el concreto se ve afectado por la superficie lisa de las barras de resina. Algunas barras son fabricadas con cuerdas de FRP en espiral adheridas a la superficie lisa o con una capa de arena para mejorar su adherencia. La figura 10 muestra algunos ejemplos de barras FRP. Sin embargo, no existe ningún patrón de corrugación definido. Las barras FRP tienden a ser susceptibles a daño en su superficie durante el proceso constructivo. Las barras FRP tampoco pueden doblarse una vez que la resina se ha endurecido. Si se requieren barras con dobleces, éstos deben hacerse durante el proceso de fabricación. Las resinas poliméricas utilizadas para fabricar las barras FRP sufren un cambio de fase entre 150°F y 250°F que genera una reducción en la resistencia. Para el momento en que la temperatura de la barra alcanza los 480°F, la resistencia a la tracción se ha reducido a un 20% de la resistencia a temperatura ambiente.

3.5.2 Diseño de elementos con refuerzo FRP

El comportamiento de esfuerzo-deformación elástico frágil de las barras FRP afecta la filosofía de diseño para vigas. En la filosofía de diseño de vigas del ACI, el valor del factor de reducción de la resistencia, ϕ , varía entre 0.65 para elementos en los cuales la deformación de la fibra extrema de acero en tracción es cero o de compresión hasta 0.90 para vigas en las cuales la deformación de la barra en el estado límite último excede 0.005 en tracción. Sin embargo, la elasticidad frágil de las barras FRP hace que éstas no cedan y en cambio fallen por fractura repentina sin previo aviso. La figura 11 muestra diagramas de momento-curvatura para vigas con refuerzo de acero y de FRP de acuerdo a los modelos de comportamiento esperados, en donde se puede apreciar la carencia de ductilidad de las vigas con refuerzo FRP.

Para el caso de refuerzo con FRP, se define una *falla balanceada* cuando las barras FRP alcanzan la deformación unitaria de ruptura de diseño al mismo tiempo que el concreto en la fibra extrema de compresión alcanza su deformación unitaria límite. La cantidad de refuerzo correspondiente a este estado se denomina la razón de refuerzo FRP balanceado, ρ_{fb} . Se ha propuesto un factor de reducción de la resistencia $\phi = 0.50$ para vigas con

refuerzo FRP que tengan un ρ menor que ρ_{fb} ya que vigas con una cantidad de refuerzo mayor fallarían de manera repentina. Es necesario recalcar que el ACI no ha aprobado el uso de refuerzo FRP ni tampoco ha aprobado los valores de ϕ propuestos.

Tabla 3-1 Areas, Pesos, y Dimensiones de las Barras de Refuerzo				
Designación de No. de Barras ^b	Grados	Peso (kg/m)	Dimensiones Nominales ^a	
			Diámetro (cm)	Area de Sección Transversal (cm ²)
#3 [10]	40, 60	0.56	0.95	0.71
#4 [13]	40, 60	1.00	1.27	1.29
#5 [16]	40, 60	1.56	1.59	2.00
#6 [19]	40, 60, 75	2.24	1.91	2.84
#7 [22]	60,75	3.05	2.22	3.87
#8 [25]	60,75	3.98	2.54	5.10
#9 [29]	60,75	5.07	2.87	6.45
#10 [32]	60,75	6.41	3.23	8.19
#11 [36]	60,75	7.92	3.58	10.06
#14 [43]	60,75	11.41	4.30	14.52
#18 [57]	60,75	20.28	5.73	25.81

^aLas dimensiones nominales de una barra corrugada son equivalentes a las de la barra lisa y con el mismo peso unitario que la barra corrugada.

^bLos números de las barras están basados en el número de octavos de pulgada incluidos en el diámetro nominal.

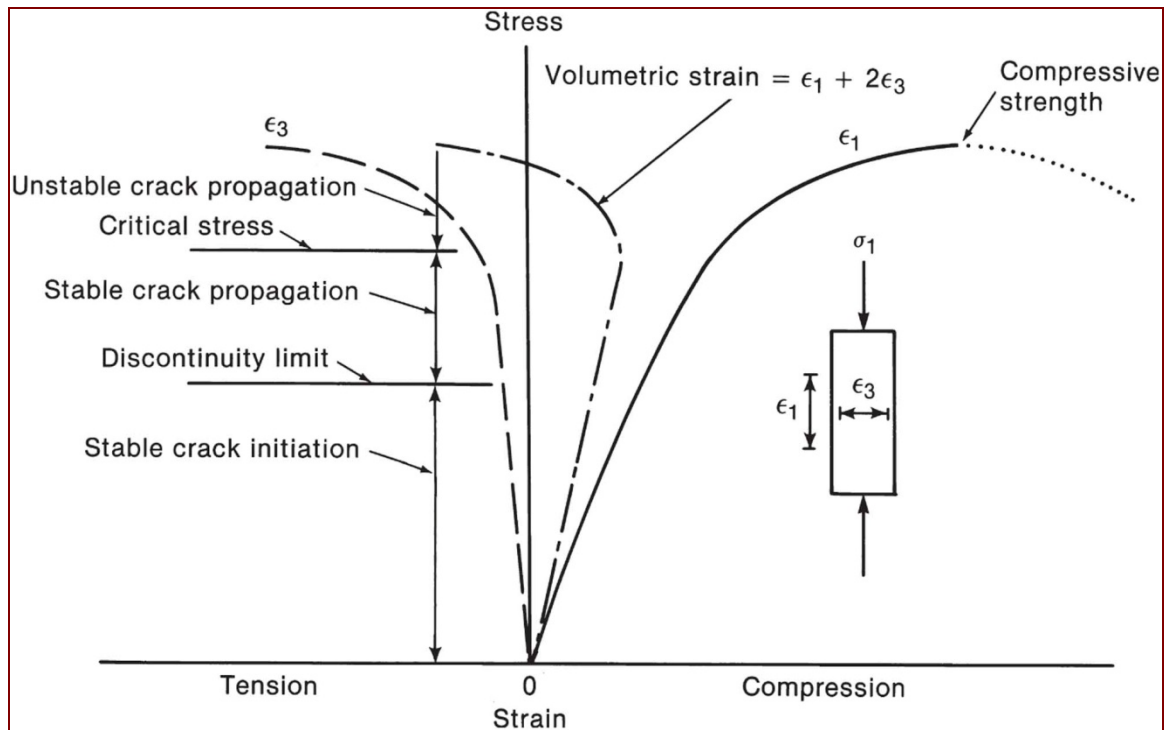


Figura 3-1 Curvas de esfuerzo-deformación para concreto cargado en compresión uniaxial. (Tomado de Newman & Newman, 1972)

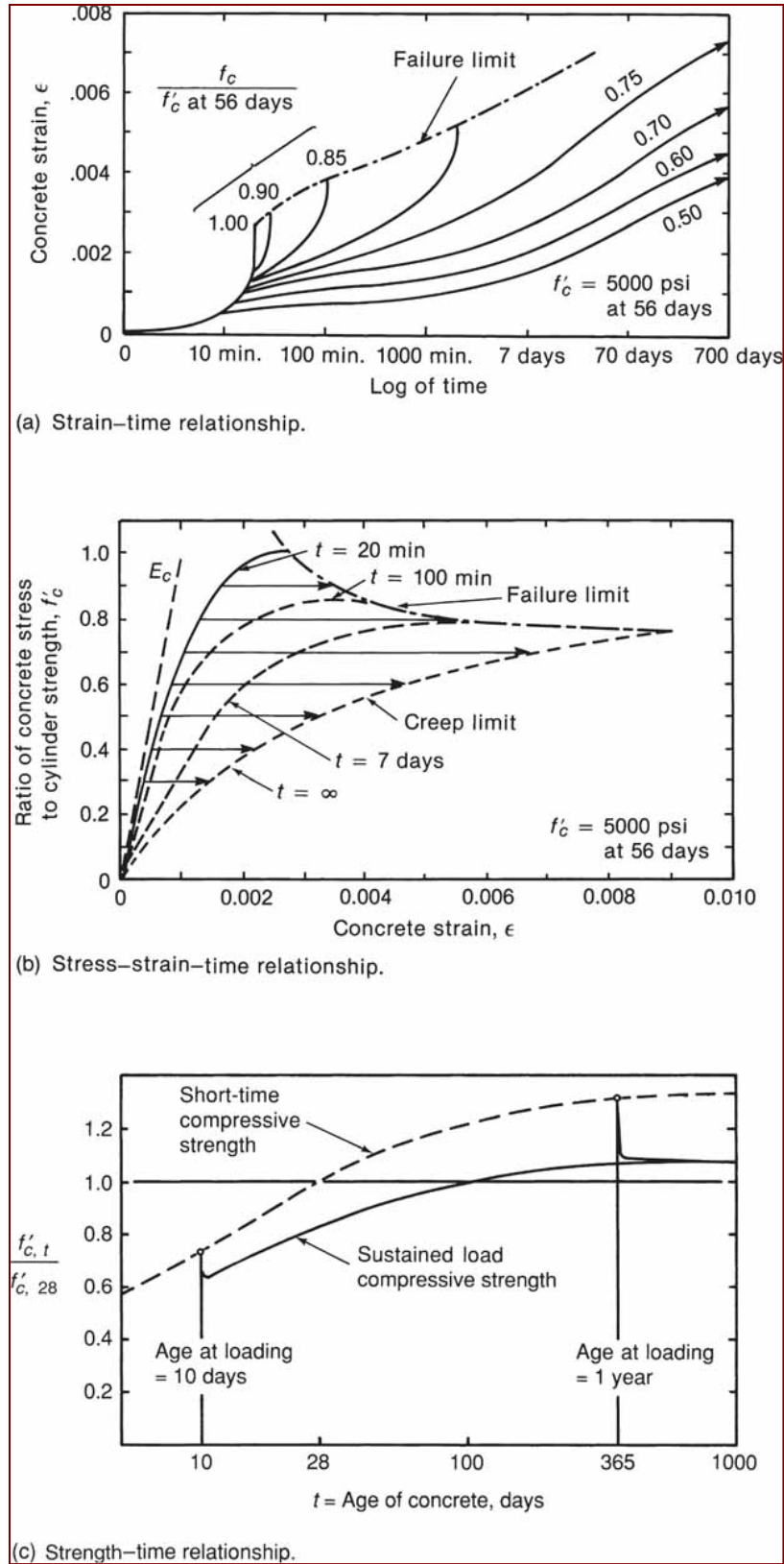


Figura 3–2 Efecto de cargas sostenidas sobre el comportamiento del concreto en compresión uniaxial. (Tomado de Rüş, 1960)

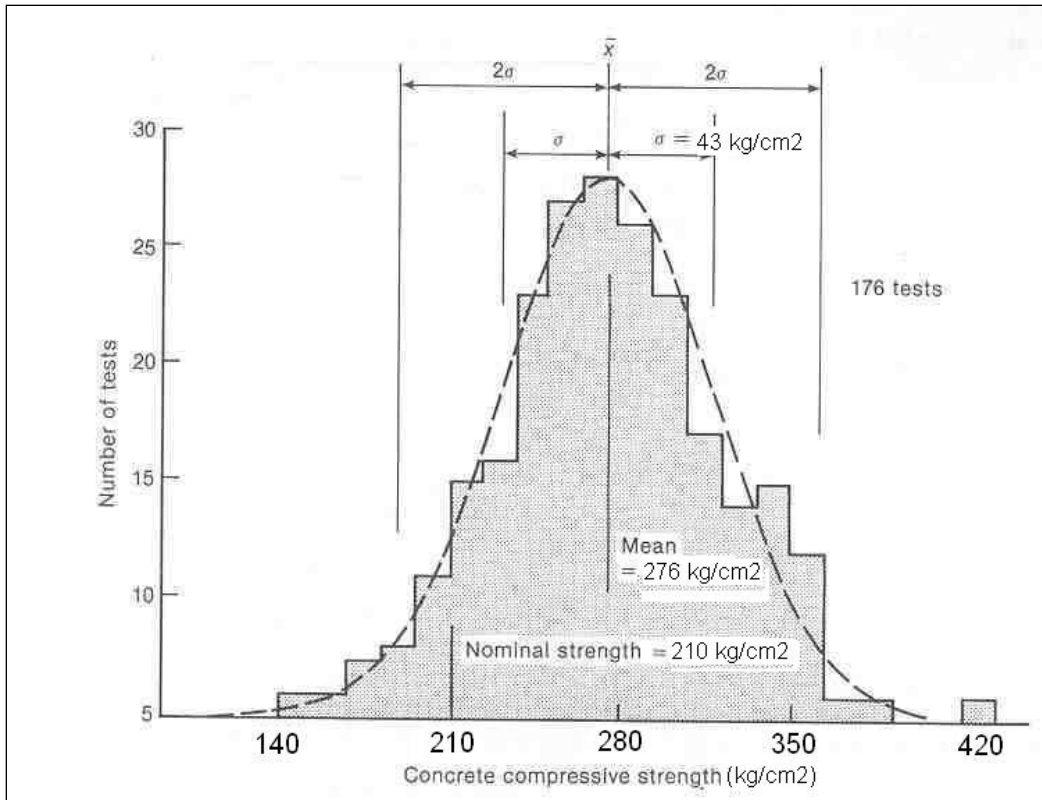


Figura 3-3 Distribución de resistencias de concreto.

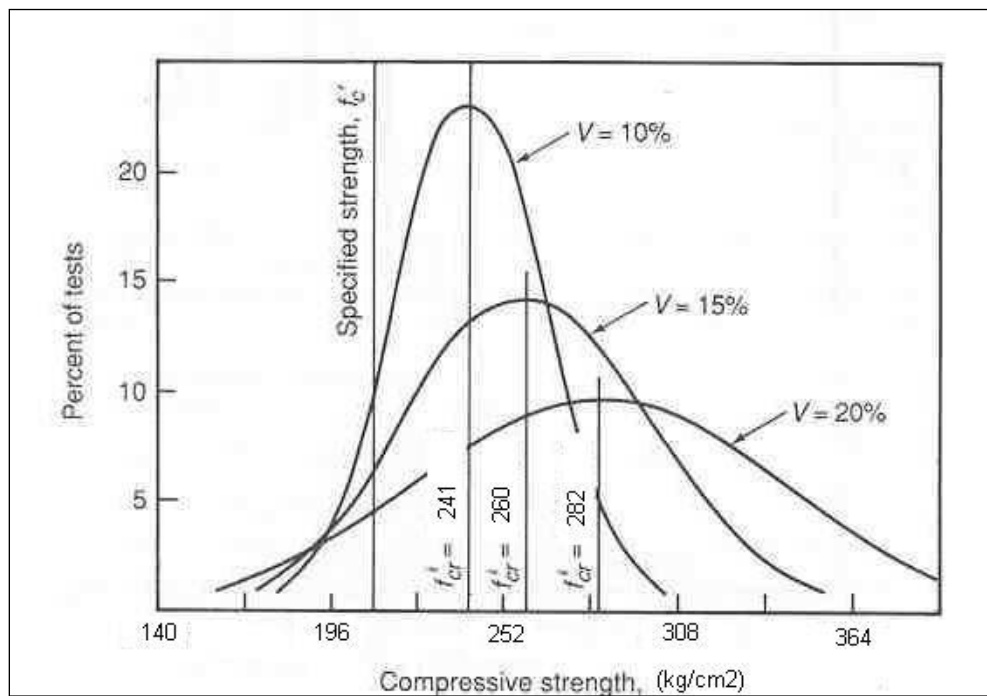


Figura 3-4 Curvas de frecuencia normal para coeficientes de variación de 10, 15 y 20 por ciento. (Tomado de ACI 214-77)

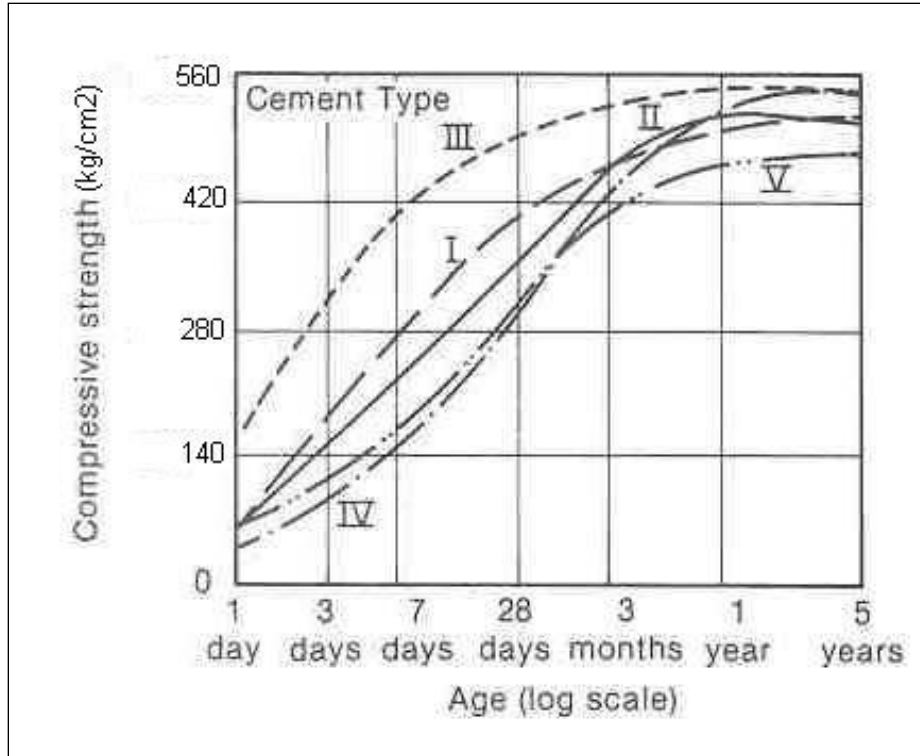


Figura 3-5 Efecto del tipo de cemento sobre la ganancia de resistencia del concreto (curado húmedo, relación agua-cemento = 0.49). (Tomado de Gonnerman & Lerch, 1951)

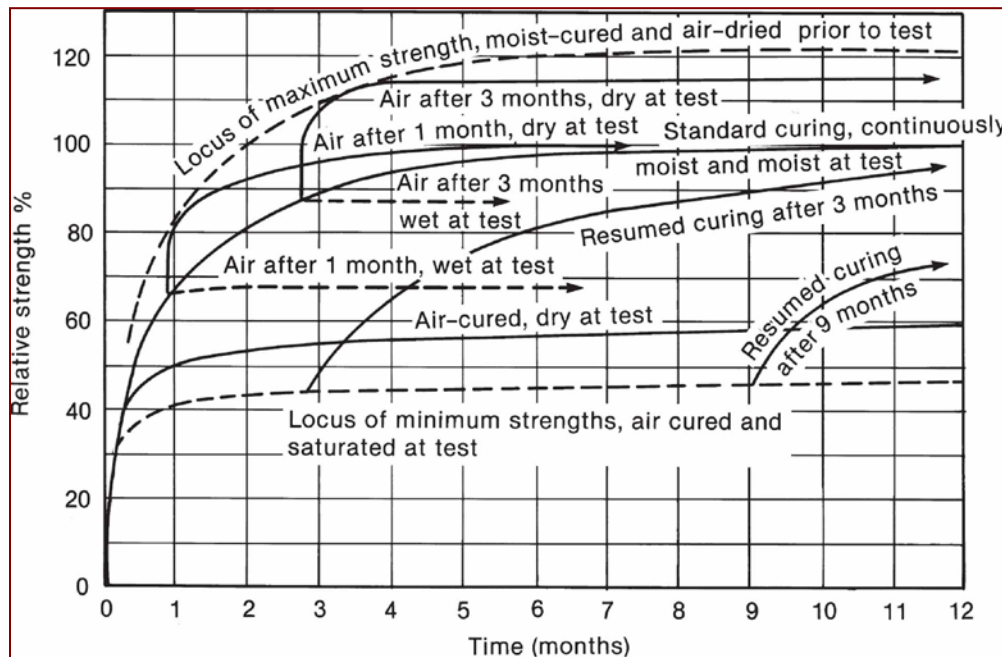


Figura 3-6 Efecto de las condiciones de curado húmedo a 21°C y contenido de humedad del concreto al momento de prueba sobre la resistencia a compresión del concreto. (Tomado de Price, 1951)

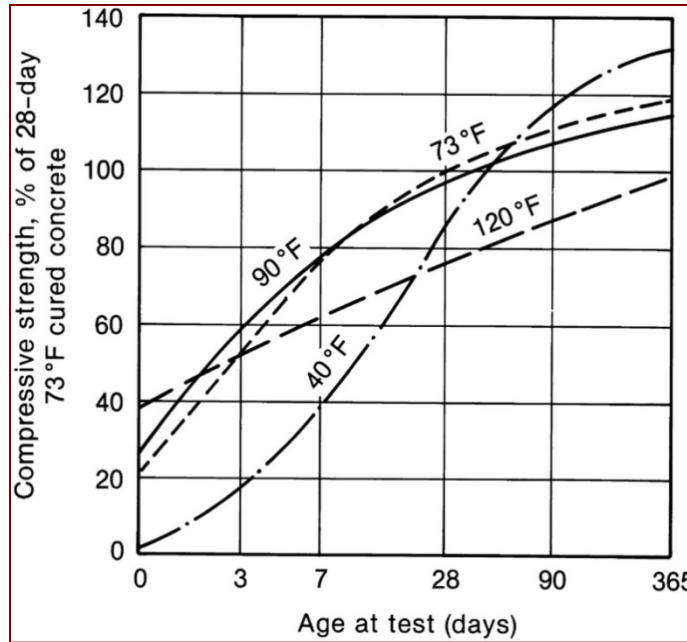


Figura 3-7 Efecto de la temperatura sobre la resistencia del concreto durante los primeros 28 días (relación agua-cemento = 0.41, contenido de aire = 4.5 porciento, cemento Tipo I, especímenes colados y curados en húmedo a la temperatura indicada durante los primeros 28 días. De ahí en adelante curado húmedo a 23°C). (Tomado de Klieger, 1958)

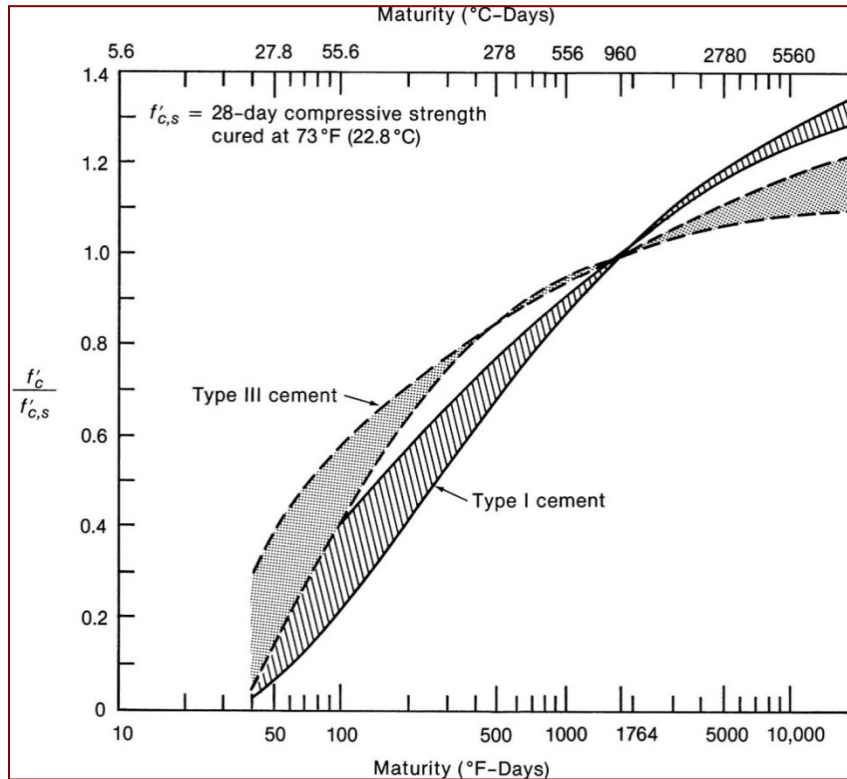


Figura 3-8 Resistencia normalizada a la compresión versus madurez. (Tomado de Lew & Reichard, 1978)

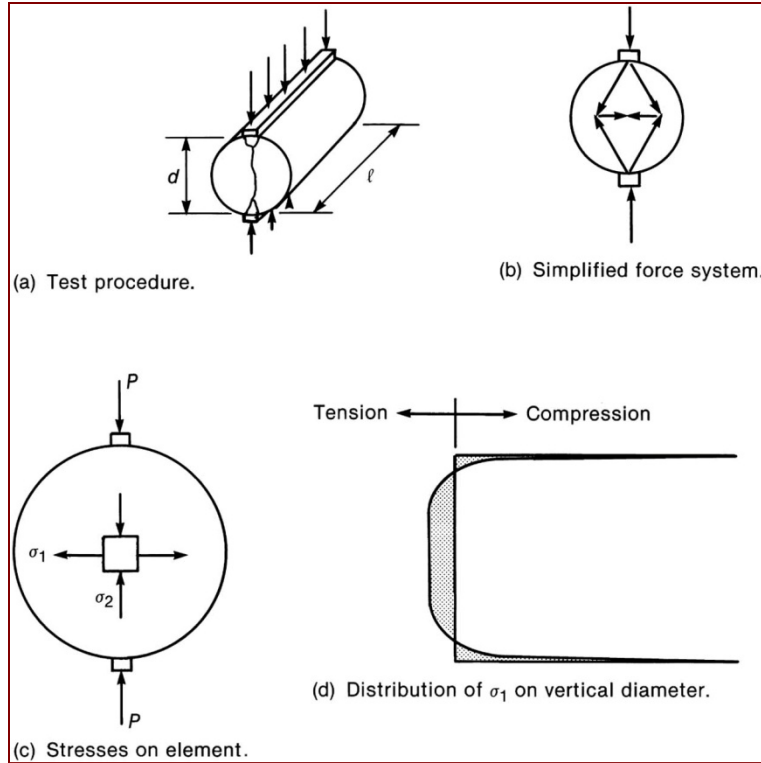


Figura 3–9 Prueba de tracción simple por compresión diametral.

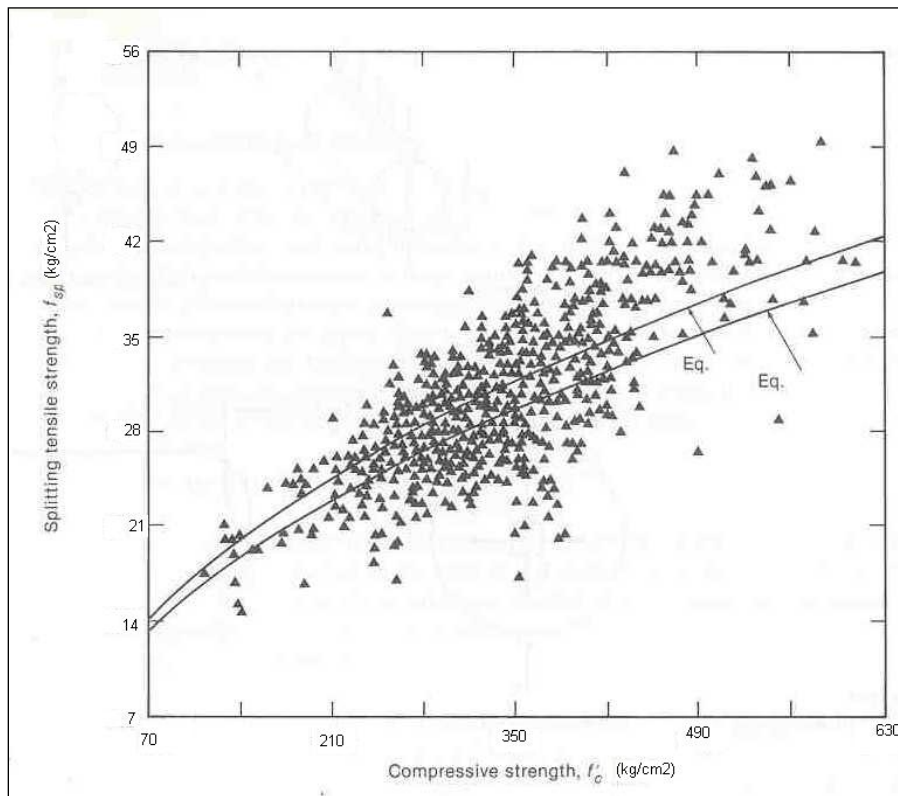


Figura 3–10 Relación entre resistencia a la tracción simple por compresión diametral y resistencia a la compresión. (Tomado de Mirza et al., 1979)

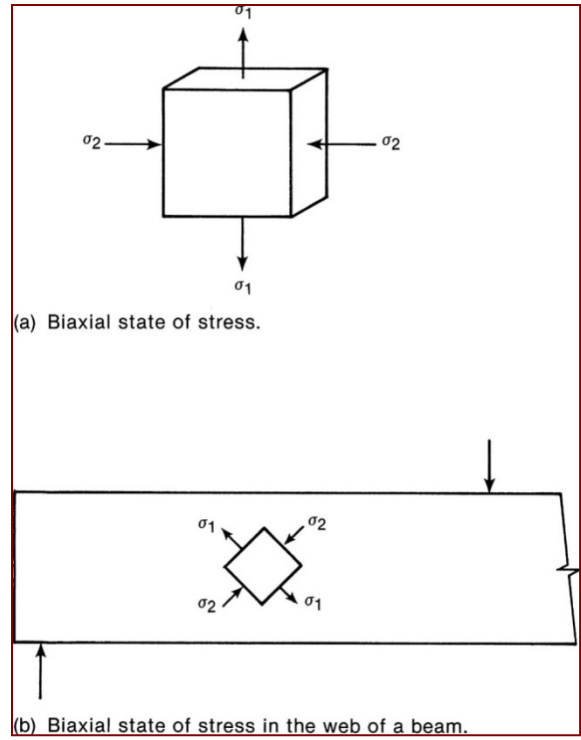


Figura 3–11 Esfuerzos biaxiales.

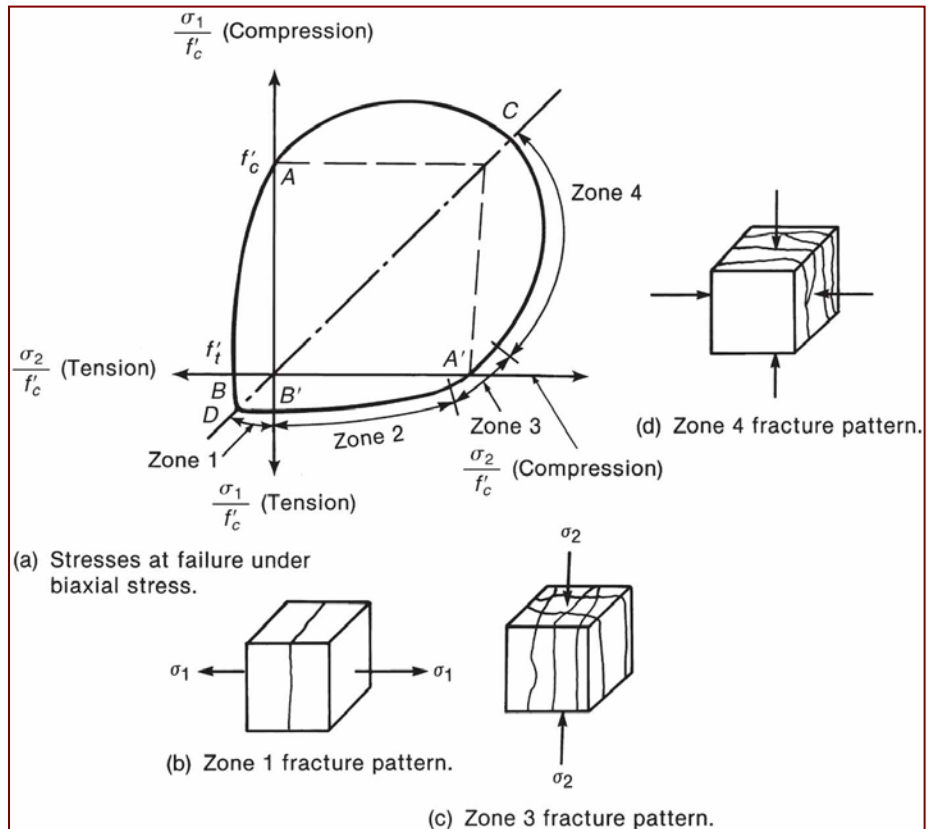


Figura 3–12 Resistencia y modos de falla del concreto sometido a esfuerzos biaxiales. (Tomado de Newman & Newman, 1972)

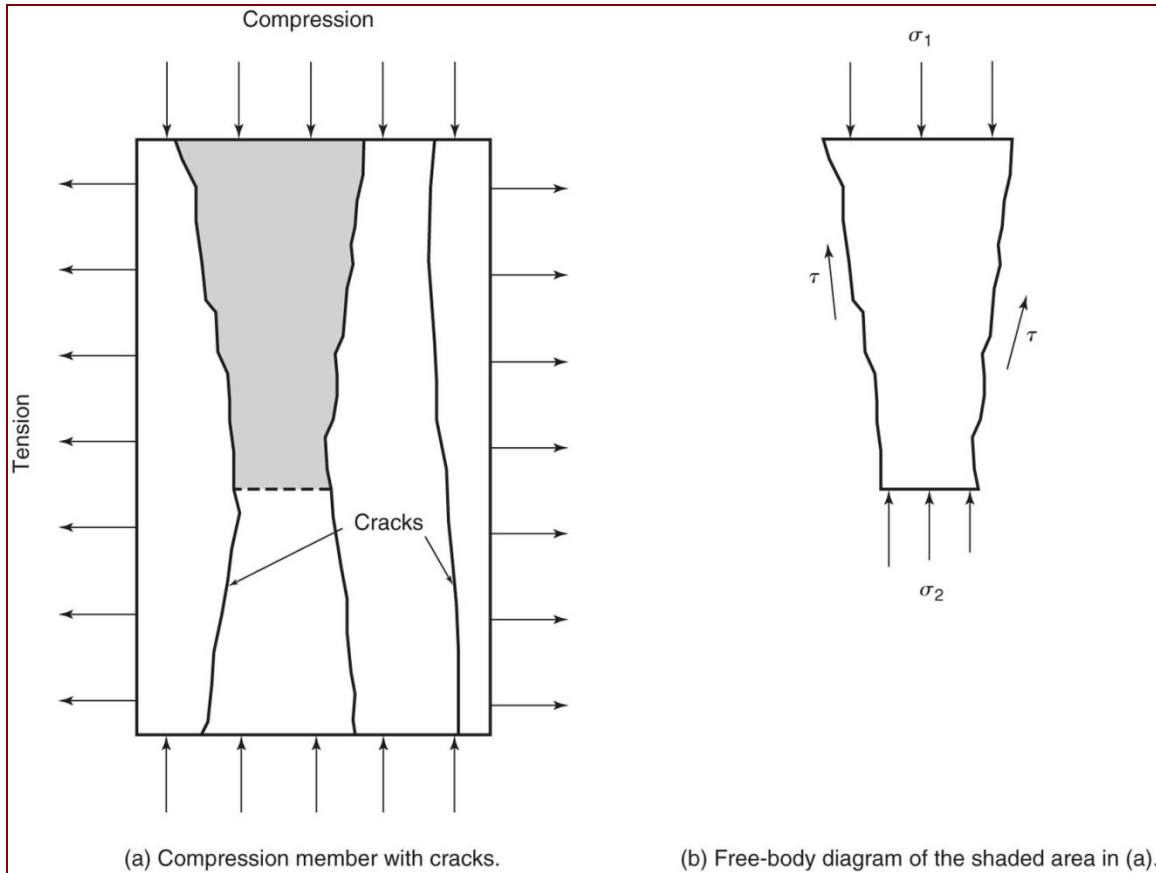


Figura 3–13 Esfuerzos en un elemento de concreto agrietado.

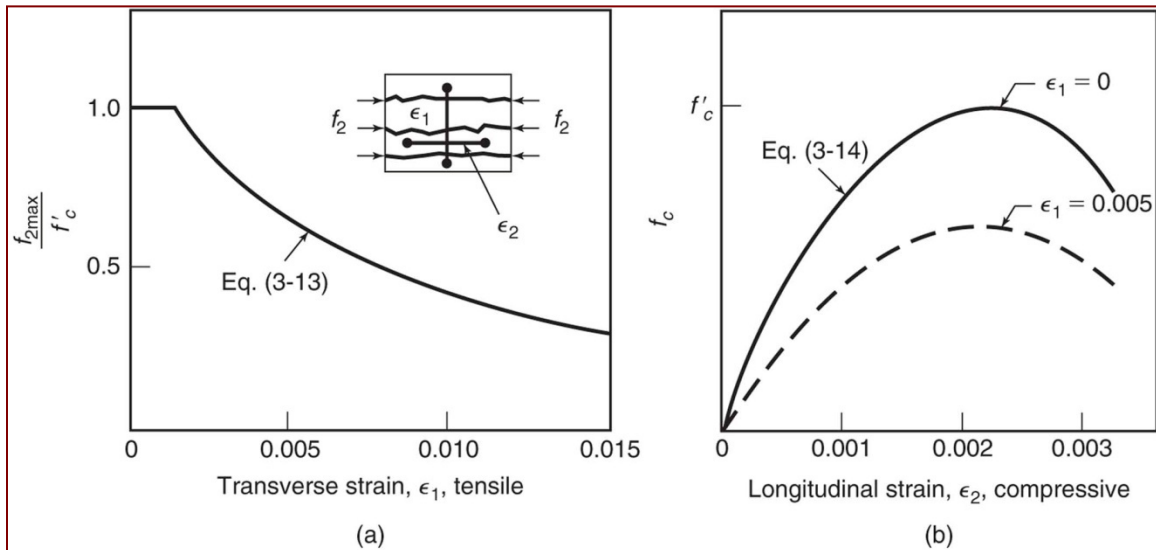


Figura 3–14 Efecto de las deformaciones unitarias transversales traccionales sobre la resistencia a la compresión del concreto agrietado.

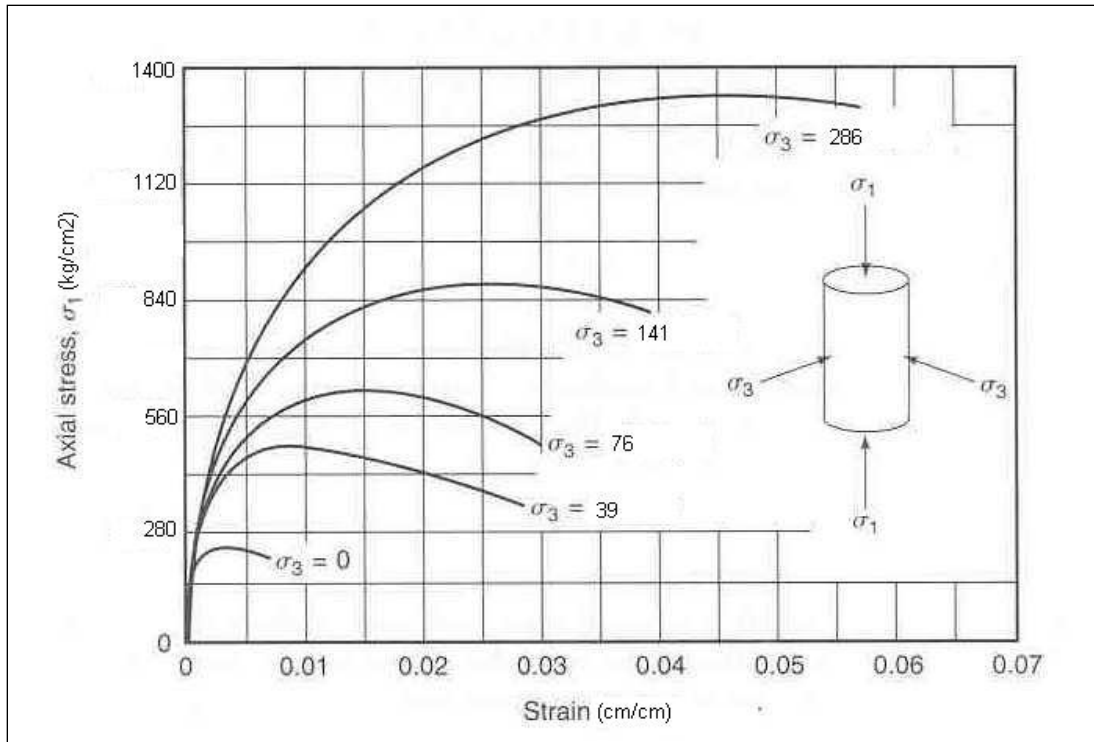


Figura 3-15 Curvas de esfuerzo-deformación axial de pruebas de compresión triaxial sobre cilindros de concreto, resistencia no confinada del concreto, $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$. (Tomado de Richart et al., 1928)

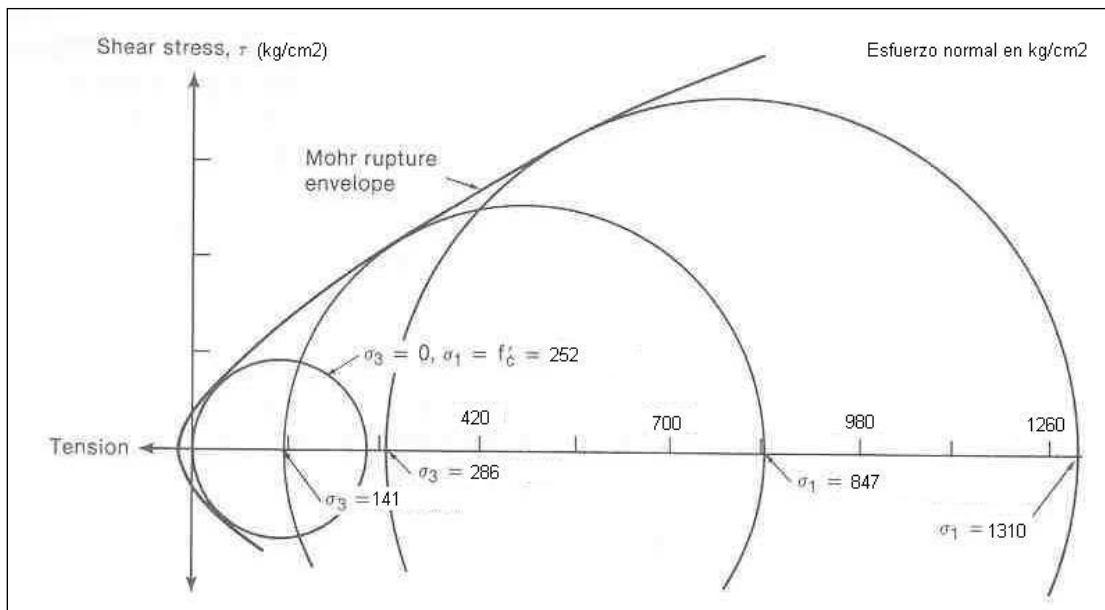


Figura 3-16 Envolvente de Mohr para las pruebas de concreto de la figura 3-15.

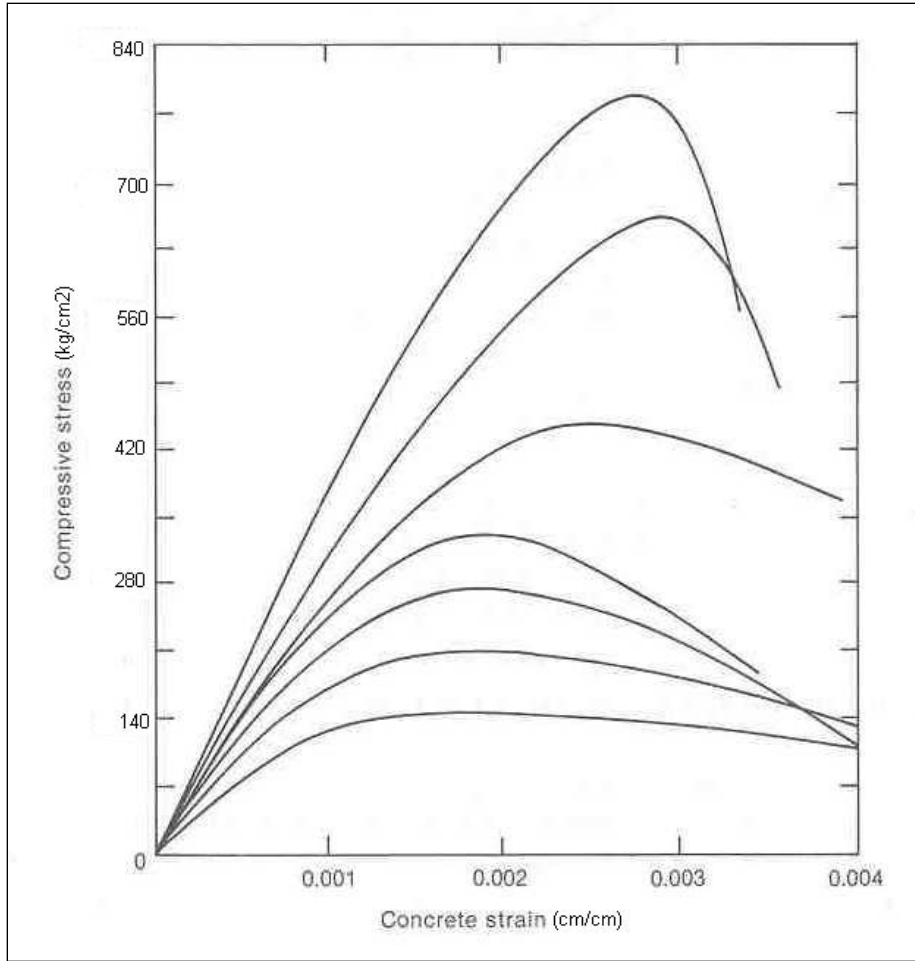


Figura 3–17a Curvas de esfuerzo-deformación típicas para concreto cargado en compresión uniaxial. (Tomado de Hognestad et al., 1955 y Kaar et al., 1978)

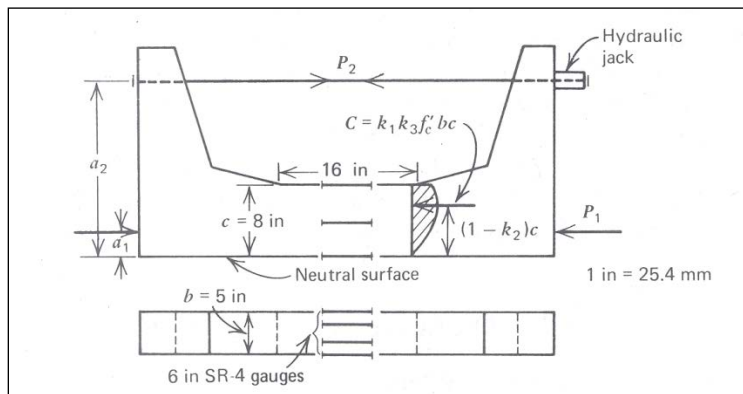


Figura 3–17b Espécimen de prueba del Portland Cement Association para replicar la zona de compresión en vigas. (Tomado de Park, R. & Paulay, T., 1975)

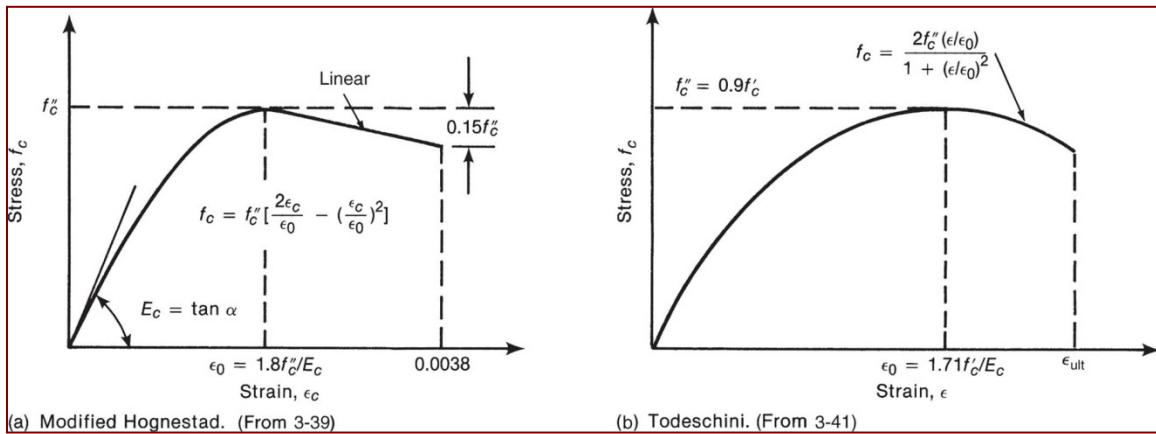


Figura 3–18 Modelos analíticos para las curvas esfuerzo-deformación para concreto cargado en compresión uniaxial. (Refs. (a) Hognestad, Eivind, *A Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Concrete Members*, Bulletin 399, University of Illinois Engineering Experiment Station, Urbana, IL, November 1951, 128 pp. y (b) Todeschini, Claudio, Bianchini, Albert C. y Kesler, Clyde E., “Behavior of Concrete Columns Reinforced with High Strength Steels,” *ACI Journal Proceedings*, Vol. 61, No. 6, June 1964, pp. 701-716.)

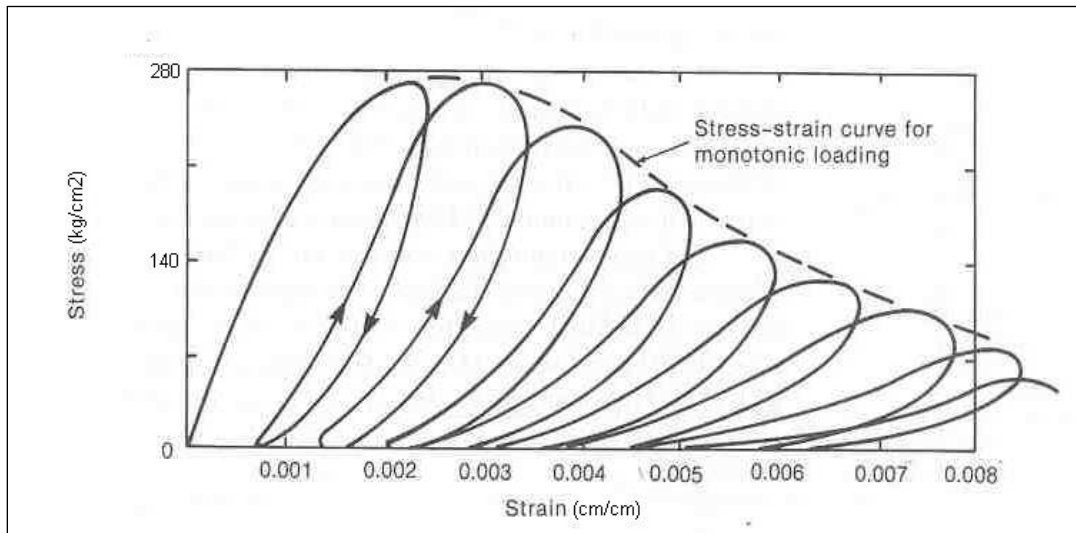


Figura 3–19 Curvas de esfuerzo-deformación para concreto cargado cíclicamente. (Tomado de Sinha et al., 1964)

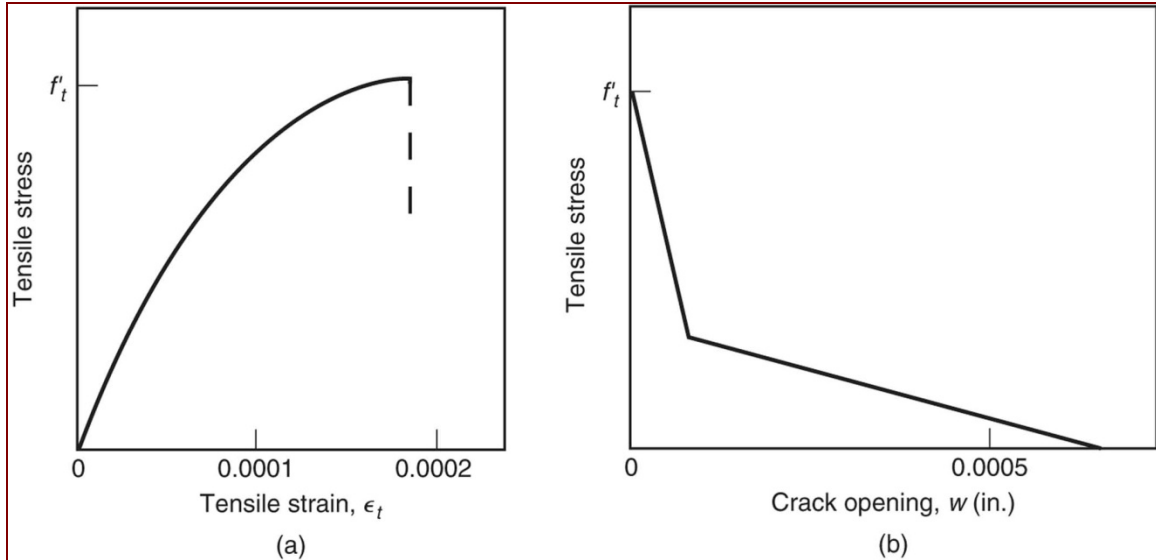


Figura 3–20 Curva de esfuerzo-deformación y curva esfuerzo traccional versus abertura de grieta para concreto cargado en tracción.

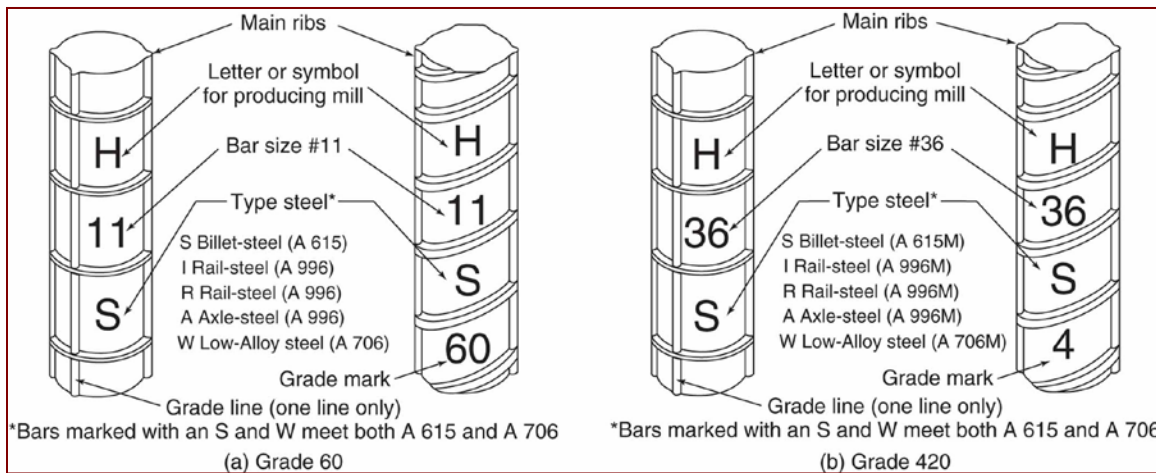


Figura 3–21 Señalización normal de barras de refuerzo. (Cortesía de Concrete Reinforcing Steel Institute, CRSI)

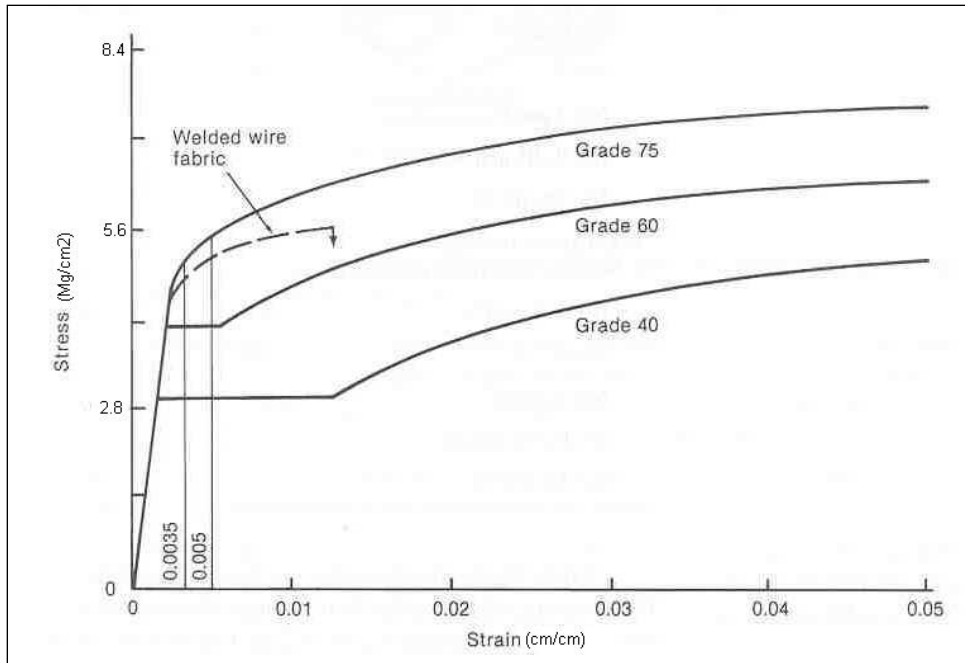


Figura 3–22 Curvas de esfuerzo-deformación para barras de refuerzo.

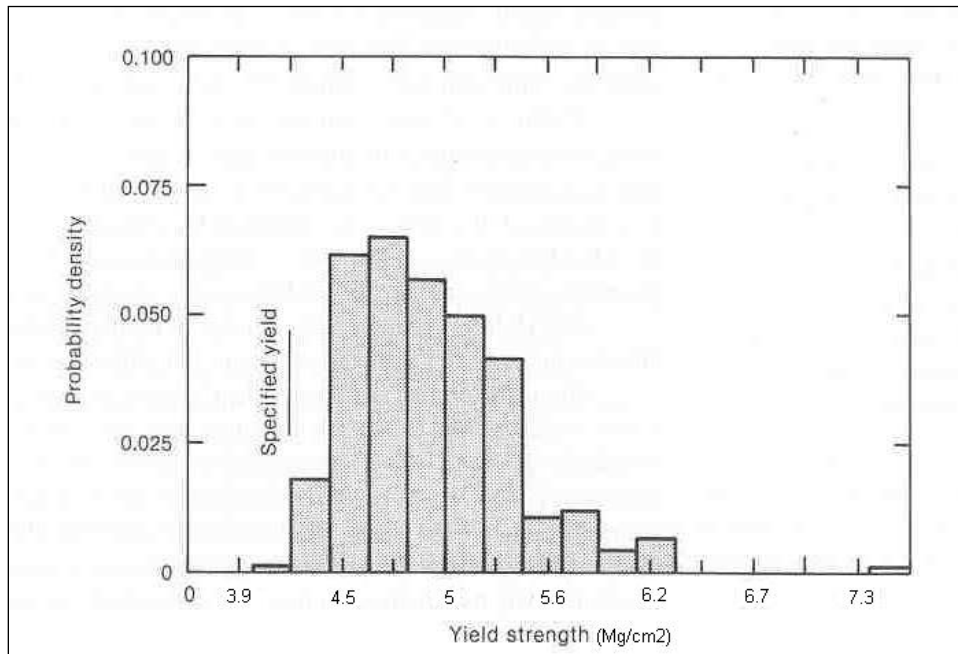


Figura 3–23 Distribución de resistencia de fluencia para acero de Grado 60 obtenida en pruebas de molino de laminación. (Tomado de Mirza & MacGregor, 1979)

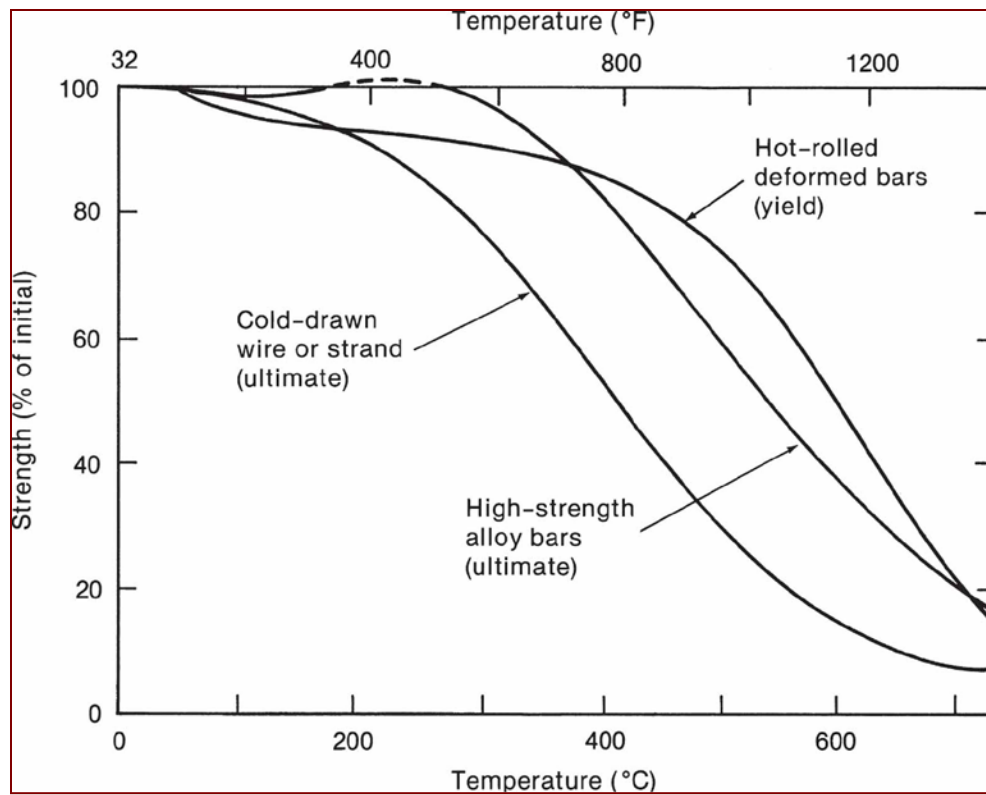
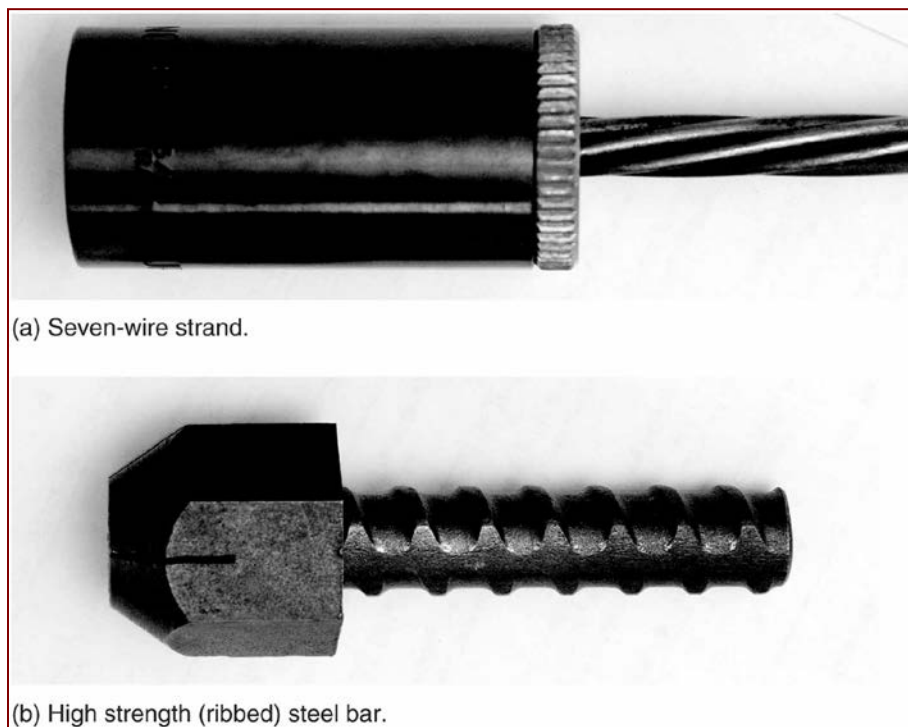


Figura 3-24 Resistencia del acero de refuerzo ante temperaturas altas. (Tomado de ACI 216-02)



(a) Seven-wire strand.

(b) High strength (ribbed) steel bar.

Figura 3-25 Acero típico de presforzado

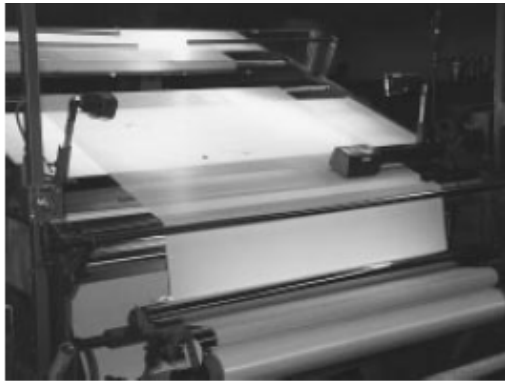


Figura 3-26



Figura 3-27

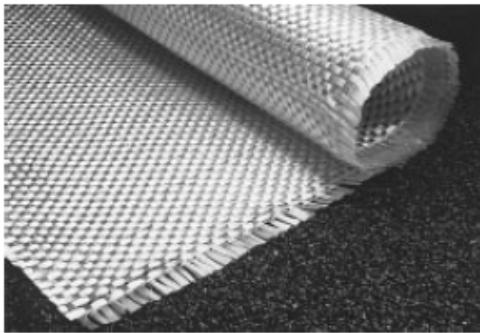


Figura 3-28



Figura 3-29



Figura 3-30



Figura 3-31



Figura 3-32



Figura 3-33

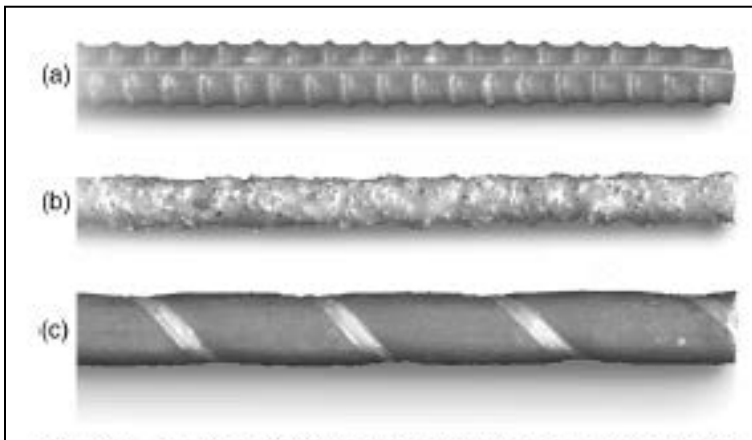


Figura 3-34

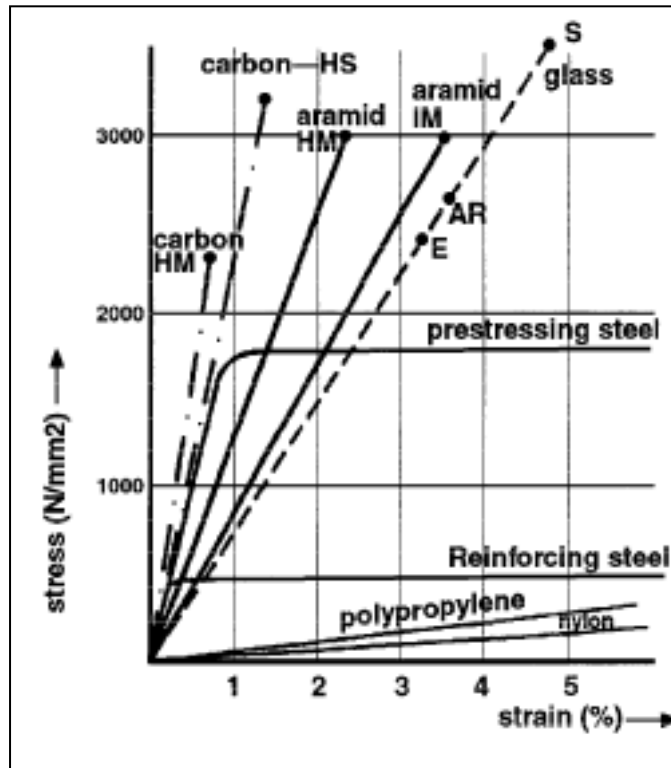


Figura 3-35

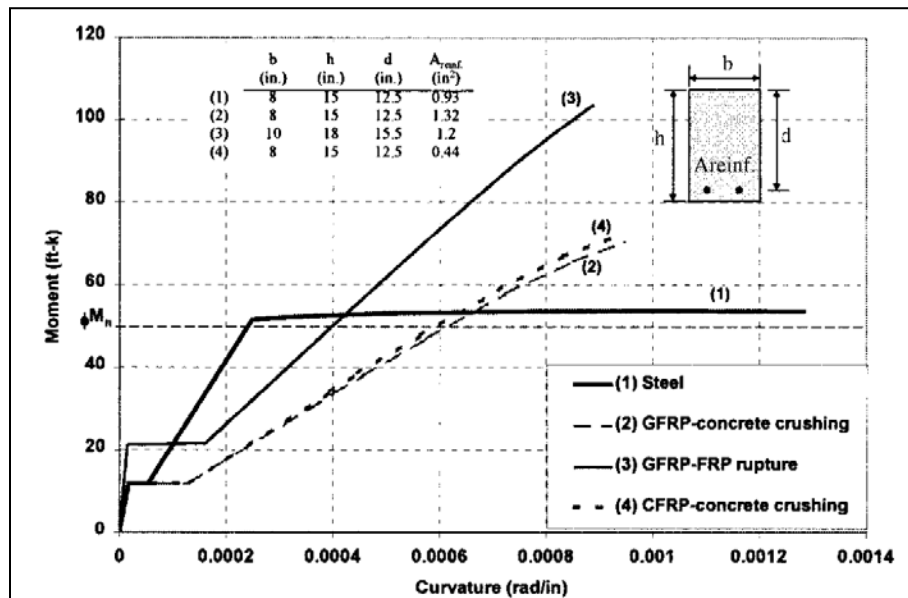


Figura 3-36.

4. FLEXIÓN

4.1 Introducción

En este capítulo se usarán las curvas de esfuerzo deformación del concreto y del refuerzo para desarrollar una teoría de flexión. Esta teoría es aplicada primero a vigas de sección transversal rectangular y luego a otros tipos de sección transversal, tales como vigas T y vigas con refuerzo de compresión.

La mayoría de las estructuras de concreto pueden ser subdivididas en vigas y losas sujetas primordialmente a flexión y columnas sujetas a compresión axial acompañada en la mayoría de los casos por flexión. Ejemplos típicos de elementos a flexión son la losa y las vigas mostradas en la figura 4-1. La carga P aplicada en el punto A es tomada por la franja de losa mostrada. Las reacciones en los extremos de la franja de losa actúan sobre las vigas en B y C . Las vigas, a la vez, transmiten las reacciones de la losa hacia las columnas en D , E , F y G . Las reacciones de la viga causan fuerzas axiales en las columnas.

Suponemos que la losa de la figura 4-1 transfiere cargas en una dirección y por lo tanto, a este tipo de losa se le denomina *losa en una dirección*. Si no hubiera vigas, la losa transferiría la carga en dos direcciones. Tal losa es denominada como *losa en dos direcciones*.

4.1.1 Regiones B y Regiones D

A lo largo de casi toda la longitud de una viga o de una columna, existirá una distribución lineal de las deformaciones unitarias para una sección dada de forma tal que la teoría normal de flexión es aplicable. A tales regiones se les denomina como regiones B, en donde B es usado en honor a Bernoulli, quien postuló por primera vez la distribución lineal de deformaciones unitarias. Análisis de diferente tipo deben ser usados en sitios adyacentes a discontinuidades, cargas concentradas, huecos o cambios en la sección transversal. A estas regiones se les denomina como regiones D, en donde la D se refiere a discontinuidad o interrupción. Por lo pronto, se trabajará con regiones B únicamente.

4.1.2 Análisis versus Diseño

En el estudio del concreto reforzado surgen dos tipos de problemas diferentes:

1. Análisis. Dada una sección transversal, una resistencia del concreto, un tamaño de refuerzo, una ubicación y un esfuerzo de cedencia, calcular la resistencia o capacidad.
2. Diseño. Dado un efecto de carga factorizado tal como M_u , seleccionar una sección transversal, incluyendo dimensiones, resistencia del concreto, refuerzo, etcétera.

Aun cuando ambos tipos de problemas utilizan los mismos principios, los procedimientos a seguir son diferentes para cada caso. El análisis es más sencillo porque todas las decisiones relativas al refuerzo, tamaño de viga, etc., han sido tomadas y solo se requiere aplicar los principios de cálculo de resistencia para determinar la capacidad. El diseño, por otro lado, involucra la escogencia de tamaño de vigas, resistencias de materiales y refuerzo para producir una sección transversal que pueda resistir las cargas y los momentos.

4.1.3 Resistencia requerida y resistencia de diseño

La ecuación básica de diseño para flexión es:

$$\text{resistencia nominal reducida} \geq \text{efectos de carga mayorados}$$

o bien

$$\phi M_n \geq M_u \quad (4-1)$$

donde M_u es el *momento debido a las cargas mayoradas*, designado por el ACI 318S-08 como *momento último requerido*. Este es un efecto de carga calculado mediante análisis estructural para la combinación de cargas factorizadas gobernante según el [Artículo 9.2 del ACI 318S-08](#). El término M_n se refiere a la *capacidad nominal de momento* de una sección transversal calculada usando las dimensiones nominales y las resistencias especificadas de los materiales. El factor ϕ es un factor de reducción de resistencia (Artículo 9.3) para contabilizar posibles variaciones en dimensiones y resistencias de materiales y posibles imprecisiones en las ecuaciones de resistencia. Para flexión sin carga axial, el [Artículo 9.3.2](#) establece $\phi = 0.90$ para secciones controladas por tracción. Casi todas las vigas resultarán controladas por tracción. Al producto ϕM_n se le denomina *momento de diseño, resistencia de diseño o resistencia de momento reducida*.

4.1.4 Momentos positivos y momentos negativos

Se denomina momento positivo al momento que causa compresión en la superficie superior de una viga y tracción en la superficie inferior. Las zonas de compresión para momentos positivos y negativos se muestran como zona achurada en la figura 4-2. Se graficarán los diagramas de momento flexor en el lado de la compresión del elemento.

4.1.5 Símbolos y abreviaciones

Los símbolos definidos a continuación deben ser entendidos completamente si se quiere entender la teoría aquí desarrollada. Estos se presentan en la figura 4-2.

- El símbolo prima (') se refiere en general a compresión, tal como A'_s y d' .
- A_s es el área de refuerzo en la zona de tracción de la viga, refuerzo de tracción, en cm^2 .

- A'_s es el área de refuerzo en la zona de compresión de la viga, refuerzo de compresión, en cm^2 .
- b es el ancho de la zona de compresión de la viga. Ilustrado en la figura 4-2 para regiones de momento positivo y negativo, cm.
- b_w es el ancho del alma de la viga y puede o no ser lo mismo que b , cm.
- d es la distancia desde la fibra extrema de compresión hasta el centroide del acero en la zona de tracción del elemento. En una región de momento positivo (figura 4-2a) el acero de tracción está próximo a la superficie inferior de la viga mientras que en la región de momento negativo está próximo a la superficie superior, cm.
- d_t es la distancia desde la fibra extrema de compresión hasta la capa más distante de acero de tracción, cm.
- f'_c es la resistencia a la compresión del concreto especificada para 28 días, kg/cm^2 .
- f_s es el esfuerzo en el refuerzo de tracción, kg/cm^2 .
- f_y es la resistencia de cedencia especificada para el refuerzo, kg/cm^2 .
- jd es el *brazo de palanca*, la distancia entre la resultante de compresión y la resultante de tracción, cm.
- j es una razón adimensional usada para definir el brazo de palanca jd , j varía durante la vida de la viga.
- ϵ_{cu} es la deformación unitaria supuesta del concreto en la fibra extrema de compresión de la viga al momento de falla por flexión.
- ϵ_s es la deformación unitaria en el refuerzo de tracción.
- ρ es la razón de refuerzo longitudinal de tracción, $\rho = A_s/bd$.

4.2 Teoría de Flexión

4.2.1 Teoría de flexión para concreto reforzado

COMPORTAMIENTO A FLEXIÓN

Se trata de seguir la variación de la curvatura conforme varía la deformación unitaria para cada incremento de carga.

$$\varphi = \frac{\epsilon}{y} \quad (4-2)$$

donde

ϵ = deformación unitaria en un punto dado
 y = distancia del eje neutro al punto de medición

De esta forma se obtiene un *Diagrama de Momento–Curvatura* que refleja el comportamiento a flexión de la viga. Ver figura 4-7.

Después del agrietamiento, la fuerza de tracción en el concreto se transfiere al acero. Esto trae como resultado una disminución del área de sección efectiva del concreto que resiste el momento aplicado.

Además, la rigidez de la sección de la viga disminuye

$$M = EI\varphi \Rightarrow \frac{M}{EI} = \varphi = \kappa = \frac{1}{\rho} \quad (4-3)$$

Es decir, I disminuye conforme el área efectiva disminuye y por lo tanto EI disminuye. Este es el estado ante *solicitud de servicio*. La grieta más grande medida en este estado es de 0.0152 mm. Observe la gran ductilidad de la viga de concreto reforzado a pesar de que el concreto simple no es un material muy dúctil:

En el nivel de *servicio* (punto C) la deflexión en el centro de la viga es

$$\Delta_m^s = .787 \text{ cm} = \frac{L}{383}$$

En la condición última (punto E) dicha deflexión a aumentado a

$$\Delta_m^u = 5.08 \text{ cm} = \frac{L}{60}$$

en donde L es la longitud de la viga.

Para este ejemplo, podemos definir dos tipos de ductilidad, ductilidad de desplazamiento y ductilidad de curvatura mediante las siguientes expresiones

$$\mu_{\Delta} = \frac{\Delta_m^u}{\Delta_m^y} = \frac{5.08}{1.33} = 3.8$$

$$\mu_{\phi} = \frac{\phi_u}{\phi_y} = \frac{0.0013}{0.00035} = 3.7$$

donde Δ_m^y es una deflexión de *fluencia* y Δ_m^u es la deflexión última ambas medidas en el centro de en la viga.

SUPOSICIONES BÁSICAS EN TEORÍA DE FLEXIÓN

1. Secciones planas se mantienen planas después de la deformación, i.e., distribución lineal de deformaciones unitarias. (Artículo 10.2.2 del ACI 318S-08)
2. Existe compatibilidad de deformaciones unitarias entre las barras de refuerzo y el concreto en todo nivel. (Artículo 10.2.2 del ACI 318S-08)
3. Esfuerzos en el acero y en el concreto son computables a partir de las deformaciones usando las relaciones constitutivas, $\sigma - \epsilon$. El Artículo 10.2.4 del ACI 318S-08 obliga a usar el modelo elastoplástico para el acero.
4. Se desprecia la resistencia del concreto ante tracción (Artículo 10.2.5 de ACI 318S-08)
5. Se declara *falla* en el concreto cuando la deformación unitaria de compresión alcanza un valor predeterminado, ϵ_{cu} . Este resulta en una estimación conservadora de la resistencia. Según el Artículo 10.2.3 del ACI 318S-08, $\epsilon_{cu} = 0.003$.

6. Relación esfuerzo-deformación para concreto puede suponerse como rectangular, trapezoidal, parabólica o cualquier otra forma que prediga la resistencia en concordancia con pruebas de laboratorio, [Artículo 10.2.6 del ACI 318S-08](#).

Así, en lugar de usar una curva representativa de la relación constitutiva del concreto, tal como la mostrada en la figura 3-18b, son aceptables otros diagramas más fáciles de usar, siempre que predigan las pruebas experimentales adecuadamente. Como se muestra en la figura 4-11, la forma del bloque de esfuerzos en el estado límite último puede expresarse matemáticamente en términos de tres constantes:

$$k_3 = \alpha_1 = \frac{f_c''}{f_c'}$$

$$k_1 = \beta_1 = \frac{\text{area bajo la curva } \sigma - \varepsilon}{\text{area de envolvente rectangular}} \quad (\text{Ver figura 4-12})$$

$k_2 = \frac{\beta_1}{2}$ = razón de distancia de centroide de compresión C a la fibra extrema de compresión sobre distancia entre esa fibra y el eje neutro.

$$\therefore C = k_1 k_3 f_c' b c \quad \text{para sección de ancho } b.$$

La figura 4-12 muestra valores de k_1 y k_3 para varios diagramas de esfuerzo deformación o *bloques de esfuerzos*. Pruebas de laboratorio en prismas de concreto simple han dado los valores de $k_1 k_3$ versus f_c' mostrados en la figura 4-13.

El [ACI 318S-08 Artículo 10.2.7](#) permite el empleo de un *bloque de esfuerzos rectangular equivalente* para los cálculos de resistencia última. Este bloque rectangular equivalente se presenta en la figura 4-14. El valor de β_1 es definido de la siguiente manera:

$$\beta_1 = 0.85 \text{ para } f_c' \leq 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$\beta_1 = 1.05 - 0.05 \left(\frac{f_c'}{70} \right) \geq 0.65 \text{ para } f_c' > 280 \text{ kg/cm}^2$$

El bloque rectangular representa una muy buena aproximación para vigas. También lo es para columnas hechas de concreto con una resistencia f_c' de hasta 420 kg/cm^2 . Después de este nivel y con excentricidad pequeña, el modelo del bloque rectangular sobrestima la capacidad. Esto se debe a que β_1 está escogido como cota inferior de datos experimentales, lo cual sobrestima el brazo de palanca del momento.

Las siguientes ecuaciones han sido propuestas como posible corrección al problema de sobrestimación mencionado arriba:

$$\alpha_1 = 0.85 \text{ para } f_c' \leq 560 \text{ kg/cm}^2$$

$$\alpha_1 = 0.85 - \left(\frac{f'_c - 560}{3500} \right) \text{ para } f'_c > 560 \text{ kg/cm}^2$$

$$\beta_1 = 0.85 \text{ para } f'_c \leq 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$\beta_1 = 0.85 - 0.15 \left(\frac{f'_c - 280}{700} \right) \geq 0.70 \text{ para } f'_c > 280 \text{ kg/cm}^2$$

4.3 Análisis de vigas de concreto reforzado

Se deben satisfacer dos requisitos para el análisis y el diseño de vigas y columnas de concreto reforzado. Estos son:

1. Compatibilidad de esfuerzos y deformaciones.
2. Equilibrio de fuerzas y momentos.

4.3.1 Análisis de la capacidad a flexión de una viga de sección transversal general

El uso del equilibrio y la compatibilidad de deformaciones en el cálculo de la capacidad de una sección transversal arbitraria tal como la que se muestra en la figura 4-15 involucra cuatro pasos que se ilustran en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4-1 Cálculo de la capacidad de flexión (o de momento) de una viga.

La viga mostrada en la figura 4-15 es de concreto reforzado de peso normal y de resistencia a la compresión de $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$. Además, tiene como refuerzo 3 barras #8 con una resistencia a la fluencia $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$.

Solución:

❶ **Suponemos fluencia en el acero y por lo tanto $T = A_s f_y$.**

$$A_s = 3 \text{ N}^\circ 8 = 3 \times 5.10 \text{ cm}^2 = 15.3 \text{ cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2 \text{ para grado 60}$$

$$T = A_s f_y = 15.3 \text{ cm}^2 \times 4200 \text{ kg/cm}^2 = 64,300 \text{ kg} = 64.3 \text{ Mg}$$

❷ **Cálculo del área de bloque de esfuerzos de compresión ($C = T$).**

$$C = T = 64,300 \text{ kg}$$

por geometría de la sección, el área sometida a compresión es $(\frac{1}{2} a)(a) = \frac{1}{2} a^2$

$$C = (0.85 f'_c) \left(\frac{1}{2} a^2 \right) \Rightarrow a = \sqrt{\frac{64,300 \text{ kg} \times 2}{0.85 \times 210 \text{ kg/cm}^2}} = 26.8 \text{ cm}$$

③ Verificación de $f_s = f_y$ (compatibilidad de deformaciones).

$$\varepsilon_{cu} = 0.003$$

$$c = \frac{a}{\beta_1}$$

para $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$, $\beta_1 = 0.85 \Rightarrow c = 26.8/0.85 = 31.5 \text{ cm}$

por triángulos semejantes

$$\frac{\varepsilon_s}{d-c} = \frac{0.003}{c} \Rightarrow \varepsilon_s = 0.003 \times \frac{56-31.5}{31.5} = 0.00233$$

para acero de grado 60

$$\varepsilon_y = \frac{4200 \text{ kg/cm}^2}{2,030,000 \text{ kg/cm}^2} = 0.00207 < 0.00233$$

$$\Rightarrow f_s = f_y \quad (\text{acero está en fluencia})$$

④ Capacidad nominal reducida ϕM_n .

$$M_n = C \times jd = T \times jd = T \times \left(d - \frac{2a}{3} \right)$$

$$\phi M_n = \phi \left[A_s f_y \left(d - \frac{2a}{3} \right) \right] = 0.90 \left[15.3 \text{ cm}^2 \times 4200 \text{ kg/cm}^2 \times \left(56 - \frac{2 \times 26.8}{3} \right) \text{ cm} \right]$$

$$\phi M_n = 2.21 \times 10^6 \text{ kg-cm} = 2.21 \times 10^6 / 100,000 = 22.1 \text{ Mg-m}$$

↖ *Capacidad de flexión (o de momento) de diseño*

□

4.3.2 Fallas controladas por Tracción y Compresión y Falla Balanceada

Dependiendo de las propiedades de la viga, las fallas a flexión pueden darse de tres diferentes maneras:

1. *Falla por tracción.* El acero fluye antes de que el concreto se aplaste (alcance la deformación unitaria límite). Tal viga es denominada como *sub-reforzada*.
2. *Falla por compresión.* Aplastamiento del concreto antes de que el acero fluya. Tal viga es denominada como *sobre-reforzada*.
3. *Falla balanceada.* Aplastamiento del concreto y fluencia del acero en forma simultánea. Tal viga es denominada como de *refuerzo balanceado*.

En la viga de prueba mostrada en las figuras 4-5 a 4-7, el refuerzo fluyó antes de ocurrir la falla del concreto a compresión y por tanto la viga falla controlada por tracción. En el momento de falla (punto E en la figura 4-7) la curvatura en la sección de momento máximo era aproximadamente cuatro veces mayor que el de fluencia en el acero (punto D). Como resultado, la viga se deformó considerablemente y desarrolló anchas grietas en la fase final de carga. A este tipo de comportamiento se le denomina *dúctil* en vista de que el diagrama momento-curvatura o el diagrama carga-deflexión presente una región plástica bastante grande (D-E en la figura 4-7).

En la figura 4-16d se presentan los diagramas de momento-curvatura para las tres vigas mostradas en las figuras 4-16a, b y c. Las vigas difieren únicamente en la cantidad de refuerzo. Cuando se alcanza la falla, el acero de la viga A ya ha fluido, tal como se muestra en el diagrama de deformaciones unitarias. Esta viga presenta una falla controlada por tracción y tiene una respuesta de momento-curvatura dúctil como se ve en la figura 4-16d. Esto cuando la *razón de refuerzo mecánico* $\omega = \rho f_y / f'_c$ es pequeña.

En el caso de la viga B de la figura 4-16, el concreto de la fibra extrema de compresión alcanza la deformación unitaria de aplastamiento de 0.003 antes de que el acero entre en el rango de fluencia. A este comportamiento se le denomina *falla controlada por compresión*. El diagrama momento-curvatura para esta viga no presenta la respuesta dúctil post-fluencia de la viga A. Ante una sobrecarga, esta viga podría fallar repentinamente de una manera *frágil*. Este tipo de falla ocurre cuando la razón de refuerzo mecánico $\omega = \rho f_y / f'_c$ es muy grande.

En el caso de la viga C, la distribución de deformaciones unitarias cuando se alcanza la falla, mostrada en la figura 4-16c, involucra de manera simultánea el aplastamiento del concreto y la fluencia del acero. Este caso, que también exhibe una falla frágil como se muestra en la figura 4-16d, marca un límite entre fallas dúctiles de tracción y fallas frágiles de compresión—de ahí el nombre *falla balanceada*.

El ACI 318-08 presenta la terminología *secciones controladas por compresión* para secciones en las que la deformación unitaria en la capa extrema de acero de tracción en el estado límite último es igual o menor que la deformación de cedencia, $\epsilon_y = f_y / E_s$, en tracción. Tales secciones desarrollan fallas controladas por compresión o bien fallas balanceadas. Las secciones que presenten una deformación unitaria de elongación en la capa extrema de acero de tracción en el estado límite último iguales o mayores que 0.005 se denominan *secciones controladas por tracción*. Las secciones que caigan entre estos dos límites se denominan *secciones de transición*.

En ediciones anteriores del ACI 318, se obligaba al uso de secciones que presentaran falla por tracción. En la actual edición, Artículo 10.3.5 exige que para vigas no presforzadas y sujetas a una fuerza axial menor que $0.10f'_cA_g$ el valor neto de la deformación unitaria ϵ_t ante resistencia nominal no deberá ser menor que 0.004. Esta condición no precluye el uso de secciones no controladas por tracción. Habría sido más apropiado usar un límite de 0.005.

4.3.3 Análisis de vigas rectangulares con refuerzo de tracción únicamente

ECUACIONES PARA M_n Y ϕM_n : ACERO DE TRACCIÓN EN CEDENCIA

El procedimiento esbozado en la sección anterior se puede utilizar para derivar ecuaciones para el cálculo de la capacidad de momento para el caso particular de una sección rectangular.

Considerese la viga mostrada en la figura 4-17. Utilizando el equilibrio de la sección transversal, se puede concluir que, si $C = 0.85f'_c'ba$ y $T = A_s f_s$ entonces, la profundidad a del bloque rectangular equivalente de esfuerzos será

$$a = \frac{A_s f_s}{0.85 f'_c' b}$$

Si hay fluencia del acero de refuerzo, entonces $f_s = f_y$ y por lo tanto,

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c' b}$$

Es posible expresar las ecuaciones para M_n y ϕM_n de varias formas si se considera $M_n = T \times jd$ o $M_n = C \times jd$ o aun en forma adimensional. De lo anterior:

$$1) \quad M_n = T \times jd \quad \text{pero } T = A_s f_y \quad \text{y } jd = (d - a/2)$$

$$\therefore \quad M_n = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

$$\text{o bien } \phi M_n = \phi [A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right)]$$

Esta es la ecuación básica de capacidad a flexión en vigas.

$$2) \quad M_n = C \times jd \quad \text{pero } C = (0.85 f'_c')ba, \quad jd = (d - a/2)$$

$$\therefore \quad M_n = (0.85 f'_c')ba \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

$$\text{o bien } \phi M_n = \phi [(0.85 f'_c')ba \left(d - \frac{a}{2} \right)]$$

3) Para un enfoque no dimensional, se puede sustituir $A_s = \rho b d$ en la expresión para a , para obtener

$$a = \frac{\rho f_y}{f_c'} \frac{d}{0.85} = \frac{\omega d}{0.85} \quad (4-4)$$

La *razón de refuerzo mecánico* ω , se utiliza aquí debido a que es usada frecuentemente como una medida del comportamiento de la viga porque incorpora las tres principales variables que lo afectan. Por lo tanto,

$$M_n = f_c' b d^2 \omega \left(1 - \frac{\omega}{2 \times 0.85} \right)$$

o bien

$$\phi M_n = \phi \left[f_c' b d^2 \omega (1 - 0.59 \omega) \right] \quad (4-5)$$

Esto es usualmente expresado como

$$\phi M_n = \phi \left(\frac{b d^2}{100,000} k_n \right) \quad (4-6)$$

o bien, como el diseño más económico corresponde a $\phi M_n = M_u$,

$$\frac{M_u}{\phi k_n} = \frac{b d^2}{100,000} \quad (4-7)$$

donde M_u y M_n están en unidades de Mg-m y b y d están cm.

En las ecuaciones anteriores, el término ϕk_n es

$$\phi k_n = \phi \left[f_c' \omega (1 - 0.59 \omega) \right] \quad (4-8)$$

en donde f_c' está expresado en kg/cm^2 . La tabla A-3 presenta valores de ϕM_n para varias resistencias de acero y de concreto así como razones de reforzamiento.

DETERMINACIÓN DE LA CONDICIÓN $f_s = f_y$

En las derivaciones presentadas en la sección anterior, se ha supuesto que el acero estaba en la fase de fluencia y que por lo tanto, $f_s = f_y$. Se hace necesario entonces verificar si esto sucede cada vez que se analiza o se diseña una viga. La figura 4-18a muestra la sección transversal de una viga con dos capas de refuerzo de tracción. Considerese la situación en la cual la viga desarrolla falla balanceada. Para ese caso, la distribución de deformaciones unitarias se muestra en la figura 4-18b. La profundidad del eje neutro al momento de falla balanceada es c_b . Por triángulos semejantes:

$$\frac{c_b}{d} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_y} \quad (4-9)$$

Sustituyendo $\epsilon_{cu} = 0.003$ y multiplicando arriba y abajo por $E_s = 2.03 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ se tiene

$$\frac{c_b}{d} = \frac{6090}{6090 + f_y} \quad (4-10)$$

en donde f_y está expresado en kg/cm^2 . Recordar que si $c \leq c_b$ al momento de alcanzar la falla, $f_s = f_y$. Adicionalmente, podemos expresar las ecuaciones anteriores en términos de la profundidad a del bloque rectangular equivalente de esfuerzos:

$$\frac{a_b}{d} = \beta_1 \left(\frac{6090}{6090 + f_y} \right) \quad (4-11)$$

en donde f_y está expresado en kg/cm^2 . Para verificar si $f_s = f_y$ en diseño, se debe verificar si $a/d \leq a_b/d$. En la tabla A-4 se presentan valores de a_b/d para diferentes resistencias tanto de concreto como de acero.

Durante el diseño, la ubicación exacta del centroide del acero no es conocida sino hasta el que el refuerzo final es escogido. Por esta razón es más fácil definir las distribuciones de deformaciones unitarias en términos de la distancia d_t , hasta la capa de refuerzo más alejada de la cara de compresión. La deformación unitaria neta de tracción en la capa de acero más alejada se denomina ϵ_t . El término deformación unitaria neta se refiere a la deformación en el acero a la resistencia nominal, y no incluye deformaciones unitarias debidas a preesfuerzo, flujo plástico, retracción, o temperatura. En otras palabras, para una viga de concreto reforzado, la deformación unitaria de tracción es la deformación, ϵ_s , debida a las cargas vivas y a las cargas muertas factorizadas actuando sobre ella. El **Artículo 10.3.3 del ACI 318S-08**, define una sección como *controlada por compresión* si la deformación unitaria neta, ϵ_t , es menor o igual que la deformación unitaria de cedencia a la tracción, ϵ_y . La distribución de deformaciones unitarias correspondiente al límite de control por compresión se muestra en la figura 4-18c. En ella, la profundidad del eje neutro es c_{CCL} y la deformación unitaria ϵ_y ocurre en la capa extrema a tracción a una profundidad d_t .

Utilizando un procedimiento de triángulos semejantes, podemos encontrar

$$\frac{a_{CCL}}{d_t} = \beta_1 \left(\frac{6090}{6090 + f_y} \right) \quad (4-12)$$

en donde f_y está en kg/cm^2 .

El **Artículo 10.3.4 del ACI 318S-08**, define una sección como *controlada por tracción* si la deformación unitaria neta, ϵ_t , es mayor o igual a 0.005 en tracción. La distribución de deformaciones unitarias correspondiente al *límite de control por tracción* se muestra en la figura 4-18d. En esa figura la profundidad del eje neutro es c_{TCL} . Utilizando triángulos semejantes,

$$\frac{c_{TCL}}{d_t} = \frac{0.003}{0.003 + 0.005} \quad (4-13)$$

o bien,

$$\frac{c_{TCL}}{d_t} = 0.375 \quad (4-14)$$

y

$$\frac{a_{TCL}}{d_t} = 0.375\beta_1 \quad (4-15)$$

Los cocientes c_{TCL}/d_t y a_{TCL}/d_t son independientes del sistema de unidades. Los valores de a_{CCL}/d_t y a_{TCL}/d_t están dados en la tabla A-4.

LÍMITE SUPERIOR DEL REFUERZO EN VIGAS

No hay límite al acero colocado en una sección transversal de viga, en su lugar se establece en el [Artículo 10.3.5 del ACI 318S-08](#) que para vigas no presforzadas y sujetas a una fuerza axial menor que $0.10f'_cA_g$ el valor neto de la deformación unitaria ε_t ante resistencia nominal no deberá ser menor que 0.004. Adicionalmente, se establece $\phi = 0.90$ para secciones controladas por tracción y $\phi = 0.65$ para las controladas por compresión, y con aros o estribos normales (o bien $\phi = 0.70$ para elementos con refuerzo en espiral). Como no se puede usar refuerzo helicoidal en vigas, entonces se puede decir que para vigas controladas por compresión, el factor de reducción es $\phi = 0.65$. Adicionalmente, para vigas ubicadas entre estos dos límites, el ACI 318S-08 especifica una transición lineal entre $\phi = 0.90$ y $\phi = 0.65$ dada por

$$\phi = 0.65 + 0.25[d_t/c - 5/3] \quad (4-16)$$

o bien,

$$\phi = 0.65 + 0.25[\beta_1 d_t/a - 5/3] \quad (4-17)$$

La anterior relación se puede expresar también en términos de ε_t

$$\phi = 0.65 + (\varepsilon_t - 0.002)(250/3) \quad (4-18)$$

En el pasado, la normativa ACI 318-99 (Artículo 10.3.3) ponía un límite superior al acero de refuerzo utilizable en una viga, a través de exigir que $\rho \leq 0.75\rho_b$ de manera que esta no estuviera sobre-reforzada. El propósito de la regla era garantizar un comportamiento de falla dúctil en la viga. Esto es aproximadamente equivalente a requerir un ε_s de 1.8 a 2.0 veces ε_y al momento de falla. Debido a la variabilidad de las resistencias reales tanto del concreto como del acero (sub-resistencia en el concreto y sobre-resistencia en el acero) y a la variabilidad dimensional, tal como el peralte efectivo, una viga que nominalmente cumpliera con $\rho = 0.75\rho_b$ podría desarrollar una falla a compresión.

Adicionalmente, resulta usualmente difícil colocar el acero y el concreto en una viga con ρ superior a $0.5\rho_b$, y tales vigas tienden a deflectarse y agrietarse excesivamente. Por todas estas razones resulta una buena práctica limitar el máximo porcentaje de acero de $\rho = 0.4\rho_b$ a $\rho = 0.5\rho_b$. El límite de control por tracción actual corresponde a $\rho = 0.563\rho_b$ para una viga rectangular con refuerzo de tracción únicamente.

Ejemplo 4-2 Análisis de vigas con una capa de refuerzo de tracción en fluencia.

Calcular la capacidad nominal de momento, M_n , de tres vigas, cada una con sección transversal $b = 25$ cm y $d = 50$ cm y 3 barras # 8. La sección transversal de las vigas se muestra en la figura 4-20a.

VIGA 1: $f'_c = 210$ kg/cm² Y $f_y = 4200$ kg/cm²

Solución:

❶ **Cálculo de a .** Suponer que el acero ha superado el esfuerzo de fluencia. Esto será verificado en el paso 2. De la ecuación desarrollada anteriormente, la profundidad a del bloque equivalente de esfuerzos es

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{3 \times 5.10 \text{ cm}^2 \times 4200 \text{ kg/cm}^2}{0.85 \times 210 \text{ kg/cm}^2 \times 25 \text{ cm}}$$

Por lo tanto, $a = 14.4$ cm.

❷ **Verificación de $f_s = f_y$ y si la sección es controlada por tracción.** Si $a/d \leq a_b/d$, entonces f_s será igual a f_y , donde a_b/d está dado por

$$\frac{a_b}{d} = \beta_1 \left(\frac{6090}{6090 + f_y} \right)$$

Se sabe que $\beta_1 = 0.85$ para $f'_c = 210$ kg/cm² y

$$\frac{a_b}{d} = 0.85 \left(\frac{6090}{6090 + 4200} \right) = 0.503$$

como

$$\frac{a}{d} = \frac{14.4 \text{ cm}}{50 \text{ cm}} = 0.288$$

es menor, se tiene que $f_s = f_y$. Para verificar si la sección es controlada por tracción, se debe verificar que $a/d_t \leq a_{TCL}/d_t$. Se debe notar que esta revisión se hace en términos de a/d_t en vez de a/d . Para esta viga sin embargo, d y d_t son iguales. Si el acero estuviera colocado en varias capas, esto no sería cierto. Por lo tanto, se tiene

$$a_{TCL}/d_t = 0.375 \beta_1 = 0.375 \times 0.85 = 0.319$$

Como $a/d_t = 0.288$ es menor que 0.319, la sección es controlada por tracción y $\phi = 0.90$. Los valores de a_b/d y a_{TCL}/d_t están dados en la tabla A-4.

❸ **Cálculo de la capacidad nominal de momento, M_n .**

Sumando momentos alrededor de la resultante de compresión, C, la capacidad de momento es $M_n = Tjd$, donde la fuerza de tracción es $T = A_s f_y$ y el brazo de palanca $jd = (d - a/2)$, dando

$$M_n = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

$$M_n = 15.3 \text{ cm}^2 \times 4200 \text{ kg/cm}^2 \left(50 \text{ cm} - \frac{14.4 \text{ cm}}{2} \right) = 2,750,000 \text{ kg-cm}$$

La capacidad nominal de momento para la viga 1 es $M_n = 27.5 \text{ Mg-m}$. Como la sección es controlada por tracción, el momento de diseño es

$$\phi M_n = 0.90 \times 27.5 \text{ Mg-m} = 24.8 \text{ Mg-m}$$

VIGA 2: $f'_c = 420 \text{ kg/cm}^2$ Y $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Solución:

❶ **Cálculo de a .**

$$a = \frac{15.3 \times 4200}{0.85 \times 420 \times 25} = 7.2 \text{ cm}$$

❷ **Verificación de $f_s = f_y$ y si la sección es controlada por tracción.** Si $a/d \leq a_b/d$, entonces f_s será igual a f_y , donde a_b/d está dado por

$$\frac{a_b}{d} = \beta_1 \left(\frac{6090}{6090 + f_y} \right)$$

En este caso, la resistencia del concreto es de 420 kg/cm^2 y por lo tanto,

$$\beta_1 = 1.05 - 0.05 \left(\frac{f'_c}{70} \right) = 1.05 - 0.05 \left(\frac{420}{70} \right) = 0.75$$

con lo cual

$$\frac{a_b}{d} = 0.75 \left(\frac{6090}{6090 + 4200} \right) = 0.444$$

como $a/d = 7.20/50 = 0.144$ es menor que 0.444, entonces $f_s = f_y$. Adicionalmente,

$$\frac{a_{TCL}}{d_t} = 0.375\beta_1 = 0.375 \times 0.75 = 0.281$$

Nuevamente, $d = d_t$. Como $a/d_t = 0.144$ es menor que $a_{TCL}/d_t = 0.281$ la sección es controlada por tracción y $\phi = 0.90$.

③ Cálculo de la capacidad nominal de momento, M_n

$$M_n = \frac{15.3 \times 4200(50 - 7.2/2)}{100,000} = 29.8 \text{ Mg-m}$$

$$\phi M_n = 0.90 \times 29.8 \text{ Mg-m} = 26.8 \text{ Mg-m}$$

Nótese que duplicar la resistencia del concreto resulta en un incremento de capacidad de únicamente un 8%.

VIGA 3: $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$ Y $f_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$

Solución:

① Cálculo de a .

$$a = \frac{15.3 \times 2800}{0.85 \times 210 \times 25} = 9.60 \text{ cm}$$

② Verificación de $f_s = f_y$ y si la sección es controlada por tracción.

$$\frac{a}{d} = \frac{9.60}{50} = 0.192$$

$$\frac{a_b}{d} = 0.85 \left(\frac{6090}{6090 + 2800} \right) = 0.582$$

$$\frac{a_{TCL}}{d_t} = 0.375\beta_1 = 0.375 \times 0.85 = 0.319$$

Por lo tanto, como $f_s = f_y$ la sección es controlada por tracción y $\phi = 0.90$.

➊ **Cálculo de la capacidad nominal de momento, M_n .**

$$M_n = \frac{15.3 \times 2800(50 - 9.60/2)}{100,000} = 19.4 \text{ Mg-m}$$

$$\phi M_n = 0.9 \times 19.4 \text{ Mg-m} = 17.4 \text{ Mg-m}$$

Nótese que reducir f_y en un 33% comparado con la viga 1, reduce M_n en 30%. □

ECUACIONES PARA M_n Y ϕM_n PARA ACERO DE TRACCIÓN ELÁSTICO ANTE FALLA

Partiendo del equilibrio de fuerzas en la sección transversal, se tiene $C = T$ y por lo tanto,

$$0.85 f'_c b a = A_s f_s = \rho E_s \varepsilon_s b d$$

Por compatibilidad de deformaciones,

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{cu} \left(\frac{d - c}{c} \right)$$

Sustituyendo la última ecuación en la primera y notando que $a = \beta_1 c$ resulta en una ecuación cuadrática para la incógnita a :

$$0.85 f'_c a^2 = \rho E_s \varepsilon_{cu} \beta_1 d^2 - \rho E_s \varepsilon_{cu} a d$$

o bien,

$$\left(\frac{0.85 f'_c}{\rho E_s \varepsilon_{cu}} \right) a^2 + (d) a - \beta_1 d^2 = 0 \tag{4-19}$$

Esta ecuación puede ser resuelta para a lo cual permite calcular la capacidad de momento de la sección transversal $\phi M_n = \phi \left(0.85 f'_c b a (d - a/2) \right)$.

Ejemplo 4-3 Análisis de vigas con una capa de refuerzo de tracción en estado elástico.

Calcular la capacidad nominal de momento, M_n , de un viga con $b = 25 \text{ cm}$, $d = 50 \text{ cm}$, $A_s = 30.6 \text{ cm}^2$ (6 barras #8), $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$ y $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$.

Solución:**❶ Cálculo de a .**

Cuando se analiza la capacidad de una viga inicialmente no se sabe si el acero irá a ceder o no. Como $f_s = f_y$ en la mayoría de los casos encontrados en la práctica, se hará esta suposición para luego verificarla. En el primer intento, el valor de a se puede determinar como

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{30.6 \times 4200}{0.85 \times 210 \times 25}$$

Por lo tanto, la primera iteración resultante es $a = 28.8$ cm.

❷ Verificación de $f_s = f_y$ y si la sección es controlada por tracción.

$$\frac{a}{d} = \frac{28.8}{50} = 0.576$$

$$\frac{a_b}{d} = 0.85 \left(\frac{6090}{6090 + f_y} \right) = 0.503$$

En vista de que $a/d = 0.576$ es mayor que $a_b/d = 0.503$, esta viga fallará en compresión con $f_s < f_y$. Como resultado, el valor de a calculado en el paso 1 no es correcto y se debe empezar otra vez. Adicionalmente, se nota que la sección transversal es controlada por compresión.

❸ Cálculo de a usando ecuación cuadrática.

$$\left(\frac{0.85 f'_c}{\rho E_s \varepsilon_{cu}} \right) a^2 + (d) a - \beta_1 d^2 = 0$$

Substituyendo $\rho = A_s/bd = 0.0245$ y todos los demás valores conocidos, se tiene

$$\left(\frac{0.85 \times 210 \text{ kg/cm}^2}{0.0245 \times 2.03 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \times 0.003} \right) a^2 + 50a - 0.85 \times 50^2 = 0$$

Es decir $1.20a^2 + 50a - 2130 = 0$, y

$$a = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 - (4 \times -2130 \times 1.20)}}{2 \times 1.20} = 26.2 \text{ cm}$$

Este valor de a es menor que el de 28.8 cm calculado en el paso 1 porque el esfuerzo real en el acero es menor que el de fluencia.

④ Capacidad nominal reducida ϕM_n .

Como no se conoce el esfuerzo en el acero en el estado límite último, es necesario usar la ecuación de capacidad de momento basada en la resultante de compresión.

$$M_n = 0.85 f_c' ab \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

$$M_n = \frac{0.85 \times 210 \times 26.2 \times 25 (50 - 26.2/2)}{100,000} = 43.1 \text{ Mg-m}$$

Como la sección es controlada por compresión y no tiene refuerzo transversal helicoidal, [ACI 318S-08 Artículo 9.3.2](#) indica que $\phi = 0.65$. Por lo tanto, $\phi M_n = 28.0 \text{ Mg-m}$. □

ANÁLISIS PARAMÉTRICO DE LA CAPACIDAD DE MOMENTO

En la figura 4-21 se comparan las capacidades de momento de una sección rectangular con varias resistencias y cantidades de refuerzo. La manera más efectiva de incrementar la resistencia de una viga manteniendo a la vez el modo de falla en tracción se logra incrementando A_s , f_y o d . El incremento de f_c' es efectivo únicamente si permite el uso de porcentajes de acero mayores. Cada curva consiste de dos partes, una parte muy inclinada, a la izquierda del punto B para $\rho < \rho_b$ (fallas en tracción) y una parte más plana a la derecha del punto B para fallas por compresión cuando $\rho > \rho_b$.

4.4 Diseño de vigas rectangulares

4.4.1 Factores generales que afectan el diseño de vigas rectangulares

UBICACIÓN DEL REFUERZO

El concreto se agrieta debido a la tracción y como resultado se requiere refuerzo en donde la flexión, las cargas axiales, o los efectos de retracción de fraguado causen esfuerzos de tracción.

La figura 4-22a muestra la deflexión de una viga simplemente apoyada cargada uniformemente para la cual se tiene un diagrama de momentos como el mostrado en la figura 4-22b. Como esta viga está sometida únicamente a momento positivo, se desarrollan esfuerzos flexionantes de tracción en su parte inferior. Se requiere refuerzo longitudinal para resistir estos esfuerzos de tracción que debe ser colocado muy cercano a la cara inferior de la viga como se muestra en la figura 4-22c. Como el momento es mayor en la zona central, se requiere más refuerzo longitudinal allí que en los extremos

de la viga, por lo cual no es necesario extender todas las barras hasta los apoyos. En la figura 4-22c algunas de las barras son *cortadas* dentro del vano de la viga.

Una viga en voladizo desarrolla momentos negativos a todo lo largo y se deflecta como se muestra en la figura 4-23a, con la superficie cóncava hacia abajo, de manera que la tracción por flexión y las grietas se generan en la cara superior. En este caso el refuerzo se coloca cercano a esa cara como se muestra en la figura 4-23c. Como el momento es mayor en el empotramiento, se requiere más refuerzo allí que en ningún otro sitio. En algunos casos parte de las barras pueden terminar antes de llegar al extremo libre de la viga. Se debe notar, sin embargo, que las barras deben estar ancladas en el apoyo.

Usualmente, las vigas de concreto reforzado son continuas a través de los apoyos y bajo cargas gravitacionales generan diagramas de momento y deflexiones como las que se indican en la figura 4-24. De nuevo, se necesita refuerzo en la cara de tracción de la viga, la cual está en la parte superior en las regiones de momento negativo hacia los apoyos y en la parte inferior en las regiones de momento negativo en el centro de los vanos. Dos posibles emplazamientos del refuerzo se muestran en la figura 4-24c y d. Hoy en día, el emplazamiento de barras rectas mostrado en la figura 4-24c es usado de forma casi exclusiva. Se debe notar que el corte o la terminación de las barras se extiende hasta después de los puntos de inflexión, como se muestra. Esto se hace primordialmente para tomar en cuenta los saltos en los puntos de inflexión debidos a agrietamiento de cortante y para permitir cambios en las cargas y en los patrones de carga.

En adición al refuerzo longitudinal, refuerzo transversal denominado *estribos* son colocados para proveer resistencia a fuerzas de cortante y para facilidad constructiva como sostén de las diferentes capas de acero de refuerzo longitudinal. Estos estribos se muestran en la sección transversal de la viga en la figura 4-24.

Antes de 1965, era práctica común doblar el acero de la cara inferior hacia la cara superior cuando esta ya no se requería para resistir momento positivo. De esta forma, la barra doblada podía servir de refuerzo negativo y también de refuerzo positivo en la misma viga. Este sistema es ilustrado en la figura 4-24d.

En conclusión, es importante que el diseñador pueda visualizar la deformada de la estructura. El refuerzo para flexión se coloca en la cara de tracción de los elementos. Este es el lado convexo de la deformada.

CONSTRUCCIÓN DE VIGAS Y LOSAS DE CONCRETO REFORZADO

El elemento a flexión más simple es la losa en una dirección mostrada en la figura 4-1. La formaleta para esa losa consiste en una superficie plana, generalmente constuida de madera contrachapada apoyada sobre viguetas de madera o de acero. Siempre que sea posible, la formaleta se construye de manera tal que puedan ser reutilizadas en varios pisos. Esta debe ser lo suficientemente fuertes como para soportar el peso de el concreto no fraguado además de las cargas de construcción tales como los trabajadores, las batidoras de concreto, etc. Adicionalmente, la formaleta debe estar alineada

correctamente y *combada* (arqueada hacia arriba), si fuera necesario, de manera que el piso terminado sea plano después de que ésta sea retirada.

El refuerzo debe estar apoyado sobre *dados* colocados en la formaleta, los cuales sostienen la barra a la distancia correcta sobre la formaleta hasta que el concreto haya fraguado. Los dados mencionados pueden ser observados en la figura 4-25.

Las formaletas para las vigas son generalmente fabricadas de madera contrachapada. El tamaño de la formaleta de la viga es escogido de manera que permita su reutilización en vista del alto costo de fabricación. Algunos diseñadores prefieren escoger vigas de 30 cm o de 40 cm de ancho en vista de que estas dimensiones caben bien en el ancho de una lámina de madera contrachapada de 1.22 m × 2.44 m (4 ft × 8 ft).

La figura 4-25 muestra el refuerzo para dos vigas y una losa. En las vigas se han usado estribos cerrados y el refuerzo superior está apoyado en la parte superior de los estribos. Aun falta por colocar el refuerzo para momento negativo en la losa. Frecuentemente, el acero para momento positivo, los estribos y las barras para el apoyo de los estribos son armados en taller y colocados en la formaleta posteriormente.

RELACIÓN ENTRE PERALTE DE LA VIGA Y DEFLEXIÓN

La deflexión de una viga puede ser calculada mediante ecuaciones de la forma

$$\Delta_{\max} = \frac{C_1 w \ell^4}{EI} \quad (4-20)$$

Manipulando esta ecuación de manera algebraica y haciendo suposiciones respecto a la deformación unitaria del acero y la profundidad del eje neutro da como resultado la ecuación de la forma

$$\frac{\Delta}{\ell} = C \frac{\ell}{d} \quad (4-21)$$

De esta forma, para cualquier razón de deflexión contra longitud de vano, Δ/ℓ , es posible especificar razones de vano contra peralte, ℓ/d , el cual, si es excedido, pueda resultar en deflexiones inaceptables. La [Tabla 9.5\(a\) del ACI 318S-08](#) da espesores mínimos calculados de esta forma para elementos que *no sirvan de apoyo a particiones* u otro tipo de construcciones que puedan ser dañadas por la distorsión. Estos espesores mínimos son frecuentemente usados en la selección de peraltes globales de vigas y losas.

RECUBRIMIENTO Y ESPACIAMIENTO DE BARRAS

Es necesario tener un recubrimiento entre la superficie de la viga o losa y la barra de refuerzo por cuatro razones fundamentales:

1. Para unir o *adherir* el refuerzo al concreto de manera que ambos actúen conjuntamente. La calidad de la adherencia crece conforme el recubrimiento es mayor. Se requiere un recubrimiento de al menos un diámetro de barra para este propósito en vigas y columnas.

2. Para proteger el refuerzo de acero ante la corrosión. Dependiendo del medio ambiente y de tipo de elemento, se requieren diferentes espesores de recubrimiento desde 1 cm hasta 7.5 cm. según se especifica en la [Sección 7.7 del ACI 318S-08](#). En ambientes altamente corrosivos, tales como en el caso de losas en zonas costeras, el espesor del recubrimiento debe ser incrementado. En el Comentario de la Sección 7.7 se sugieren métodos para satisfacer el requisito de incremento en el recubrimiento para elementos expuestos al clima. Un ejemplo de un método alternativo podría ser el uso de una membrana impermeabilizante sobre la superficie expuesta.
3. Para proteger el refuerzo de la pérdida de resistencia debida a sobrecalentamiento por fuego. En general, un recubrimiento de 2 cm en una losa estructural debe proveer una capacidad de una hora de incendio, mientras que un recubrimiento de 4 cm sobre los estribos de vigas corresponde a una capacidad dos horas de incendio.
4. En algunos casos se provee un recubrimiento adicional sobre la superficie de losas, en particular en garages y fábricas, de manera que el desgaste y la abrasión debidos al tránsito no reduzca el recubrimiento necesario para otros propósitos.

Para este curso, los espesores de recubrimiento a utilizar estarán basados en el [Artículo 7.7.1 del ACI 318S-08](#) a menos que se de otra especificación.

La ubicación de las barras de refuerzo dentro de una viga debe permitir la colocación de suficiente concreto en todos sus lados de manera que las fuerzas puedan ser transferidas desde y hacia ellas; suficiente espacio para que el concreto fresco pueda ser colocado o compactado alrededor de las barras; y suficiente espacio para permitir que el vibrador alcance el fondo de la viga.

La figura 4-26 muestra el espaciamiento y la ubicación de barras requerido por el [ACI 318S-08 en los Artículos 3.3.2, 7.6.1 y 7.6.2](#). Cuando las barras son colocadas en dos o más capas, las barras en la capa superior deben ser colocadas directamente encima de las barras de la capa inferior para permitir que el concreto y el vibrador puedan pasar a través de las capas de refuerzo. La figura 4-27 muestra los posibles conflictos que pueden surgir de la colocación de barras de refuerzo.

CÁLCULO DE PERALTE EFECTIVO Y ANCHO DE ALMA MÍNIMO PARA UNA DISPOSICIÓN DADA DE BARRAS

El peralte efectivo, d , de una viga se define como la distancia desde la fibra extrema de compresión al centroide del refuerzo longitudinal de tracción tal como se muestra en la figura 4-2.

Ejemplo 4-4 Cálculo de d y de b mínimo.

Calcular d y b mínimo para una viga con barras colocadas como se muestra en la figura 4-28. El tamaño máximo de agregado grueso especificado es 19 mm. El peralte de la viga es de 60 cm.

Solución:

Esta viga tiene dos tamaños de barra. La barra de mayor diámetro está colocada en la capa inferior, para maximizar el peralte efectivo y por lo tanto el brazo de palanca. Nótese también que las barras están colocadas simétricamente con respecto al eje vertical de la sección transversal. Las barras de la capa superior están colocadas directamente encima de las de la capa inferior. Mediante la colocación en las caras externas de la sección se puede dar apoyo a las barras de la capa superior atándolas al estribo.

De acuerdo al [Artículo 7.7.1 del ACI 318S-08](#), el recubrimiento libre hasta los estribos debe ser de 4 cm (Fig 4-26b). De acuerdo a los [Artículos 7.6.2 y 3.3.2](#), la distancia mínima entre capas de barras debe ser el mayor valor entre 2.5 cm y 1 1/3 veces el tamaño máximo de agregado grueso, que en este caso resulta en $4/3 \times 1.9 = 2.5$ cm.

❶ Cálculo de centroide de barras

Capa	Area, A (cm ²)	Distancia desde la base, y (cm)	Ay (cm ³)
Inferior	$3 \times 6.45 = 19.4$	$4 + 0.95 + (\frac{1}{2} \times 2.87) = 6.39$	124
Superior	$2 \times 5.10 = 10.2$	$6.39 + (\frac{1}{2} \times 2.87) + 2.5 + (\frac{1}{2} \times 2.54) = 11.6$	118
	Total $A = 29.6$		Total $Ay = 242$

El centroide está localizado a una distancia $Ay/A = \bar{y} = 242/29.6 = 8.18$ cm de la base de la viga. El peralte efectivo es $d = 60 - 8.18$ cm = 51.8 cm.

❷ Cálculo de b mínimo

Este cálculo se lleva a cabo sumando los tramos a lo largo de la capa de refuerzo más congestionada. El radio interno mínimo del doblez del estribo es igual a dos veces el diámetro de la barra utilizada, d_s , que para un estribo de #3 es 1.91 cm (Ver [Artículo 7.2.2 del ACI 318S-08](#)). Para barras #11 o menores habrá un espacio entre la barra y el estribo como se indica en la figura 4-28:

$$\text{espacio} = 2d_s - 0.5d_b = 2 \times 0.95 - 0.5 \times 2.87 = 0.465 \text{ cm}$$

El espaciamiento horizontal mínimo entre barras es el mayor de los siguientes tres valores 2.5 cm, 1 1/3 veces el tamaño máximo de agregado grueso y un diámetro de barra (ver figura 4-26b). En este caso el valor mayor es 2.87 cm. La suma de los tramos a lo largo de capa de refuerzo seleccionada es

$$b_{\min} = 4 + 0.95 + 0.465 + 5 \times 2.87 + 0.465 + 0.95 + 4 = 25.2 \text{ cm}$$

R/ Por lo tanto el ancho mínimo b puede ser tomado como 25 cm y el diseño puede ser hecho tomando $d = 51.8$ cm. □

En general se puede estimar el peralte efectivo de manera satisfactoria usando:

Para vigas con una capa de refuerzo,

$$d \cong h - 6.5 \text{ cm} \quad (4-22)$$

Para vigas con dos capas de refuerzo,

$$d \cong h - 9.0 \text{ cm} \quad (4-23)$$

El valor de d no debe ser sobrestimado porque la práctica constructiva normal tiende a dar valores de d menores que los mostrados en planos constructivos.

Para losas de concreto reforzado el recubrimiento mínimo es de 2 cm en vez de 4 cm, y solo se usa una capa de refuerzo. El refuerzo utilizado es usualmente de barra #3, 4 o 5. Para este caso, se puede estimar el peralte efectivo usando:

Para losas en una dirección de hasta 3.60 m de vano,

$$d \cong h - 2.5 \text{ cm} \quad (4-24)$$

Para losas en una dirección de vano mayor que 3.60 m,

$$d \cong h - 2.8 \text{ cm} \quad (4-25)$$

Al igual que en el caso de las vigas, para las losas en una dirección, es importante no sobrestimar d porque la práctica constructiva normal conduce a valores finales de d menores que los mostrados en planos.

En general, para vigas b no debería ser menor que 25 cm y preferiblemente no menor que 30 cm, aun cuando se pueden encontrar casos extremos de vigas con dos barras de refuerzo y de 18 cm de ancho. El uso de capas de refuerzo en donde las barras estén excesivamente próximas puede conducir a falla por fracturamiento a lo largo del plano del refuerzo. Una falla de este tipo puede conducir a pérdida de anclaje en la barra así como a corrosión. En la figura 4-6 se pueden observar este tipo de grietas horizontales en el tramo central del vano. La tabla A-6 presenta anchos mínimos de alma para varias escogencias de capas de barras de refuerzo.

REFUERZO MÍNIMO

Si el momento de agrietamiento de una viga excede la resistencia de la viga después del agrietamiento, podría ocurrir una falla repentina cuando la viga se agrieta. Por esta razón el [Artículo 10.5 del ACI 318S-08](#) fija una cantidad de refuerzo mínimo igual a

$$A_{s,\min} = \max \left[\frac{0.8\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d, \frac{14b_w d}{f_y} \right] \quad (4-26)$$

en donde las resistencias del acero y del concreto están en kg/cm^2 .

Para el caso de vigas **T** estáticamente determinadas con el ala en tracción, el refuerzo mínimo debe ser el mayor de dos resultados: 1) el de la ecuación anterior sustituyendo b_w por $2b_w$, o 2) el de la ecuación anterior sustituyendo b_w por el ancho del ala, b_f .

Los requisitos descritos anteriormente no necesitan ser aplicados si se ha colocado un área de refuerzo al menos un tercio mayor que la capacidad requerida en cada sección de la viga.

4.4.2 Diseño de Vigas Rectangulares con Refuerzo de Tracción

El momento resistente reducido, ϕM_n , es el par formado por las fuerzas internas de tracción y compresión que puede ser calculado como

$$\phi M_n = \phi \left[f_c' b d^2 \omega (1 - 0.59\omega) \right] \quad (4-5)$$

en donde $\omega = \rho f_y / f_c'$.

En el diseño, el problema a resolver involucra la selección de la sección transversal de la viga que soporte un valor dado de momento debido a carga viva, M_L , más el momento debido a propio peso junto con los momentos debidos a otras cargas que pudiera ser necesario soportar. En este cálculo hay seis incógnitas: b, d, ρ, f_y, f_c' y el momento debido al peso propio de la viga; pero solo dos ecuaciones independientes, la ecuación (4-5) y la relación entre el tamaño de la viga y el momento debido a peso propio de la viga. Como resultado, el diseño de una viga no tiene una solución única. El procedimiento de diseño es por lo tanto un proceso iterativo en el cual se deben hacer cuatro suposiciones. Aun cuando esto requiere de alguna intuición y dominio del proceso constructivo, la libertad de diseño resultante hace del concreto reforzado un material valioso y universal.

El valor de f_c' a utilizar en el diseño se escoge al inicio y se mantiene durante todo el proyecto. La escogencia de la resistencia del concreto se basa en consideraciones de durabilidad si el elemento va a ser expuesto a un ambiente agresivo. El [Capítulo 4 del ACI 318S-08](#), Requisitos de Durabilidad, en particular la Tabla 4.3.1, especifica resistencias mínimas de concreto en un rango entre 280 y 350 kg/cm² para varias tipos de exposición. Si la durabilidad no es un problema, las vigas y las losas de concreto reforzado se construyen con concreto de 210, 260 o 280 kg/cm², con 210 kg/cm² siendo el más común. La resistencia de las columnas de concreto puede ser mayor.

El valor de fluencia del acero que utilizaremos con mayor frecuencia será el de 4200 kg/cm². También se puede encontrar acero de 2800 kg/cm². Para grado 40 solo se pueden conseguir barras #3 hasta #6.

Una vez escogidos f_c' y f_y para la viga o la losa en cuestión, quedan tres variables independientes: b, d, ρ . Si b y d son conocidos es posible entonces ir directamente al cálculo de ρ $A_s = \rho b d$.

DISEÑO DEL REFUERZO CUANDO b Y h SON CONOCIDOS

El primer tipo de problema de diseño es el caso en el cual las dimensiones de la sección de concreto han sido establecidas previamente por razones no estructurales sino talvez de apariencia arquitectónica, utilización de formaleas, resistencia al fuego, etc. En este caso, b y d (o h) son conocidos y solo se hace necesario calcular A_s .

Ejemplo 4-5 Diseño de refuerzo cuando b y h son conocidos.

Por razones arquitectónicas es necesario que la viga de 8 m de luz mostrada en la figura 4-29 sea de 60 cm de ancho por 60 cm de alto. Las resistencias del concreto y del acero son 210 kg/cm^2 y 4200 kg/cm^2 , respectivamente. Además de su propio peso, la viga debe soportar una carga muerta de servicio superimpuesta (no factorizada) de 1.5 Mg/m y una carga viva de servicio de 3.65 Mg/m . Calcule el área de refuerzo requerida en el centro del vano y seleccione las barras refuerzo.

Solución:**❶ Cálculo del momento factorizado, M_u .**

$$\text{Peso/m de viga} = \frac{(0.6 \times 0.6 \times 1) \text{ m}^3 \times 2400 \text{ kg/m}^3}{1 \text{ m de longitud}} = 864 \text{ kg/m} = 0.864 \text{ Mg/m}$$

La carga factorizada resultará de considerar

$$U = 1.4D$$

$$U = 1.2D + 1.6L$$

o bien,

$$w_u = 1.4(0.864 + 1.50) = 3.31 \text{ Mg/m}$$

$$w_u = 1.2(0.864 + 1.50) + 1.6(3.65) = 8.68 \text{ Mg/m}$$

El efecto de carga factorizado (momento último factorizado) es

$$M_u = \frac{w_u \ell_n^2}{8}$$

$$M_u = \frac{8.68 \text{ Mg/m} \times 8^2 \text{ m}^2}{8} = 69.4 \text{ Mg-m}$$

Por lo tanto, es necesario proveer $\phi M_n \geq M_u$, es decir, $\phi M_n \geq 69.4 \text{ Mg-m}$.

❷ Cálculo del peralte efectivo, d .

Como la viga es bastante ancha, se puede considerar que todas las barras se pueden acomodar en una sola capa. Con la ecuación (4-22) se puede estimar un valor inicial para d ,

$$d \approx h - 6.5 \text{ cm} = 60 - 6.5 \text{ cm} = 53.5 \text{ cm}$$

Por lo tanto, la primera aproximación al valor del peralte efectivo es $d = 53.5 \text{ cm}$.

③ Cálculo del área de refuerzo, A_s .

Suponiendo que $jd = d - \frac{a}{2} = 0.875d$, (esto es equivalente a suponer $a = 0.25d$)

$$jd = 0.875 \times 53.5 = 46.8 \text{ cm}$$

De la ecuación

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y jd}$$

$$A_s = \frac{69.4 \text{ Mg-m} \times 100 \text{ cm/m}}{0.9 \times 4.2 \text{ Mg/cm}^2 \times 46.8 \text{ cm}} = 39.2 \text{ cm}^2$$

Posibles escogencias son (Tabla A-8):

$$\begin{aligned} 10 \text{ No. 7, } A_s &= 38.7 \text{ cm}^2 \\ 8 \text{ No. 8, } A_s &= 40.8 \text{ cm}^2 \quad \Leftarrow \\ 6 \text{ No. 9, } A_s &= 38.7 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Una revisión del ancho de alma requerido para cada una de estas escogencias muestra que todas son aceptables. Se tomará la segunda opción aun cuando involucra barras de mayor diámetro.

④ Revisión de acero mínimo, $A_s \geq A_{s,\min}$.

$$A_{s,\min} = \max \left[\frac{0.8\sqrt{210}}{4200} \times 60 \times 53.5, \frac{14 \times 60 \times 53.5}{4200} \right]$$

$$A_{s,\min} = \max [8.86 \text{ cm}^2, 10.7 \text{ cm}^2] = 10.7 \text{ cm}^2$$

Como 40.8 cm^2 excede 10.7 cm^2 , $A_s > A_{s,\min}$. (Si no se cumpliera, se debe incrementar A_s al valor de $A_{s,\min}$ o satisfacer el [Artículo 10.5.3 del ACI 318S-08](#))

⑤ **Cálculo de a , verificación de $f_s = f_y$, y si la sección es controlada por tracción.**

$$a = \frac{40.8 \text{ cm}^2 \times 4200 \text{ kg/cm}^2}{0.85 \times 210 \text{ kg/cm}^2 \times 60 \text{ cm}} = 16.0 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{d} = \frac{16.0}{53.5} = 0.299$$

para verificar si $f_s = f_y$ se debe revisar si $a/d < a_b/d$. De la ecuación (4-11)

$$\frac{a_b}{d} = 0.85 \left(\frac{6090}{6090 + 4200} \right) = 0.503$$

Como $a/d = 0.299$ es menor que $a_b/d = 0.503$, $f_s = f_y$.

Para revisar si la sección es controlada por tracción, se debe revisar si $a/d_t < a_{tcl}/d_t$.

Como todo el refuerzo está colocado en una única capa, entonces $d = d_t$.

$$\frac{a_{TCL}}{d_t} = 0.375 \beta_1 = 0.375 \times 0.85 = 0.319$$

Como $a/d_t = 0.299$ es menor que $a_{tcl}/d_t = 0.319$, la sección es controlada por tracción y por lo tanto $\phi = 0.90$. Si la sección fuera controlada por compresión o transicional, se requeriría un valor menor de ϕ . Tal viga sería menos dúctil que una controlada por tracción. Si esto no fuera considerado aceptable, la sección transversal debería incrementarse o bien se debería agregar acero de compresión.

⑥ **Cálculo de M_n y ϕM_n .**

Como el área de acero fue calculada con un valor estimado jd , es necesario revisar si el refuerzo escogido provee una capacidad de momento adecuada. Podría incluso ser conveniente recalcular el valor del peralte efectivo d .

$$M_n = 40.8 \text{ cm}^2 \times 4.2 \text{ Mg/cm}^2 \left(53.5 - \frac{16.0}{2} \right) \text{ cm} = 7800 \text{ Mg-cm} = 78.0 \text{ Mg-m}$$

$$\phi M_n = 0.90 \times 78.0 = 70.2 \text{ Mg-m}$$

Como este valor es mayor que el momento último factorizado, $M_u = 69.4 \text{ Mg-m}$, A_s es apropiado.

R/ Usar 8 barras No. 8. □

DISEÑO DEL REFUERZO CUANDO b Y h NO SON CONOCIDOS

Segundo tipo de problema es encontrar b , d , y A_s . Se debe estimar peso propio de la viga y porcentaje de acero inicial.

- Usualmente peso propio de la viga varía entre 10 y 20% del valor de las cargas que debe soportar.
- Se puede también estimar h como 8 o 10% de la luz (1 pulgada de peralte por cada pie de luz)
- Se puede estimar b como $0.5h$.
- Estimar $\rho \approx 0.01$ por razones económicas y de constructibilidad. Un $\rho \approx 0.35\rho_b$ o $\rho \approx 0.40\rho_b$ proporciona una buena ductilidad. Un valor $\rho > 0.015$ presenta problemas de colocación en la viga.

Para acero de grado 60,

$$0.4\rho_b = 0.0086 \text{ para } f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

$$0.4\rho_b = 0.0114 \text{ para } f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$0.4\rho_b = 0.0134 \text{ para } f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2$$

Factores a considerar para escogencia de b y h :

1. Mucho peralte requiere menos refuerzo. Aumenta costo de formaleta y menor espacio libre entre pisos o edificio más alto.
2. Mayor longitud de desarrollo para barras muy cercanas entre sí.
3. Se pueden obviar cálculos de deflexión si se sobrepasa Tabla 9.5(a)
4. Vigas rectangulares $d/b \approx 1.5$ a 2.

Ejemplo 4-6 Diseño de una viga para la cual b y d no son conocidos.

Una viga debe soportarse a sí misma y además una carga viva uniforme de servicio de 2.61 Mg/m y una carga muerta uniforme superimpuesta de servicio de 1.50 Mg/m en una luz de 10 m. Seleccionar b , d , y A_s para un concreto de 240 kg/cm^2 y un acero grado 60.

Solución:

❶ Estimación del peso propio de la viga.

Por el criterio de *peso*:

$$10\% \text{ carga} \rightarrow 0.41 \text{ Mg/m}$$

$$20\% \text{ carga} \rightarrow 0.82 \text{ Mg/m}$$

Por el criterio de peralte:

$$\begin{aligned} 8\% \text{ de la luz} &\rightarrow h = 80 \text{ cm}, b = 40 \text{ cm} \rightarrow 0.77 \text{ Mg/m} \\ 10\% \text{ de la luz} &\rightarrow h = 1 \text{ m}, b = 50 \text{ cm} \rightarrow 1.20 \text{ Mg/m} \end{aligned}$$

El rango de posibles valores de peso propio de la viga va desde 0.41 hasta 1.20 Mg/m. Los valores más bajos optimizan el diseño y los más altos garantizan deflexiones pequeñas. Como ensayo inicial se puede tomar el valor 0.80 Mg/m. En este caso, se satisfacen ambos criterios, *peso y peralte*.

❷ Cálculo del momento factorizado, M_u .

La carga factorizada resultará de considerar

$$U = 1.4D$$

$$U = 1.2D + 1.6L$$

o bien,

$$w_u = 1.4(0.80 + 1.50) = 3.22 \text{ Mg/m}$$

$$w_u = 1.2(0.80 + 1.50) + 1.6(2.61) = 6.94 \text{ Mg/m}$$

El efecto de carga mayorizado (momento último mayorizado) es

$$\begin{aligned} M_u &= \frac{w_u \ell_n^2}{8} \\ M_u &= \frac{6.94 \text{ Mg/m} \times 10^2 \text{ m}^2}{8} = 86.8 \text{ Mg-m} \end{aligned}$$

En principio es necesario proveer $\phi M_n \geq M_u$, es decir, $\phi M_n \geq 86.8 \text{ Mg-m}$.

❸ Escogencia de b y d .

Una vez estimada la demanda de momento flexionante para la viga, es necesario escoger los valores de b y d que satisfagan la ecuación de diseño. En ese caso, es imprescindible estimar el valor de ρ . Como se explicó anteriormente $\rho \approx 0.01$ es una muy buena escogencia porque permite control por tracción.

De esta forma se tiene:

$$\begin{aligned} \omega &= \rho \frac{f_y}{f'_c} = 0.01 \frac{4200}{240} = 0.175 \\ \phi k_n &= \phi f'_c \omega (1 - 0.59\omega) = 0.90 \cdot 240 \cdot 0.175 (1 - 0.59 \cdot 0.175) = 33.9 \text{ kg/cm}^2 \\ \frac{bd^2}{100,000} &= \frac{M_u}{\phi k_n} = \frac{86.8}{33.9} = 2.56 \Rightarrow bd^2 = 256,000 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Posibles escogencias (h calculado para dos capas de refuerzo para vigas angostas y una capa para vigas anchas):

b (cm)	d (cm)	h (cm)	
30	92.4	101	(dos capas)
40	80.0	89	(dos capas)
45	75.4	82	(una capa)

La **Tabla 9.5(a) del ACI 318S-08** recomienda $h = \ell/16 = 1000/16 = 62.5$ cm , por lo tanto la deflexión no es un problema en este caso.

Escoger $b = 40$ cm, $h = 90$ cm, $d = 81$ cm (dos capas).

4 Revisión de peso propio y M_u .

$$\text{Peso/m de viga} = \frac{(0.4 \times 0.9 \times 1) \text{ m}^3 \times 2400 \text{ kg/m}^3}{1 \text{ m de longitud}} = 864 \text{ kg/m} = 0.864 \text{ Mg/m}$$

La carga factorizada resultará de considerar

$$U = 1.4D$$

$$U = 1.2D + 1.6L$$

o bien,

$$w_u = 1.4(0.864 + 1.50) = 3.31 \text{ Mg/m}$$

$$w_u = 1.2(0.864 + 1.50) + 1.6(2.61) = 7.01 \text{ Mg/m}$$

El efecto de carga factorizado (momento último factorizado) es

$$M_u = \frac{w_u \ell_n^2}{8} = \frac{7.01 \text{ Mg/m} \times 10^2 \text{ m}^2}{8} = 87.6 \text{ Mg-m}$$

La escogencia de b y d incrementa la demanda de momento en un 3%. Un incremento mayor que 10% obligaría a revisar el paso 3.

5 Cálculo de A_s .

Suponiendo que $jd = d - \frac{a}{2} = 0.875d$, (esto es equivalente a suponer $a = 0.25d$)

$$jd = 0.875 \times 81 = 70.9 \text{ cm}$$

De la ecuación

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y jd} = \frac{87.6 \text{ Mg-m} \times 100 \text{ cm/m}}{0.9 \times 4.2 \text{ Mg/cm}^2 \times 70.9 \text{ cm}} = 32.7 \text{ cm}^2$$

$$A_{s,\min} = \max \left[\frac{0.8\sqrt{240}}{4200} \times 40 \times 81.5, \frac{14 \times 40 \times 81.5}{4200} \right]$$

$$A_{s,\min} = \max [9.56 \text{ cm}^2, 10.8 \text{ cm}^2] = 10.8 \text{ cm}^2$$

Como 32.7 cm^2 excede 10.8 cm^2 , $A_s > A_{s,\min}$. (Si no se cumpliera, se debe incrementar A_s al valor de $A_{s,\min}$ o satisfacer el **Artículo 10.5.3 del ACI 318S-08**)

Posibles escogencias de acero:

Combinación de barras	$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$b_{\min} \text{ (cm)}$
7 No.8	35.7	44.5
10 No.7	38.7	57.2
4 No.9 + 2 No.8	36.0	41.9
4 No.8 + 4 No. 7	35.88	48.3
5 No.8 + 2 No.7	33.24	34.3 (dos capas)

Usar 5 No.8 + 2 No.7 en dos capas, la primera con 2 No.7 y la segunda con 5 No.8, la más alejada de la fibra extrema de compresión para lograr mayor brazo de palanca jd .

⑥ Cálculo del peralte efectivo d .

Se puede estimar como en el ejemplo anterior, $d = h - 9.0 \text{ cm} = 90 - 9.0 = 81 \text{ cm}$. Sin embargo, en este caso, calcularemos el valor del centroide del acero de tracción.

El centroide del acero de refuerzo de tracción es

$$\bar{y} = \frac{2 \times 3.87(4.92 + 6.22) + 5 \times 5.10 \times 6.22}{33.24} = 7.37 \text{ cm}$$

y por lo tanto,

$$d = 90 - 7.37 = 82.6 \text{ cm} \quad \text{y} \quad d_t = 90 - 6.22 = 83.8 \text{ cm}$$

⑦ Cálculo de a , cedencia en el acero y control por tracción.

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{33.24 \times 4200}{0.85 \times 240 \times 40} = 17.1 \text{ cm}$$

Por lo tanto, $a/d = 17.1/82.6 = 0.207$ además, $a_b/d = 0.503$. Como $0.207 < 0.503$, entonces el acero ha alcanzado el esfuerzo de fluencia.

Para verificar si la sección es controlada por tracción, se tiene: $a/d_t = 17.1/83.8 = 0.204$, el cual es menor que $a_{TCL}/d_t = 0.319$ por lo tanto la sección es controlada por tracción, es decir, $\phi = 0.90$.

⑧ Cálculo de resistencia de diseño ϕM_n .

$$\phi M_n = \phi A_s f_y (d - a/2) = \frac{0.90 \times 33.24 \times 4200 \times (82.6 - 17.1/2)}{100,000} = 93.0 \text{ Mg-m}$$

Como $93.0 > 87.6$, entonces el diseño es apropiado ya que está 6% por encima del valor buscado. El valor de j obtenido es,

$$j = \frac{82.6 - 17.1/2}{82.6} = 0.896$$

lo cual es aun mayor que el de 0.875 usado inicialmente.

R/ Usar $b = 40$ cm, $h = 90$ cm, 5 No.8 en capa inferior y 2 No.7 en capa superior. □

USO DE AYUDAS DE DISEÑO PARA EL DISEÑO DE VIGA RECTANGULAR CUANDO b Y d NO SON CONOCIDOS

Ejemplo 4-7 Uso de ayudas de diseño para calcular una viga rectangular cuando b y d no son conocidos.

Ejemplo 4-8 Diseño para flexión de una losa en una dirección.

Una losa de concreto reforzado y en una dirección consiste de una única luz de 3 m y está sometida a una carga viva de 5.75 kPa y una carga muerta de 1.0 kPa además de su propio peso. Diseñe la losa y encuentre el tamaño y el espaciamiento del acero de refuerzo en el centro de la losa suponiendo momentos debidos a apoyo simple. Además, considere concreto de peso normal con $f'_c = 28$ MPa y $f_y = 420$ MPa.

Solución:

De la [Tabla 9.5\(a\) del ACI 318S-08](#), para losa en una dirección con apoyos simples h_{\min} :

$$h = \frac{\ell}{20} = \frac{3 \text{ m} \times 1000}{20} = 150 \text{ mm}$$

Para flexión, podemos suponer $d = 125$ mm

Tomamos un ancho unitario de losa para hacer el diseño. Suponer el ancho unitario igual a 1 m.

Peso propio de una faja de 1m de ancho
 $= 0.15 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 2400 \text{ kg/m}^3 \times 10 \text{ m/s}^2 = 3.60 \text{ kN/m}$

Por lo tanto $w_u = 1.6 \times 5.75 \text{ kPa} \times 1 \text{ m} + 1.2 \times (1.0 \text{ kPa} \times 1 \text{ m} + 3.6 \text{ kN/m}) = 14.7 \text{ kN/m}$

$$M_u = \frac{14.7 \text{ kN/m} \times 3^2 \text{ m}^2}{8} = 16.5 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

Suponemos un brazo de momento $\left(d - \frac{a}{2}\right) \approx 0.9 \times 125 \text{ mm} = 113 \text{ mm}$

Usando $M_u = \phi A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right)$

$16.5 \text{ m} \cdot \text{kN} = 0.9 \times A_s \times 420 \text{ MPa} \times 113 \text{ mm} \Rightarrow A_s = 386 \text{ mm}^2$ para cada metro de losa.

Revisión por ensaye y ajuste del brazo de momento:

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{386 \text{ mm}^2 \times 420 \text{ MPa}}{0.85 \times 28 \text{ MPa} \times 1000 \text{ mm}} = 6.81 \text{ mm}$$

con lo cual $16.5 = 0.9 \times A_s \times 420 \times \left(125 - \frac{6.81}{2}\right) \Rightarrow A_s = 359 \text{ mm}^2$ (por metro)

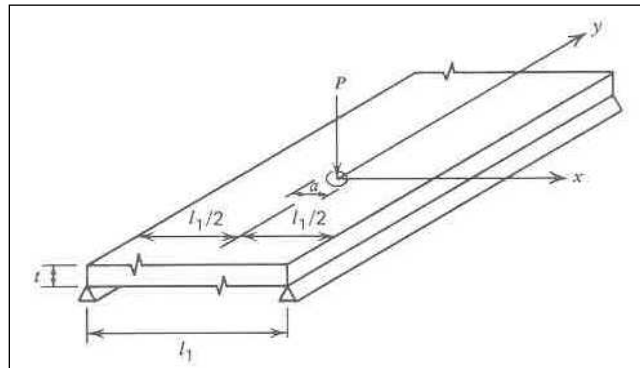
Usando barra # 13 @ 300 mm centro a centro con un $A_s = 1.29 \text{ cm}^2$ (también podría ser #10 @ 150 mm, espaciamiento máximo permitido $3h = 450 \text{ mm}$)

$$\rho = \frac{1.29 \text{cm}^2}{12.5 \text{cm} \times 30 \text{cm}} = 0.00344, \quad \rho_{\min} > \frac{1.4}{420 \text{MPa}} = 0.00333$$

o bien, $\rho_{\min} = \frac{0.25\sqrt{28 \text{MPa}}}{420 \text{MPa}} = 0.00315 \quad \text{O.K.}$

- Se debe revisar la capacidad de cortante y el refuerzo requerido para temperatura y retracción.

□



$$l_1 = 3.0 \text{ m}, \quad t = 150 \text{ mm}$$

4.5 Vigas T

4.5.1 Introducción

Usualmente vigas tienen forma de **T** o de **I** y otras veces tienen refuerzo tanto en la zona de tracción como en la de compresión.

Vigas cuyas secciones transversales no son simétricas con respecto al eje de carga o vigas con flexión en dos ejes requieren tratamiento especial. En estos casos el eje neutro, en donde la deformación unitaria es cero, en general no resulta ser paralelo al eje con respecto al cual actúa el momento resultante.

Si las vigas tienen refuerzo en tracción distribuido en varias capas a lo largo del peralte, o bien son fabricadas a base de dos tipos de concreto, o contienen refuerzo que no es elasto-plástico, entonces se debe considerar la compatibilidad de deformaciones unitarias en los cálculos.

4.5.2 Aplicaciones prácticas de vigas T

Durante la construcción, el concreto es colado primero en las columnas. Ver el [Artículo 6.4.6 del ACI 318S-08](#). Después de su endurecimiento, se procede a colar el concreto de la losa y las vigas en forma monolítica. Ver el [Artículo 6.4.7](#). Resultado: La losa funciona como ala de la viga que deja de ser rectangular y se torna de sección **T**. Ver figura 4-31. Para el alcance de este curso, se pueden definir vigas rectangulares como las vigas de entrepiso cuya zona de compresión es la indicada en la figura 4-32b y 4-32c. El comportamiento de viga **T** se alcanza en el caso mostrado en la figura 4-32d.

4.5.3 Ancho efectivo del ala y refuerzo transversal

Para una viga **T** simplemente apoyada, se nota que en el apoyo el ala no está sometida a esfuerzos de compresión. Sin embargo, a la mitad de la luz, toda el ala está sometida a compresión. La transición requiere de esfuerzos horizontales de cortante en la interfase alma-ala. Como resultado, se genera un efecto retardado del cortante en donde las porciones del ala más cercanas al alma están sometidas a esfuerzos más altos. Ver figura 4-35.

La distribución de esfuerzos de compresión debidos a flexión en la losa que constituye el ala de una serie de vigas paralelas se vuelve máxima sobre el alma, decayendo hacia la mitad de la distancia entre vigas. Ver figura 4-36. En los apoyos la variación mencionada se vuelve más pronunciada. Utilizaremos un *ancho efectivo* de ala b que cuando es sometido a un esfuerzo uniforme $f_{c(max)}$, desarrolla la misma fuerza de compresión que la desarrollada cuando se considera el ancho real b_0 . Ver figura 4-36.

La estimación del ancho efectivo se hace a través de considerar soluciones elásticas para el problema de distribución de esfuerzos. La estimación depende entonces de:

- a. Tipo de sollicitación superimpuesta (uniforme, concentrada)
- b. Tipo de apoyos.
- c. Espaciamiento entre vigas.
- d. Rigidez relativa entre losa y viga

(Este análisis elástico NO considera el agrietamiento del ala observado en experimentos)

El **Artículo 8.12.2 del ACI 318S-08** propone las siguientes reglas:

1. Ancho de losa que participa como ala de viga **T** menor que una cuarta parte de la luz.
2. La proyección del ala a cada lado del alma menor o igual que ocho veces el espesor de la losa y menor o igual que la mitad de la distancia libre entre vigas.

Los artículos 8.12.3 y 8.12.4 consideran vigas **T** exteriores y vigas **T** aisladas. ACI representa una solución conservadora basada en los resultados de la solución elástica.

4.5.4 Análisis de Vigas T

En referencia a la figura 4-37, el equilibrio de la sección se satisface con $C = T = A_s f_y$ (si el acero fluye) en donde C actúa en el centroide de la sección sometida a compresión. En este caso, la sección sometida a compresión es más profunda que h_f . De lo anterior, $M_n = Cjd = Tjd$. Para evitar el cálculo del centroide del área de compresión (no se conoce a todavía), consideren dos vigas hipotéticas: En primera instancia, **Viga F** con una zona de compresión que consiste en las dos proyecciones del ala, a ambos lados del alma y con un área total A_f sometida a esfuerzos de $0.85 f'_c$ conducentes a una fuerza de compresión C_f . Por equilibrio, deberá haber un acero de tracción con área A_{sf} de forma tal que $C_f = T_f = A_{sf} f_y$. A_{sf} es parte del A_s de la viga y tiene su mismo centroide. La capacidad a flexión de esta viga es $M_{nf} = C_f (d - h_f / 2)$. En segunda instancia, una **Viga W** con un ancho b_w y con un área de compresión $b_w a$ que equilibra el acero restante $(A_s - A_{sf}) = A_{sw}$. La capacidad será M_{nw} .

Finalmente, la capacidad total de la sección será $M_n = M_{nf} + M_{nw}$.

Viga F

Área de zona de compresión = $(b - b_w) h_f$

Fuerza en zona de compresión $C_f = (0.85 f'_c)(b - b_w) h_f$

Para calcular el área de acero requerido para equilibrar esta fuerza, suponiendo fluencia del acero,

$$T_f = C_f$$

$$A_{sf} f_y = 0.85 f'_c (b - b_w) h_f$$

$$\Rightarrow A_{sf} = \frac{0.85 f'_c (b - b_w) h_f}{f_y}$$

$$M_{nf} = 0.85 f'_c (b - b_w) h_f (d - .5h_f) = A_{sf} f_y (d - .5h_f)$$

Viga W

Area de acero de tracción $A_{sw} = A_s - A_{sf}$

Fuerza de compresión $C_w = 0.85 f'_c b_w a$

$$\therefore a = \frac{A_{sw} f_y}{0.85 f'_c b_w}$$

$$M_{nw} = 0.85 f'_c b_w a (d - .5a) = A_{sw} f_y (d - .5a)$$

Viga T = Viga W + Viga F

$$M_n = M_{nf} + M_{nw}$$

$$M_n = 0.85 f'_c [(b - b_w) h_f (d - .5h_f) + b_w a (d - .5a)]$$

o bien

$$M_n = A_{sf} f_y (d - .5h_f) + A_{sw} f_y (d - .5a)$$

Cuando $a = h_f$, la viga es rectangular.

DETERMINACIÓN DE LA CONDICIÓN $f_s = f_y$

La verificación de si $f_s = f_y$ se efectúa comparando

$$\frac{a_b}{d} = \beta_1 \frac{6090}{6090 + f_y}$$

con el valor a/d .

ACERO MÁXIMO PARA VIGAS T

Se debe revisar el [Artículo 10.3.5 del ACI 318S-08](#).

REFUERZO MÍNIMO

Al igual que en el caso de vigas rectangulares, se debe garantizar que

$A_s = A_{sf} + A_{sw} \geq A_{s,\min}$. De acuerdo con la [Ecuación \(10-3\) del ACI 318S-08](#) la cantidad de acero mínimo de satisfacer lo siguiente

$$A_{s,\min} = \max \left[\frac{0.8\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d, \frac{14b_w d}{f_y} \right]$$

Para el caso de una viga T en la cual el ala esté en tracción [ACI 318S-08 Artículo 10.5.2](#) establece que

$$A_{s,\min} = \frac{1.6\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d$$

Ejemplo 4-9 Análisis de capacidad de momento positivo de una viga T.

Una viga interna de un entrepiso cubre una luz de 5.5 m. Su sección transversal se muestra en la figura 4-38. Para esta viga, el concreto y el acero tienen una resistencia de 210 kg/cm^2 y 2800 kg/cm^2 respectivamente. Calcular el momento de diseño de esta viga en la región de momento positivo.

Solución:

❶ Cálculo del ancho efectivo b

Según el [Artículo 8.12.2 del ACI 318S-08](#)

- a) $b = 550/4 = 138 \text{ cm}$
- b) $b_1 = 8 \times 12.5 = 100 \Rightarrow b = 100 + 30 + 100 = 230 \text{ cm}$
- c) $b = 270/2 + 30 + 325/2 = 328 \text{ cm}$

El menor de estos valores es $b = 138 \text{ cm}$. Usar $b = 138 \text{ cm}$.

❷ Cálculo de d

Para dos capas de refuerzo $d \cong h - 9 = 50 - 9 = 41 \text{ cm}$.

❸ Cálculo de a

En primera instancia se supondrá comportamiento de viga rectangular:

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{6 \times 2.84 \times 2800}{0.85 \times 210 \times 138} = 1.94 \text{ cm} < h_f = 12.5 \text{ cm}$$

De acuerdo al resultado obtenido, la viga se comporta como viga rectangular.

❹ Revisión de acero mínimo

Para una viga T con el ala en compresión:

$$A_{s,\min} = \max \left[\frac{0.8\sqrt{210}}{2800} \times 30 \times 41, \frac{14 \times 30 \times 41}{2800} \right]$$

$$A_{s,\min} = \max [5.09 \text{ cm}^2, 6.15 \text{ cm}^2] = 6.15 \text{ cm}^2$$

Como $A_s = 17.0 \text{ cm}^2 > 6.15 \text{ cm}^2$, se satisface el requisito de acero mínimo.

5 Revisión de fluencia del acero y control por tracción

$$\left[\frac{a}{d} = \frac{1.94}{41} = 0.0473 \right] < \left[\frac{a_b}{d} = 0.85 \left(\frac{6090}{6090 + 2800} \right) = 0.582 \right] \Rightarrow f_s = f_y$$

$$d_t = 50 - (4 + 0.95 + 1.91/2) = 44.1 \text{ cm}$$

$$\left[\frac{a}{d_t} = \frac{1.94}{44.1} = 0.0440 \right] < \left[\frac{a_{TCL}}{d_t} = 0.375\beta_1 = 0.319 \right] \Rightarrow \phi = 0.90$$

6 Cálculo de la resistencia de diseño ϕM_n

$$\phi M_n = \phi [A_s f_y (d - a/2)] = \frac{0.90 \times 17.0 \times 2800 (41 - 1.94/2)}{100,000} = 17.1 \text{ Mg-m}$$

R/La resistencia de diseño es $\phi M_n = 17.1 \text{ Mg-m}$. □

Ejemplo 4-10 Análisis de capacidad de momento negativo de una viga T.

Calcular la resistencia de diseño para momento negativo de la viga T mostrada en la figura 4-39, dada la distribución de acero indicada. Las resistencias del concreto y del acero son de 210 kg/cm^2 y 2800 kg/cm^2 respectivamente. El [Artículo 10.6.6 del ACI 318S-08](#) pide que una parte del refuerzo sea colocado en el patín permitiendo que todo el refuerzo se coloque en una sola capa.

Solución:

1 Cálculo de b

$$b = 30 \text{ cm}$$

2 Cálculo de d

$$d \cong h - 6.5 = 50 - 6.5 = 43.5 \text{ cm}$$

3 Cálculo de a

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{22.7 \times 2800}{0.85 \times 210 \times 30} = 11.9 \text{ cm}$$

4 Acero mínimo

$$A_{s,\min} = \max \left[\frac{0.8\sqrt{210}}{2800} \times 30 \times 43.5, \frac{14 \times 30 \times 43.5}{2800} \right]$$

$$A_{s,\min} = \max [5.40 \text{ cm}^2, 6.53 \text{ cm}^2] = 6.53 \text{ cm}^2 \Rightarrow A_s > A_{s,\min}$$

5 Revisión de esfuerzos en el acero y control por tracción

$$\left[\frac{a}{d} = \frac{11.9}{43.5} = 0.274 \right] < \left[\frac{a_b}{d} = 0.85 \left(\frac{6090}{6090 + 2800} \right) = 0.582 \right] \Rightarrow f_s = f_y$$

$$\left[\frac{a}{d_t} = \frac{11.9}{43.5} = 0.274 \right] < \left[\frac{a_{TCL}}{d_t} = 0.375 \beta_1 = 0.319 \right] \Rightarrow \phi = 0.90$$

6 Cálculo de la resistencia de diseño ϕM_n

$$\phi M_n = \phi [A_s f_y (d - a/2)] = \frac{0.90 \times 22.7 \times 2800 (43.5 - 11.9/2)}{100,000} = 21.5 \text{ Mg-m}$$

R/La resistencia de diseño es $\phi M_n = 21.5 \text{ Mg-m}$. □

Ejemplo 4-11 Análisis de viga T con eje neutro en el alma.

Calcular el momento positivo de diseño de la viga mostrada en la figura 4-40. Las resistencias del concreto y del acero son 210 kg/cm² y 4200 kg/cm² respectivamente. La viga contiene estribos No. 3, aun cuando éstos no se muestran en la figura.

Solución:

1 Cálculo de b

El **Artículo 8.12.4 del ACI 318S-08** indica que el espesor del ala no debe ser menor que $b_w/2$ y el ancho efectivo del ala debe ser menor que $4b_w$. Si $b_w = 25 \text{ cm}$, entonces $h_f \geq 25/2 = 12.5 \text{ cm}$, $b \leq 4b_w = 4 \times 25 = 100 \text{ cm}$. Por lo tanto, $b = 45 \text{ cm}$.

2 Cálculo de d

El valor de d está dado en el problema, $d = 61.3$ cm.

③ **Cálculo de a**

Si se supone que la zona de compresión es rectangular, se tendría

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{30.6 \times 4200}{0.85 \times 210 \times 45} = 16.0 \text{ cm} > h_f = 12.5 \text{ cm}$$

Como $a > h_f$ entonces el comportamiento es de viga T. Adicionalmente, el valor resultante de a no es correcto.

④ **Dividir viga T en vigas F y W**

a) **Viga F** Fuerza de compresión en proyecciones del patín o ala de la viga:

$$C_f = 0.85 f'_c (b - b_w) h_f = 0.85 \times 210 \times (45 - 25) \times 12.5 = 44,600 \text{ kg}$$

Area de acero en viga F

$$A_{sf} = \frac{C_f}{f_y} = \frac{44,600}{4200} = 10.6 \text{ cm}^2$$

La resistencia nominal para esta viga es

$$M_{nf} = C_f (d - h_f / 2) = \frac{44,600 \times (61.3 - 12.5 / 2)}{100,000} = 21.8 \text{ Mg-m}$$

b) **Viga W** Cantidad de acero disponible para viga W:

$$A_{sw} = A_s - A_{sf} = 30.6 - 10.6 = 20.0 \text{ cm}^2$$

La profundidad a en este caso es:

$$a = \frac{A_{sw} f_y}{0.85 f'_c b_w} = \frac{20.0 \times 4200}{0.85 \times 210 \times 25} = 18.8 \text{ cm}$$

La resistencia de nominal para esta viga es

$$M_{nw} = A_{sw} f_y (d - a / 2) = \frac{20.0 \times 4200 (61.3 - 18.8 / 2)}{100,000} = 43.6 \text{ Mg-m}$$

La resistencia de nominal total es:

$$M_n = M_{nf} + M_{nw} = 21.8 + 43.6 = 65.4 \text{ Mg-m}$$

5 Revisión de acero mínimo

Para una viga T con el ala en compresión:

$$A_{s,\min} = \max \left[\frac{0.8\sqrt{210}}{4200} \times 25 \times 61.3, \frac{14 \times 25 \times 61.3}{4200} \right]$$

$$A_{s,\min} = \max [4.23 \text{ cm}^2, 5.11 \text{ cm}^2] = 5.11 \text{ cm}^2$$

Como $A_s = 30.6 \text{ cm}^2 > 5.11 \text{ cm}^2$, se satisface el requisito de acero mínimo.

6 Revisión de esfuerzos en el acero y control por tracción

$$\left[\frac{a}{d} = \frac{18.8}{61.3} = 0.307 \right] < \left[\frac{a_b}{d} = 0.85 \left(\frac{6090}{6090 + 4200} \right) = 0.503 \right] \Rightarrow f_s = f_y$$

$$d_t = 70 - (4 + 0.95 + 2.54/2) = 63.8 \text{ cm}$$

$$\left[\frac{a}{d_t} = \frac{18.8}{63.8} = 0.295 \right] < \left[\frac{a_{TCL}}{d_t} = 0.375\beta_1 = 0.319 \right] \Rightarrow \phi = 0.90$$

7 Cálculo de la resistencia de diseño ϕM_n

La resistencia de diseño es $\phi M_n = 0.90 \times 65.4 = 58.9 \text{ Mg-m}$. □

4.5.5 Diseño de vigas T

Incluye la escogencia de sección transversal y área de refuerzo requerido. El espesor y el ancho del ala se determinan usualmente durante el diseño de la losa. El tamaño de la viga sigue estando gobernado por los mismos criterios anteriores. En el caso de vigas **T** continuas, los esfuerzos de compresión en el concreto se vuelven más críticos en las regiones de momento negativo. En ellas, la zona de compresión está ubicada en el alma de la viga. Usualmente el tamaño del alma se escoge de manera que $\rho \approx 0.5\rho_b$ para el punto de máximo momento negativo. Una vez escogidas las dimensiones de la sección transversal, se puede calcular el área de refuerzo de acero según lo desarrollado anteriormente.

Para el momento negativo, suponer $j = 0.875$, para el positivo, suponer $j = 0.95$ (a es muy pequeño en este caso).

Ejemplo 4-12 Diseño de refuerzo de una viga T.

Diseñar una viga de sección transversal como la mostrada en la figura 4-38 con una luz de 6 m. La sección debe resistir un momento positivo de 32 Mg-m. Usar $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$ y acero Grado 60.

Solución:

❶ Cálculo del ancho efectivo b

Según el [Artículo 8.12.2 del ACI 318S-08](#) se debe estimar el ancho efectivo como el menor valor de:

- a) $b \leq 600/4 = 150 \text{ cm}$
- b) $8 \times 12.5 = 100 \text{ cm} \Rightarrow b = 100 + 30 + 100 = 230 \text{ cm}$
- c) $b = 270/2 + 30 + 325/2 = 328 \text{ cm}$

La opción a) presenta el menor valor de ancho efectivo, tomar $b = 150 \text{ cm}$.

❷ Cálculo del peralte efectivo d

Suponiendo que habrán dos capas de refuerzo, $d \cong h - 9.0 = 50.0 - 9.0 = 41.0 \text{ cm}$

❸ Cálculo del área de acero de refuerzo

Para una región de momento positivo en una viga T, se puede tomar $j = 0.95$.

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y j d} = \frac{32 \times 100,000}{0.90 \times 4200 \times 0.95 \times 41.0} = 21.7 \text{ cm}^2$$

Posibles escogencias de acero:

Combinación de barras	$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$b_{\min} \text{ (cm)}$
4 No.8	20.4	29.0
6 No.7	23.2	27.9 (dos capas)
2 No.9 + 2 No.8	23.1	30.5

Se puede tomar la primera combinación aun cuando provee menos acero ya que en este caso, las barras pueden ser acomodadas en una sola capa. Esta escogencia obliga a redefinir $d = 43.5 \text{ cm}$, lo cual es un resultado favorable.

❹ Revisión del acero mínimo

Para una viga T con el ala en compresión:

$$A_{s,\min} = \max \left[\frac{0.8\sqrt{210}}{4200} \times 30 \times 43.5, \frac{14 \times 30 \times 43.5}{4200} \right]$$

$$A_{s,\min} = \max [3.60 \text{ cm}^2, 4.35 \text{ cm}^2] = 4.35 \text{ cm}^2$$

Como $A_s = 20.4 \text{ cm}^2 > 4.35 \text{ cm}^2$, se satisface el requisito de acero mínimo.

5 Cálculo de a , verificación de $f_s = f_y$ y falla controlada por tracción

Suponiendo comportamiento de viga rectangular

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{20.4 \times 4200}{0.85 \times 210 \times 150} = 3.20 \text{ cm} < h_f = 12.5 \text{ cm}$$

Por lo tanto el bloque de esfuerzo de compresión actúa sobre un área rectangular.

$$\left[\frac{a}{d} = \frac{3.20}{43.5} = 0.0736 \right] < \left[\frac{a_b}{d} = 0.85 \left(\frac{6090}{6090 + 4200} \right) = 0.503 \right] \Rightarrow f_s = f_y$$

$$d_t = 50 - (4.0 + 0.95 + 2.54/2) = 43.8 \text{ cm}$$

$$\left[\frac{a}{d_t} = \frac{3.20}{43.8} = 0.0731 \right] < \left[\frac{a_{TCL}}{d_t} = 0.375 \beta_1 = 0.319 \right] \Rightarrow \phi = 0.90$$

6 Cálculo de la resistencia de diseño ϕM_n

$$\phi M_n = \phi [A_s f_y (d - a/2)] = \frac{0.90 \times 20.4 \times 4200 (43.8 - 3.20/2)}{100,000} = 32.5 \text{ Mg-m}$$

La resistencia de diseño es $\phi M_n = 32.5 \text{ Mg-m}$. Como $32.5 > 32$, la resistencia de diseño es mayor que el momento último y por lo tanto el diseño es aceptable. Adicionalmente, se puede notar que el valor de j resultante es

$$j = (d - a/2)/d = (43.8 - 3.20/2)/43.8 = 0.963$$

de manera que la suposición inicial resulta una muy buena aproximación.

R/ Usar 4 No.8 Grado 60 en una capa. □

4.6 Vigas con acero de compresión

4.6.1 Efecto del refuerzo de compresión sobre la resistencia y el comportamiento

En el caso de la presencia del refuerzo de compresión, el equilibrio $C = T$ donde $T = A_s f_y$, se satisface a través de un doble aporte de la capacidad a compresión: $C_c + C_s = C$ en donde C_s = fuerza de compresión tomada por el acero de compresión y C_c = fuerza de compresión tomada por el concreto. En vista de lo anterior, el efecto neto de la presencia del acero de refuerzo en compresión es la reducción de la profundidad a de la zona de concreto a compresión. Ver figura 4-41.

El efecto del acero de refuerzo de compresión se puede ver en el incremento del brazo de palanca $j_1 d$ a $j_2 d$. Por tanto, el incremento de capacidad es pequeño si el acero de tracción fluye. Ver figura 4-42. Para razones de reforzamiento normal, $\rho \leq 0.015$, el incremento en capacidad de momento es menor que 5%.

Conforme d' crece así disminuye la participación del refuerzo a compresión (porque ϵ_s' disminuye). Ver figura 4-41c.

4.6.2 Razones para usar refuerzo a compresión

1. **Reducción de las deflexiones provenientes de cargas sostenidas.** Ver figura 4-43.

Flujo plástico del concreto en la zona de compresión transfiere la carga del concreto al acero de compresión, reduciendo los esfuerzos en el concreto. En vista de la presencia de esfuerzos menores en el concreto, el flujo plástico es menor lo cual conduce a una reducción en las deflexiones a largo plazo.

2. **Incremento en la ductilidad.** Ver figura 4-44.

Presencia de acero negativo causa que a disminuya lo cual obliga a fluencia del acero positivo en forma más temprana.

3. **Cambio del modo de falla de compresión a tracción.** Ver figura 4-45.

Para $\rho > \rho_b$, $\rho' = 0$ genera falla controlada por compresión. Si el refuerzo de compresión fluye, la distribución de deformaciones unitarias y curvatura al momento de falla en la viga serán esencialmente las mismas que en una viga con refuerzo en tracción únicamente, y con una razón de refuerzo $(\rho - \rho')$. A $(\rho - \rho')$ se le denomina *razón de reforzamiento efectivo*. Usualmente, diseñadores añaden acero de compresión de manera tal que $(\rho - \rho') \leq 0.5 \rho_b$. Dos casos donde comúnmente se usa acero de compresión son en la región de momento negativo de vigas T continuas y en la región de momento positivo en vigas T invertidas (usadas para apoyar paneles prefabricados de entrepisos).

4. Facilidad de fabricación.

Para sostener los aros desde sus cuatro esquinas.

4.6.3 Análisis de vigas con refuerzo de tracción y compresión

Dividir la viga en dos: VIGA 1, acero de compresión tal que $T_1 = C_s$ y VIGA 2, concreto más el resto del acero. Ver figura 4-46.

De la figura 4-46b

$$\varepsilon'_s = 0.003 \left(\frac{c - d'}{c} \right)$$

Error! Bookmark not defined. Si $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_y$, entonces $f'_s = f_y$. Recordando que $c = \frac{a}{\beta_1}$, se

tiene:

$$\varepsilon'_s = 0.003 \left(1 - \frac{\beta_1 d'}{a} \right)$$

Tomando $\varepsilon'_s = \varepsilon_y = f_y / E_s$ con $E_s = 2.03 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ se obtiene la ecuación (4-30):

$$\left(\frac{d'}{a} \right)_{\text{lim}} = \frac{1}{\beta_1} \left(1 - \frac{f_y}{6090} \right) \leftarrow \text{valor límite para el cual el refuerzo de compresión fluirá}$$

$$f'_s = f_y \Leftrightarrow \left(\frac{d'}{a} \right) \leq \left(\frac{d'}{a} \right)_{\text{lim}} \tag{4-30}$$

La Tabla A-10 presenta los límites para $f'_c = 280, 350, 420, 560 \text{ kg/cm}^2$. $f_y = 2.8, 3.5, 4.2 \text{ Mg/cm}^2$.

Caso 1. Acero de compresión fluye.

En este caso $f'_s = f_y$, procedemos a dividir la viga en dos vigas

VIGA 1. Consiste de los refuerzos de tracción y compresión y que resiste momentos a base del par causado por el acero.

$$C_s = T_1$$

$$A'_s f_y = A_{s1} f_y \Rightarrow A'_s = A_{s1}$$

$$M_{n1} = A'_s f_y (d - d')$$

VIGA 2. Consiste del concreto y el acero remanente $A_{s2} = A_s - A_{s1}$

$$T = (A_s - A'_s) f_y \text{ y } C_c = 0.85 f'_c b a$$

por lo tanto

$$a = \frac{(A_s - A'_s) f_y}{0.85 f'_c b}$$

$$M_{n2} = (A_s - A'_s) f_y \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

Finalmente

$$M_n = A'_s f_y (d - d') + (A_s - A'_s) f_y \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

M_n incluye C_c calculado sin excluir el área de concreto desplazada por el acero negativo, es decir tomando el área de concreto como $a \times b$. Como resultado de esta consideración, el acero en la VIGA 2 está sometido a esfuerzo equivalente a $0.85 f'_c$ de manera que el esfuerzo adicional necesario para llevarlo a fluencia en la VIGA 1 es $(f_y - 0.85 f'_c)$. Para introducir esta corrección tenemos

$$A_{s1} = A'_s \left(1 - 0.85 f'_c / f_y \right)$$

$$y \quad M_n = A'_s \left(1 - \frac{0.85 f'_c}{f_y} \right) f_y (d - d') + \left[A_s - A'_s \left(1 - \frac{0.85 f'_c}{f_y} \right) \right] f_y \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

↳ *supone fluencia tanto en el acero de tracción como en el de compresión*

$$\text{en donde } a = \frac{\left[A_s - A'_s \left(1 - 0.85 f'_c / f_y \right) \right] f_y}{0.85 f'_c b}$$

Para acero de grado 60, M_n se sobrestima en un 0.3%. Grado 40, M_n se sobrestima en un 0.6%. (*¡No es importante!*)

¿Es $f_s = f_y$ en el refuerzo de tracción?

$$\text{Verificar } \frac{a}{d} \leq \frac{a_b}{d} = \beta_1 \frac{6090}{6090 + f_y}$$

Caso 2. Acero de compresión no fluye.

Si el acero de compresión no fluye entonces f'_s no se conoce. Supongamos que el acero de tracción fluye: (Ver figura 4-46) Entonces $T = A_s f_y$ y $C_c = 0.85 f'_c b a$. Además, simplificando

$$C_s = (E_s \varepsilon'_s) A'_s$$

Por equilibrio

$$T = C_c + C_s$$

o bien

$$A_s f_y = 0.85 f'_c b a + 0.003 E_s A'_s (1 - \beta_1 d' / a)$$

Lo cual puede ser presentado como una ecuación cuadrática:

$$(0.85 f'_c b) a^2 + (0.003 E_s A'_s - A_s f_y) a - (0.003 E_s A'_s \beta_1 d') = 0$$

válida únicamente si $f'_s \leq f_y$

Una vez determinado el valor de a , entonces se puede calcular la capacidad de la sección:

$$M_n = C_c \left(d - \frac{a}{2} \right) + C_s (d - d')$$

¿Es $f'_s = f_y$ en el refuerzo de tracción?

$$\text{Verificar } \frac{a}{d} \leq \frac{a_b}{d} = \beta_1 \frac{6090}{6090 + f_y}$$

Cota superior para refuerzo de tracción en vigas con acero de compresión:

No hay límite al acero colocado en una sección transversal de viga, en su lugar se establece en el [Artículo 10.3.5 del ACI 318S-08](#) que para vigas no presforzadas y sujetas a una fuerza axial menor que $0.10 f'_c A_g$ el valor neto de la deformación unitaria ε_t ante resistencia nominal no deberá ser menor que 0.004. Adicionalmente, se establece $\phi = 0.90$ para falla controlada por tracción y $\phi = 0.65$ para falla controlada por compresión (en donde no haya refuerzo helicoidal en la zona de compresión).

$$\frac{a}{d_t} < \frac{a_{TCL}}{d_t} = 0.375 \beta_1 \Rightarrow \text{la falla es controlada por la tracción.}$$

Anteriormente el ACI 318-99 en su Artículo 10.3.3 estipulaba que,

$$\rho \leq 0.75(\rho - \rho')_b \quad \text{o bien} \quad \rho \leq 0.75 \left(\rho - \frac{\rho' f'_s}{f_y} \right)_b$$

4.6.4 Refuerzo mínimo de tracción

El refuerzo mínimo de tracción corresponde al expresado en los [Artículos 10.5.1, 10.5.2 y 10.5.3 del ACI 318S-08](#).

4.6.5 Aros para refuerzo de compresión

Conforme la fuerza de compresión alcanza su valor último, el refuerzo de compresión puede pandearse, causando que el recubrimiento se desprenda y conduciendo a la falla. Por esta razón, es necesario confinar el refuerzo negativo con estribos cerrados. Ver [Artículo 7.11, Inciso 7.11.1 del ACI 318S-08](#).

Ejemplo 4-13 Análisis de una viga con refuerzo de compresión: Refuerzo de compresión fluye.

La viga mostrada en la figura 4-47 tiene un $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$ y $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$. Para esta viga, con refuerzo de tracción únicamente, $a = 25.8 \text{ cm}$, $d_t = 59.8 \text{ cm}$, dando $a/d_t = 0.430$, lo cual excede el límite de control por tracción $a_{rCL}/d_t = 0.319$. Como resultado, ϕ sería menor que 0.90. Para permitir el uso de $\phi = 0.90$ y dar mayor ductilidad, se han añadido dos barras #7 como refuerzo de compresión. Calcule la resistencia de diseño para la viga.

Solución:

❶ **Suponemos que $f'_s = f_y$ y que $f_s = f_y$ y dividimos la viga en dos componentes.** La viga se divide en Viga 1 y Viga 2 (Fig. 4-47b y c). Como se supone que todo el acero fluye, $A_{s1} = A'_s$. Es área de acero en la viga 2 es

$$A_{s2} = A_s - A_{s1}$$

$$A_{s2} = 30.6 - 7.74 = 22.9 \text{ cm}^2$$

❷ Cálculo de a para la Viga 2.

$$a = \frac{(A_s - A'_s) f_y}{0.85 f'_c b}$$

$$a = \frac{22.9 \times 4200}{0.85 \times 210 \times 28} = 19.2 \text{ cm}$$

❸ **Verificación de fluencia del acero de compresión.** En el paso 1 se supuso que $f'_s = f_y$. Es necesario verificar esta suposición.

$$d' = 6.5 \text{ cm}$$

$$\frac{d'}{a} = \frac{6.5}{19.2} = 0.339$$

Adicionalmente,

$$\left(\frac{d'}{a}\right)_{\text{lim}} = \frac{1}{\beta_1} \left(1 - \frac{f_y}{6090}\right)$$

$$\left(\frac{d'}{a}\right)_{\text{lim}} = \frac{1}{0.85} \left(1 - \frac{4200}{6090}\right) = 0.365$$

Como $d'/a = 0.339$ es menor que el valor límite 0.365, el acero de compresión está en fluencia.

4 Verificación de fluencia en el acero de tracción y si la sección es controlada por tracción.

$$a = 19.2 \text{ cm y } \frac{a}{d} = \frac{19.2}{57.0} = 0.337$$

De la tabla A-4 se tiene que $a_b/d = 0.503$. Como 0.337 es menor que 0.503, el acero de tracción está en fluencia.

$$d_t = 66.0 - 4.0 - 0.95 - 2.54/2 = 59.8 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{d_t} = \frac{19.2}{59.8} = 0.321$$

El límite para control por tracción es

$$\frac{a_{TCL}}{d_t} = 0.375\beta_1 = 0.319$$

Como $0.321 > 0.319$, la sección es de transición y ϕ será menor que 0.90. Es necesario utilizar la ecuación del [Comentario R9.3.2.2 del ACI 318S-08](#):

$$\phi = 0.65 + 0.25[\beta_1 d_t/a - 5/3]$$

$$= 0.65 + 0.25[0.85 \times 59.8/19.2 - 5/3] = 0.895$$

Adicionalmente, se debe verificar el cumplimiento del [Artículo 10.3.5 del ACI 318S-08](#) según el cual $\epsilon_t \geq 0.004$. Por triángulos semejantes, se tiene:

$$\epsilon_t = 0.003 \times \frac{59.8 - 19.2/0.85}{19.2/0.85} = 0.00494 > 0.004$$

5 Verificación de si $A_s \geq A_{s,\text{min}}$.

$$A_{s,\min} = \max \left[\frac{0.8\sqrt{210}}{4200} \times 28 \times 57.2, \frac{14 \times 28 \times 57.2}{4200} \right]$$

$$= \max [4.42 \text{ cm}^2, 5.34 \text{ cm}^2] = 5.34 \text{ cm}^2$$

Por lo tanto, $A_s = 30.6 \text{ cm}^2 \geq A_{s,\min}$. Esto debería haber sido evidente porque el refuerzo excede el límite de control por tracción.

⑥ **Cálculo de momento nominal reducido ϕM_n .**

(a) Viga 1:

$$\phi M_{n1} = \phi [A'_s f_y (d - d')] = 0.895 \left[\frac{7.74 \times 4200 (57.0 - 6.5)}{100,000} \right] = 14.7 \text{ Mg-m}$$

(b) Viga 2:

$$\phi M_{n2} = \phi \left[(A_s - A'_s) f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) \right] = 0.895 \left[\frac{22.9 \times 4200 (57.0 - 19.2/2)}{100,000} \right] = 40.8 \text{ Mg-m}$$

La capacidad total de momento es

$$\phi M_n = \phi M_{n1} + \phi M_{n2} = 14.7 + 40.8 = 55.5 \text{ Mg-m}$$

R/La capacidad de momento de diseño de la viga mostrada en la figura 4-47 es 55.5 Mg-m. □

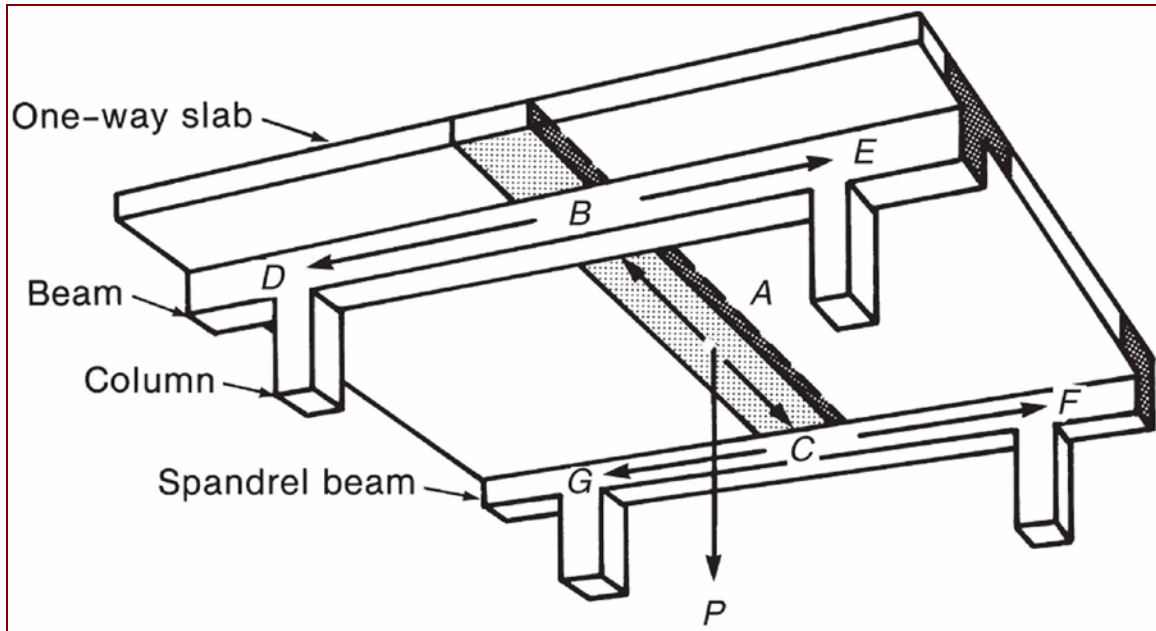


Figura 4-1 Flexión en una dirección

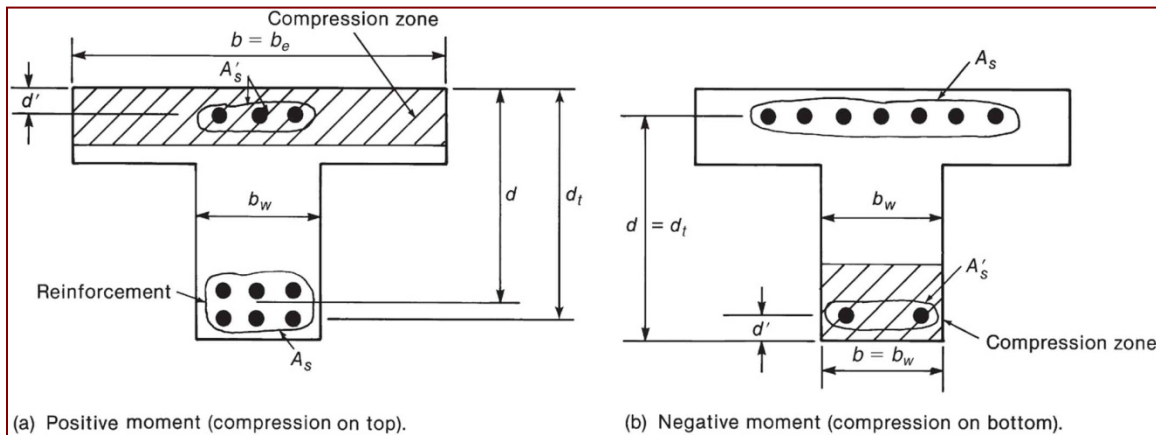


Figura 4-2 Dimensiones de sección transversal.

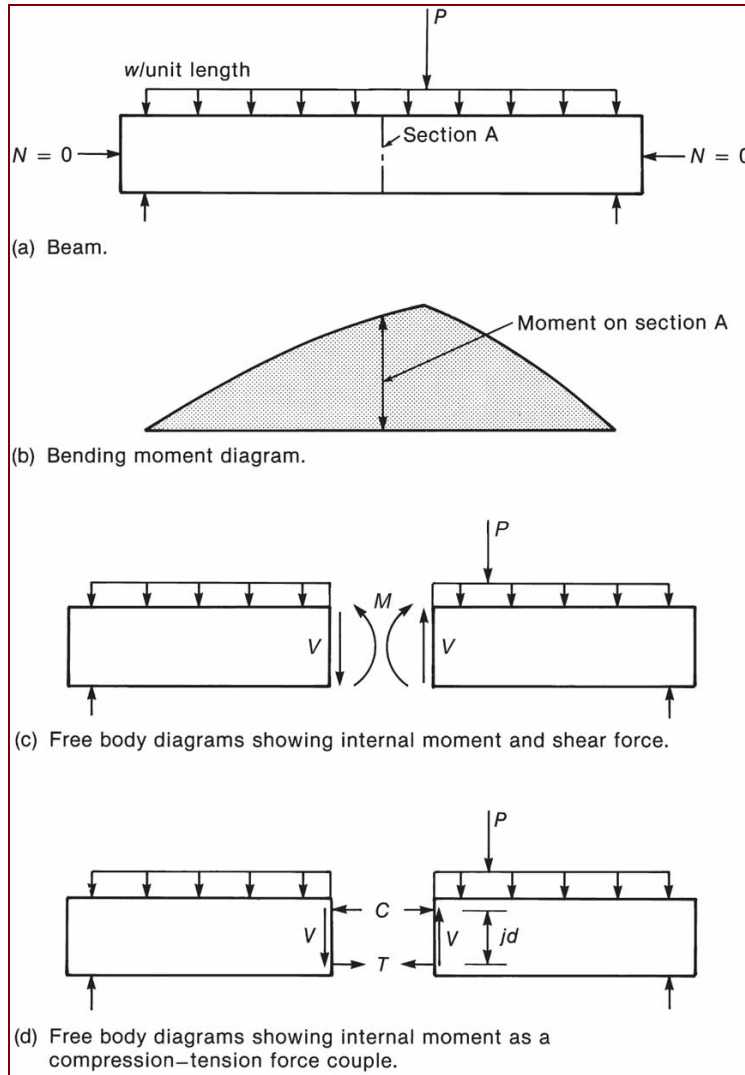


Figura 4-3 Fuerzas internas en una viga.

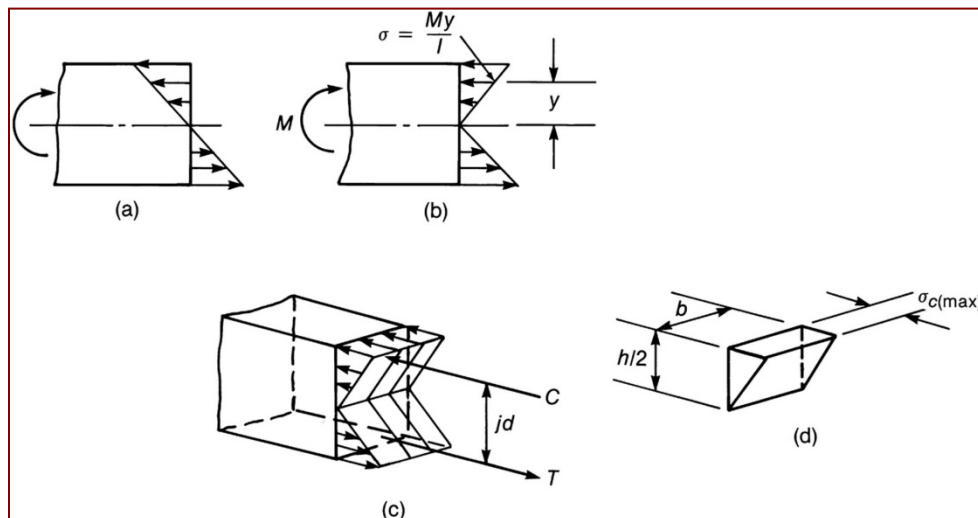


Figura 4-4 Esfuerzos elásticos y bloques de esfuerzos en la viga.

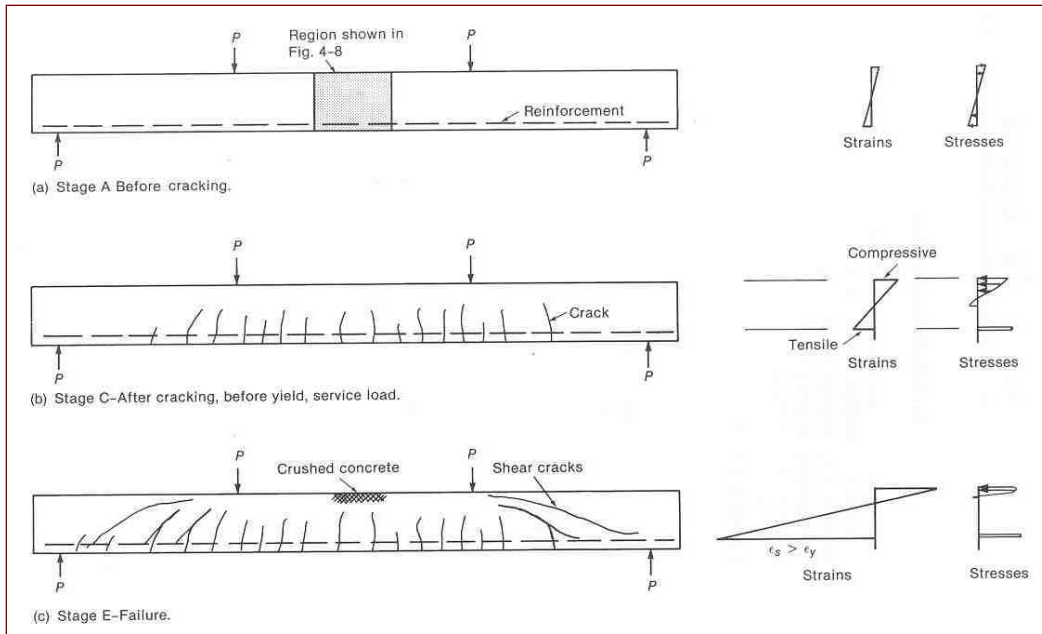


Figura 4-5 Grietas, deformaciones unitarias y esfuerzos en una viga de prueba.

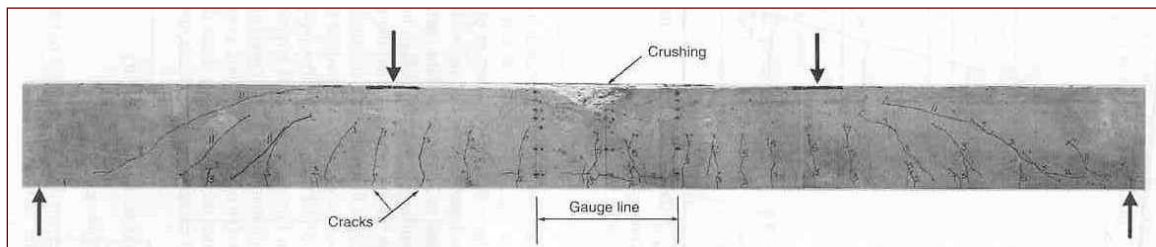


Figura 4-6 Viga de prueba después de la falla. (Fotografía cortesía de J.G. MacGregor.)

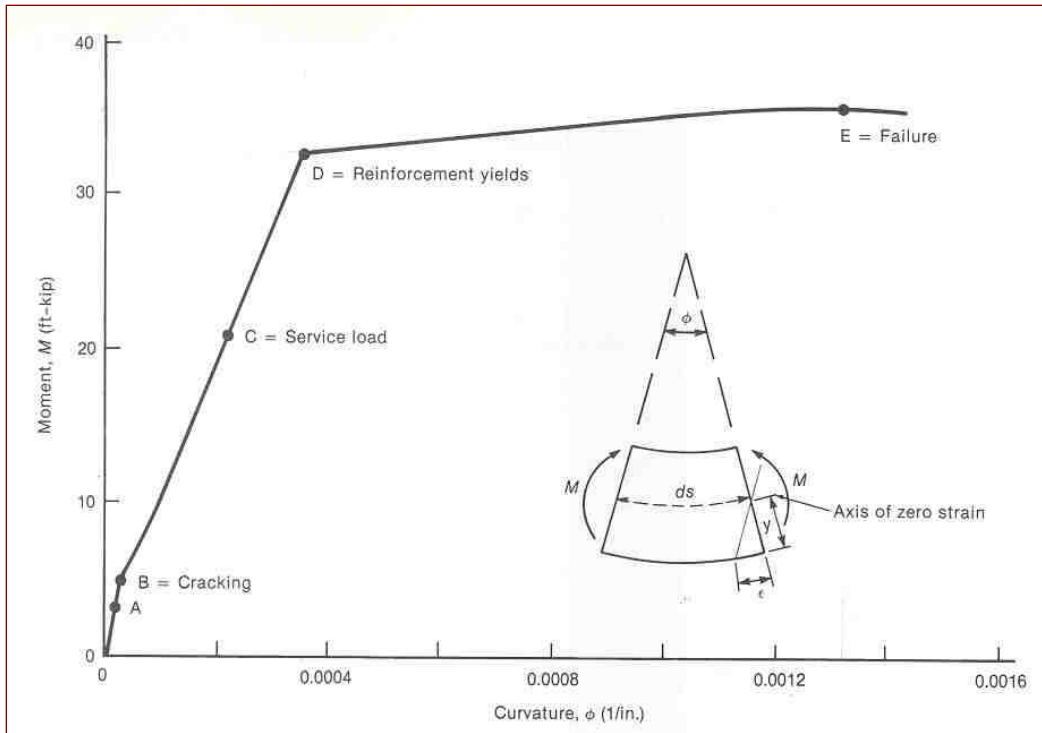


Figura 4-7 Diagrama de momento-curvatura para una viga de prueba.

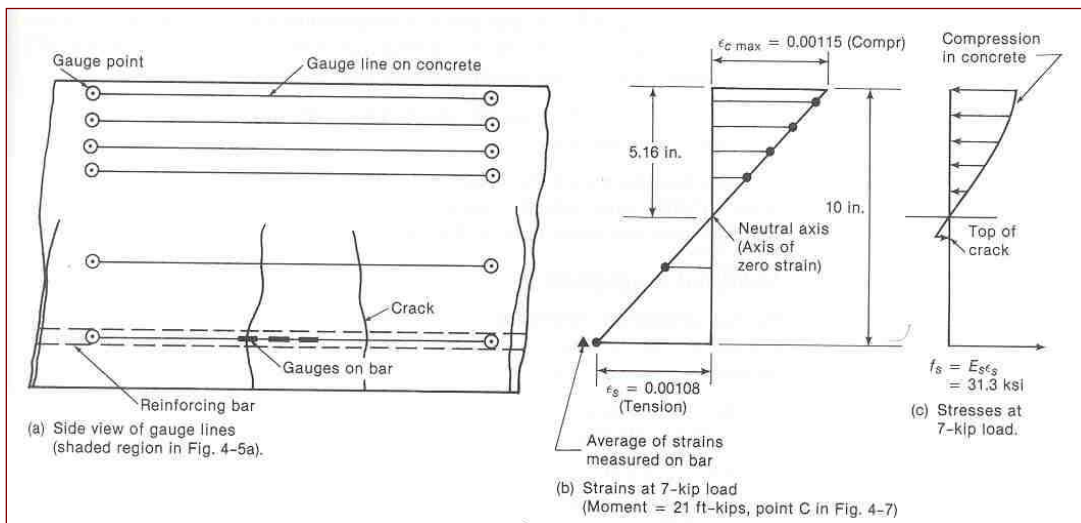


Figura 4-8 Distribución de esfuerzos y deformaciones unitarias en viga de prueba bajo cargas de servicio.

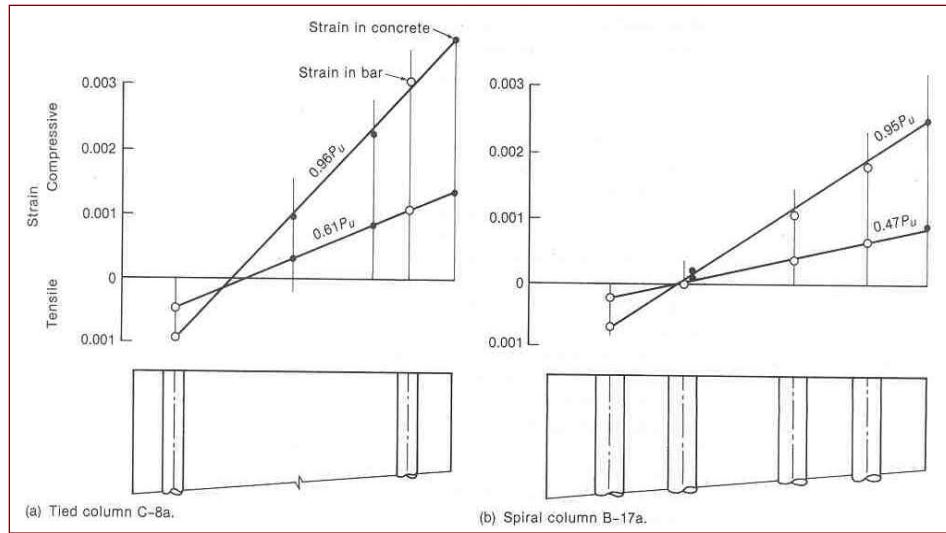


Figura 4–9 Deformaciones medidas en columnas de prueba cargadas excéntricamente. (Tomado de Hognestad, 1951)

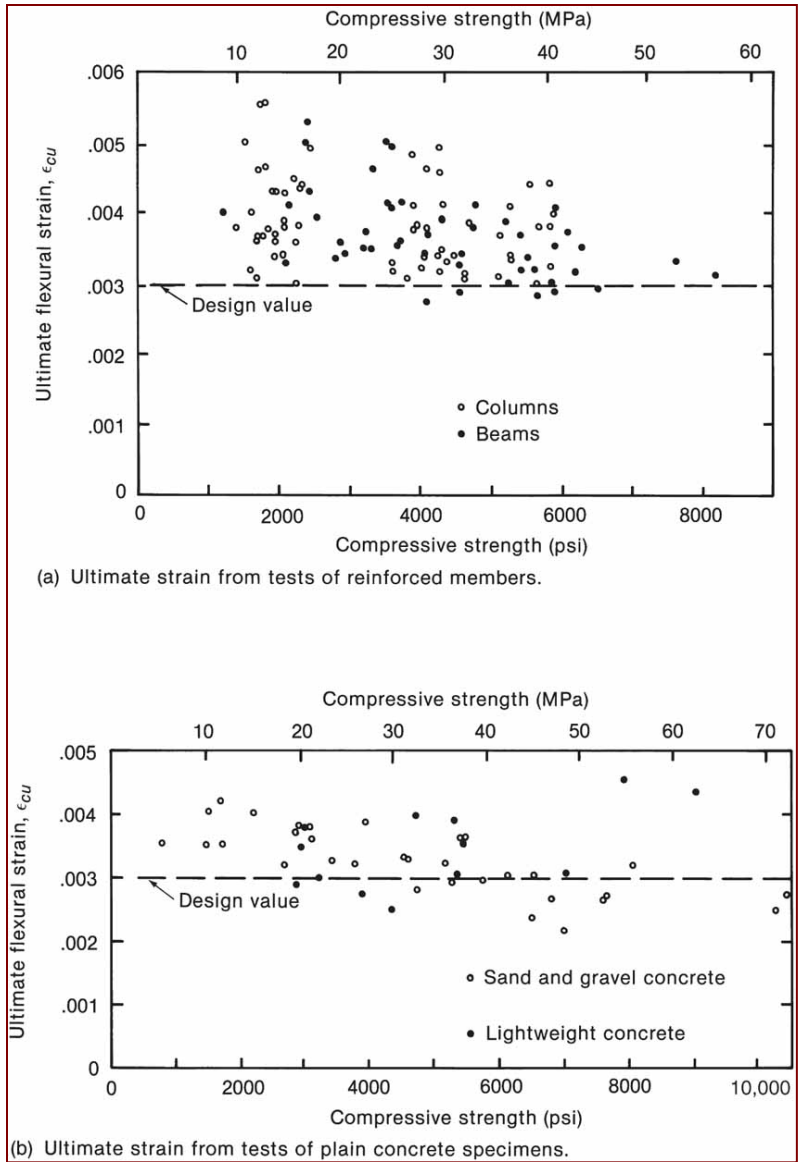


Figura 4–10 Deformación unitaria límite para concreto en compresión. (Tomado de Mattock et al., 1961)

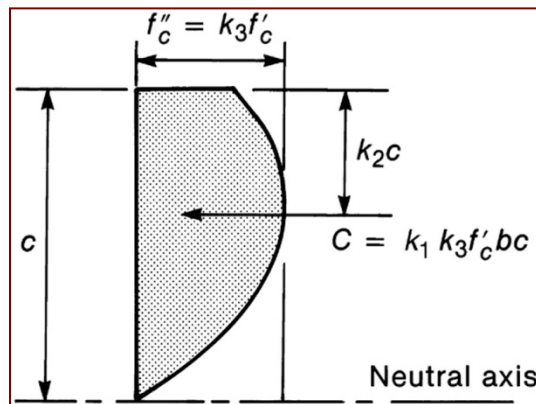


Figura 4–11 Descripción matemática del bloque de esfuerzos de compresión.

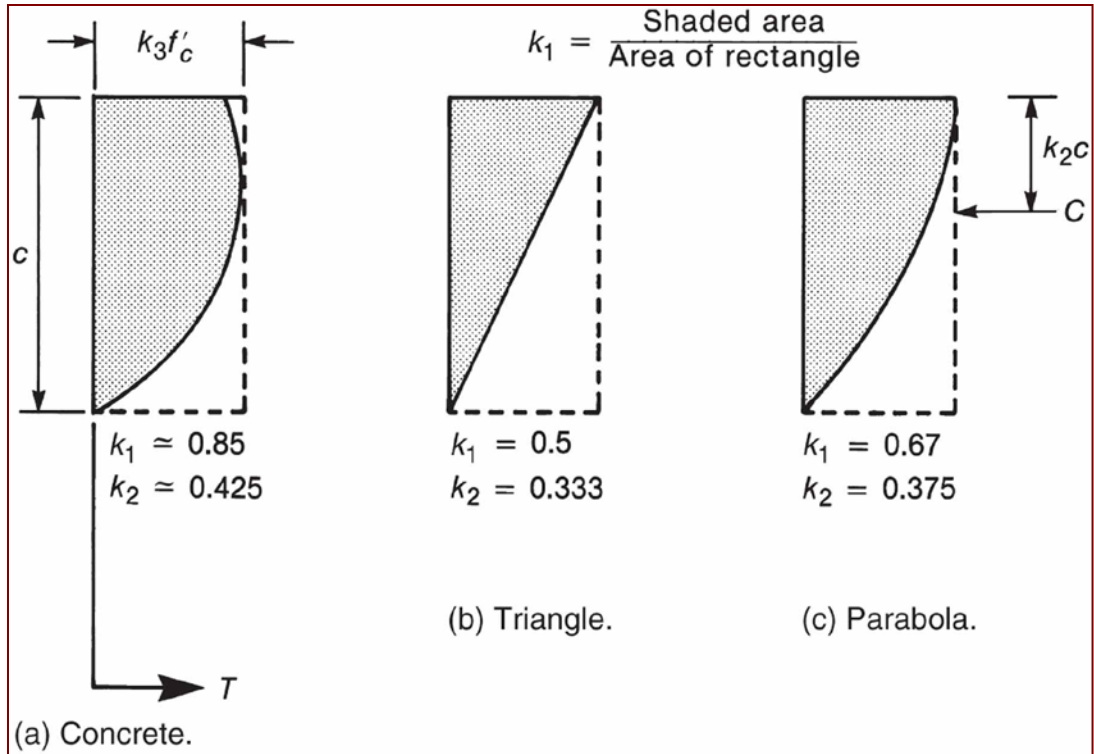


Figura 4-12 Valores de k_1 y k_2 pra diferentes distribuciones de esfuerzos.

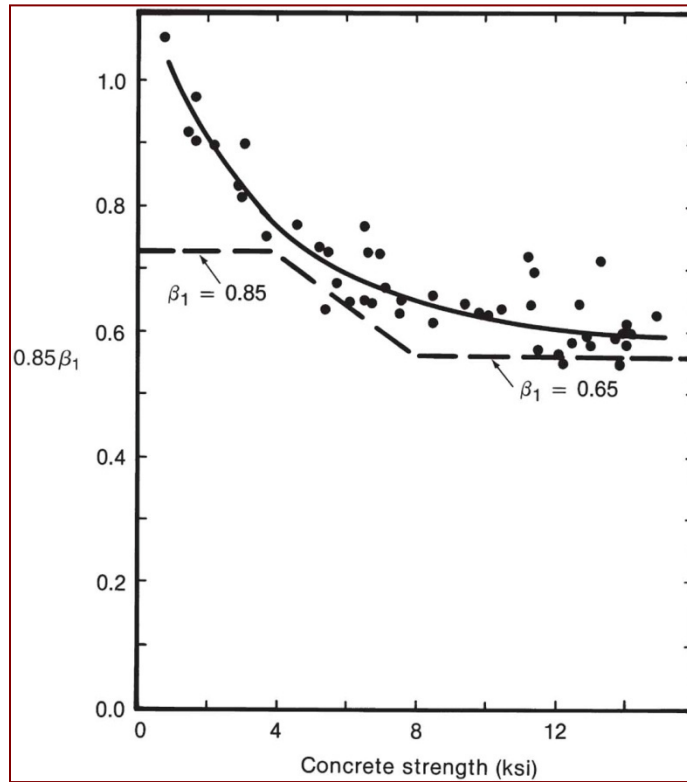


Figura 4-13 Valores de $\alpha_1 \beta_1$ obtenidos de pruebas de prismas de concreto. (Tomado de Kaar et al., 1978)

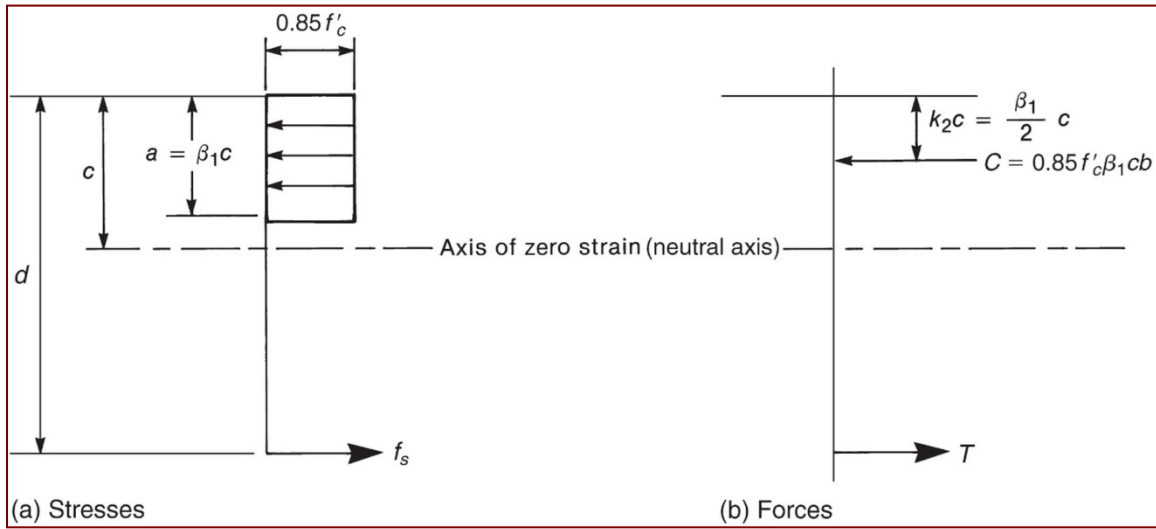


Figura 4-14 Bloque rectangular de esfuerzos equivalente.

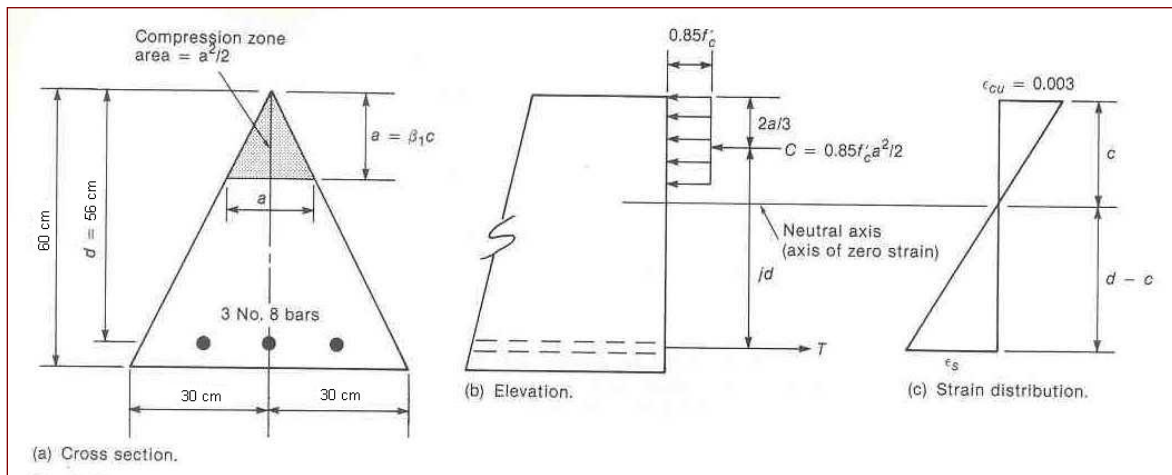


Figura 4-15 Análisis de sección transversal arbitraria—Ejemplo 4-1.

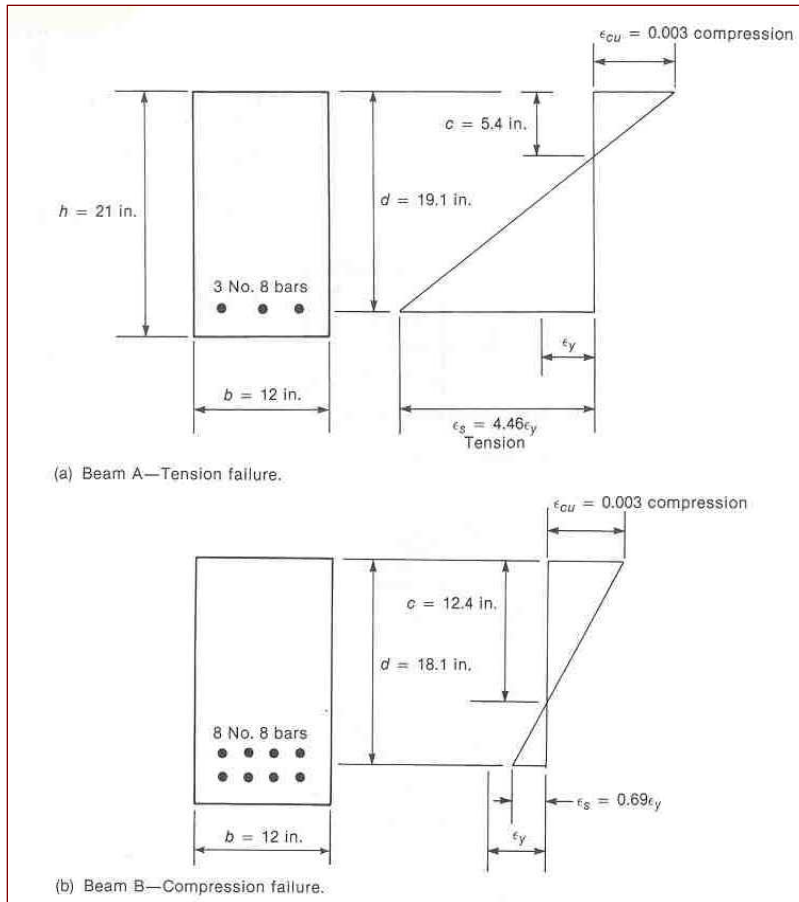


Figura 4–16 Fallas de tracción, de compresión y balanceada.

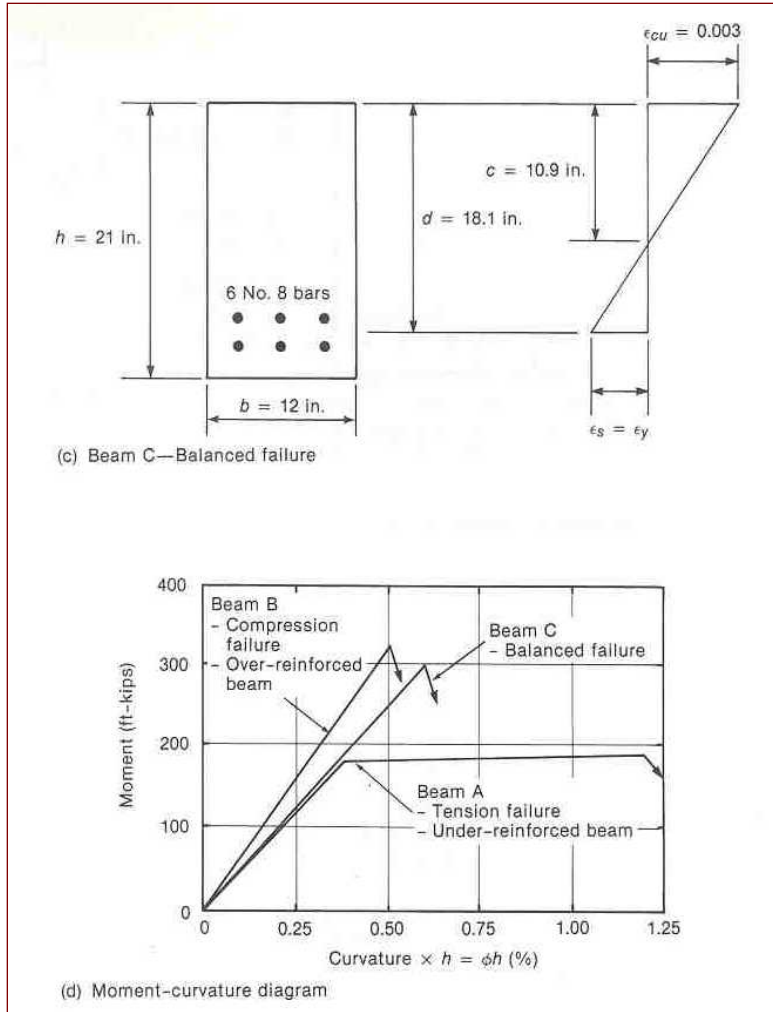


Figura 4–16 Fallas de tracción, de compresión y balanceada (continuación).

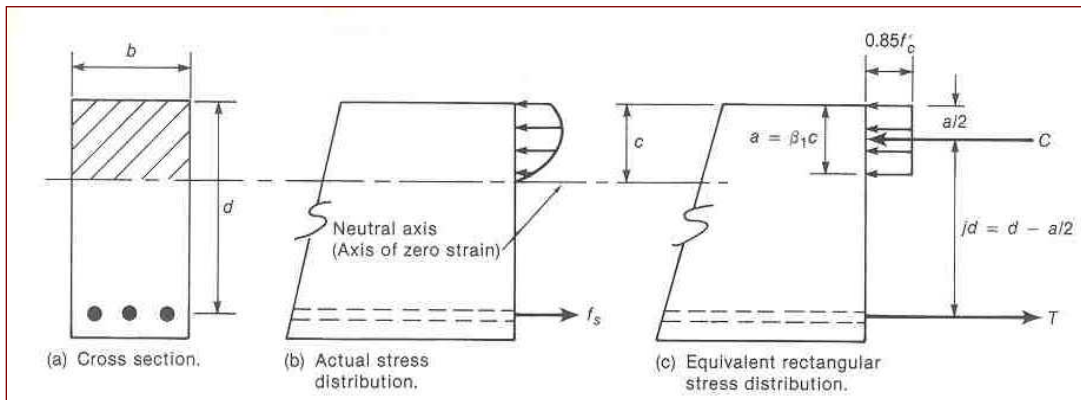


Figura 4–17 Fuerzas y esfuerzos en vigas rectangulares.

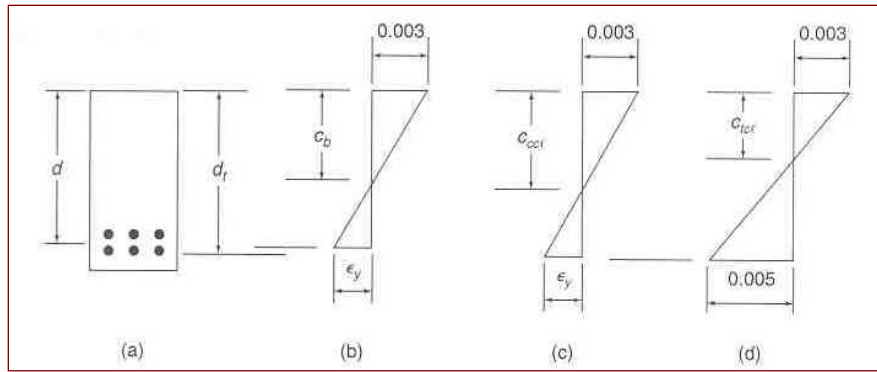


Figura 4–18 Secciones balanceada, controlada por compresión y controlada por tracción.

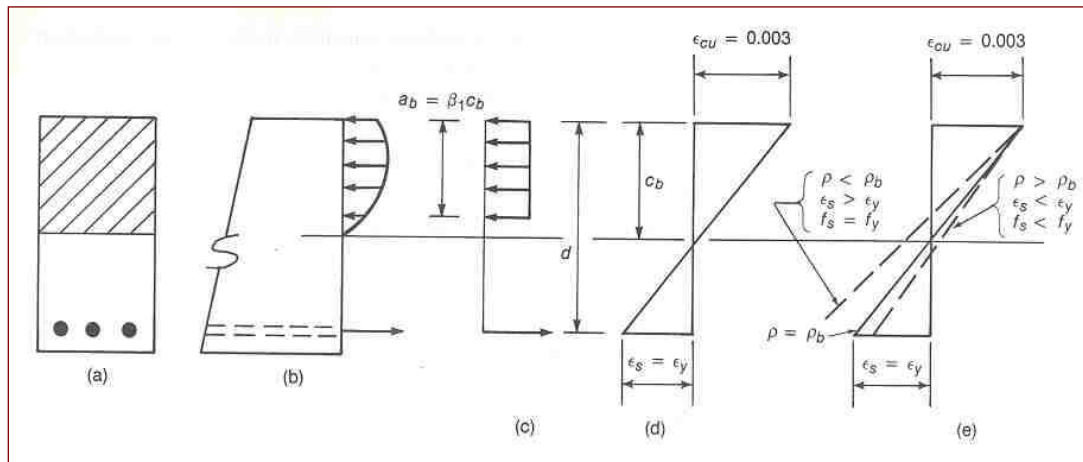


Figura 4–19 Cálculo de la razón de refuerzo balanceada, ρ_b .

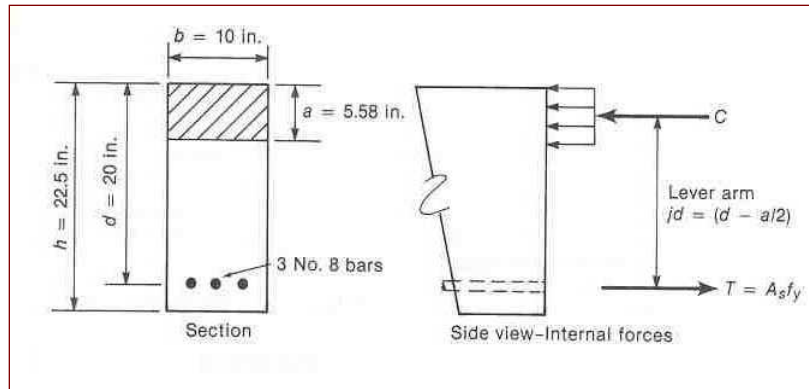


Figura 4-20 Viga—Ejemplo 4-2.

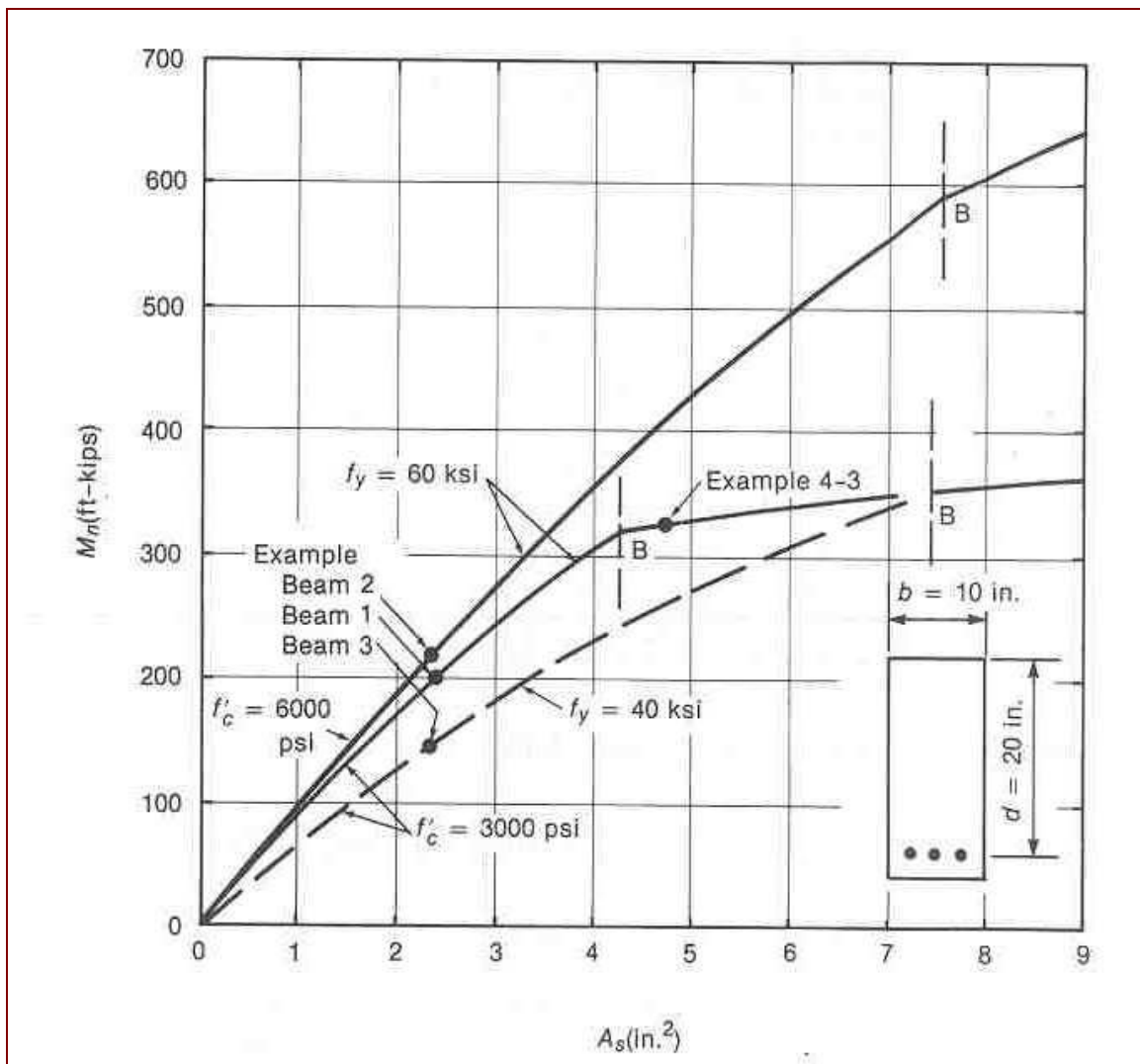


Figura 4-21 Análisis paramétrico para la resistencia en vigas.

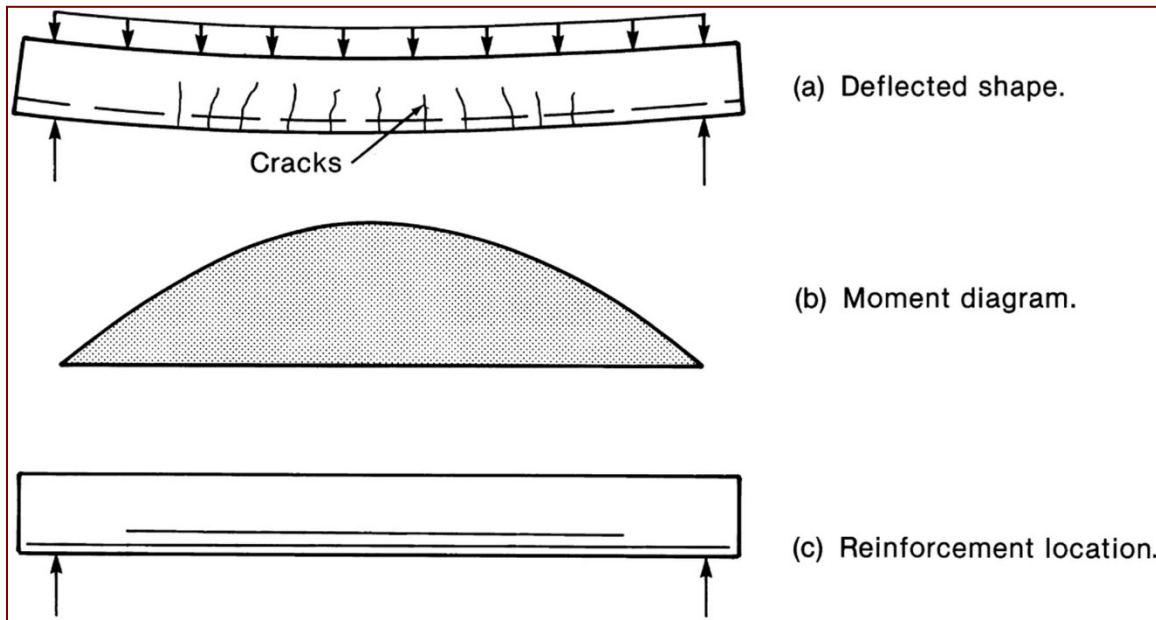


Figura 4-22 Viga simplemente apoyada.

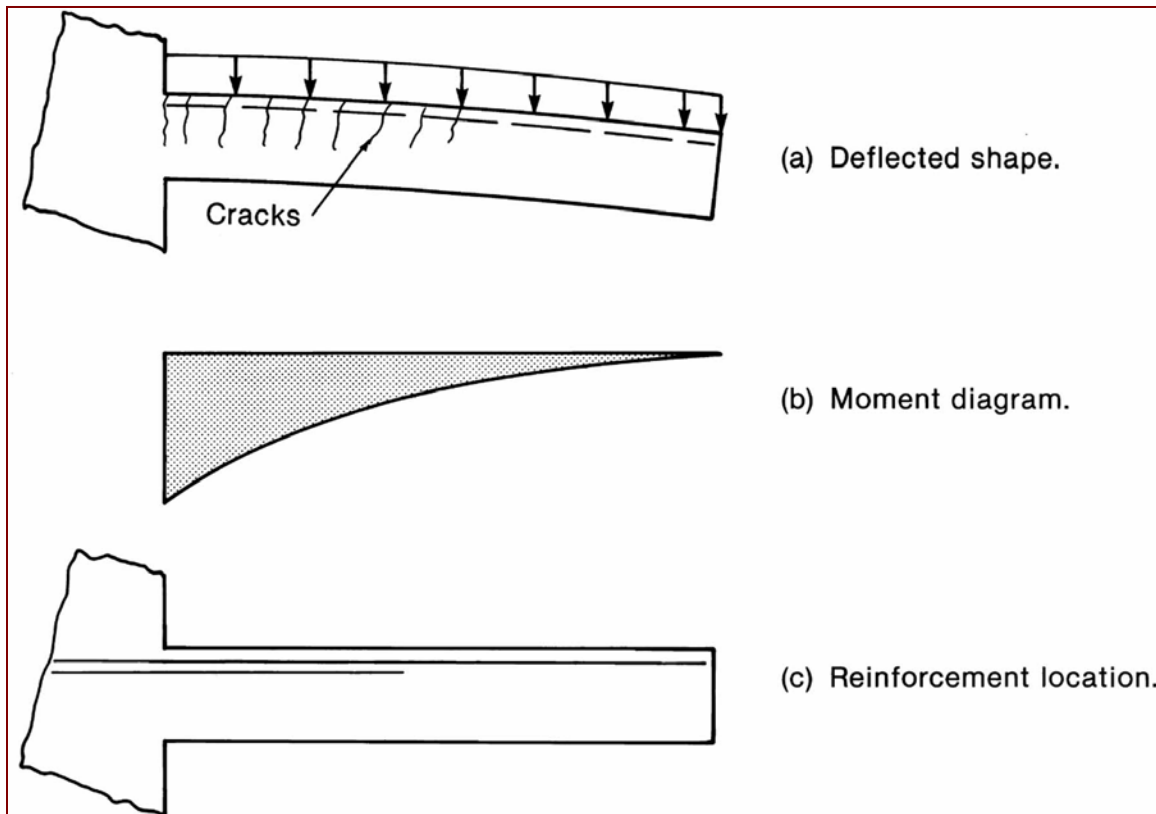


Figura 4-23 Viga en voladizo.

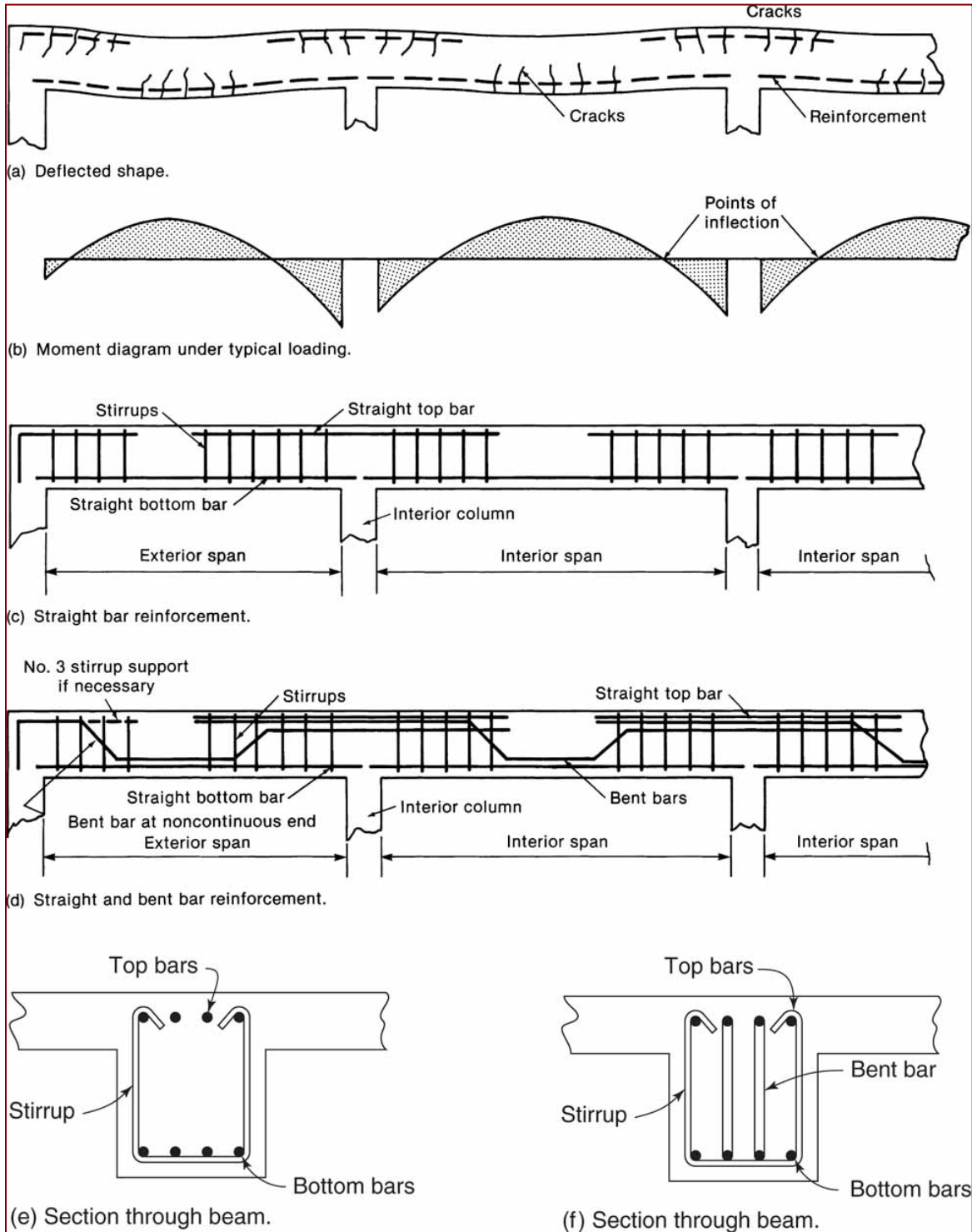


Figura 4-24 Viga continua.



Figura 4–25 Intersección de columna con vigas. (Fotografía cortesía de J.G. MacGregor.)

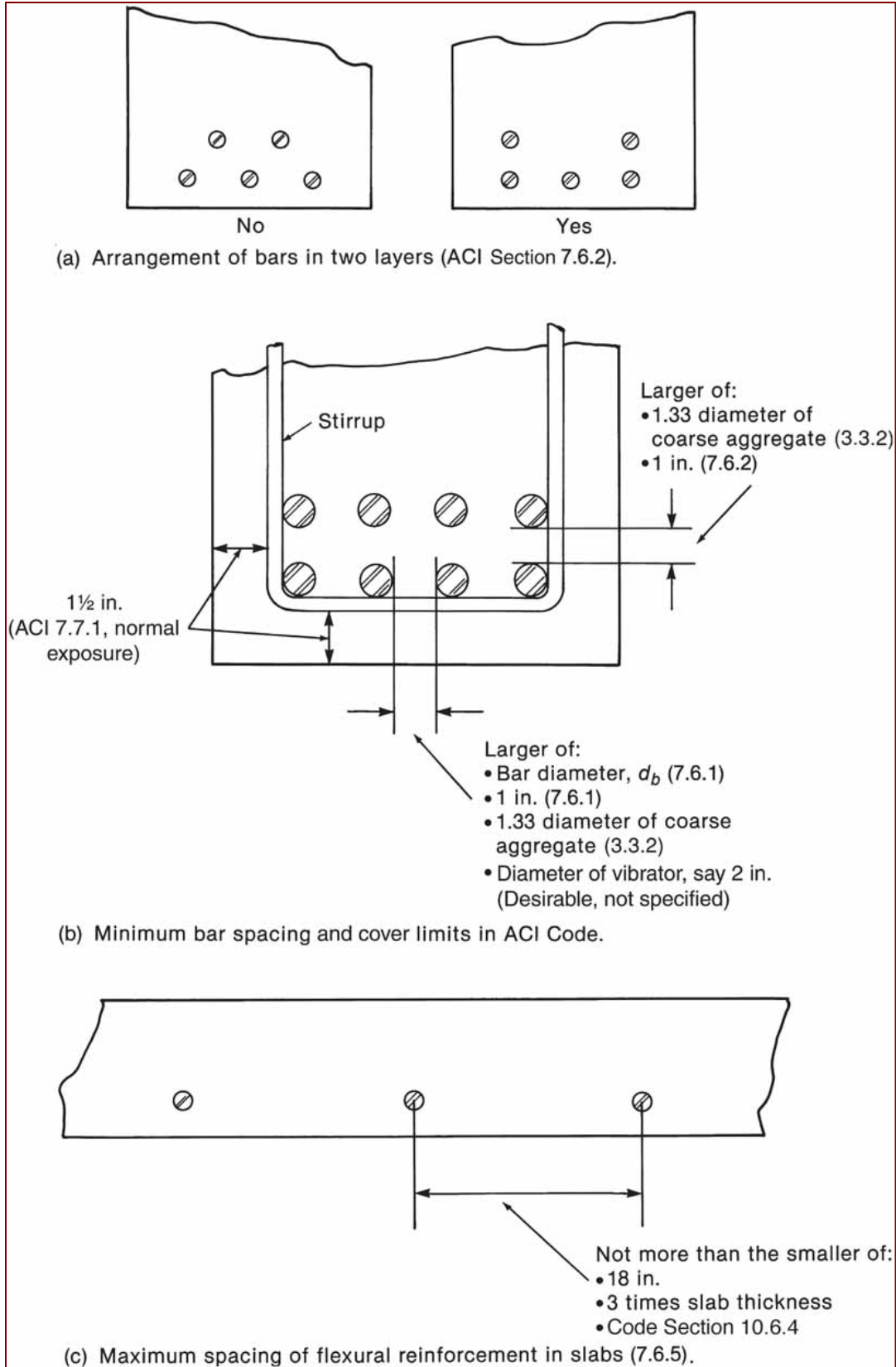


Figura 4–26 Espaciamiento límite entre barras según ACI.

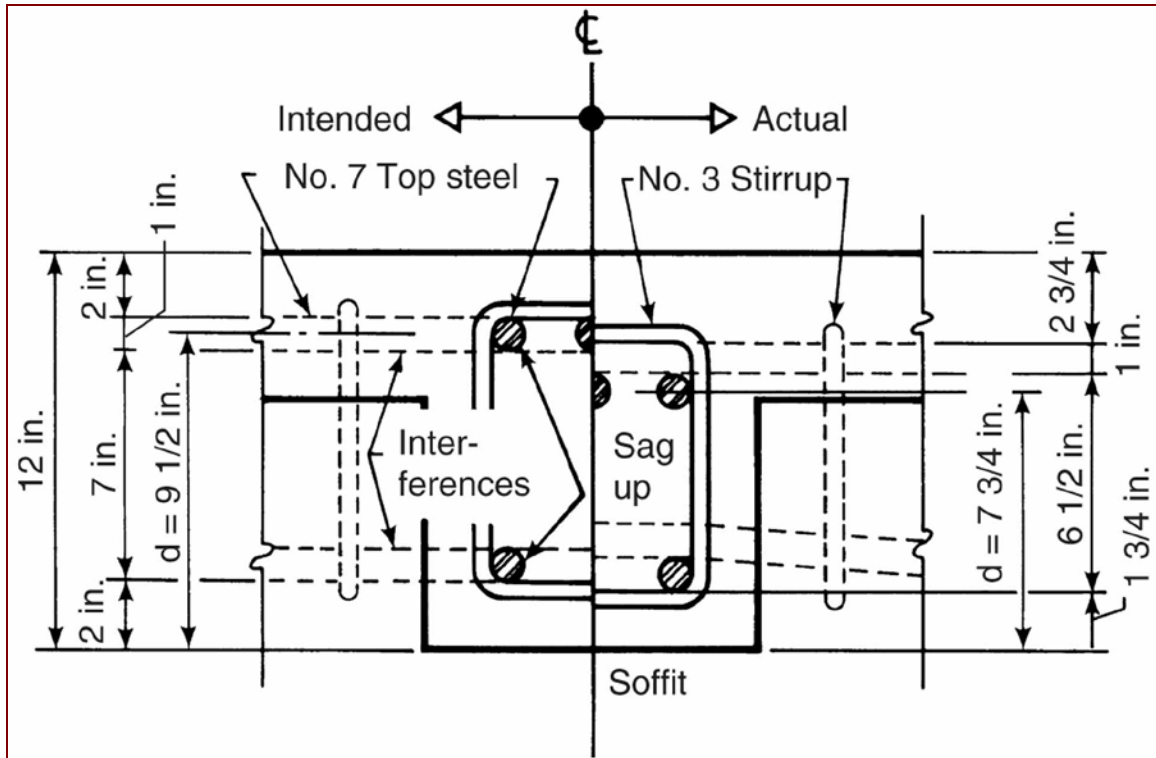


Figura 4-27 Problemas de emplazamiento de barras en la intersección de dos vigas. (Tomado de Birkeland & Westhoff, 1972)

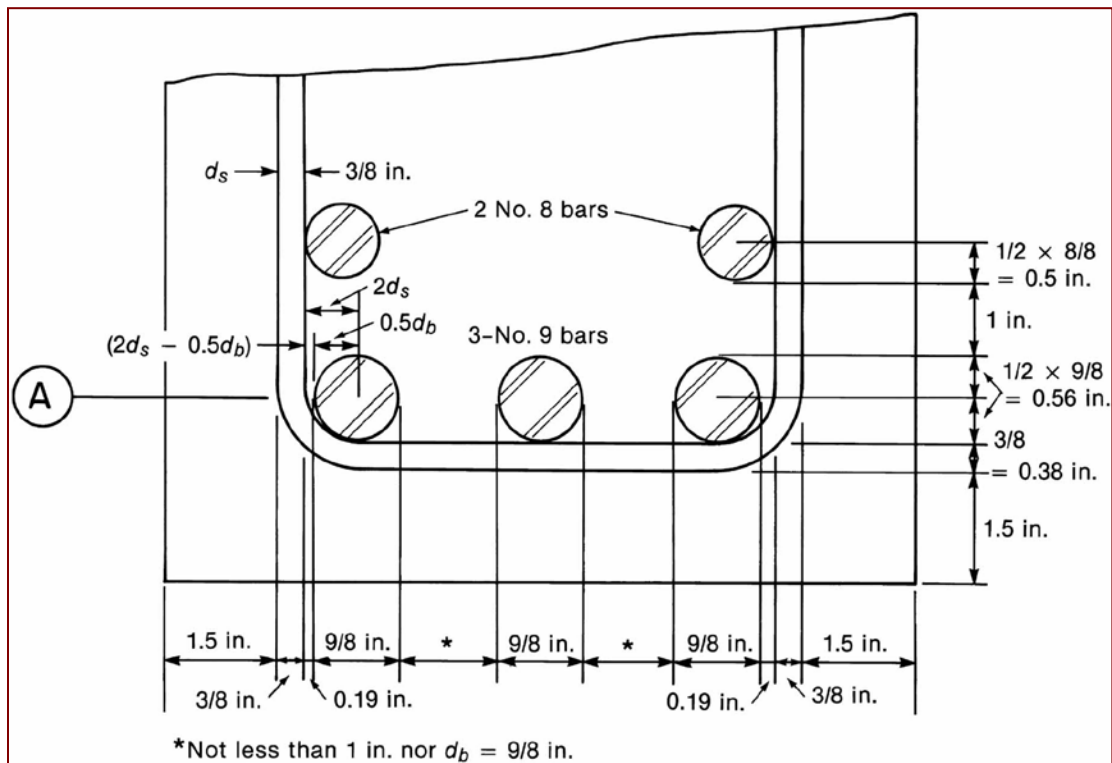


Figura 4-28 Ejemplo 4-4.

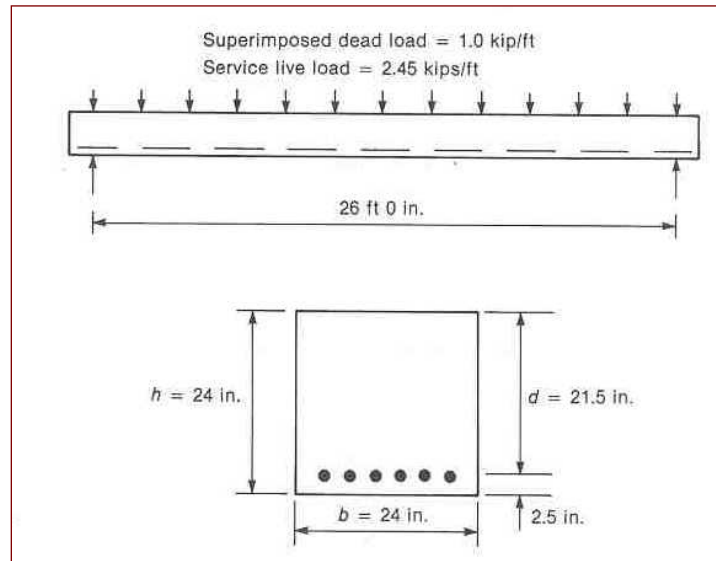


Figura 4–29 Viga diseñada en el Ejemplo 4–5.

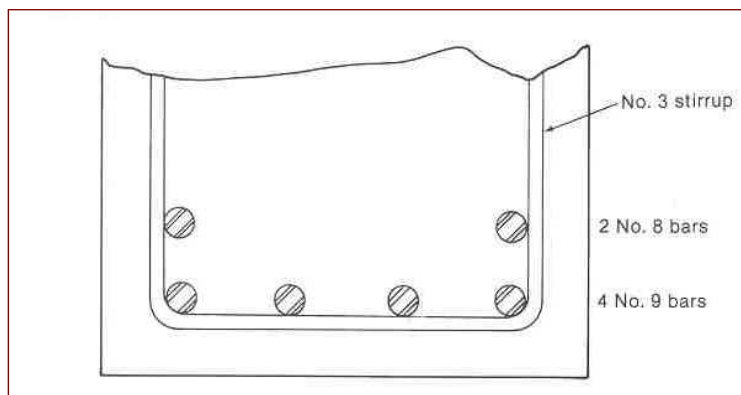


Figura 4–30 Ubicación de refuerzo—Ejemplo 4–6.

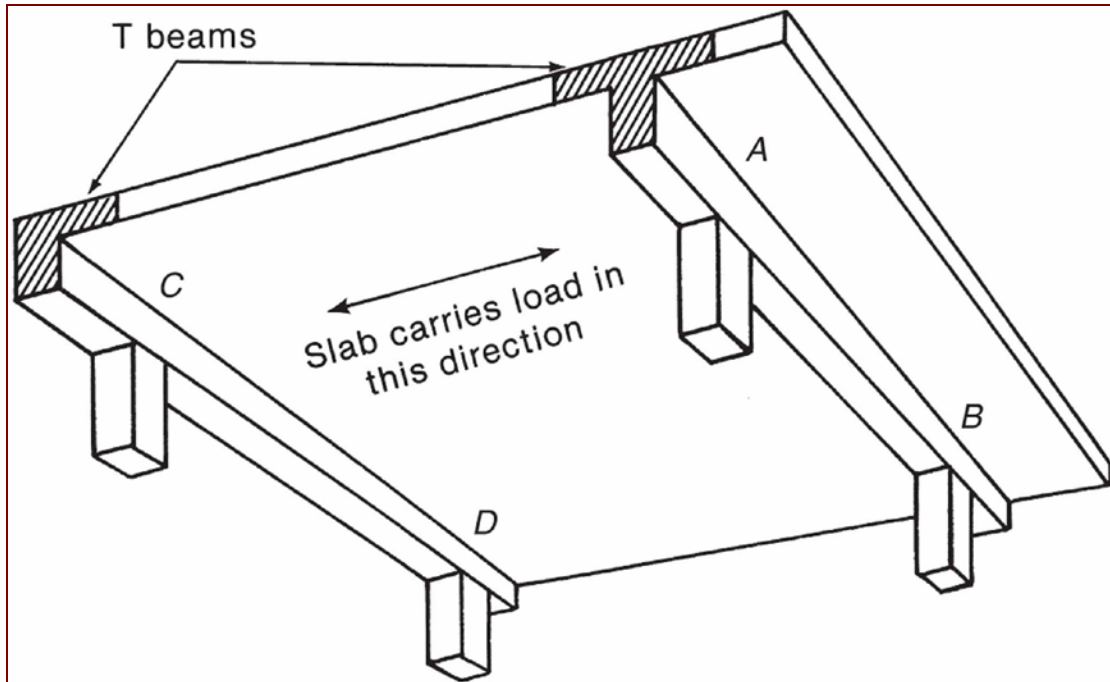


Figura 4-31 Vigas T en un entrepiso de formado por vigas y losa en una dirección.

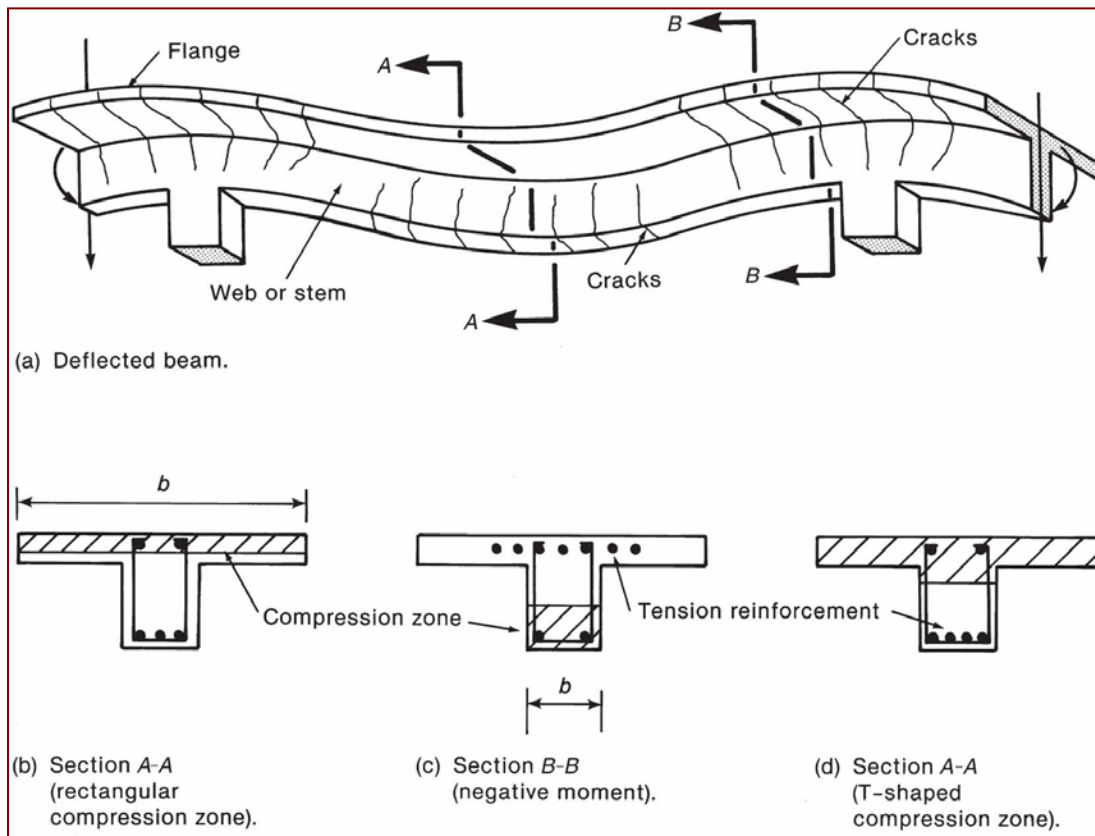


Figura 4-32 Regiones de momento positivo y negativo en una viga T.

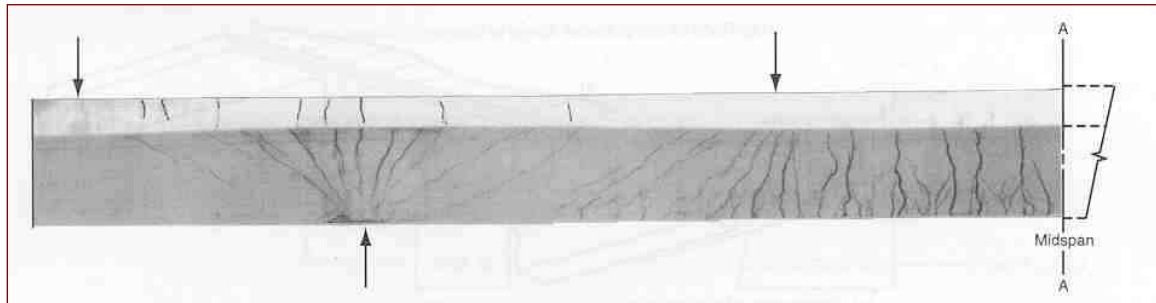


Figura 4–33 Fotografía de espécimen de prueba que representa la mitad de la viga mostrada en la Fig. 4–32a. (Fotografía cortesía de J. G. MacGregor.)

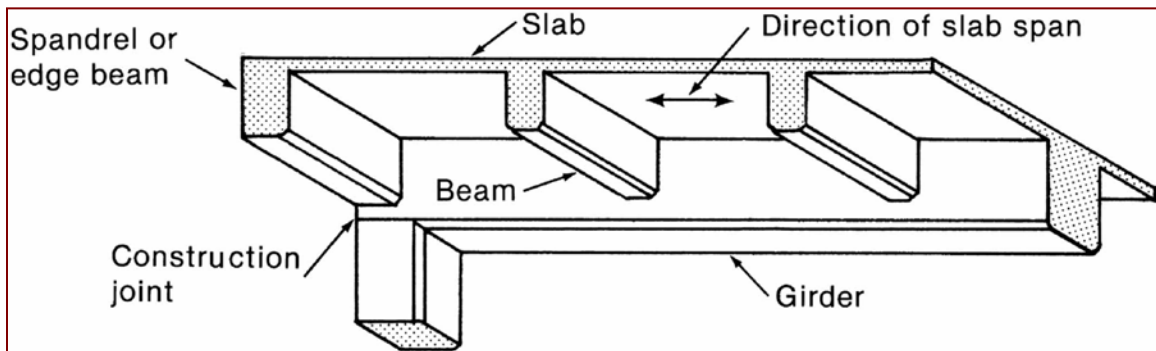


Figura 4–34 Entrepiso formado de losa, viguetas y viga. (Tomado de CRSI, 1971)

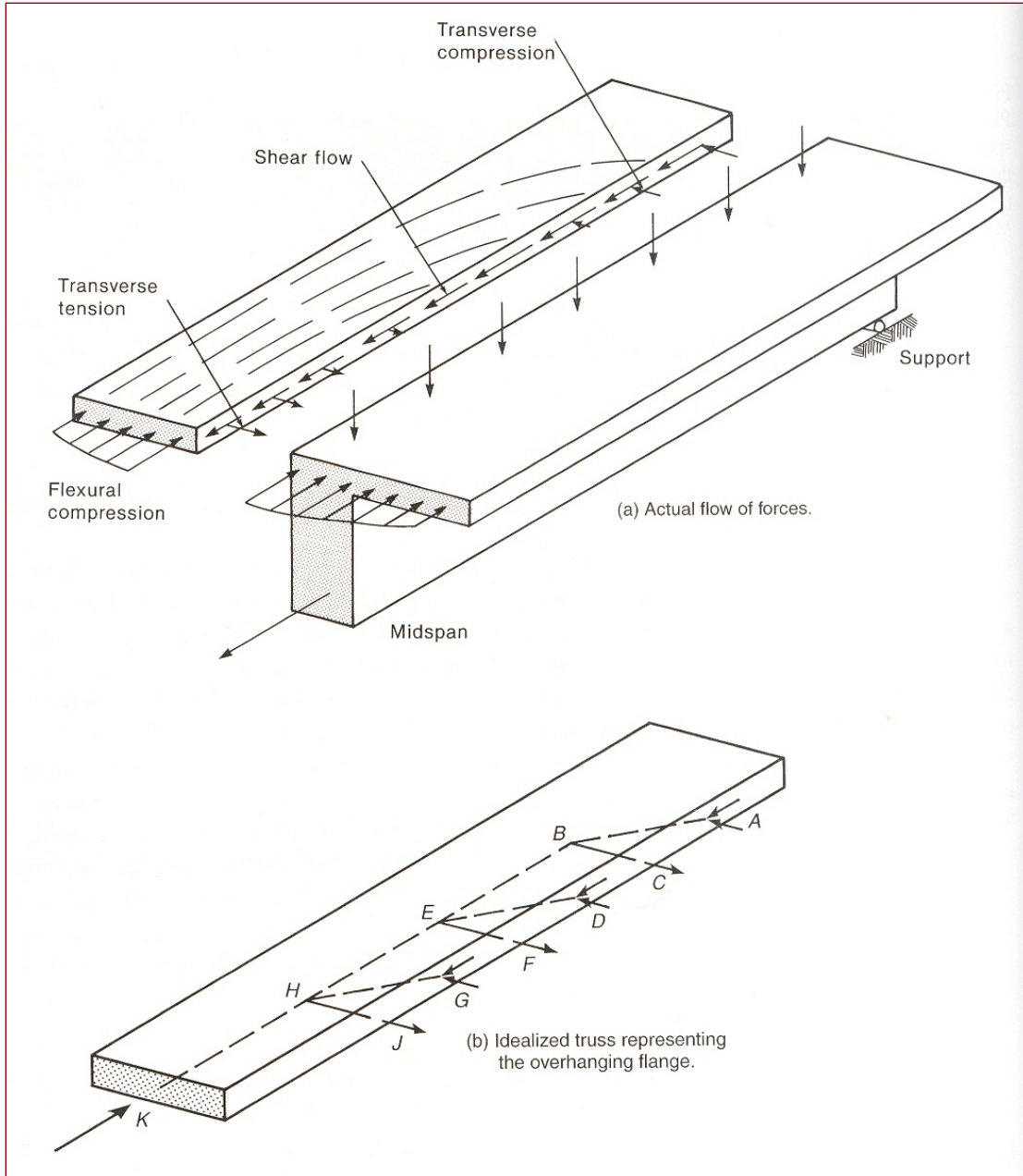


Figura 4-35 Fuerzas en el ala de una viga T.

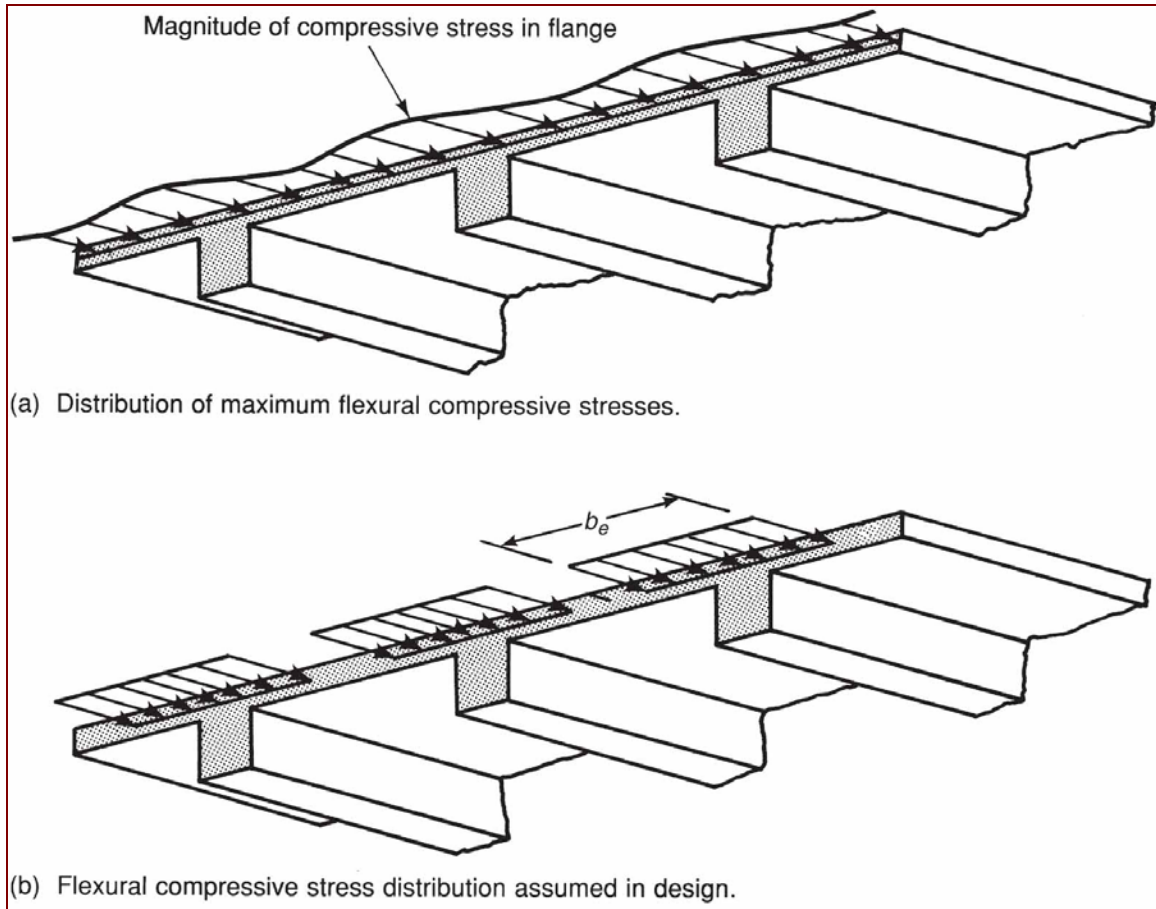


Figura 4-36 Ancho efectivo de las vigas T.

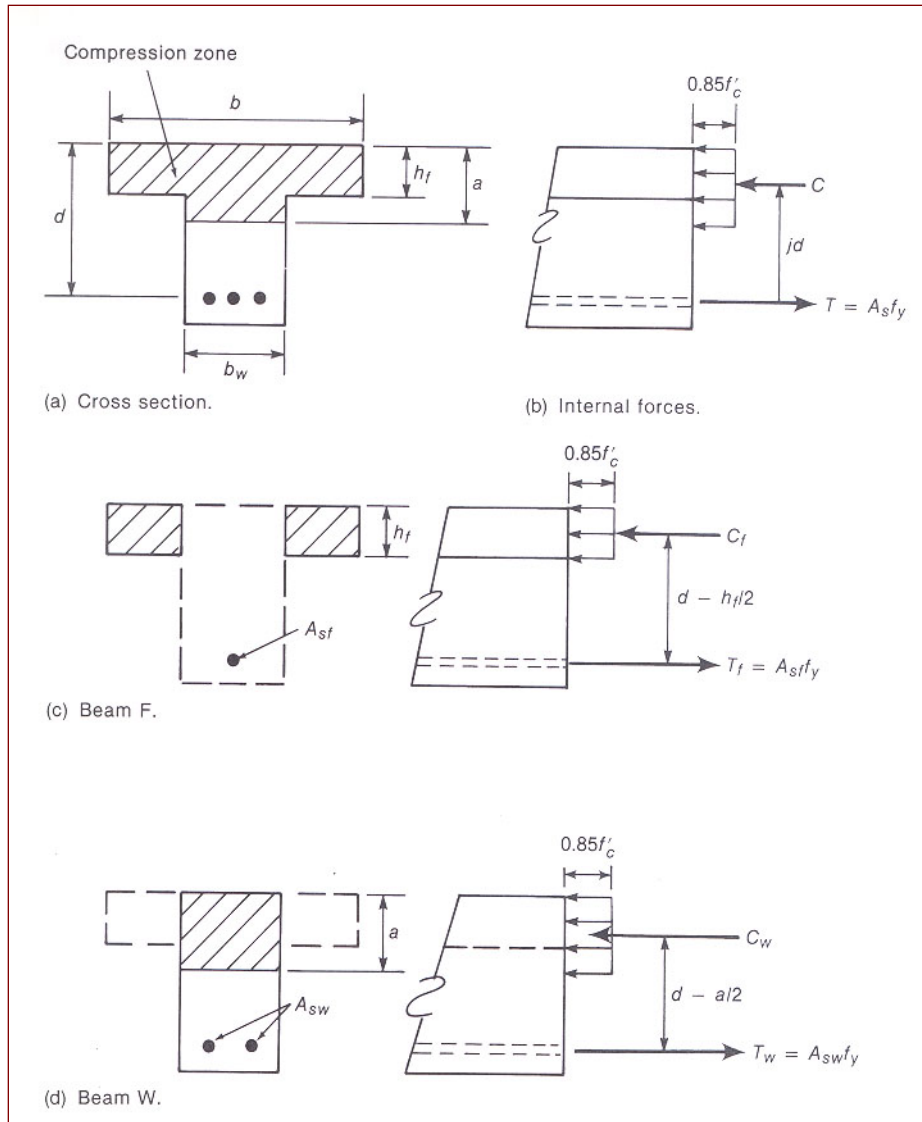


Figura 4-37 Subdivisión de una viga T para propósitos de análisis.

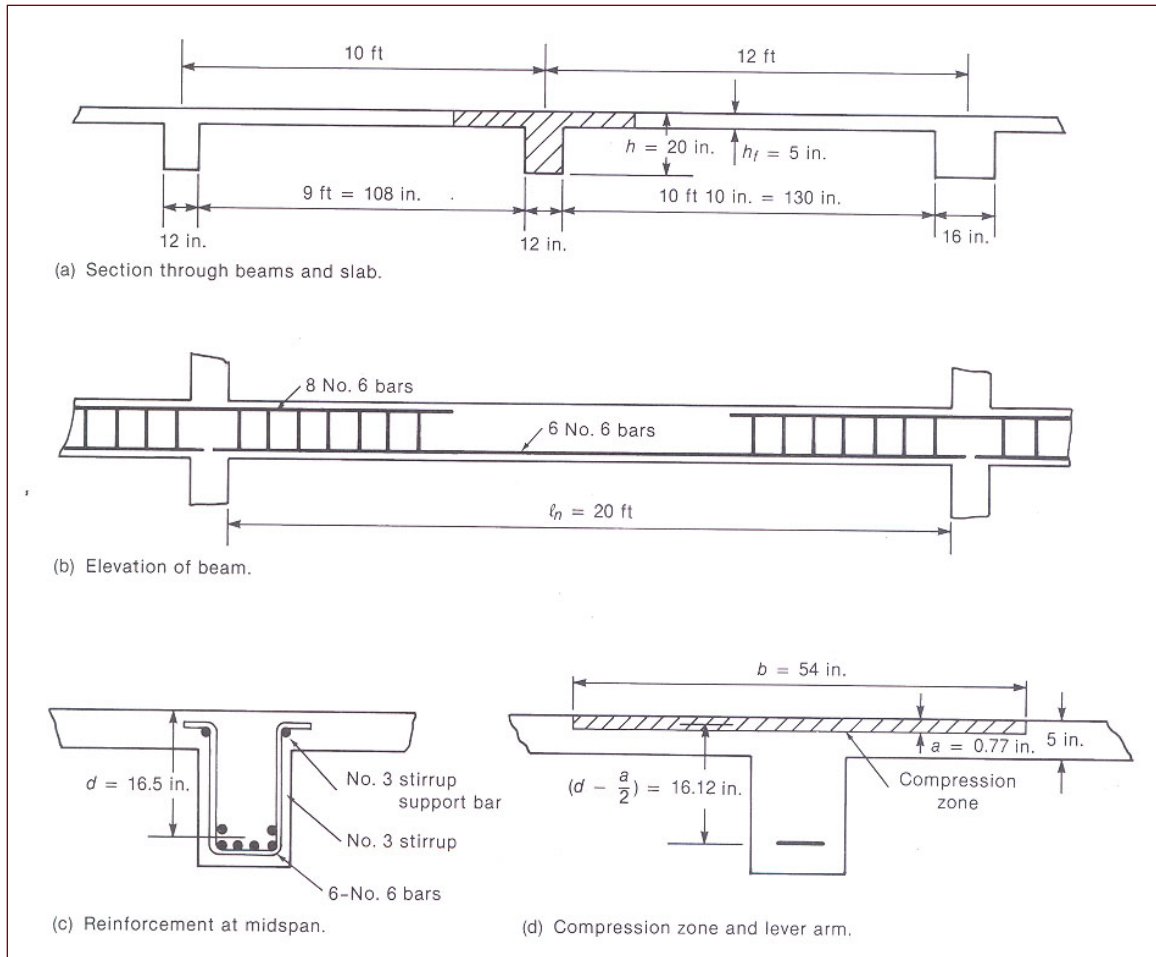


Figura 4-38 Viga—Ejemplos 4-9 y 4-10.

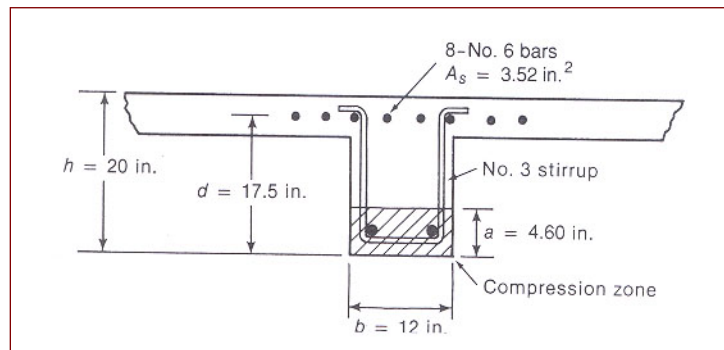


Figura 4-39 Sección transversal de momento negativo para la viga mostrada en la Fig. 4-38—Ejemplo 4-10.

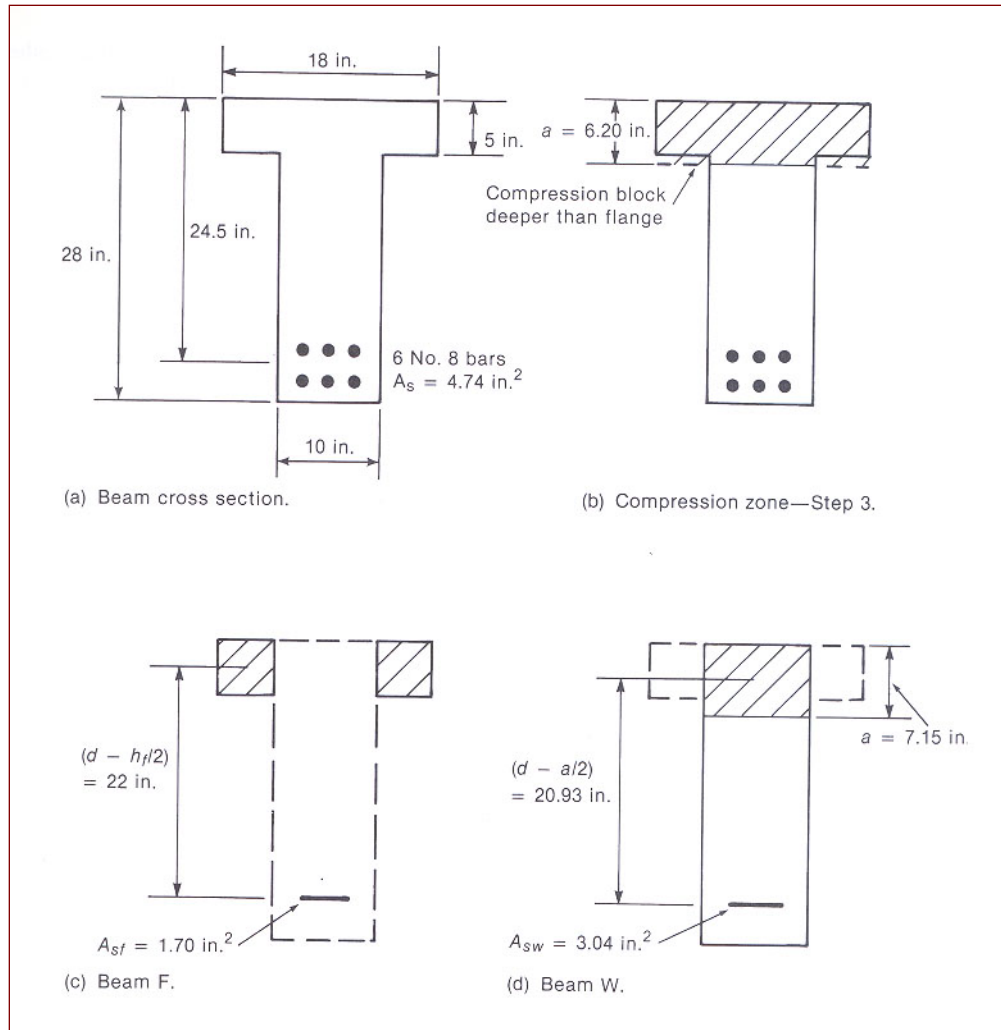


Figura 4-40 Viga—Ejemplo 4-11.

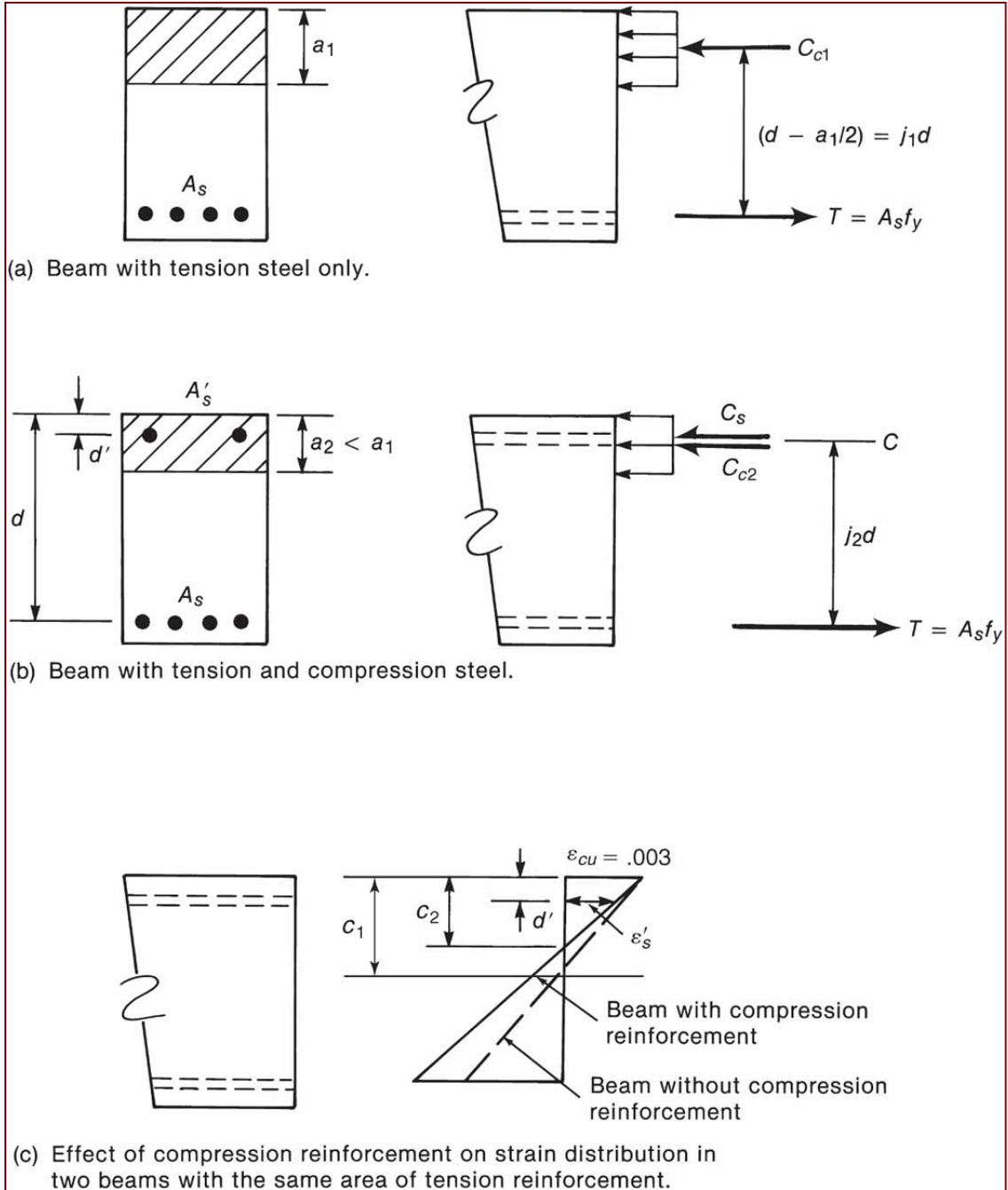


Figura 4-41 Efecto del refuerzo de compresión sobre la capacidad de momento.

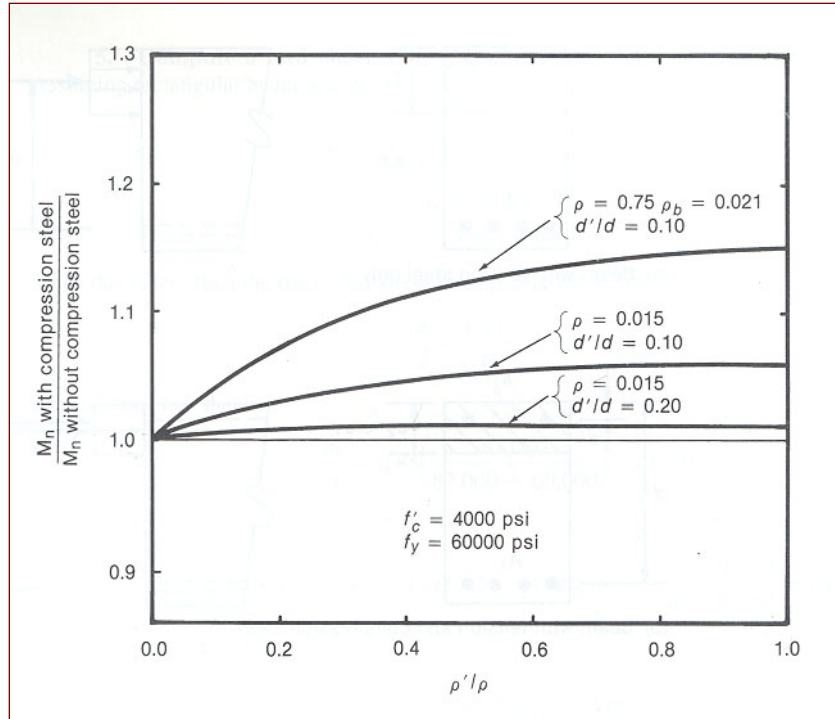


Figura 4-42 Incremento en la capacidad de momento debido al refuerzo de compresión.

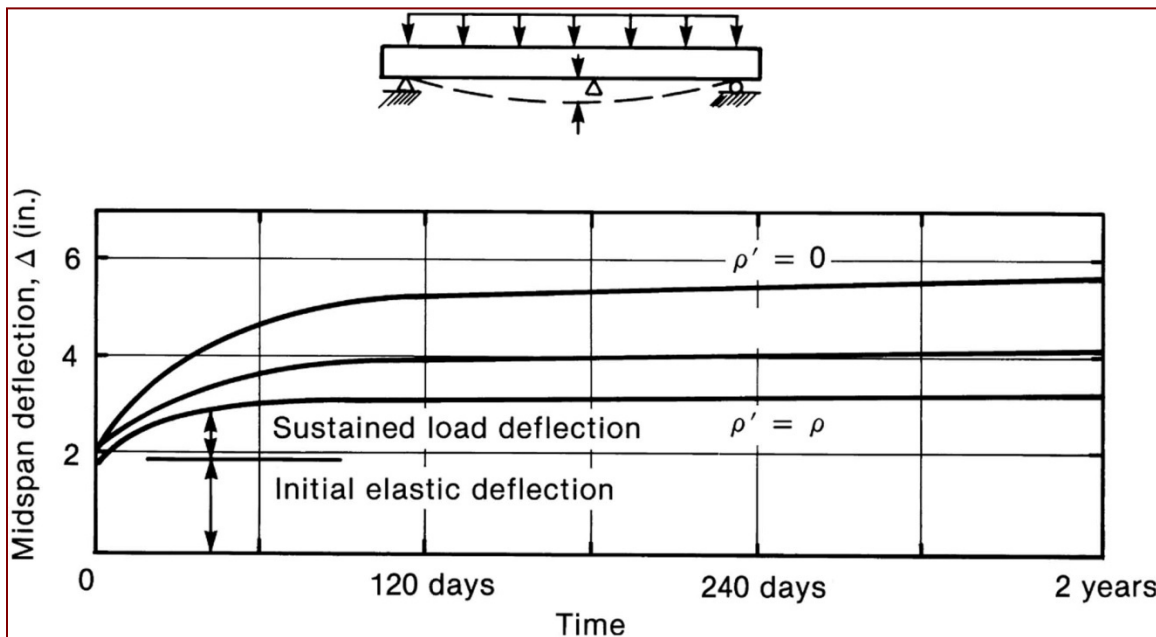


Figura 4-43 Efecto del refuerzo de compresión sobre las deflexiones debidas a cargas sostenidas. (Tomado de Washa & Fluck, 1952).

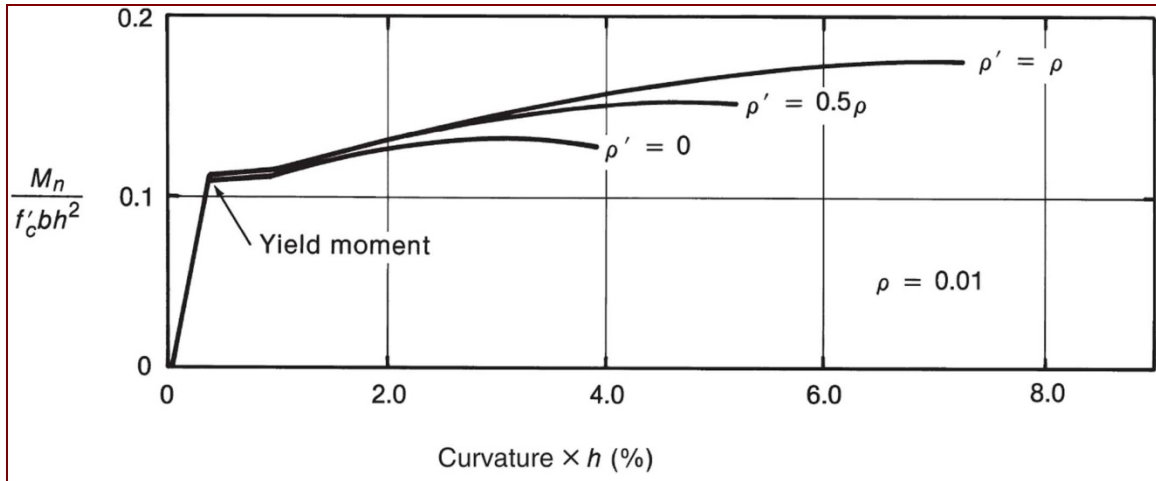


Figura 4-44 Efecto del refuerzo de compresión sobre la resistencia y la ductilidad de vigas sub-reforzadas. $\rho < \rho_b$. (Tomado de Cohn & Ghosh, 1972)

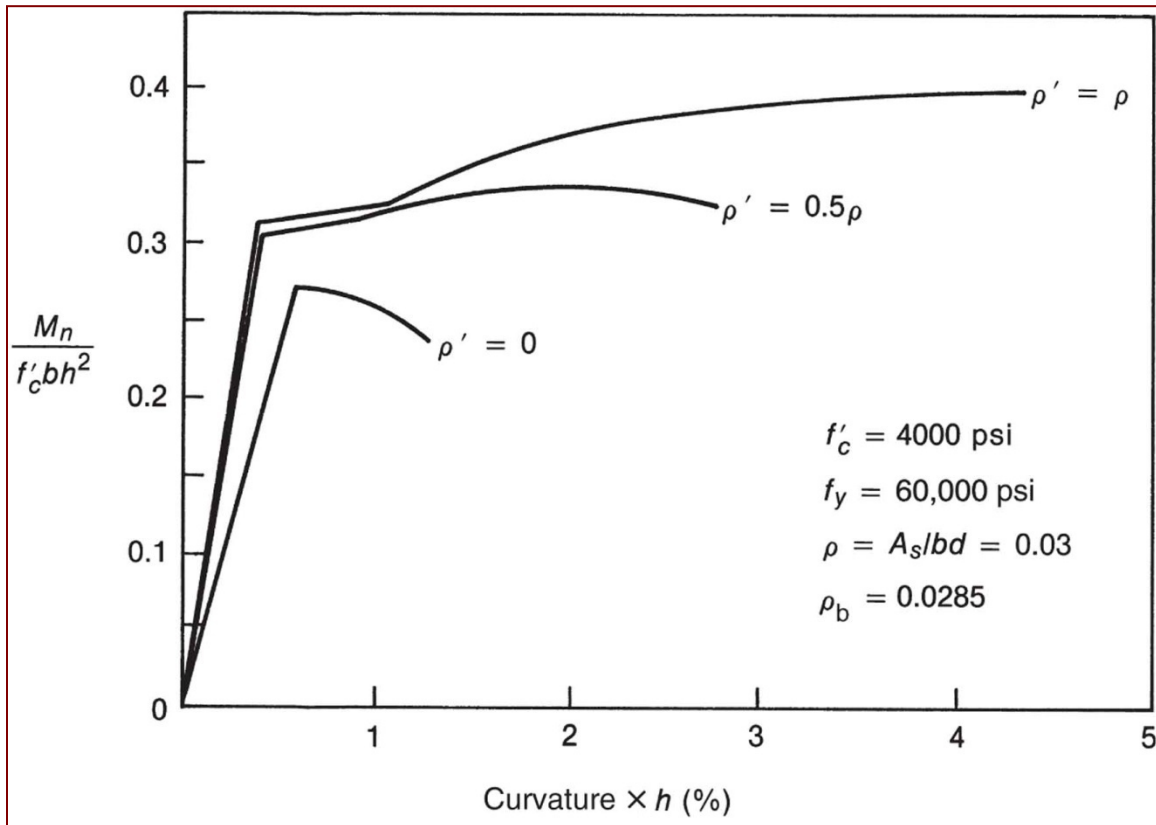


Figura 4-45 Diagramas de momento curvatura para vigas con $\rho > \rho_b$, con y sin refuerzo de compresión. (Tomado de Cohn & Ghosh, 1972)

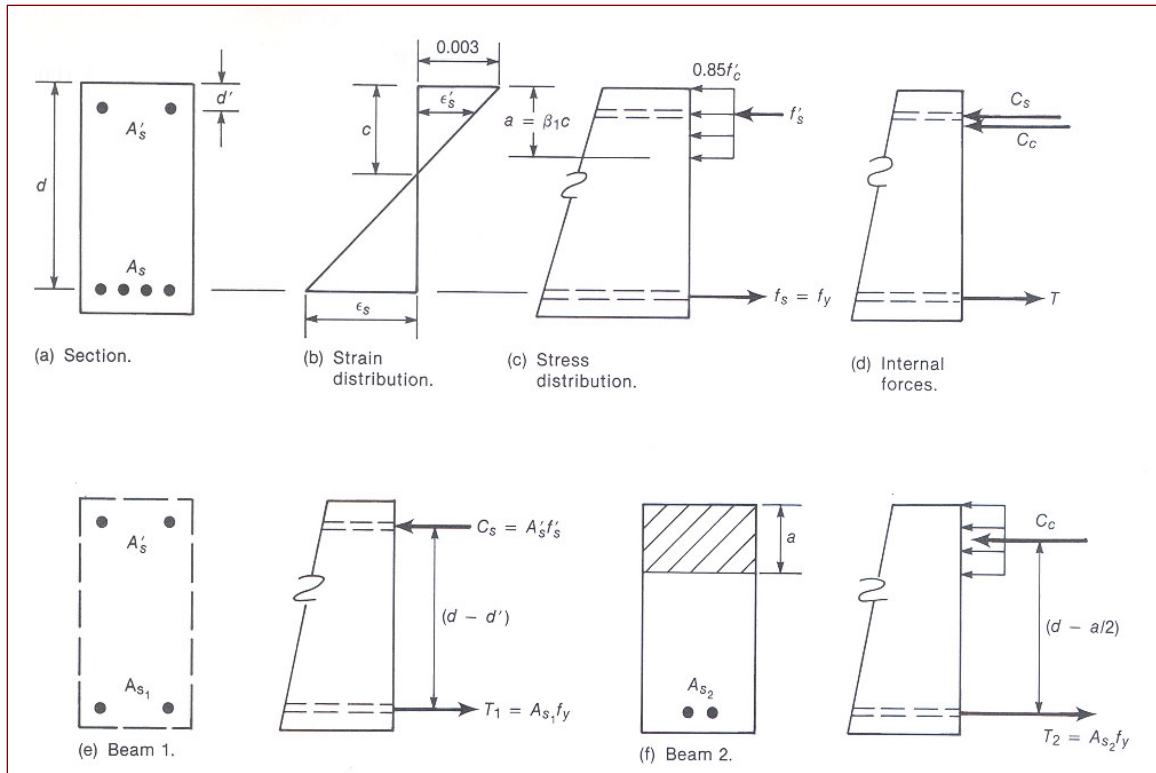


Figura 4-46 Deformaciones unitarias, esfuerzos y fuerzas en una viga con refuerzo de compresión.

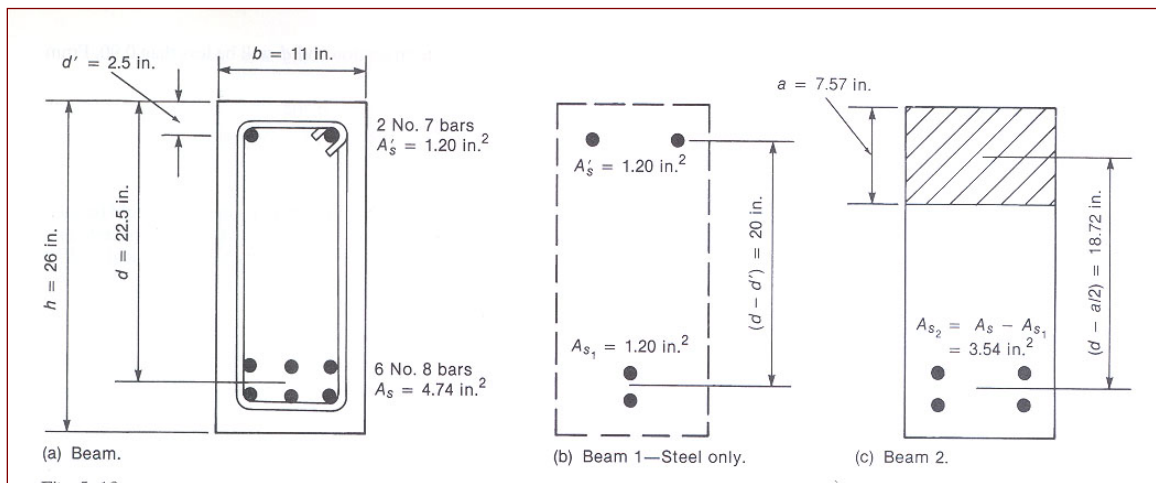


Figura 4-47 Ejemplo 4-13.

5. CORTANTE EN VIGAS

5.1 Introducción y teoría básica.

Las vigas resisten cargas primordialmente mediante momentos M y cortantes V internos, tal como se muestra en la figura 5-1. En el diseño de un elemento de concreto reforzado, la primera consideración es la *flexión*. A partir de esta consideración, las escogencias de un tamaño de la sección transversal y un arreglo de barras de refuerzo son hechas con el fin de garantizar el necesario momento resistente. La cantidad de refuerzo así determinada es limitada de forma tal que si la falla fuera a ocurrir, la misma se daría de forma gradual. Posteriormente, la viga es proporcionada para resistir *cortante*. En vista de que la falla por cortante es frágil y repentina, como se puede ver en la figura 5-2, el diseño para cortante debe garantizar que la resistencia provista sea igual o superior a la resistencia a falla por flexión en todas las secciones de la viga.

La manera en que pueden ocurrir las fallas por cortante varía ampliamente dependiendo de las dimensiones, geometría, sollicitación, y propiedades de los elementos. Por esta razón se dice que no existe una manera única de diseñar para cortante. Consideraremos aquí la fuerza interna de cortante, V , en vigas relativamente esbeltas y en general el efecto del cortante sobre el comportamiento y la resistencia de las vigas. No consideraremos zapatas y losas en dos direcciones. Estos elementos tienden a desarrollar fallas alrededor del perímetro de las columnas. Esto conduce a fallas en las cuales la columna y una parte del concreto de la losa perforan el entrepiso. El plano de falla en este caso es inclinado, formándose así un prisma truncado invertido alrededor de la columna. Tampoco consideraremos ménsulas. Las ménsulas son elementos cortos y profundos que se sirven para transmitir fuerzas de cortante. El cortante es transferido al apoyo mediante compresión (como una armadura).

En primera instancia se considera el comportamiento de elementos sometidos a sollicitaciones estáticas. Para consideraciones de diseño sísmico, es necesario considerar el [Capítulo 21 del ACI 318S-08](#).

5.1.1 Esfuerzos en vigas elásticas no-agrietadas

Sabemos que $V = dM/dx$ implica que existe cortante (fuerzas y por tanto esfuerzos) en aquellas zonas en que el momento cambia. Haciendo uso de la teoría tradicional para vigas *homogéneas, elásticas y no-agrietadas*, es posible calcular los esfuerzos de cortante v , en cualquier elemento arbitrario, tal como se muestra en la figura 5-3a, usando la ecuación:

$$v = \frac{VQ}{Ib} \quad (5-1)$$

en donde,

- $V =$ Fuerza de cortante en la sección transversal
 $I =$ Momento de inercia de la sección transversal
 $Q =$ Primer momento de área alrededor del eje neutro de la porción de la sección transversal más alejada de este eje con respecto al punto para el cual se calculan los esfuerzos
 $b =$ Ancho de la sección en donde se calculan los esfuerzos

En la figura 5-3a, se puede notar que los esfuerzos de cortante son iguales en caras concurrentes de un mismo bloque. Los esfuerzos de cortante horizontales son importantes en el diseño de las juntas de construcción, de las uniones de alma y ala en vigas T o en las regiones adyacentes a ductos y perforaciones en vigas. Una *viga rectangular no-agrietada* genera una distribución de esfuerzos de cortante como la mostrada en la figura 5-3b.

Los elementos en la figura 5-3a están sujetos a esfuerzos combinados normales debidos a flexión f , y de cortante v . Los esfuerzos normales mayor y menor que actúan en el elemento se denominan *esfuerzos principales*. Los esfuerzos principales y los planos en los cuales actúan pueden ser encontrados usando el círculo de Mohr para esfuerzos. La orientación de los esfuerzos principales en los elementos de la figura 5-3a se muestran en la figura 5-3c.

Las superficies sobre las cuales actúan los esfuerzos principales de tracción en la *viga no-agrietada* se pueden ver en la figura 5-4a. Estas superficies o *trayectorias de esfuerzos* son muy inclinadas en la base de la viga pero horizontales en la parte superior de la viga. Esto concuerda con la orientación de los elementos mostrados en la figura 5-3c. Como el concreto se agrieta cuando los esfuerzos principales de tracción exceden la resistencia a la tracción, el patrón inicial de grietas deberá semejar la red de líneas mostrada en la figura 5-4a.

En la figura 5-4b se muestra el patrón de grietas en una viga experimental. Se pueden observar dos tipos de grietas. Las grietas verticales ocurren primero, debidas a los esfuerzos de flexión. Estas empiezan en la base de la viga y en donde los esfuerzos de flexión son mayores. Las grietas inclinadas en los extremos de la viga se deben al efecto combinado de flexión y cortante. A estas grietas se les denomina *grietas inclinadas*, *grietas de cortante*, o *grietas de tracción diagonal*. Este tipo de grietas aparecen cuando la viga va a fallar en cortante. Algunas de las grietas se han extendido a lo largo del refuerzo longitudinal en dirección hacia el apoyo, debilitando el anclaje del refuerzo.

Aún cuando hay una similitud entre los planos de esfuerzos principales máximos de tracción y el patrón de agrietamiento, esta relación no es de ninguna manera perfecta. En vigas de concreto reforzado, las grietas de flexión ocurren generalmente antes de que los esfuerzos principales de tracción en el eje neutro sean críticos. Una vez que se forma tal grieta, el esfuerzo de tracción a través de la grieta se hace cero. Para mantener equilibrio, es necesario que ocurra una gran redistribución de esfuerzos. Como resultado, no se puede predecir la formación de una grieta inclinada en una viga a partir del estudio de esfuerzos principales a menos de que el agrietamiento por cortante ocurra antes que el

debido a flexión. Esto ocurre muy rara vez en concreto reforzado pero sí puede ocurrir en algunas vigas preesforzadas.

5.1.2 Esfuerzo cortante promedio entre grietas

La fase inicial de agrietamiento resulta generalmente en grietas verticales, las cuales ante incremento de carga se extienden diagonalmente como se muestra en la figura 5-4b. El equilibrio de una sección de viga entre dos grietas consecutivas puede expresarse de la siguiente manera (figura 5-5b):

$$T = \frac{M}{jd} \quad \text{y} \quad T + \Delta T = \frac{M + \Delta M}{jd} \quad (5-2)$$

Por lo tanto, $\Delta T = \Delta M / jd$, pero $\Delta M = V \Delta x \Rightarrow \Delta T = V \Delta x / jd$

Si aislamos la zona achurada de la figura 5-5b, la fuerza ΔT debe ser transmitida por medio de los esfuerzos cortantes horizontales presentes en la parte superior del elemento, según se muestra en la figura 5-5c. El valor promedio de estos esfuerzos es

$$v = \frac{\Delta T}{b_w \Delta x} = \frac{V}{b_w jd} \quad (5-3)$$

en donde $jd \approx 0.875d$ y b_w es el espesor del alma. La figura 5-5d muestra la distribución del esfuerzo de cortante horizontal promedio. Como los esfuerzos de cortante verticales son iguales a los horizontales para un mismo elemento, la figura 5-5d muestra también la distribución del esfuerzo vertical promedio. Esto refleja que aproximadamente 30% del esfuerzo cortante se transfiere en la zona de compresión. El resto se transfiere a través de la grieta. H. Taylor en 1970 basado en pruebas sobre vigas sin refuerzo en el alma, concluye que la distribución es:

- 25 % en zona de compresión
- 25 % acción de dovela del refuerzo de tracción
- 50 % entramamiento del agregado a través de la grieta

El procedimiento de diseño propuesto por ACI 318S-08 aproxima la ecuación anterior eliminando j :

$$v = \frac{V}{b_w d} \quad (5-4)$$

5.1.3 Acción de viga y acción de arco

La ecuación (5-4) se fundamenta en dos suposiciones básicas, viga prismática y jd constante. Sin embargo, la relación entre cortante y fuerza en las barras puede reformularse de la siguiente manera

$$V = \frac{d(Tjd)}{dx} \quad (5-5)$$

$$V = \frac{d(T)}{dx} jd + \frac{d(jd)}{dx} T \quad (5-6)$$

A partir de esta reformulación podemos visualizar dos casos extremos:

1) jd constante como en la teoría de viga elástica:

$\frac{d(jd)}{dx} = 0$ y entonces $V = \frac{d(T)}{dx} jd$ en donde $\frac{d(T)}{dx}$ es el *flujo de cortante* a través del plano horizontal entre el refuerzo de tracción y la zona de compresión mostrado en la figura 5-5c. Si este flujo de cortante existe, entonces se puede afirmar que existe *acción de viga*.

2) $\frac{d(T)}{dx} = 0$ (el flujo de cortante es cero) $\therefore V = T \frac{d(jd)}{dx}$

Esto ocurre si el flujo de cortante no puede ser transmitido debido a que el acero longitudinal está “suelto,” o bien si la transferencia del flujo de cortante es impedida por una grieta que se extienda desde la carga hasta las reacciones. En este caso el cortante es transferido por *acción de arco* en vez de acción de viga, tal como se muestra en la figura 5-6. Aquí C y T son constantes en el tramo de cortante (*shear span*).

5.1.4 Refuerzo a cortante

La figura 5-7a muestra como la grieta de flexión se minimiza con refuerzo longitudinal. Sin embargo, la grieta de cortante es inclinada y por tanto, se requiere de una combinación de refuerzo longitudinal en conjunto con refuerzo inclinado o bien en conjunto con refuerzo transversal para restringir la apertura de la grieta. Ver figura 5-7b. Al refuerzo inclinado o vertical se le denomina *refuerzo a cortante* o *refuerzo en el alma* y puede ser provisto mediante estribos o aros alrededor del perímetro de la sección transversal de la viga, como se muestra en las figuras 5-7c o 5-7d.

En Costa Rica se usan estribos verticales casi exclusivamente. No pueden usarse estribos inclinados cuando existe la posibilidad de reversión del cortante. Por lo tanto, el refuerzo de cortante para zonas de sismicidad de moderada a alta debe ser vertical.

5.2 Comportamiento de vigas durante la falla en cortante

El comportamiento de las vigas durante la falla en cortante varía enormemente dependiendo de las contribuciones relativas provenientes de *acción de viga* y de *acción de arco* y de la cantidad de refuerzo de cortante.

5.2.1 Comportamiento de vigas sin refuerzo en el alma

Las figuras 5-8b y c muestran los momentos y cortantes durante agrietamiento inclinado y falla de vigas rectangulares sin refuerzo en el alma. Los momentos y cortantes se presentan como función de a/d , denominada la *razón de tramo de cortante*, en donde a es la longitud del tramo de cortante y d es el *peralte* de la viga. Para d constante, a varía desde 0 hasta $a > 6.5d$. La sección transversal de la viga se mantiene constante mientras varía su luz. El máximo momento (y su cortante asociado) que puede ser desarrollado en la viga corresponde al valor M_n que aparece como una línea horizontal en la figura 5-8b. Las zonas achuradas muestran la reducción en la resistencia debido a la acción del cortante. El refuerzo de cortante se utiliza entonces para garantizar que la viga alcance su capacidad total a flexión, M_n .

A partir del análisis del gráfico de la figura 5-8b, el tramo de cortante puede ser dividido en cuatro tipos:

- | | | |
|----------------|---|-----------------|
| 1- muy corto | } | vigas profundas |
| 2- corto | | |
| 3- esbelto | | |
| 4- muy esbelto | | |

Tramos de cortante muy cortos ($0 < a/d < 1$) generan grietas inclinadas que unen el punto de aplicación de la carga con el apoyo. Estas grietas en efecto destruyen el flujo de cortante del refuerzo longitudinal a la zona de compresión y por tanto el comportamiento cambia de *acción de viga* a *acción de arco* como se puede ver en las figuras 5-6 y 5-9. Aquí el refuerzo longitudinal hace las veces de tensor del arco que transmite una fuerza de tracción constante entre apoyos. (Normalmente la falla se da por carencia de anclaje en los apoyos).

Tramos de cortante cortos ($1 < a/d < 2.5$) desarrollan grietas inclinadas y luego de una redistribución de fuerzas internas pueden volver a tomar carga adicional, en parte por *acción de arco*. La falla final de estas vigas proviene de falla de adherencia, *falla por fracturamiento*, o *falla de dovela* a lo largo del refuerzo longitudinal, como se ve en la figura 5-10a, o por *aplastamiento en la zona de compresión* encima de la grieta como se muestra en la figura 5-10b. A este último tipo de falla se le denomina también *falla por cortante-compresión*. Debido a que la grieta inclinada se extiende más arriba que la grieta de flexión, la falla mencionada ocurre a una capacidad menor que la de flexión.

Tramos de cortante esbeltos ($2.5 < a/d < 6$) la grieta inclinada interrumpe el equilibrio de tal forma que la viga falla para ese nivel de carga, como se puede ver en la figura 5-8b.

Tramos de cortante muy esbeltos ($a/d > 6$) la viga falla en flexión antes de que se generen grietas inclinadas.

Es importante notar que para vigas cortas o muy cortas, una gran porción de la capacidad de carga disponible después de la formación de grieta inclinada se debe a la transferencia

de la carga mediante puntales de compresión como se muestra en la figura 5-9. Si la viga no está cargada arriba y apoyada abajo de la manera mostrada, estos puntales de compresión no funcionan y la falla ocurre al nivel de carga de grieta inclinada.

Para el ejemplo mostrado, $M = Va$ y por lo tanto la curva en la figura 5-8b puede ser reformulada como se presenta en la figura 5-8c. El cortante correspondiente a la falla por flexión es el de la curva superior. Si no se utilizan estribos, la viga fallará ante un cortante igual al de la curva denominada “falla por cortante.” Nótese que la misma es casi constante para a/d mayor que 2. Nuevamente, el área achurada representa la pérdida de capacidad de la viga debido al cortante. También se puede notar que las cargas de grieta inclinada para caso corto y caso esbelto son aproximadamente constantes. Esto se utiliza en diseño cuando se ignora a/d en las ecuaciones para cortante en agrietamiento inclinado. En el caso de vigas esbeltas, el agrietamiento inclinado causa falla inmediata si no hay refuerzo en el alma. Para vigas muy esbeltas, el cortante necesario para formar la grieta inclinada excede el cortante correspondiente a la falla de flexión y la viga fallará en flexión antes de que ocurra la grieta inclinada.

5.2.2 Regiones B y D

Del análisis anterior se puede notar que en vigas ocurre un cambio importante cuando la razón de tramo de cortante a/d es aproximadamente 2 o 2.5. Tramos de cortante largos acarrear las cargas mediante *acción de viga* y son denominados regiones B (B de Bernoulli). Tramos de cortante cortos acarrear las cargas mediante *acción de arco* —fuerzas en el plano— y son denominadas regiones D (D de discontinuidad).

Usando el principio de Saint Venant (fuerzas, reacciones y otras perturbaciones se disipan en una longitud igual al peralte de la viga) se pueden asignar como regiones D a todos los puntos de perturbación y B a los restantes, como se muestra en la figura 5-11.

En general, la *acción de arco* mejora la resistencia de una sección. En consecuencia las regiones B tienden a ser más débiles que las D. Si un tramo de cortante consiste enteramente de regiones D que se unen o se traslapan, como se muestra en la figura 5-11a, su comportamiento es regido por acción de arco. De esta manera se puede explicar la mayor resistencia a cortante cuando a/d es menor que 2.

Para tramos de cortante más grandes, tal como el extremo derecho de la viga de la figura 5-11a, la resistencia al cortante está regida por comportamiento de región B y es relativamente constante, tal como se indica en la figura 5-8c. Se hablará únicamente de elementos con regiones B.

5.2.3 Agrietamiento inclinado

Este tipo de grietas se presentan antes de que se produzca la falla por cortante. Se forman de dos maneras diferentes, como se puede ver en la figura 5-12. En vigas I de alma delgada en las cuales a/d es pequeña, los esfuerzos de cortante en el alma son muy altos mientras que los esfuerzos de flexión son bajos. En algunos casos extremos y en algunas

vigas preesforzadas, el esfuerzo principal en el eje neutro excede a los del ala inferior. En estos casos se desarrolla una *grieta de cortante en el alma* (figura 5-12a). (El cortante para grieta inclinada se puede calcular como el cortante necesario para que se desarrolle un esfuerzo principal de tracción igual a la resistencia del concreto a la tracción en el centroide de la viga).

Sin embargo, en la mayoría de los casos, las grietas de flexión ocurren primero y se extienden en forma casi vertical, como se puede ver en la figura 5-4b. Estas grietas alteran el estado de esfuerzos en la viga causando una concentración de esfuerzos cerca de la punta de la grieta. Más adelante, las grietas de flexión se extienden llegando a conformarse en *grietas de flexión-cortante* (figura 5-12b) (se desarrollan encima de las grietas de flexión iniciales). Como se dijo anteriormente, este tipo de grietas no se pueden predecir mediante el estudio de la distribución de esfuerzos principales en la viga no-agrietada. Por esta razón, ha sido necesario desarrollar ecuaciones empíricas para calcular la carga para la cual se generan *grietas de flexión-cortante*.

5.2.4 Fuerzas internas en una viga sin estribos

La figura 5-13 muestra el mecanismo de transferencia de fuerzas de cortante a través de una grieta inclinada. En esta figura,

- V_{cy} = Cortante en la zona de compresión
- V_{ay} = Componente vertical del cortante transferido a través de la grieta inclinada (entramamiento del agregado)
- V_d = Cortante debido a acción de dovela del refuerzo longitudinal.

En este caso, se tiene que $V_{ay} + V_d$ suman del 40% al 60% del cortante transferido.

Considerando el bloque D-E-F inferior, se puede ver que, por equilibrio de momentos alrededor del punto E,

$$V_d L_1 + V_{ay} L_2 + V_{ax} L_3 = C'_1 L_4$$

$$\Rightarrow C'_1 \text{ existe y es igual a } \frac{V_d L_1 + V_{ay} L_2 + V_{ax} L_3}{L_4}$$

Además, por equilibrio de fuerzas horizontales en la sección A-B-D-E resulta que

$$T_1 = C_1 + C'_1 \quad (5-7)$$

Esto implica que ambas fuerzas T_1 y $C_1 + C'_1$ equilibran el momento externo M en la sección transversal A-B-D-E.

Conforme la grieta inclinada se ensancha, V_a decrece y por lo tanto se incrementa la fracción del cortante resistida por V_{cy} y V_d . El cortante por acción de dovela V_d causa falla

por fracturamiento a lo largo del refuerzo. Cuando V_a y V_d desaparecen (ensanchamiento de la grieta inclinada y fracturamiento de dovela) también desaparecen V_{cy}' y C_I' .

En ese momento, todo el cortante y la compresión son transmitidos por la sección A-B encima de la grieta. Esto causa aplastamiento en esa zona. Además, si $C_I' = 0$, $T_2 = T_1 \Rightarrow T_2 = C_I$. En otras palabras, la grieta inclinada causa que el momento resistido en la sección A-B-D-E dependa de la fuerza de tracción en el punto C (es decir T_2). Esto debe ser considerado a la hora de definir los puntos de corte de las barras de refuerzo y también al momento de anclar las barras.

5.2.5 Factores que afectan la resistencia al cortante en vigas sin refuerzo en alma

La capacidad de cortante de estos elementos es igual al cortante transmitido a través de la grieta inclinada. La *carga de grieta inclinada* se ve afectada por cinco factores principales, algunos de los cuales no se toman en cuenta en diseño. Estos son:

a) Resistencia a la tracción en el concreto.

El estado biaxial de esfuerzos principales es asociado con la prueba del cilindro a tracción. El hecho de que se generen grietas de flexión cambia la situación, ya que en ese momento el problema deja de ser elástico. Por esta razón, la grieta inclinada se da cuando se alcanza un esfuerzo de tracción de, a lo sumo, un tercio del esfuerzo máximo de concreto a tracción. Esto es, $\sigma_I = \alpha f_{ct}$, en donde σ_I es el esfuerzo principal de tracción.

b) Razón de refuerzo longitudinal, $\rho_w = A_s/b_w d$.

De la figura 5-14, para vigas simplemente apoyadas y sin refuerzo de cortante, el rango de utilidad es $0.0075 \leq \rho_w \leq 0.025$ en el cual se puede considerar

$$V_c = 0.53\lambda\sqrt{f'_c}b_w d$$

ACI 318-08 Ec. 11-3

Esta ecuación sobreestima V_c para ρ_w muy bajos. En estos casos, las grietas de flexión se extienden muy arriba y se ensanchan más de lo que sucede cuando ρ_w es más grande. Como resultado, las grietas inclinadas ocurren más temprano.

c) Razón de tramo de cortante a peralte, a/d .

Este cociente (o bien M/Vd) tiene efecto para $a/d \leq 2$. Tiene importancia para regiones D. Para regiones B, a/d tiene poco efecto sobre el cortante de grieta inclinada.

d) *Tamaño de la viga.*

Cuando el peralte de la viga aumenta, el esfuerzo de cortante en la grieta inclinada disminuye para f'_c , ρ_w y a/d dados. Conforme el peralte aumenta, el ancho de las grietas encima del refuerzo longitudinal tiende a crecer. Esto conduce a una disminución en el entrabamiento del agregado a través de la grieta en una fase más temprana. Collins & Mitchell lo citan en su texto *Prestressed Concrete Structures* (1991) como una conclusión sustentada experimentalmente:

$$\begin{aligned} \text{para } d = 60 \text{ cm} & \quad \rightarrow \quad V_u = 0.53\sqrt{f'_c}b_w d \\ d = 2 \text{ a } 3 \text{ m} & \quad \rightarrow \quad V_u = 0.27\sqrt{f'_c}b_w d \end{aligned}$$

e) *Fuerzas axiales.*

Las fuerzas axiales de tracción tienden a disminuir la capacidad de carga de grieta inclinada. Fuerzas axiales de compresión tenderán a incrementarla. Conforme aumenta la fuerza axial de compresión, se retarda el inicio de las grietas de flexión y además se retarda también su propagación hacia arriba en la viga. En consecuencia, se requiere mayor cortante para causar esfuerzos principales de tracción iguales a la resistencia a tracción del concreto. Esto se cumple a medias para una viga pre-esforzada. El inicio de la grieta de flexión es retardado por el pre-esfuerzo, pero una vez iniciada, la grieta penetra a la misma altura que en una viga normal de similares características. El incremento en la *carga de grieta inclinada* para una viga pre-esforzada se debe en gran parte al retardo en el agrietamiento de flexión. La figura 5-15 muestra una interpretación de lo propuesto por ACI 318S-08 para la consideración del efecto de la fuerza axial.

5.2.6 Comportamiento de vigas con refuerzo en el alma

El refuerzo de cortante se utiliza para asegurar que la viga desarrolle su capacidad total a la flexión. Como el concreto se agrieta con deformaciones unitarias muy bajas, entonces el acero no alcanza esfuerzos superiores a 420 kg/cm^2 . Por lo tanto, los estribos no evitan la formación de grietas inclinadas. Más bien, empiezan a trabajar únicamente hasta que las mismas se formen. La figura 5-16 muestra las fuerzas que intervienen en una viga con refuerzo de estribos y una grieta inclinada. La terminología usada aquí es la misma de antes (ver figura 5-13) con la adición de V_s como el cortante transferido por tracción en los estribos. Como V_s actúa siempre, entonces C'_1 y V'_{cz} no desaparecen como en el caso anterior. Esto implica que $T_2 < T_1$ y la diferencia dependerá de la cantidad de estribos emplazados.

El historial de la aplicación de la carga puede verse en la figura 5-17. Antes de que ocurra la grieta de flexión, todo el cortante es resistido por el concreto. Después de la aparición de la grieta de flexión y hasta la aparición de la grieta inclinada, la demanda de cortante es resistida por V_{cz} , V_{ay} y V_d . Cuando los estribos fluyen, V_s se vuelve constante y además

las grietas inclinadas se ensanchan más rápidamente. Como consecuencia, V_{ay} decrece obligando a V_d y V_{cz} a tomar una porción mayor de la demanda de cortante. Esto conduce a la falla, ya sea por *fracturamiento* o bien por *aplastamiento en la zona de compresión*.

Las contribuciones de todos los componentes resultan frágiles a excepción de la proveniente de los estribos, V_s . Por esto, tomamos

$$V_c = V_d + V_{cz} + V_{ay} \quad (5-8)$$

Y de allí, podemos definir la capacidad nominal a resistir cortante como

$$V_n = V_c + V_s \quad (5-9)$$

Podemos por tanto considerar V_c como el trazo denotado *grieta inclinada y falla* en la figura 5-8c para el rango $2.5 < a/d < 6.5$.

5.3 Análisis y diseño de vigas de R/C ante cortante (ACI)

En la norma ACI la ecuación básica de diseño para la capacidad a cortante de una viga esbelta (vigas con tramos de cortante que contienen regiones B) es

$$\phi V_n \geq V_u \quad \text{ACI 318-08 Ec. 11-1}$$

en donde V_u es la demanda de cortante debida a las cargas factorizadas, ϕ es el factor de reducción de resistencia, tomado igual a 0.75 para cortante y V_n es la capacidad nominal, expresado como

$$V_n = V_c + V_s \quad \text{ACI 318-08 Ec. 11-2}$$

donde V_c representa el cortante tomado por el concreto y V_s es el cortante tomado por los estribos. Definimos una falla por cortante cuando se alcanza alguno de los estados límites descritos en la sección presentada a continuación.

5.3.1 Estados límite de falla de cortante: Vigas sin refuerzo en el alma

ACI propone dos formas de cálculo para estimar el cortante tomado por el concreto. La primera forma fue introducida a la normativa en 1962.

$$V_c = \left(0.50\lambda\sqrt{f'_c} + 176\rho_w \frac{V_u d}{M_u} \right) b_w d \quad \text{ACI 318-08 Ec. 11-5}$$

Notando que $176\rho_w \frac{V_u d}{M_u} \approx 0.03\sqrt{f'_c}$, se tiene que para rangos normales

$$V_c = 0.53\lambda\sqrt{f'_c}b_w d \quad \text{ACI 318-08 Ec. 11-3}$$

Para cuando hay presencia de cargas axiales, se tiene, para compresión axial

$$V_c = 0.53\left(1 + \frac{N_u}{140A_g}\right)\lambda\sqrt{f'_c}b_w d \quad \text{ACI 318-08 Ec. 11-4}$$

Para tracción axial

$$V_c = 0.53\left(1 + \frac{N_u}{35A_g}\right)\lambda\sqrt{f'_c}b_w d \quad \text{ACI 318-08 Ec. 11-8}$$

En ambas ecuaciones N_u es positivo a compresión y $\sqrt{f'_c}$, N_u/A_g , 35 y 140 tienen unidades kg/cm^2 .

5.3.2 Estados límite de falla de cortante: Vigas con refuerzo en el alma

1. Falla debida a fluencia de los estribos.

La grieta en el concreto se toma como de 45° lo cual indica que su proyección longitudinal es d . Ver figura 5-19a, cuerpo libre de porción entre el extremo de la viga y la grieta inclinada. Tomando s como el espaciamiento entre estribos, el número de estribos que cruzan la grieta es $n = d/s$. Suponiendo que todos fluyen, tenemos

$$V_s = \frac{A_v f_{yt} d}{s} \quad \text{ACI 318-08 Ec. 11-15}$$

Si la grieta tiene un ángulo de inclinación α

$$V_s = A_v f_{yt} (\sin \alpha + \cos \alpha) \frac{d}{s} \quad \text{ACI 318-08 Ec. 11-16}$$

Si $V_u > \phi V_c$, se ponen estribos con lo cual $\phi V_s \geq V_u - \phi V_c$ o bien

$$V_s \geq \frac{V_u}{\phi} - V_c \quad (5-10)$$

$$s = \frac{A_v f_{yt} d}{V_u / \phi - V_c} \quad (5-11)$$

La ecuación anterior define el espaciamiento para estribos verticales. Si los estribos no atraviesan las grietas de tracción diagonal no pueden actuar. El **Artículo 11.4.5.1 del ACI 318S-08** da un espaciamiento máximo de estribos como el menor de $d/2$ o 60 cm. Ver figura 5-20a.

Si $V_u/\phi - V_c = V_s > 1.1\sqrt{f'_c}b_w d$, entonces s_{\max} se reduce a la mitad de lo anunciado anteriormente: $d/4$ o 30 cm para estribos verticales.

En la figura 5-21 se muestra la necesidad de usar estribos de más de 2 brazos en vigas anchas.

2. Falla de cortante iniciada por falla de anclaje en estribos.

La grieta de tracción diagonal se aproxima mucho a la zona de compresión del concreto. Por esta razón el tramo de anclaje de los estribos se reduce mucho allí. El **Artículo 12.13.1 del ACI 318S-08** pide extensión de los mismos, tanto como sea posible sin comprometer el recubrimiento o el espaciamiento en refuerzo longitudinal (tracción y compresión). Ver figuras 5-21 y 5-22.

En la figura 5-23 se ilustran los requisitos de ACI 318S-08 para anclaje de estribos.

El **Artículo 11.4.2** limita el f_y máximo para estribos: 4200 kg/cm² para evitar grietas producidas por doblar los estribos de aceros de alta resistencia.

Se puede incluso recomendar Grado 40 para estribos como garantes de mejor comportamiento. (Menor anclaje para que fluya).

3. Falla por funcionalidad debida a ancho de grietas excesivo ante cargas de servicio.

El **Artículo 11.4.7.9** pide

$$V_{s,\max} = 2.12\sqrt{f'_c}b_w d \quad (5-12)$$

Para una viga con $V_{s(\max)}, f_s = 2390$ kg/cm² en el estribo y las grietas correspondientes serán de 0.036 cm.

4. Falla de cortante debido a aplastamiento del alma. (Compresión diagonal)

En vigas de alma muy delgada, los esfuerzos de compresión diagonal pueden conducir a falla por aplastamiento. Como el esfuerzo diagonal de compresión esta relacionado con el esfuerzo de cortante, v , algunos códigos limitan el esfuerzo cortante último a 0.20 o 0.25 veces la resistencia de compresión del concreto. El requisito impuesto por la norma ACI 318S-08 limitando V_s para control de grietas de manera que $V_{s,\max} = 2.12\sqrt{f'_c}b_w d$, provee

suficiente margen de seguridad contra el aplastamiento del alma en vigas de concreto reforzado.

5. *Falla de cortante iniciada por falla de la cuerda de tracción.*

El ACI 318S-08 en su [Artículo 12.10.3](#) pide extender el refuerzo longitudinal una distancia igual a d o 12 diámetros de barra de refuerzo después del punto en el cual éste ya no es necesario.

5.3.3 Refuerzo mínimo en el alma

El ACI 318-08 en su [Artículo 11.4.6.1](#) dice que si $V_u > \phi (1/2V_c)$ se debe usar refuerzo de cortante excepto en:

1. Losas y zapatas
2. Cerchas de concreto
3. Vigas con $h < [25, 2.5h_f, 1/2b_w]$ (el mayor), h en cm.

El [Artículo 7.13.2.4](#) del ACI 318-08 requiere estribos cerrados (aros) o bien ganchos de 135° para vigas de perímetro (borde).

$$A_{v,\min} = \max \left[0.2 \sqrt{f'_c} \frac{b_w s}{f_{yt}}, \frac{3.5 b_w s}{f_{yt}} \right] \quad \text{ACI 318-08 Ec. 11-13}$$

Para $f'_c > 700 \text{ kg/cm}^2$, $\sqrt{f'_c} = 26.5 \text{ kg/cm}^2$ a menos de que se cumpla con las disposiciones de refuerzo mínimo en el alma descritas en [11.4.5.3](#), [11.4.6.3](#) o [11.5.5.2](#).

Para zonas con sismicidad de moderada a alta (Zonas 3 y 4 del CSCR-2002) se requiere refuerzo de cortante en todas las vigas, aun para el caso de vigas no designadas como parte del sistema de resistencia ante fuerzas sísmicas (ver el [Inciso 21.13.3.1 del ACI 318S-08](#)).

5.3.4 Factor de reducción de resistencia al cortante

De acuerdo con el [Artículo 9.3.2.3 del ACI 318S-08](#), el factor $\phi = 0.75$ para cortante y torsión. Para zonas con sismicidad de moderada a alta se usan factores ϕ especiales. Ver el [Artículo 9.3.4 del ACI 318S-08](#) en donde se discute el uso del valor $\phi = 0.60$.

5.3.5 Ubicación del cortante máximo para el diseño de vigas

Con base en la figura 5-24a se nota que las cargas aplicadas a una distancia d del apoyo serían transmitidas directamente al apoyo mediante compresión. Los esfuerzos en los estribos que cruzan las grietas mencionadas no se verán afectados por esas cargas. El ACI 318-08 en su [Artículo 11.1.3.1](#) dice que el cortante último V_u es igual al valor alcanzado a una distancia d del apoyo, para vigas no preesforzadas. Esto es aceptado si:

1. Reacción de apoyo brinda compresión a las regiones extremas mencionadas
2. No hay cargas concentradas en el tramo d .

5.3.6 Cortante al centro de vigas cargadas uniformemente

En un edificio normal, se suponen las cargas vivas y muertas como cargas uniformes. Aun cuando la carga muerta está presente siempre actuando sobre la luz entera, la carga viva puede actuar sobre toda la luz como se muestra en la figura 5-26c, o bien, sobre una parte de la luz, como se muestra en la figura 5-26d. Carga uniforme completa sobre la luz completa presenta el cortante máximo para los extremos de la viga. Carga uniforme completa sobre la mitad de la luz más carga muerta en la mitad restante presenta el cortante máximo en el centro de la viga. Los cortantes máximos en el resto de la viga pueden ser aproximados usando la envolvente de cortante que resulta de estos dos casos (figura 5-26e). El cortante en el centro de la viga debido a una carga viva uniforme aplicada sobre la mitad de la luz es

$$V_{u(\text{central})} = \frac{w_{Lu}\ell}{8} \quad (5-13)$$

Esto puede ser positivo o negativo. Aun cuando esto ha sido derivado para vigas simplemente apoyadas, se acepta aplicar la ecuación (5-13) a vigas continuas también.

Ejemplo 5-1 Diseño de estribos verticales para viga simplemente apoyada

Para una viga de sección **T** según la figura 5-26b con solicitación según la figura 5-26a, diseñe los estribos verticales. Usar $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$, para refuerzo longitudinal y $f_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$ para estribos.

1. Cálculo de diagrama de cortante factorizado.

Carga total mayorada:

$$w_u = 1.2 \times 2.0 \text{ Mg/m} + 1.6 \times 2.4 \text{ Mg/m} = 6.24 \text{ Mg/m}$$

Carga temporal mayorada:

$$w_{Lu} = 1.6 \times 2.4 \text{ Mg/m} = 3.84 \text{ Mg/m}$$

Tres condiciones de carga:

Por simplicidad podemos tomar $V_u = w_u \ell / 2$ en los extremos y $V_u = w_{Lu} \ell / 8$ en el centro.

Como $\phi V_n \geq V_u \Rightarrow V_n = \frac{V_u}{\phi}$. Esto está graficado en la figura 5-26f.

Como la viga está cargada en su parte superior y apoyada en la parte inferior, la sección crítica para cortante está ubicada a $d = 60$ cm del apoyo. Por lo tanto

$$\frac{V_u}{\phi} \text{ en } d = 37.5 \text{ Mg} - \frac{0.60 \text{ m}}{4.50 \text{ m}} (37.5 - 5.76) \text{ Mg} = 33.3 \text{ Mg}$$

$$V_n = \frac{V_u}{\phi} = 33.3 \text{ Mg}$$

2. ¿Se requieren estribos debidos a ACI 318S-08 Artículo 11.4.6.1?

Si $V_n \leq \frac{1}{2}V_c$ entonces solo se requieren estribos por acero transversal mínimo:

$$V_c = 0.53\sqrt{f'_c}b_w d = 0.53\sqrt{280} \times 30 \times 60/1000 = 16.0 \text{ Mg}$$

Como $(V_n = 33.3 \text{ Mg}) > (\frac{1}{2}V_c = \frac{1}{2} \times 16.0 = 8.0 \text{ Mg})$ entonces se requieren estribos.

3. Revisar el anclaje de los estribos y el espaciamiento máximo.

Usar #3 con doble brazo y $f_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$. $A_v = 2 \times 0.71 \text{ cm}^2 = 1.42 \text{ cm}^2$

- a. *Anclaje*: como estribo es de barra #3 (menor que # 6) ACI 318S-08 permite doblaje de 90° alrededor de la barra. Proveer 2 # 4 como barras longitudinales de anclaje pero para dobleces de 135° en estribos cerrados. (CSCR 2002)
- b. *Espaciamiento máximo*: Basados en el peralte de la viga, el Artículo 11.4.5.1 establece el espaciamiento máximo de $\frac{1}{2}d = \frac{1}{2} \times 60 \text{ cm} = 30 \text{ cm}$ o 60 cm .
 \therefore Usar $s_{\max} = 30 \text{ cm}$.

ACI 318-08 Artículo 11.4.5.3 requiere la mitad de ese espaciamiento si

$$V_n > V_c + 1.1\sqrt{f'_c}b_w d = 1.63\sqrt{f'_c}b_w d = 1.63\sqrt{280} \times 30 \times 60 \times 10^{-3} = 49.1 \text{ Mg}$$

Como $V_n < 49.1 \text{ Mg} \Rightarrow s_{\max} = 30 \text{ cm}$.

Basados en A_v mínimo (ACI 318S-08 Ec. 11-13)

$$A_{v,\min} = \max \left[0.2\sqrt{f'_c} \frac{b_w s}{f_{yt}}, 3.5 \frac{b_w s}{f_{yt}} \right] \Rightarrow s_{\max} = \min \left[\frac{A_v f_{yt}}{0.20\sqrt{f'_c} b_w}, \frac{A_v f_{yt}}{3.5 b_w} \right]$$

$$s_{\max} = \min \left[\frac{1.42 \times 2800}{0.2 \times \sqrt{280} \times 30} (= 39.6 \text{ cm}), \frac{1.42 \times 2800}{3.5 \times 30} (= 37.9 \text{ cm}) \right]$$

Sigue rigiendo $s_{\max} = 30 \text{ cm}$.

4. Cálculo de espaciamiento de estribos necesario para resistir fuerzas cortantes.

Para estribos verticales el requisito de resistencia obliga a una separación

$$s = \frac{A_v f_y d}{V_u / \phi - V_c}$$

A una distancia d del apoyo $V_u / \phi = 33.3 \text{ Mg}$ y $V_c = 16.0 \text{ Mg}$, por lo tanto

$$s = \frac{1.42 \times 2800 \times 60}{(33.3 - 16.0) \times 1000} = 13.8 \text{ cm}$$

Usar $s_1 = 15 \text{ cm}$ a una distancia d del apoyo. Como ésta es una distancia razonable, se pueden usar estribos cerrados #3. Pasar luego a $s_2 = 20 \text{ cm}$ cuando el cortante lo permita y luego a $s_3 = 30 \text{ cm}$ cuando el cortante lo permita.

Los espaciamientos intermedios quedan a discreción del diseñador. En general no más de 3 cambios, y en múltiplos de 5 o 7.5 cm.

Cálculo de $\frac{V_u}{\phi}$ donde $s = 20 \text{ cm}$

$$V_n = \frac{V_u}{\phi} = \frac{A_v f_y d}{s} + V_c$$

$$V_n = \frac{1.42 \times 2800 \times 60}{20} + 16000 = 27900 = 27.9 \text{ Mg}$$

$$x = \frac{37.5 - 27.9}{37.5 - 5.76} \times 4.5 = 1.36 \text{ m} = 136 \text{ cm del apoyo}$$

Cálculo de $\frac{V_u}{\phi}$ donde $s = 30 \text{ cm}$

$$V_n = \frac{V_u}{\phi} = \frac{A_v f_y d}{s} + V_c$$

$$V_n = \frac{1.42 \times 2800 \times 60}{30} + 16000 = 24000 = 24.0 \text{ Mg}$$

$$x = \frac{37.5 - 24.0}{37.5 - 5.76} \times 4.5 = 1.91 \text{ m} = 191 \text{ cm del apoyo}$$

Los estribos se deben continuar hasta que $\frac{V_u}{\phi} = \frac{1}{2} V_c = 8.0 \text{ Mg}$. Esto ocurre cuando

$$x = \frac{37.5 - 8.0}{37.5 - 5.76} \times 4.5 = 4.18 \text{ m} = 418 \text{ cm del apoyo}$$

En resumen,

$$s = 15 \text{ cm hasta } 136 \text{ cm}$$

$$s = 20 \text{ cm hasta } 191 \text{ cm}$$

$$s = 30 \text{ cm hasta } 418 \text{ cm}$$

Empezamos a $s/2$ del apoyo \Rightarrow

$$1 @ 7.5 \text{ cm}$$

$$9 @ 15 \text{ cm } (7.5 + 135 = 142.5 \text{ cm})$$

$$3 @ 20 \text{ cm } (142.5 + 60 = 202.5 \text{ cm})$$

$$8 @ 30 \text{ cm } (202.5 + 240 = 442.5 \text{ cm})$$

Esto deja 15 cm en el centro sin estribos. A pesar de que no se requieren estribos para resistir cortante en este tramo central, se deben revisar los requisitos de la [Sección 7.10.5 del ACI 318S-08](#). \square

5.4 Cortante en vigas y columnas sujetas a carga axial

Las vigas de concreto reforzado pueden estar sujetas a cortante más fuerza axial de tracción o de compresión debido a causas tales como efectos de carga gravitacional en elementos inclinados, y esfuerzos resultantes de retracción restringida o deformaciones térmicas. De forma similar, las fuerzas de viento y sísmicas causan fuerzas de cortante en columnas cargadas axialmente. En la figura 5-28 se muestra una columna con estribos rectangulares que falló en cortante durante un terremoto. La grieta inclinada en esta columna se asemeja a la mostrada en la figura 5-4b con una rotación de 90° .

Las fuerzas axiales tienen tres efectos importantes sobre la resistencia a cortante. Una fuerza axial de compresión o de tracción incrementará o reducirá la carga a la cual se producen las grietas de flexión e inclinadas. El ACI relaciona V_c con el cortante a través de la grieta inclinada de manera que la presencia de fuerza axial afecta directamente el diseño. Si las fuerzas axiales de tracción no han sido consideradas en el diseño, éstas pueden conducir a fluencia prematura del refuerzo longitudinal, lo cual inhibiría

cualquier transferencia de cortante por entramamiento de agregado. Finalmente, una compresión externa, N , requerirá una mayor fuerza de compresión en el concreto y una zona de compresión mayor porque $C = T + N$. La capacidad de cortante, V_c , de la zona de compresión aumentada tenderá a ser más grande que en el caso de una viga sin compresión axial. Lo opuesto sería verdadero para una viga sujeta a cargas axiales de tracción además de cortante y flexión.

5.4.1 Tracción axial

Para cargas de tracción axial el cortante nominal acarreado por el concreto está dado por

$$V_c = 0.53 \left(1 + \frac{N_u}{35A_g} \right) \lambda \sqrt{f'_c} b_w d \quad \text{ACI 318-08 Ec 11-8}$$

en donde N_u/A_g esta expresado en kg/cm^2 y es negativo en tracción. El término entre paréntesis se hace cero cuando el esfuerzo axial promedio en la sección alcanza o excede 35 kg/cm^2 en tracción, lo cual es aproximadamente la resistencia a la tracción del concreto.

Esta expresión tiende a ser conservadora, especialmente para altos niveles de tracción, como se puede ver en la figura 5-15, y aun cuando la evidencia es ambigua, se ha mostrado en pruebas de laboratorio que vigas sujetas a tracción tan grande como para agrietarlas completamente pueden aun resistir cortantes similares a los de vigas sin tracción axial. Esta capacidad de cortante resulta en su mayor parte del entramamiento del agregado a lo largo de las grietas de tracción. Se debe notar sin embargo, que si el refuerzo longitudinal fluye bajo la acción de cortante, flexión y fuerza axial, la capacidad de cortante disminuye significativamente. Esta es una posible razón de la falla de la viga mostrada en la figura 5-2.

5.4.2 Compresión axial

La compresión axial tiende a aumentar la resistencia al cortante. La norma ACI presenta la siguiente ecuación para calcular V_c para elementos sujetos a cortante, momento y compresión axial:

$$V_c = 0.53 \left(1 + \frac{N_u}{140A_g} \right) \lambda \sqrt{f'_c} b_w d \quad \text{ACI 318-08 Ec 11-4}$$

en donde N_u/A_g es positivo en compresión y tiene unidades kg/cm^2 .

El diseño de una viga sujeta a compresión o tracción axial es idéntico al de una viga sin tales fuerzas aplicadas, excepto por la modificación del valor de V_c .

Ejemplo 5-2 Revisión de capacidad de cortante en una columna sujeta a flexocompresión y cortante.

Una columna de 30 cm × 30 cm con concreto de 280 kg/cm² y acero longitudinal y estribos de grado 60 está sujeta a las fuerzas axiales, los momentos y los cortantes mayorados mostrados en la figura 5-29. Revise la capacidad de cortante de la columna.

❶ **Cálculo de la fuerza de cortante nominal en la columna.** Sumando momentos alrededor del centroide en uno de los extremos de la columna, la fuerza cortante mayorada es

$$V_u = \frac{5.82 + 2.91}{3.05} = 2.86 \text{ Mg}$$

$$V_n = \frac{V_u}{\phi} = 3.82 \text{ Mg}$$

❷ **¿Se requieren estribos según ACI Sec. 11.4.6.1?** Solo se requieren estribos por acero transversal mínimo si $V_n < V_c/2$, donde

$$V_c = 0.53 \left(1 + \frac{N_u}{140A_g} \right) \lambda \sqrt{f'_c} b_w d$$

$$V_c = 0.53 \left(1 + \frac{63,600}{140 \times 30 \times 30} \right) \times 1 \times \sqrt{280} \times 30 \times \frac{23.5}{1000} = 9.41 \text{ Mg}$$

y $V_c/2 = 4.70 \text{ Mg}$. Como $V_n = 3.82$ es menor que $V_c/2$, es necesario usar refuerzo de cortante basado en acero transversal mínimo. Más aun, si las cargas que actúan sobre la columna son estáticas, es necesario cumplir con el requisito de refuerzo transversal para elementos sujetos a compresión de acuerdo con ACI Sec. 7.10.5. Adicionalmente, si las cargas son el resultado de la acción sísmica sobre el elemento, entonces es necesario cumplir con los requisitos del Capítulo 21 del ACI 318S-08.

□

Tabla 5-1 Disposiciones para diseño por cortante²				
		$V_u \leq \phi V_c / 2$	$\phi V_c / 2 \leq V_u \leq \phi V_c$	$\phi V_c \leq V_u$
Area de estribos requerida, A_v		Ninguna	$0.2\sqrt{f'_c} \frac{b_w s}{f_{yt}} \geq \frac{3.5b_w s}{f_{yt}}$	$\frac{(V_u - \phi V_c) s}{\phi f_{yt} d}$
Espaciamiento de estribos, s	Requerido	—	$\frac{A_v f_{yt}}{0.20\sqrt{f'_c} b_w} \leq \frac{A_v f_{yt}}{3.5b_w}$	$\frac{\phi A_v f_{yt} d}{V_u - \phi V_c}$
	Máximo	—	$d/2 \leq 60 \text{ cm.}$	$d/2 \leq 60 \text{ cm. para}$ $(V_u - \phi V_c) \leq \phi 1.1\sqrt{f'_c} b_w d$ $d/4 \leq 30 \text{ cm. para}$ $\phi 1.1\sqrt{f'_c} b_w d \leq (V_u - \phi V_c) \leq \phi 2.2\sqrt{f'_c} b_w d$

Tabla 5-2 Resistencia de cortante ϕV_s por tamaño de varilla y espaciamiento³						
Espaciamiento	Resistencia de cortante ϕV_s (Mg)					
	Estribos No. 3*		Estribos No. 4*		Estribos No. 5*	
	Grado 40	Grado 60	Grado 40	Grado 60	Grado 40	Grado 60
d/2	5.9	8.6	10.9	16.4	16.8	25.0
d/3	8.6	13.2	16.4	24.5	25.0	37.7
d/4	11.8	17.7	21.8	32.7	33.6	50.4

* Estribos con 2 brazos (para estribos de 4 brazos, duplicar los valores, etc.)

² Tomado de *Notes on ACI 318-08 Building Code Requirements for Structural Concrete* (Table 12-1, p.12-9), Portland Cement Association, 2008, ISBN 978-0-89312-266-9.

³ Tomado de *Notes on ACI 318-08 Building Code Requirements for Structural Concrete* (Table 12-2, p.12-10), Portland Cement Association, 2008, ISBN 978-0-89312-266-9.

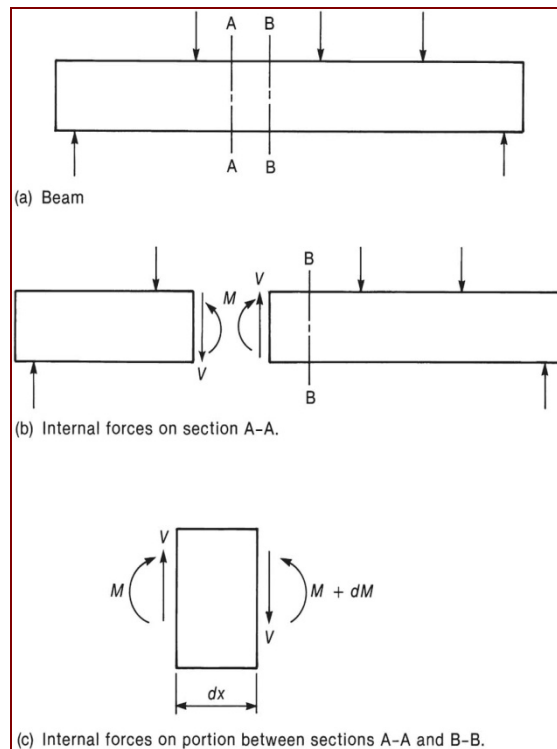


Figura 5–1 Fuerzas internas en una viga



Figura 5–2 Falla de cortante: Bodega de la Fuerza Aérea de U.S.A. en Shelby, Ohio. Colapso total de un techo de 300 m², 20 bodegas similares en uso. Resultado: ACI 318-56 pide refuerzo del alma en zona de punto de inflexión en vigas continuas. (Fotografía cortesía de C. P. Siess, agosto 1955)

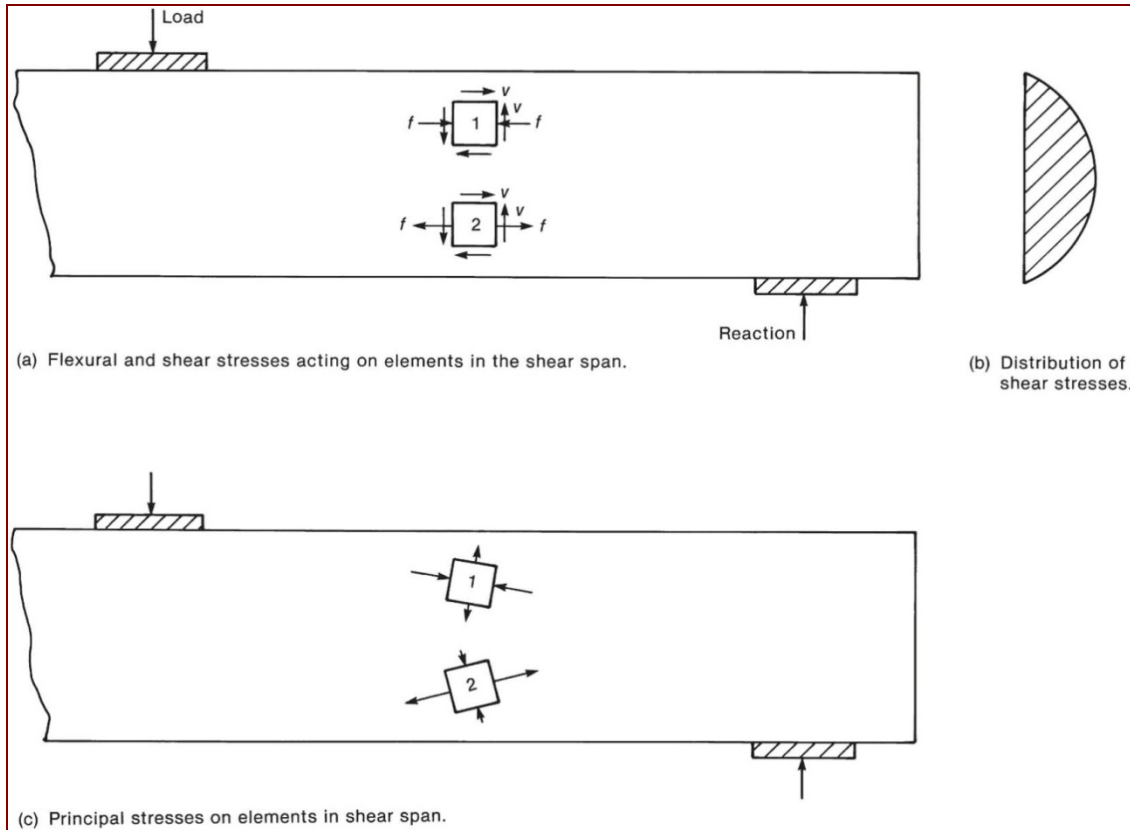


Figura 5-3 Esfuerzos normales, de cortante y principales en vigas homogéneas no-agrietadas

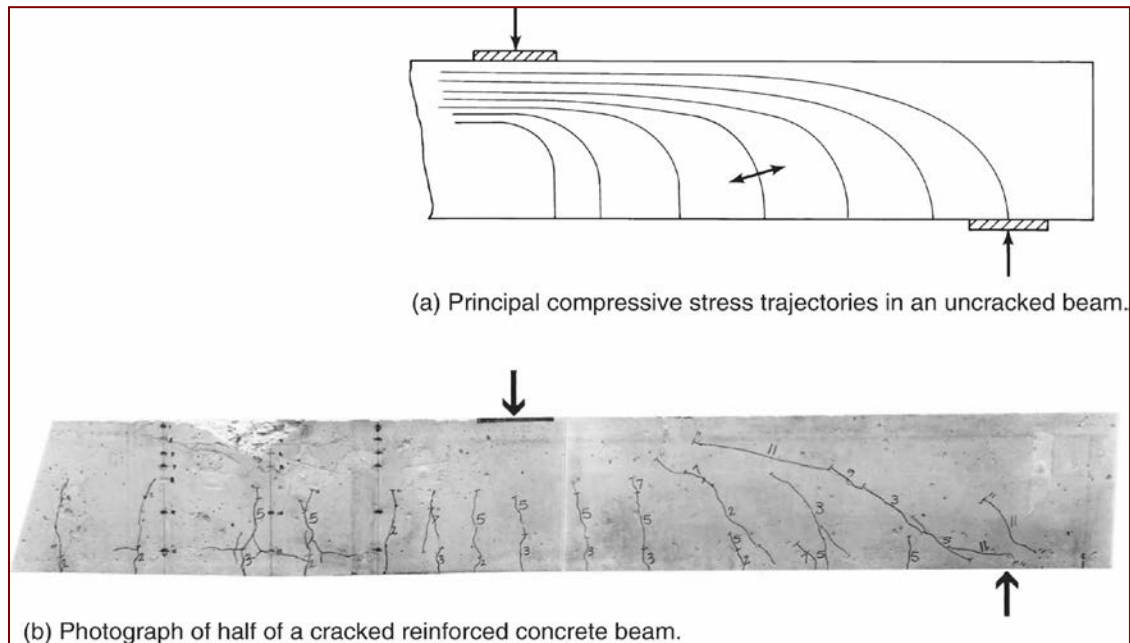


Figura 5-4 Trayectorias de esfuerzos principales de compresión y patrón de grietas inclinadas. (Fotografía cortesía de J. G. MacGregor.)

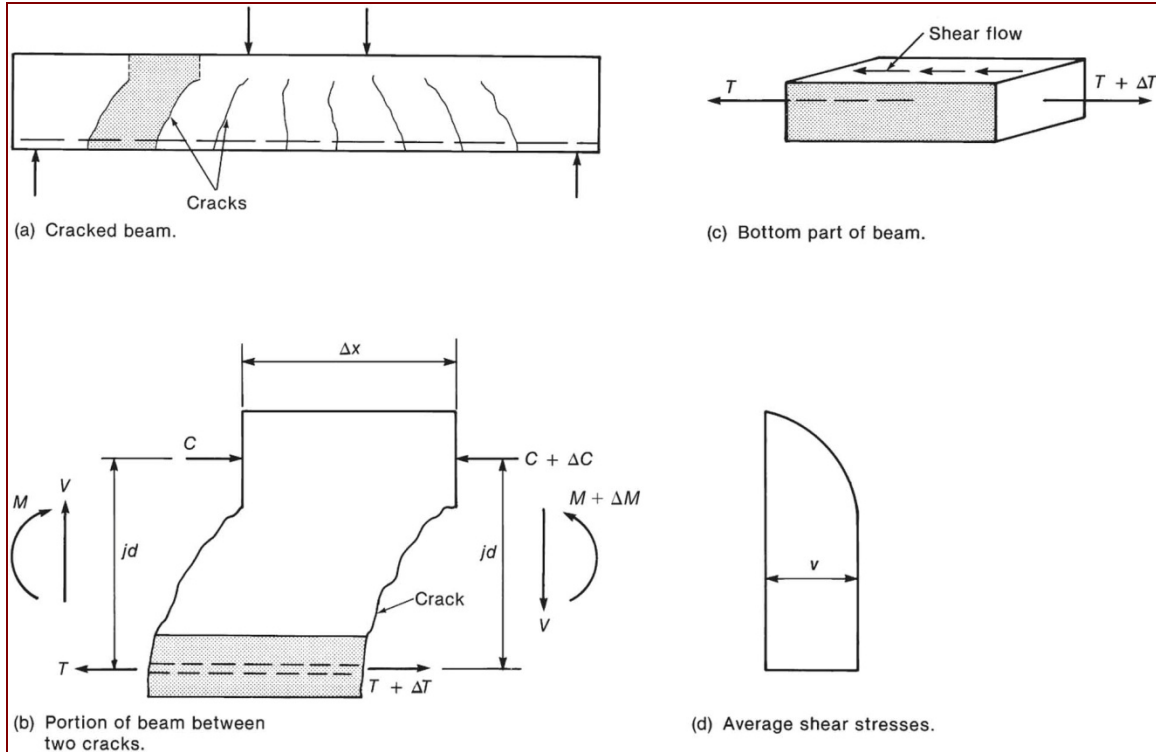


Figura 5-5 Cálculo del esfuerzo promedio entre grietas.

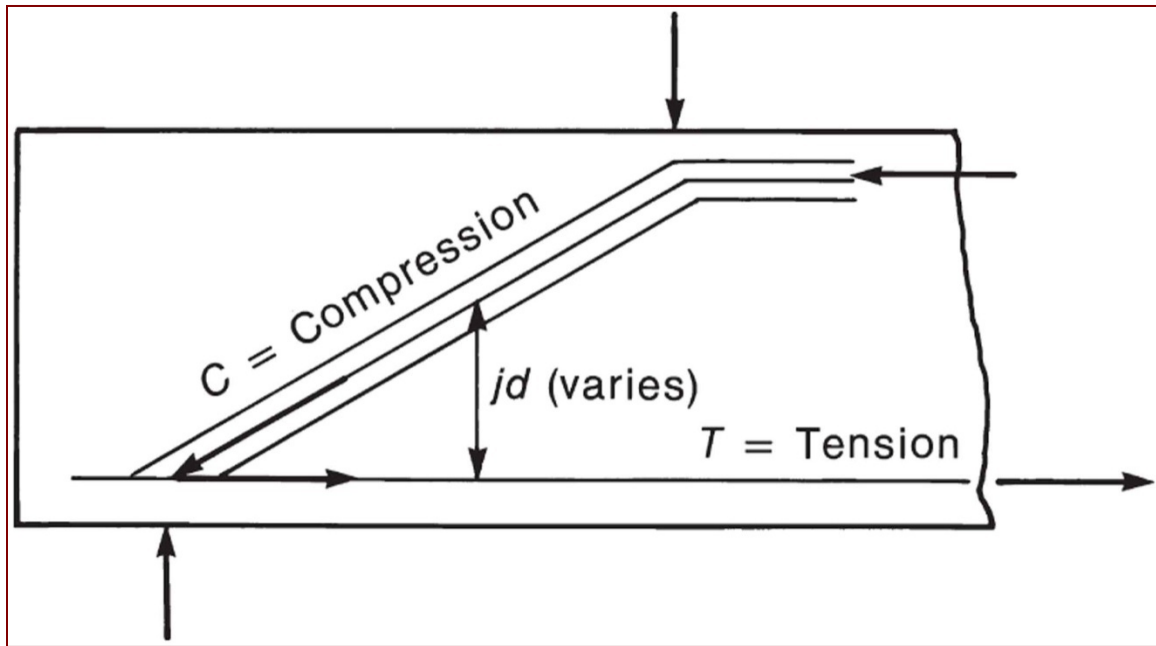


Figura 5-6 Acción de arco en una viga

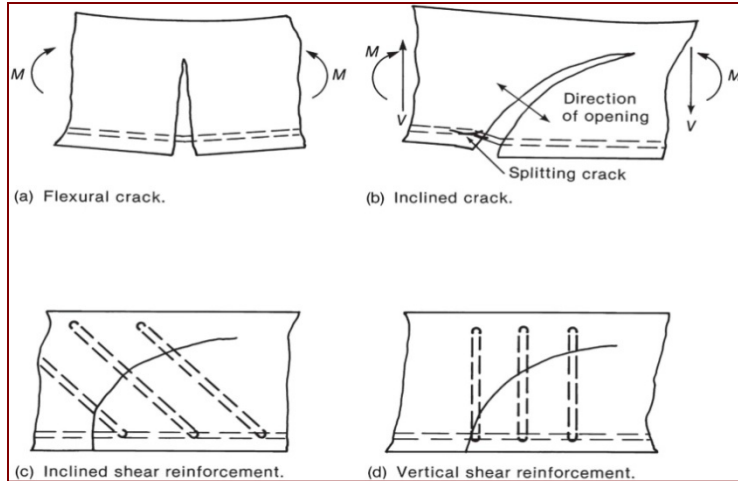


Figura 5-7 Grietas inclinadas y refuerzo de cortante.

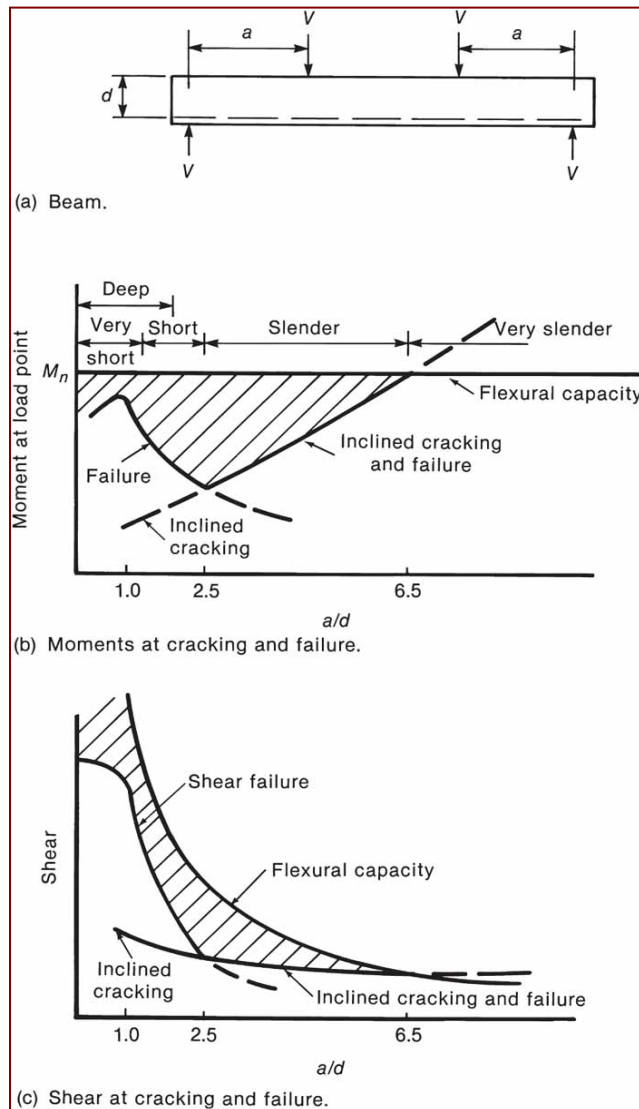


Figura 5-8 Efecto de la razón a/d sobre la resistencia al cortante en vigas sin estribos.

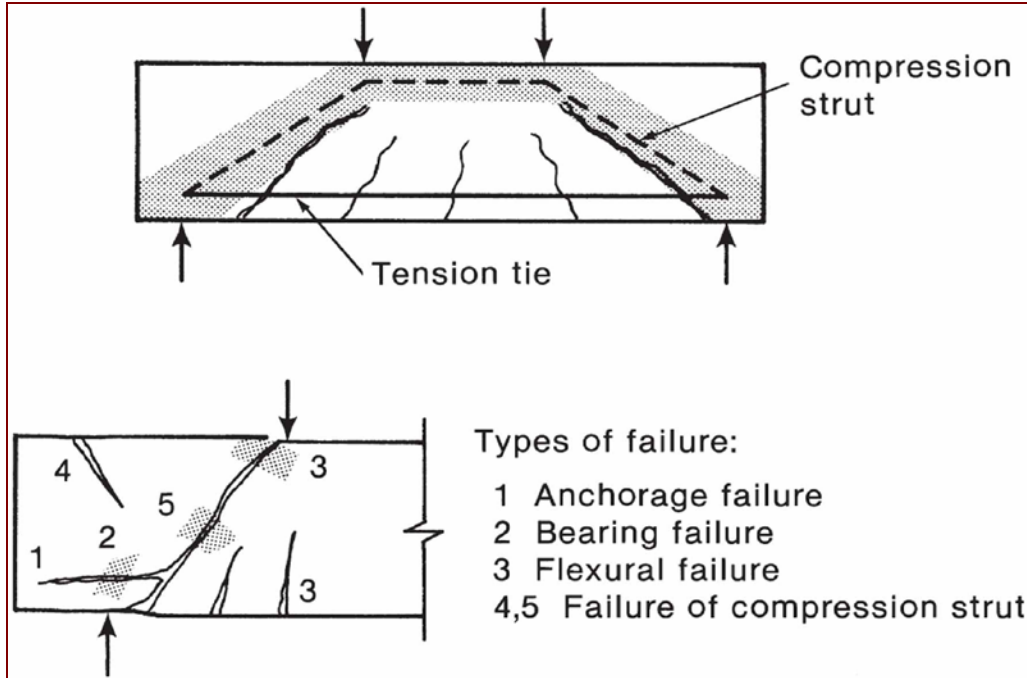


Figura 5-9 Modos de falla de vigas profundas, $a/d = 0.5$ a 2.0 . (Tomado de ACI 426-73)

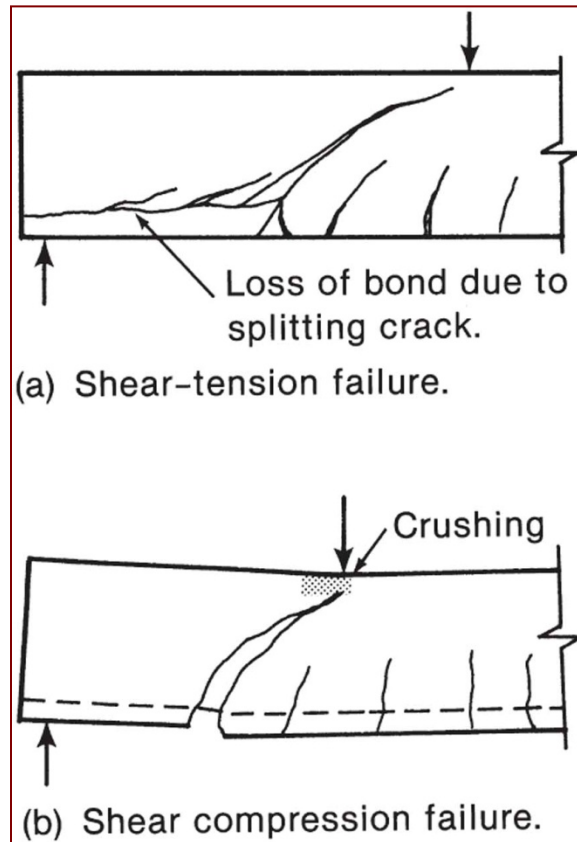


Figura 5-10 Modos de falla de vigas de corta luz, $a/d = 1.5$ a 2.5 . (Tomado de ACI 426-73)

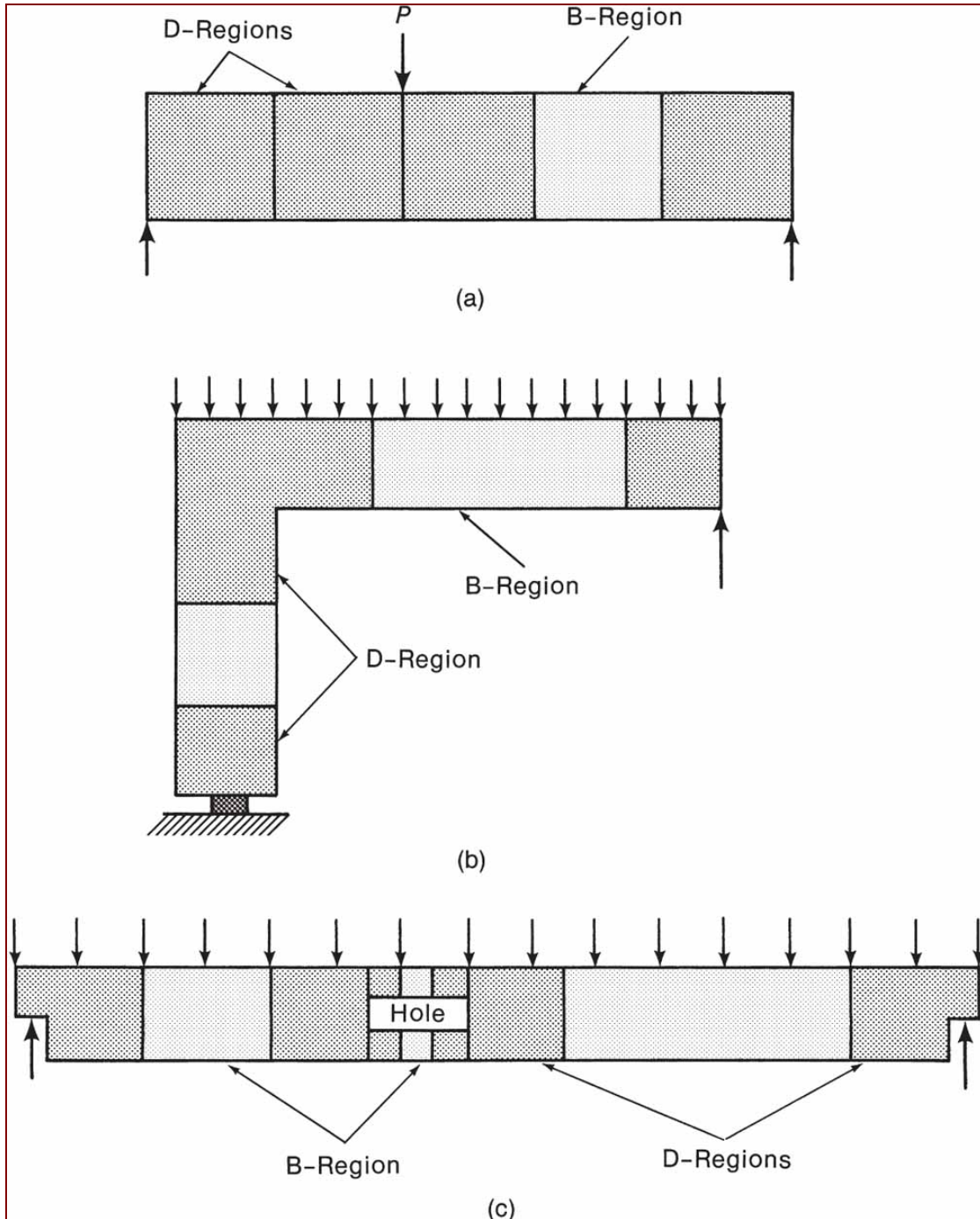
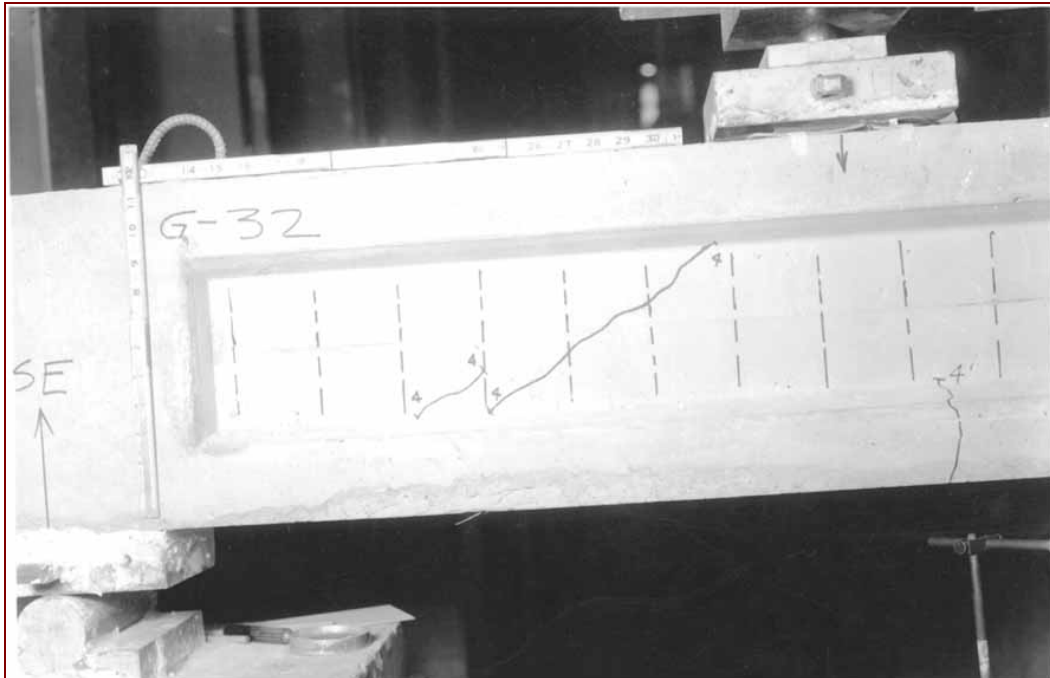
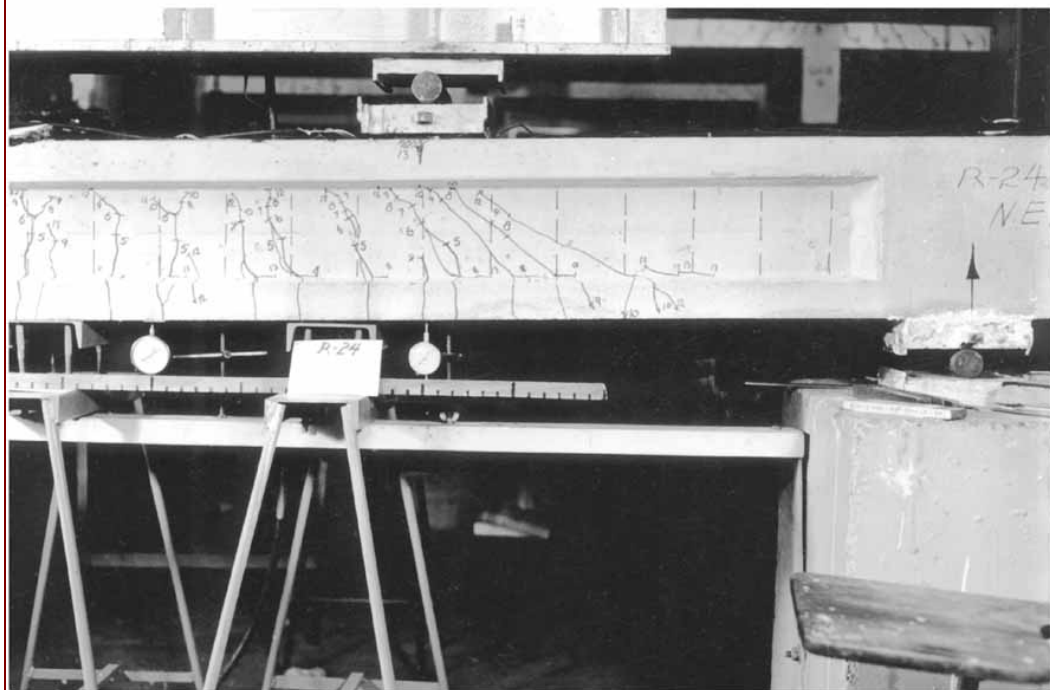


Figura 5-11 Regiones B (viga) y D (discontinuidad).



(a) Web-shear cracks.



(b) Flexure-shear cracks.

Figura 5–12 Tipos de grietas inclinadas. (Fotografía cortesía de J. G. MacGregor.)

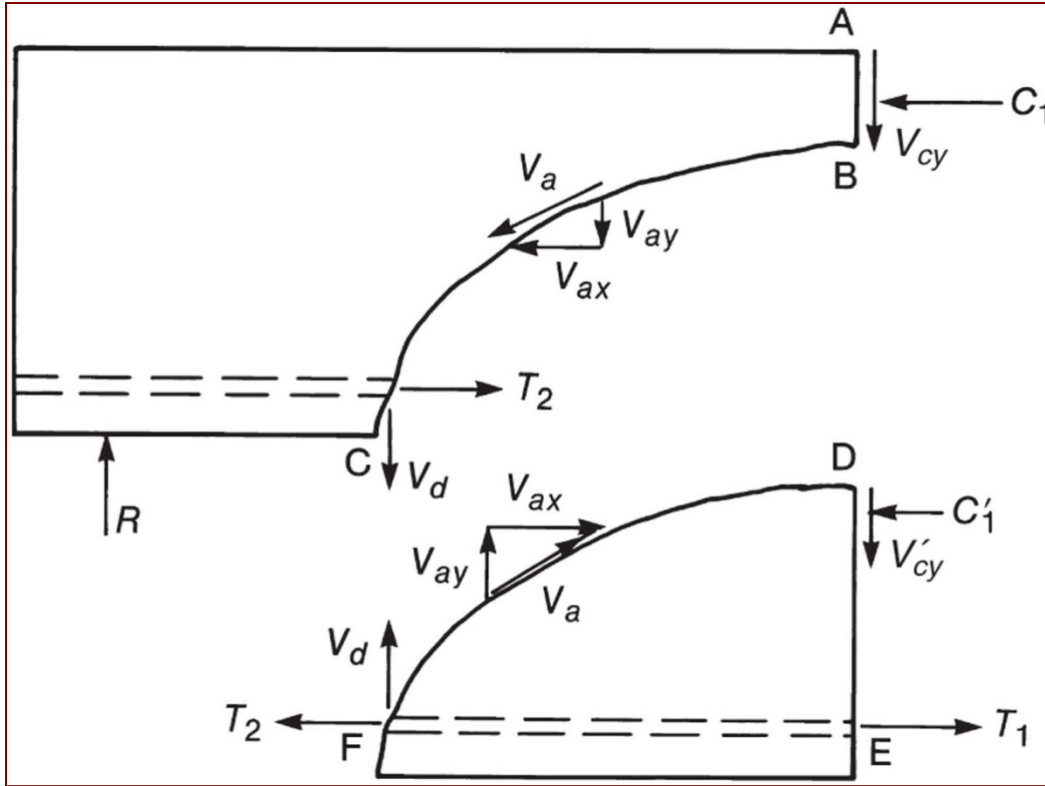


Figura 5-13 Fuerzas internas en una viga agrietada y sin estribos.

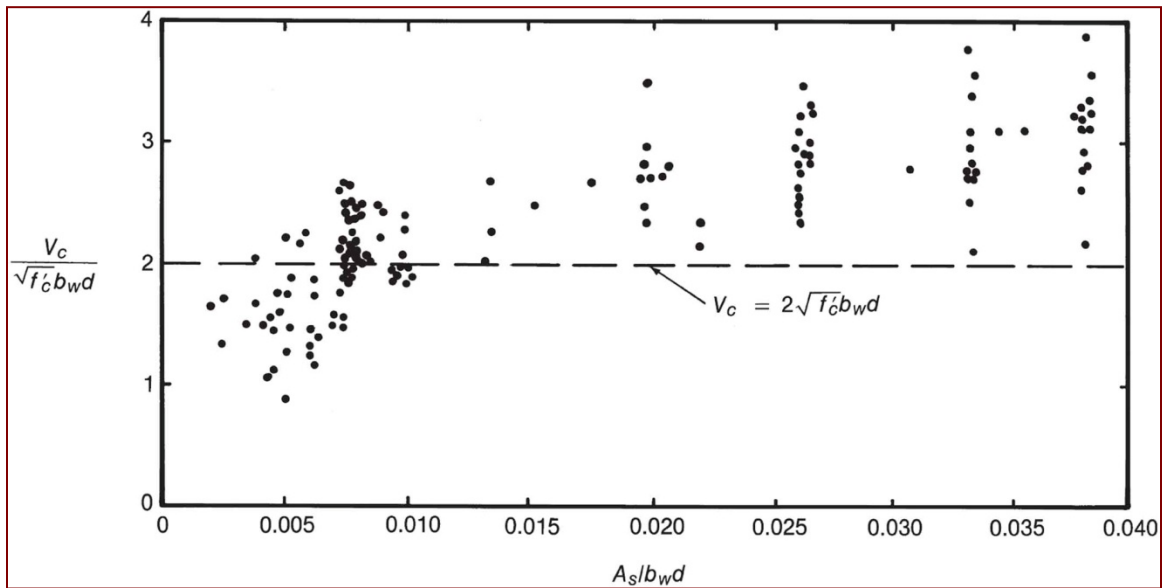


Figura 5-14 Efecto de la razón de refuerzo, $\frac{A_s}{bw}$, sobre la capacidad de cortante, V_c , de vigas sin estribos.

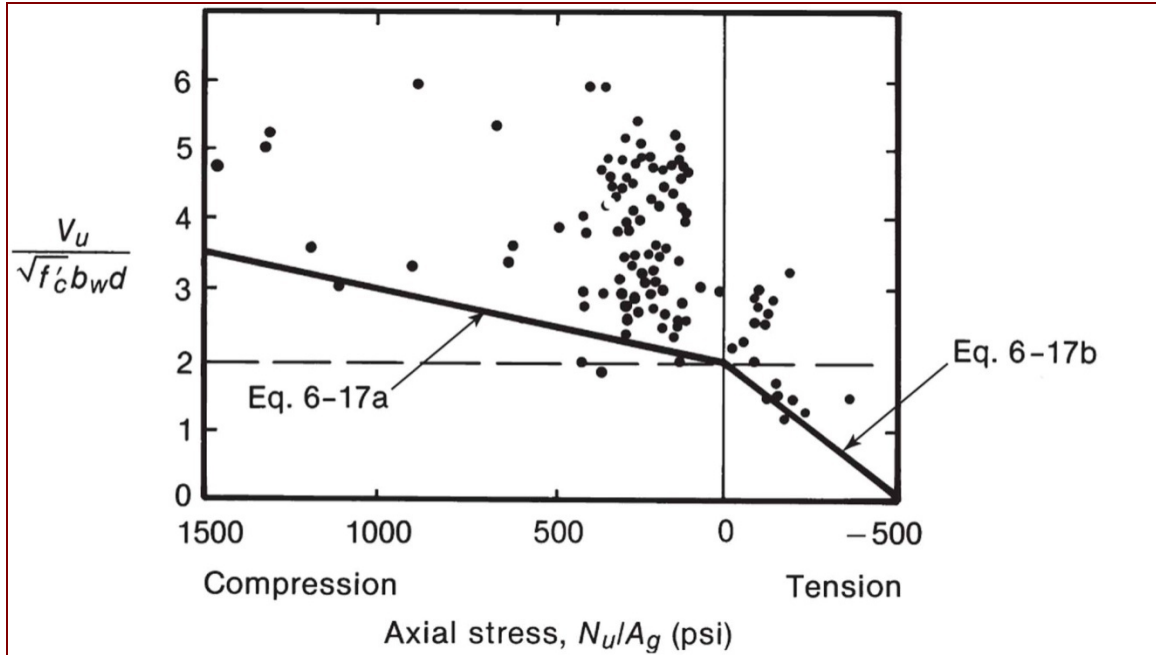


Figura 5-15 Efecto de cargas axiales sobre cortante en grietas inclinadas.

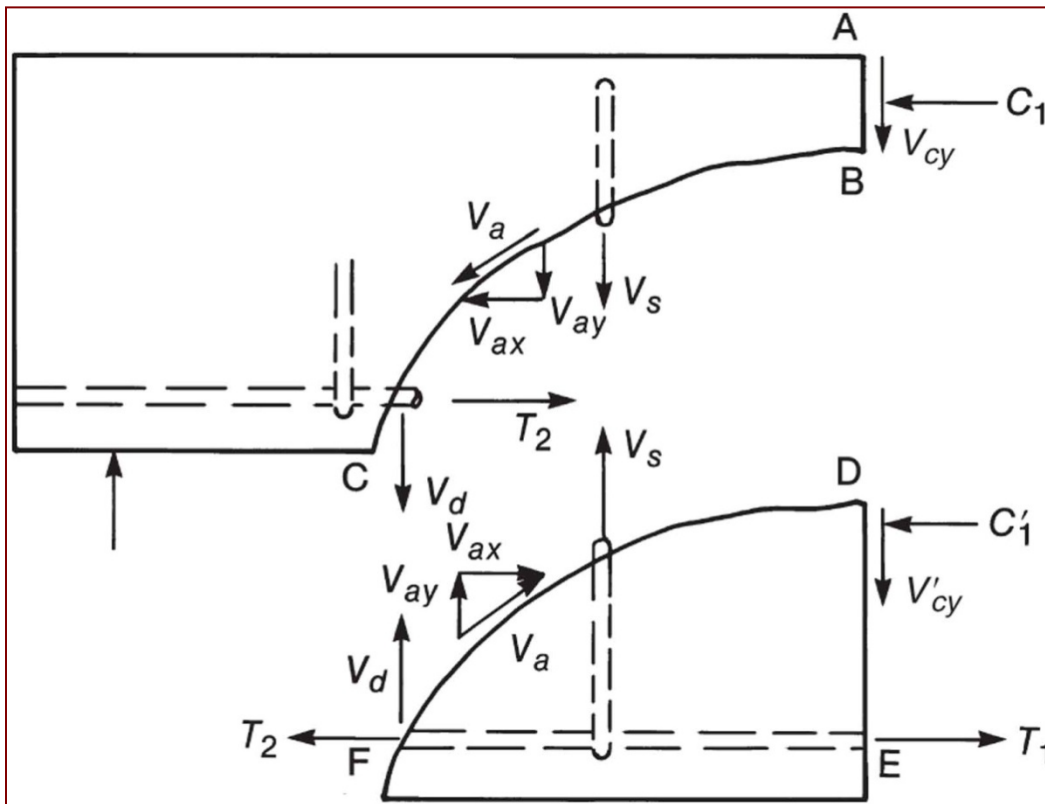


Figura 5-16 Fuerzas internas en una viga agrietada y con estribos.

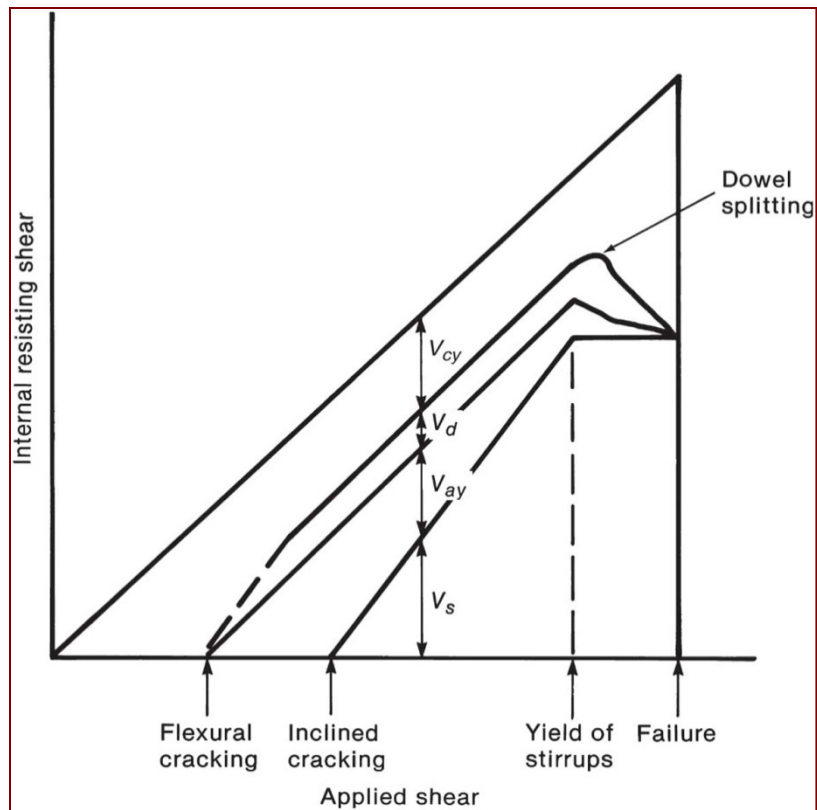


Figura 5-17 Distribución de cortantes internos en una viga con refuerzo en el alma. (Tomado de ACI 426-73)



Figura 5-18 Falla por aplastamiento del concreto del alma. (Fotografía cortesía de J. G. MacGregor.)

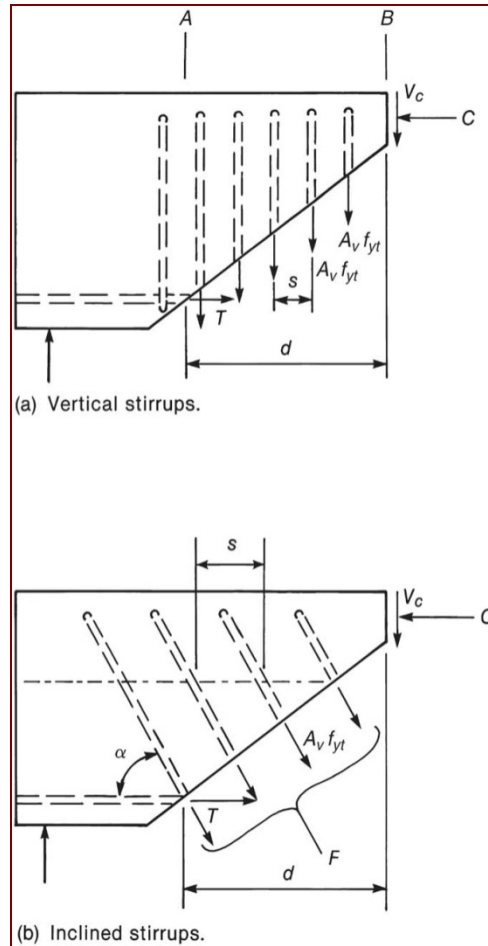


Figura 5–19 Cortante resistido por estribos.

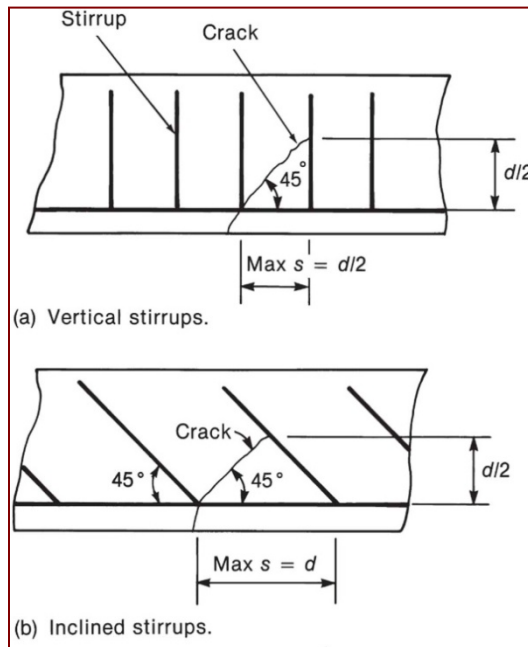


Figura 5–20 Espaciamiento máximo de estribos.

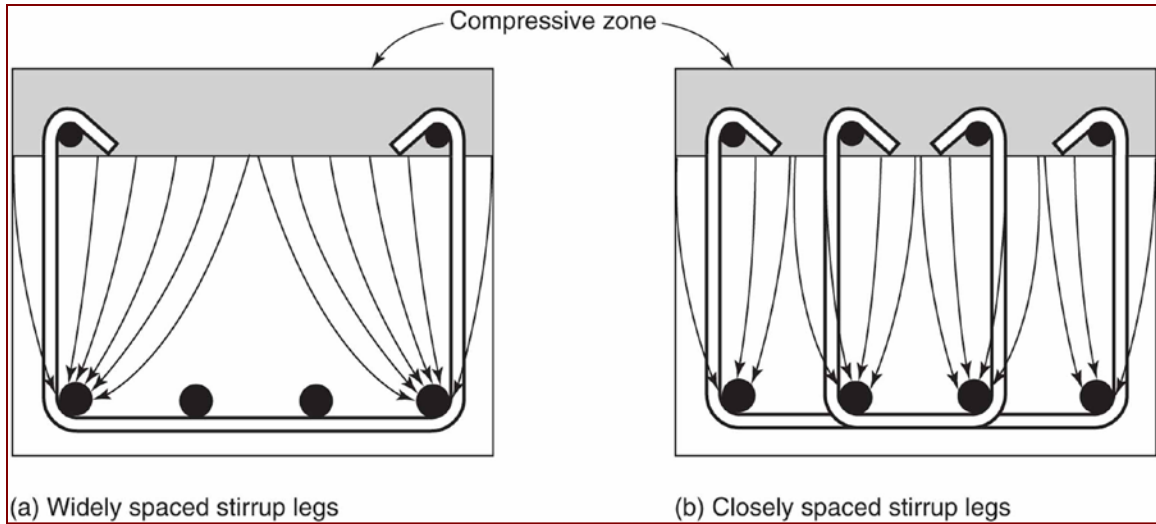


Figura 5-21 Flujo de fuerza diagonal de compresión en vigas con estribos.

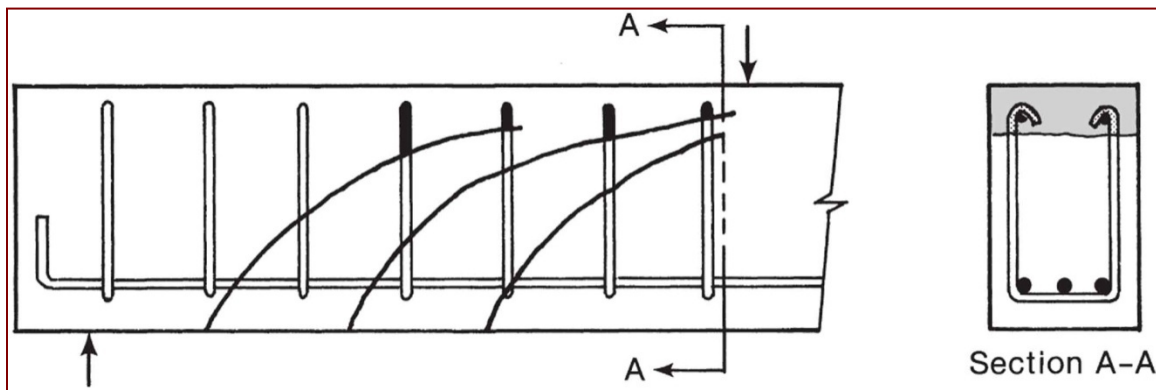


Figura 5-22 Anclaje de estribos.

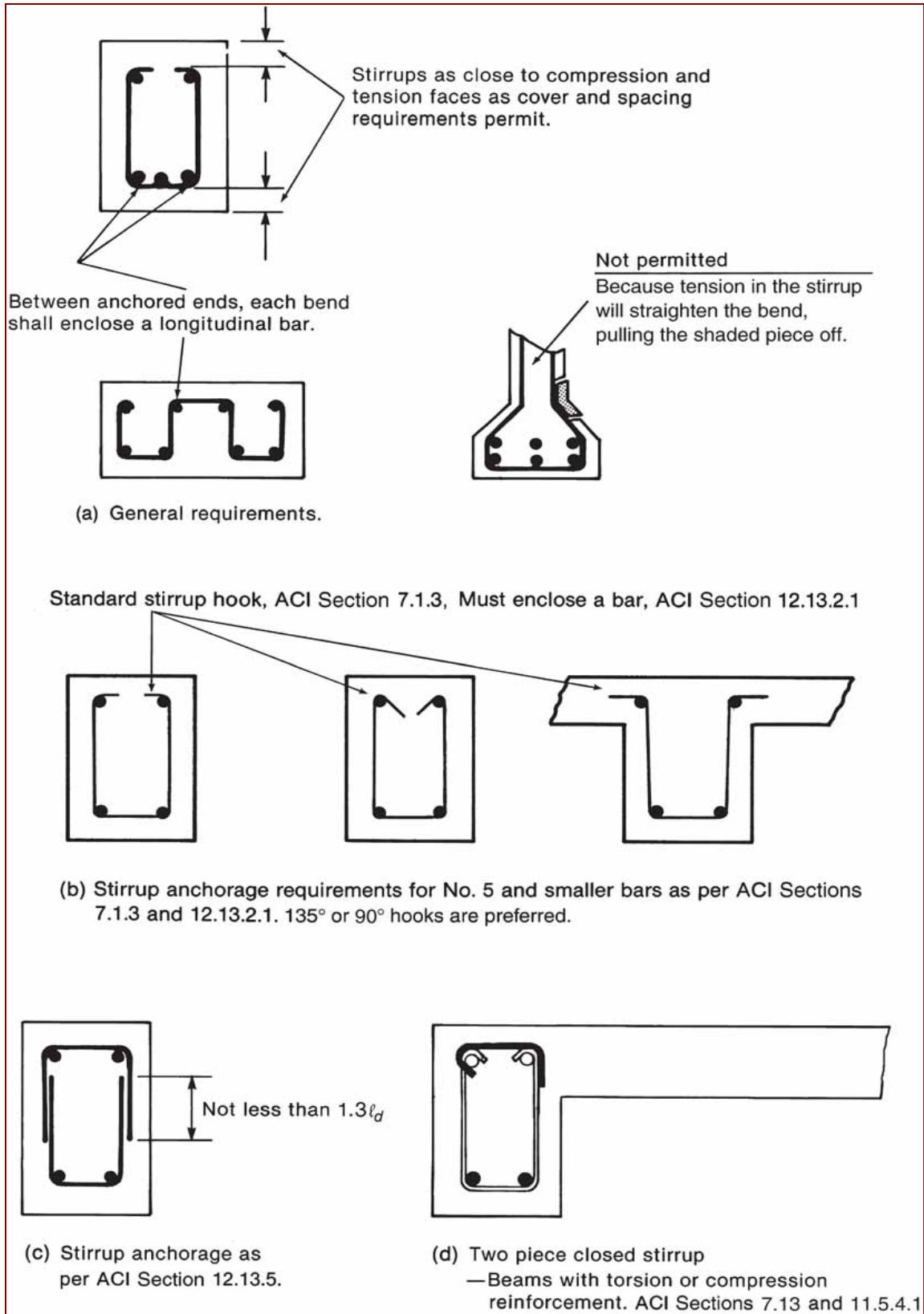


Figura 5–23 Requisitos de detallado de estribos.

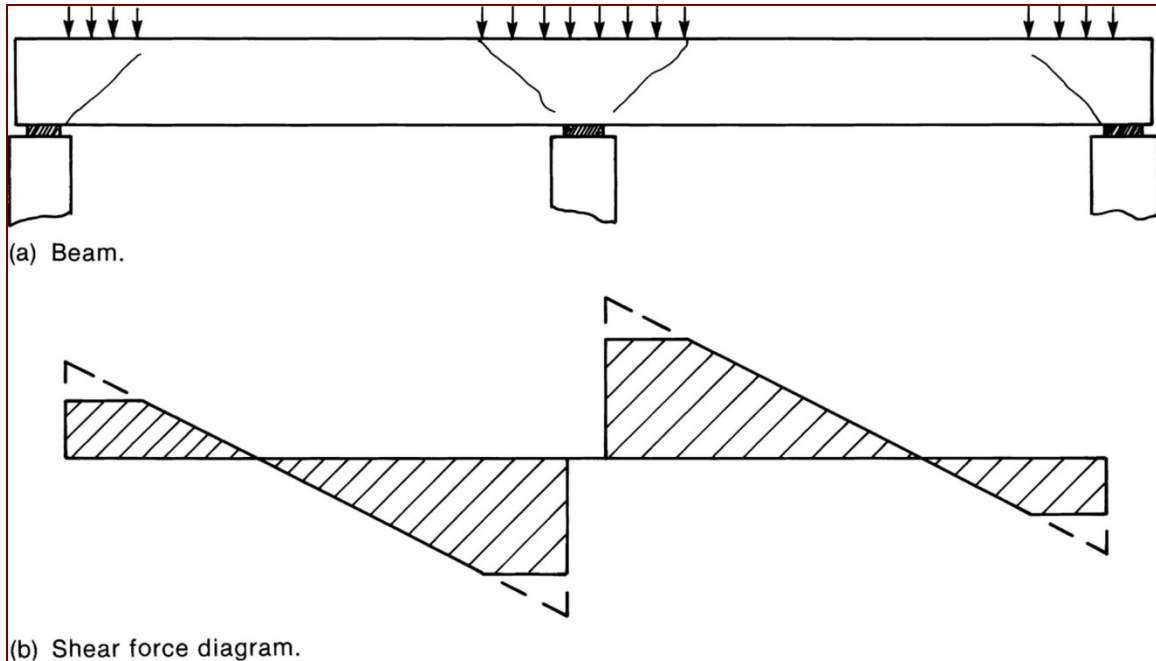


Figura 5-24 Diagrama de esfuerzo cortante para diseño.

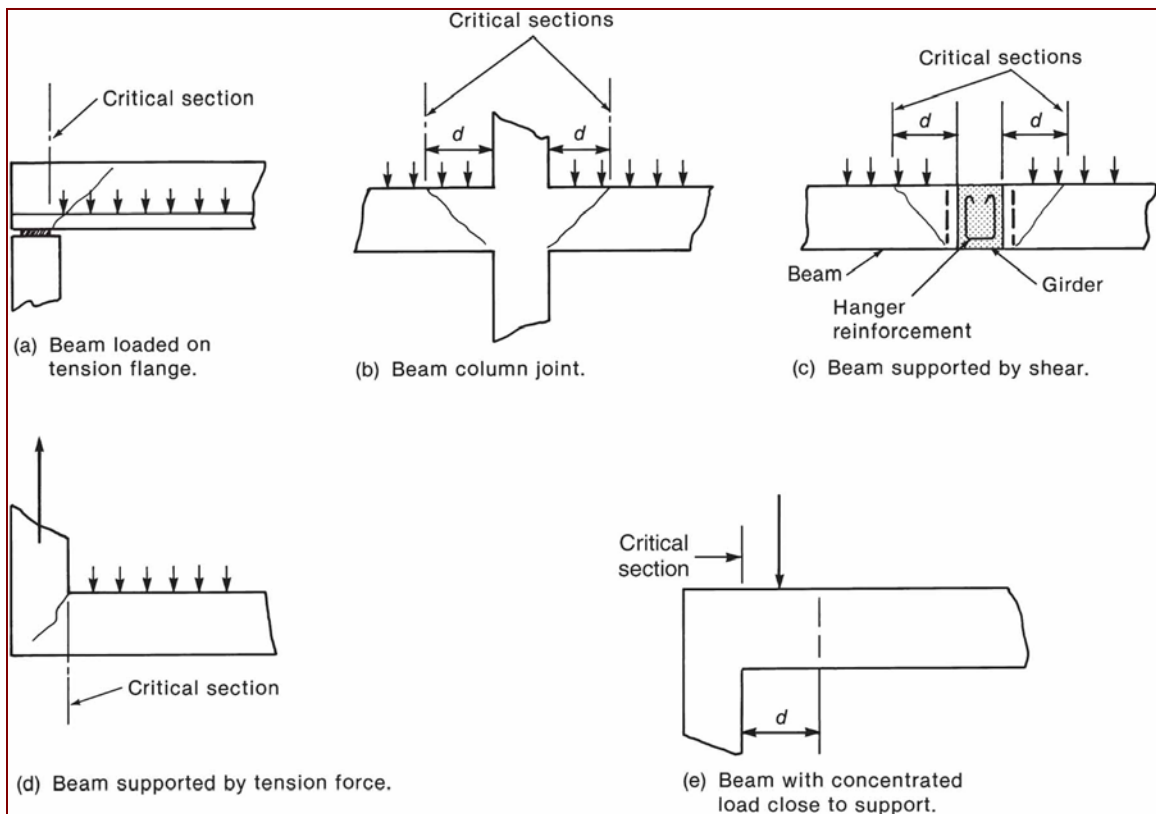


Figura 5-25 Aplicación de Norma ACI 318-08 Artículo 11.1.3.

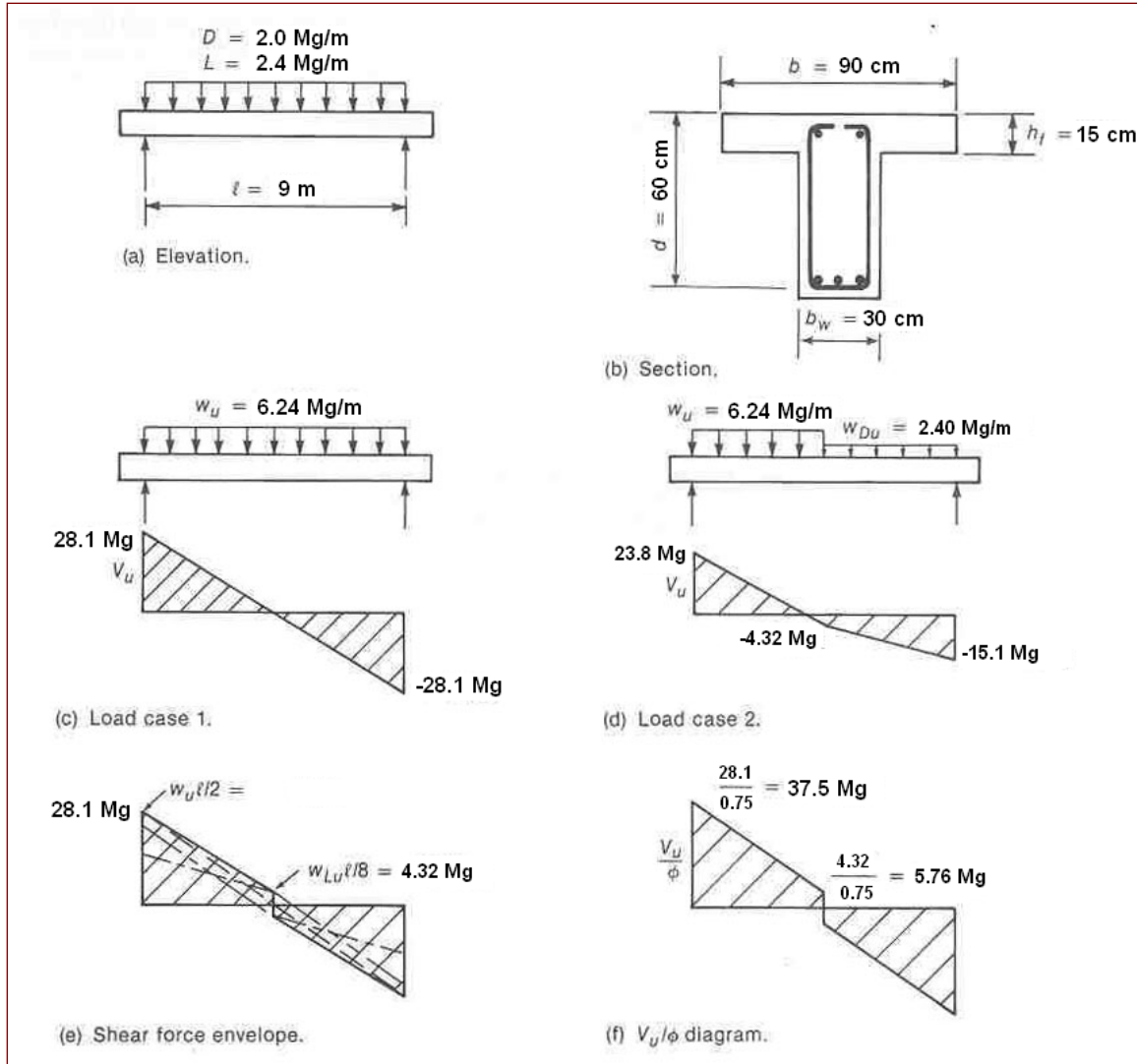


Figura 5-26 Diagramas de viga y fuerza cortante—Ejemplo 5-1.

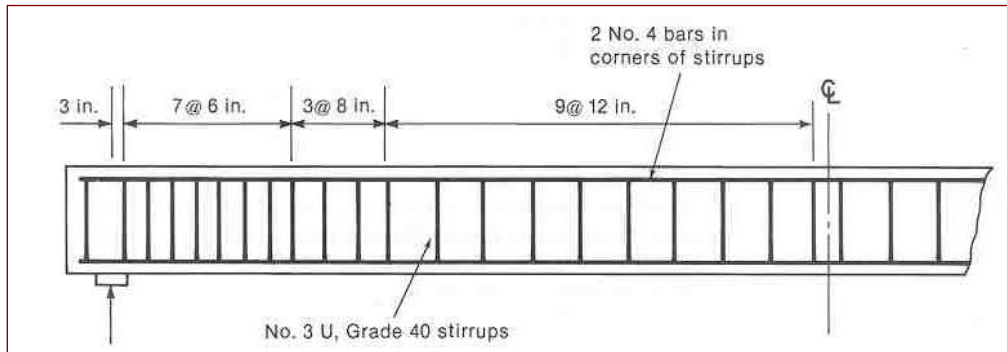


Figura 5-27 Distribución de estribos en viga—Ejemplo 5-1.



Figura 5–28 Falla de cortante de columna con aros rectangulares, terremoto de San Fernando, CA, 1971. (Fotografía cortesía de J. G. MacGregor.)

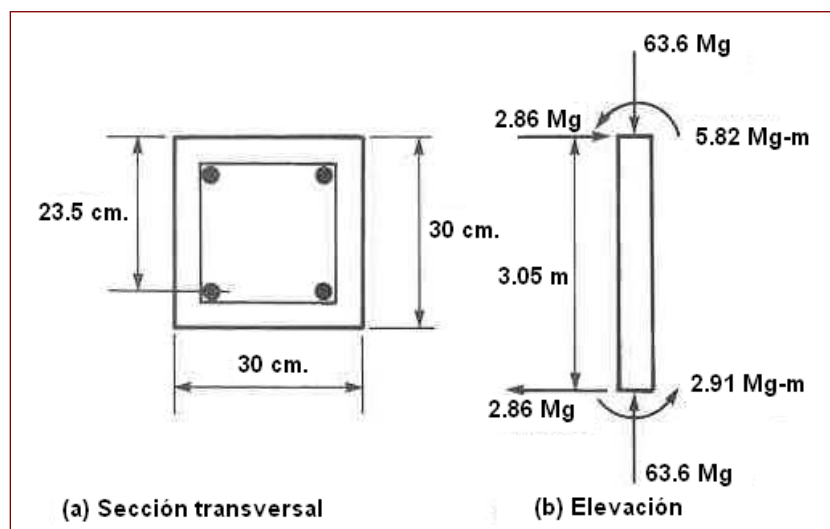


Figura 5–29 Cortante en columna—Ejemplo 5–2.

6. TORSIÓN

6.1 Introducción

6.1.1 Esfuerzos cortantes debidos a torsión en elementos no-agrietados

SECCIONES SÓLIDAS

En un elemento sujeto a torsión se producen esfuerzos tangenciales τ debidos al torque aplicado. Estos esfuerzos se producen en planos perpendiculares al eje longitudinal y en planos que contienen al eje del elemento. La figura 6-1 muestra una barra circular sujeta a torsión pura. Para elementos circulares el esfuerzo τ es cero en el eje y máximo en la superficie externa. La figura 6-2 muestra la distribución de esfuerzos mencionada.

Para barras rectangulares el esfuerzo τ varía de cero en el centro hasta un máximo en el centro del lado mayor. A lo largo del perímetro de la barra, los esfuerzos cortantes varían de cero en las esquinas a un máximo en el centro de cada lado, tal y como se muestra en la figura 6-2b.

La distribución de esfuerzos tangenciales en la sección transversal del elemento se puede encontrar utilizando la analogía de la membrana. Las ecuaciones para la pendiente de la membrana inflada son análogas a las de esfuerzos debidos a torsión. La figura 6-3 muestra las suposiciones básicas en la analogía de la membrana. Allí se indica como, para una sección circular sólida, la distribución de esfuerzos es proporcional a la pendiente de la membrana inflada y además como la capacidad de resistir torque de la sección es proporcional al volumen generado por la misma.

Para una sección hueca, con paredes continuas, la membrana es similar a las anteriores excepto que la región hueca es representada mediante una placa rígida con la forma del hueco. El torque es proporcional al volumen bajo la membrana inflada. El esfuerzo tangencial máximo en una barra circular elástica es:

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{J} \quad (10-1)$$

donde :

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \text{Esfuerzo tangencial máximo} \\ T &= \text{Momento torsionante} \\ r &= \text{Radio de la sección transversal} \\ J &= \text{Momento polar de inercia} = \frac{\pi r^4}{2} \end{aligned}$$

Para una barra rectangular elástica, el esfuerzo tangencial máximo ocurre a lo largo del centro del lado mayor. El esfuerzo tangencial máximo en la barra rectangular elástica es:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha x^2 y} \quad (10-2)$$

donde

x = Longitud del lado menor
 y = Longitud del lado mayor
 $0.208 < \alpha < 1/3$
 con 0.208 para sección cuadrada ($y/x = 1$)
 y 1/3 para placa infinita ($y/x = \infty$)

El valor de α se puede obtener en forma aproximada como:

$$\alpha = \frac{1}{3 + 1.8/(y/x)} \quad (10-3)$$

Para una sección transversal compuesta por una serie de rectángulos delgados,

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\sum(\alpha x^2 y)} \quad (10-4)$$

Para un rectángulo delgado:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha x^2 y} \quad (10-5)$$

Para secciones con comportamiento plástico, los esfuerzos tangenciales serán constantes en todos los puntos. Se utiliza la analogía del montículo de arena. Para una barra rectangular el esfuerzo plástico es:

$$\tau_p = \frac{T}{\alpha_p x^2 y} \quad (10-6)$$

En donde α_p varía según

$$\begin{aligned} 1/3 < \alpha_p < 1/2 \\ 1/3 & \text{ para } y/x = 1 \\ 1/2 & \text{ para } y/x = \infty \end{aligned}$$

SECCIONES HUECAS

Considere un tubo de pared delgada como el mostrado en la figura 6-4. El torque aplicado causa fuerzas cortantes F_1 , F_2 , F_3 y F_4 en los lados del elemento mostrado, cada uno de ellos igual al producto de los esfuerzos tangenciales por el área sobre la cual éstos actúan.

Por equilibrio, $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_1 = F_3$. Como $F_1 = \tau_2 t_2 dx$ y $F_3 = \tau_1 t_1 dx \Rightarrow \tau_1 t_1 = \tau_2 t_2$ donde τ_1 y τ_2 actúan en los lados anterior y posterior del bloque respectivamente.

Al producto τt se le conoce como *flujo de cortante*, q , (esfuerzo \times longitud). Por equilibrio de un elemento más pequeño ubicado en la esquina B, $\tau_1 = \tau_4$ y similarmente en A, $\tau_2 = \tau_3$. Por lo tanto en los puntos A y B del perímetro del tubo,

$$\tau_4 t_1 = \tau_3 t_2 = q \tag{10-7}$$

Esto implica que para un torque T dado, la fuerza cortante a lo largo de un segmento de pared ds es $q ds$. Tomando la distancia perpendicular de esta fuerza hasta el eje centroidal del tubo como r , el momento de esta fuerza alrededor del eje será: $r q ds$ donde r es medido desde el plano medio de la pared porque esa es la línea de acción de la fuerza $q ds$. La integral a lo largo del perímetro debe ser igual al torque en el tubo

$$T = \int_p r q ds \tag{10-8}$$

como q es constante alrededor del perímetro del tubo se tiene que:

$$T = q \int_p r ds \tag{10-9}$$

De la figura 6-4c, se puede ver que $r ds$ representa el doble del área triangular achurada entre el perimetral ds y el eje del tubo. Por esta razón podemos ver que la integral de $r ds$ a lo largo del perímetro representa el doble del área inscrita dentro de la línea de centro del tubo. A esta área se le denomina el *área encerrada por la ruta del flujo de cortante*, A_o . Para la sección transversal mostrada en la figura 6-5, A_o es el área achurada incluyendo el hueco del tubo. En este caso $T = 2 q A_o$ y $q = \tau t$. De esta forma

$$\tau = \frac{T}{2A_o t} \tag{10-10}$$

en donde t es el espesor de la pared en el punto en donde se quiere calcular el esfuerzo tangencial τ debido a torsión.

Ejemplo 6-1 Cálculo de esfuerzos tangenciales en una sección transversal de puente usando teoría de tubo de pared delgada

La figura 6-6a muestra la sección transversal de un puente. Calcule los esfuerzos tangenciales, τ , en las partes superior e inferior de las paredes y en el patín inferior debido a un torque de 230 Mg-m.

Solución

❶ **Cálculo de A_o .** A_o es el área encerrada por el plano medio de las paredes del tubo. La línea a trazos de la figura 6-6a representa el perímetro de A_o . Las alas en voladizo no son parte del tubo y pueden ser despreciadas en el cálculo de A_o . Dividiendo A_o en varios triángulos y un rectángulo, como se muestra en la figura 6-6b, se obtiene

$$A_o = (2 \times 2.03 \times 0.125/2) + (7.0 \times 0.05/2) + (6.75 \times 2.03)$$

$$A_o = 0.254 + 0.175 + 13.7 = 14.1 \text{ m}^2$$

❷ **Cálculo del flujo de cortante, q .**

$$q = \frac{T}{2A_o} = \frac{230 \text{ Mg-m} \times 1000 \text{ Kg/Mg}}{2 \times 14.1 \text{ m}^2 \times 100 \text{ cm/m}} = 81.6 \text{ kg/cm}$$

❸ **Cálculo de los esfuerzos tangenciales.** En la parte superior de la pared el espesor, t , es 60 cm. El esfuerzo tangencial en la parte superior de la pared es

$$\tau = q/t = 81.6/60 = 1.36 \text{ kg/cm}^2$$

En la parte inferior de la pared, el espesor es 35 cm. El esfuerzo tangencial en la parte inferior de la pared es

$$\tau = q/t = 81.6/35 = 2.33 \text{ kg/cm}^2$$

El espesor del patín inferior es 15 cm. El esfuerzo tangencial en el patín inferior es

$$\tau = q/t = 81.6/15 = 5.44 \text{ kg/cm}^2 \quad \square$$

6.1.2 Esfuerzos principales debidos a torsión

Cuando una viga como la mostrada en la figura 6-7 es sometida a un torque, T , se desarrollan esfuerzos tangenciales en las caras frontal y superior. Estos esfuerzos se muestran en la figura 6-7a. Los esfuerzos principales derivados de los esfuerzos tangenciales mostrados se presentan en la figura 6-7b. La intensidad de los esfuerzos principales de tracción es igual a los de compresión y al tangencial en el caso de que

exista torsión pura. Los esfuerzos mostrados causarían agrietamiento eventualmente. Este agrietamiento se manifiesta como grietas que envuelven el elemento tal y como se muestra en la figura 6-7c.

En un elemento de concreto reforzado un agrietamiento como el indicado causaría falla a menos que éste atravesase acero de refuerzo. Este refuerzo usualmente consiste de acero longitudinal en las esquinas de la sección transversal y estribos. En vista de que el agrietamiento se extiende a lo largo de toda el área perimetral de la viga, es necesario utilizar estribos cerrados o aros de manera que exista refuerzo transversal en todas las caras del elemento.

Si una viga es sometida a sollicitación combinada de cortante y de torsión, entonces los dos componentes de cortante se suman en una cara lateral y se restan en la cara opuesta, tal como se muestra en la figura 6-8. La grieta se inicia en forma inclinada en la cara frontal y se propaga hacia arriba y luego hacia la cara trasera. Allí, en vista de que los esfuerzos de flexión son dominantes, se propagará una grieta de dirección vertical. En este caso, la compresión debida a la flexión no permitirá la propagación de la grieta, tal como se evidencia en la figura 6-8c.

6.2 Comportamiento de elementos de concreto reforzado sujetos a torsión

6.2.1 Torsión pura

Un viga rectangular con refuerzo longitudinal en las esquinas y estribos cerrados verticales puede resistir incrementos de carga después de ocurrido el agrietamiento inicial. En la figura 6-9 se muestra la respuesta a un torque aplicado a una viga rectangular como la descrita. Cuando se alcanza la carga de agrietamiento, punto A en la figura, el ángulo de distorsión aumenta mientras el torque se mantiene constante. Durante esa fase, ocurre una redistribución de las fuerzas internas. Estas son transferidas del concreto al acero de refuerzo. El agrietamiento se extiende al núcleo del elemento tornándolo inefectivo. La figura 6-10 muestra las diferentes resistencias de una serie de vigas rectangulares tanto sólidas como huecas. Todas las secciones tienen las mismas dimensiones exteriores pero las cantidades de refuerzo longitudinal y transversal aumentan. Aún cuando el torque de agrietamiento fue menor para las secciones huecas, las resistencias últimas fueron iguales para ambos tipos de sección. Esto indica que la resistencia de un elemento agrietado sometido a torsión pura es determinada por la capacidad del tubo de concreto que contiene el acero de refuerzo.

Después del agrietamiento de la viga de concreto, la falla puede ocurrir por varias causas diferentes. Puede ocurrir fluencia del acero de los estribos o del acero longitudinal o de ambos. En el caso de vigas *sobre-reforzadas* para la torsión, se puede presentar falla por aplastamiento del concreto entre las grietas inclinadas, debido a esfuerzos principales de compresión. El comportamiento más dúctil se presenta cuando ambos aceros de refuerzo (longitudinal y transversal) fluyen.

6.2.2 Cortante, Momento y Torsión combinados

Rara vez se presenta un caso de torsión pura en un elemento de concreto reforzado. La figura 6-11 muestra el resultado de pruebas realizadas en vigas sin estribos, con varias razones torsión vrs. cortante de solicitación. La envolvente inferior está dada por el cuarto de elipse indicado:

$$\left(\frac{T_c}{T_{CU}}\right)^2 + \left(\frac{V_c}{V_{CU}}\right)^2 = 1 \quad (10-11)$$

donde, para el gráfico mostrado en la figura 6-11:

$$T_{CU} = 0.42\sqrt{f'_c}x^2y \quad \text{y} \quad V_{CU} = 0.70\sqrt{f'_c}b_wd$$

6.3 Métodos de diseño para torsión

Dos teorías muy diferentes son utilizadas para explicar la resistencia de los elementos de concreto reforzado. La primera, basada en la *teoría de flexión sesgada* desarrollada por Lessig (1959), fue presentada en su forma actual por Hsu (1968) y había sido la base para la normativa de diseño para torsión en los códigos del ACI de 1971 a 1989. Esta teoría supone que una porción de la demanda de cortante y torsión es resistida por el concreto, y el resto por el refuerzo de acero. El modo de falla es explicado en términos de la flexión de una superficie sesgada formada por el agrietamiento espiral alrededor de tres de las cuatro caras del elemento, tal y como se muestra en la figura 6-12.

La segunda teoría de diseño se fundamenta en *modelo de tubo de pared delgada/cercha espacial plástica*. Esta teoría, presentada por Lampert (1970), Lampert & Thürlimann (1971), y Lampert & Collins (1972), es la base del método de diseño para torsión utilizado por el Comité Euro-International du Béton, el código canadiense y el ACI.

6.3.1 Método de diseño por flexión sesgada–ACI 1971 a 1989

Cuando un elemento de concreto reforzado es sometido a torsión pura se produce un agrietamiento cuando el esfuerzo principal alcanza el máximo valor de tracción para el concreto. Como el esfuerzo principal de tracción es igual al tangencial en cualquier punto en un elemento sujeto a torsión pura, el torque de agrietamiento se puede obtener tomando $\tau_{\max} = f'_t$ de forma tal que

$$T_{cr} = f'_t(\alpha x^2 y) \quad (10-12)$$

Para $\alpha = 1/3$ y $f'_t = 1.6\sqrt{f'_c}$

$$T_{cr} = 0.53\sqrt{f'_c}(x^2 y) \quad (10-13)$$

Para una sección que consista de varios rectángulos

$$T_{cr} = 0.53\sqrt{f_c'}(\sum x^2 y) \quad (10-14)$$

RESISTENCIA DE VIGAS CON REFUERZO EN EL ALMA

La figura 6-12 muestra la superficie sesgada de falla formada por las grietas inclinadas en tres lados de la sección y una zona de concreto a compresión en el cuarto lado. Este elemento esta sometido a un torque T . El lado en el cual se desarrolla la zona de compresión y los ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 son funciones de las magnitudes relativas al momento torsional y al momento flexionante y la fuerza de cortante cuando éstos existan. Para simplificar el planteamiento, suponemos $\theta_1 = \theta_3$. Esta suposición sería correcta en el caso de torsión pura. Las fuerzas horizontales en los estribos de las caras superior e inferior producen un par:

$$T_h = n_h (A_t f_s) y_1 \quad (10-15)$$

donde n_h = número de brazos horizontales del estribo en un lado ($x_1 \cot \theta_1 / s$)
 A_t = área de un brazo del estribo
 f_s = esfuerzo en el estribo
 y_1 = distancia vertical entre los extremos superior e inferior del estribo

o bien:

$$T_h = \left(\frac{f_s}{f_y} \cot \theta_1 \right) A_t f_y \left(\frac{x_1}{s} \right) y_1 = k_1 A_t f_y \left(\frac{x_1}{s} \right) y_1 \quad (10-16)$$

De forma similar, la fuerza vertical en los estribos en la cara lateral y el componente vertical C_v de la fuerza de compresión C , forman un par

$$T_v = n_v (A_t f_s) (k_2 x_1) \quad (10-17)$$

donde n_v es el número de estribos verticales atravezados por una grieta en la cara lateral $y_1 \cot \theta_2 / s$ y $k_2 x_1$ es el brazo de palanca entre las fuerzas en los estribos y la fuerza de compresión C . Esta ecuación puede ser presentada con el mismo formato que la (10-16):

$$T_v = k_3 A_t f_y \left(\frac{y_1}{s} \right) x_1 \quad (10-18)$$

donde $k_3 = k_2 \cot \theta_2 f_s / f_y$. Sumando T_h y T_v con $\alpha_t = k_1 + k_3$ se obtiene la resistencia al torque brindada por los estribos:

$$T_s = \alpha_t \frac{x_1 y_1}{s} A_t f_y \quad (10-19)$$

Mediante la consideración de diferentes secciones transversales, Hsu sugiere que se tome T_{co} como igual al 40% de T_{cr} :

$$T_{co} = 0.21\sqrt{f'_c} \sum x^2 y \quad (10-20)$$

y además, que se considere α_i como una función de x_i y y_i , las distancias entre los lados de los estribos:

$$\alpha_i = 0.66 + \frac{0.33y_i}{x_i} \leq 1.50 \quad (10-21)$$

La componente vertical de las fuerzas de estribo es equilibrada por la componente vertical, C_v , de la fuerza de compresión C . La componente horizontal, C_h , de la fuerza de compresión (figura 6-12) debe ser equilibrada mediante acero longitudinal. El ACI 318-89 supone que esto ocurrirá si el volumen de acero longitudinal es igual al transversal, por lo que

$$A_t = 2A_s \left(\frac{x_1 + y_1}{s} \right) \quad (10-22)$$

Esta suposición es válida solamente si las grietas son de 45° y la viga está sujeta a torsión pura. El acero longitudinal está distribuido en el perímetro de los estribos cerrados (aros) y es adicional al refuerzo utilizado para flexión.

El torque resistido por el concreto después de la aparición de grietas inclinadas, T_{co} , es menor que el torque de agrietamiento, T_{cr} , como se muestra en la figura 6-10. El Comité de Cortante y Torsión del ACI propuso originalmente que el refuerzo torsional mínimo se basara en $T_s = T_{cr} - T_{co}$.

6.4 Método de cercha espacial plástica/tubo de pared delgada

6.4.1 Límite inferior para la consideración de la torsión

En torsión pura

$$\sigma_1 = \tau = \frac{T}{2A_o t} \quad (10-23)$$

donde σ_1 = esfuerzo principal = τ .

Para el caso de secciones inicialmente sólidas, el código canadiense define el espesor de la pared delgada equivalente como

$$t = \frac{3A_{cp}}{4p_{cp}} \quad (10-24)$$

donde p_{cp} = perímetro de sección

A_{cp} = área contenida en p_{cp} .

Además, si se toma $A_o = 2/3 A_{cp}$, sustituyendo estos valores en la ecuación de esfuerzo para torsión pura se obtiene

$$\sigma_1 = \tau = \frac{T p_{cp}}{A_{cp}^2} \quad (10-25)$$

Si consideramos que el agrietamiento en torsión ocurre cuando el esfuerzo principal de tracción alcanza la resistencia del concreto sometido a compresión y tracción biaxial, $1.1\sqrt{f'_c}$, el torque necesario para alcanzar el agrietamiento se puede expresar como

$$T_{cr} = 1.1\sqrt{f'_c} \frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \quad (10-26)$$

Nota: Se toma la resistencia como $1.1\sqrt{f'_c}$ en vez de $1.6\sqrt{f'_c}$, debido a que ésta disminuye para el caso de tracción y compresión biaxial combinados.

El ACI estipula que—debido a interacción cortante–torsión—la torsión sea considerada en el proporcionamiento si $T_u > 0.25 T_{cr}$ dado por

$$T_u > \phi 0.27 \sqrt{f'_c} \left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \right) \quad (6-27)$$

Para una viga colada en forma monolítica con la losa de entrepiso, ACI 318-08 Artículo 11.5.1 establece que se debe considerar un patín adicional con la misma dimensión que la definida en ACI 318-08 Artículo 13.2.4, es decir, el patín se extiende (a) la mayor de las distancias que el alma de la viga proyecta arriba o abajo del patín o (b) una distancia no mayor a 4 veces el espesor de la losa.

6.4.2 Area de estribos para torsión

Una viga sometida a torsión pura puede ser modelada mediante una cercha espacial como la que se muestra en la figura 6-14b. Basados en el modelo de cercha espacial mostrado, la fuerza cortante por unidad de longitud será,

$$q = \frac{T}{2A_o} \quad (10-28)$$

La fuerza cortante total debida a la torsión a lo largo de las caras superior e inferior de la cercha es

$$V_1 = V_3 = \frac{T}{2A_o} x_o$$

e igualmente, para las caras izquierda y derecha de la cercha es

$$V_2 = V_4 = \frac{T}{2A_o} y_o$$

Sumando momentos alrededor de una de las esquinas de la cercha

$$T = V_1 y_o + V_2 x_o = \frac{T}{2A_o} x_o y_o + \frac{T}{2A_o} y_o x_o$$

Lo cual implica que V_1 , V_2 , V_3 y V_4 equilibran el torque T .

Como se muestra en la figura 6-15, para la pared delgada, la grieta inclinada corta n_2 aros, donde s es la separación entre aros

$$n_2 = \frac{y_o \cot \theta}{s} \tag{10-29}$$

La fuerza en los aros debe equilibrar V_2 . Si suponemos fluencia para condición última la fuerza de cortante es

$$V_2 = \frac{A_t f_{yt} y_o}{s} \cot \theta = A_t f_{yt} n_2 \tag{10-30}$$

Por lo tanto,

$$T_n = \frac{2A_o A_t f_{yt}}{s} \cot \theta \tag{ACI 318-08 Ec. 11-21}$$

donde f_{yt} = esfuerzo de fluencia de los aros,
 T_n = capacidad nominal a torsión,
 $30^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$

Para concreto normal (sin pre-esfuerzo) ACI recomienda $\theta = 45^\circ$, además $A_o = .85 \times A_{oh}$, A_{oh} = área encerrada por el estribo cerrado o aro externo mayor.

6.4.3 Area de refuerzo longitudinal

En referencia a la figura 6-16, como q es constante en el lado 2, la fuerza N_2 debe actuar en el eje centroidal de ese lado. Para una viga con refuerzo longitudinal superior e inferior, la mitad de N_2 es resistido en cada esquina. Considerando todos los lados en una sección rectangular, la fuerza longitudinal total será entonces

$$N = 2(N_1 + N_2) = \frac{T}{2A_o} 2(x_o + y_o) \cot \theta \tag{10-31}$$

Para resistir la fuerza longitudinal, se debe proveer un acero longitudinal A_ℓ tal que $A_\ell f_y = N$, o bien,

$$A_\ell = \frac{T_n p_h}{2A_o f_y} \cot \theta \quad (10-32)$$

La expresión para A_ℓ en términos del área de aros de refuerzo torsional será

$$A_\ell = \left(\frac{A_t}{s} \right) p_h \left(\frac{f_{yt}}{f_{y\ell}} \right) \cot^2 \theta \quad \text{ACI 318-08 Ec. 11-22}$$

El refuerzo longitudinal de torsión debe colocarse igualmente espaciado a lo largo del perímetro de la sección.

TORSIÓN Y CORTANTE COMBINADOS

Antes de 1995, se usaba el criterio esbozado en la figura 6-13. La utilización de la analogía de la cercha espacial supone que toda la torsión es tomada por el refuerzo y ninguna por el concreto como tal, según se puede visualizar en la figura 6-17.

Para torsión y cortante combinados se tiene:

$$V_n = V_c + V_s \quad (10-33a)$$

$$T_n = T_s \quad (10-33b)$$

Por lo tanto, $T_c = 0$. Es decir, la torsión se resiste solo con el acero.

Para V_u bajo y T_u alto con $v_u \leq 0.8 \phi 0.53 \sqrt{f'_c}$, a partir del ACI 318-95 requieren más aros. De ahí en adelante ambas metodologías dan resultados parecidos.

TORSIÓN Y CORTANTE MÁXIMOS

Un elemento sujeto a torsión o a la combinación de torsión y cortante puede fallar ya sea por fluencia del refuerzo transversal (estribos) o longitudinal—tal como se supuso en la derivación presentada—o bien, por aplastamiento del concreto debido a fuerzas de compresión diagonal (D_2). Ver figura 6-16. Una falla por desempeño en el nivel de servicio puede ocurrir si las grietas inclinadas son excesivamente anchas para la combinación de cortante y torsión. El límite estipulado por ACI 318-08 Artículo 11.5.6.1 fue derivado para limitar el ancho de grietas ante solicitaciones de servicio. Sin embargo, éste también da una cota inferior a la capacidad de aplastamiento del alma de la viga.

LÍMITE DEL ANCHO DE GRIETA

El ACI 318-08 Artículo 11.4.7.9 intenta restringir anchos de grieta excesivos limitando el cortante V_s máximo que pueda ser transferido por los aros al valor $2.12 \sqrt{f'_c} b_w d$. Se utiliza

el mismo concepto en ACI 318-08 Artículo 11.5.3.1. Dados $A_o = .85 A_{oh}$ y $t = \frac{A_{oh}}{p_h}$, en la ecuación (10-25)

$$\tau = \frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2} \quad (10-34)$$

Para una sección hueca, estos dos esfuerzos tangenciales, por torsión y por cortante, se suman en uno de los lados. Ver figura 6-18a.

$$\frac{V_u}{b_w d} + \frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2} \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 2\sqrt{f'_c} \right) \quad \text{ACI 318-08 Ec. 11-19}$$

Si el espesor de la pared es variable para una sección dada entonces el ACI 318-08 Artículo 11.5.3.2 indica que la ecuación se debe evaluar para el mayor lado izquierdo.

Para el caso de sección hueca en el que $t < A_{oh}/p_h$, se debe usar el espesor real de la pared (ACI 318-08 Artículo 11.5.3.3)

$$\frac{V_u}{b_w d} + \frac{T_u}{1.7 A_{oh} t} \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 2\sqrt{f'_c} \right) \quad (10-35)$$

o bien, se puede usar

$$\frac{V_u}{b_w d} + \frac{T_u}{A_o t} \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 2\sqrt{f'_c} \right) \quad (10-36)$$

Para una sección sólida, el esfuerzo tangencial debido al cortante se supone distribuido uniformemente en toda el alma mientras que el esfuerzo tangencial debido al torque existe únicamente en las paredes de la *sección tubular*. Ver figura 6-18b. En este caso,

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d} \right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2} \right)^2} \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 2\sqrt{f'_c} \right) \quad \text{ACI 318-08 Ec. 11-18}$$

APLASTAMIENTO LÍMITE DEL ALMA

De resultados anteriores

$$f_{cd} = \frac{V_2}{t y_o \cos \theta \sin \theta} \quad (10-37)$$

Usando $\tau = T/2A_o t$, con $A_o = 0.85A_{oh}$ y $t = A_{oh}/p_h$, se tiene que f_{cd} para torsión es:

$$f_{cd} = \frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2 \cos \theta \sin \theta} \quad (10-38)$$

De la misma forma, para esfuerzos de compresión debidos a cortante, f_{cd} es

$$f_{cd} = \frac{V_u}{b_w d \cos \theta \sin \theta} \quad (10-39)$$

De esta forma, para una sección sólida

$$f_{cd} = \sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d \cos \theta \sin \theta}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2 \cos \theta \sin \theta}\right)^2} \leq f_{ce} \quad (10-40)$$

f_{ce} = valor límite de esfuerzo de aplastamiento del concreto agrietado del *tubo*.

Para $\theta = 45^\circ$ y $\varepsilon = 0.002$ en acero transversal y longitudinal, Collins & Mitchell (1980) relacionan f_{ce} con las deformaciones unitarias del acero y obtienen $f_{ce} = 0.549 f'_c$,

$$\therefore \sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2}\right)^2} \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 2\sqrt{f'_c}\right) \leq \phi(0.275 f'_c) \quad (10-41)$$

para agrietamiento y con $v_c = 0.53\sqrt{f'_c}$, el límite es $\phi 2.65\sqrt{f'_c}$ ($\phi(2.65\sqrt{f'_c})$) por lo cual para $f'_c > 93.2 \text{ kg/cm}^2$ (lo cual siempre se cumple), se tiene, $\phi 0.275 f'_c > \phi 2.65\sqrt{f'_c}$.

6.4.4 Valor de θ

En ACI 318-08 Artículo 11.5.3.6 se permite tomar $30^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$. Además, de acuerdo con el Artículo 11.5.3.7, se debe usar el mismo valor de θ para calcular A_t y A_r . Lo anterior por cuanto una reducción en θ conduce a (i) una reducción en el área de estribos A_t requerida; (ii) un incremento en el área de acero longitudinal A_r requerida y (iii) un incremento en f_{cd} , tal como se puede constatar en la ecuación (10-40).

El Artículo 11.5.3.6 sugiere un valor $\theta = 45^\circ$ para elementos de concreto reforzado.

6.4.5 Momento y torsión combinados

La torsión genera una fuerza axial de tracción N , cuya magnitud se puede estimar usando la ecuación (10-31). Suponemos que la mitad de esta fuerza actúa en la cuerda superior de la cercha espacial y la otra mitad actúa en la cuerda inferior, como se muestra en la figura 6-19a. La flexión causa un par tracción-compresión, $C = T = M_u / jd$, como se muestra en la figura 6-19b, en donde $j \approx 0.9$. Para el caso de torsión y flexión combinados, estas fuerzas se suman como se muestra en la figura 6-19c. Las cantidades de refuerzo para la zona de tracción T y el de la cuerda inferior de la cercha espacial $N/2$ se deben sumar de acuerdo al Artículo 11.5.3.8. Se permite reducir el acero longitudinal por torsión para la zona de compresión por flexión por un monto igual a $M_u / 0.9 d f_y$

donde M_u , T_u pertenecen a la misma combinación de carga, para esa sección. Es necesario determinar esa reducción para varias secciones porque la flexión puede variar. En general esta reducción no es significativa.

6.5 Diseño para flexión, cortante y torsión–ACI 318-08

El procedimiento de diseño para el efecto combinado de torsión, cortante y flexión, consiste de diseñar para la flexión, ignorando la torsión y el cortante para luego proveer estribos y el refuerzo longitudinal adicional necesario para garantizar una resistencia adecuada ante cortante y torsión. Las ecuaciones básicas de resistencia para esta última consideración son:

$$\begin{aligned}\phi V_n &\geq V_u && \text{ACI 318-08 Ec. 11-1} \\ V_n &= V_c + V_s && \text{ACI 318-08 Ec. 11-2} \\ \phi T_n &\geq T_u && \text{ACI 318-08 Ec. 11-20}\end{aligned}$$

en donde ϕ es el factor de reducción para cortante y torsión, igual a 0.75, según el ACI 318-08 Artículo 9.3.2.3 y T_n está dado por la ACI 318-08 Ec. 11-21.

6.5.1 Selección de sección transversal para torsión

La torsión es resistida mediante esfuerzos tangenciales para el caso de sección no-agrietada y mediante fuerzas debidas a flujo de cortante en el elemento agrietado. Para lograr mayor eficiencia, los esfuerzos tangenciales y el flujo de cortante deberían definir trayectorias en la misma dirección circular y deberían estar ubicados tan lejos del eje de la sección como sea posible. De esta forma, una sección cuadrada sólida es más eficiente que una sección en forma de U. Para volúmenes iguales de material, un tubo cerrado es más eficiente que una sección sólida. Por razones prácticas, en edificios se debe recurrir al uso de secciones rectangulares sólidas. Sin embargo, para puentes, es más frecuente encontrar secciones del tipo cajón. Las secciones en forma de U se pueden encontrar en edificios, formadas a partir de la unión monolítica de vigas y losa. Estas formas son muy débiles y flexibles ante torsión.

6.5.2 Ubicación de sección crítica para torsión

Por razones análogas a las que permiten definir la sección crítica para cortante como la sección ubicada a una distancia d del apoyo, el ACI 318-08 Artículo 11.5.2.4 permite diseñar un elemento sometido a torsión con un torque T_u definido a una distancia d del apoyo. También de manera análoga, esta regla no es válida si existiese un torque aplicado a una distancia menor que d .

6.5.3 Definición de A_{cp} y p_{cp}

A_{cp} es el área total contenida en el perímetro de la sección transversal e incluye el área de huecos de ésta, siempre y cuando la sección sea cerrada. En el caso de un elemento sujeto a torsión que sea colado monolíticamente con una losa, A_{cp} incluirá una porción de la losa tal y como se define en ACI 318-08 Artículo 13.2.4 a cada lado de la viga en donde haya patín. El perímetro p_{cp} es el perímetro de la sección transversal cuya área es A_{cp} , incluyendo las porciones correspondientes del patín.

6.5.4 Definición de A_{oh}

El ACI 318-08 Artículo 11.5.3.6 establece que el área encerrada por la trayectoria de flujo de cortante, deberá ser determinada mediante análisis, pero que será permitido usar A_o como $0.85A_{oh}$ donde A_{oh} es el área encerrada por la línea de centro del estribo cerrado más externo, tal como se muestra en la figura 6-20. En la mayoría de los casos el uso de esta aproximación resulta adecuado, aunque un tanto conservador si se trata de secciones tipo cajón muy grandes.

6.5.5 Refuerzo para la torsión: Cantidades y detalles

El refuerzo para dar resistencia a la torsión consiste en estribos cerrados según la ecuación ACI 318-08 (11-21) y en barras longitudinales según la ecuación ACI 318-08 (11-22). De acuerdo con ACI 318-08 Artículo 11.5.3.8, tanto este refuerzo longitudinal como los estribos deben ser sumados a los ya previamente determinados para flexión y cortante respectivamente. También es posible reducir el área de refuerzo longitudinal de torsión a ubicar en la zona de compresión por flexión según se indicó anteriormente.

Para proceder a la suma de las áreas de acero para los estribos de cortante y de torsión, se debe recordar que para el caso de torsión se determina un espaciamiento s basado en el área de un brazo del estribo. Por lo tanto, resulta conveniente utilizar la siguiente ecuación:

$$\frac{A_{v+t}}{s} = \frac{A_v}{s} + \frac{2A_t}{s} \quad (10-42)$$

En donde A_{v+t} , se refiere al área de sección transversal de ambos brazos del estribo. Si un estribo en una viga ancha tuviese más de dos brazos, la ecuación anterior incluiría únicamente los brazos externos.

TIPOS DE REFUERZO TORSIONAL Y SU ANCLAJE

En vista de que las grietas inclinadas pueden generarse en forma de espiral alrededor de la viga, es necesario que los estribos sean cerrados. Por esta razón, el ACI 318-08 Artículo 11.5.4.1 requiere el uso de barras longitudinales y además, refuerzo transversal consistente en, (a) estribos cerrados, perpendiculares al eje del elemento, (b) cajas cerradas de malla electrosoldada con alambres transversales al eje del elemento, o (c) espirales. Este refuerzo transversal debe colocarse tan cerca del perímetro como lo permitan las condiciones de recubrimiento de manera que A_{oh} sea lo más grande posible.

Mitchell y Collins han examinado experimentalmente los tipos de anclaje de estribos requeridos. En la figura 6-21a se muestra la esquina del modelo de cercha espacial. Los esfuerzos de compresión en el concreto, f_{cd} , tienen componentes paralelos a las superficies superior y lateral como se muestra en la figura 6-21b. La compresión que actúa hacia la esquina es contrarrestada mediante tracción en el estribo. El concreto del recubrimiento a la armadura no tiene ningún anclaje y por lo tanto tiende a desprenderse. Por esta razón el ACI 318-08 Artículo 11.5.4.2(a) requiere que los estribos tengan un anclaje de 135° alrededor de la barra longitudinal si se considera que la esquina puede desprenderse. Si el concreto alrededor del anclaje del estribo está confinado por la presencia de un patín o de una losa o algo similar, ACI 318-08 Artículo 11.5.4.2(b) permite el uso de detalles de anclaje como los mostrados en la figura 6-22a.

El ACI 318-08 Artículo 11.5.4.3 dice que el refuerzo longitudinal para un elemento sujeto a torsión sea desarrollado en ambos extremos. Un error común consiste en extender el refuerzo inferior en vigas perimetrales sujetas a torsión 15 cm dentro del apoyo tal como lo permite ACI 318-08 Artículo 12.11.1. En general esto no es adecuado porque no permite al acero longitudinal desarrollar el esfuerzo necesario para resistir torsión, como se puede ver en la figura 6-23.

REFUERZO TORSIONAL MÍNIMO

Cuando el momento torsor factorizado excede el valor estipulado en la ecuación (10-27), se debe proveer el mayor de (a) refuerzo torsional que satisfaga los requisitos de resistencia del ACI 318-08 Artículo 11.5.3 o (b) el refuerzo mínimo requerido en el ACI 318-08 Artículo 11.5.5. El ACI 318-08 Artículo 11.5.5.2 especifica que el área mínima de refuerzo de estribos deberá ser

$$(A_v + 2A_t) = \max \left[0.20 \sqrt{f'_c} \frac{b_w s}{f_{yt}}, \frac{3.5 b_w s}{f_{yt}} \right] \quad \text{ACI 318-08 Ec. 11-23}$$

En pruebas realizadas por Hsu en elementos rectangulares de concreto reforzado sometidos a torsión pura, dos vigas fallaron ante carga torsional de agrietamiento. En esas vigas, la razón volumétrica total de estribos y refuerzo longitudinal respecto al volumen de concreto era de 0.802% y 0.88%. Una tercera viga con una razón volumétrica de 1.07% falló a 1.08 veces el torque de agrietamiento. Todas las demás vigas probadas por Hsu tenían razones volumétricas superiores a 1.2 veces el torque de agrietamiento. Esto

sugiere que vigas con resistencias similares en el concreto y en el acero sometidas a torsión pura deberían tener una razón volumétrica de refuerzo torsional de 0.9% a 1%. Es decir,

$$\frac{A_{\ell,\min} s}{A_{cp} s} + \frac{A_t p_h}{A_{cp} s} \geq 0.01 \Rightarrow A_{\ell,\min} = 0.01 A_{cp} - \frac{A_t p_h}{s}$$

Si se toma la constante 0.01 como una función de las resistencias de los materiales en los especímenes de la prueba, entonces el primer término de la ecuación anterior se puede tomar como $7.5\sqrt{f'_c}/f_{y\ell}$. En los códigos de 1971 hasta 1989, se utilizó una transición entre el volumen total de refuerzo requerido por $A_{\ell,\min}$ para torsión pura y el valor de refuerzo mínimo para el caso de cortante sin torsión que resulta mucho menor. Esto se logró añadiendo el multiplicador $\tau/(\tau + \nu)$. Este multiplicador se tomó como 2/3 pensando en un límite práctico para los elementos que cumplen con la ecuación 11-22 del ACI 318 promulgado en 1995. Finalmente,

$$A_{\ell,\min} = \frac{1.33\sqrt{f'_c}}{f_{y\ell}} A_{cp} - \left(\frac{A_t}{s}\right) p_h \left(\frac{f_{yv}}{f_{y\ell}}\right)$$

ACI 318-08 Ec. 11-24

Esta ecuación fue obtenida para el caso de torsión pura. Cuando se aplica a un caso de momento, cortante y torsión combinados no está claro cuánta contribución de los estribos debe incluirse. Suponemos aquí que se puede usar el total de refuerzo de estribos determinado por diseño para cortante y torsión, donde A_t representa el área de un brazo de estribo a usar.

ESPACIAMIENTO DEL REFUERZO TORSIONAL

Como se puede ver en la figura 6-21, las barras longitudinales esquineras en una viga ayudan a anclar las fuerzas de compresión en las franjas entre grietas. Si los estribos están muy separados o si las varillas esquineras son de diámetro pequeño, las fuerzas de compresión tenderán a doblar las varillas hacia afuera, debilitando así a la viga. El ACI 318-08 Artículo 11.5.6.1 limita el espaciamiento de estribos al menor de $p_h/8$ o bien 30 cm, donde p_h es el perímetro del estribo cerrado más externo.

Debido a que la fuerza axial N actúa a lo largo del eje de la viga, ACI 318-08 Artículo 11.5.6.2 especifica que el refuerzo longitudinal sea distribuido uniformemente en el perímetro de los estribos cerrados con el centroide del acero ubicado aproximadamente sobre el centroide de la sección transversal. Al refuerzo longitudinal se le permite un espaciamiento máximo de 30 cm.

RESISTENCIA MÁXIMA DE FLUENCIA DEL REFUERZO TORSIONAL

La resistencia máxima de fluencia permitida en el refuerzo torsional es 4.2 Mg/cm^2 según el ACI 318-08 Artículo 11.5.3.4. Esta restricción tiene como objeto limitar los anchos de grietas ante sollicitación de servicio.

6.6 Aplicación del método de diseño para torsión–ACI 318-08

6.6.1 Repaso de los pasos en el método de diseño

1. Calcular el diagrama de momento flexionante o la envolvente, M_u , para el elemento.
2. Escoger b , d y h con base en el momento flexionante último. Para problemas con torsión, es preferible usar una sección cuadrada.
3. Con base en la escogencia de b y h , dibujar los diagramas finales de M_u , V_u y T_u o sus envolventes. Calcular el área de refuerzo necesaria para flexión.
4. Determinar si es necesario considerar la torsión. La torsión debe ser considerada si T_u excede el valor dado en la ecuación (10-27). Si no es así, este puede ser ignorado y el diseño es llevado a cabo únicamente con la consideración de cortante.
5. Determinar si el problema es de torsión por equilibrio o por compatibilidad. Si es por compatibilidad, el torque puede ser reducido en la sección ubicada a una distancia d de los apoyos. Si esta reducción se llevara a cabo, entonces se deben reducir los momentos y los cortantes en los elementos adyacentes correspondientes.
6. Revisar si la sección tiene el tamaño adecuado para resistir torsión. Si T_u excede los valores dados en las ecuaciones ACI 318-08 (11-18) y (11-19), la sección debe ser aumentada.
7. Calcular el área de estribos requerida para resistir cortante, según las ecuaciones ACI 318-08 (11-2) y (11-3). Para facilitar la suma de estribos para cortante y para torsión, calcular $\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{f_{yt}d}$. Si V_s excede $2.1\sqrt{f'_c}b_wd$, la sección transversal es muy pequeña y debe ser aumentada. Esto se cumple automáticamente en el paso 6.
8. Calcular el área de estribos requerida para resistir torsión usando las ecuaciones 318-08 (11-20) y (11-21).
9. Sumar las cantidades de área de estribos usando la ecuación (10-42) y seleccionar los estribos. El área de estribos debe ser mayor que el mínimo dado por la ecuación 318-08 (11-23). El espaciamiento debe satisfacer los requisitos estipulados en las secciones 11.5.4.4, 11.5.6.1 y 11.5.6.3. Los estribos deben ser cerrados.

10. Diseñar el refuerzo longitudinal para torsión usando la ecuación 318-08 (11-22) y sumarlo al refuerzo propuesto para flexión. El refuerzo longitudinal para torsión debe exceder el mínimo dado por la ecuación 318-08 (11-24) y debe satisfacer los requisitos estipulados en las secciones 11.5.4.3, 11.5.6.2 y 11.5.6.3.

Ejemplo 6-2 Diseño para Torsión, Cortante y Momento: Torsión por equilibrio

La viga en voladizo mostrada en la figura 6-24a soporta su propio peso además de una carga concentrada aplicada según se muestra. La viga tiene una longitud de 140 cm y la carga concentrada actúa en un punto ubicado 15 cm antes del extremo libre del voladizo y a 15 cm del eje vertical del elemento. La carga concentrada no factorizada consiste de una carga muerta de 9.1 Mg y una carga viva también de 9.1 Mg. Usar $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$ y $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$.

Solución

❶ Cálculo de diagrama de momentos.

Se debe estimar el tamaño del elemento. El peralte mínimo para control de deflexiones por flexión es $\ell_n/8 = 140/8 = 17.5 \text{ cm}$ (Tabla 9.5a). Este valor parece muy pequeño en vista de las cargas aplicadas. Como primera aproximación, usar 40 cm de ancho por 60 cm de peralte con $d = 53.5 \text{ cm}$.

$$w_D = 0.40 \times 0.60 \times 2.4 = 0.58 \text{ Mg/m}$$

Para esta viga en voladizo, el momento en el empotramiento es

$$M = \frac{w\ell_n^2}{2} + P\ell$$

Las combinaciones de carga que aplican son, $M_u = 1.4M_D$ o bien $M_u = 1.2M_D + 1.6M_L$. Por lo tanto,

$$M_u = 1.4 \left(\frac{0.58 \times 1.4^2}{2} + 9.1 \times 1.25 \right) = 16.7 \text{ Mg-m}$$

$$M_u = 1.2 \left(\frac{0.58 \times 1.4^2}{2} + 9.1 \times 1.25 \right) + 1.6(9.1 \times 1.25) = 32.5 \text{ Mg-m}$$

❷ Escogencia de b , d , y h para flexión.

De ejemplos anteriores se tiene:

$$\frac{M_u}{\phi k_n} = \frac{bd^2}{100,000}$$

con $\rho \approx 0.01$ se tiene que $\omega = \frac{\rho f_y}{f'_c} = \frac{0.01 \times 4200}{210} = 0.20$ y por lo tanto,

$\phi k_n = \phi f'_c \omega (1 - 0.59\omega) = 0.90 \times 210 \times 0.20 (1 - 0.59 \times 0.20) = 33.3 \text{ kg/cm}^2$, con lo cual se obtiene $bd^2 = 32.5 \times 100,000 / 33.3 = 97600 \text{ cm}^3$.

Posibles escogencias

$$b = 30 \text{ cm}, d = \sqrt{97600/30} = 57.0 \text{ cm y } h = 63.5 \text{ cm}$$

$$b = 35 \text{ cm}, d = \sqrt{97600/35} = 52.8 \text{ cm y } h = 59.3 \text{ cm} \leftarrow$$

$$b = 40 \text{ cm}, d = \sqrt{97600/40} = 49.4 \text{ cm y } h = 55.9 \text{ cm}$$

Usar $b = 35 \text{ cm}, d = 53.5 \text{ cm}, h = 60 \text{ cm}$. Como esta sección es más pequeña que la sección escogida inicialmente, es necesario recalcular w y M_u .

$$w = 0.35 \times 0.60 \times 2.4 = 0.50 \text{ Mg/m}$$

$$M_u = 1.2 \left(\frac{0.50 \times 1.4^2}{2} + 9.1 \times 1.25 \right) + 1.6 (9.1 \times 1.25) = 32.4 \text{ Mg-m}$$

De desarrollos anteriores y con $j = 0.875$, se tiene

$$A_{s,req} = \frac{M_u}{\phi f_y j d} = \frac{32.4 \times 100,000}{0.90 \times 4200 \times 0.875 \times 53.5} = 18.3 \text{ cm}^2$$

Revisar M_n para $A_s = 18.3 \text{ cm}^2$.

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{18.3 \times 4200}{0.85 \times 210 \times 35} = 12.3 \text{ cm}$$

$$\phi M_n = \frac{0.90 \times 18.3 \times 4200 (53.5 - 12.3/2)}{100,000} = 32.8 > 32.4 \text{ Mg-m}$$

\therefore Usar 35×60 con $d = 53.5 \text{ cm}, A_s = 18.3 \text{ cm}^2$.

⑤ Cálculo de los diagramas M_u, V_u y T_u finales (Envolventes)

Ver figura 6-24.

④ ¿Se debe considerar torsión?

Para la sección transversal escogida: $A_{cp} = 35 \times 60 = 2100 \text{ cm}^2, p_{cp} = 2(35+60) = 190 \text{ cm}$. Según ACI Sec. 11.5.1, la torsión se puede despreciar si

$$T_u < \phi 0.27 \sqrt{f'_c} \left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \right) = \frac{0.75 \times 0.27 \sqrt{210}}{100,000} \left(\frac{2100^2}{190} \right) = 0.669 \text{ Mg-m}$$

Como $T_u = 3.82 \text{ Mg-m} > 0.669 \text{ Mg-m}$, se debe considerar torsión.

5 ¿Torsión por equilibrio o por compatibilidad?

La torsión se debe considerar para satisfacer el equilibrio, por lo tanto $T_u = 3.82 \text{ Mg-m}$.

6 ¿Es adecuado el tamaño de la sección?

Para sección sólida, ACI Sec. 11.5.3.1(a) requiere que la sección satisfaga la Ec 11-18 de ACI. Podemos tomar $V_c = 0.53 \lambda \sqrt{f'_c} b_w d$. A_{oh} = área encerrada por la línea de centro del estribo externo. Suponiendo 4 cm de recubrimiento y estribos No. 4

$$A_{oh} = (35 - 2 \times 4.0 - 1.27)(60 - 2 \times 4.0 - 1.27) = 1300 \text{ cm}^2$$

$$p_h = 2(25.7 + 50.7) = 153 \text{ cm}$$

$$\sqrt{\left(\frac{25900}{35 \times 53.5} \right)^2 + \left(\frac{3.82 \times 100,000 \times 153}{1.7 \times 1300^2} \right)^2} (= 24.6) \leq 0.75 \times 2.65 \sqrt{210} (= 28.8)$$

∴ Se cumple con el requisito de tamaño.

7 Cálculo del área de estribos necesaria para cortante.

Para determinar el área de estribos se debe cumplir que $V_s \geq V_u / \phi - V_c$. Como $V_c = 0.53 \lambda \sqrt{f'_c} b_w d = 0.53 \sqrt{210} \times 35 \times 53.5 / 1000 = 14.4 \text{ Mg}$, la ecuación anterior resulta en el requisito $V_s \geq 25.9 / 0.75 - 14.4 = 20.1 \text{ Mg}$. Además, modificando la Ec. 11-15 de ACI, se tiene

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{f_y d} = \frac{20.1 \times 1000}{4200 \times 53.5} = 0.0895 \text{ cm}^2/\text{cm}$$

Para cortante se necesitan estribos con $A_v / s = 0.0895 \text{ cm}^2/\text{cm}$.

8 Cálculo del área de estribos necesaria para torsión.

Según la Ec. 11-20 de ACI, $\phi T_n \geq T_u$, por lo tanto, $T_n \geq 3.83 \times 100,000 / 0.75 = 511,000 \text{ kg-cm}$. Además, modificando la Ec. 11-21 de ACI, se tiene que

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_n}{2A_o f_{yv} \cot \theta}$$

Según ACI Sec. 11.5.3.6: $A_o = 0.85A_{oh} = 0.85 \times 1300 \text{ cm}^2 = 1100 \text{ cm}^2$ y $\theta = 45^\circ$

$$\frac{A_t}{s} = \frac{511,000}{2 \times 1100 \times 4200} = 0.0553 \text{ cm}^2/\text{cm}$$

Para torsión se necesitan estribos con $A_t/s = 0.0553 \text{ cm}^2/\text{cm}$.

9 Suma de áreas de estribos y selección de estribos.

$$\frac{A_{v+t}}{s} = \frac{A_v}{s} + \frac{2A_t}{s} = 0.0895 + 2 \times 0.0553 = 0.200 \text{ cm}^2/\text{cm}$$

Verificación de acero mínimo según la Ec. 11-23 de ACI 318-08,

$$\frac{A_v + 2A_t}{s} = \max \left[\frac{0.2\sqrt{210} \times 35}{4200} (= 0.0242), \frac{3.5 \times 35}{4200} (= 0.0292) \right]$$

Como $0.200 > 0.0292$, se cumple con la condición de acero mínimo.

Para estribos No. 3, A_{v+t} (dos patas) = $2 \times 0.71 = 1.42 \text{ cm}^2$ y $s = 1.42/0.200 = 7.1 \text{ cm}$

Para estribos No. 4, A_{v+t} (dos patas) = $2 \times 1.27 = 2.54 \text{ cm}^2$ y $s = 2.54/0.200 = 12.7 \text{ cm}$

Según ACI 318-08 Art. 11.5.6.1, el espaciamiento máximo para estribos debe ser el menor entre los valores $p_h/8 = 153/8 = 19.1 \text{ cm}$ y 30 cm . Si se utiliza $s = 12.5 \text{ cm}$, se cumple con todos los requisitos.

∴ Usar No. 4 @ 12.5 cm centro a centro.

10 Diseño del refuerzo longitudinal para torsión.

Según la Ec. 11-22 de ACI 318-08,

$$A_t = \left(\frac{A_t}{s} \right) p_h \left(\frac{f_{yv}}{f_y} \right) \cot^2 \theta = 0.0553 \times 153 \times \frac{4200}{4200} \cot^2 45^\circ = 8.46 \text{ cm}^2$$

Verificación de refuerzo mínimo según la Ec. 11-24 de ACI 318-08,

$$A_{\ell, \min} = \frac{1.33\sqrt{210} \times 2100}{4200} - \left(\frac{1.29}{12.5}\right) \times 153 \times \frac{4200}{4200} = -5.91 \text{ cm}^2$$

Como $A_{\ell, \min} = -5.91 \text{ cm}^2$, entonces no aplica y $A_{\ell, \min}$ no gobierna.

$$\therefore A_{\ell} = 8.46 \text{ cm}^2.$$

Según ACI 318-08 Art. 11.5.6.2, el espaciamiento máximo de las barras longitudinales alrededor del perímetro de los estribos cerrados debe ser 30 cm. Por lo tanto, se necesitan al menos $153/30 = 5.1$ barras, i.e., 6 barras cada una con un área de $8.46 \text{ cm}^2/6 = 1.41 \text{ cm}^2$. Debe haber una barra en cada esquina del estribo. El diámetro mínimo de la barra debe ser $s/24 = 12.5/24 = 0.521 \text{ cm}$.

En resumen, según ACI Sec. 11.5.6.2 se deben usar al menos 6 barras con un $d_b \geq 0.521 \text{ cm}$ y un área de sección transversal no mayor que $A_{sb} = 1.41 \text{ cm}^2$.

\therefore Usar barras No. 4 distribuidas en todo el perímetro.

Para la parte superior se deben juntar las demandas de acero para flexión y para torsión; por lo tanto, se debe agregar $8.46 - 4 \times 1.27 = 3.38 \text{ cm}^2$ al acero para flexión. El área total de acero requerido en la parte superior es $18.3 \text{ cm}^2 + 3.38 \text{ cm}^2 = 21.7 \text{ cm}^2$.

Posibles escogencias:

6 No. 7 : $A_s = 23.22 \text{ cm}^2$ No caben en una sola capa.

2 No. 8 + 3 No. 7 : $A_s = 21.8 \text{ cm}^2$ OK!

EN RESUMEN:

- ✚ Usar sección rectangular de 35×60 cm, con concreto de 210 kg/cm² y acero ASTM A706 de grado 60.
- ✚ Refuerzo longitudinal: 2 No. 8 + 3 No. 7 en la parte superior, 2 barras No. 4 a la mitad del peralte y 2 barras No. 4 en la parte inferior en las esquinas de los estribos.
- ✚ Refuerzo transversal: Estribos cerrados con barra No. 4 con doblez de 135°.
- ✚ Recubrimiento de 4.0 cm en todo el perímetro de la sección.

□

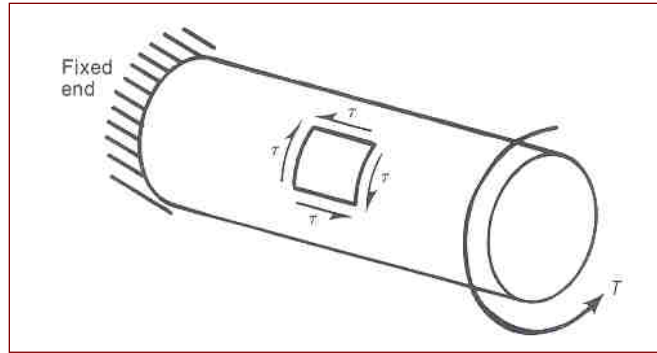


Figura 6–1 Esfuerzos tangenciales debidos a torsión.

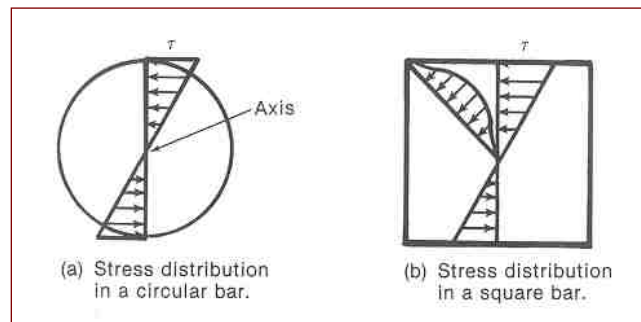


Figura 6–2 Distribución de esfuerzos en barras circular y cuadrada.

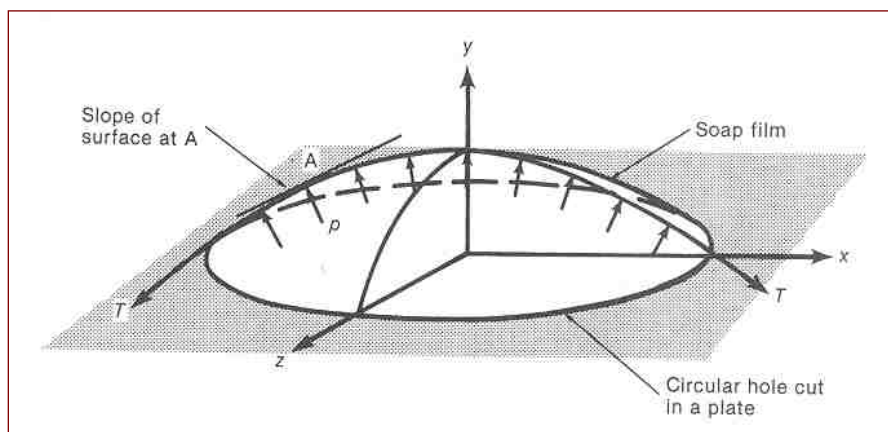


Figura 6–3 Analogía de la membrana para barra circular.

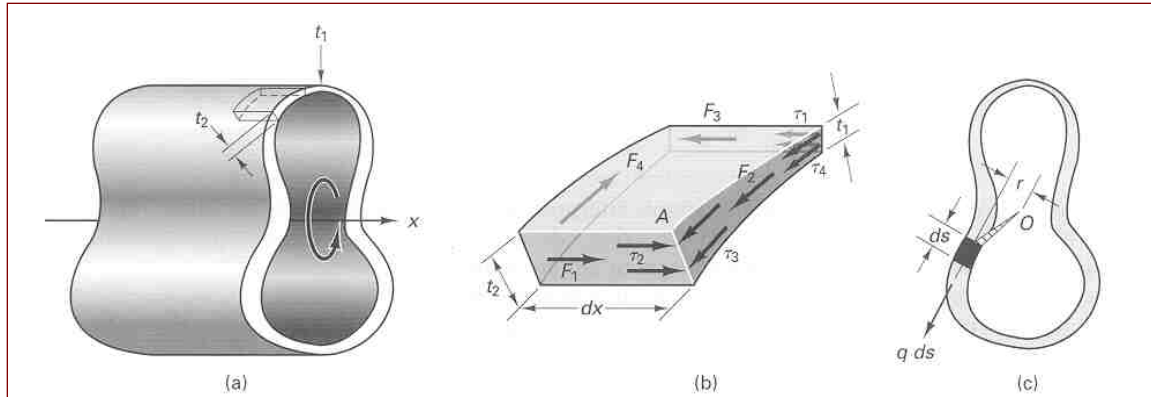


Figura 6-4 Esfuerzos cortantes en un tubo de pared delgada. (Tomado de Popov, E. P., Engineering Mechanics of Solids, 2nd Edition ©1999, p. 249.)

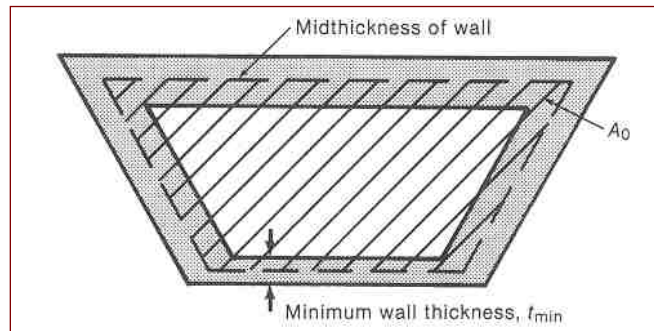


Figura 6-5 Tubo de pared delgada.

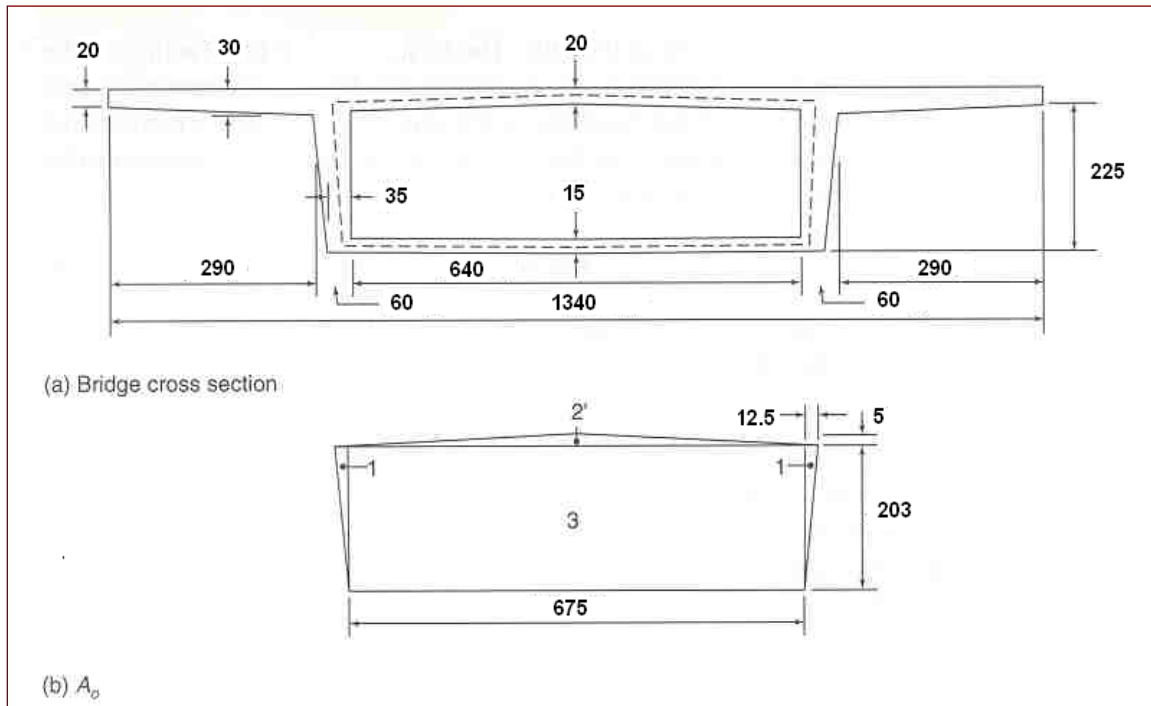


Figura 6-6 Sección transversal de un puente (cm) —Ejemplo 6-1

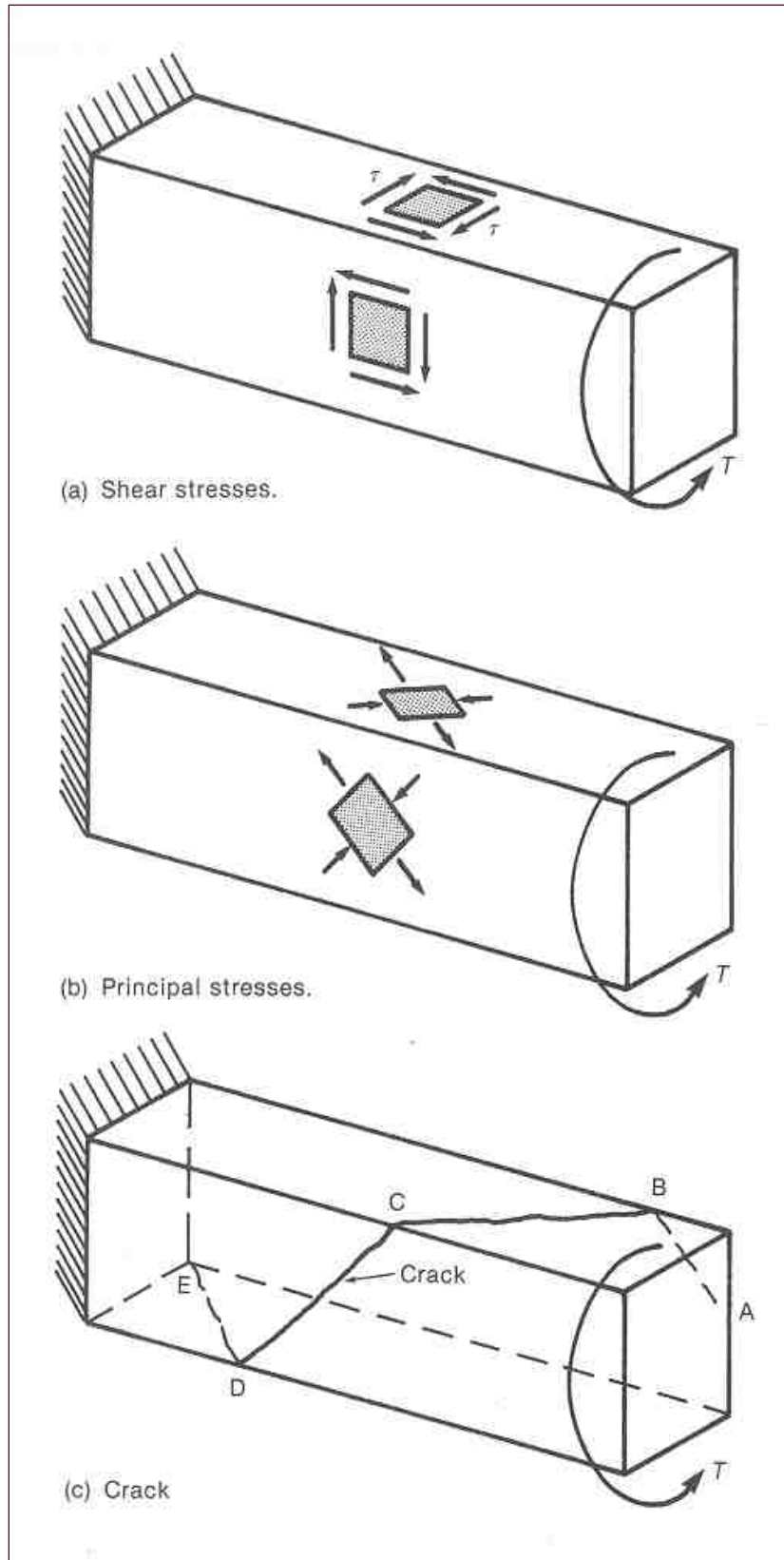


Figura 6-7 Esfuerzos principales y agrietamiento debido a torsión.

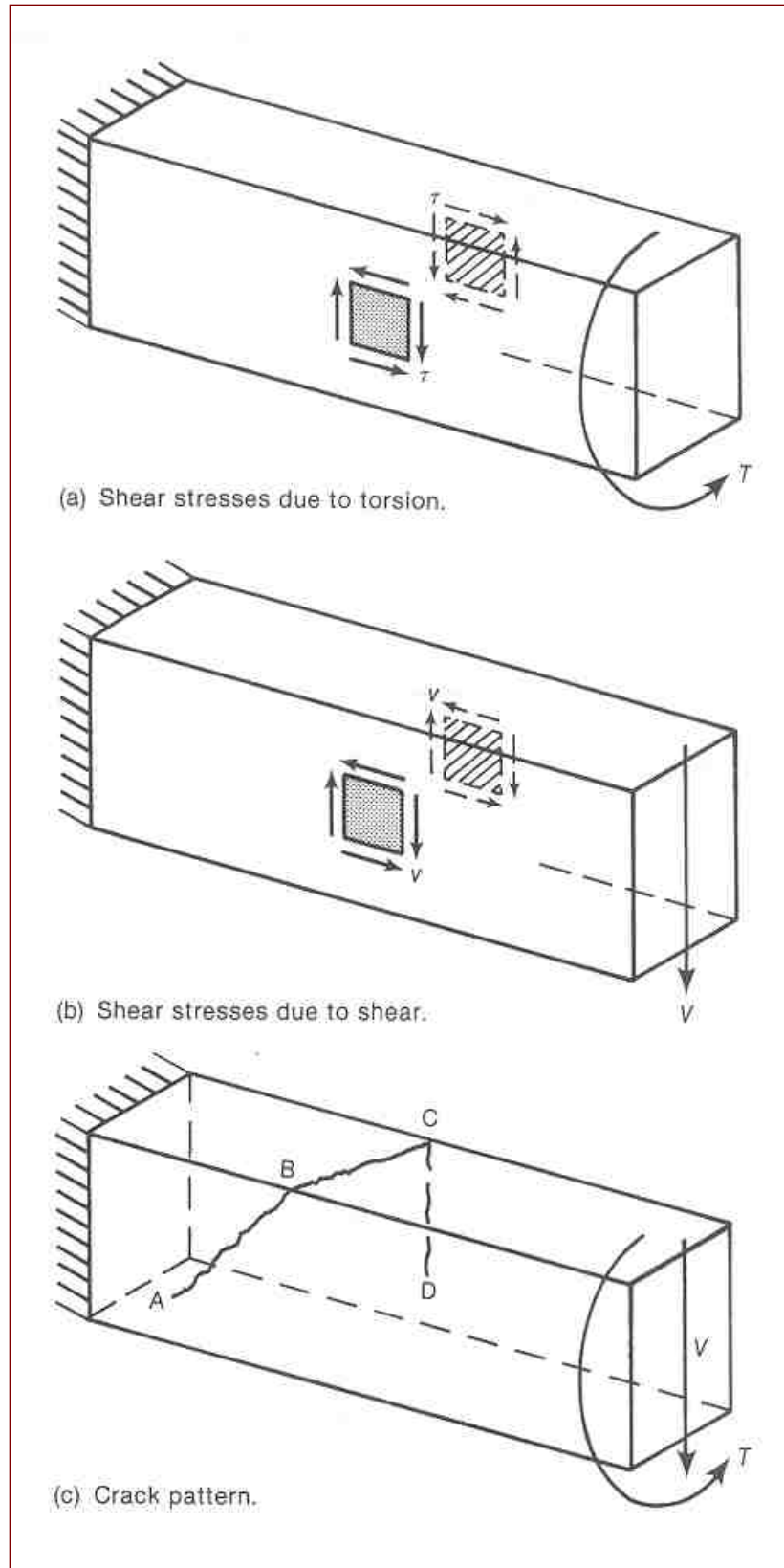


Figura 6–8 Torsión, cortante y momento combinados.

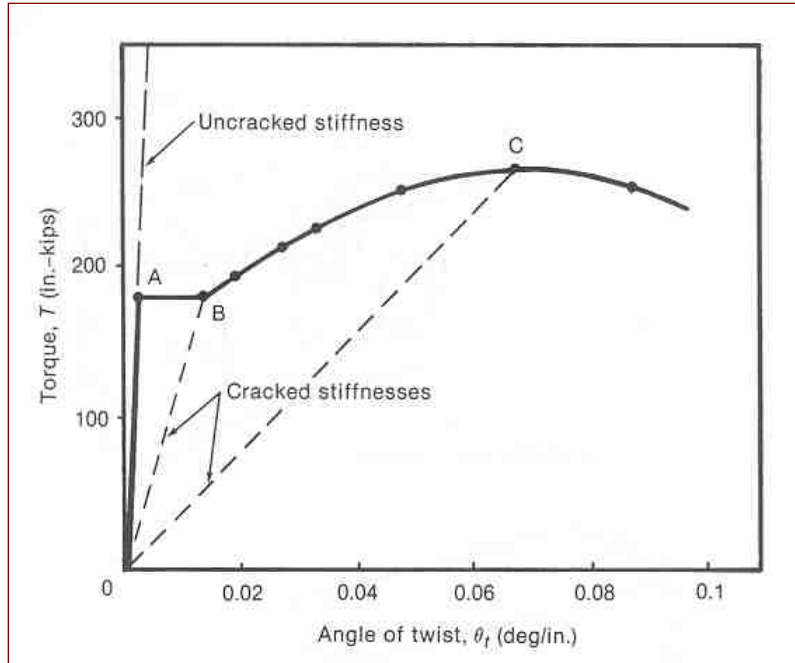


Figura 6-9 Diagrama de torque-distorsión para una viga rectangular. (Tomado de ACI SP-18)

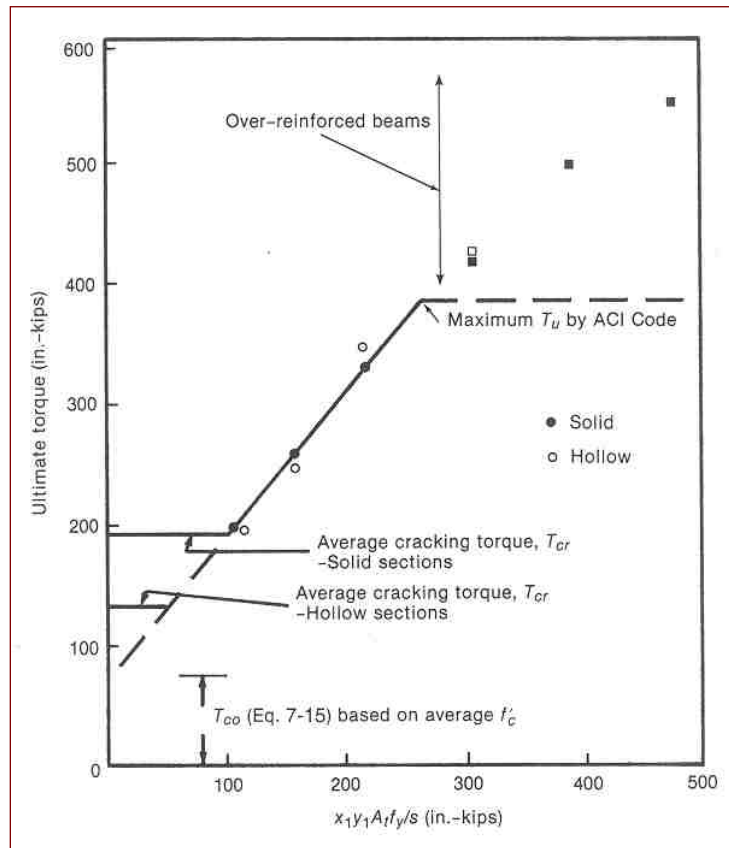


Figura 6-10 Resistencia a la torsión para secciones sólidas y huecas con idénticas dimensiones externas. (Tomado de ACI SP-18)

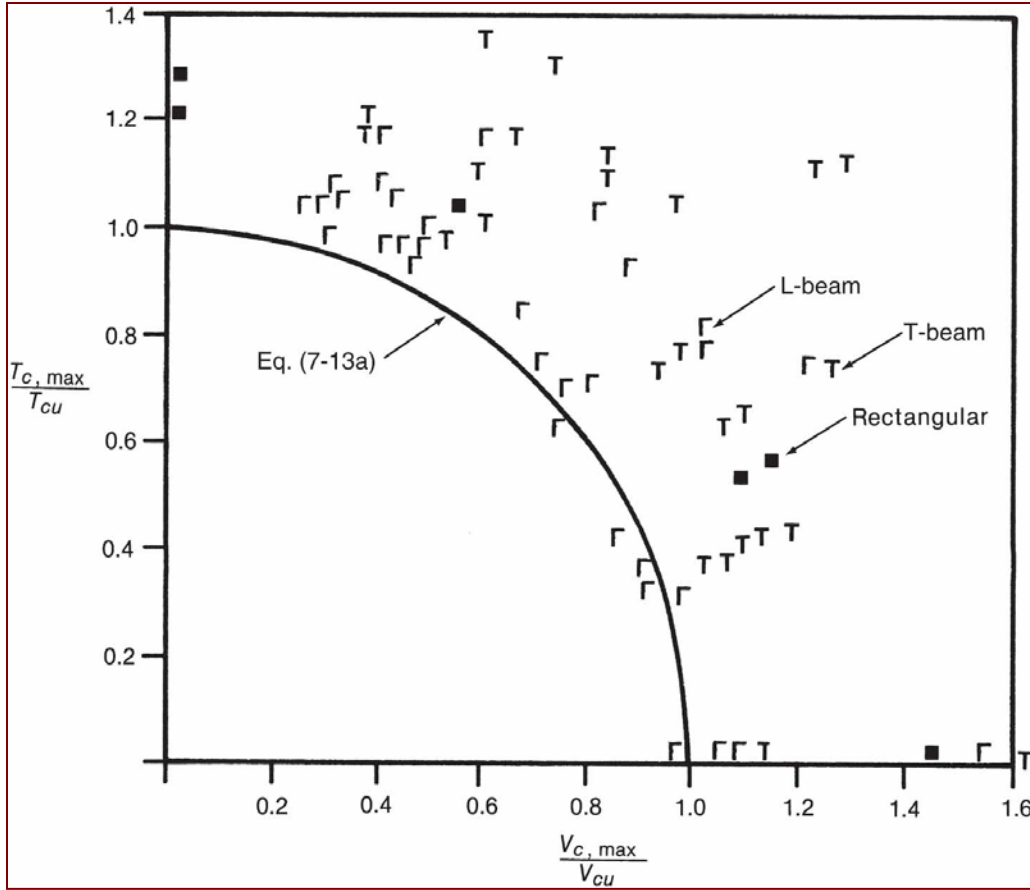


Figura 6-11 Interacción de torsión con cortante. (Tomado de ACI SP-18)

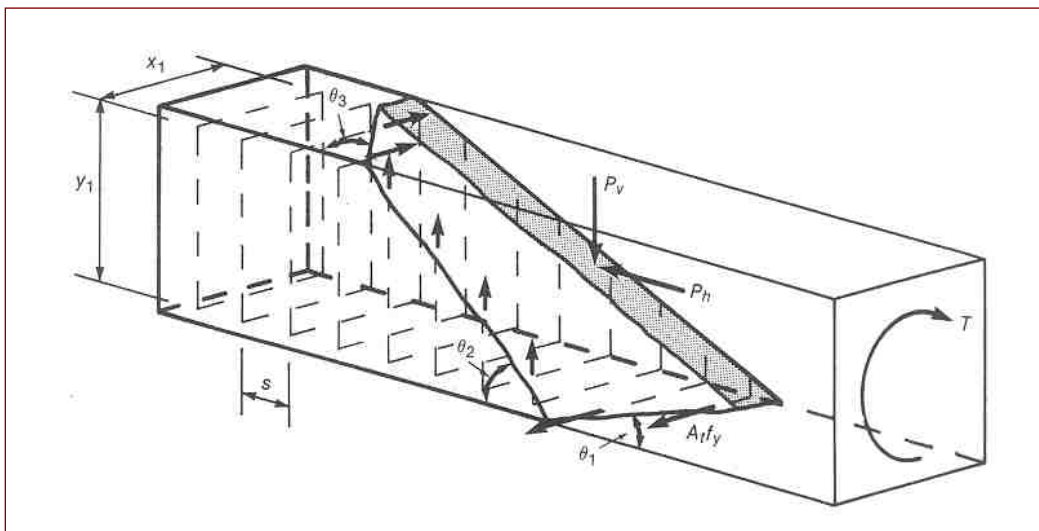


Figura 6-12 Superficie de falla por flexión sesgada.

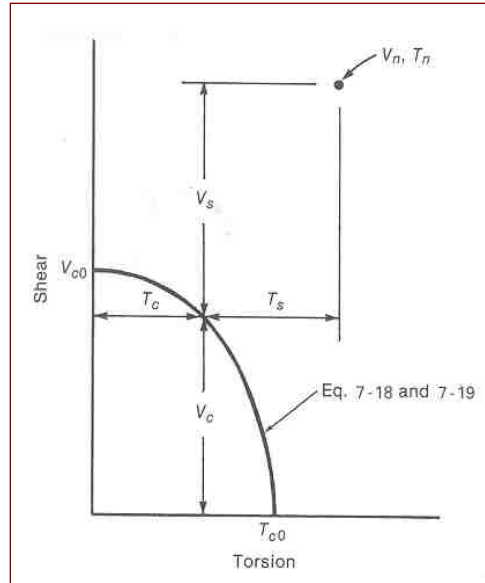


Figura 6–13 Diseño para cortante y torsión—teoría de flexión sesgada.

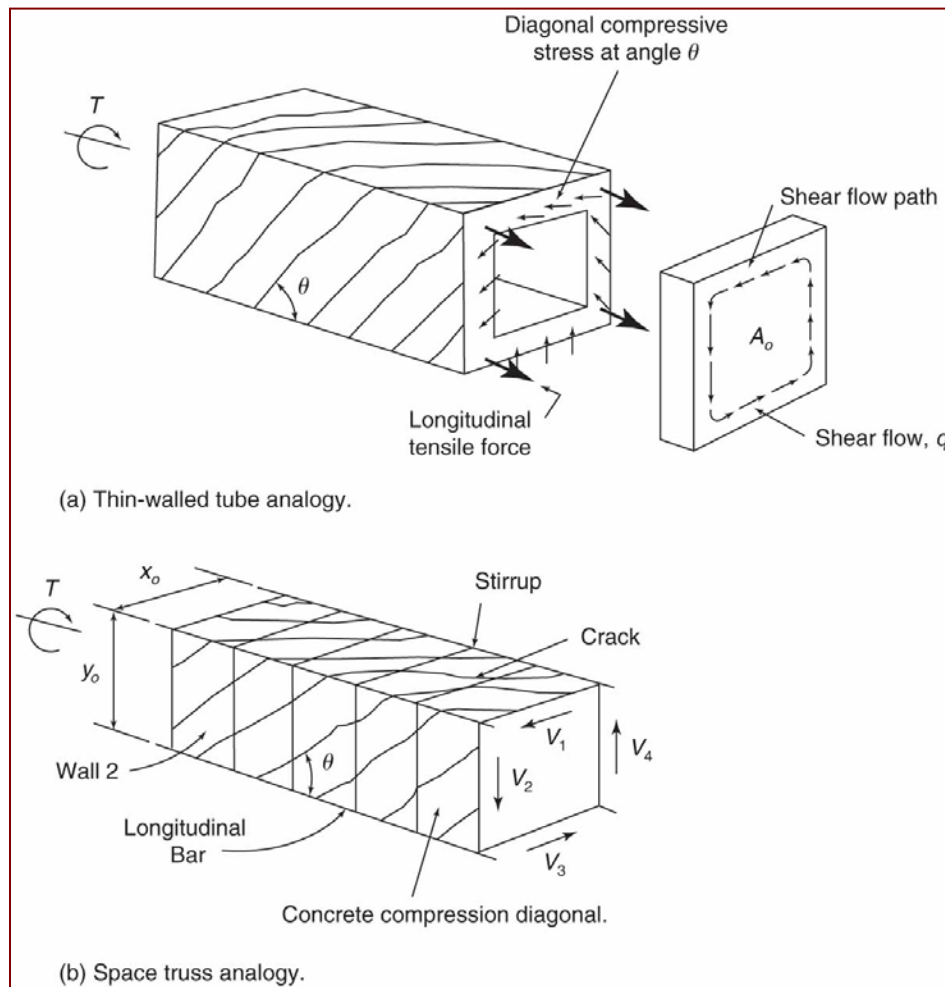


Figura 6–14 Analogía de tubo de pared delgada/cercha espacial. (Tomado de ACI Str. J., V. 92, No.2, p. 211-218)

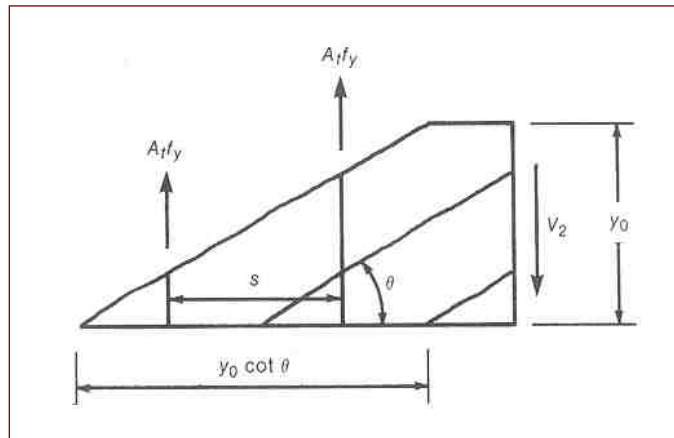


Figura 6–15 Fuerzas en estribos.

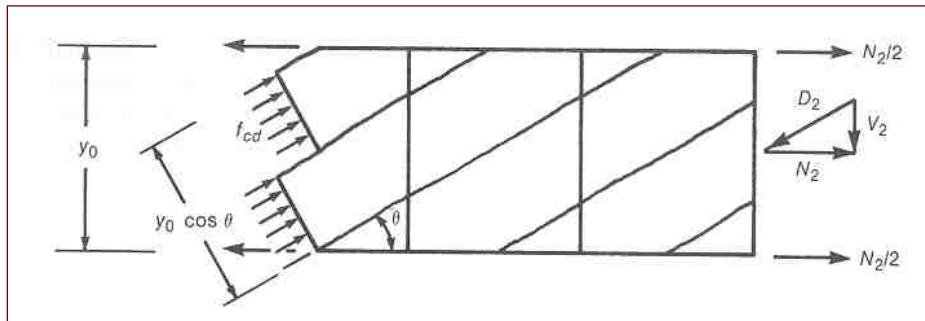


Figura 6–16 Cara lateral de la cercha espacial—solución para fuerza de cortante V_2 .

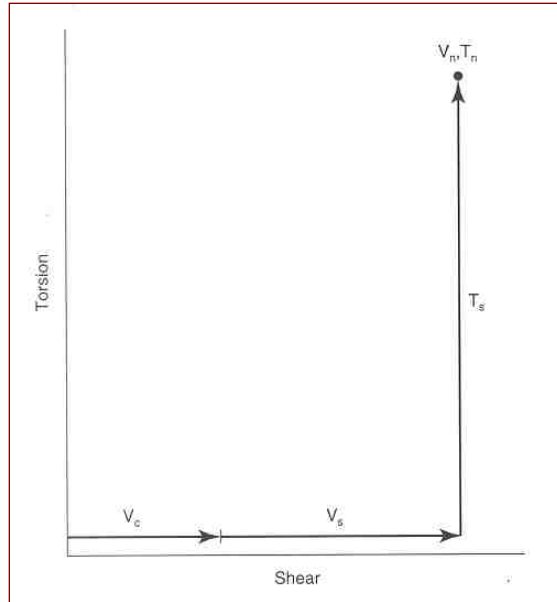


Figura 6–17 Diseño para cortante y torsión—Código ACI 318-95.

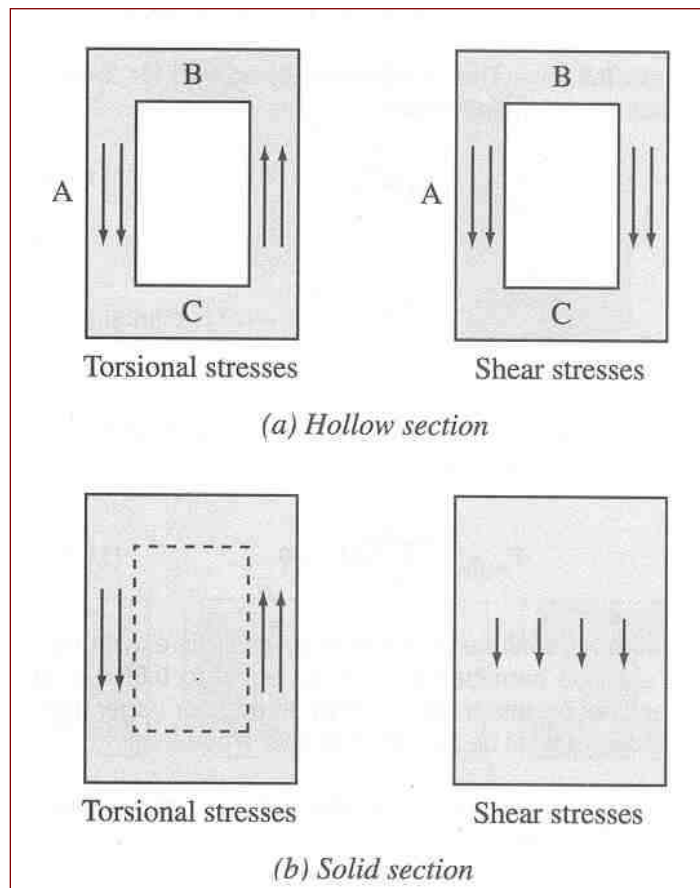


Figura 6–18 Suma de esfuerzos cortantes debidos a torsión y cortante. (Tomado de ACI 318-08)

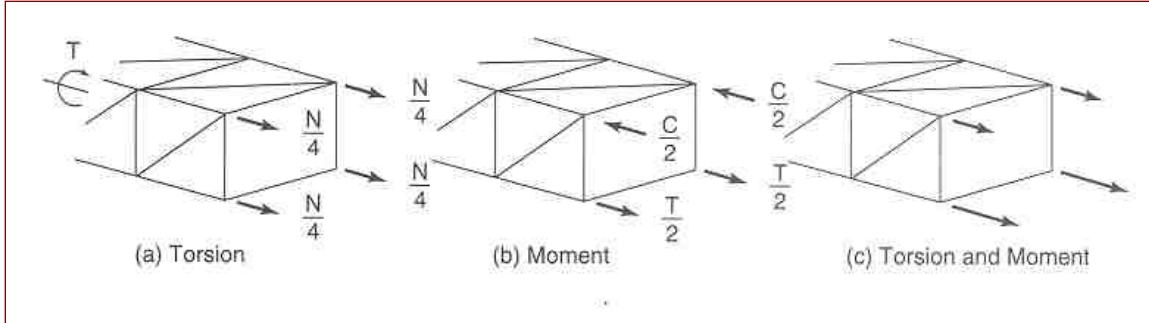


Figura 6–19 Fuerzas internas debido a torsión y momento combinados.

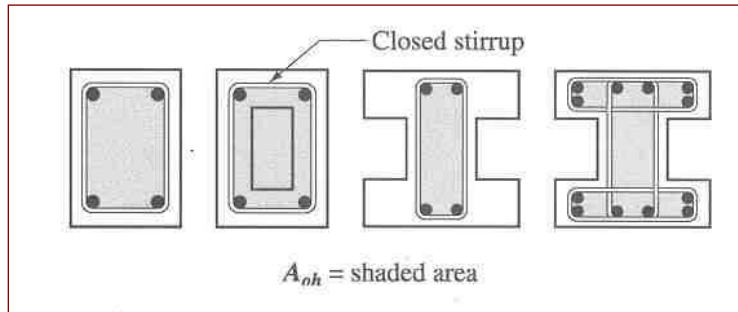


Figura 6–20 Definición de A_{oh} . (Tomado de ACI 318-08)

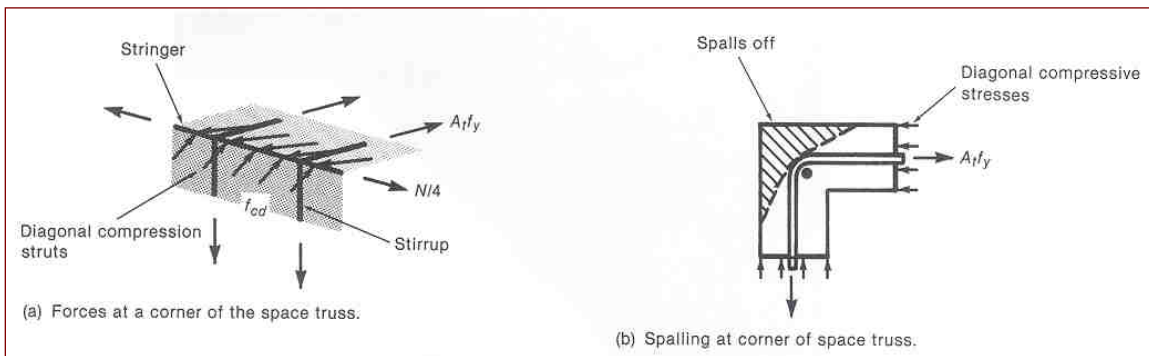


Figura 6–21 Fuerzas de compresión de puntal en la esquina de elemento sujeto a torsión.

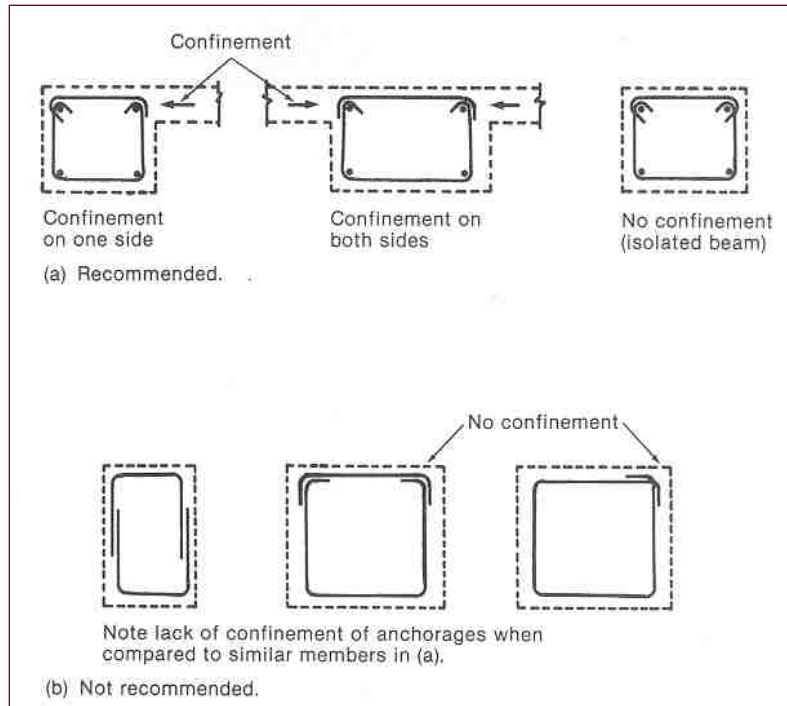


Figura 6–22 Anclaje de estribos cerrados. (Tomado de ACI 315-88)

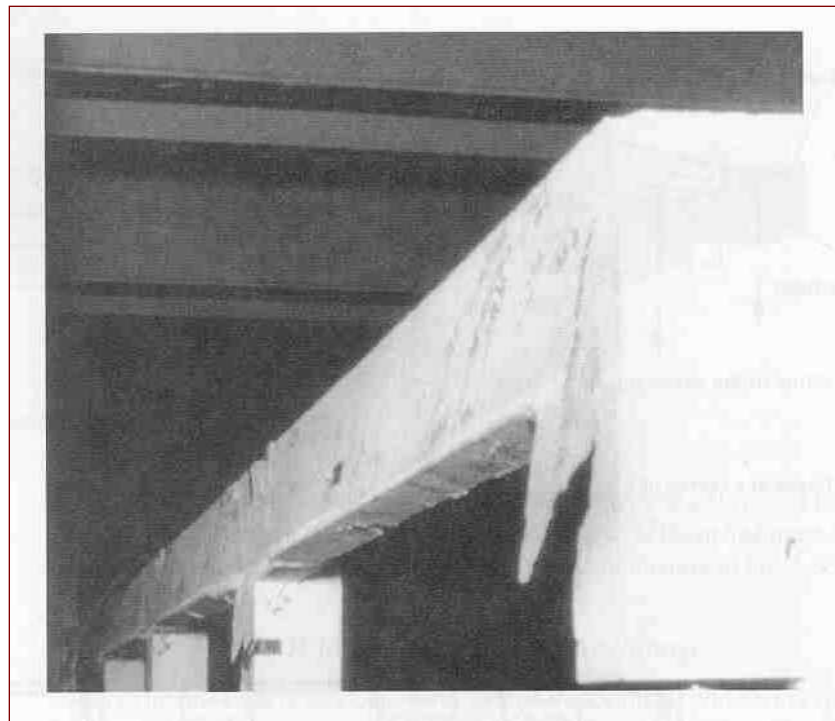


Figura 6–23 Falla torsional de una viga de borde (Fotografía cortesía de J.G. MacGregor).

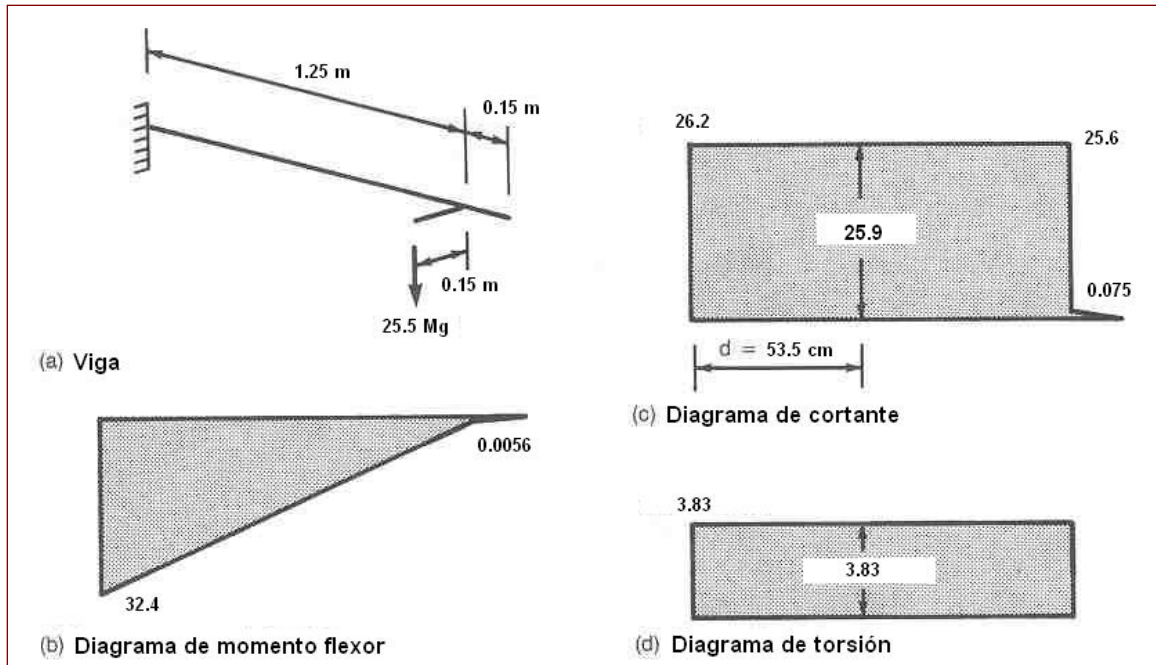


Figura 6-24 Viga en voladizo—Ejemplo 6-2

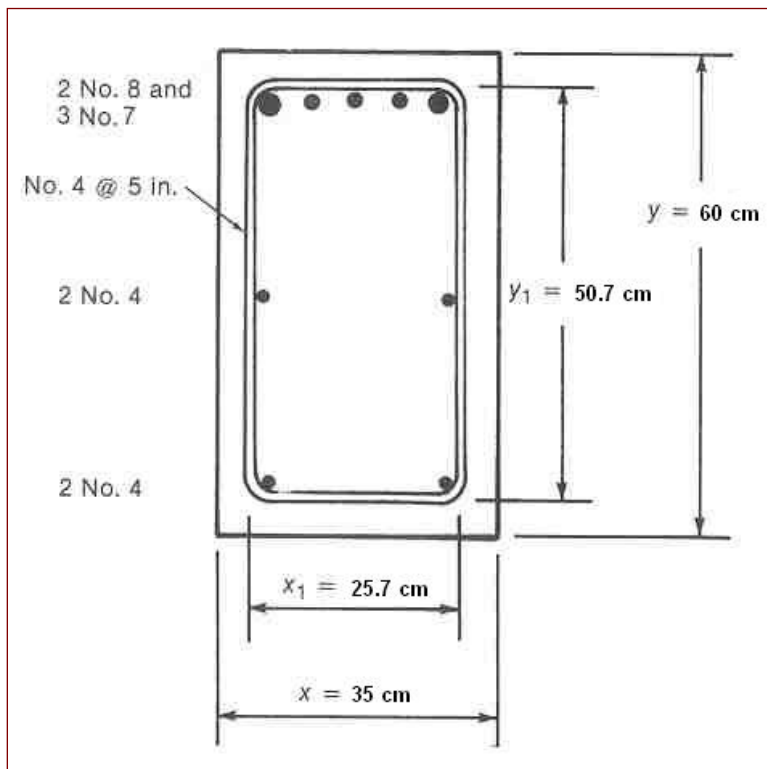


Figura 6-25 Viga en voladizo—Ejemplo 6-2

7. DESARROLLO, ANCLAJE Y EMPALME DEL REFUERZO DE ACERO

7.1 Introducción

Para el caso de flexión en vigas, el concreto resiste la compresión y el acero resiste la tracción. Para que esta fuerza de tracción exista debe lograrse una transferencia de fuerzas o *adherencia* entre los dos materiales. Para que la barra de refuerzo esté en equilibrio, deben existir esfuerzos de adherencia tal como se muestra en la figura 7-1. Si éstos desaparecieran entonces la barra se saldría del concreto y la fuerza de tracción T se haría cero, causando la falla de la viga.

En la figura 7-2 se presenta la variación de los esfuerzos de adherencia para cada punto de la barra.

$$\mu_{prom} (\pi d_b) \ell = \Delta f_s \frac{\pi d_b^2}{4}$$

$$\mu_{prom} = \frac{\Delta f_s d_b}{4\ell} \quad (7-1)$$

Si $\ell = dx$, entonces $\Delta f_s = df_s$ y se tiene

$$\frac{df_s}{dx} = \frac{4\mu}{d_b} \quad (7-2)$$

donde μ es el *esfuerzo de adherencia real* actuando en un tramo dx .

7.1.1 Esfuerzo promedio de adherencia en un viga

Sabemos que para una viga, la fuerza en el acero en una grieta se puede expresar como:

$$T = \frac{M}{jd} \quad (7-3)$$

Si consideramos el tramo entre grietas como se muestra en la figura 7-3, los momentos que actúan en las grietas son M_1 y M_2 . Si la viga está reforzada con una barra de diámetro d_b , las fuerzas en la barra son las que se muestran en la figura 7-3c. Sumando las fuerzas horizontales se tiene que

$$\Delta T = (\pi d_b) \mu_{prom} \Delta x \quad (7-4)$$

en donde d_b es el diámetro de la barra, por lo tanto,

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = (\pi d_b) \mu_{prom}$$

pero
$$\Delta T = \frac{\Delta M}{jd} \Rightarrow \frac{\Delta M}{\Delta x} = V = (\pi d_b) \mu_{prom} jd$$

por lo tanto,
$$\mu_{prom} = \frac{V}{(\pi d_b) jd} \quad (\text{esfuerzo de adherencia para una barra}) \quad (7-5)$$

$$\mu_{prom} = \frac{V}{\underbrace{(\sum O)}_{\text{sumatoria de perímetros}} jd} \quad (\text{esfuerzo de adherencia para varias barras}) \quad (7-6)$$

Las ecuaciones 7-5 y 7-6 expresan el *esfuerzo promedio de adherencia* entre dos grietas en una viga.

7.1.2 Esfuerzos de adherencia en prisma cargado axialmente

La figura 7-4a muestra un prisma de concreto conteniendo una barra de refuerzo sometida a tracción. En las grietas, el esfuerzo en el acero es $f_s = P/A_s$. Entre las grietas, una porción de la carga es transferida al concreto por adherencia. Esto resulta en la distribución de esfuerzos en el acero y en el concreto mostrada en las figuras 7-4b y 7-4c. De la ecuación 7-2 vemos que el esfuerzo de adherencia en cualquier punto es proporcional a la pendiente del diagrama de esfuerzo en el acero en ese punto. Así, la distribución de esfuerzos de adherencia es la mostrada en la figura 7-4d. Como el esfuerzo en el acero es igual en todas las grietas, la fuerza también será igual, de manera que $\Delta T = 0$ en las grietas, y de la ecuación 7-4 vemos que el esfuerzo promedio de adherencia, μ_{prom} , también es igual a cero. Así, para que el esfuerzo promedio de adherencia sea cero, el área total bajo el diagrama de esfuerzos de adherencia entre dos grietas consecutivas cualesquiera en la figura 7-4d debe ser cero cuando $\Delta T = 0$.

Los esfuerzos de adherencia dados en la ecuación 7-2 y graficados en la figura 7-4d se denominan *esfuerzos de adherencia reales* o *esfuerzos de adherencia de entrada y salida* (transfieren esfuerzos hacia la barra y fuera de ella) para distinguirlos de los *esfuerzos promedio de adherencia* calculados con la ecuación 7-1.

7.1.3 Esfuerzo de adherencia real en un viga

En las grietas de una viga, la fuerza en la barra puede ser calculada con la ecuación 7-3. Si la barra está adherida al concreto, una parte de la fuerza de tracción será resistida por el concreto en los puntos entre grietas. Por lo tanto, los esfuerzos de tracción en el acero y el concreto al nivel del acero variarán según se muestra en las figuras 7-5c y 7-5d. Esto da origen a la distribución de esfuerzo de adherencia graficado en la figura 7-5e. Una vez más, existen esfuerzos de adherencia de entrada y salida, pero ahora el área total bajo el diagrama de esfuerzos de adherencia no es cero. El esfuerzo de adherencia promedio en la figura 7-5e debe ser igual al valor dado en la ecuación 7-5.

7.1.4 Prueba de extracción para esfuerzos de adherencia

La manera más sencilla de probar en el laboratorio la resistencia de adherencia de barras es mediante la *prueba de extracción*. En ella, un cilindro de concreto conteniendo una barra es montado sobre una placa rígida. Se usa una gata para extraer la barra del cilindro, tal como se muestra en la figura 7-6a. En una prueba como ésta, el concreto es comprimido por lo cual no sufre agrietamiento. El esfuerzo en la barra varía de acuerdo a como se muestra en la figura 7-6b y el esfuerzo de adherencia varía de acuerdo a la figura 7-6c. Esta prueba no brinda valores representativos de la resistencia de adherencia de vigas porque el concreto no se agrieta y por lo tanto no se presenta una distribución de esfuerzos de adherencia de entrada y salida como los mostrados en la figura 7-4d. Además los esfuerzos portantes del concreto contra la placa causan un componente friccional que resiste la expansión transversal resultante del efecto de Poisson. Antes de 1950, las pruebas de extracción eran usadas para determinar la resistencia de adherencia de barras. Desde ese entonces se ha pasado a pruebas de barras en vigas para estudiar la resistencia de adherencia.

7.2 Mecanismo de transferencia por adherencia

Una barra lisa embebida en concreto desarrolla adherencia mediante enlace entre el concreto y la barra y además, en menor medida, por fricción. Ambos efectos se pierden muy rápidamente, una vez que la barra es sometida a tracción. Esto debido en parte al efecto de Poisson que tiende a disminuir el área de la sección transversal de la barra. Esta es la razón por la cual generalmente no se usan barras lisas como refuerzo. En casos en los cuales se deben usar barras lisas, (pernos de anclaje, estribos de barras de poco diámetro, etc.) se utilizan anclajes mecánicos en los extremos empotrados en el concreto. Los anclajes utilizados corresponden a ganchos, arandelas, tuercas y otros dispositivos similares.

Aún cuando enlace y fricción están presentes en las barras deformadas sometidas a carga axial, estos mecanismos de transferencia por adherencia desaparecen rápidamente. Esto deja la transferencia por adherencia en función del apoyo mecánico producido entre el concreto y las deformaciones de la barra de refuerzo. Como se ve en las figuras 7-7b y 7-7c, estas fuerzas tienen componentes radiales y longitudinales que actúan sobre el concreto. El componente radial causa esfuerzos de tracción en el concreto alrededor de la barra, ver figura 7-7d. Eventualmente, el concreto se fractura en forma paralela al refuerzo y la grieta resultante se propaga hacia la superficie libre más cercana. Las grietas de fracturamiento siguen la línea de las barras de refuerzo a lo largo de las caras inferior o lateral de la viga. Una vez que estas grietas se forman, la transferencia por adherencia disminuye rápidamente a menos de que se provea refuerzo que prevenga la apertura de la grieta por fracturamiento.

La carga a la cual se desarrolla la falla por fracturamiento es función de los siguientes parámetros:

1. La distancia mínima entre la barra y la superficie libre del concreto o bien entre ésta y la siguiente barra. A menor distancia, menor será la carga que producirá fractura.
2. La resistencia a la tracción del concreto.
3. El esfuerzo promedio de adherencia. Conforme este aumenta, así aumentan las fuerzas de acúñamiento conducentes a fractura.

Cuando el recubrimiento y el espaciamiento entre barras es grande comparado con el diámetro de éstas, se puede producir una falla por extracción de la barra. La zona de falla sería cilíndrica y con un cilindro de diámetro igual al de la barra con sus deformaciones.

7.3 Longitud de desarrollo

Como el esfuerzo de adherencia real varía a lo largo de una barra anclada en una zona de tracción, ver figura 7-5e, la normativa ACI 318 usa el concepto de *longitud de desarrollo* en vez de esfuerzo de adherencia. La longitud de desarrollo ℓ_d es la menor longitud de la barra en la cual los esfuerzos pueden incrementarse desde cero hasta la resistencia de fluencia, f_y . Si la distancia desde un punto en donde el esfuerzo en la barra es igual a f_y hasta el final de la barra es menor que la longitud de desarrollo, la barra será extraída del concreto. Las longitudes de desarrollo son diferentes para la tracción y para la compresión porque una barra cargada en tracción esta sujeta a esfuerzos de adherencia de entrada y de salida y por tanto requiere una longitud de desarrollo considerablemente mayor. Además, para una barra en compresión, los esfuerzos de aplastamiento al final de la barra transfieren parte de la fuerza de compresión al concreto.

La longitud de desarrollo puede ser expresada en términos del valor último del esfuerzo promedio de adherencia, haciendo $\Delta f_s = f_y$ en la ecuación 7-1:

$$\ell_d = \left(\frac{f_y}{4\mu_{prom,u}} \right) d_b \quad (7-7)$$

donde $\mu_{prom,u} = \mu_{prom}$ al momento de falla por adherencia en una viga de prueba.

7.3.1 Longitud de desarrollo para tracción

ECUACIÓN BÁSICA PARA LONGITUD DE DESARROLLO EN TRACCIÓN

En 1977, Orangun et al. ajustaron una ecuación de regresión a los resultados de una gran cantidad de pruebas de adherencia y empalme. La ecuación sirvió de base para los requisitos de longitud de desarrollo del ACI 318-89. Estos requisitos resultaron difíciles de usar y en consecuencia entre 1989 y 1995 se simplificaron considerablemente las expresiones para diseño. En el ACI 318-08, el Artículo 12.2.3 propone:

$$\ell_d = \frac{f_y}{3.5\lambda\sqrt{f'_c}} \frac{\psi_t\psi_e\psi_s}{\left(\frac{c_b + K_{tr}}{d_b}\right)} d_b$$

ACI 318-08 Ec. 12-1

en donde $\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} \leq 2.5$ para prevenir que ocurra falla por extracción.

ℓ_d = longitud de desarrollo en cm ≥ 30 cm

d_b = diámetro de la barra en cm

ψ_t = factor por ubicación de la barra (ACI 318-08 Art. 12.2.4(a))

ψ_e = factor por revestimiento epóxico de la barra (ACI 318-08 Art. 12.2.4(b))

ψ_s = factor por diámetro de barra (ACI 318-08 Art. 12.2.4(c))

λ = factor por concreto liviano (ACI 318-08 Art. 12.2.4(d))

c_b = el menor de (ACI 318-08 Art. 2.1):

1. la menor distancia entre la superficie libre del concreto y el centro de la barra a desarrollar.
2. un medio del espaciamiento centro-a-centro de las barras a desarrollar.

K_{tr} = factor para refuerzo transversal (ACI 318-08 Art. 12.2.3)

ECUACIONES DE LONGITUD DE DESARROLLO SIMPLIFICADAS

En la mayoría de ocasiones, la ecuación 12-1 del ACI podría ser difícil de usar porque c_b y K_{tr} varían a lo largo de una viga. Esta ecuación fue simplificada sustituyendo cotas inferiores de c_b y K_{tr} para los casos de diseño más comunes. Las ecuaciones se presentan en la Tabla 7-1 (ACI 318-08 Art. 12.2.2). La figura 7-9 muestra una explicación de los casos 1 y 2. Los valores de estas ecuaciones se presentan en la Tabla A-11. La Tabla A-6 puede usarse para encontrar el ancho mínimo b_w de la viga para el caso 1.

COEFICIENTES INCLUIDOS EN LA ECUACIÓN 12-1 DEL ACI 318-08

Los coeficientes ψ_t , ψ_e , ψ_s , λ , c_b , K_{tr} están explicados en ACI 318-08 Artículos 12.2.3 y 12.2.4 de la siguiente manera:

ψ_t = **coeficiente de ubicación de barra**

Para refuerzo horizontal ubicado por encima de al menos 30 cm de concreto fresco (refuerzo superior)	1.3
Para todo otro refuerzo	1.0

ψ_e = **coeficiente de revestimiento**

Barras con revestimiento epóxico con recubrimiento menor que $3d_b$ o con espaciamiento entre barras menor que $6d_b$	1.5
Todas las otras barras con revestimiento epóxico	1.2
Barras sin revestimiento	1.0

El producto de $\psi_t \psi_e$ no puede ser mayor que a 1.7.

$\psi_s =$ **coeficiente de tamaño de barra**

para barras No. 6 y menores	0.8
para barras No. 7 y mayores	1.0

$\lambda =$ **coeficiente de concreto liviano**

Cuando se usa concreto liviano	0.75
En concreto para el cual f_{ct} es conocido o especificado, λ puede ser tomado como $\frac{f_{ct}}{1.78\sqrt{f'_c}}$ pero no mayor que	1.0
Cuando se usa concreto de peso normal	1.0

$$K_{tr} = \text{índice de refuerzo transversal} = \frac{40A_{tr}}{sn}$$

$A_{tr} =$ Area de sección transversal total de todo refuerzo transversal en un espaciamiento s , que cruce el plano de fracturamiento potencial a lo largo del refuerzo para el cual se considera la longitud de desarrollo, en cm^2 , ver figura 7-10.

$s =$ Espaciamiento máximo centro-a-centro del refuerzo transversal dentro de ℓ_d en cm.

$n =$ Número de barras desarrolladas a lo largo del plano de fracturamiento.

ACI 318-08 Artículo 12.2.3 permite tomar $K_{tr} = 0$ para simplificar los cálculos, aún cuando el acero transversal esté presente.

7.3.2 Longitudes de desarrollo para compresión

La longitud de desarrollo para compresión es considerablemente menor que la de tracción porque parte de la fuerza es transferida al concreto por soporte del extremo de la barra en éste. Además, como no hay grietas en una región de anclaje, no hay efecto de esfuerzo de adherencia de entrada y salida. De acuerdo con ACI 318-08 Artículo 12.3, se tiene:

$$\ell_{dc} > \max \left[\left(\frac{0.075 f_y}{\lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b, (0.0044 f_y) d_b, 20 \text{ cm} \right] \quad (7-12)$$

También aplican los factores de modificación de ACI 318-08 Artículo 12.3.3.

7.3.3 Longitudes de desarrollo para barras aglomeradas

Cuando se requiere usar un gran número de barras en una viga o en una columna, las barras son colocadas a veces en grupos de 2, 3 o 4 barras (ACI 318-08 Art. 7.6.6). El perímetro efectivo para falla por adherencia de aglomeraciones es menor que el perímetro total de las barras individuales que forma el grupo. El ACI 318-08 Artículo 12.4 prevee la utilización de barras aglomeradas incrementando la longitud de desarrollo 1.2 veces la de

una barra sola para aglomerados de 3 barras y 1.33 para aglomerados de 4 barras. En estos casos d_b usado en ACI 318-08 Art. 12.4.2 debe ser tomado como el de una barra hipotética con un área igual al área total del aglomerado.

7.4 Anclajes mediante ganchos

7.4.1 Comportamiento de ganchos de anclaje

Los ganchos se usan cuando se necesita anclaje adicional al que permiten las dimensiones longitudinales de desarrollo. Se usan los ganchos normales de 90° y 180° propuestos por el ACI y mostrados en la figura 7-12. La figura 7-13 muestra los resultados de pruebas de extracción realizados con ganchos de 90° y 180° utilizando barra No. 7.

7.4.2 Diseño de ganchos de anclaje

La longitud de desarrollo para un gancho es ℓ_{dh} . El ACI 318-08 Artículo 12.5 presenta el método de cálculo ha utilizar. Para una barra deformada, la longitud de desarrollo será la indicada en la ecuación 7-13. Adicionalmente, la longitud de desarrollo final no podrá ser menor que el mayor de $8d_b$ o 15 cm.

$$\ell_{dh} = \left(\frac{0.075\psi_e f_y}{\lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b \quad (7-13)$$

Los factores ψ_e y λ toman los valores presentados anteriormente, 1.2 para recubrimiento epóxico y 1.3 para concreto liviano. En todos los demás casos serán iguales a 1.0. Adicionalmente, esta longitud de desarrollo puede ser modificada utilizando los coeficientes presentados en el ACI 318-08 Artículo 12.5.3 incisos a) a d). Sin embargo, para zonas sísmicas 3 y 4 según el CSCR-02, no se recomienda aplicar la reducción 12.5.3 inciso d).

En los extremos discontinuos de elementos en los cuales tanto el recubrimiento lateral como el superior (o inferior) de la barra de entrada del gancho sean menores que 6.5 cm, la sección 12.5.4 de ACI exige que el gancho sea confinado a lo largo de la longitud ℓ_{dh} mediante estribos espaciados una distancia no mayor que $3d_b$, en donde d_b es el diámetro de la barra a desarrollar. En esta región no aplican las reducciones permitidas en el Artículo 12.5.3b y c. El artículo 12.5.4 aplica si los esfuerzos en la barra son tales que se necesiten ganchos en puntos tales como los extremos de vigas simplemente apoyadas (particularmente para vigas profundas), en los extremos libres de voladizos y en los extremos de elementos que terminen en un **nudo**. Aun cuando el artículo 12.5.4 pide el confinamiento a lo largo de toda la longitud ℓ_{dh} , el confinamiento es efectivo solamente en la región en que el concreto se desprendería si ocurriera aplastamiento en el interior del gancho. Como esta región se extiende de 6 a 10 diámetros de barra desde el interior

del gancho, 3 o 4 estribos serán adecuados. No se deben usar ganchos para desarrollar barras en compresión porque el soporte en la parte externa del gancho no resulta efectivo.

Existen requisitos específicos dados en el Artículo 21.7.5.1 para ganchos en nudos de *pórticos especiales resistentes a momento* (resisten fuerzas sísmicas). Como tales ganchos deben estar dentro de la columna, estas reglas proveen implícitamente su confinamiento.

7.5 Diseño para anclajes

La regla básica que gobierna el desarrollo y anclaje de barras es la siguiente:

“La tracción o la compresión calculada en el refuerzo para cada sección de elementos de concreto estructural debe ser desarrollada hacia cada lado de dicha sección mediante una longitud embebida en el concreto por medio de gancho, *barra corrugada con cabeza* o dispositivo mecánico, o una combinación de ellos. Los ganchos y barras corrugadas con cabeza no se deben emplear para desarrollar barras en compresión” (ACI 318-08 Artículo 12.1.1)

Ejemplo 7-1 Anclaje de una barra recta

Viga en voladizo de 1.50 m de longitud y sección transversal de 45×40 cm con 3 No. 8 en fluencia en A, según figura 7-14. Calcular la longitud mínima de embebido de las barras en el muro.

Datos: Concreto liviano $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$,
Acero con $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ para flexión y muro y $f_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$ para estribos,
juntas de construcción según muestra,
recubrimiento 4 cm al refuerzo vertical del muro de No. 4 @ 30 cm.

Solución usando Tabla 7-1:

❶ Determinar caso de espaciamiento y confinamiento.

El recubrimiento para las barras No. 8 en la pared es $4.0 + 1.27 = 5.27 \text{ cm} = 2.1d_b$

El espaciamiento entre barras es:

$$\frac{40 - 2(4.0 + 1.27) - 3 \times 2.54}{2} = 10.9 \text{ cm} = 4.3d_b$$

No hay estribos en el muro. Como la distancia entre barras es mayor que $2d_b$ y el recubrimiento es mayor que d_b , este es Caso 2. Usar la ecuación 7-9 de la Tabla 7-1.

❷ Cálculo de longitud de desarrollo.

$$\ell_d = \left(\frac{\psi_t \psi_e f_y}{5.3 \lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b$$

donde

$\psi_t = 1.3$ porque hay más de 30 cm concreto fresco

$\psi_e = 1.0$ no epóxico

$\lambda = 0.75$ concreto liviano

$$\ell_d = \frac{4200 \times 1.3 \times 1.0}{5.3 \times 0.75 \sqrt{210}} \times 2.54 = 94.8 \times 2.54 = 241 \text{ cm} \cong 2.40 \text{ m}$$

Solución alternativa:

Usar ACI 318-08 Artículo 12.2.3 y

❶ Cálculo de longitud de desarrollo.

$$\ell_d = \frac{f_y}{3.5 \lambda \sqrt{f'_c}} \left(\frac{\psi_t \psi_e \psi_s}{c_b + K_{tr}} \right) d_b$$

donde $\psi_t = 1.3$, $\psi_e = 1.0$, $\lambda = 0.75$ y $\psi_s = 1.0$ porque las barras son No. 8.

c_b = el menor de

- a) distancia del centro de la barra a la superficie libre más cercana:
recubrimiento lateral = $4.0 + 1.27 + 2.54/2 = 6.54$ cm, recubrimiento superior en el punto A = $4.0 + 0.95 + 2.54/2 = 6.22$ cm.
- b) la mitad del espaciamiento centro a centro entre barras,

$$\frac{40 - 2(4.0 + 1.27 + 2.54/2)}{2 \times 2} = 6.73 \text{ cm}$$

$\therefore c_b = 6.22$ cm

$$K_{tr} = \frac{40 A_{tr}}{sn}$$

donde $s = 30$ cm = espaciamiento del refuerzo transversal dentro del muro a lo largo de la longitud de embebido de la barra

A_{tr} = área total de acero de refuerzo transversal que cruza el plano de fracturamiento a lo largo del espaciamiento s , $= 2 \times 1.29 = 2.58$ cm².

n = número de barras por anclar = 3

Por lo tanto:

$$K_{tr} = \frac{40 \times 2.58}{30 \times 3} = 1.15 \text{ cm}$$

$$\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} = \frac{6.22 + 1.15}{2.54} = 2.90 > 2.5$$

$$\therefore \ell_d = \frac{4200}{3.5 \times 0.75 \sqrt{210}} \frac{1.3 \times 1.0 \times 1.0}{2.5} \times 2.54 = 57.4 \times 2.54 = 146 \text{ cm}$$

Usar $\ell_d = 1.50 \text{ m}$. □

La diferencia en resultados se debe a que $\frac{c_b + K_{tr}}{d_b}$ se tomó como 1.5 en el caso anterior.

Ejemplo 7-2 Desarrollo de barra en el voladizo

De acuerdo con la figura 7-14, el voladizo se extiende una longitud 1.50 m. Las barras están sujetas al esfuerzo f_y en la sección A. ¿Existe suficiente longitud para el desarrollo de la barra? La viga tiene aros No. 3 grado 40 a cada 18 cm centro a centro.

❶ Determinar caso de espaciamiento y confinamiento.

Del ejemplo anterior, el espaciamiento libre entre las barras No. 8 es $4.5d_b$. Para un espaciamiento entre estribos de 18 cm, el área mínima de estribos según ACI 318-08 Artículo 11.4.6.3 es (ecuación 11-13)

$$A_{v,\min} = \max \left[0.2 \sqrt{f'_c} \frac{b_w s}{f_{yv}} (= 0.745 \text{ cm}^2), 3.5 \frac{b_w s}{f_{yv}} \left(= 3.5 \frac{40 \times 18}{2800} = 0.90 \text{ cm}^2 \right) \right]$$

Los estribos con que se cuenta son No. 3 de doble brazo, $A_v = 1.42 \text{ cm}^2$. El espaciamiento no excede el máximo de $d/2 = 19.8 \text{ cm}$. Como la distancia libre entre barras es al menos d_b y los estribos exceden el mínimo requerido, este es CASO 1 y debe usarse

$$\ell_d = \left(\frac{\psi_t \psi_e f_y}{5.3 \lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b$$

❷ Cálculo de longitud de desarrollo.

Del ejemplo anterior $\ell_d = 241 \text{ cm}$ para No. 8. Como las barras se extienden

$150 - 4.0 = 146 \text{ cm}$ en la viga desde la cara del muro, no hay longitud suficiente para desarrollar una barra No. 8. Se deben usar barras más pequeñas o bien ganchos de barra No. 8 en el punto B. Podemos probar con 6 No. 6 ($A_s = 17.04 \text{ cm}^2$) y empezar de nuevo.

Repetiendo:

❶ Determinar caso de espaciamiento y confinamiento.

El recubrimiento lateral en el muro rige sobre ambos viga y muro, $4.0 + 1.27 = 5.27 \text{ cm} = 2.76d_b$.

El espaciamiento entre barras No. 6 es

$$\frac{40 - 2(4.0 + 1.27) - 6 \times 1.91}{5} = 3.6 \text{ cm} \cong 2d_b$$

Como los estribos exceden el mínimo requerido por la norma ACI y el espaciamiento entre barras no es menor que d_b se trata de un CASO 1.

❷ Cálculo de longitud de desarrollo.

$$\ell_d = \left(\frac{\psi_t \psi_e f_y}{6.6 \lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b = \frac{1.3 \times 1.0 \times 4200}{6.6 \times 0.75 \sqrt{210}} \times 1.91 = 76.1 \times 1.91 = 145 \text{ cm}$$

Como 145 cm es menor que los 146 cm disponibles, se pueden desarrollar las barras No. 6 sin problema. \square

Ejemplo 7-3 Anclaje de gancho en una columna

Columna cuadrada de 60 cm. Viga de 40 cm × 60 cm. Junta monolítica, según figura 7-15. Refuerzo de la columna 4 No. 11. Refuerzo de la viga 4 No. 8. Concreto de peso normal con resistencia $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$, $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$. Diseñe el anclaje de las 4 No. 8 de la viga.

❶ Cálculo de longitud de desarrollo para barras de viga.

(Determinación de tipo de CASO)

Si la barra No. 8 se extendiera recta en la columna, estaría confinada por el acero longitudinal de la columna y no por sus aros, por lo tanto, en base a la nomenclatura de la Tabla 7-1, debe tratarse como “otros casos” o bien mediante la ecuación básica. Usando la ecuación básica:

$$\ell_d = \frac{f_y}{3.5 \lambda \sqrt{f'_c}} \left(\frac{\psi_t \psi_e \psi_s}{\left(\frac{c + K_{tr}}{d_b} \right)} \right) d_b$$

con $\psi_t = 1.3$ (barra superior), $\psi_e = 1.0$ (barra sin revestimiento), $\psi_s = 1.0$ (barra > No. 7), $\lambda = 1.0$ (concreto de peso normal)

$c_b =$ el menor de

1. distancia del centro de la barra a la superficie libre más cercana: distancia lateral y superior = $4.0 + 0.95 + 2.54/2 = 6.22 \text{ cm}$
2. la mitad del espaciamiento centro a centro entre barras,

$$\frac{40 - 2(4.0 + 0.95 + 2.54/2)}{2 \times 3} = 4.59 \text{ cm}$$

$$\therefore c_b = 4.59 \text{ cm.}$$

A_{tr} = refuerzo de la columna que cruza el plano de fracturamiento horizontal al nivel del refuerzo negativo de la viga = 4 No. 11 = $4 \times 10.06 \text{ cm}^2 = 40.2 \text{ cm}^2$.

s = espaciamiento del refuerzo transversal (suponer que el acero de la columna confina el ancho total de la misma) = 60 cm.

$$K_{tr} = \frac{40 \times 40.2}{60 \times 4} = 6.70 \text{ cm}$$

$$\frac{c_b + K_{tr}}{d_b} = \frac{4.59 + 6.70}{2.54} = 4.44 > 2.5$$

$$\therefore \ell_d = \frac{4200}{3.5 \times 1.0 \times \sqrt{210}} \frac{1.3 \times 1.0 \times 1.0}{2.5} \times 2.54 = 43.1 \times 2.54 = 109 \text{ cm}$$

$$\ell_d = 109 \text{ cm} > (60 - 4.0) = 56 \text{ cm} \Rightarrow \text{Usar ganchos.}$$

❷ Cálculo de longitud de desarrollo para barra con gancho.

$$\ell_{dh} = \frac{0.075 \psi_e f_y}{\lambda \sqrt{f'_c}} d_b = \frac{0.075 \times 1.0 \times 4200}{1.0 \times \sqrt{210}} 2.54 \cong 55 \text{ cm} \leftarrow \text{longitud básica de desarrollo para una barra en forma de gancho}$$

Suponemos que las 4 No. 8 se extienden en la columna a lo largo del lado interior del refuerzo de la misma. En ese caso, ACI 318-08 Artículo 11.10.2 requiere un mínimo de aros en el nudo. Usar aros No. 3 para este efecto. El espaciamiento requerido para este caso se puede calcular despejando el valor de s en la siguiente ecuación

$$A_{v,\min} = 0.2 \sqrt{f'_c} \frac{b_w s}{f_{yt}} \geq 3.5 \frac{b_w s}{f_{yt}} \quad \text{ACI 318-08 Ec. 11-13}$$

Es decir,

$$s = \frac{2 \times 0.71 \times 4200}{0.2 \times 60 \times \sqrt{210}} (= 34.3 \text{ cm}) \leq \frac{2 \times 0.71 \times 4200}{3.5 \times 60} (= 28.4 \text{ cm})$$

El recubrimiento lateral para barra con gancho es

$$10 \text{ cm de diferencia dimensional lateral} + \underbrace{4.0 \text{ cm} + 0.95 \text{ cm}}_{\text{recubrimiento y estribo}} = 15.0 \text{ cm.}$$

Este valor de recubrimiento lateral es mayor que 6.5 cm. (Ver ACI 318-08 Art. 12.5.3a). El recubrimiento superior en el nudo es mayor que 6.5 cm pues es la columna misma. El recubrimiento en la extensión del gancho es $4.0 + 0.95 = 4.95$ cm.

De acuerdo con ACI 318-08 Artículo 12.5.3, se pueden aplicar factores de reducción a la longitud de desarrollo de la barra con gancho:

12.5.3 (a): recubrimiento lateral es mayor que 6.5 cm pero el recubrimiento en la extensión de la barra es menor que 5 cm, por lo tanto no se usa multiplicador.

12.5.3 (b): el espaciamiento de los estribos utilizados es mayor que $3d_b = 3 \times 2.54 = 7.62$ cm, por lo tanto, no se usa el multiplicador.

12.5.3 (c): no aplica porque el gancho es de 90° .

12.5.3 (d): no aplica porque A_s requerido es igual a A_s provisto.

12.5.4: no aplica porque los recubrimientos lateral y superior son mayores que 6.5 cm. Por tanto solo se requieren aros mínimos según ACI 318-08 Artículo 11.10.2, esto es, No. 3 @ 14 cm. Por lo tanto,

$$\ell_{dh} = 55.2 \text{ cm} \geq 8d_b (= 20.3 \text{ cm}) \text{ o } 15 \text{ cm} \quad \text{OK}$$

La longitud disponible para desarrollo del gancho es

$$60 \text{ cm} - \text{recubrimiento de extensión barra} = 60 - 4.95 = 55.1 \text{ cm}$$

Como $\ell_{dh} = 55$ cm, la extensión de gancho es apropiada.

Revisión de altura del doblez de gancho estándar de barra No. 8: (ver figura 7-12a)

$$\text{para } 90^\circ, 4d_b + 12d_b = 16 \times 2.54 = 40.6 \text{ cm} \leftarrow \text{esto cabe en el nudo}$$

Además, se pueden usar dos estribos No. 3 ubicados en los 30.5 cm del brazo del gancho.

Resultado: Anclar 4 No. 8 en la unión según figura 7-15. □

7.6 Corte de barras y longitud de desarrollo de barras en elementos a flexión

7.6.1 Por qué se cortan las barras

En concreto reforzado, se provee refuerzo cerca de la superficie de tracción de las vigas con el propósito de aportar el componente de tracción del par interno de resistencia. La figura 7-16 muestra una viga continua y su diagrama de momento. A mitad de la luz, los momentos son positivos y se requiere refuerzo cerca de la superficie inferior del elemento como se muestra en la figura 7-16a. En la zona de apoyos resulta lo opuesto. Para lograr un ahorro, es posible cortar algunas de las barras en donde ya no se necesitan más. La ubicación de esos puntos de corte se ve afectada por cuatro factores principales:

1. Las barras pueden ser cortadas o discontinuadas en donde ya no sean necesarias para resistir fuerzas de tracción o en donde las barras remanentes puedan cumplir ese cometido. La ubicación de los puntos en donde las barras ya no son necesarias es función de la tracción resultante del diagrama de momentos flexionantes y de los efectos del cortante sobre esas fuerzas de tracción.
2. Se debe proveer una extensión suficiente a cada barra en ambos lados del punto analizado de manera que se pueda desarrollar la fuerza en esa barra en ese punto. Esta es la regla general que gobierna el desarrollo de refuerzo de acuerdo con ACI 318-08 Artículo 12.1.1.
3. El corte de barras en tracción en una región de fuerza cortante de moderada a alta, causa una alta concentración de esfuerzos. Esto puede resultar en la generación de grandes grietas inclinadas en el punto de corte.
4. Algunos requisitos constructivos especificados por el ACI 318-08 como prácticas adecuadas.

En general, los cortes de barras deben mantenerse en un mínimo, particularmente en las zonas de tracción, para simplificar el diseño y la construcción.

7.6.2 Ubicación de puntos de corte por flexión

Los cálculos para la ubicación de puntos de corte por flexión se pueden ilustrar mediante el análisis de una viga simplemente apoyada como la mostrada en la figura 7-17a. A mitad de la luz, esta viga tiene 5 barras No. 8 como se puede ver en la figura 7-17c. Dos de estas barras son cortadas en los puntos C y C' dejando 3 No. 8 en los extremos, como se puede ver en la figura 7-17b.

La viga está sometida a una carga última uniforme de 10 Mg/m, incluyendo el peso propio, lo cual resulta en un diagrama de momento último, M_u , mostrado en la figura 7-17d. A este diagrama se le denomina *diagrama de momento requerido*, debido a que para cada sección la viga debe tener una capacidad, ϕM_n , al menos igual a M_u . El momento máximo requerido a la mitad de la luz es:

$$M_u = \frac{w_u \ell_n^2}{8} = \frac{10 \times 6^2}{8} = 45 \text{ Mg}\cdot\text{m}$$

Suponiendo un concreto de 210 kg/cm^2 y refuerzo de grado 60, la capacidad de momento, ϕM_n , de la sección con 5 No. 8 es de 45.8 Mg-m, lo cual es adecuado para la sección a la mitad de la luz. En los puntos alejados de la mitad de la luz, el M_u requerido es menor que 45.0 Mg-m, como se puede observar en el diagrama de momentos de la figura 7-17d.

Como $\phi M_n = \phi A_s f_y j d$, se requiere menos refuerzo (menos A_s) en los puntos alejados de la mitad de la luz. Esto se puede alcanzar cortando parte de las barras en donde ya no sean necesarias. En el ejemplo ilustrado en la figura 7-17, se ha decidido cortar dos barras No. 8 en los puntos en donde ya no sean requeridas. Las tres barras No. 8 remanentes proveen una capacidad de momento $\phi M_n = 29.2 \text{ Mg-m}$. Por lo tanto, teóricamente, las dos barras se pueden cortar cuando $M_u \leq 29.2 \text{ Mg-m}$ ya que las tres barras remanentes serán capaces de resistir M_u . De la ecuación del diagrama de momento (figura 7-17d) se ve que $M_u = 29.2 \text{ Mg-m}$ a una distancia de 1.22 m de cada apoyo. Por tanto, podemos cortar dos barras ya que no son necesarias para flexión en los tramos externos de 1.22 m y *teóricamente* pueden ser cortadas en esos puntos como se muestra en la figura 7-17e.

En la figura 7-17f se presenta un gráfico de la capacidad de momento, ϕM_n , para cada punto de la viga. A este gráfico se le denomina *diagrama de capacidad de momento*. En el punto E la viga tiene 5 barras y por lo tanto su capacidad es 45.8 Mg-m. A la izquierda del punto C la viga tiene 3 barras que brindan una capacidad de 29.2 Mg-m. La distancia CD representa la longitud de desarrollo, ℓ_d , para las dos barras cortadas en C. En los extremos de las barras en el punto C, estas dos barras no están desarrolladas y por tanto no pueden resistir esfuerzos. Como resultado, no aportan nada a la capacidad de momento en C. Por otro lado, las barras están completamente desarrolladas en D y en la región que va desde D hasta D' éstas podrían alcanzar f_y , si se requiriese.

Las tres barras que se extienden hasta los apoyos, son cortadas en los puntos A y A'. En A y A' estas barras no están desarrolladas y por lo tanto, la capacidad de momento es $\phi M_n = 0$. En los puntos B y B' las barras están desarrolladas completamente y la capacidad de momento es $\phi M_n = 29.2 \text{ Mg-m}$.

En la figura 7-17g se superponen el diagrama de capacidad de momento de la figura 7-17f y el diagrama de momento requerido de la figura 7-17d. Como la capacidad de momento es mayor o igual que el momento requerido en todos los puntos, se puede concluir que la viga tiene la capacidad adecuada para *flexión, despreciando los efectos de cortante*.

En el cálculo de los diagramas de capacidad de momento y momento requerido mostrados en la figura 7-17, solamente se consideró flexión. El cortante tiene un efecto significativo sobre los esfuerzos en el refuerzo longitudinal de tracción y debe ser tomado en cuenta en la definición de los puntos de corte de barras. El ACI 318-08 toma en cuenta este efecto en el Artículo 12.10.3, en donde se pide que el refuerzo longitudinal sea extendido una distancia mínima igual al mayor de dos valores: el peralte efectivo d o 12 diámetros de barra d_b después del punto teórico de corte por flexión.

7.6.3 Desarrollo de refuerzo (barras) en puntos de fuerza máxima en la barra

Para que el refuerzo y el concreto actúen en conjunto, cada barra debe estar embebida adecuadamente a ambos lados de cada sección de forma tal que pueda desarrollar la fuerza requerida en ese punto. En vigas esto es crítico en:

1. puntos de momento positivo y negativo máximos, los cuales son puntos de esfuerzo máximo en la barra y
2. puntos en donde el refuerzo adjunto se cortado o doblado (ACI 318-08 Artículo 12.10.2)

Por lo tanto, las barras deben extenderse al menos una longitud de desarrollo, ℓ_d , a cada lado de tales puntos o estar ancladas con ganchos o anclajes mecánicos.

Es claro por qué es que esto aplica para puntos de esfuerzo máximo en la barra, tal como el punto E en la figura 7-17e, pero la situación de los cortes de barra necesita más explicación. En la figura 7-17 se discutió la selección de puntos de corte de barra por flexión únicamente. Para tomar en cuenta las fuerzas en la barra resultantes del efecto de cortante, los cortes fueron extendidos después del punto de momento máximo una distancia d o 12 diámetros de barra d_b después del punto de corte por flexión. Esto es equivalente a usar un momento modificado M'_u , como el que se muestra en la figura 7-19a, para seleccionar los puntos de corte. La viga en la figura 7-17 requería 5 barras en el centro de la luz. Si todas las 5 barras se extendieran la longitud completa de la viga, el diagrama de esfuerzos en la barra sería similar al diagrama de momento modificado que se muestra en la figura 7-19b. Sin embargo, dos de las barras serán cortadas en los puntos C y C' donde el momento $M'_u = 29.2 \text{ Mg-m}$, el cual es igual a la capacidad de momento, ϕM_n , de la sección transversal con 3 barras No. 8 (figura 7-19c). Los esfuerzos en las barras cortadas y en las remanentes se muestran en las figuras 7-19d y e, respectivamente. Los puntos D y D' están ubicados a una distancia ℓ_d del punto de corte de las barras. En el tramo DD' de la viga las barras cortadas son totalmente efectivas. Como resultado, las 5 barras resisten los momentos aplicados entre D y D' y los esfuerzos en ambos grupos de barras son los mismos (figuras 7-19d y e), y son los mismos que se alcanzarían si todas las barras se extendieran la longitud total de la viga (figura 7-19b). Entre D y C, los esfuerzos en las barras cortadas se reducen a cero, mientras que los esfuerzos en las 3 barras restantes se incrementan. En el punto C, el esfuerzo en las 3 barras remanentes alcanza la resistencia de fluencia, f_y , como se supuso cuando se escogió el punto de corte. Para que las barras puedan alcanzar la resistencia de fluencia en el punto C, la distancia AC no puede ser menor que la longitud de desarrollo, ℓ_d . Si AC es menor que ℓ_d , el anclaje requerido puede ser obtenido doblando las barras en A, usando barras de menor diámetro o extendiendo todas las 5 barras hasta el apoyo.

7.6.4 Desarrollo de barras en regiones de momento positivo

La figura 7-20 muestra una viga simplemente apoyada con carga uniforme y su correspondiente diagrama de momento. Como primer resultado, el diseñador ha seleccionado 2 barras No. 14 como refuerzo. Estas se extienden por toda la longitud de la viga y están confinadas por estribos mínimos. La longitud de desarrollo de una barra No. 14 de grado 60 en concreto de 210 kg/cm^2 es de 235 cm. El punto de esfuerzo máximo de la barra ocurre en el centro de la luz y como las barras se extienden 275 cm en cada dirección, entonces se concluye que están desarrolladas en el centro de la luz. Como el diagrama de momento de una viga con carga uniforme tiene forma de parábola, es posible que el esfuerzo de la barra esté desarrollado para el centro de la luz pero no por ejemplo para los puntos intermedios en donde el momento es todavía de tres cuartas partes del máximo. Esto se ilustra en la figura 7-20b, en donde se comparan los diagramas de capacidad de momento y resistencia de momento. Se supone que la capacidad de momento se incrementa linealmente desde cero en el extremo de la barra hasta $\phi M_n = 50.0 \text{ Mg-m}$ a una distancia $\ell_d = 235 \text{ cm}$ del extremo de la barra. Entre los puntos A y B el momento requerido excede la capacidad de momento. En otras palabras, los esfuerzos requeridos en las barras entre los puntos A y B son mayores que los que pueden ser desarrollados por las barras.

Si ignoramos la extensión de la barra en la zona de apoyo, se puede ver en la figura 7-21 que la pendiente de la porción creciente del diagrama de capacidad de momento no puede ser menor que la indicada por la línea OA. Si el diagrama de capacidad de momento tuviera una pendiente OB, las barras no tendrían suficiente desarrollo para los esfuerzos requeridos en la porción achurada de la figura 7-21. Por lo tanto, la pendiente del diagrama de capacidad de momento, $d(\phi M_n)/dx$, no puede ser menor que la pendiente de la tangente del diagrama de momento requerido dM_u/dx en $x = 0$. La pendiente del diagrama de capacidad de momento es $\phi M_n/\ell_d$. La pendiente del diagrama de momento requerido es $dM_u/dx = V_u$ en $x = 0$. Así, la pendiente mínima que puede tener el diagrama de capacidad de momento es

$$\frac{\phi M_n}{\ell_d} = V_u$$

Por tanto, la mayor longitud de desarrollo aceptable debe ser

$$\ell_d = \frac{\phi M_n}{V_u}$$

en donde M_n es la capacidad de momento basada en las barras de refuerzo presentes en la viga y V_u es el cortante en $x = 0$.

El ACI 318-08 en el Artículo 12.11.3 exige que en apoyos simples o en puntos de inflexión, el refuerzo de tracción para momento positivo se limite a un diámetro tal que ℓ_d calculado para un f_y según el Artículo 12.2 satisfaga la siguiente ecuación

$$\ell_d \leq \frac{M_n}{V_u} + \ell_a \quad \text{ACI 318-08 Ec. 12-5}$$

excepto cuando la barra termina en gancho normal o anclaje mecánico equivalente más allá del punto central de apoyo. En esta ecuación ℓ_a en el apoyo deberá ser la longitud

embebida de la barra de refuerzo más allá del centro del apoyo. ℓ_a en el punto de inflexión de momento positivo deberá limitarse al valor mayor entre el peralte efectivo d del elemento o $12d_b$. Se permite un incremento de 30 por ciento en el valor de M_n/V_u cuando el extremo del refuerzo está confinado por una reacción compresiva. La figura 7-22 resume gráficamente el Artículo 12.11.3. Se debe notar que barras terminadas en ganchos en el apoyo pueden conducir a fallas por aplastamiento a menos que los ganchos sean detallados cuidadosamente. La figura 7-23a muestra a escala el apoyo de una viga simple. La grieta potencial ilustrada no atraviesa ningún refuerzo. En vigas prefabricadas el extremo de la viga es usualmente reforzado como se muestra en la figura 7-23b.

Las ecuaciones anteriores no se aplican para casos de momento negativo, porque la forma del diagrama de momento es cóncava hacia abajo de forma tal que el único punto crítico para anclaje es el punto de máximo esfuerzo en la barra.

Ejemplo 7-4 Revisión del desarrollo de una barra en la región de momento positivo

La viga de la figura 7-20 tiene dos barras No. 14 y estribos No. 3 a 25 cm centro a centro. La resistencia del concreto es de 210 kg/cm^2 y el acero es de grado 60. La viga soporta una carga total factorizada de 13.5 Mg/m . Revisar si se satisfacen los requisitos del Artículo 12.11.3 del ACI 318-08.

Solución:

❶ Determinación del caso de espaciamiento y confinamiento para barras No. 14.

$$\text{Espaciamiento de barras} = 40 - 2(4.0 + 0.95) - 2 \times 4.30 = 21.5 \text{ cm.}$$

La viga tiene estribos que satisfacen el requisito mínimo del código. Por lo tanto este es un caso 1.

❷ Cálculo de longitud de desarrollo para barras No. 14.

De la ecuación 7-9 se tiene:

$$\ell_d = \frac{\psi_t \psi_e f_y}{5.3 \lambda \sqrt{f'_c}} d_b = \frac{4200 \times 1.0 \times 1.0}{5.3 \times 1.0 \times \sqrt{210}} \times 4.30 = 235 \text{ cm}$$

❸ Solución de la ecuación ACI (12-5) con incremento de 30%.

En el apoyo hay dos barras No. 14, por lo tanto:

$$M_n = 2 \times 14.52 \times 4200 \left(54.1 - \frac{2 \times 14.52 \times 4200}{1.7 \times 210 \times 40} \right) = 5560 \text{ Mg-cm}$$

El cortante último en el apoyo es:

$$V_u = \frac{w\ell}{2} = \frac{13.5 \times 5.5}{2} = 37.1 \text{ Mg}$$

ℓ_a = extensión de barra más allá de la línea de centro del apoyo = 15 cm.

Finalmente,

$$1.3 \frac{M_n}{V_u} + \ell_a = \frac{1.3 \times 5560 \text{ Mg-cm}}{37.1 \text{ Mg}} + 15 \text{ cm} = 210 \text{ cm}$$

Pero $\ell_d = 235 \text{ cm}$ que es mayor que 210 cm; por lo tanto, no se pueden usar barras No.

14. Se pueden escoger 6 barras No. 8, para las cuales se debe calcular de nuevo ℓ_d .

④ Determinar caso de confinamiento y espaciamiento para barras No. 8.

Se puede calcular que el espaciamiento entre barras es $3.18 \text{ cm} = 1.25d_b$, o usar la Tabla A-6 para encontrar el ancho mínimo de alma para 6 No. 8 que es 39.4 cm. Como 40 cm es mayor que 39.4 cm el espaciamiento entre barras excede d_b . La viga cumple con estribos mínimos. Por lo tanto es caso 1.

⑤ Cálculo de longitud de desarrollo para barra No. 8.

De la ecuación 7-9 se tiene:

$$\ell_d = \frac{\psi_t \psi_e f_y}{5.3 \lambda \sqrt{f'_c}} d_b = \frac{4200 \times 1.0 \times 1.0}{5.3 \times 1.0 \times \sqrt{210}} \times 2.54 = 139 \text{ cm}$$

⑥ Solución de la ecuación ACI (12-5) con incremento de 30%.

En este caso, $M_n = 5220 \text{ Mg-cm}$

$$1.3 \frac{M_n}{V_u} + \ell_a = \frac{1.3 \times 5220 \text{ Mg-cm}}{37.1 \text{ Mg}} + 15 \text{ cm} = 198 \text{ cm}$$

Como $139 \text{ cm} < 198 \text{ cm}$, esto es aceptable. Usar 6 barras No. 8. □

7.6.5 Efecto de discontinuidades en puntos de corte de barras

Los diagramas de esfuerzo en las barras mostrados en las figuras 7-19d y e sugieren que existe una discontinuidad severa en la vecindad de los puntos en donde se cortan las barras en la región de tracción por flexión. Un efecto de esta discontinuidad es una reducción en la resistencia de *cortante de grieta inclinada* en esta vecindad. La grieta inclinada resultante empieza en, o cerca de, los extremos de corte de las barras. En el Artículo 12.10.5 se prohíben los cortes de barras en una zona de tracción por flexión a menos de que se satisfaga uno de los siguientes requisitos:

1. El cortante en el punto de corte de barras $V_u < 2/3\phi(V_c + V_s)$ (ACI Art. 12.10.5.1).
2. Se provean estribos adicionales en la barra cortada a lo largo de una longitud $0.75d$ desde el extremo del corte. El espaciamiento máximo de los estribos adicionales es $s = d/8\beta_b$, en donde β_b es la razón entre el área de barras cortadas y el área de barras inmediatamente antes del corte. El área de estribos A_v debe ser mayor que $60b_w s / f_{yt}$ (ACI Art. 12.10.5.2).
3. Para barras No. 11 y menores, el refuerzo remanente provee el doble del área requerida para flexión en el punto de corte y además $V_u \leq 0.75\phi(V_c + V_s)$ (ACI Art. 12.10.5.3).

A raíz de lo difícil de satisfacer estos requisitos, frecuentemente se extienden todas las barras hasta los apoyos de las vigas simples o hasta pasado el punto de inflexión en vigas continuas.

7.6.6 Requisitos para integridad estructural

Se dice que una estructura tiene *integridad estructural* si un daño localizado no se propaga progresivamente a otras partes de la estructura. El ACI provee lineamientos para mejorar la integridad de la construcción con viguetas, vigas sin estribos, vigas perimetrales y edificios prefabricados.

Hay dos conceptos básicos, acción de catenaria y amarres alrededor de edificaciones para anclar las fuerzas de catenaria. Si el apoyo de una viga continua se daña o se elimina, la viga debe poder cerrar la brecha mediante acción de catenaria, aun a pesar de grandes deflexiones. En vigas continuas sin estribos el acero superior a lo largo del apoyo es expulsado hacia la parte superior de la viga y no se produce acción de catenaria. El Art. 7.13.2.1 de ACI sobre construcción con viguetas y el 7.13.2.4, que aplica para vigas sin estribos cerrados, requiere que una porción del refuerzo inferior sea continuo o empalmado a lo largo del apoyo para proveer acción de catenaria. La catenaria debe ser anclada con ganchos a los soportes en el exterior de la edificación.

El Art. 7.13.2.2 requiere que una porción del refuerzo de flexión tanto positivo como negativo en vigas perimetrales sea continuo y confinado con estribos cerrados alrededor de la estructura de manera que estas vigas perimetrales sirvan de ancla de las fuerzas catenarias transmitidas por las vigas internas.

7.7 Cálculo de puntos de corte de barras

7.7.1 Procedimiento general

Los puntos de corte de barras deben ser calculados con un procedimiento que se puede dividir en tres etapas. Primero, los *puntos de corte para flexión* (puntos en donde las barras dejan de ser necesarias para flexión) se determinan a partir de diagramas de

momentos. Segundo, las barras se extienden para satisfacer reglas de detallado. Los puntos de corte resultantes son denominados como *puntos de corte real*. Finalmente, se diseñan estribos adicionales para los puntos en donde se han cortado las barras en una zona de tracción por flexión.

Los artículos de la norma ACI 318-08 que gobiernan la ubicación de los puntos de corte son 7.13, 12.1, 12.10, 12.11 y 12.12. Estos artículos pueden ser resumidos en seis reglas que gobiernan los requisitos de detallado:

Para todas las barras

Regla 1. Las barras deben extenderse el mayor de d o $12 d_b$ después del punto de corte por flexión excepto en los apoyos o en los extremos de voladizos.

Regla 2. Las barras deben extenderse al menos ℓ_d desde el punto de esfuerzo máximo o desde el punto de corte por flexión de barras adyacentes (ACI 318-08, Arts. 12.10.2, 12.10.4 y 12.12.2).

Barras para momento positivo

Regla 3. (a) Apoyos simples. Al menos un tercio del refuerzo para momento positivo debe extenderse 15 cm dentro de los apoyos (ACI 318-08, Art. 12.11.1).

(b) Vigas internas continuas con estribos cerrados. Al menos una cuarta parte del refuerzo para momento positivo debe extenderse 6 in. dentro de los apoyos (ACI 318-08, Arts. 12.11.1 y 7.13.2.4).

(c) Vigas internas continuas sin estribos cerrados. Al menos una cuarta parte del refuerzo para momento positivo debe ser continuo o deberá ser empalmado con un traslape de tracción Clase B cerca de los apoyos y terminado en gancho estandar en apoyos no continuos (ACI 318-08, Art. 7.13.2.4).

(d) Vigas continuas perimetrales. Al menos una cuarta parte del refuerzo para momento positivo requerido a mitad de la luz deberá ser continuo alrededor del perímetro del edificio y deberá ser confinado con estribos cerrados con ganchos de 135° en las barras superiores. La continuidad del refuerzo requerida puede lograrse mediante empalme del refuerzo inferior en o cerca de los apoyos con empalmes de tracción Clase B (ACI 318-08, Art. 7.13.2.2).

(e) Vigas que forman parte de pórticos especiales en edificios. Este refuerzo debe estar anclado para desarrollar el esfuerzo de fluencia, f_y , en la cara del apoyo (ACI 318-08, Art. 12.11.2).

Regla 4. En los puntos de inflexión para momento positivo, y en apoyos simples, el refuerzo de momento positivo debe satisfacer el Art. 12.11.3 de ACI 318-08.

Barras para momento negativo

Regla 5. El refuerzo para momento negativo debe ser anclado en, o a través de, las columnas o elementos de apoyo (ACI 318-08, Art. 12.12.1).

Regla 6. (a) Vigas interiores. Al menos un tercio del refuerzo de momento negativo debe ser extendido una distancia igual al valor mayor entre d , $12d_b$ o $P_n/16$ después del punto de inflexión de momento negativo (ACI 318-08, Art. 12.12.3).

(b) Vigas perimetrales. Además de cumplir con la regla 6 (a), un sexto del refuerzo negativo necesario en el apoyo debe continuarse hasta la mitad de la luz. Esto se puede lograr por medio de un empalme de tracción Clase B a mitad de la luz (ACI 318-08, Art. 7.13.2.2).

Ejemplo 7-5 Cálculo de puntos de corte de barras basado en ecuaciones de diagramas de momentos

La viga mostrada en la figura 7-24a ha sido construida con concreto de 3000 psi y acero de grado 60. Soporta una carga muerta factorizada de 0.42 kips/ft y una carga viva factorizada de 3.4 kips/ft. En la figura 7.24b se muestran las secciones transversales en los puntos de máximo momento positivo y negativo. Para este ejemplo, se deben considerar las dos condiciones de sollicitación mostradas en las figuras 7-25a y 7-27a.

Solución:

❶ Ubicación de los puntos de corte por flexión para refuerzo de momento positivo.

El momento positivo en el tramo AB es regido por la condición de carga de la figura 7-25a. Del diagrama de cuerpo libre de un segmento del tramo AB (Figura 7-25d) la ecuación para M_u a una distancia x desde A es

$$M_u = 46.5x - \frac{3.82x^2}{2} \text{ ft-kips}$$

A mitad de la luz, la viga tiene 2 No. 9 más 2 No. 8. Las 2 No. 8 serán cortadas. La capacidad de las barras remanentes es

$$\phi M_u = \frac{0.9 \times (2 \times 1.0) \times 60,000 \left(21.5 - \frac{2.0 \times 60,000}{1.7 \times 3000 \times 12} \right)}{12,000} = 176 \text{ ft-kips}$$

Por lo tanto, los puntos de corte por flexión ocurren donde $M_u = 176$ ft-kips. Para $M_u = 176$ ft-kips, la ecuación de M_u puede reescribirse como

$$1.91x^2 - 46.5x + 176 = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática de la forma

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

y tiene la solución

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

De esta forma $x = 4.68$ ft y 19.66 ft desde A. Estos puntos de corte por flexión se muestran en la figura 7-25c y 7-26a, denominados como E y F. De manera semejante, el punto de corte por flexión G se encuentra a 24.4 ft de A o a 0.64 ft de B.

❷ Cálculo de las longitudes de desarrollo para las barras inferiores.

$$\text{Espaciamiento entre barras} = \frac{12 - 2(1.5 + 0.375) - 2 \times 1.128 - 2 \times 1.0}{3} = 1.33 \text{ in.}$$

Como el espaciamiento entre barras excede d_b tanto para la barra No. 8 como para No. 9, y como la viga cuenta con el acero transversal mínimo, las barras satisfacen el caso 1. Por lo tanto,

$$\ell_d = \frac{\psi_t \psi_e \lambda f_y}{20 \sqrt{f'_c}} d_b = \frac{1.0 \times 1.0 \times 1.0 \times 60,000}{20 \times \sqrt{3000}} d_b = 54.8 d_b$$

De esta forma, para las barras No. 8, $\ell_d = 54.8$ in., y para las barras No. 9, $\ell_d = 61.8$ in.

❸ **Ubicación de los puntos de corte por flexión reales para refuerzo de momento positivo.** Los puntos de corte reales se determinan a partir de los puntos de corte para flexión usando las seis *reglas* dadas anteriormente. Como la ubicación de los puntos de corte G y D, mostrados en la figura 7-26a, se ven afectados por la ubicación de los puntos de corte E y F, estos últimos se definen primero, empezando con F.

(a) **Punto de corte F.** Se cortan dos barras No. 8; se deben cumplir las reglas 1 y 2.

Regla 1. Extender las barras la distancia mayor entre $d = 21.5$ in. = 1.79 ft y $12d_b = 1$ ft. Por lo tanto, la primera ubicación del punto de corte real está a $19.66 + 1.79 = 21.45$ ft del centro del apoyo en A (ver punto F' en la figura 7-26b), usar 21.5 ft.

Regla 2. Las barras se deben extender al menos ℓ_d después de los puntos de esfuerzo máximo. Para las barras cortadas en F', el esfuerzo máximo ocurre cerca de la mitad de la luz, a 12.18 ft de A. La distancia desde el punto de esfuerzo máximo hasta el punto real de corte es $21.5 - 12.18 = 9.32$ ft. ℓ_d para una barra No. 8 es 54.8 in. La distancia disponible es mayor que ℓ_d – por lo tanto, está bien. **Cortar 2 barras No. 8 a 21 ft 6 in. de A** (mostrado como punto F' en la figura 7-26b).

(b) **Punto de corte G.** Se cortan dos barras No. 9, se deben cumplir las reglas 2 y 3 en el punto G, y la regla 4 en el punto de inflexión de momento positivo.

Regla 3. Se deben extender al menos un tercio de las barras 6 in. dentro del apoyo. Como un primer intento se pueden extender 2 No. 9 las 6 in. dentro del apoyo en B (25 ft 6 in. desde A).

Regla 2. Las barras se deben extender al menos ℓ_d más allá de los puntos de corte reales de las barras adyacentes. La longitud de desarrollo ℓ_d para una barra No. 9 inferior es 61.8 in. = 5.15 ft. La distancia desde F' hasta G' es (25 ft 6 in.) – (21 ft 6 in.) = 4 ft. La barra no se extiende la distancia ℓ_d , por lo tanto, se deben extender las barras hasta 21.45 ft + 5.15 ft = 26.6 ft, digamos, 26 ft 8 in.

Regla 4. Se debe satisfacer la ecuación ACI 318 Ec. 12-3 en el punto de inflexión (punto donde el momento es cero). Por lo tanto, en G, $\ell_d \leq M_n/V_u + \ell_a$. El punto de inflexión está a 0.64 ft del apoyo (Fig 7-25c). En este punto V_u es 46.5 kips (Fig 7-25b) y la capacidad de momento M_n para las barras en la viga en el punto de inflexión (2 No. 9) es

$$M_n = 176 \text{ ft-kips} \times \frac{12}{0.9} = 2350 \text{ in-kips}$$

ℓ_a debe ser el mayor entre d (21.5 in.) y $12d_b$ (13.5 in.) pero no mayor que la extensión real de la barra más allá del punto de inflexión (26.67 – 24.36 = 2.31 ft = 27.7 in.). Por lo tanto, $\ell_a = 21.5$ in., y

$$\frac{M_n}{V_u} + \ell_a = \frac{2350}{46.5} + 21.5 = 71.9 \text{ in.}$$

Como esto es mayor que $\ell_d = 61.8$ in., entonces está bien. **Cortar 2 No. 9 a 1 ft 8 in. desde B** (mostrado como el punto G' en la figura 7-26b).

(c) **Punto de corte E.** Se cortan dos barras No. 8; se deben cumplir las reglas 1 y 2.

Regla 1. Extender las barras una distancia $d = 1.79$ ft más allá del punto de corte por flexión. Por lo tanto, el punto de corte real E' está a 4.68 – 1.79 = 2.89 ft (2 ft 10 in.) desde A.

Regla 2. La distancia desde el punto de máximo momento hasta el punto de corte real excede $\ell_d = 54.8$ in. – por lo tanto, está bien. **Cortar 2 No. 8 a 2 ft 10 in. de A** (punto E' en figura 7-26b; notar que este resultado debe ser cambiado posteriormente).

(d) **Punto de corte D.** Se cortan dos barras No. 9; se deben cumplir las reglas 2, 3 y 4.

Regla 3. Extender las 2 barras No. 9 una longitud de 6 in. más allá de A.

Regla 2. Se deben extender las barras la distancia ℓ_d después del punto de corte E', donde $\ell_d = 61.8$ in. (barras No. 9). La longitud máxima disponible es 2 ft 10 in. + 6 in. = 40 in.

Como esto es menor que ℓ_d , se debe ya sea prolongar el extremo de la viga, doblar en

gancho las barras, usar barras de menor diámetro o eliminar el punto de corte E'. Se hará esto último. Por lo tanto, **extender las cuatro barras 6 in. más allá del apoyo A.**

Regla 4. Se debe satisfacer la siguiente ecuación en el apoyo:

$$\ell_d \leq \frac{1.3M_n}{V_u} + \ell_a$$

$$M_n = \frac{3.58 \times 60,000 \left(21.5 - \frac{3.58 \times 60,000}{1.7 \times 3000 \times 12} \right)}{1000} = 3860 \text{ in-kips}$$

Con $V_u = 46.4$ kips y $\ell_a = 6$ in. se tiene $1.3(3860/46.5) + 6 = 114$ in. Como esto excede ℓ_d , la regla 4 se cumple. El punto de corte real se ilustra en la figura 7-26b.

④ **Ubicación de los puntos de corte para flexión para momento negativo.** El momento negativo está regido por la condición de carga mostrada en la figura 7-27 a. Las ecuaciones para momentos negativos son:

Entre A y B, con x medido desde A:

$$M_u = -5.8x - \frac{0.42x^2}{2} \text{ ft-kips}$$

Entre C y B, con x_1 medido desde C:

$$M_u = \frac{-3.82x_1^2}{2} \text{ ft-kips}$$

A través del apoyo en B, el refuerzo consiste de dos barras No. 9 más dos No. 8. Las dos barras No. 8 no se requieren cuando el momento es menor que $\phi M_n = 176$ ft-kips (capacidad de la viga con dos barras No. 9).

Entre A y B:

$$\begin{aligned} -176 &= -5.8x - 0.21x^2 \\ x &= -45.9 \text{ ft or } 18.26 \text{ ft desde A} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto de corte por flexión para dos barras superiores No. 8 en el tramo AB está a 18.26 ft de A.

Entre B y C:

$$\begin{aligned} -176 &= -1.91x_1^2 \\ x_1 &= 9.60 \text{ ft desde C} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto de corte por flexión para dos barras superiores No. 8 en el tramo BC está a 9.60 ft de C. Los puntos de corte por flexión para el acero de momento negativo se muestran en la figura 7-28a, y se denominan H, J, K y L.

⑤ **Cálculo de las longitudes de desarrollo para las barras superiores.** Como hay más de 12 in. de concreto por debajo de las barras superiores, $\alpha = 1.3$. Para las barras No. 8, $\ell_d = 71.2$ in., y para las barras No. 9, $\ell_d = 80.3$ in.

⑥ **Ubicación de los puntos de corte reales para refuerzo de momento negativo.** De nuevo, los puntos de corte internos se consideran primero porque su ubicación afecta el diseño de los cortes externos. La escogencia de puntos de corte reales se ilustra en la figura 7-28b.

(a) **Punto de corte J.** Se cortan 2 barras No. 8; se deben cumplir las reglas 1, 2 y 5.

Regla 1. Extender las barras una longitud $d = 1.79$ ft después del punto de corte por flexión. Cortar a $18.26 - 1.79 = 16.47$ ft desde A o bien 8.5 ft desde B.

Regla 2. Las barras deben extenderse ℓ_d desde el punto de esfuerzo máximo en ellas. Para las dos barras superiores No. 8, ese punto ocurre en B. La extensión real de la barra es de 8.5 ft = 102 in. Esto excede la longitud de desarrollo $\ell_d = 71.2$ in. – por lo tanto, está bien.

Regla 5. La barra debe ser anclada en el apoyo. Esto se puede lograr cuando se escoge el punto de corte K. Por lo tanto, **cortar dos No. 8 a 8 ft 6 in. del apoyo B** (punto J' en la figura 7-28b).

(b) **Punto de corte H.** Se cortan dos barras No. 9; se debe cumplir la regla 2.

Regla 2. La barra se debe extender P_d después de J', donde $\ell_d = 80.3$ in. La longitud disponible es de 17 ft. – por lo tanto, está bien. **Extender dos barras No. 9 hasta 2 in. del extremo de la viga** (punto H' en la figura 7-28b).

(c) **Punto de corte K.** Se cortan dos barras No. 8; se deben cumplir las reglas 1, 2 y 5. El punto de corte por flexión está a 9.60 ft de C (2.40 ft de B).

Regla 1. Extender las barras una distancia $d = 1.79$ ft. El extremo de las barras está a $2.40 + 1.79 = 4.19$ ft desde B, digamos 4 ft 3 in.

Regla 2. Extenderse ℓ_d después de B. ℓ_d para una No. 8 superior es 71.2 in. La prolongación de 4 ft 3 in. es claramente insuficiente. Intentar extender las barras No. 8 superiores 6 ft más allá de B hasta el punto K'.

Regla 5. Las barras deben ser ancladas en el apoyo. Como las barras No. 8 se extienden una distancia mayor que ℓ_d a ambos lados del apoyo, entonces están ancladas en forma adecuada. Por lo tanto, **cortar dos No. 8 a 6 ft de B** (punto K' en la figura 7-28b). Se debe notar que este resultado debe ser cambiado posteriormente.

(d) **Punto de corte L.** Se cortan dos barras No. 9; se debe cumplir la regla 2.

Regla 2. Las barras se deben extender ℓ_d después de K'. ℓ_d para una barra No. 9 superior es 80.3 in. = 6.69 ft. La extensión disponible es 11.83 – 6 = 5.83 ft, que es menor que ℓ_d – por lo tanto, no está bien. Hay dos soluciones posibles, ya sea extender todas las barras hasta el final de la viga o cambiar las barras a No. 6 o No. 7 en dos capas. Haremos lo primero. Los puntos de corte finales se muestran en la figura 7-29.

⑦ **Revisión de necesidad de estribos adicionales en los puntos de corte.** El ACI 318-08 Art. 12.10.5 prohíbe los cortes de barras en zonas de tracción a menos que:

12.10.5.1: El cortante último en el punto de corte real no sea mayor que dos tercios de la capacidad nominal reducida de cortante en ese punto,

12.10.5.2: Se proporcionen estribos adicionales en el punto de corte real, o

12.10.5.3: El refuerzo para flexión que continúa después del punto de corte por flexión es dos veces mayor que el acero requerido, A_s , y el cortante último no sea mayor que tres cuartas partes de la capacidad nominal de cortante en ese punto.

Como hemos escogido los puntos de corte por flexión sobre la base de que el acero que continúa corresponde al acero requerido A_s , el artículo 12.10.5.3 no rige. Por lo tanto, se deben proveer estribos adicionales a menos que se cumpla con 12.10.5.1.

Como se puede observar en la figura 7-24b, la viga cuenta con estribos No. 3 @ 10 in. centro a centro a lo largo de toda su longitud. La capacidad nominal de cortante es

$$\phi V_n = \phi (V_c + V_s)$$

$$\phi V_n = \frac{0.75 \left(2\sqrt{3000} \times 12 \times 21.5 + \frac{0.22 \times 60,000 \times 21.5}{10} \right)}{1000} = 42.5 \text{ kips}$$

y $2/3\phi V_n = 28.3$ kips. Entonces, si V_u en el punto de corte real excede 28.3 kips, se requieren estribos adicionales.

(a) **Punto de corte F'**. Ubicado a 21.5 ft de A y a 3.5 ft de B. En este punto ocurre tracción por flexión debido a la condición de carga 1 (Fig. 7-25c). El cortante en F' para la condición de carga 1 es

$$V_u = -49.0 + 3.5 \times 3.82 = -35.6 \text{ kips}$$

Donde el signo indica simplemente la dirección de la fuerza de cortante. Como $V_u = 35.6$ kips excede $2/3\phi V_n = 28.3$ kips, se requieren estribos adicionales. Los estribos adicionales deben colocarse una distancia $0.75d = 0.75 \times 21.5 = 16.1$ in. a lo largo de la barra No. 8 desde el punto de corte F'.

El espaciamiento entre estribos debe ser $s \leq d/8\beta_b$, donde $\beta_b = (\text{área de barras cortadas})/(\text{área total inmediata al corte}) = 2 \times 0.79 / (2 \times 1.0 + 2 \times 0.79) = 0.44$. Por lo tanto, es espaciamiento entre estribos es $s \leq 21.5/8 \times 0.44 = 6.09$ in. Usar cuatro estribos No. 3 adicionales espaciados a 6 in. centro a centro. Verificación:

$$A_{v \text{ requerido}} = \frac{60b_w s}{f_y} = \frac{60 \times 12 \times 6}{60,000} = 0.072 \text{ in.}^2$$

$A_{v \text{ provisto}} = 0.22 \text{ in.}^2$ – por lo tanto, está bien. **Usar tres estribos No. 3 @ 6 in. adicionales, el primero colocado a 2 in. del extremo de corte de barras F'.**

- (b) **Punto de corte E'**. Todas las barras fueron extendidas hasta el apoyo en A, por lo que no se requiere refuerzo de cortante adicional aquí.
- (c) **Punto de corte J'**. El punto de corte está ubicado a 8.5 ft de B. En estas barras ocurre tracción por flexión debido a la condición de carga 2 (Fig. 7-27). Por inspección V_u es considerablemente menor que $2/3\phi V_u = 28.3$ kips. Por lo tanto, no se requieren estribos adicionales en este punto de corte.

El detalle final de refuerzo se muestra en la figura 7-29. Para vigas no convencionales como ésta, se debe mostrar este tipo de detalles en los planos finales. □

Los cálculos llevados a cabo en el ejemplo anterior son tediosos y si no se entienden los conceptos en los cuales se fundamentan, las especificaciones de detallado se vuelven un sin sentido.

Se pueden hacer varias cosas para simplificar estos cálculos. Una es extender todas las barras más allá del punto de inflexión de manera que no se corten barras en zonas de tracción por flexión. Por un lado, esto reduce el número de cortes requerido y elimina la necesidad de estribos adicionales, mientras que por otro lado requiere más refuerzo para flexión. Un segundo método consiste en determinar gráficamente los puntos de corte por flexión.

7.7.2 Cálculo gráfico de puntos de corte por flexión

La capacidad a flexión de la viga es $\phi M_n = \phi A_s f_y jd$, donde jd es el brazo de palanca interno y es relativamente independiente de la cantidad de refuerzo presente. Si suponemos jd constante, entonces ϕM_n es directamente proporcional a A_s . Como en diseño, ϕM_n es equiparado a M_u , se puede decir entonces que la cantidad de acero, A_s , requerida en cualquier sección es directamente proporcional a M_u en esa sección. Si se desea cortar un tercio de las barras en un punto en particular, los restantes dos tercios de barras tendrían una capacidad de dos tercios de ϕM_n máximo y así el punto de corte sería ubicado en donde M_u sea dos tercios del M_u máximo.

La figura 7-34 presenta un gráfico esquemático de la envolvente de momento flexor para un tramo interno típico de una viga continua sobre apoyos múltiples diseñada para momento negativo máximo de $w\ell_n^2/11$ y momento positivo máximo de $w\ell_n^2/16$ (de acuerdo con ACI 318-08, Art. 8.3.3). Las figuras 7-35 a 7-37 presentan gráficos similares para tramos externos.

Se puede utilizar la figura 7-34 para ubicar los puntos de corte por flexión y los puntos de inflexión para tramos internos típicos sometidos a carga uniforme, *bajo la salvedad de las limitaciones del ACI 318-08, Art. 8.3.3*. De esta forma, los puntos de inflexión extremos para momento positivo (puntos en donde el diagrama de momentos es cero) están a $0.146\ell_n$ de las caras de los dos apoyos, mientras que los correspondientes puntos de inflexión de momento negativo están a $0.24\ell_n$ de los apoyos. Esto significa que el acero para momento positivo debe extenderse desde la mitad de la luz hasta al menos $0.146\ell_n$ de los apoyos, mientras que el acero de momento negativo debe extenderse al menos hasta $0.24\ell_n$ desde los apoyos.

7.8 Empalmes

7.8.1 Traslapos de tracción

En un traslapo, la fuerza en una barra es transferida al concreto, el cual a su vez la transfiere a la barra adyacente. El mecanismo de transferencia de fuerzas mostrado en la figura 7-32a se puede visualizar a partir del patrón de grietas dibujado en la figura 7-32b. La transferencia de fuerzas de la barra al concreto causa presiones radiales como las mostradas en la figura 7-32c, las cuales, a su vez, causan grietas de fracturamiento a lo largo de las barras similares a las mostradas en la figura 7-8a. Una vez que éstas ocurren, el empalme falla como se muestra en la figura 7.33. Las grietas de fracturamiento se inician generalmente en los extremos del empalme, donde las presiones de fracturamiento tienden a ser mayores que en el centro. Como se muestra en la figura 7-32b, ocurren grandes grietas transversales en las discontinuidades en los extremos de barras empalmadas. El refuerzo transversal en una región de empalme retarda la apertura de las grietas de fracturamiento y por lo tanto mejora la capacidad del empalme.

El Art. 12.15 del ACI 318-0-8 distingue entre dos tipos de traslapos de tracción dependiendo de la fracción de las barras empalmadas en una longitud dada y en el esfuerzo en el acero del empalme. La tabla R12.15.2 del ACI 318-08 se presenta como la tabla 7-2. Las longitudes de los empalmes para cada clase son las siguientes:

Empalme Clase A: $1.0 \ell_d$

Empalme Clase B: $1.3 \ell_d$

Como el nivel de esfuerzos en la barra se contabiliza en la tabla 7-2, la reducción en la longitud de desarrollo permitida en el Art. 12.2.5 del ACI *no* se aplica en el cálculo de ℓ_d para este propósito.

La distancia centro a centro entre dos barras en un traslazo no puede ser mayor que un quinto de la longitud del empalme con un máximo de 15 cm (ACI 318-08, Art. 12.14.2.3). No se permite empalmar barras mayores a la No. 11, excepto en las juntas entre columna y zapata (ACI 318-08, Art. 15.8.2.3). Los traslazos deben ser siempre confinados con estribos, aros o espirales para retardar o prevenir la pérdida completa de capacidad. La pérdida de capacidad se manifiesta como se muestra en la figura 7.33. Como se indica en los Art. 12.2.2 y 12.2.3 del ACI 318-08, la presencia de acero transversal conduce a menor ℓ_d y por lo tanto empalmes más cortos. El Art. 21.5.2.3 requiere que los traslazos de tracción para refuerzo de flexión en vigas de pórticos especiales sean confinados con aros o espirales.

7.8.2 Traslazos de compresión

En un traslazo de compresión, una porción de la fuerza es transferida mediante apoyo sobre el concreto en el extremo de la barra. Esto aunado al hecho de que no existan grietas de tracción transversales dentro de la zona de empalme, permite que los traslazos de compresión sean mucho más cortos que los traslazos de tracción (ACI 318-08, Art. 12.16). Con frecuencia, un traslazo de compresión fallará por descascamiento del concreto en los extremos de las barras. El diseño de empalmes para columnas se discutirá más adelante.

7.8.3 Empalmes soldados, mecánicos y extremo-a-extremo

Además de traslazos, las barras sometidas a esfuerzos de tracción o de compresión pueden empalmarse mediante soldadura, o mediante varios dispositivos mecánicos, tales como mangas rellenas con cadmio derretido o mangas roscadas. El uso de tales empalmes está regido por los Art. 12.14.3 y 12.16.3 del ACI.

	Barras No. 6 o menores y alambre deformado	Barras No. 7 o superior
<p>Caso 1: Espaciamiento libre entre barras a desarrollar o empalmar no menor a d_b, recubrimiento libre no menor a d_b y estribos o aros a lo largo de ℓ_d con espaciamiento al menos mínimo del código</p> <p>o bien</p> <p>Caso 2: Espaciamiento libre entre barras a desarrollar o empalmar no menor a $2d_b$, y recubrimiento libre no menor a d_b.</p>	$\left(\frac{f_y \psi_t \psi_e}{6.6 \lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b$ <p>(7-8)</p>	$\left(\frac{f_y \psi_t \psi_e}{5.3 \lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b$ <p>(7-9)</p>
Todos los demás casos	$\left(\frac{f_y \psi_t \psi_e}{4.4 \lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b$ <p>(7-10)</p>	$\left(\frac{f_y \psi_t \psi_e}{3.5 \lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b$ <p>(7-11)</p>

¹La longitud ℓ_d calculada usando cualquiera de las ecuaciones 7-8 a 7-11 no deberá ser menor que 30 cm.

$\frac{A_s \text{ provisto}^*}{A_s \text{ requerido}}$	$\frac{f_s}{f_y}$	Porcentaje máximo de A_s empalmado dentro de la longitud de traslapo requerida	
		50 %	100 %
Igual o mayor que 2	0.5 o menos	Clase A	Clase B
Menor que 2	Mayor que 0.5	Clase B	Clase B

*Razón de área de refuerzo provista contra área de refuerzo requerida por análisis en los puntos de empalme. (Tomado de ACI 318-08 Artículo 12.15.2.)

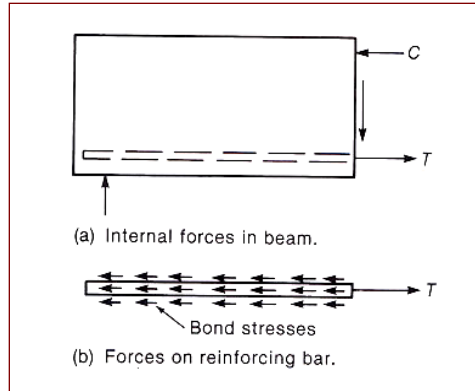


Figura 7-1 Necesidad de esfuerzos por adherencia.

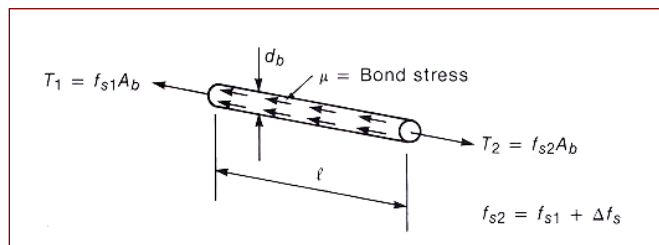


Figura 7-2 Relación de variación de esfuerzos en la barra y esfuerzos por adherencia.

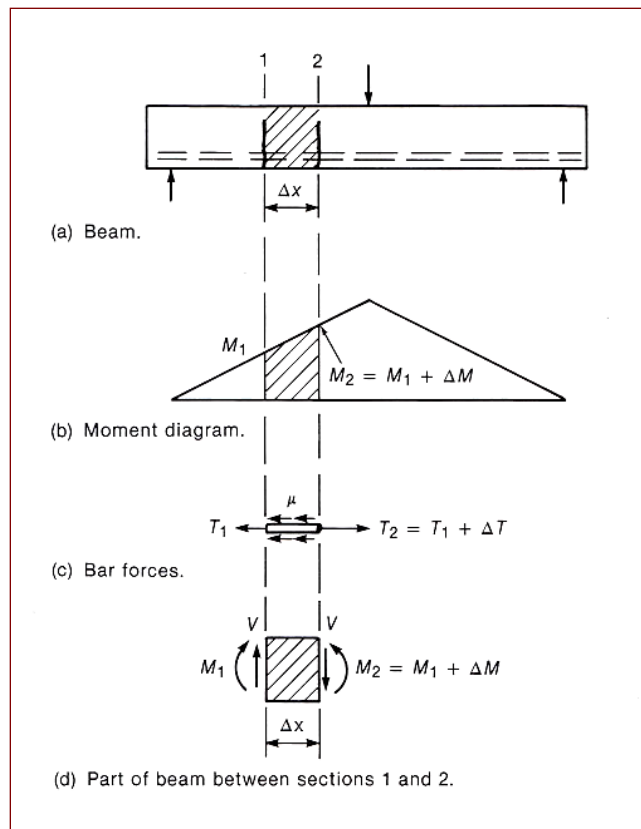


Figura 7-3 Esfuerzos promedio de adherencia por flexión.

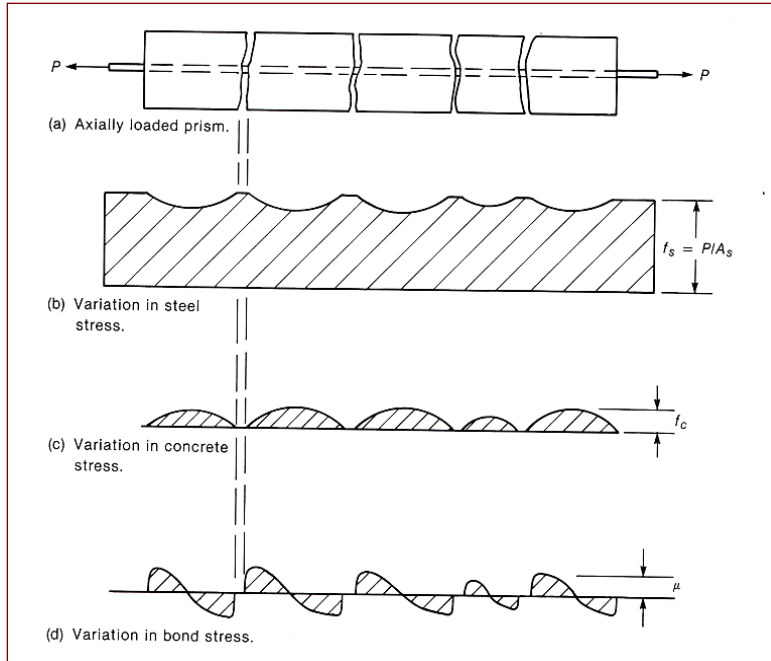


Figura 7-4 Esfuerzos en el acero, el concreto y por adherencia en un prisma agrietado.

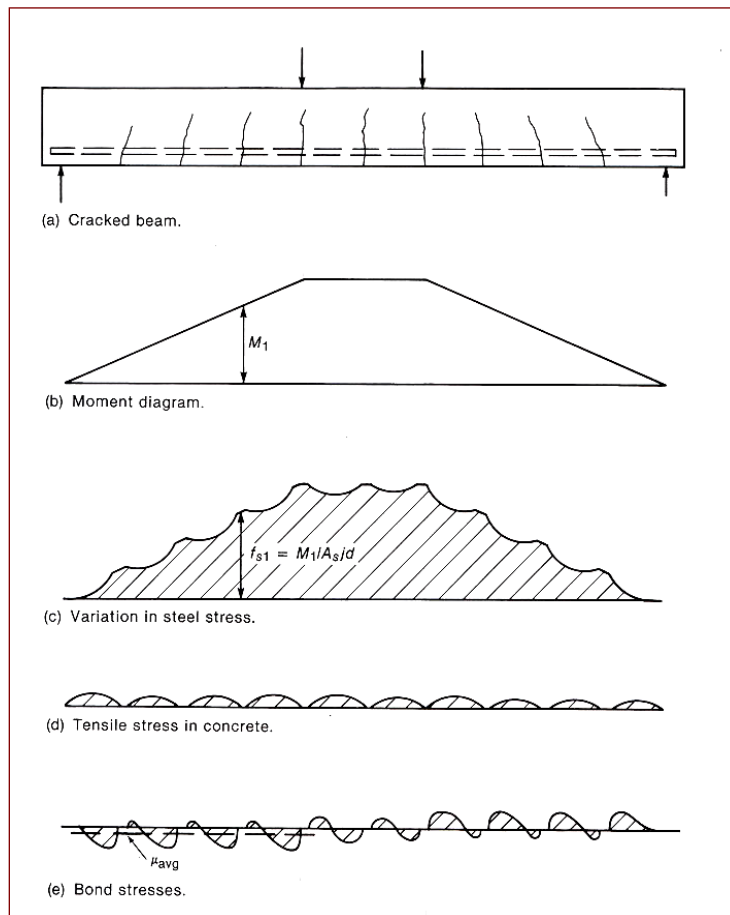


Figura 7-5 Esfuerzos en el acero, el concreto y por adherencia en una viga agrietada.

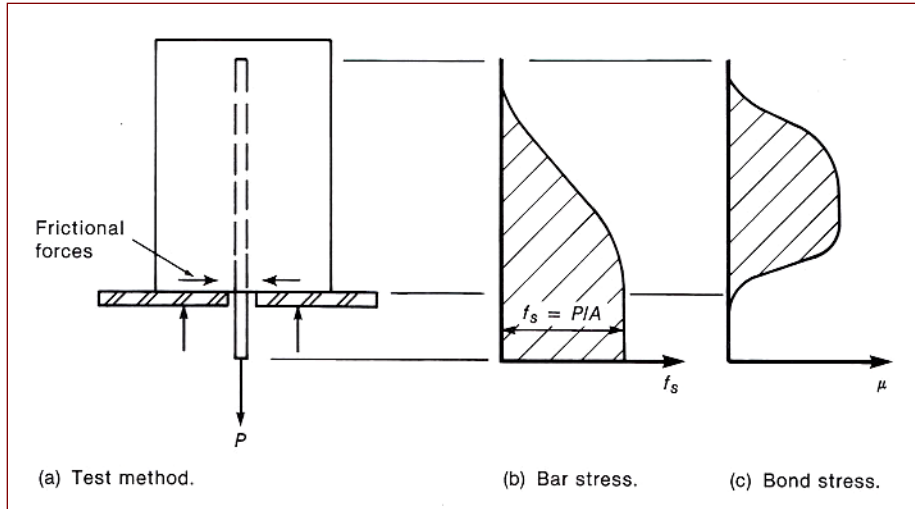


Figura 7-6 Distribución de esfuerzos en una prueba de sacado.

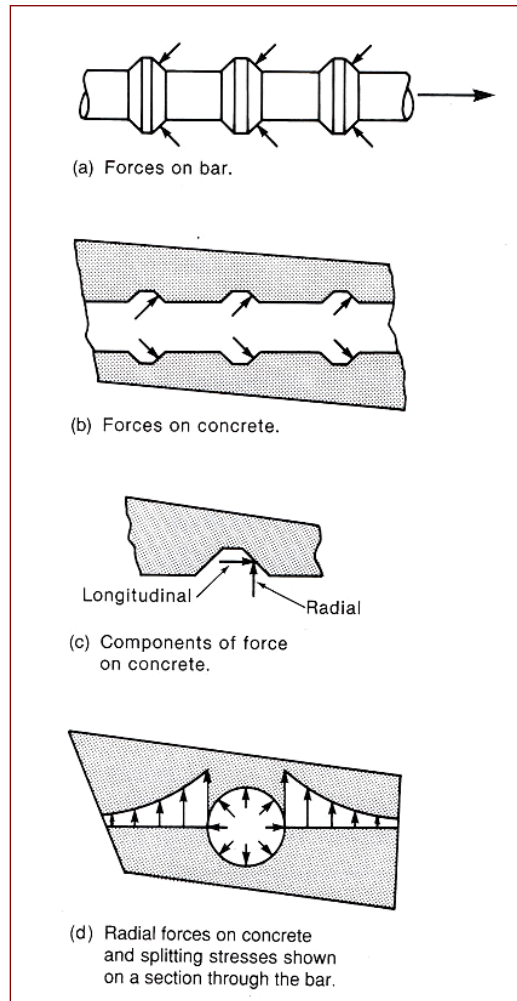


Figura 7-7 Mecanismo de transferencia por adherencia.

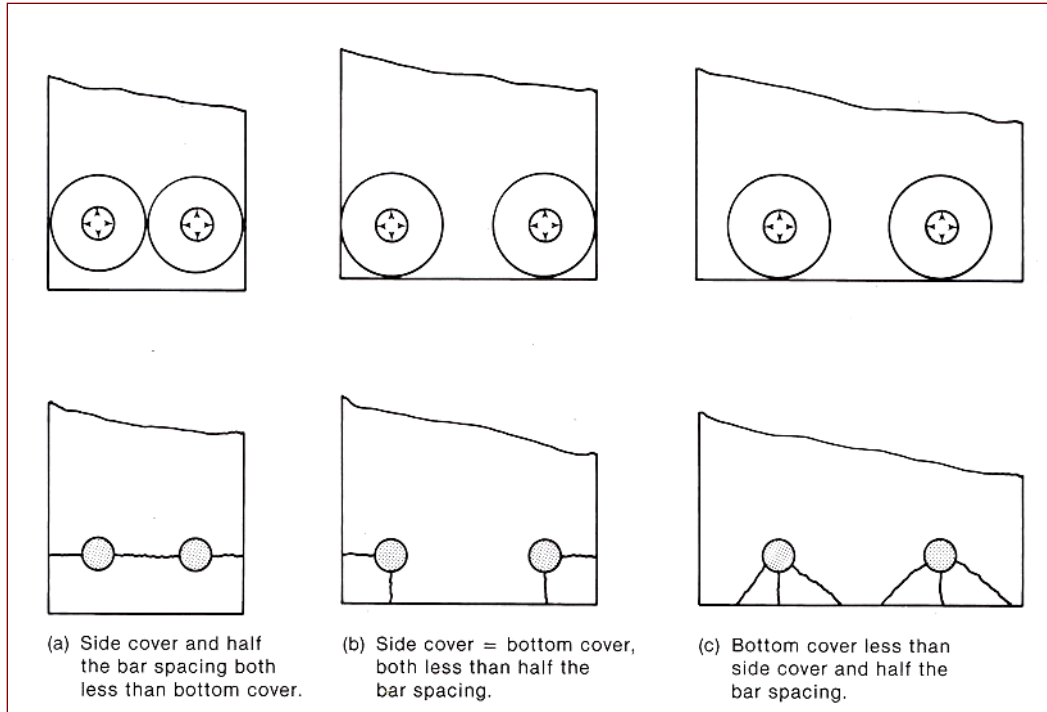


Figura 7-8 Superficies típicas de falla por fracturamiento.

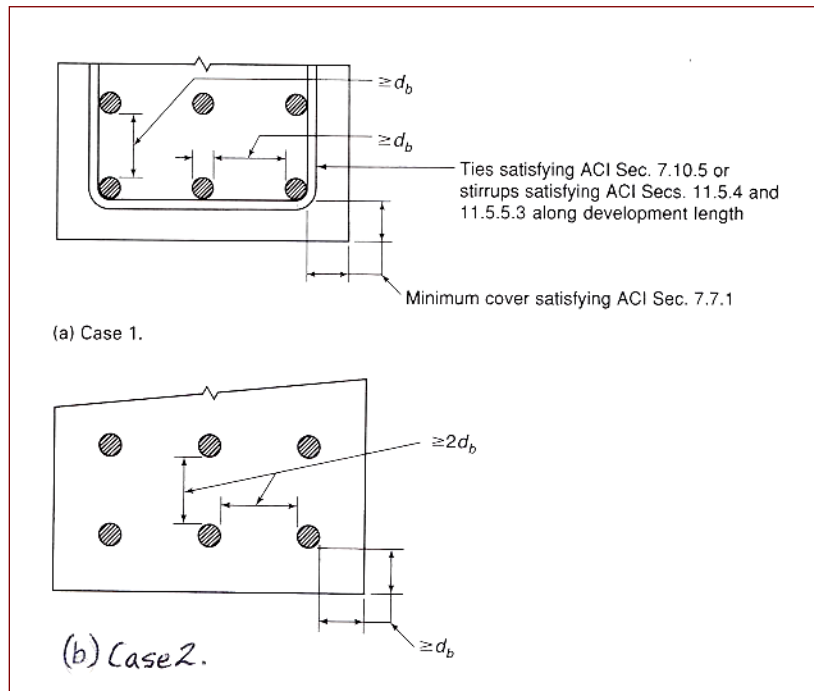


Figura 7-9 Explicación de Casos 1 y 2 en ACI 318-08 Artículo 12.2.2.

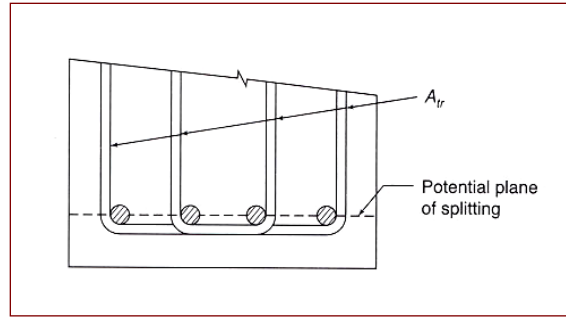


Figura 7–10 Definición de A_{tr} .

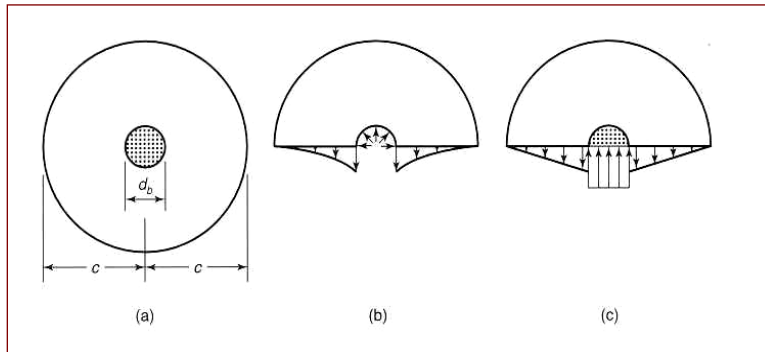


Figura 7–11 Esfuerzos en un prisma de concreto sujeto a esfuerzos por adherencia.

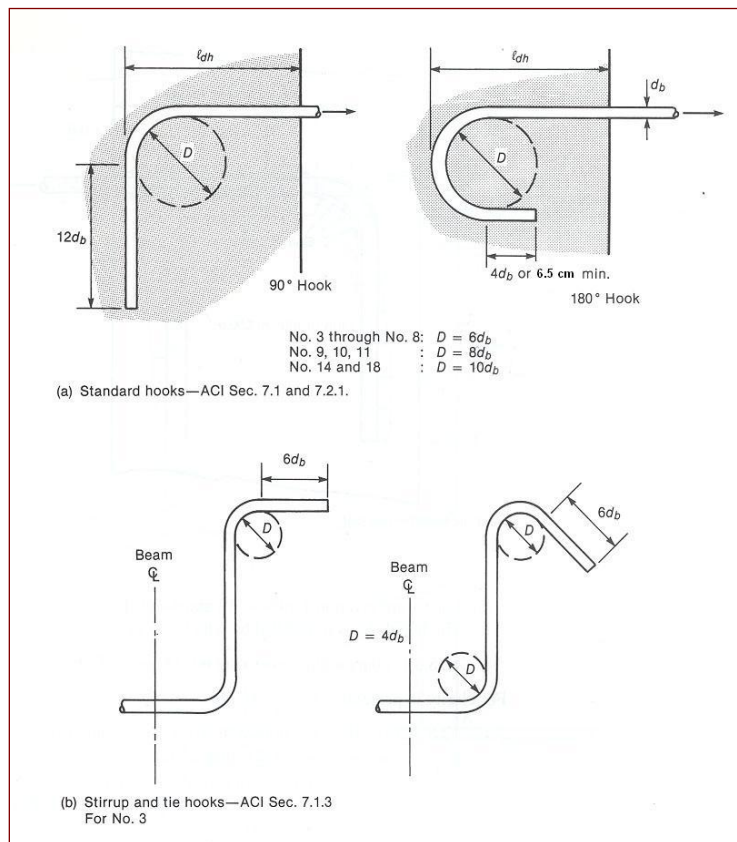


Figura 7–12 Ganchos usuales.

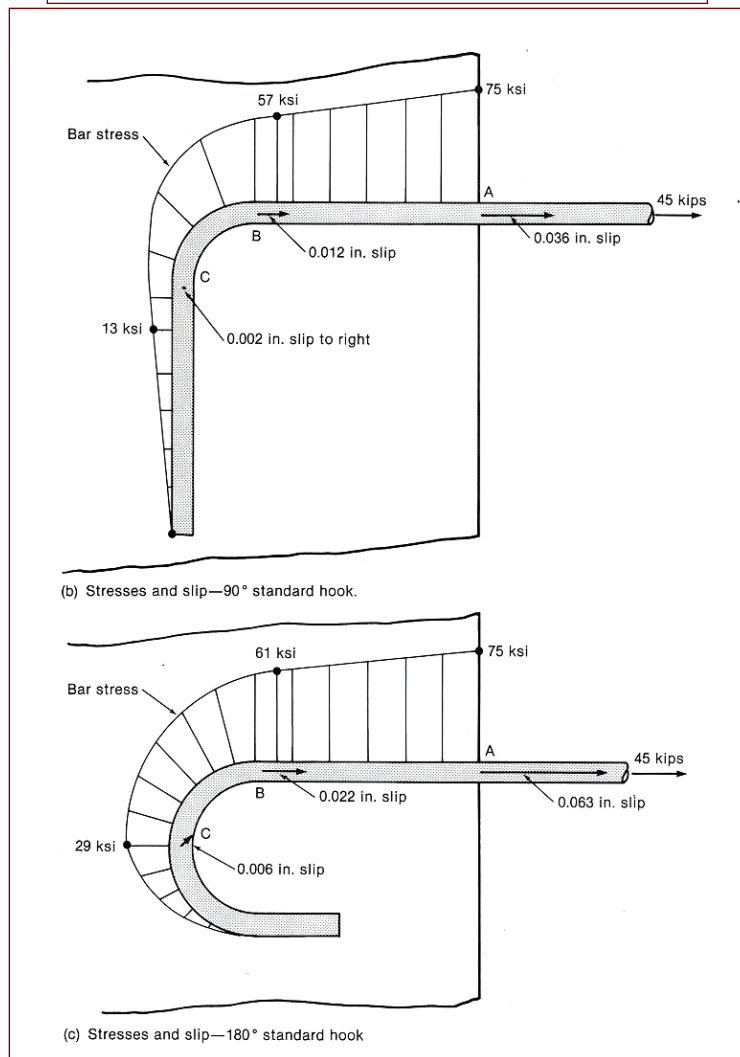
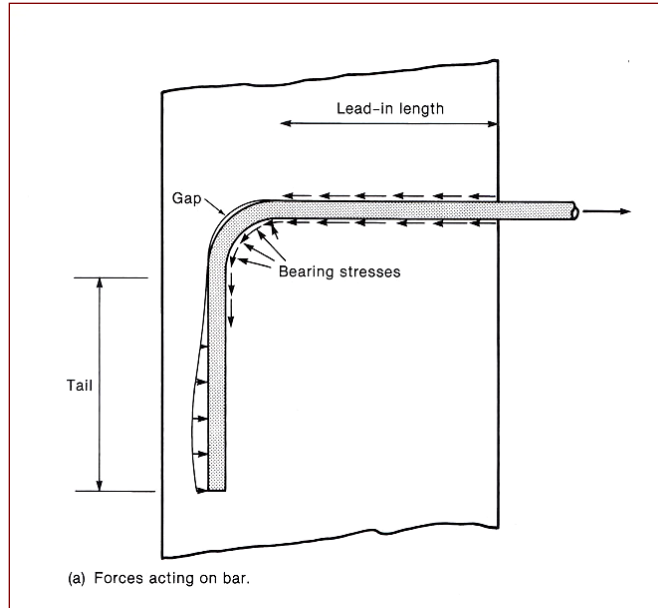


Figura 7-13 Comportamiento de ganchos.

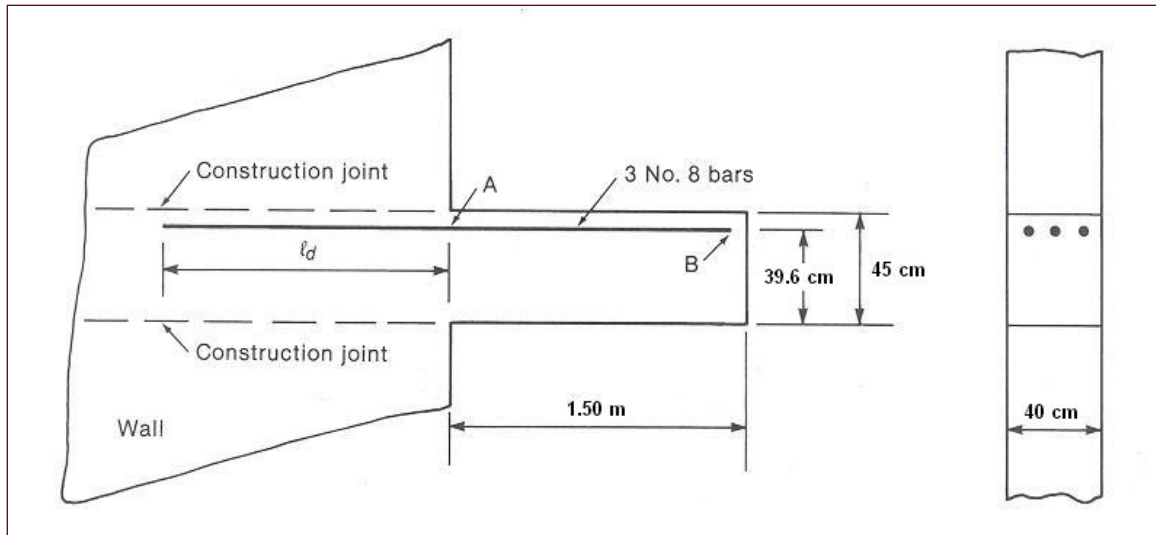


Figura 7-14 Viga en voladizo—Ejemplos 7-1 y 7-2.

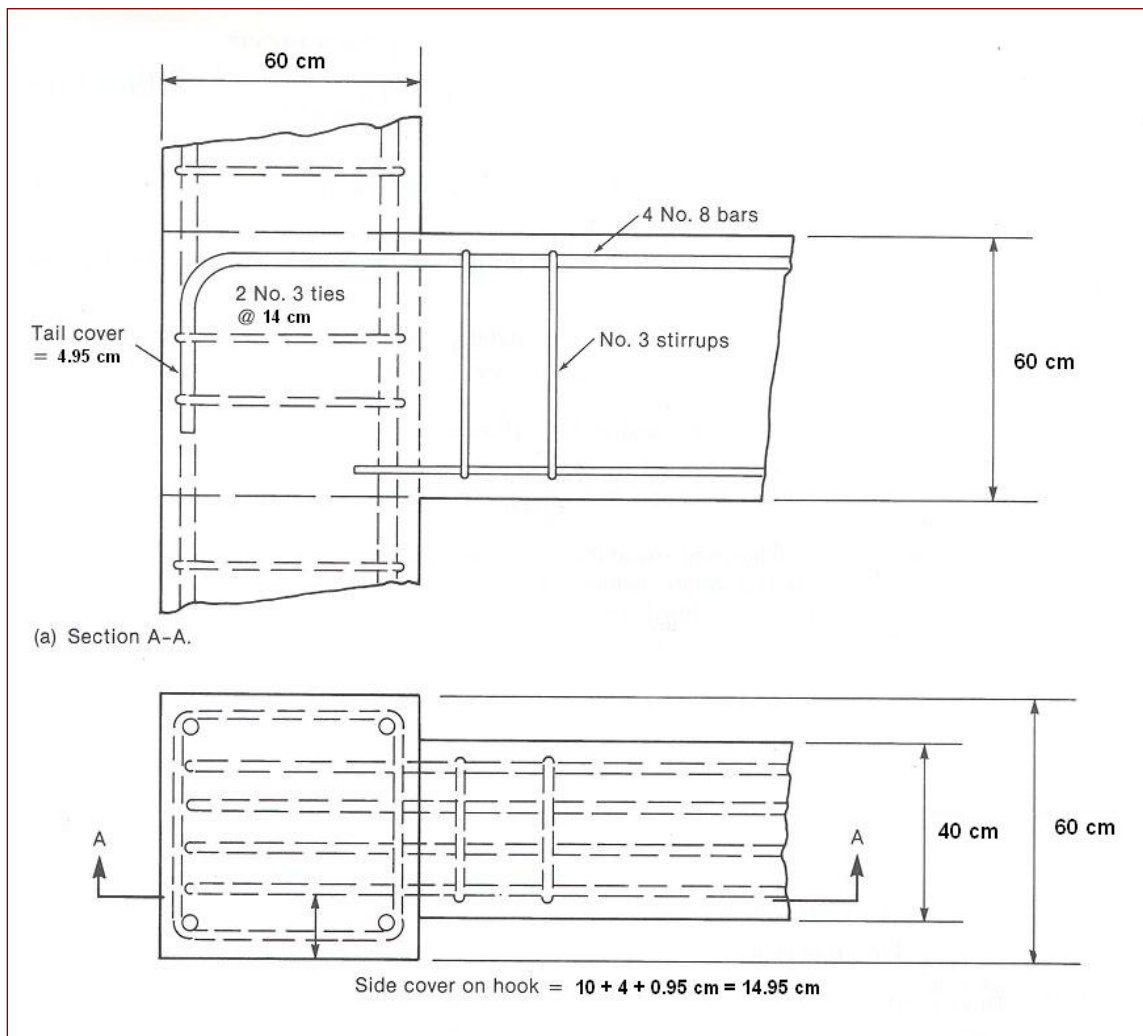


Figura 7-15 Unión viga-columna—Ejemplo 7-3.

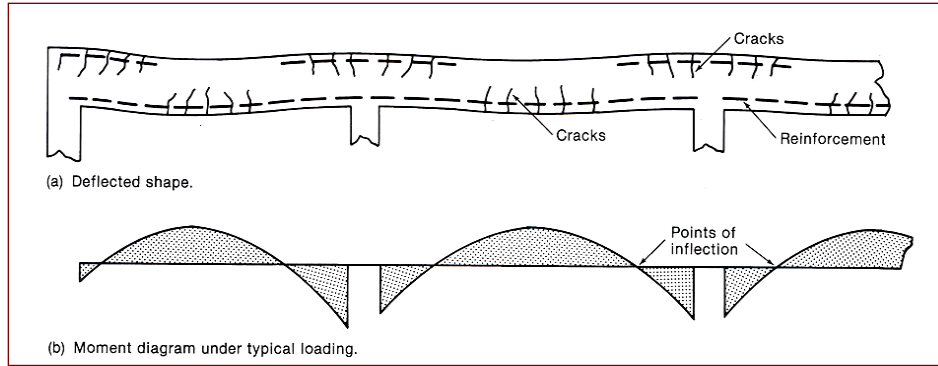


Figura 7-16 Momentos y refuerzo en viga continua.

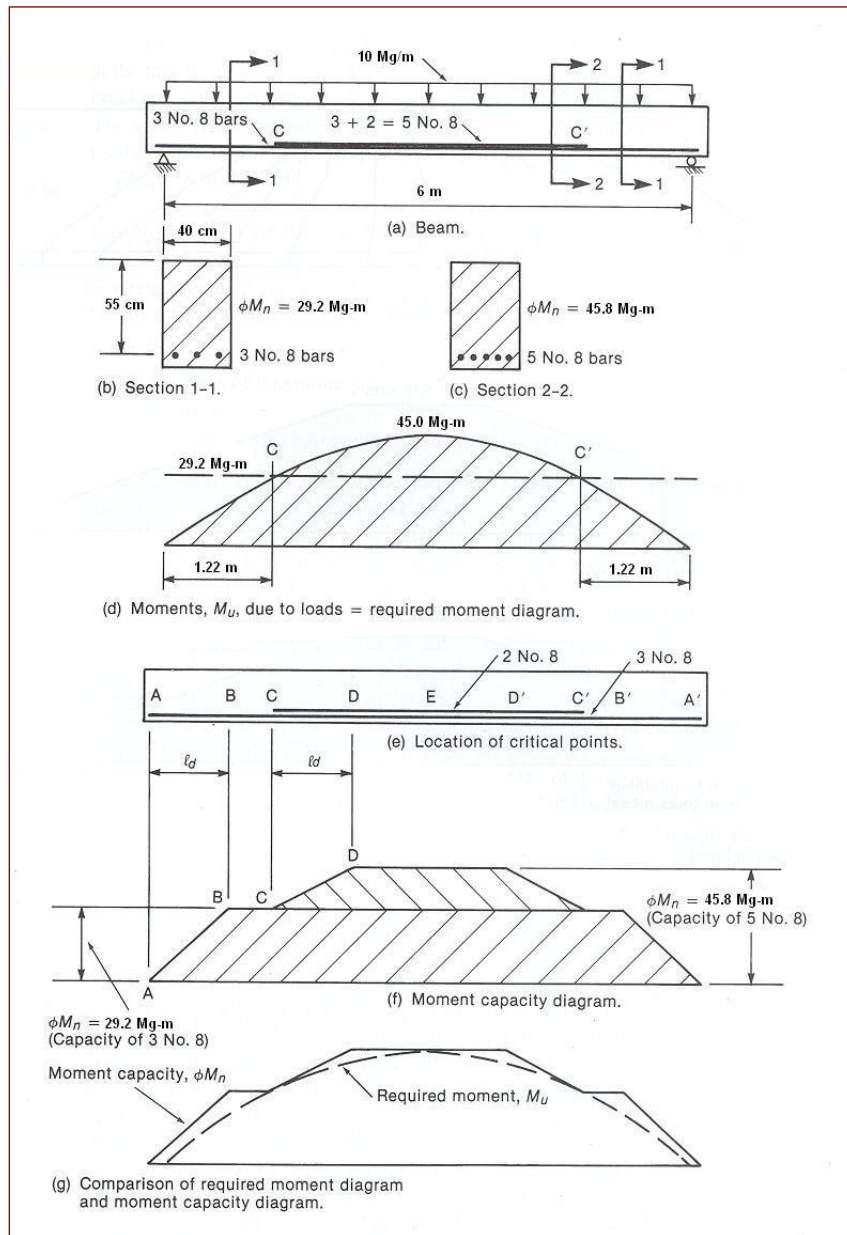


Figura 7-17 Momento requerido y capacidad de momento

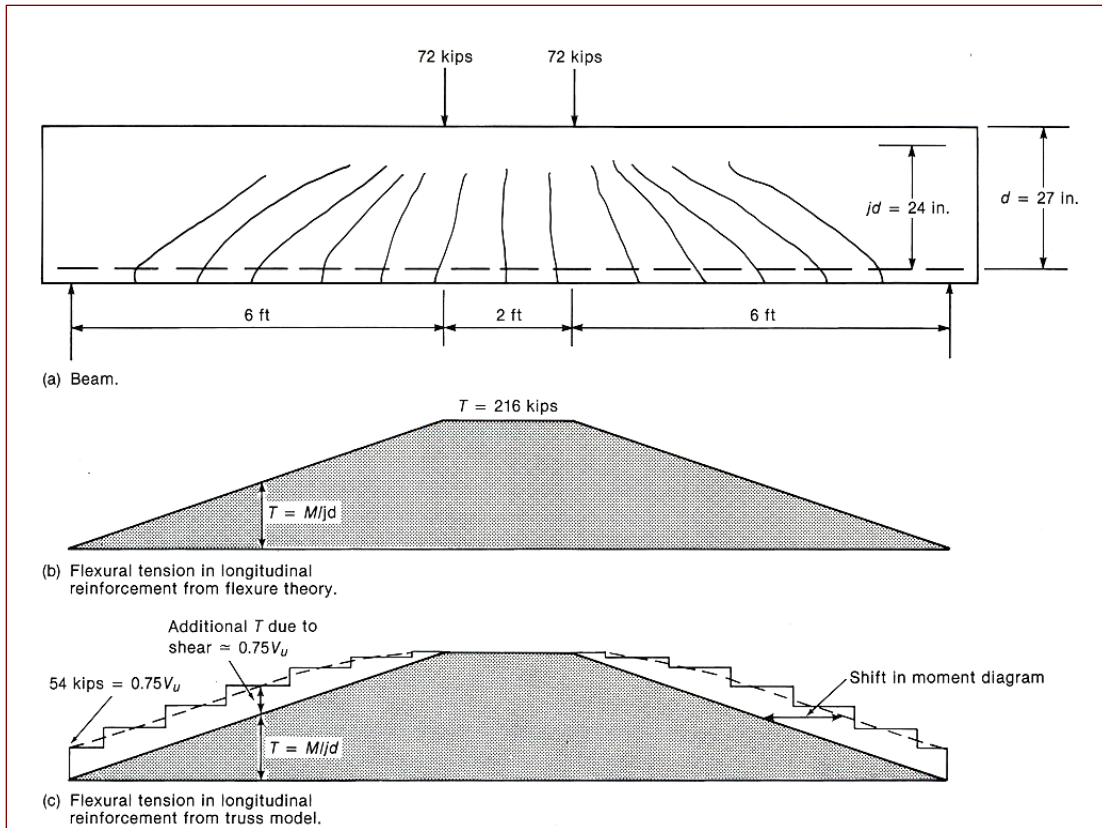


Figura 7-18 Tracción de flexión en refuerzo longitudinal.

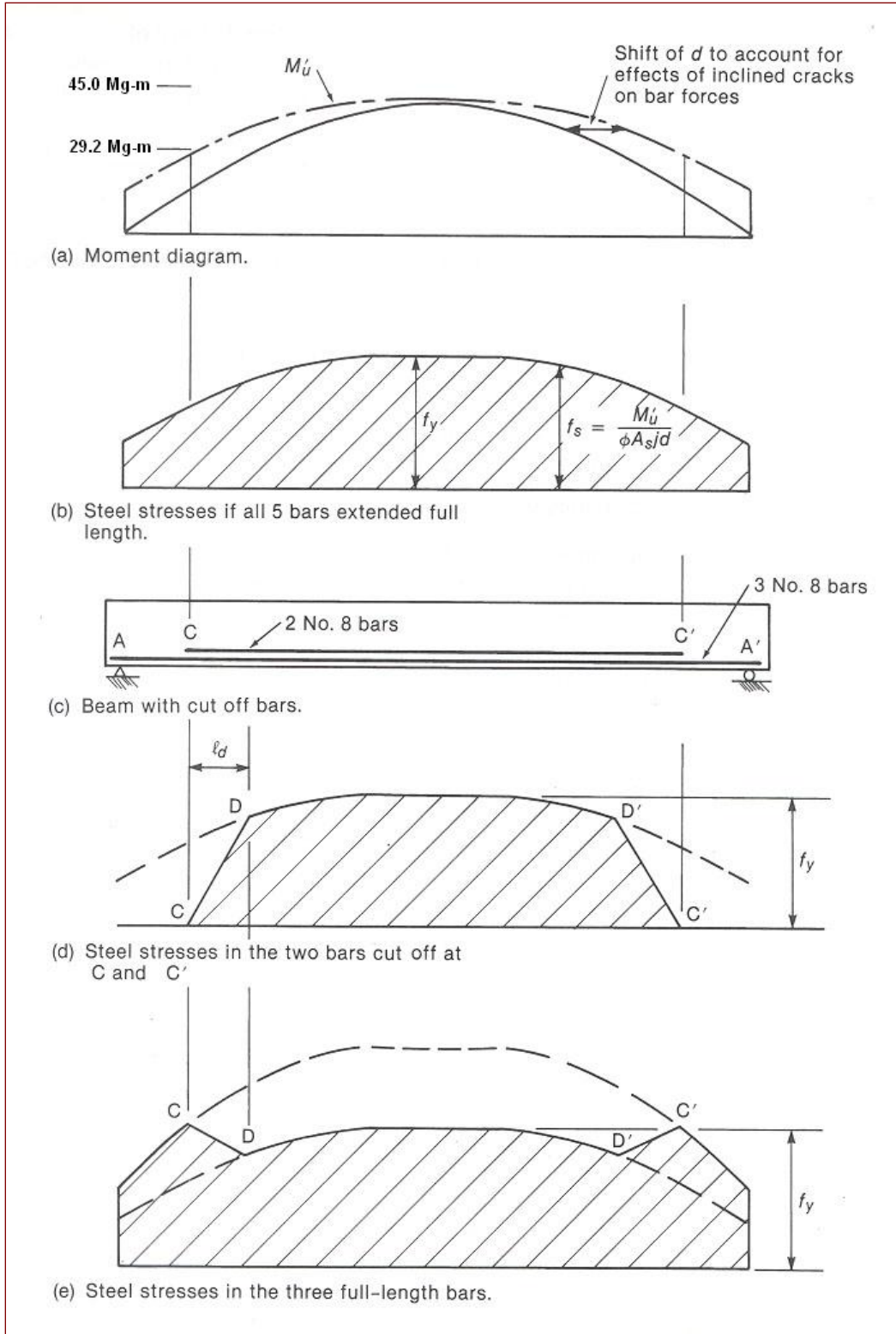


Figura 7-19 Esfuerzos en el acero cerca de los puntos de corte de barra.

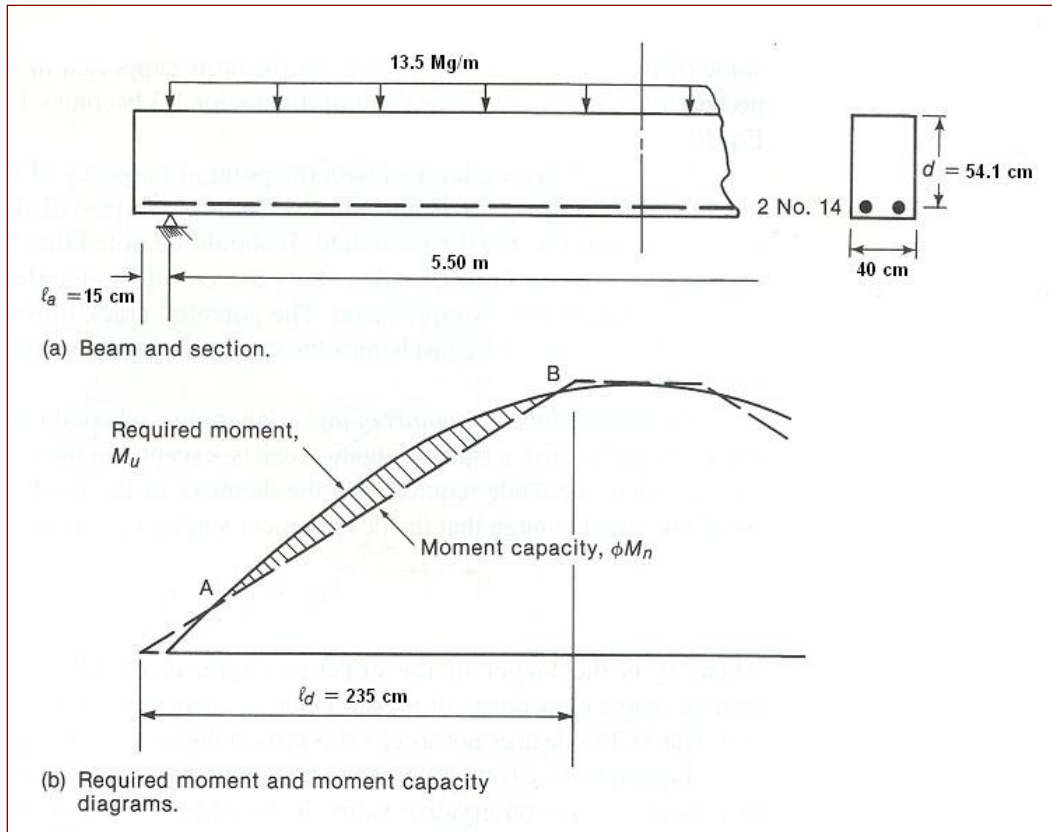


Figura 7-20 Anclaje de refuerzo para momento positivo—Ejemplo 7-4.

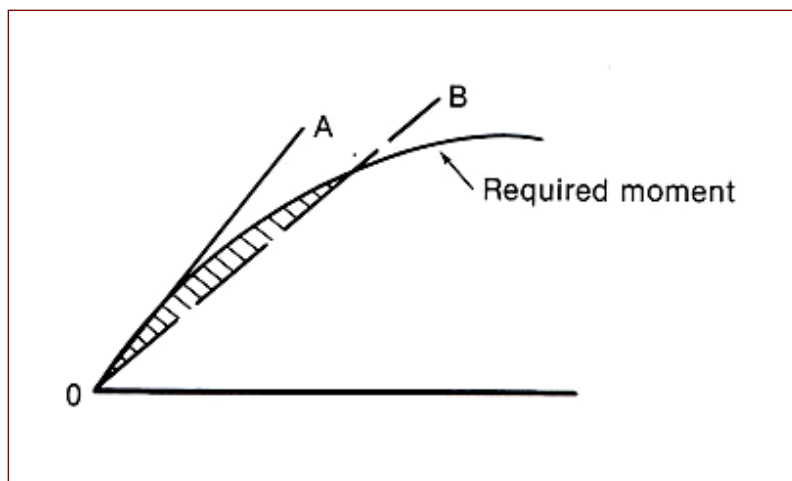


Figura 7-21 Anclaje en el punto de momento nulo.

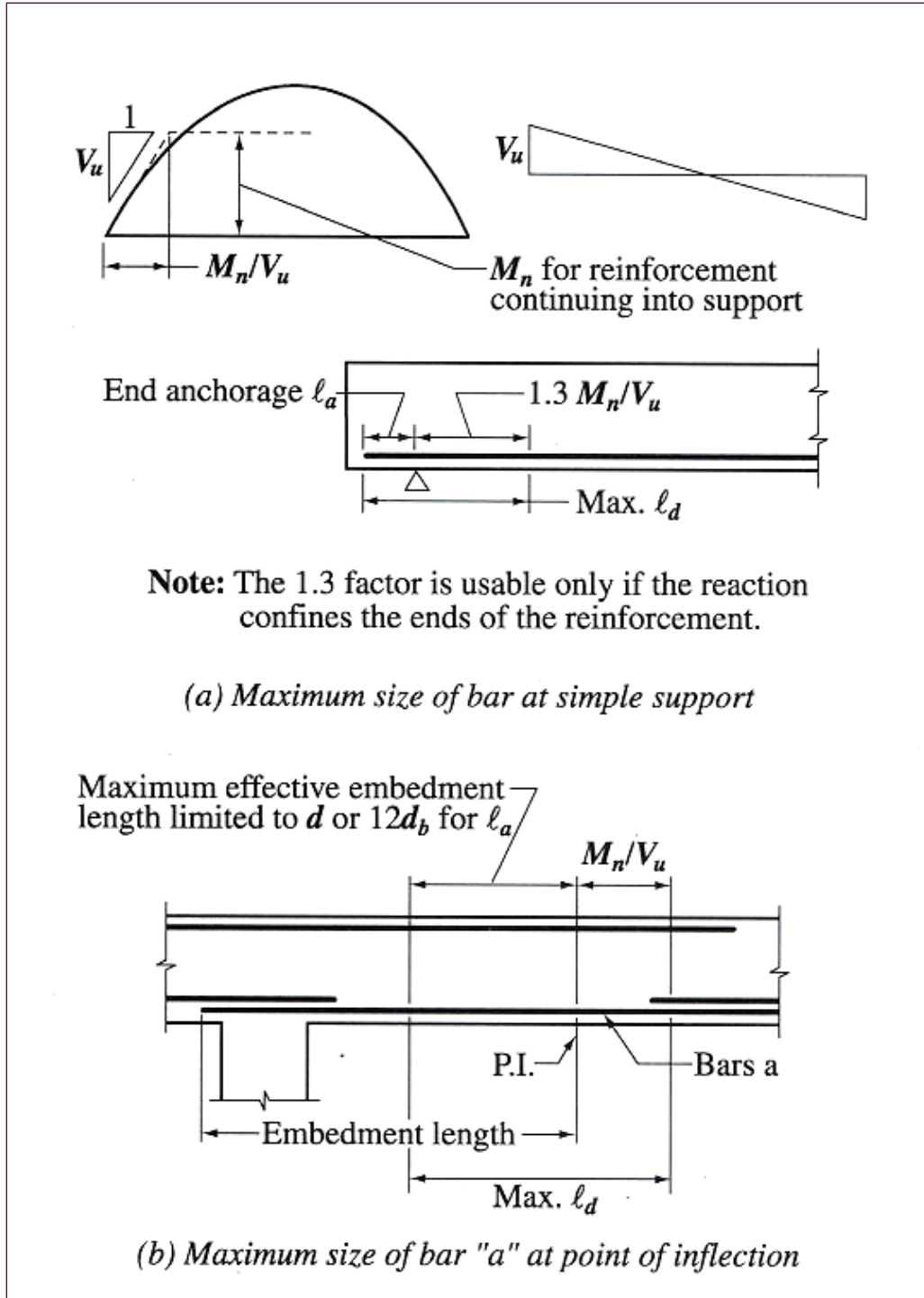


Figura 7-22 Anclaje en apoyo simple y en el punto de inflexión en vigas continuas.

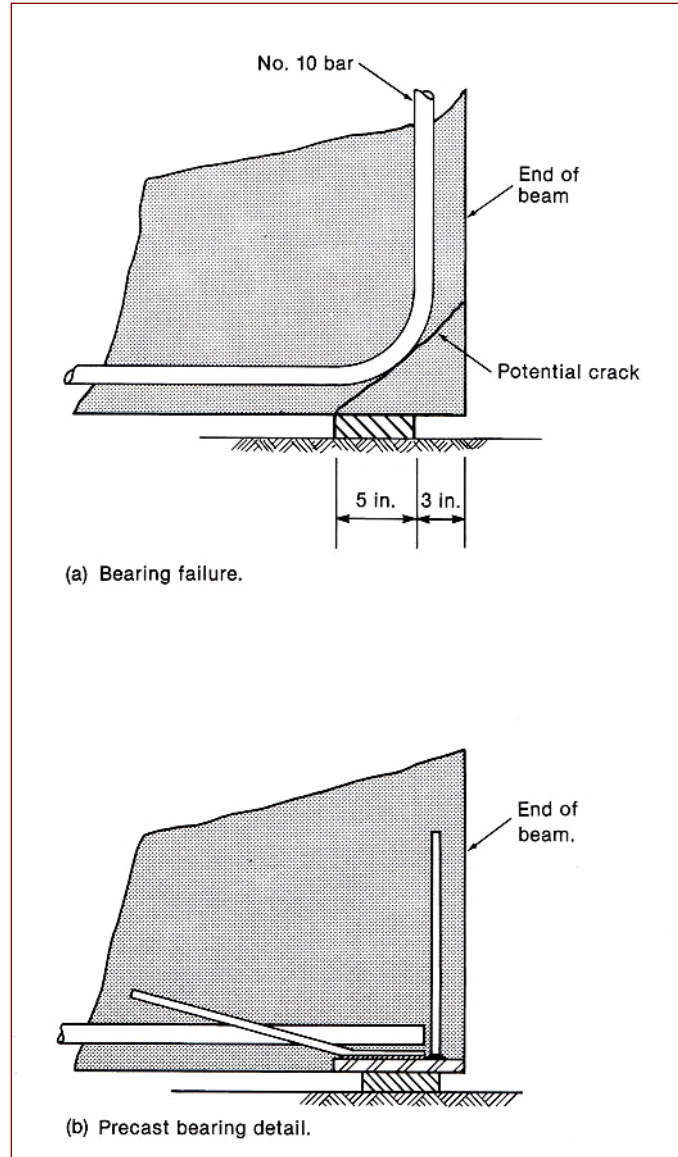


Figura 7-23 Apoyo simple en vigas.

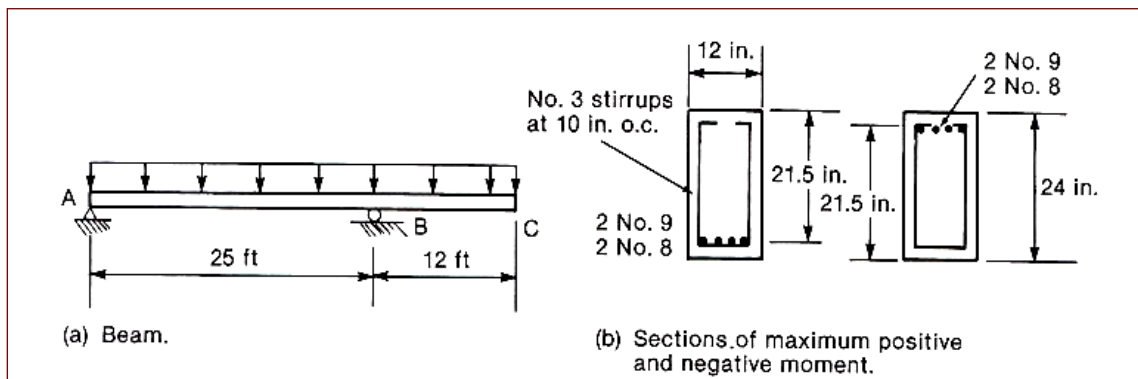


Figura 7-24 Viga—Ejemplo 7-5.

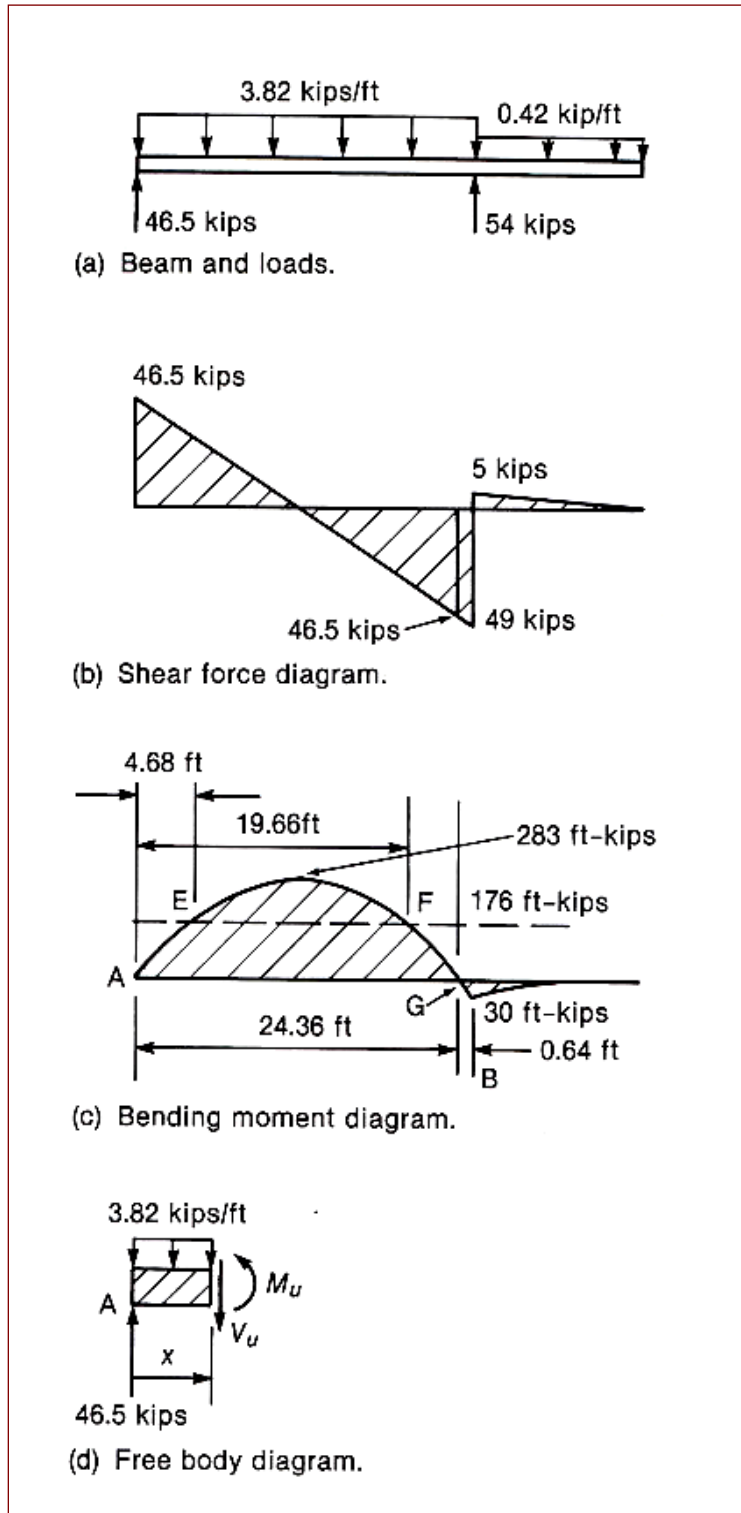


Figura 7–25 Cálculo de puntos de corte para flexión debido a momento positivo—Ejemplo 7–5.

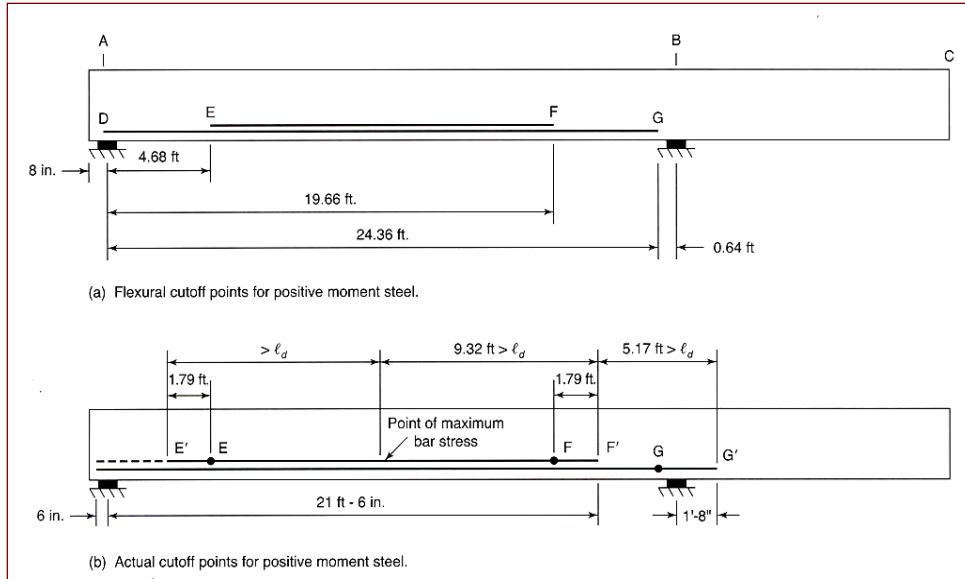


Figura 7-26 Ubicación de puntos de corte para momento positivo—Ejemplo 7-5.

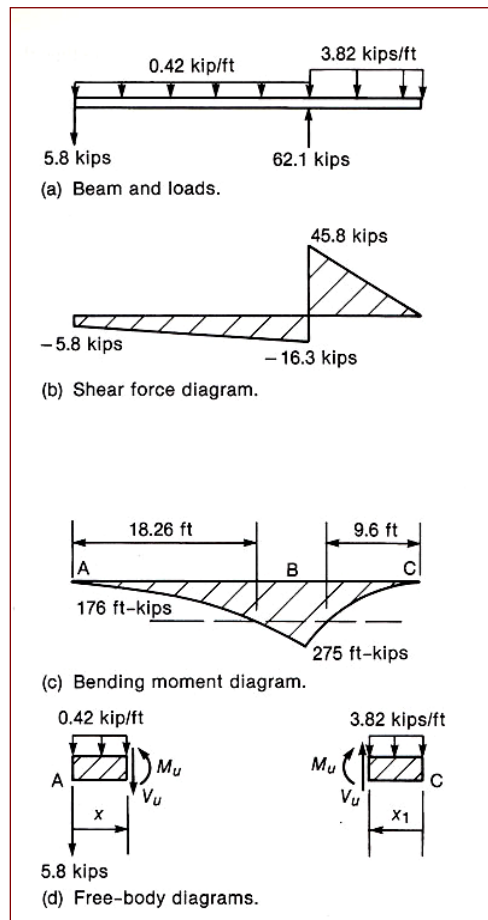


Figura 7-27 Cálculo de puntos de corte para flexión debido a momento negativo—Ejemplo 7-5.

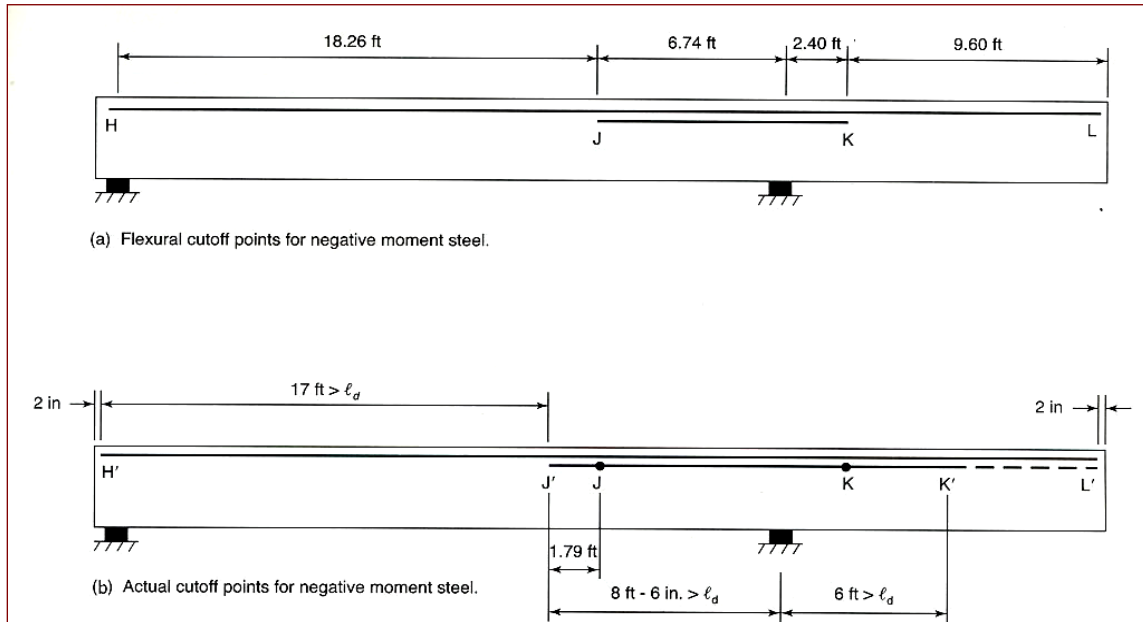


Figura 7–28 Ubicación de puntos de corte para momento negativo—Ejemplo 7–5.

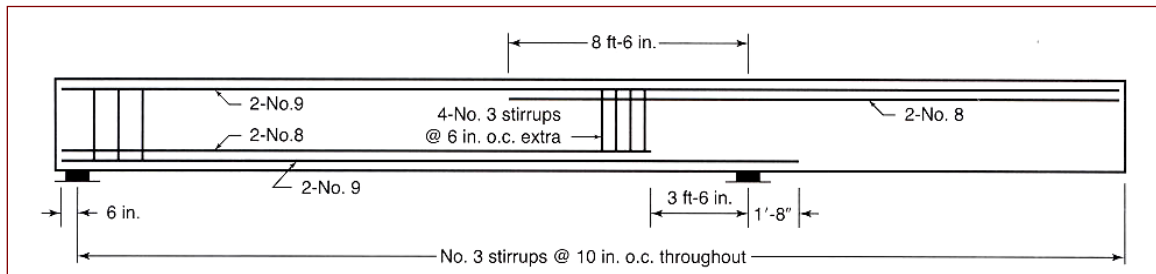


Figura 7–29 Detalle de refuerzo—Ejemplo 7–5.

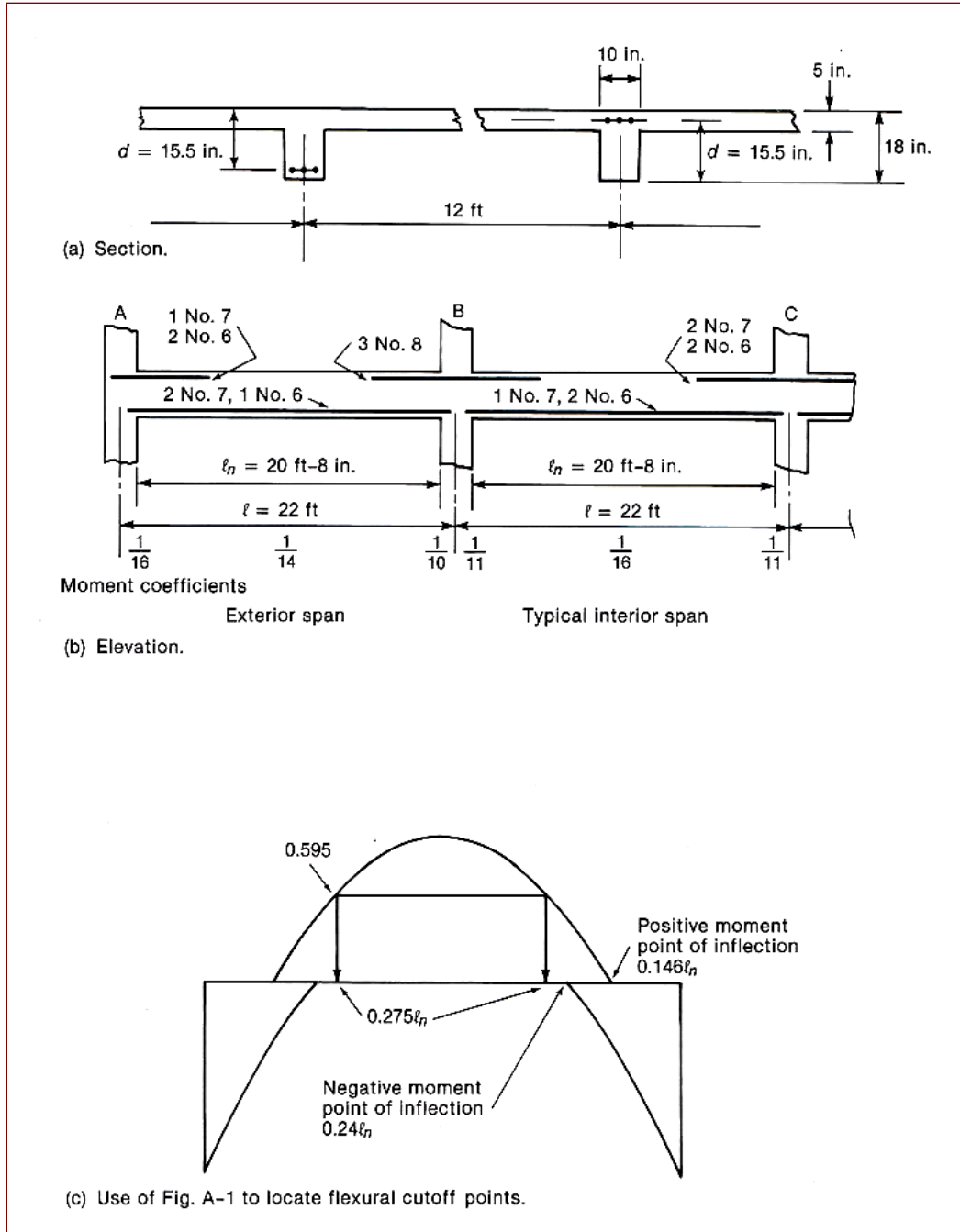


Figura 7-30 Ejemplo 7-6.

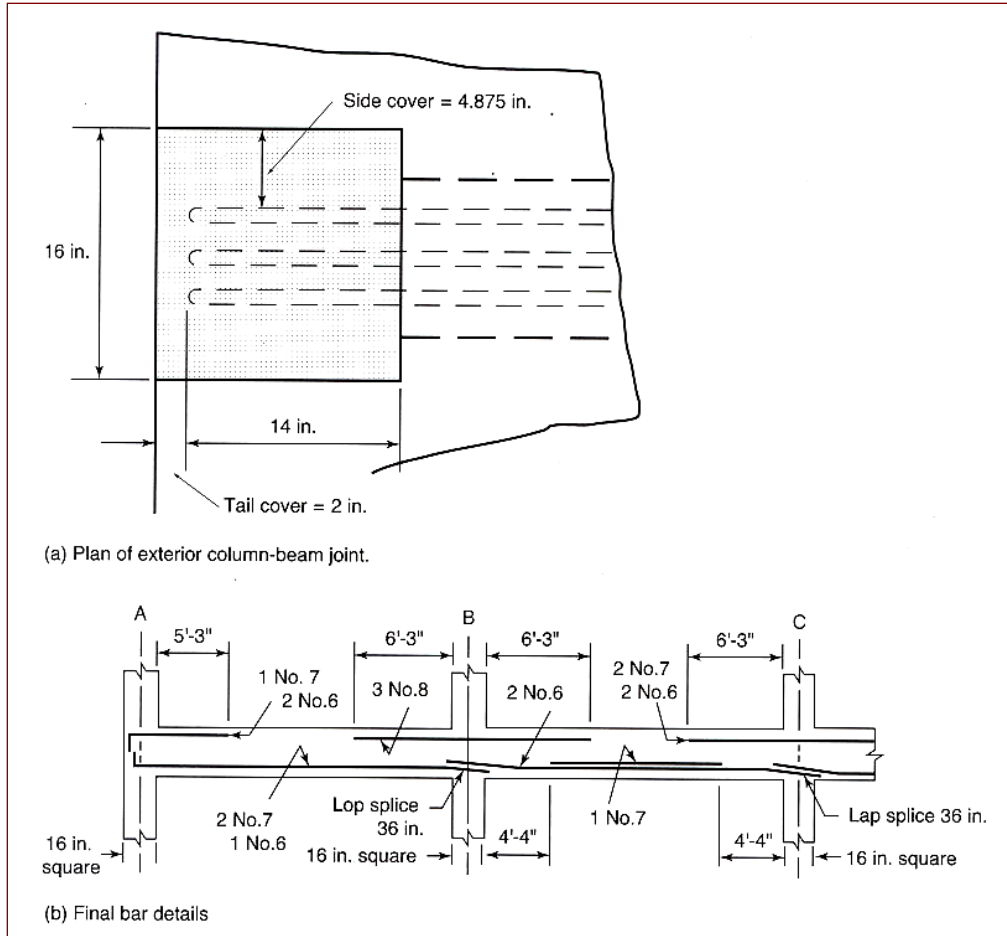


Figura 7–31 Detalle de refuerzo—Ejemplo 7–6.

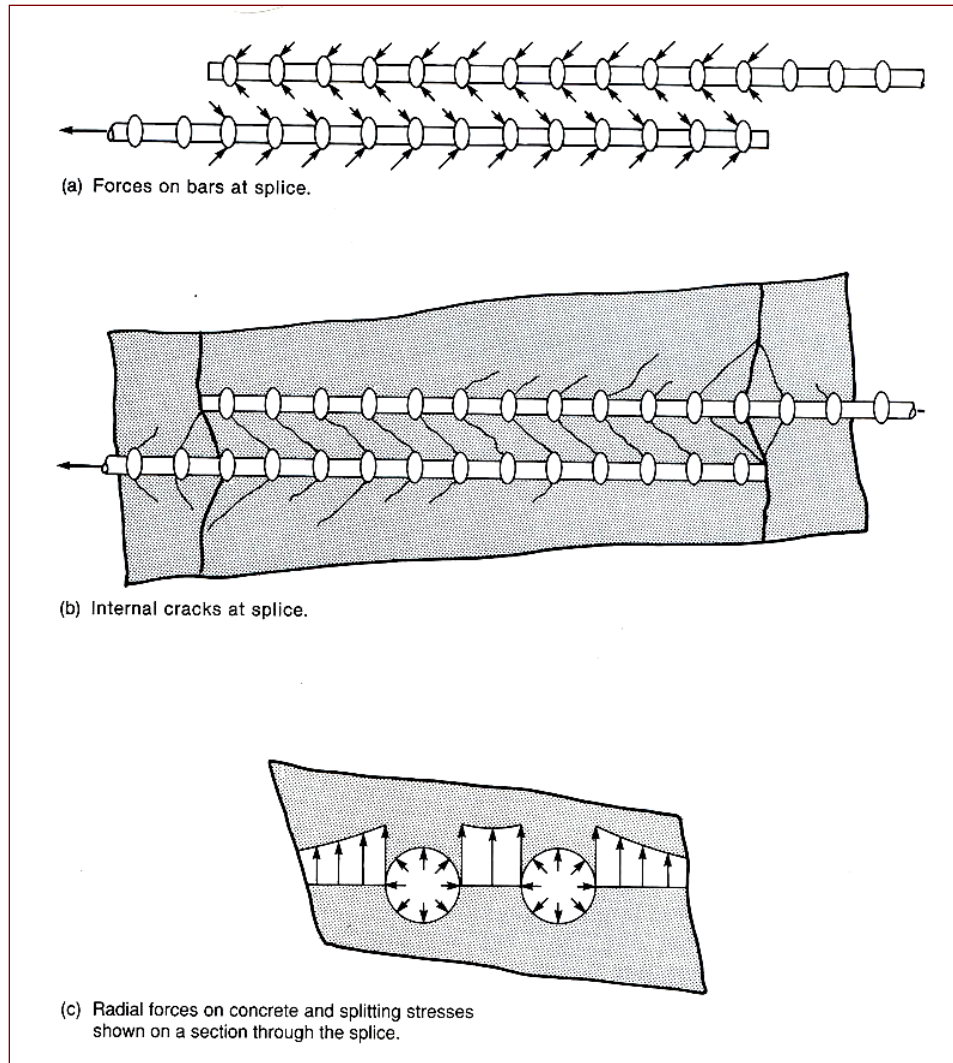


Figura 7-32 Traslapo de tracción.

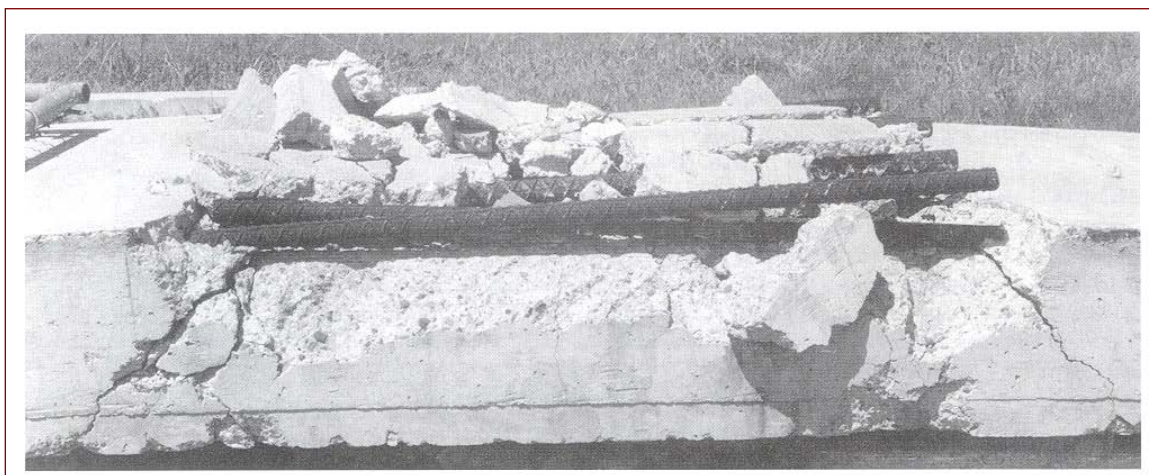


Figura 7-33 Falla de un traslapo de tracción. (Fotografía cortesía de J. G. MacGregor.)

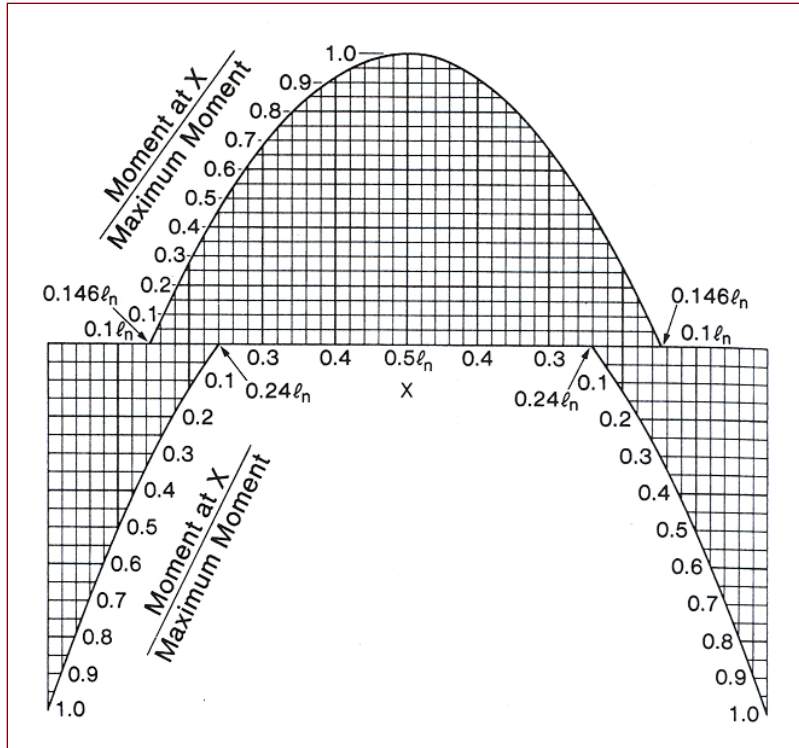


Figura 7-34 Envolvente de momento flexor para tramo interno típico (coeficientes para momento: $-1/11, +1/16, -1/11$).

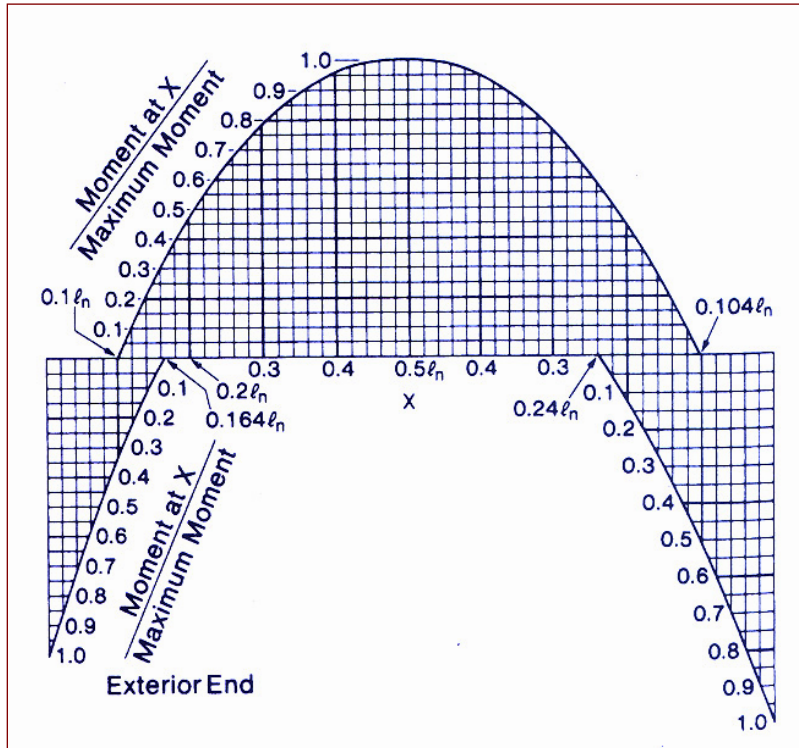


Figura 7-35 Envolvente de momento flexor para tramo exterior con apoyo integral de columna (coeficientes para momento: $-1/16, +1/14, -1/10$).

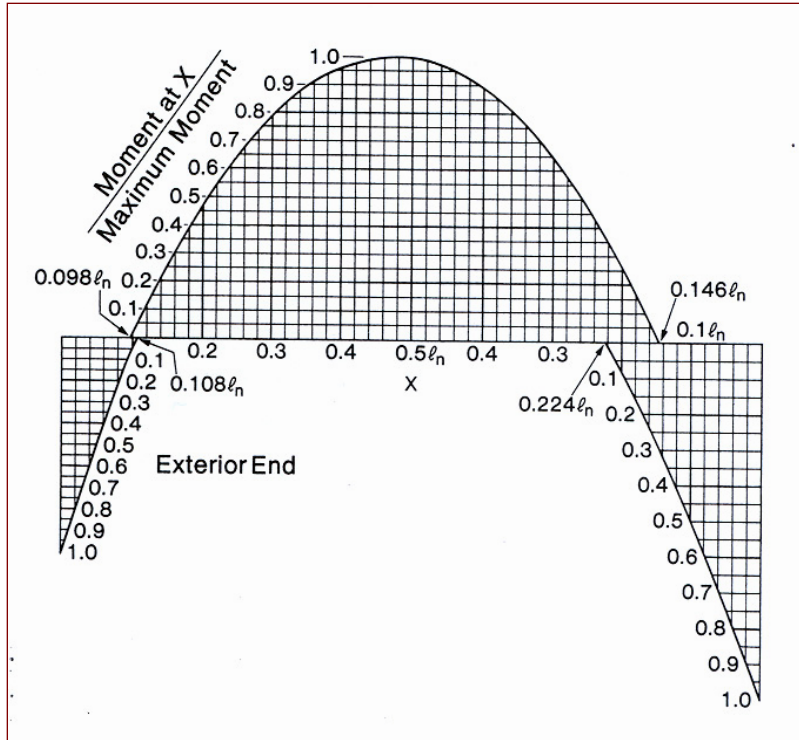


Figura 7-36 Envolvente de momento flexor para tramo exterior con apoyo integral de viga de tímpano o principal (coeficientes para momento: $-1/24$, $+1/14$, $-1/10$).

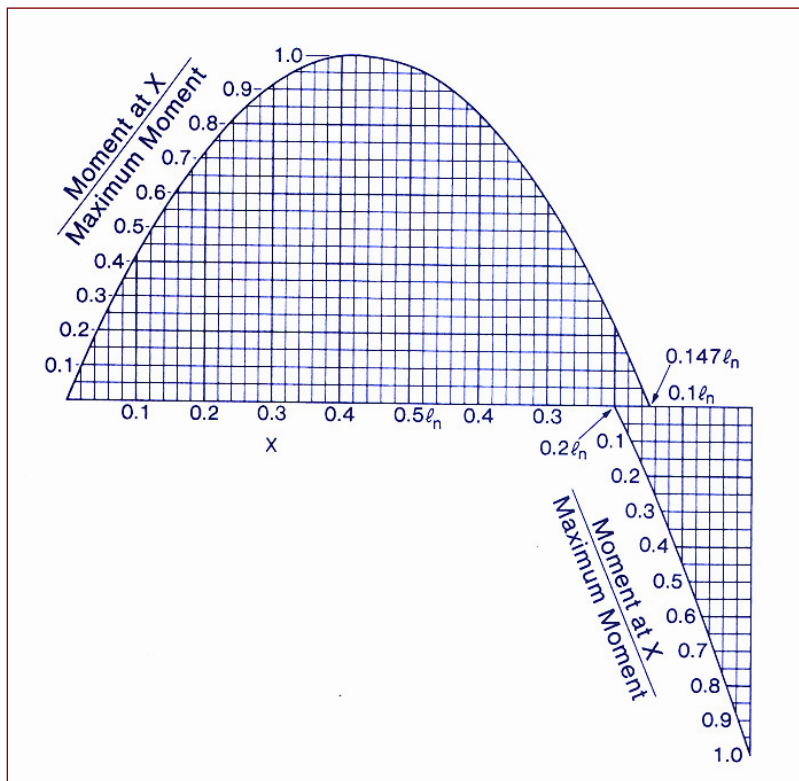


Figura 7-37 Envolvente de momento flexor para tramo exterior con extremo discontinuo no restringido (coeficientes para momento: 0 , $+1/11$, $-1/10$).

8. CONDICIONES DE SERVICIO

8.1 Introducción

Estados límite definidos:

1. Colapso (límite último)
2. Pérdida de funcionalidad (límite de servicio)

Estados límite de servicio:

1. Espesor de grieta excesivo
2. Deflexiones excesivas
3. Vibraciones indeseables

Grietas y deflexiones excesivas empezaron a ser problema con el uso de refuerzo de Grado 60 en conjunto con el diseño por resistencia (límite último). Los esfuerzos en el acero para condiciones de servicio se han incrementado en un 50%. Como los espesores de grietas, las deflexiones y la fatiga están todos relacionados con el esfuerzo en el acero, cada uno de éstos se ha vuelto más crítico.

8.2 Análisis elástico de secciones de viga

Análisis mediante la *teoría de línea recta* según Bernoulli, para calcular el valor de la rigidez a la flexión EI .

8.2.1 Cálculo de EI

MÓDULO DE ELASTICIDAD Y RAZÓN MODULAR

El ACI 318-08, Art. 8.5.1 supone que el concreto tiene el siguiente módulo de elasticidad

$$E_c = w_c^{1.5} (33 \sqrt{f'_c}) \text{ psi} = 57,000 \sqrt{f'_c} \text{ psi} \quad \text{concreto normal} \quad (8-1)$$

$$E_s = 29 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\frac{E_s}{E_c} = n = \text{razón modular} \quad 6.6 \leq n \leq 9.3$$

∴ para una misma deformación unitaria antes de fluencia, el acero resiste un esfuerzo de 6 a 9 veces mayor que el concreto

SECCIÓN TRANSFORMADA

Convertir la sección de concreto reforzado a concreto únicamente. Reemplazar área de acero A_s con área de concreto equivalente A_c de manera que ambas “barras” tengan la misma rigidez axial AE . Como $E_s/E_c = n \Rightarrow A_c = nA_s$ es la equivalencia buscada. El área de concreto equivalente desplaza un área A_s únicamente. Esto resulta en acero de compresión transformado en un área equivalente de $(n-1)A_s'$.

Para ambos niveles de acero, tracción y compresión, el área transformada es $(n-1)A_s$ (el acero desplaza concreto que podría estar tomando esfuerzos). Para sección agrietada de la figura 8.1.c el acero de tracción no desplaza concreto y por lo tanto se usa nA_s .

El eje neutro de la sección agrietada está ubicado a una distancia $c = kd$ por debajo de la fibra extrema de compresión. Para una sección elástica, el eje neutro se encuentra en el centroide del área, el cual se define como el punto en donde

$$\sum A_i \bar{y}_i = 0 \tag{8-2}$$

donde \bar{y}_i es la distancia desde el eje centroidal hasta el centroide de la i -ésima área. La solución de la ecuación 8-2 se presenta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8-1 Cálculo de propiedades de sección transformada

La viga mostrada en la figura 8-1 tiene un $f'_c = 4000$ psi. Calcular ubicación del centroide y el momento de inercia para sección no agrietada y sección agrietada.

SECCIÓN TRANSFORMADA NO-AGRIETADA

$$E_c = w_c^{1.5} (33 \sqrt{f'_c}) \text{ psi} = 57000 \sqrt{4000} \text{ psi} = 3.61 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\text{Razón modular } n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{29 \times 10^6}{3.61 \times 10^6} = 8.04$$

Áreas transformadas de acero:

$$\text{Refuerzo superior: } (8.04 - 1) \times 1.20 = 8.45 \text{ in}^2$$

$$\text{Refuerzo inferior: } (8.04 - 1) \times 2.40 = 16.9 \text{ in}^2$$

Ubicación de centroide:

Parte	Area (in ²)	y_{sup} (in)	Ay_{sup} (in ³)
Concreto	$12 \times 24 = 288$	12	3460
Refuerzo superior	8.45	2.5	21.1

Refuerzo inferior	16.9	21.5	364
	313		3850

$$\bar{y}_{sup} = \frac{3850}{313} = 12.3 \text{ in.}$$

Momento de inercia:

Parte	Area (in ²)	\bar{y} (in)	$I_{propio \text{ eje}}$ (in ⁴)	$A\bar{y}^2$ (in ⁴)
Concreto	288	.30	13800	25.9
Refuerzo superior	8.45	9.80	—	812
Refuerzo inferior	16.9	-9.20	—	1440

$$I_{gt} = 13800 + 25.9 + 812 + 1440 = 16100 \text{ in}^4$$

17 % mayor que sección bruta de concreto I_g

SECCIÓN TRANSFORMADA AGRIETADA

Suponiendo eje neutro por debajo del acero de refuerzo superior

Refuerzo superior: $(8.04 - 1) \times 1.2 = 8.45 \text{ in}^2$

Refuerzo inferior: $(8.04) \times 2.4 = 19.30 \text{ in}^2$

Profundidad del eje neutro = c (ver figura 8-1c)

Parte	Area (in ²)	\bar{y} (in)	$A\bar{y}$ (in ³)
Zona de compresión	$12c$	$c/2$	$12c^2/2 = 6c^2$
Refuerzo superior	8.45	$c - 2.5$	$8.45 c - 21.1$
Refuerzo inferior	19.30	$c - 21.5$	$19.30 c - 415$

Por definición c es la distancia al centroide cuando $\Sigma A\bar{y} = 0$

$$6c^2 + 27.8c - 436 = 0 \Rightarrow c = \frac{-27.8 \pm \sqrt{27.8^2 + 4 \times 6 \times 436}}{2 \times 6}$$

$$c = 6.52 \text{ in o } c = -11.5 \text{ in} \Rightarrow c = \mathbf{6.52 \text{ in}}$$

Momento de Inercia:

Parte	Area (in ²)	\bar{y} (in)	$I_{propio \text{ eje}}$ (in ⁴)	$A\bar{y}^2$ (in ⁴)
Zona de compresión	$12 \times 6.52 = 78.2$	$6.52/2$	277	832
Refuerzo superior	8.45	$6.52 - 2.5 = 4.02$	—	137
Refuerzo inferior	19.30	$6.52 - 21.5 = -15.0$	—	4340

$$I_{cr} = 277 + 832 + 137 + 4340 = 5590 \text{ in}^4$$

$$I_{cr} = 0.41I_g = 0.35I_{gt} \quad \leftarrow \text{gran reducción en rigidez debida al agrietamiento} \quad \square$$

Caso especial: Viga rectangular sin refuerzo superior.

$$\Sigma A_i \bar{y}_i = 0 \text{ nos da}$$

$$\frac{1}{2}bc^2 - nA_s(d - c) = 0$$

Con $c = kd$ y $\rho = A_s/bd$

$$\frac{1}{2}b(kd)^2 - \rho nbd(d - kd) = 0$$

$$k = \sqrt{2\rho n + (\rho n)^2} - \rho n \tag{8-3}$$

8.2.2 Esfuerzos debidos a cargas de servicio en viga agrietada

De la figura 8-2, se tiene

$$C = \frac{1}{2} f_c bkd$$

$$jd = d - \frac{1}{3}kd = d(1 - \frac{1}{3}k)$$

$$M_{serv} = Cjd = \frac{1}{2} f_c bkdjd$$

$$f_c = \frac{2M_{serv}}{jkb d^2} \tag{8-4}$$

de igual forma

$$\curvearrowright M_{serv} = Tjd = f_s A_s jd \Rightarrow f_s = \frac{M_{serv}}{A_s jd} \tag{8-5}$$

(No consideramos flujo plástico que tendería a aumentar el esfuerzo en el acero de tracción)

Ejemplo 8-2 Cálculo de esfuerzo en el acero ante cargas de servicio

Para la viga rectangular mostrada en la figura 8-2, se tienen dimensiones de sección transversal siguientes: $b = 10 \text{ in.}$, $d = 20 \text{ in.}$, 3#8 Grado 60, $f_c' = 3000 \text{ psi}$. Calcular f_s para $M_{serv}^L = 50 \text{ ft-kips}$, $M_{serv}^D = 70 \text{ ft-kips}$.

1 Cálculo de k y j

$$E_c = w_c^{1.5} (33\sqrt{f'_c}) \text{ psi} = 57000\sqrt{3000} \text{ psi} = 3.12 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\text{Razón modular } n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{29 \times 10^6}{3.12 \times 10^6} = 9.29$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{2.37}{10 \times 20} = 0.0119$$

Con $\rho n = 0.111$ se obtienen k y j

$$k = \sqrt{2\rho n + (\rho n)^2} - \rho n = \sqrt{2 \times 0.111 + 0.111^2} - 0.111 = 0.373, j = 1 - 1/3k = 0.876$$

② Cálculo de f_s para M_{serv} .

$$M_{\text{serv}} = M_{\text{serv}}^D + M_{\text{serv}}^L = 120\text{ft-kips} = 1440\text{in-kips}, f_s = \frac{M_{\text{serv}}}{A_s j d} = \frac{1440}{2.37 \times 0.876 \times 20} = 34.7\text{ksi}$$

$R/f_s = 34.7 \text{ ksi}$ □

8.2.3 Sección transformada corregida por edad

En una viga el flujo plástico causa un incremento en las deformaciones unitarias. Estos tienen como consecuencia que el eje neutro baje y que aumente la deformación unitaria del acero, tal como se indica en la figura 8-15.

8.3 Agrietamiento

8.3.1 Tipos de Grietas

Los esfuerzos de tracción inducidos por cargas, momentos y cortantes causan patrones de agrietamiento claramente visibles como se muestra en la figura 8-3. Elementos cargados en tracción directa se agrietan a través de toda la sección transversal, con un espaciamiento entre grietas en un rango de 0.75 a 2 veces la dimensión mínima de la sección transversal. En el caso de un elemento muy grueso, con refuerzo en cada una de las caras, sometido a tracción se desarrollan pequeñas grietas superficiales en las capas que contienen el refuerzo (ver figura 8-3a). Estas grietas se unen en el centro del elemento. Por lo tanto, para un cambio de longitud dado, el espesor de grieta en B es mayor que el espesor de grieta en A.

Los elementos sometidos a flexión, desarrollan grietas como las mostradas en la figura 8-3b. Estas grietas verticales se extienden casi hasta la zona de deformación unitaria nula (eje neutro) del elemento. En una viga con un peralte de más de 3 a 4 ft, el agrietamiento presenta espaciamiento cercano a la altura del refuerzo, uniéndose o desapareciendo

luego hasta consolidarse en grietas mayores por encima de la altura de refuerzo, como se puede ver en la figura 8-3b.

Las grietas debidas a cortante tienen una forma inclinada característica como se muestra en la figura 8-3c. Tales grietas se extienden hacia arriba en algunos casos hasta la zona de compresión. Las grietas de torsión son similares. En torsión pura, forman una espiral alrededor de la viga. En una viga normal en donde también actúan cortante y momento, tienden a ser pronunciadas en la cara en donde los esfuerzos de cortante directo y los de torsión se suman, y menos pronunciadas o aún ausentes en la cara opuesta, en donde los esfuerzos se contrarrestan, ver figura 8-3d.

Esfuerzos de adherencia conducen a fracturamiento a lo largo del refuerzo longitudinal como se puede ver en la figura 8-3e. En algunos casos, las cargas concentradas causan grietas de partición del tipo mostrado en la figura 8-3f.

Generalmente, en la condición de servicio el patrón de agrietamiento no se ha desarrollado en forma completa. El resultado es que normalmente solo se presentan unas pocas grietas en los puntos de esfuerzo máximo para esta condición de carga.

También se generan grietas debido a deformaciones impuestas tales como asentamientos diferenciales, contracción y gradientes térmicos. Si se restringe la contracción, como en el caso de una losa delgada de entrepiso adherida a una estructura masiva y rígida, se presentarán grietas de contracción. Sin embargo, generalmente ocurre que la contracción simplemente incrementa el espesor de las grietas inducidas por las sollicitaciones.

Una causa frecuente de agrietamiento en estructuras es la restricción de la contracción resultante del enfriamiento a temperatura ambiente de elementos nuevos que se han expandido debido al calor de hidratación generado cuando el concreto se solidifica. Esto ocurre más comúnmente cuando una pared es colada sobre una fundación que ha sido colada con alguna antelación. Conforme la pared se enfría, su contracción se ve restringida por la fundación. Un patrón de *agrietamiento por calor de hidratación* típico se muestra en la figura 8-4. Tal agrietamiento puede ser regulado mediante el control del aumento de calor debido a la hidratación y la tasa de enfriamiento, ya sea colando la pared en distancias cortas o mediante el reforzamiento considerablemente en exceso del nivel normal para contracción.

La contracción plástica y el revenimiento del concreto que ocurre cuando el concreto es colado y su superficie primero se satura y luego se seca, resulta en grietas de asentamiento a lo largo del refuerzo, como se ve en la figura 8-5a, o bien en un patrón aleatorio de grietas, *mapa de grietas*, como se ve en la figura 8-5b. Este tipo de grietas se pueden evitar mediante el diseño correcto de la mezcla y previniendo el rápido secado de la superficie durante la primera hora posterior al colado. Grietas en forma de mapa pueden ocurrir también debido a una reacción química (*agregado-alcalina*).

El herrumbre ocupa de dos a tres veces el volumen del material del cual proviene. Si ocurre herrumbre, se genera una fuerza de empuje en el lugar que ocupa la barra de

refuerzo conducente a agrietamiento de fracturamiento y una eventual pérdida del recubrimiento, como se muestra en la figura 8-5c. Este tipo de agrietamiento luce similar al debido a adherencia (figura 8-3e) y podría adicionarse. ACI publica reportes sobre los diferentes mecanismos de agrietamiento: ver ACI 224R-01.

8.3.2 Normativa para el Control de Agrietamiento

A partir del ACI 318-99 se presenta una nueva normativa con respecto al control de grietas. Se define un espaciamiento máximo s del refuerzo longitudinal más cercano a la superficie de tracción que no debe exceder

$$s = 15 \left(\frac{40,000}{f_s} \right) - 2.5c_c \leq 12 \left(\frac{40,000}{f_s} \right) \quad \text{ACI 318-08 Ec. 10-4}$$

donde f_s = esfuerzo en la barra calculado para cargas de servicio, ksi.

c_c = distancia libre desde la superficie de tracción más cercana hasta la superficie de la barra de refuerzo de tracción para flexión, in.

s = espaciamiento centro a centro del refuerzo longitudinal más cercano a la superficie de tracción, in.

Se permite también tomar f_s como $2/3 f_y$. Para la viga considerada en el Ejemplo 8-2, esto está aproximadamente un 15% por encima del valor calculado.

En las regiones de momento negativo de vigas T, las alas están sometidas a esfuerzos de tracción y por lo tanto se agrietarán. ACI 318-08 Art. 10.6.6 requiere que parte del refuerzo de tracción por flexión sea repartido sobre un ancho igual al menor valor del ancho efectivo del ala y $\ell_n/10$. Además, requiere que algún refuerzo longitudinal sea colocado en las porciones exteriores del ala. Lo malo es que los términos parte y algún no están bien definidos. Se puede colocar entre el 25% y el 50% del refuerzo en las proyecciones del ala a un espaciamiento cercano (o igual) al máximo para control de grietas y colocando el resto del refuerzo longitudinal en el alma de la viga.

8.3.3 Refuerzo en las caras laterales del alma

Para vigas de más de 36 in. de peralte, las grietas son muy anchas en la región central del alma, según se muestra en la figura 8-3b. Para controlar el ancho de éstas, ACI 318-08 Art. 10.6.7 requiere la colocación de refuerzo adicional en las caras laterales de la viga. El refuerzo debe ser distribuido uniformemente a lo largo de ambas caras laterales del alma en la distancia $h/2$ más próxima al refuerzo de flexión. Ver la figura 8-9. El espaciamiento s entre barras longitudinales del *refuerzo superficial* deberá cumplir con lo estipulado en el ACI 318-08 Art. 10.6.4. Se permite incluir este refuerzo adicional en los cálculos de resistencia si se efectúa un análisis por compatibilidad de deformaciones para determinar el esfuerzo en las barras individuales. El área total del refuerzo superficial en ambas caras laterales no debe exceder la mitad del refuerzo longitudinal requerido para tracción en flexión.

8.4 Deflexiones en Vigas de Concreto

8.4.1 Comportamiento de carga-deflexión de una viga de concreto

La figura 8-10a presenta la secuencia de carga-deflexión de la viga doblemente empotrada mostrada en la figura 8-10b. Inicialmente, la viga no está agrietada y es muy rígida (tramo $O-A$). Con aumento de carga, ocurre agrietamiento cuando los momentos en los extremos exceden el momento de agrietamiento. Cuando una sección se agrieta, su momento de inercia disminuye lo cual conduce a una disminución de la rigidez a la flexión en la viga. Esto causa la reducción en rigidez (tramo $A-B$) en el diagrama carga-deflexión. El agrietamiento en la región central causa una reducción aún mayor en la rigidez (punto B). Eventualmente, el refuerzo fluirá en los extremos o en el centro, conduciendo a un gran incremento en la deflexión con un cambio insignificante en la carga (puntos D y E). El nivel de carga de servicio está representado por el punto C . La viga se puede considerar como esencialmente elástica en el punto C , a pesar del carácter no-lineal de la curva de carga-deflexión. Este carácter no-lineal de la curva se debe al agrietamiento inicial en las regiones de mayor demanda de carga.

Con el paso del tiempo, la deflexión ante carga de servicio se incrementará de C a C' , debido al flujo plástico del concreto. La deflexión instantánea ante cargas de servicio (punto C) y la deflexión de largo plazo ante cargas de servicio (punto C') son ambas de interés en el diseño.

8.4.2 Rigidez a la Flexión y Momento de Inercia

La deflexión de una viga se obtiene integrando la curvatura a lo largo de su longitud. Para una viga elástica, la curvatura κ se calcula como $\kappa = M/EI$, en donde EI es la rigidez a la flexión de la sección transversal. Si EI es constante, este proceso es rutinario. Sin embargo, para concreto reforzado se deben considerar tres valores diferentes de EI . Esto se puede ilustrar con el diagrama momento-curvatura mostrado en la figura 8-11d. La pendiente de línea radial a través del origen en este diagrama es $M/\kappa = EI$.

Antes de ocurrir el agrietamiento, la sección transversal completa mostrada en la figura 8-11b está sometida a esfuerzos debidos a la carga aplicada. El momento de inercia de la sección se denomina como no-agrietado y el correspondiente valor de EI puede ser representado por la línea radial $O-A$ de la figura 8-11d. La sección transversal agrietada se muestra en la figura 8-11c. Esta tiene un momento de inercia mucho menor que el de la sección no-agrietada. El valor EI calculado usando el momento de inercia de la sección agrietada es menor que el calculado para la sección no-agrietada y corresponde aproximadamente a la curvatura para cargas cercanas a la fluencia. En la figura 8-11d se muestra este valor como la radial $O-B$. Para cargas de servicio, representados por los puntos C_1 y C_2 en la figura, los valores de EI estarán acotados por estos dos valores extremos. El valor real de EI para niveles de carga de servicio fluctúa considerablemente, como se puede observar con la diferencia de pendiente entre las líneas $O-C_1$ y $O-C_2$, dependiendo de las magnitudes relativas del momento de agrietamiento, M_{cr} , el momento

de carga de servicio, M_a , y el momento de fluencia, M_y . La variación de EI con el momento flexor obtenida a partir de la figura 8-11d se muestra en la figura 8-11e.

La transición entre momento de inercia no-agrietado y agrietado refleja dos fenómenos diferentes. Las figuras 8-7b y c muestran los esfuerzos de tracción en el refuerzo y en el concreto de un prisma. Para cargas escasamente por encima de la carga de agrietamiento, una parte significativa de la fuerza de tracción entre grietas es tomada por el concreto y por lo tanto, el elemento se comporta más como uno con sección no-agrietada que como de sección agrietada. Conforme se incrementa la carga, se presenta agrietamiento interno como el mostrado en la figura 8-8, con el resultado de que la deformación en el acero se incrementa sin que ocurra incremento significativo en la fuerza de tracción en el concreto. Para carga muy alta, la fuerza de tracción en el concreto es insignificante comparada con la del acero y por lo tanto, el elemento se acerca más al comportamiento de sección agrietada. Al efecto de las fuerzas de tracción en el concreto sobre el valor de EI se le denomina *rigidización traccional*.

La figura 8-12 muestra la distribución de EI a lo largo de la viga mostrada en la figura 8-10b. EI varía desde valor no-agrietado en puntos donde el momento flexor es menor que el momento de agrietamiento hasta un valor parcialmente agrietado en puntos de momento flexor alto. Como el uso de tal distribución de valores de EI haría los cálculos de deflexión tediosos, se usa un promedio global o *efectivo* de EI . El momento de inercia efectivo debe tomar en cuenta tanto la rigidización traccional como la variación de EI a lo largo del elemento.

MOMENTO DE INERCIA EFECTIVO

La pendiente del segmento OA en la figura 8-11d es aproximadamente EI_{gt} mientras que la del segmento OB es aproximadamente EI_{cr} . Utilizando datos experimentales y mediante regresión estadística, Branson propone expresar la transición de I_{gt} a I_{cr} como:

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^\beta I_{gt} + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a} \right)^\beta \right] I_{cr}$$

- en donde M_{cr} = momento de agrietamiento = $f_r I_g / y_t$ (ACI 318-08 Ec. 9-9)
- I_{gt} = momento de inercia de la sección bruta de concreto
- f_r = módulo de ruptura = $7.5 \lambda \sqrt{f'_c}$ (ACI 318-08 Ec. 9-10)
- y_t = distancia del centroide a la fibra extrema de tracción.
- M_a = momento máximo en el elemento para el nivel de carga para el cual se está calculando el momento de inercia

En algunas estructuras, tales como losas en dos direcciones, las cargas de construcción pueden exceder a las cargas de servicio. Si las cargas de construcción causan agrietamiento, el momento de inercia efectivo se reduce.

Para una región sometida a momento flexor constante, Branson encontró que el exponente β de la ecuación es 4. Esto toma en cuenta la rigidización traccional. Para vigas simplemente apoyadas, Branson sugirió que tanto la rigidización traccional como la variación de EI a largo del elemento podían ser tomados en cuenta usando un exponente β de 3 en la ecuación propuesta. Para simplificar, la Ec. 9-8 de ACI 318-08 utiliza $\beta = 3$ e I_g en vez de I_{gt} , ignorando de esta manera el pequeño incremento en el momento de inercia debido a la presencia del refuerzo.

Para vigas continuas, los valores de I_e pueden ser muy diferentes en las regiones de momento positivo y momento negativo. En tal caso, se puede suponer que el valor del momento positivo rige entre los puntos de contraflexión y que los momentos negativos rigen en los extremos. Una mejora a la sugerencia del Artículo 9.5.2.4 de ACI 318-08 para el cálculo del valor de I_e para todo el elemento, es la de tomar para vigas entre dos extremos continuos el valor promedio de I_e como:

$$I_{e, promedio} = 0.70I_{em} + 0.15(I_{e1} + I_{e2}) \quad (8-6)$$

y para vigas con un extremo continuo:

$$I_{e, promedio} = 0.85I_{em} + 0.15I_{e, extremo continuo} \quad (8-7)$$

En donde I_{em} , I_{e1} e I_{e2} son los valores de I_e en mitad de luz y en los dos extremos de la viga. Se deben usar envolventes de momentos o coeficientes de momentos para calcular M_a e I_e en las regiones de momento positivo y negativo.

8.4.3 Deflexiones instantáneas y adicionales ante carga sostenida

Cuando se carga una viga de concreto, ésta sufre una deflexión denominada como inmediata o *instantánea*, Δ_i . Si la carga se mantiene sobre la viga, ocurrirán adicionalmente *deflexiones ante carga sostenida* debidas a flujo plástico.

DEFLEXIONES INSTANTÁNEAS

En la figura 8-13 se presentan las ecuaciones para calcular las deflexiones instantáneas a mitad de la luz y en el extremo de vigas de un tramo para condiciones de apoyo normal. En esta figura, M_{pos} y M_{neg} se refieren a los máximos momentos positivos y negativos respectivamente. Las deflexiones que allí aparecen son las máximas a lo largo de la viga, excepto por los casos 2 y 8. Sin embargo, aun para estos dos casos, la deflexión a mitad de la luz es una buena aproximación al valor de deflexión máxima. Más aun, podría ser necesario combinar diferentes casos de carga de la Fig. 8-13 para obtener la deflexión total de la viga, por lo que resulta apropiado determinar todas estas deflexiones ya sea a mitad de la luz de una viga con dos apoyos o en el extremo libre de una viga en voladizo.

Se recomienda el uso de la distancia centro a centro, ℓ , para el calculo de deflexiones, en contraposición con la luz libre ℓ_n . Esta es una decisión conservadora para evitar

subestimar las deflexiones máximas potenciales. Además, la mayoría de las vigas y losas de concreto son continuas sobre varios apoyos, de manera que los coeficientes de deflexión para vigas de un tramo no siempre serían apropiados. La longitud de tramos contiguos y las cargas sobre esos tramos afectarán las deflexiones en el tramo en consideración. En lo que se presenta a continuación, se ignorará la longitud de tramos contiguos.

La deflexión en la mitad de la luz para una viga continua con cargas uniformes y momentos desiguales en los extremos puede ser calculada usando superposición, como se muestra en la figura 8-14. Así,

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2$$

Del lado derecho en la Fig. 8-14, suponiendo que M_0 (el momento en la mitad de la luz debidos a cargas uniformes en una viga simple), M_1 y M_2 son todos positivos, de manera que los signos sean compatibles, se tiene

$$\Delta = \frac{5}{48} \frac{M_0 \ell^2}{EI} + \frac{3}{48} \frac{M_1 \ell^2}{EI} + \frac{3}{48} \frac{M_2 \ell^2}{EI}$$

El momento M_m en la mitad de la viga

$$M_m = M_0 + \frac{M_1}{2} + \frac{M_2}{2}$$

Por lo tanto, expresando la deflexión en términos de M_m , M_1 y M_2 se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\ell^2}{48EI} \left[5M_m - \frac{5}{2}(M_1 + M_2) + 3(M_1 + M_2) \right] \\ &= \frac{5\ell^2}{48EI} \left[M_m + 0.1(M_1 + M_2) \right] \end{aligned}$$

donde Δ es la deflexión en la mitad de la viga, M_m es el momento en la mitad de la viga, y M_1 y M_2 son los momentos en los dos extremos, con los signos apropiados. Generalmente M_1 y M_2 serán negativos.

Ejemplo 8-3 Cálculo de deflexión instantánea

La viga T mostrada en la figura 8-17 está sometida a cargas no-factorizadas $w_D = 0.87$ k/ft y $w_L = 1.2$ k/ft. y además, $f'_c = 3000$ psi, $f_y = 60,000$ psi. Usar los momentos de diseño de acuerdo a los coeficientes ACI 318-08, Art. 8.3.3. Calcule la deflexión instantánea en el centro de la viga. Suponga que las cargas de construcción no excedieron la carga muerta.

❶ ¿Se agrieta la viga ante cargas de servicio?

El momento de agrietamiento es

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t}$$

Cálculo de I_g para la sección de viga T no-agrietada (despreciar el efecto del refuerzo para simplificar)

Ancho de ala igual al ancho efectivo según ACI 318-08, Art. 8.12.2 = 62 in.

(a) Cálculo del centroide de la sección transversal.

Parte	Area (in ²)	y_{sup} (in)	Ay_{sup} (in ³)
Ala	62 × 5=310	2.5	775
Alma	13 × 10=130	11.5	1500
	$\Sigma = 440 \text{ in}^2$		$\Sigma = 2280 \text{ in}^3$

$$\bar{y}_{sup} = 2280/440 = 5.18 \text{ in.}, \bar{y}_{inf} = 18 - 5.18 = 12.8 \text{ in.}$$

(b) Cálculo del momento de inercia, I_g .

Parte	Area (in ²)	\bar{y} (in)	$I_{propio \text{ eje}}$ (in ⁴)	$A\bar{y}^2$ (in ⁴)
Ala	310	5.18 - 2.5 = 2.68	646	2230
Alma	130	5.18 - 11.5 = -6.32	1830	5190

$$I_g = (646 + 2230) + (1830 + 5190) = 9900 \text{ in}^4$$

(c) Determinación del momento flexionante de agrietamiento.

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t} \text{ con } f_r = 7.5 \sqrt{f'_c} = 7.5 \sqrt{3000} = 411 \text{ psi}$$

Zonas de momento negativo A y C:

$$M_{cr} = \frac{411 \text{ psi} \times 9900 \text{ in}^4}{5.18 \text{ in}} = 786,000 \text{ in-lb} = 65.5 \text{ ft-kips}$$

Momento negativo en A = $w\ell_n^2/16$

ACI 318-08 Artículo 8.3.3

$$\text{momento de carga muerta} = \frac{.87 \text{ k/ft} \times 20.7^2 \text{ ft}^2}{16} = 23.3 < 65.5 \text{ ft-kips}$$

$$\text{momento de cargas muerta y viva} = \frac{(.87 + 1.20) \text{ k/ft} \times 20.7^2 \text{ ft}^2}{16} = 55.4 < 65.5 \text{ ft-kips}$$

⇒ en A no hay agrietamiento ante cargas de servicio.

$$\text{Momento negativo en C} = w\ell_n^2/10$$

ACI 318-08 Artículo 8.3.3

$$\text{momento de carga muerta} = \frac{.87 \text{ k/ft} \times 20.7^2 \text{ ft}^2}{10} = 37.3 < 65.5 \text{ ft-kips}$$

$$\text{momento de cargas muerta y viva} = \frac{(.87 + 1.20) \text{ k/ft} \times 20.7^2 \text{ ft}^2}{10} = 88.7 > 65.5 \text{ ft-kips}$$

⇒ en C no hay agrietamiento ante carga muerta de servicio.

Zona de momento positivo B:

$$M_{cr} = \frac{411 \text{ psi} \times 9900 \text{ in}^4}{12.8 \text{ in}} = 26.5 \text{ ft-kips}$$

$$\text{Momento positivo en B} = w\ell_n^2/14$$

ACI 318-08 Artículo 8.3.3

$$\text{momento de carga muerta} = \frac{.87 \text{ k/ft} \times 20.7^2 \text{ ft}^2}{14} = 26.6 > 26.5 \text{ ft-kips}$$

$$\text{momento de cargas muerta y viva} = \frac{(.87 + 1.20) \text{ k/ft} \times 20.7^2 \text{ ft}^2}{14} = 63.4 > 26.5 \text{ ft-kips}$$

⇒ en B hay agrietamiento ante cargas de servicio.

∴ Es necesario calcular I_{cr} e I_e en B y C.

🔗 Cálculo de I_{cr} a mitad de la luz.

Se debe definir si esta sección tendrá una zona de compresión rectangular o en forma de T. Suponer que es rectangular como primera aproximación. Como la sección sería rectangular y no hay acero de compresión:

$$k = \sqrt{2\rho n + (\rho n)^2} - \rho n$$

$$\text{con } n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{29 \times 10^6}{57000\sqrt{3000}} = 9.29$$

$$\rho \text{ (para } b = 62 \text{ in.)} = \frac{(2 \times 0.60 + 0.44)}{62 \times 15.5} = 0.00171 \text{ (2 barras \# 7 y 1 barra \# 6)}$$

por lo tanto, $\rho n = 0.0159$

$$k = \sqrt{2 \times 0.0159 + 0.0159^2} - 0.0159 = 0.163$$

$$\therefore c = kd = 0.163 \times 15.5 = 2.53 \text{ in} < 5 \text{ in. OK}$$

(a) Cálculo de momento de inercia de sección agrietada en B.

Transformar el refuerzo: $nA_s = 9.29 \times 1.64 = 15.2 \text{ in}^2$

Parte	Area (in ²)	\bar{y} (in)	$I_{\text{propio eje}}$ (in ⁴)	$A\bar{y}^2$ (in ⁴)
Zona de Compresión	$2.53 \times 62 = 157$	$2.53/2 = 1.27$	83.7	253
Refuerzo	15.2	$2.53 - 15.5 = -13.0$	—	2570

De esta forma, $I_{cr} = (83.7 + 253) + 2570 = 2910 \text{ in}^4$ a mitad de la luz.

③ **Cálculo de I_{cr} en el apoyo C.** La sección transversal en el apoyo C es la que se muestra en la figura 8-17f. El área transformada del refuerzo es

$$nA_s = 9.29 \times (3 \times 0.79) = 22.0 \text{ in.}^2$$

$$\rho = \frac{3 \times 0.79}{10 \times 15.5} = 0.0153$$

por lo tanto, $\rho n = 0.0153 \times 9.29 = 0.142$

$$k = \sqrt{2 \times 0.142 + 0.142^2} - 0.142 = 0.410$$

$$\therefore c = kd = 0.410 \times 15.5 = 6.36 \text{ in.}$$

El refuerzo de momento positivo no está desarrollado para compresión en el apoyo y por lo tanto se puede ignorar.

Parte	Area (in ²)	\bar{y} (in)	$I_{\text{propio eje}}$ (in ⁴)	$A\bar{y}^2$ (in ⁴)
Zona de Compresión	$6.36 \times 10 = 63.6$	$6.36/2 = 3.18$	213	642
Refuerzo	22.0	$6.36 - 15.5 = -9.14$	—	1840

De esta forma, $I_{cr} = (213 + 642) + 1840 = 2700 \text{ in}^4$ en el apoyo C.

En resumen, $I_g = 9900 \text{ in.}^4$, a mitad de luz $I_{cr} = 2910 \text{ in.}^4$ y en el apoyo C, $I_{cr} = 2700 \text{ in.}^4$

④ **Cálculo de la deflexión instantánea ante carga muerta.**

(a) **Cálculo de I_e en A.** Como $M_a = (-23.3) < M_{cr} (= -65.5)$, para cargas muertas $I_e = 9900 \text{ in.}^4$ en A.

(b) **Cálculo de I_e en B.** Como $M_a = (26.6) > M_{cr} (= 26.5)$, entonces

$$I_e = \left(\frac{26.5}{26.6}\right)^3 \times 9900 + \left(1 - \left(\frac{26.5}{26.6}\right)^3\right) \times 2910 = 9820 \text{ in.}^4$$

para cargas muertas $I_e = 9820 \text{ in.}^4$ en B.

(c) **Cálculo de I_e en C.** Como $M_a = (-37.3) < M_{cr} (= -65.5)$, para cargas muertas $I_e = 9900 \text{ in.}^4$ en C.

(d) **Cálculo del promedio ponderado de I_e .**

$$I_e = 0.70I_m + 0.15(I_{e1} + I_{e2}) = 0.70 \times 9820 + 0.15(9900 + 9900) = 9840 \text{ in.}^4$$

(e) **Deflexión instantánea ante carga muerta.**

$$\Delta = \frac{5}{48} \frac{\ell_n^2}{EI} [M_n + 0.1(M_1 + M_2)]$$

en donde

$$\ell_n = 20.7 \text{ ft}$$

$$E = 57,000\sqrt{3000} = 3.12 \times 10^6 \text{ psi}$$

M_n = momento a mitad de luz debido a cargas muertas = 26.6 ft-kips

M_1 = momento en A debido a cargas muertas = -23.3 ft-kips

M_2 = momento en C debido a cargas muertas = -37.3 ft-kips

$$\Delta = \frac{5}{48} \times \frac{(20.7 \times 12)^2 [26.6 + 0.1(-23.3 - 37.3)] \times 12,000}{3.12 \times 10^6 \times 9840} = 0.0516 \text{ in.}$$

Por lo tanto, la deflexión inmediata debida a carga muerta es 0.0516 in.

5 Cálculo de la deflexión inmediata debida a carga viva.

Cuando se aplica la carga viva a la viga, los momentos se incrementan y esto conduce a una reducción de I_e . La deflexión que ocurre cuando la carga viva es aplicada será

$$\Delta_{iL} = \Delta_{i,L+D} - \Delta_{iD}$$

(a) **Cálculo de I_e en A.** Como $M_a = (-55.4) < M_{cr} (= -65.5)$, para cargas muerta y viva $I_e = 9900 \text{ in.}^4$ en A.

(b) **Cálculo de I_e en B.** Como $M_a = (63.4) > M_{cr} (= 26.5)$, entonces

$$I_e = \left(\frac{26.5}{63.4}\right)^3 \times 9900 + \left(1 - \left(\frac{26.5}{63.4}\right)^3\right) \times 2910 = 3420 \text{ in.}^4$$

para cargas muerta y viva $I_e = 3420 \text{ in.}^4$ en B.

(c) Cálculo de I_e en C. Como $M_a = (-88.7) > M_{cr} (= -65.5)$, entonces

$$I_e = \left(\frac{-65.5}{-88.7}\right)^3 \times 9900 + \left(1 - \left(\frac{-65.5}{-88.7}\right)^3\right) \times 2700 = 5630 \text{ in.}^4$$

para cargas muerta y viva $I_e = 5630 \text{ in.}^4$ en C.

(d) Cálculo del promedio ponderado de I_e .

$$I_e = 0.70I_m + 0.15(I_{e1} + I_{e2}) = 0.70 \times 3420 + 0.15(9900 + 5630) = 4720 \text{ in.}^4$$

(e) Deflexión instantánea ante cargas muerta y viva.

$$\Delta_{i,D+L} = \frac{5}{48} \frac{\ell_n^2}{EI} [M_m + 0.1(M_1 + M_2)]$$

$$\Delta_{i,D+L} = \frac{5 \times (20.7 \times 12)^2 [63.4 + 0.1(-55.4 - 88.7)] \times 12000}{48 \times 3.12 \times 10^6 \times 4720} = 0.257 \text{ in.}$$

Por lo tanto, la deflexión instantánea debida a cargas viva y muerta es 0.257 in. El incremento en deflexión es de

$$0.257 \text{ in.} - 0.0516 \text{ in.} = 0.205 \text{ in.}$$

cuando se aplica la carga viva.

Cuando la carga viva es eliminada, la viga no regresa a la deflexión de carga muerta (0.0516 in.) porque ahora está agrietada y con un $I_e = 4720 \text{ in.}^4$, en vez de $I_e = 9840 \text{ in.}^4$. La nueva deflexión para carga muerta será $M_D/M_{D+L} \times 0.257 \text{ in.} = 0.108 \text{ in.}$ Cuando se vuelve a aplicar la carga viva, la deflexión se incrementará de 0.108 in. a 0.257 in. (= 0.149 in.).

Como se usaron los coeficientes ACI 8.3.3 para calcular M_m, M_1, M_2 esto resulta en un momento estático total de $M = w\ell^2/6.6$ en vez de $w\ell^2/8$. Como resultado de esto, se tiende a sobre estimar las deflexiones. El valor exacto depende de cual condición de carga rige. \square

La Tabla 9.5(b) del ACI 318 limita las deflexiones instantáneas debidas a carga viva a $\ell/180$ y $\ell/360$ respectivamente para techos planos y entrepisos que no soporten o estén atados a elementos propensos a dañarse como consecuencia de deflexiones grandes. De manera conservadora, este se puede tomar como el valor inicial de 0.205 in. Para esta viga $\ell/360$ es $22 \times 12 \text{ in.}/360 = 0.733 \text{ in.}$ en donde ℓ es la distancia centro a centro entre apoyos.

Si esta viga no soporta particiones que puedan dañarse debido a las deflexiones, la Tabla 9.5(a) del ACI 318 habría indicado que no era necesario calcular las deflexiones ya que el peralte de la viga ($h = 18$ in.) excede el valor mínimo $\ell/21 = 22 \times 12/21 = 12.6$ in. dado en la Tabla.

8.5 ACI 318-08 Artículo 8.3 Métodos de análisis

El código ACI 318-08 Artículo 8.3 recomienda las siguientes reglas para análisis aproximado de vigas:

- 8.3.1 Todos los elementos de pórticos o de construcción continua deberán ser diseñados para los efectos máximos de cargas factorizadas como se determinen mediante teoría de análisis elástico, excepto cuando sean modificadas de acuerdo a 8.4. Será permitida la simplificación del diseño mediante uso de suposiciones especificadas en 8.6 a 8.9.
- 8.3.2 Excepto para concreto pre-esforzado, se permitirá el uso de métodos de análisis estructural aproximado para edificios de tipo usual de construcción, de luces y de altura de entrepisos.
- 8.3.3 Como alternativa al análisis estructural, se permitirá usar los siguientes momentos y cortantes aproximados para el diseño de vigas continuas y losas en una dirección (losas reforzadas para resistir esfuerzos flexionantes en una única dirección), si se cumple que:
 - (a) Existen dos o mas luces;
 - (b) Las luces son aproximadamente iguales, con la mayor de dos luces adyacentes no mayor que la otra por más de un 20% de la luz;
 - (c) Las cargas son uniformemente distribuidas
 - (d) Carga temporal unitaria no mayor que tres veces la carga permanente unitaria;
 - y
 - (e) Los elementos son prismáticos.

Momento positivo	
Luz externa	
Extremo discontinuo no restringido	$w_u l_n^2 / 11$
Extremo discontinuo monolítico con los apoyos	$w_u l_n^2 / 14$
Luces internas	$w_u l_n^2 / 16$
Momentos negativos en cara exterior del primer apoyo interno	
Dos luces	$w_u l_n^2 / 9$
Más de dos luces	$w_u l_n^2 / 10$
Momento negativo en las otras caras de apoyos internos	
Todas las luces	$w_u l_n^2 / 11$
Momento negativo en las caras de todos los apoyos para	
Losas con luces menores a 10 ft. (3.05 m); y vigas en donde la razón de la suma de rigideces de las columnas sobre las rigideces de las vigas es mayor que ocho en cada extremo de la luz	$w_u l_n^2 / 12$
Momento negativo en cara interior de apoyo exterior para elementos monolíticos con los apoyos	
Cuando el apoyo es una viga de amarre	$w_u l_n^2 / 24$
Cuando el apoyo es una columna	$w_u l_n^2 / 16$
Cortante	
En los elementos externos en la cara del primer apoyo interno	$1.15 w_u l_n / 2$
En la cara de todos los demás apoyos	$w_u l_n / 2$

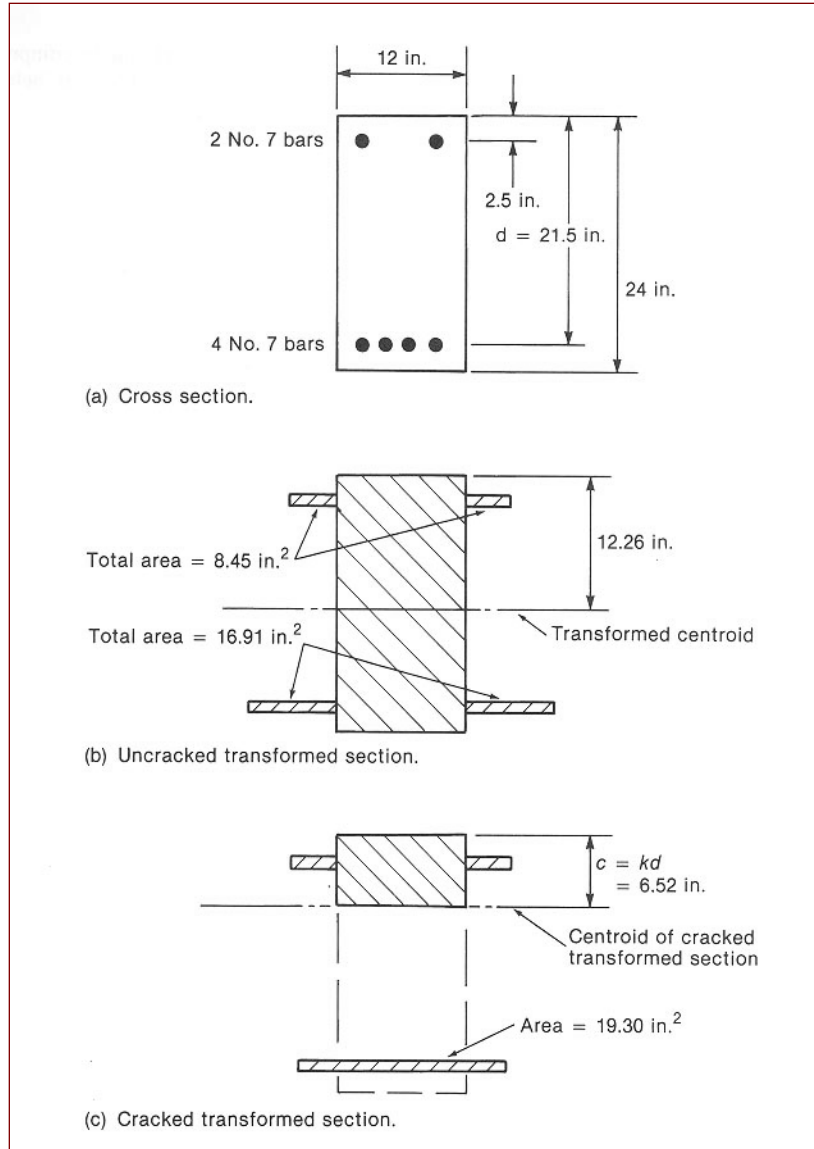


Figura 8-1 Secciones transformadas—Ejemplo 8-1.

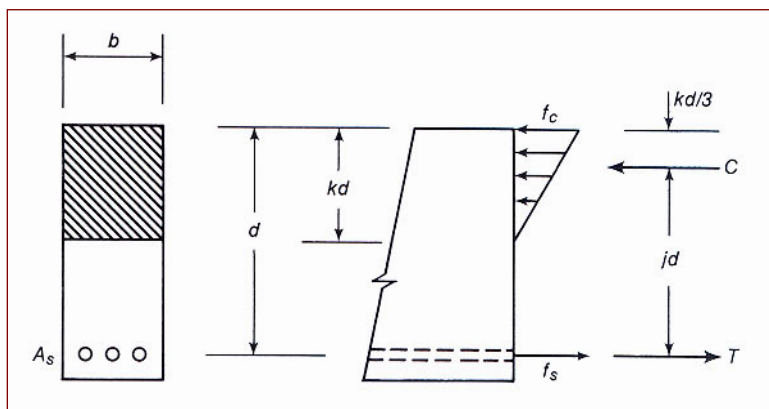


Figura 8-2 Distribución de esfuerzos según teoría de línea recta.

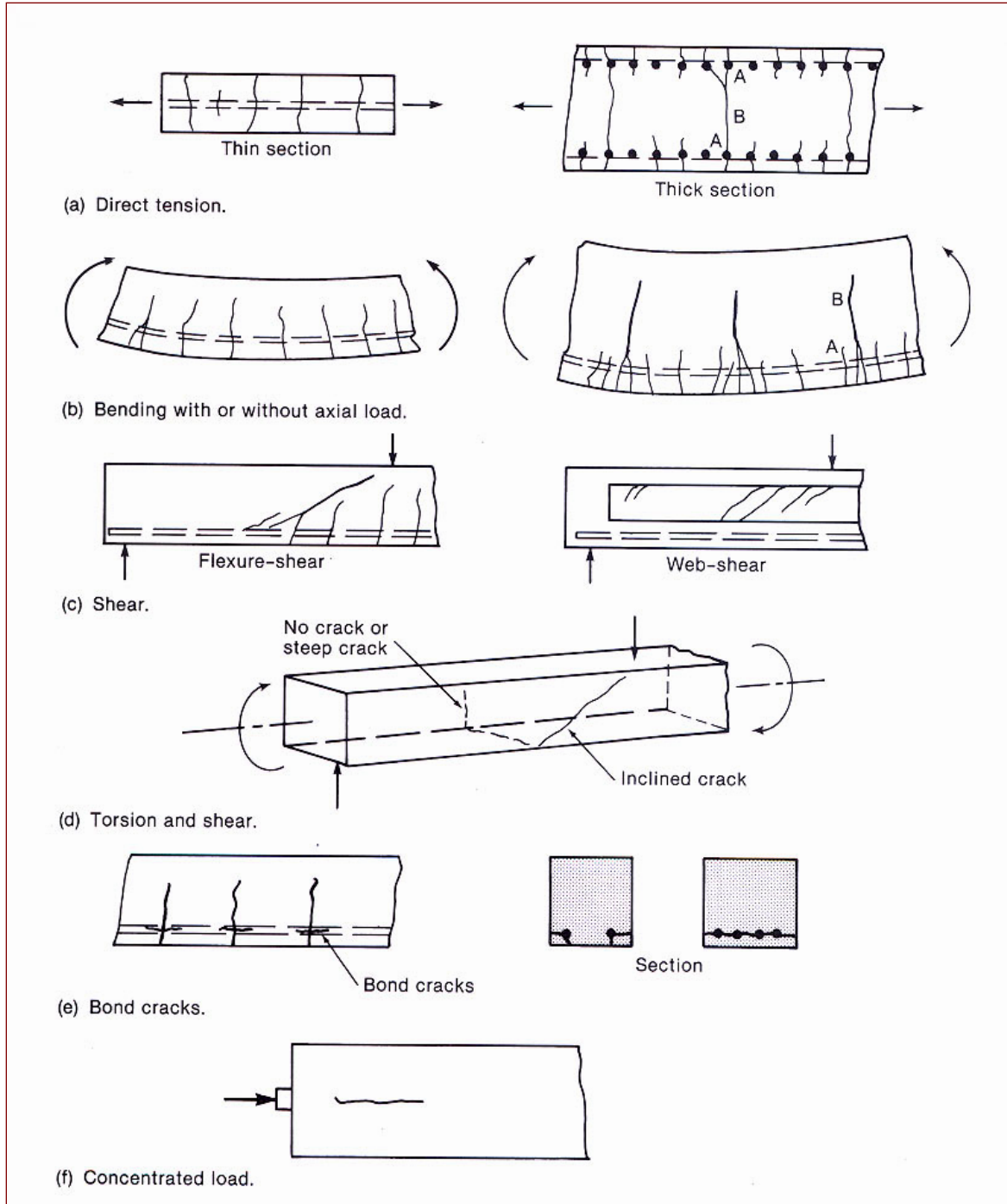


Figura 8-3 Grietas inducidas por cargas. (Tomado de Leonhardt, F.; IABSE Periodica, 3/1977, 26 pp.)

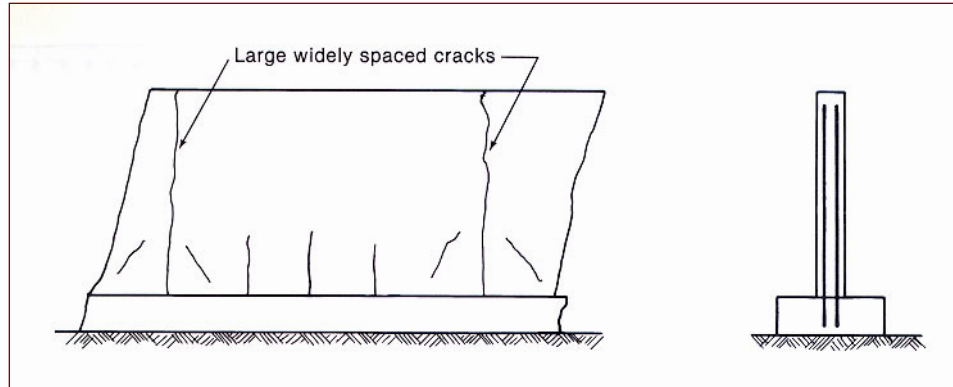


Figura 8-4 Agrietamiento debido a calor de hidratación.

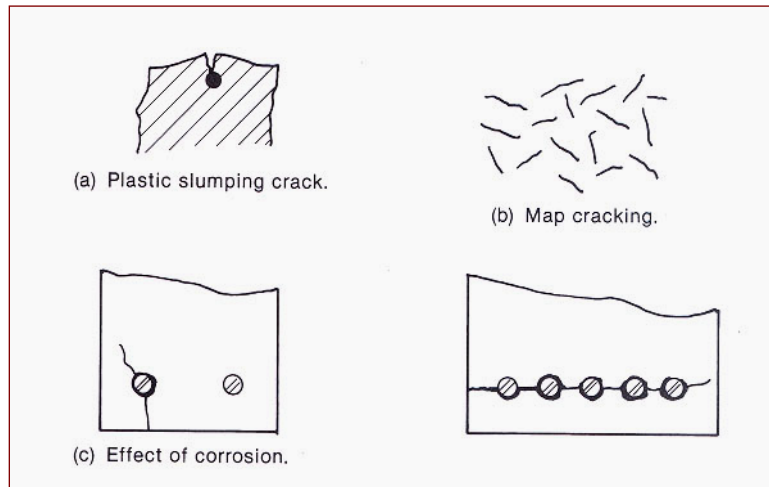


Figura 8-5 Otros tipos de grietas.

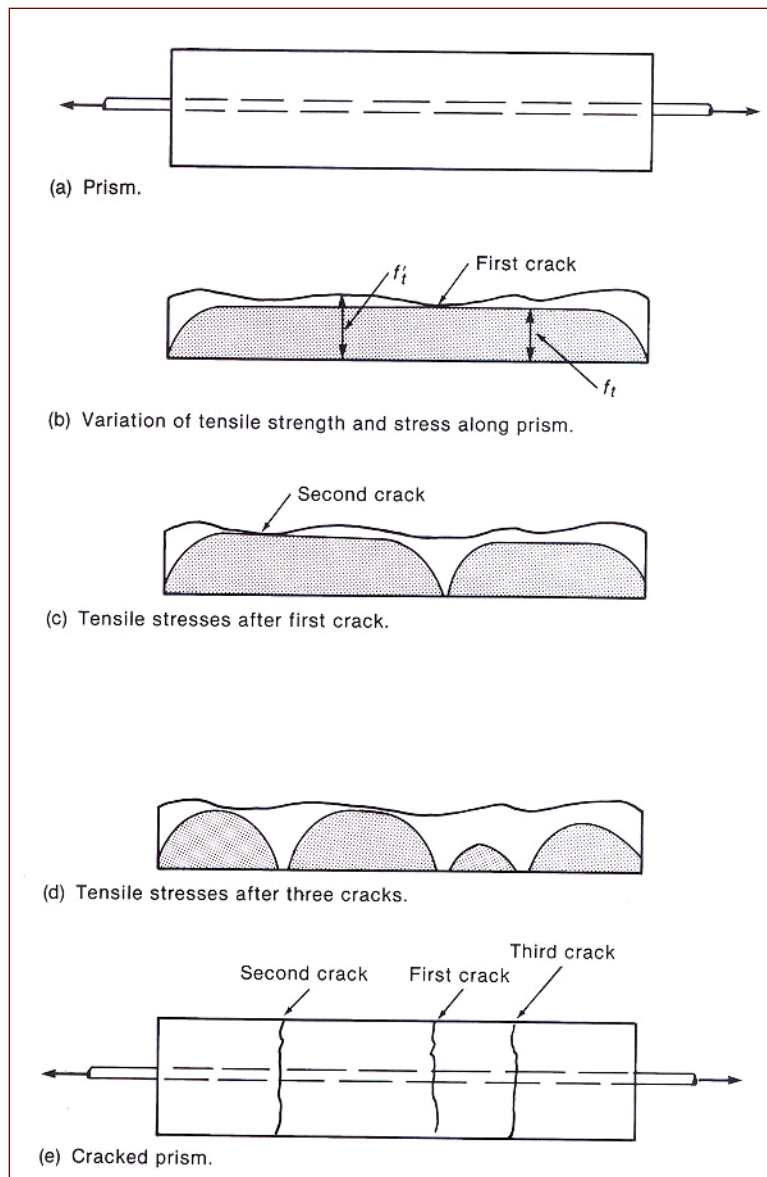


Figura 8–6 Agrietamiento de prisma cargado axialmente.

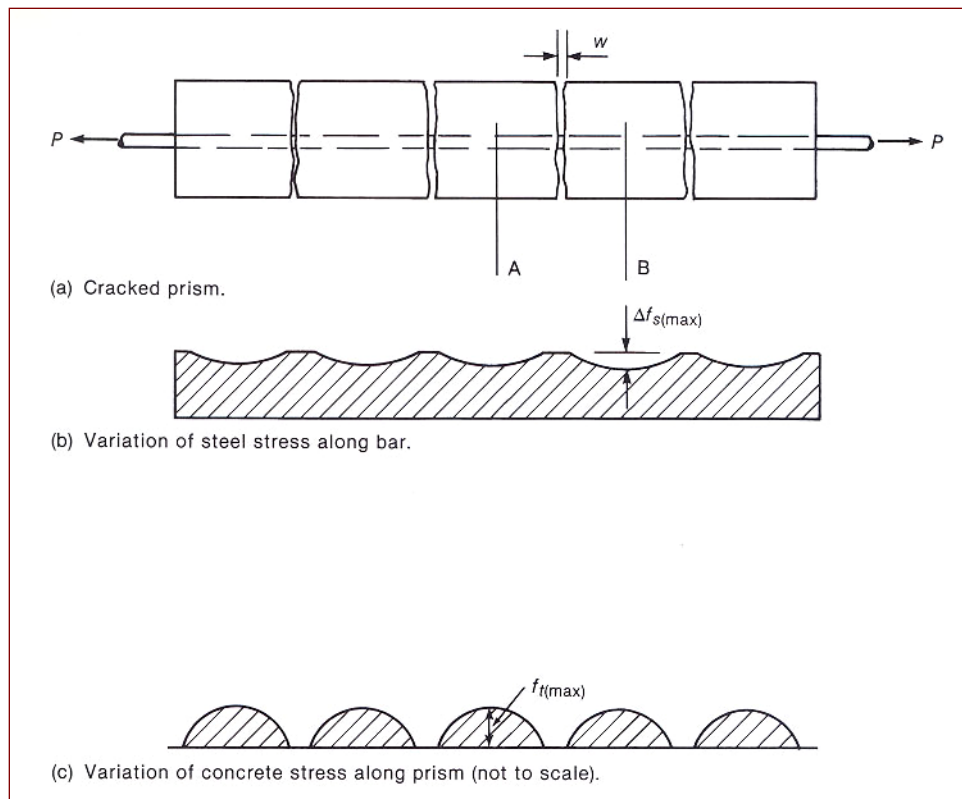


Figura 8–7 Esfuerzos en concreto y acero en un prisma agrietado.

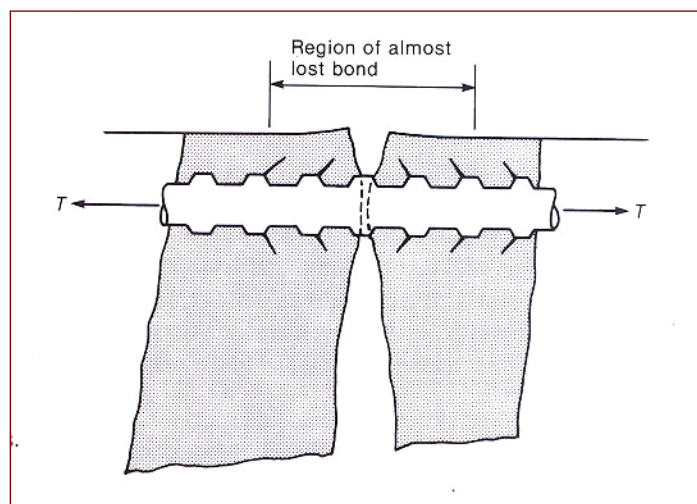


Figura 8–8 Agrietamiento en barras deformadas. (Tomado de Leonhardt, F., IABSE Periodica, 3/1977, 26 pp.)

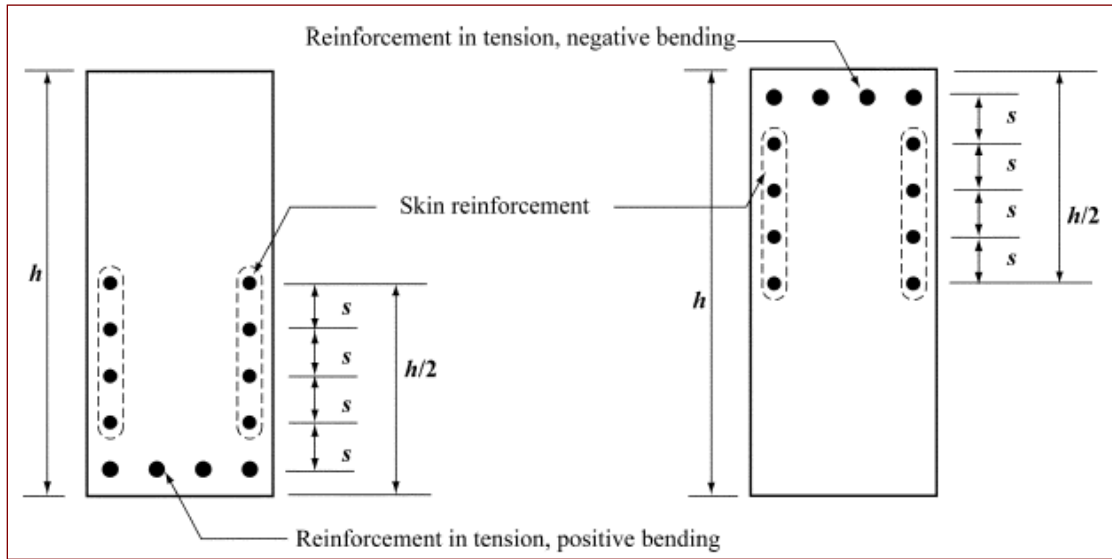


Figura 8-9 Refuerzo superficial para vigas de peralte mayor que 36 in. (Tomado de ACI 318-08.)

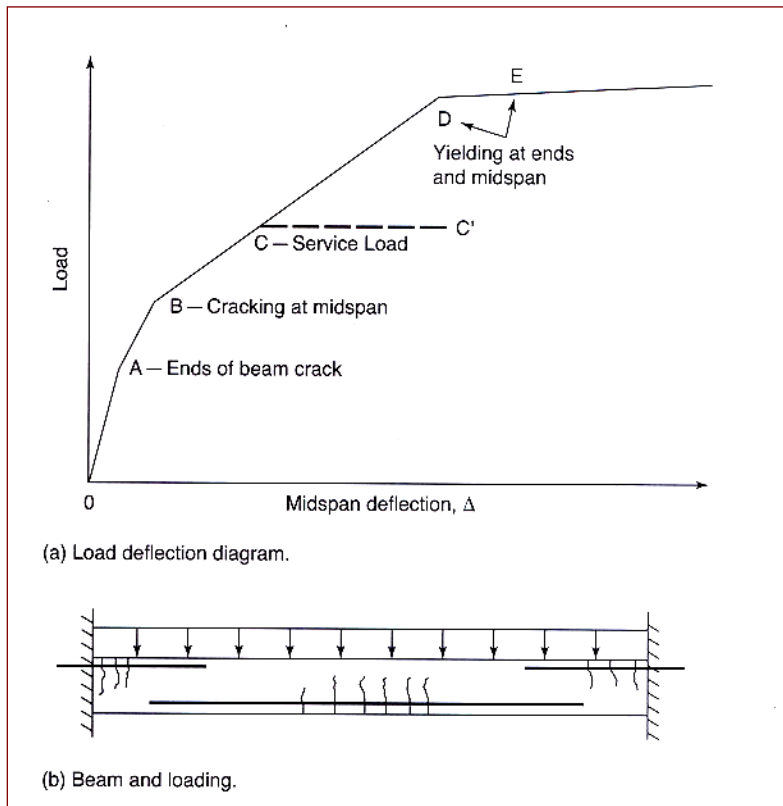


Figura 8-10 Comportamiento carga-deflexión en una viga de concreto reforzado.

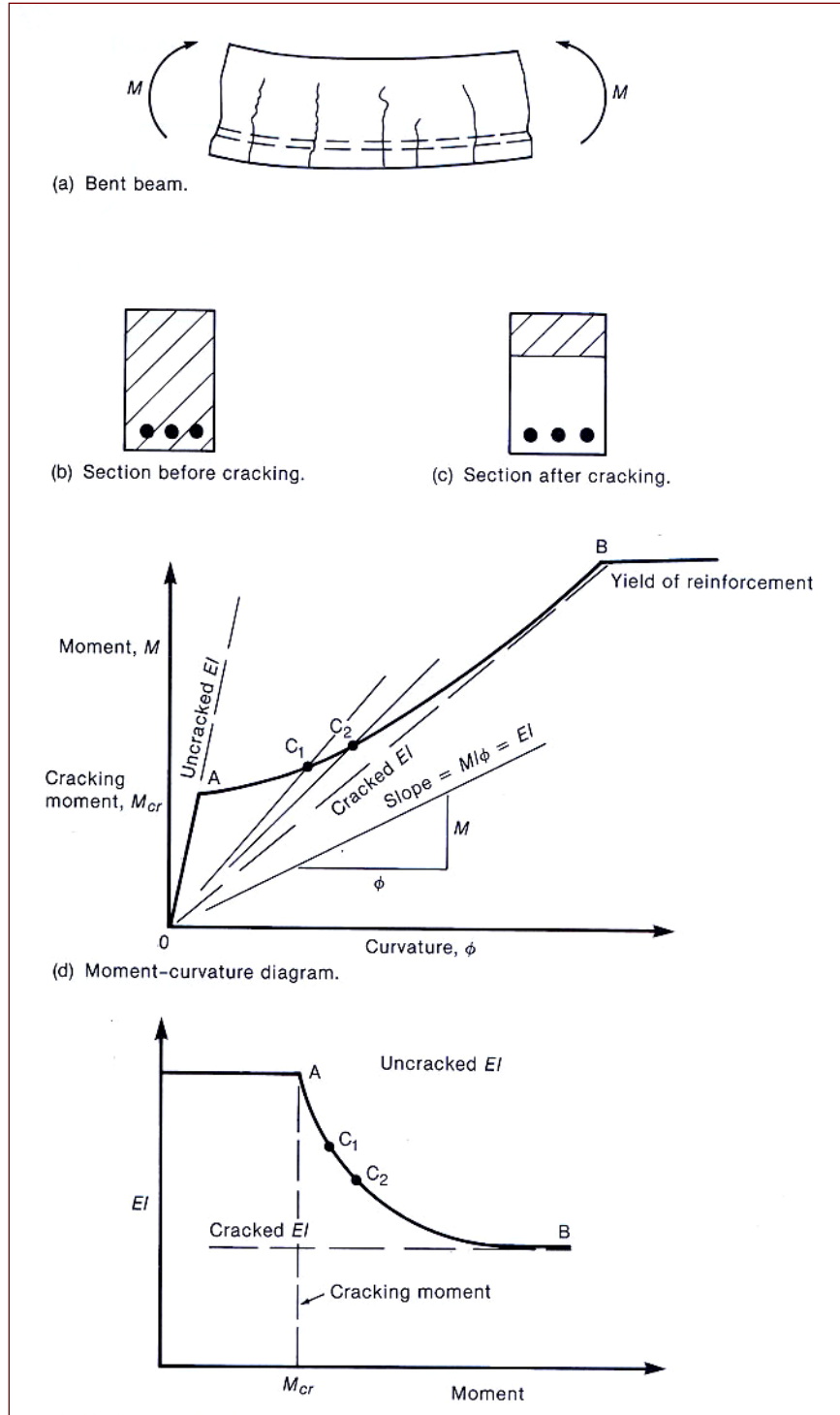


Figura 8-11 Diagrama momento-curvatura y variación en la rigidez a la flexión EI .

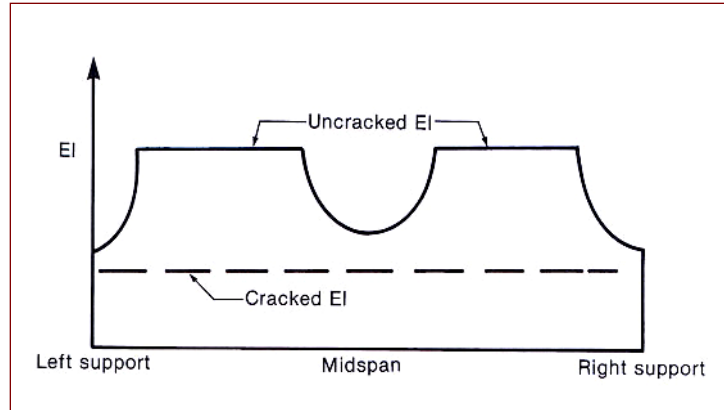


Figura 8–12 Variación de EI a lo largo de viga mostrada en la figura 8–10b.

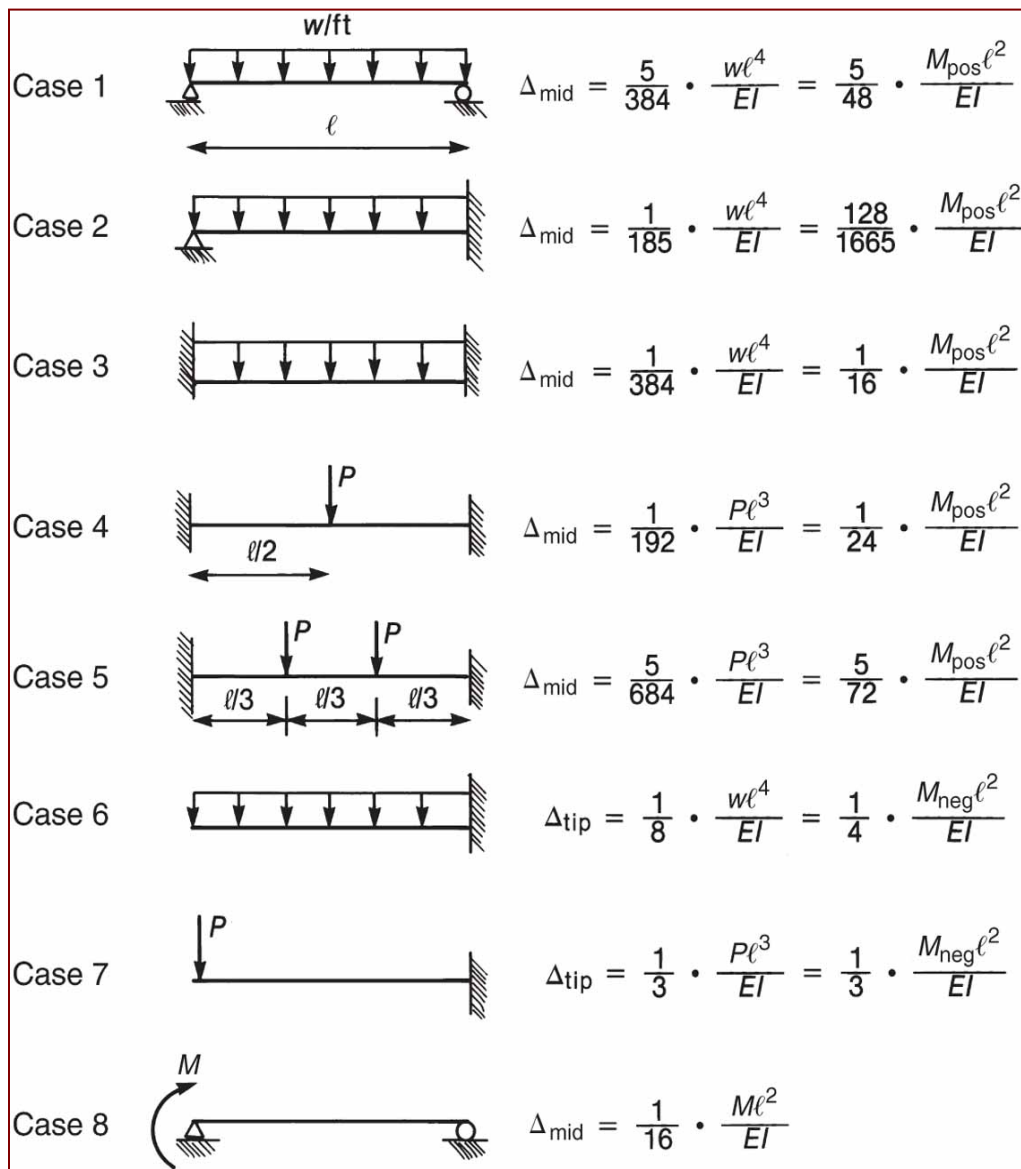


Figura 8–13 Ecuaciones de curva elástica.

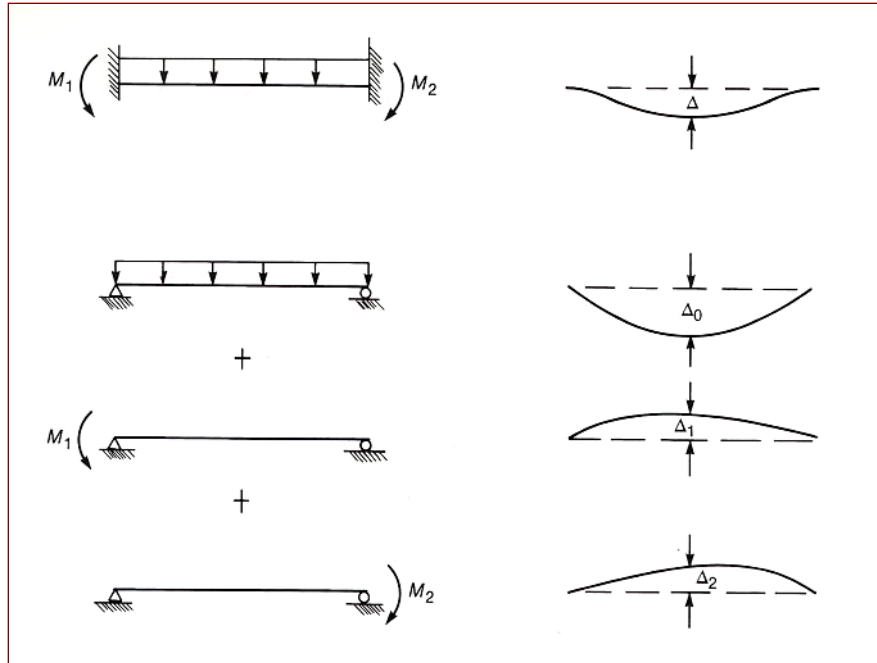


Figura 8-14 Cálculo de curva elástica para viga con momentos de empotramiento desiguales.

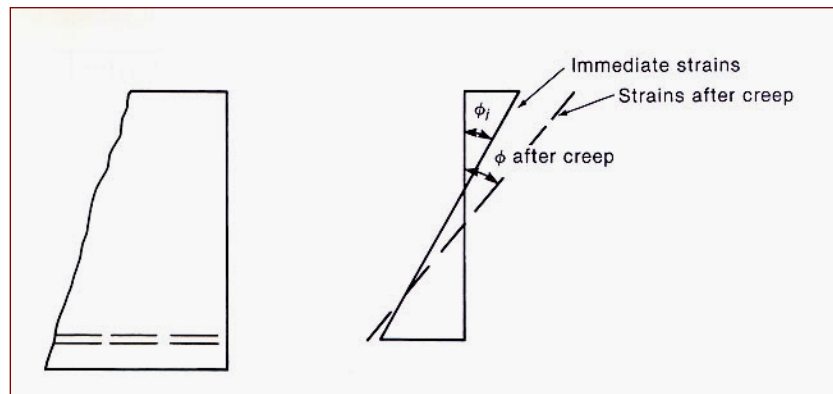


Figura 8-15 Efecto de flujo plástico sobre deformaciones unitarias y curvatura.

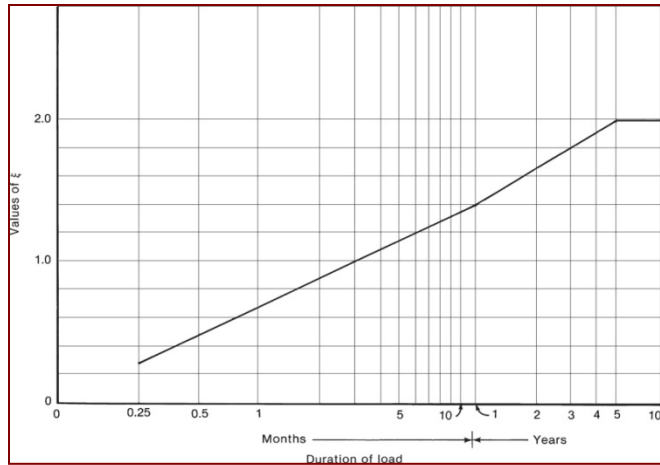


Figura 8-16 Valor de ξ para el cálculo de efecto de flujo plástico. (Tomado de ACI 318-08.)

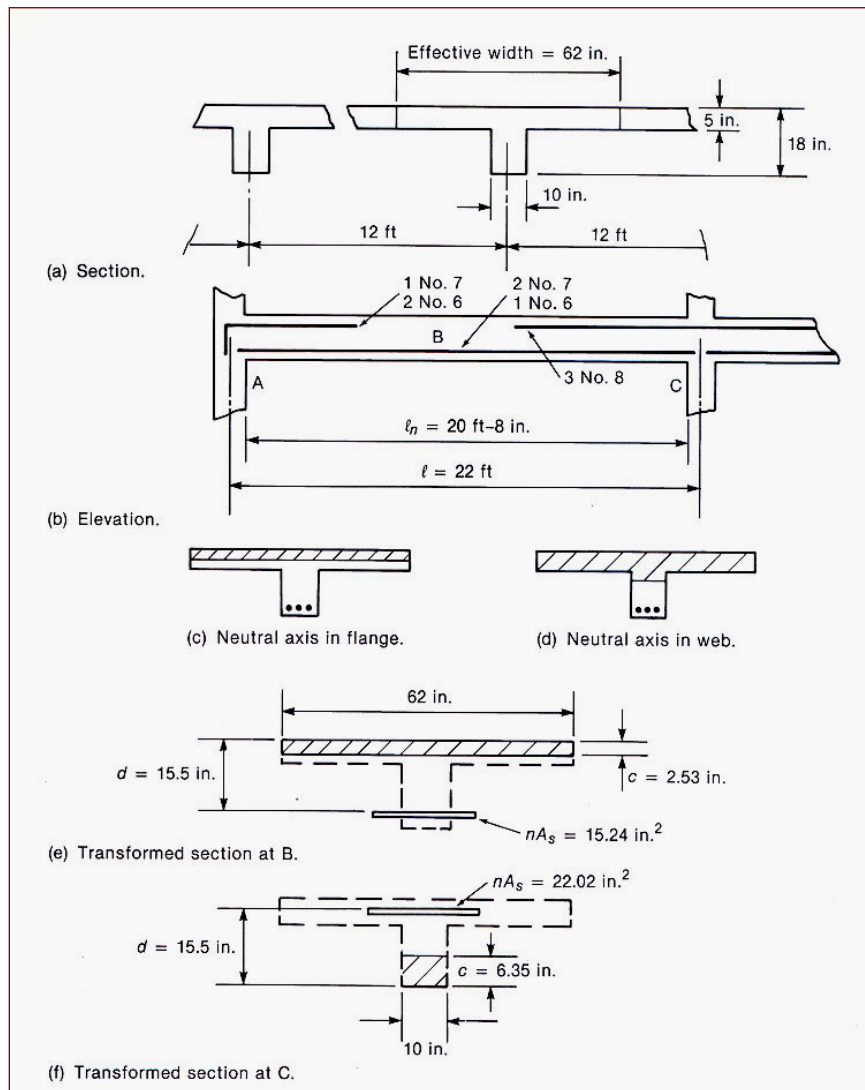


Figura 8-17 Viga en luz externa—Ejemplo 8-3.

9. COLUMNAS

9.1 Introducción

Las columnas son elementos verticales que transmiten carga axial de compresión. Reciben cargas verticales de pisos y techo y las transmiten a las fundaciones. En una construcción primero se cuelan vigas y piso y una vez que este concreto endurece, se colocan las armaduras y posteriormente el concreto de las columnas. El proceso se repite hasta alcanzar el techo. Este proceso se puede visualizar en las figuras 9-1 y 9-2. En la figura 9-1 se puede observar una columna terminada, previa a la colocación de la formaleta para el siguiente piso. Las barras longitudinales que salen de la columna se extenderán a través del piso hacia la columna del siguiente nivel. Estas barras serán traslapadas con las barras longitudinales de la nueva columna. También se pueden usar empalmes mecánicos como los que se muestran en la figura 9-23. La figura 9-2 muestra la armadura de una nueva columna lista para ser encofrada. En esta figura se pueden apreciar los aros y también el traslape de barras en la base de la columna.

Se debe considerar la estabilidad en el caso de diseño de elementos a compresión. Si los momentos inducidos por efecto de la esbeltez debilitan la columna de forma significativa, entonces se dice que la columna es *esbelta*. La mayoría de las columnas de concreto son lo suficientemente anchas como para evitar el problema de la esbeltez. A este tipo de columnas se les denomina *columnas no-esbeltas* o *columnas cortas*.

9.2 Columnas con aros y columnas helicoidales

Más del 95% de las columnas en regiones no-sísmicas son columnas con aros, muy similares a las mostradas en las figuras 9-1 y 9-2. Las columnas con aros pueden ser cuadradas, rectangulares, en forma de L, circulares, etc. Ocasionalmente, cuando se requieren alta capacidad y/o alta ductilidad, las barras se colocan en forma de círculo y los aros son reemplazados por una barra doblada en forma de espiral con un paso de 3.5 cm (1 3/8 in.) a 8.5 cm (3 3/8 in.). A este tipo de columna se le denomina *columna helicoidal*, y se muestra en la figura 9-3. Las columnas helicoidales son generalmente circulares, aun cuando las puede haber cuadradas o poligonales. La espiral restringe la expansión lateral del núcleo de la columna debida a carga axial. De esta forma retarda la falla del núcleo, dándole ductilidad a la columna.

En regiones sísmicas los aros en columnas son más pesados y espaciados a menor distancia que lo que se muestra en las figuras 9-1 y 9-2. Las columnas helicoidales son más usadas en estas regiones.

9.2.1 Comportamiento de columnas con aros y columnas helicoidales

Debido a la carga de compresión, la columna se acorta longitudinalmente bajo un esfuerzo f_l . Debido al efecto de Poisson, también se expande radialmente. En una columna helicoidal, la expansión lateral del núcleo está restringida por la espiral. Esto a su vez genera esfuerzos de tracción en la espiral. El concreto del núcleo se encuentra entonces en un estado triaxial de esfuerzos. Como se muestra en la figura 9-4. La capacidad del concreto en este caso se puede considerar como:

$$f_1 = f'_c + 4.1f_2 \quad (9-1)$$

Para columnas en regiones no-sísmicas el espaciamiento entre aros es aproximadamente igual al ancho de la columna. Como resultado de esto, los aros no proveen casi ningún confinamiento lateral al concreto del núcleo.

Los aros también brindan apoyo lateral a las barras longitudinales permitiéndoles a éstas permanecer estables hasta alcanzar el esfuerzo de fluencia.

En la figura 9-5A se presentan diagramas de carga versus deformación para columnas con aros y para columnas helicoidales. Las partes iniciales de estos diagramas son similares. Cuando se alcanza la carga máxima, se desarrollan grietas verticales y aplastamiento en el concreto de recubrimiento hasta que eventualmente éste se cae. Cuando esto ocurre en una columna con aros, la capacidad del núcleo remanente es menor que la carga aplicada, el concreto se aplasta y el refuerzo se patea hacia afuera entre los aros. Esta secuencia ocurre repentinamente y sin ningún aviso. La figura 9-5B muestra el resultado de una prueba realizada en una columna de sección rectangular llevada hasta la falla.

Cuando se cae el recubrimiento en la columna helicoidal, ésta no falla inmediatamente porque la capacidad del núcleo se ve mejorada debido a la generación de un estado de esfuerzos triaxiales como consecuencia de la presencia del refuerzo en espiral. En consecuencia, la columna puede sostener grandes deformaciones y, eventualmente, alcanzar una segunda carga máxima cuando fluye la espiral de refuerzo. Esto se puede observar en la figura 9-5A(a). Después de esto, la columna finalmente falla. Este tipo de falla es de gran ductilidad y da suficiente aviso antes del colapso. Adicionalmente, este tipo de falla ofrece la posibilidad de una redistribución de la carga hacia otros elementos. Sin embargo, debe mencionarse que esto se alcanza a deformaciones unitarias muy altas. La ventaja de la columna helicoidal se manifiesta también en el caso de solicitación excéntrica, como se puede ver en la figura 9-5A(b). Por su gran ductilidad, el factor de reducción de capacidad para columnas helicoidales es de $\phi = 0.70$ en vez del valor de 0.65 usado para columnas con aros.

Las figuras 9-6 y 9-7 muestran las columnas de un mismo edificio después del sismo ocurrido en San Fernando, California en 1971. La figura 9-6 corresponde a una columna con aros y la figura 9-7 a una columna helicoidal. Se puede apreciar que la columna con aros perdió toda su capacidad mientras que la helicoidal tiene aún alguna capacidad

remanente. La condición de aros mínimos para la columna de la figura 9-6 resulta inadecuada para proveer confinamiento al concreto del núcleo.

9.2.2 Capacidad de columnas cargadas axialmente.

Cuando una columna de sección transversal simétrica se somete a una carga axial P , se desarrollan en ella deformaciones unitarias longitudinales uniformes ε , tal como se muestra en la figura 9-8a. Gracias a la adherencia entre el concreto y el acero, podemos considerar que las deformaciones unitarias mencionadas son iguales para ambos materiales. De esta forma podemos decir que para una columna con un acero de refuerzo que tenga un punto de fluencia bien definido, su capacidad se alcanza cuando el acero fluye. Esta capacidad se puede expresar como

$$P_o = 0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st} \quad (9-2)$$

en donde, A_g = área de sección transversal bruta
 A_{st} = área de acero

9.3 Diagramas de interacción

Para columnas elásticas y homogéneas, la combinación máxima de esfuerzos debidos a flexión pura y compresión pura es:

$$\frac{P}{A} + \frac{My}{I} = f_{cu} \quad (9-3)$$

en donde A = área de la sección transversal
 I = momento de inercia de la sección transversal
 y = distancia desde el eje centroidal a la fibra con mayor compresión
 P = carga axial en la columna
 M = momento flexor

Normalizando la ecuación se obtiene:

$$\frac{P}{Af_{cu}} + \frac{My}{If_{cu}} = 1 \quad (9-4)$$

La máxima carga axial que puede soportar la columna ocurre cuando $M = 0$. En ese caso $P_{\max} = f_{cu} A$. En forma similar, el máximo momento que puede ser soportado ocurre cuando $P = 0$. En ese caso $M_{\max} = f_{cu} I / y$. Sustituyendo P_{\max} y M_{\max} se tiene

$$\frac{P}{P_{\max}} + \frac{M}{M_{\max}} = 1 \quad (9-5)$$

Esta ecuación se denomina ecuación de interacción porque muestra la interacción de, o la relación entre, P y M al momento de falla. La figura 9-10 es la representación gráfica de esta ecuación de interacción entre P y M . Esta graficación en un espacio $P - M$ ofrece la posibilidad de visualizar el diagrama de interacción como una superficie de falla para el elemento en flexo-compresión. Cualquier combinación ubicada dentro del área encerrada por los segmentos de recta representa una combinación viable. Cualquier punto por fuera de ella representa una combinación no-viable. Las líneas AB y AD indican combinaciones de carga correspondientes a fallas iniciadas por compresión. Los puntos B y D representan fallas balanceadas en donde se alcanzan, de manera simultánea, la capacidad a compresión y la capacidad a tracción.

El concreto reforzado no es elástico y su capacidad a tracción es mucho más baja que la de compresión. Aun así, es posible desarrollar una resistencia efectiva a la tracción mediante el uso de barras de refuerzo en el lado de tracción del elemento. Por estas razones, el cálculo del diagrama de interacción para concreto reforzado es más complejo que para el caso de un material elástico. La forma general del diagrama es similar al mostrado en la figura 9-11b.

9.4 Diagramas de Interacción para Columnas de Concreto

9.4.1 Solución mediante compatibilidad de deformaciones unitarias

CONCEPTOS Y SUPOSICIONES

Los diagramas de interacción para columnas son calculados generalmente mediante la suposición de una serie de distribuciones de deformaciones unitarias, cada una correspondiente a un punto del diagrama en particular, y calculando los valores correspondientes de P y M para esa distribución. Una vez que se han calculado suficientes puntos, los resultados son presentados en el diagrama de interacción.

El procedimiento de cálculo para una distribución de deformaciones unitarias en particular se resume en la figura 9-12. La sección transversal se muestra en la figura 9-12a y una suposición de distribución de deformaciones unitarias es mostrada en la figura 9-12b. La deformación máxima de compresión es 0.003, correspondiente a falla de la sección. La ubicación del eje neutro y la deformación unitaria en cada nivel de refuerzo se calculan a partir de la distribución de deformaciones unitarias. Esta información es luego usada para calcular el tamaño del bloque de compresión y el esfuerzo en cada capa de refuerzo, como se muestra en la figura 9-12c. Las fuerzas en el concreto y en las capas de acero, mostradas en la figura 9-12d, se calculan multiplicando los esfuerzos por las áreas sobre las cuales éstas actúan. Finalmente, la fuerza axial P_n se calcula sumando las fuerzas individuales en el concreto y en el acero, y el momento M_n se calcula sumando los momentos de estas fuerzas alrededor del centroide geométrico de la sección transversal. Estos valores de P_n y M_n representan un punto en el diagrama de interacción.

La figura 9-13 ilustra una serie de distribuciones de deformaciones unitarias y los puntos resultantes en el diagrama de interacción. La distribución en A representa la compresión pura. El punto B corresponde a aplastamiento en una cara de la columna y cero esfuerzos en la otra cara. Si se ignora la resistencia a la tracción del concreto en los cálculos, este punto representa la inminencia del agrietamiento en la cara inferior de la sección. Todos los puntos por debajo del punto B en el diagrama, representan casos en los cuales la sección está parcialmente agrietada. El punto C corresponde a una distribución de deformaciones unitarias con un máximo de compresión de 0.003 en un lado de la sección y la deformación unitaria de fluencia a la tracción en el acero, ϵ_y , en el centroide del acero de tracción en el lado opuesto. Esto representa una falla balanceada en la cual se presentan aplastamiento del concreto y fluencia del acero de manera simultánea. El punto C, el punto extremo derecho del diagrama de interacción, representa el cambio de falla controlada por compresión para cargas más altas a fallas de transición para cargas más bajas. El punto D corresponde a la distribución de deformaciones mostrada. Aquí el refuerzo ha sido elongado varias veces por encima de la elongación de fluencia antes de que el concreto alcance la deformación de aplastamiento. Esto implica comportamiento dúctil. Esto contrasta con la distribución de deformaciones del punto B, en donde la columna falla tan pronto como la deformación del concreto alcance un valor de 0.003. En ese caso, como el refuerzo de tracción aun no ha fluido, no habrá grandes deformaciones antes de la falla y la columna fallará de manera frágil.

CARGA AXIAL MÁXIMA

Como se vió anteriormente, la resistencia de una columna bajo carga axial concéntrica se puede expresar como

$$P_{n0} = k_3 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st} \quad (9-2)$$

en donde, $k_3 f'_c$ = esfuerzo máximo permitido en el diseño de columnas. (Ver 10.2.7)
 A_g = área de sección transversal bruta (concreto y acero)
 f_y = resistencia a la fluencia del refuerzo
 A_{st} = área total de refuerzo de acero en la sección transversal

La resistencia expresada en la ecuación (9-2) normalmente no puede ser alcanzada en una estructura porque casi siempre habrá momentos presentes y como se puede ver en las figuras 9-10, 9-11 y 9-13, cualquier momento conduce a una reducción en la capacidad de carga axial. Estos momentos o excentricidades surgen como consecuencia de momentos no balanceados en vigas, mala alineación de columnas de piso a piso, compactación desnivelada del concreto a lo ancho de la sección transversal, o mala alineación del refuerzo. Un examen de la figura 9-1 mostrará que el refuerzo ha sido desplazado hacia la izquierda de la columna. Por lo tanto, en este caso, el centroide de resistencia teórica no coincide con el eje de la columna construida. Esta desalineación del refuerzo mostrado es considerablemente mayor que la tolerancia permisible para la ubicación del refuerzo (ver [ACI 318-08 Artículo 7.5.2.2](#)), y por lo tanto una columna como ésta no es aceptable.

Para considerar momentos flexores accidentales, [ACI 318-08 Artículos 10.3.6.1 y 10.3.6.2](#) especifican que la carga máxima en la columna no podrá exceder 0.85 veces el valor dado en la ecuación (9-2) para columnas helicoidales y 0.80 veces para columnas con aros.

Columnas helicoidales (que cumplan [ACI 318-08 Artículo 7.10.4](#)):

$$\phi P_{n,\max} = 0.85\phi \left[0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st} \right] \quad \text{ACI 318-08 Ec. 10-1}$$

Columnas con aros (que cumplan [ACI 318-08 Artículo 7.10.5](#)):

$$\phi P_{n,\max} = 0.80\phi \left[0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st} \right] \quad \text{ACI 318-08 Ec. 10-2}$$

Este límite deberá ser incluido en los cálculos de los diagramas de interacción. La diferencia entre los valores permisibles para columnas helicoidales y para columnas con aros refleja el comportamiento más dúctil de las primeras.

FACTORES DE REDUCCIÓN DE RESISTENCIA PARA COLUMNAS

En el diseño de columnas, las capacidades de carga axial y de momento deben satisfacer

$$\phi P_n \geq P_u \quad \text{y} \quad \phi M_n \geq M_u \quad (9-6)$$

donde

P_u y M_u = carga y momento factorizados aplicados a la columna, calculados en el análisis del marco

P_n y M_n = resistencias nominales de la sección transversal de la columna

ϕ = factor de reducción de resistencia; el factor ϕ es el mismo para las dos desigualdades en la ecuación (9-6)

Los valores de ϕ están dados en [ACI 318-08 Artículo 9.3.2](#). Para valores altos de carga axial, se especifica ϕ de 0.65 para columnas con aros y 0.70 para columnas helicoidales. El valor para columnas helicoidales es menor que el 0.90 usado para flexión porque la resistencia de una columna se ve más afectada por variaciones en la resistencia del concreto que en el caso de una viga, y porque la falla de una columna tendrá consecuencias más serias que a falla de una viga. El valor para columnas con aros es aún menor porque la falla de una columna con aros es mucho más frágil que la falla de una columna helicoidal.

Los ejes horizontales de los diagramas de interacción de las figuras 9-10, 9-11 y 9-13 corresponden a flexión pura. Aquí el factor de reducción de resistencia, ϕ , es igual o muy cercano a 0.90. Como resultado, es necesaria una transición entre $\phi = 0.65$ y $\phi = 0.75$ para cargas axiales altas y $\phi = 0.90$ para flexión pura. La transición se lleva a cabo en la región de falla controlada por tracción y refleja el incremento en ductilidad en la misma. La transición en ϕ es función de la deformación unitaria, ϵ_t , en la capa de refuerzo más

alejada de la zona de compresión. Cuando la distribución de deformaciones unitarias se encuentra en el rango entre 0.003 en compresión y $-\varepsilon_y$ (en donde las deformaciones unitarias de tracción son tomadas como negativas), se dice que la sección es *controlada por compresión*. Cuando ε_t es menor que -0.005 (más negativo y por lo tanto más traccional), la sección se denomina *controlada por tracción*. El valor de ϕ varía linealmente como una función de ε_t , cuando ε_t varía desde $-\varepsilon_y$ hasta -0.005 .

DERIVACIÓN DEL MÉTODO DE CÁLCULO

Las relaciones necesarias para calcular los diferentes puntos en un diagrama de interacción se pueden derivar usando compatibilidad de deformaciones y equilibrio. Se deben usar las suposiciones básicas y las simplificaciones establecidas en [ACI 318-08 Artículo 10.2](#). Es necesario observar rigurosamente la convención de signos establecida para esfuerzos, deformaciones unitarias y fuerzas a lo largo de todos los cálculos. La compresión se toma como positiva en todos los casos.

CAPACIDADES DE CARGA AXIAL CONCÉNTRICA DE COMPRESIÓN Y DE CARGA AXIAL MÁXIMA

El punto máximo teórico en el diagrama de interacción se calcula usando la ecuación (9-2). La carga máxima real se calcula usando las ecuaciones [ACI 318-08 \(10-1\)](#) o [\(10-2\)](#). Para una sección transversal simétrica, el momento correspondiente a esta carga es cero. Si la sección transversal no es simétrica, se debe calcular el momento correspondiente.

CASO GENERAL

El caso general conlleva el cálculo de P_n actuando en el centroide y M_n alrededor del centroide, para una distribución de deformaciones unitarias con $\varepsilon_{cu} = 0.003$. La sección transversal de la columna y la distribución de deformaciones se muestran en las figuras 9-14a y b. Allí se muestran cuatro capas de refuerzo, con la capa 1 asociada a la deformación unitaria ε_{s1} y el área A_{s1} , y así las demás. La capa 1 es la más cercana a la superficie “menos comprimida” y está a una distancia d_1 de la superficie “más comprimida.”

La distribución de deformaciones estará enteramente definida una vez que se escoja un valor para ε_{s1} . Para facilitar el proceso iterativo, se puede escoger $\varepsilon_{s1} = Z\varepsilon_y$, donde Z es un valor arbitrario. De esta forma, los valores positivos de Z corresponden a deformaciones unitarias positivas (de compresión) como se puede observar en la figura 9-14b. Por ejemplo, $Z = -1$ corresponde a $\varepsilon_{s1} = -1\varepsilon_y$, la deformación de fluencia en tracción.

De la figura 9-14b y usando triángulos semejantes,

$$c = \left(\frac{0.003}{0.003 - Z\varepsilon_y} \right) d_1 \quad (9-7)$$

y

$$\varepsilon_{si} = \left(\frac{c - d_i}{c} \right) 0.003 \quad (9-8)$$

donde ε_{si} y d_i son, respectivamente, las deformaciones en la i -ésima capa de acero y la profundidad de la capa.

Una vez que se conocen los valores de c y ε_{s1} , ε_{s2} , etc., se pueden calcular los esfuerzos en el concreto y en cada capa de acero. Para refuerzo elasto-plástico como el que se ilustra en la figura 9-15,

$$f_{si} = \varepsilon_{si} E_s \text{ sujeto a } -f_y \leq f_{si} \leq f_y \quad (9-9)$$

Los esfuerzos en el concreto se consideran como correspondientes al bloque rectangular equivalente usado anteriormente ([ACI 318-08 Artículo 10.2.7](#)). La profundidad a del bloque rectangular equivalente se muestra en la figura 9-14c. Este valor no puede exceder el valor del peralte de la sección, h .

El siguiente paso consiste en calcular la fuerza de compresión en el concreto, C_c , y las fuerzas en cada capa de refuerzo, F_{s1} , F_{s2} , etc. Esto se lleva a cabo multiplicando los esfuerzos por las correspondientes áreas. Así

$$C_c = (0.85 f'_c)(ab) \quad (9-10)$$

Para una sección no-rectangular, el área (ab) , sería reemplazada por el área de la zona de compresión de profundidad a , medida perpendicularmente al eje neutro.

Si a es menor que d_i ,

$$F_{si} = f_{si} A_{si} \text{ (positivo en compresión)} \quad (9-11a)$$

Si a es mayor que d_i para una capa de acero en particular, el área del refuerzo en esa capa ha sido incluida en el área (ab) usada para calcular C_c . Por lo tanto, es necesario restar $0.85f'_c$ de f_{si} antes de calcular F_{si} :

$$F_{si} = (f_{si} - 0.85f'_c) A_{si} \quad (9-11b)$$

Las fuerzas resultantes C_c y F_{s1} a F_{s4} se muestran en la figura 9-16b.

La capacidad de carga axial, P_n , para la distribución de deformaciones escogida es la suma de las fuerzas axiales:

$$P_n = C_c + \sum_{i=1}^n F_{si} \quad (9-12)$$

La capacidad de momento M_n para la distribución de deformaciones escogida se encuentra sumando los momentos de todas las fuerzas internas alrededor del centroide de

la columna. Este cálculo se hace alrededor del centroide porque este es el eje alrededor del cual se calculan los momentos en el análisis estructural de rutina. En la década de los años 50 y de los 60 los momentos eran calculados algunas veces alrededor del *centroide plástico*; i.e., el lugar geométrico de la resultante en una columna deformada uniformemente a compresión como en el caso A de la figura 9-13. El centroide y el centroide plástico ocupan el mismo punto en una columna simétrica con refuerzo simétrico.

En las figuras 9-14 y 9-16 se muestran todas las fuerzas como positivas (compresión). Un momento interno positivo corresponde a una compresión en la cara superior, y

$$M_n = C_c \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} \right) + \sum_{i=1}^n F_{si} \left(\frac{h}{2} - d_i \right) \quad (9-13)$$

CASO DE TRACCIÓN AXIAL PURA

La resistencia ante tracción axial pura se calcula suponiendo que la sección se encuentra completamente agrietada y sujeta a deformación unitaria uniforme igual a, o menor que (mas traccional que), $-\varepsilon_y$. El esfuerzo en todas las capas de refuerzo es por lo tanto $-f_y$ (fluyendo en tracción) y

$$P_{nt} = \sum_{i=1}^n -f_y A_{si} \quad (9-14)$$

Desde luego, la capacidad del concreto de resistir tracción es despreciable. Para una sección simétrica el momento correspondiente será cero. Para una sección no simétrica, se usa la ecuación (9-13) para calcular el momento.

CÁLCULO DE FACTOR DE REDUCCIÓN DE CAPACIDAD, ϕ

Como se dijo anteriormente, ϕ varía linealmente de 0.65 (o 0.75 para columnas helicoidales) a 0.90 para flexión pura. De acuerdo con el [Artículo 9.3.2 de ACI 318-08](#), ϕ varía linealmente con ε_t , la deformación unitaria de la capa de refuerzo más lejana a la fibra de mayor compresión, conforme ε_t varía desde $-\varepsilon_y$ hasta -0.005 (donde la tracción es negativa). Por lo tanto, para una columna con aros:

Si ε_t es mayor (más comprimido) o igual que $-\varepsilon_y$:

$$\phi = 0.65 \quad (9-15a)$$

Si ε_t está entre $-\varepsilon_y$ (flujo en tracción) y -0.005 para acero Grado 60:

$$\phi = 0.65 + (\varepsilon_t - 0.002)(250/3) \quad (9-15b)$$

Si ε_t es menor (más traccional) que -0.005 :

$$\phi = 0.90 \quad (9-15c)$$

Notar que el signo menos en las ecuaciones (9-15) surge de la convención de signos, en donde la compresión es positiva.

Para columna helicoidal:

Si ε_t es mayor (más comprimido) o igual que $-\varepsilon_y$:

$$\phi = 0.75 \quad (9-16a)$$

Si ε_t está entre $-\varepsilon_y$ (flujo en tracción) y -0.005 para acero Grado 60:

$$\phi = 0.75 + 50(\varepsilon_t - 0.002) \quad (9-16b)$$

Si ε_t es menor (más traccional) que -0.005 :

$$\phi = 0.90 \quad (9-16c)$$

Ejemplo 9-1 Cálculo de un diagrama de interacción

Calcule cuatro puntos en el diagrama de interacción para la columna mostrada en la figura 9-17a. Use $f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2$ y $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$. $A_g = bh$ es 1600 cm^2 , $A_{s1} = 25.8 \text{ cm}^2$, $A_{st} = \Sigma A_{si} = 51.6 \text{ cm}^2$ y $\rho_t = A_{st}/A_g = 0.0323$. La deformación unitaria de fluencia, $\varepsilon_y = f_y/E_s$, es $4200 \text{ kg/cm}^2 / 2030000 \text{ kg/cm}^2 = 0.00207$.

❶ **Calcular la capacidad de carga axial concéntrica y la capacidad de carga axial máxima.** De la ecuación 9-2:

$$P_o = 0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}$$

$$P_o = (0.85 \times 0.35 \text{ Mg/cm}^2)(1600 - 51.6) \text{ cm}^2 + 4.2 \text{ Mg/cm}^2 \times 51.6 \text{ cm}^2$$

$$P_o = 461 \text{ Mg} + 217 \text{ Mg} = 678 \text{ Mg}$$

Esta es la capacidad nominal de carga axial concéntrica. El valor usado en el gráfico de un diagrama de interacción para diseño sería ϕP_o , donde $\phi = 0.65$. Así,

$$\phi P_o = 441 \text{ Mg}$$

P_o y ϕP_o son graficados como los puntos A y A' en la figura 9-18.

Para esta columna con $\rho_t = 0.0323$ (o 3.23 %), los 217 Mg acarreados por el refuerzo representan aproximadamente el 30% de los 678 Mg de capacidad nominal de la columna. En columnas cargadas axialmente, el refuerzo aporta generalmente entre 10 y 35% de la capacidad total.

La carga máxima permitida en esta columna (ACI 318-08 Artículo 10.3.6.2) está dada por la ecuación:

$$\phi P_{n,max} = 0.80\phi \left[0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st} \right] \quad \text{ACI 318-08 Ec. 10-2}$$

$$\phi P_{n,max} = 0.80\phi P_o = 353 \text{ Mg}$$

Esta carga es graficada como una línea horizontal sólida en la figura 9-18. La porción del diagrama de interacción por encima de esta línea se muestra a trazos porque esta capacidad no puede ser usada en diseño.

❷ **Cálculo de ϕP_n y ϕM_n para el caso general.** Para obtener un diagrama de interacción completo, se deben considerar una cantidad de distribuciones de deformación unitaria para obtener los correspondientes valores de P_n , M_n , ϕP_n y ϕM_n . Idealmente, estas distribuciones incluirían una secuencia de gradientes de deformación unitaria correspondientes a los valores $\varepsilon_{s1} = +0.5\varepsilon_y$, $+0.375\varepsilon_y$, etc., correspondientes éstos a la vez a los valores $Z = +0.5$, $+0.375$, $+0.125$, 0 , -0.25 , -0.5 , -0.75 , -1 , -1.5 , -2 , -2.5 , -3 , -4 , -6 , etc. Estos intervalos se hacen sucesivamente más grandes porque los puntos se juntan más y más conforme Z crece. Los puntos correspondientes a $Z = 0$ ($f_{s1} = 0$), $Z = -0.5$ ($f_{s1} = 0.5f_y$ en tracción), $Z = -1$ ($f_{s1} = f_y$ en tracción, para falla balanceada) son importantes para el detallamiento de empalmes en columnas y deberían ser mostrados en el diagrama de interacción. En este ejemplo se calculan los valores de ϕP_n y ϕM_n para $Z = -1$, -2 y -4 .

❸ **Cálculo de ϕ , ϕP_n y ϕM_n para falla balanceada ($\varepsilon_{s1} = -1\varepsilon_y$).**

- (a) **Determinar c y las deformaciones unitarias en el refuerzo.** La sección transversal de la columna y la distribución de deformaciones unitarias correspondientes a $\varepsilon_{s1} = -1\varepsilon_y$ ($Z = -1$) se muestran en la figura 9-17a y b. La deformación unitaria en la capa inferior de acero es $-1\varepsilon_y = -0.00207$. Utilizando triángulos semejantes, la profundidad del eje neutro es

$$c = \frac{0.003}{0.003 - (-1 \times 0.00207)} d_1$$

$$c = \frac{0.003}{0.003 + 0.00207} \times 33.5 \text{ cm} = 19.8 \text{ cm}$$

Usando triángulos semejantes, la deformación unitaria del acero de compresión es

$$\varepsilon_{s2} = \left(\frac{c - d_2}{c} \right) 0.003$$

$$\varepsilon_{s2} = \left(\frac{19.8 - 6.5}{19.8} \right) 0.003 = 0.00202$$

La deformación unitaria en la capa 1 es $\varepsilon_{s1} = Z \varepsilon_y = -0.00207$.

(b) **Calcular los esfuerzos en las capas de refuerzo.** El esfuerzo en la capa de refuerzo 2 es $\varepsilon_{s2} E_s = 0.00202 \times 2030 = 4.10 \text{ Mg/cm}^2$ [Ec. (9-9)]. Como $f_{s2} \leq +4.2 \text{ Mg/cm}^2$, entonces, $f_{s2} = 4.10 \text{ Mg/cm}^2$. Porque es positivo, es de compresión. El esfuerzo en la capa 1 es el tope máximo, -4.2 Mg/cm^2 .

(c) **Calcular a .** La profundidad del bloque rectangular equivalente de esfuerzos es $a = \beta_1 c$, donde a no puede exceder h . Para $f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2$,

$$\beta_1 = 1.05 - 0.05 \left(\frac{f'_c}{70 \text{ kg/cm}^2} \right) = 0.80$$

y

$$a = \beta_1 c$$

$$a = 0.80 \times 19.8 \text{ cm} = 15.8 \text{ cm}$$

Esto es menor que h ; por lo tanto, se puede usar este valor. Si a excede h , se debe usar $a = h$. Los esfuerzos calculados en los pasos 2 y 3 son mostrados en la figura 9-17c.

(d) **Calcular las fuerzas en el concreto y el acero.** La fuerza en el concreto, C_c , es igual al esfuerzo promedio, $0.85 f'_c$, multiplicado por el área del bloque rectangular de esfuerzos, ab :

$$C_c = (0.85 f'_c)(ab)$$

$$C_c = 0.85 \times 0.35 \text{ Mg/cm}^2 \times 15.8 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} = 188 \text{ Mg}$$

La distancia $d_1 = 33.5 \text{ cm}$ hasta la capa 1 de refuerzo excede $a = 15.8 \text{ cm}$. Por tanto, esta capa de acero está fuera del bloque de compresión y no desplaza concreto incluido en el área (ab) cuando se calcula C_c . Así,

$$F_{s1} = f_{s1} A_{s1}$$

$$F_{s1} = -4.2 \text{ Mg/cm}^2 \times 25.8 \text{ cm}^2 = -108 \text{ Mg} (\text{negativo} = \text{tracción})$$

La capa de refuerzo 2 está dentro de la zona de compresión, ya que $a = 15.8 \text{ cm}$ excede $d_2 = 6.5 \text{ cm}$. Por tanto, debemos descontar el esfuerzo en el concreto desplazado por el acero cuando se calcula F_{s2} . De la ecuación 9-11b,

$$F_{s2} = (f_{s2} - 0.85 f'_c) A_{s2}$$

$$F_{s2} = (4.10 - 0.85 \times 0.35) \text{ Mg/cm}^2 \times 25.8 \text{ cm}^2 = 100 \text{ Mg}$$

Las fuerzas en el concreto y en el acero se muestran en la figura 9-17d.

- (e) **Calcular P_n .** La capacidad nominal de carga axial, P_n , se encuentra sumando los componentes de fuerza axial:

$$P_n = C_c + \Sigma F_{s_i}$$

$$P_n = 188 - 108 + 100 = 180 \text{ Mg}$$

Como $\varepsilon_{s1} = -\varepsilon_y$ (fluencia en tracción), esta es la condición de falla balanceada y $P_n = P_b$.

- (f) **Calcular M_n .** De la figura 9-17d el momento de C_c, F_{s1}, F_{s2} alrededor del centroide de la sección es

$$M_n = C_c \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} \right) + F_{s1} \left(\frac{h}{2} - d_1 \right) + F_{s2} \left(\frac{h}{2} - d_2 \right)$$

$$M_n = 188 \text{ Mg} \left(\frac{40}{2} - \frac{15.8}{2} \right) \text{ cm} + [-108 \text{ Mg} (20 - 33.5)] \text{ cm} + 100 \text{ Mg} (20 - 6.5) \text{ cm}$$

$$M_n = 2270 + 1460 + 1350 = 5080 \text{ Mg-cm}$$

Por lo tanto, $M_n = M_b = 50.8 \text{ Mg-m}$.

- (g) **Calcular $\phi, \phi P_n$ y ϕM_n .** La deformación unitaria ε_t , en la capa de refuerzo más alejada de la fibra extrema de compresión es $\varepsilon_{s1} = Z \varepsilon_y = -0.00207$. Por lo tanto, de acuerdo a la ecuación 9-15a:

$$\phi = 0.65$$

$$\phi P_n = 0.65 \times 180 = 117 \text{ Mg}$$

$$\phi M_n = 0.65 \times 50.8 = 33.0 \text{ Mg-m}$$

Esto completa los cálculos para un valor de $\varepsilon_{s1} = Z \varepsilon_y$ y da los puntos B y B' en la figura 9-18. Otros valores de Z se pueden asignar y los cálculos se repiten hasta obtener suficientes puntos para completar el diagrama.

④ Cálculo de ϕP_n y ϕM_n para $Z = -2$.

⑤ Cálculo de ϕP_n y ϕM_n para $Z = -4$.

⑥ Cálculo de capacidad axial de tracción.

□

9.4.2 Diagramas de interacción para columnas circulares

La solución basada en compatibilidad de deformaciones descrita anteriormente puede ser usada para calcular los puntos en un diagrama de interacción para una columna circular. Como se muestra en la figura 9-19b, la profundidad del eje neutro, c , se calcula a partir del diagrama de deformaciones unitarias usando triángulos semejantes. La profundidad del bloque rectangular equivalente de esfuerzos, a , de nuevo es $\beta_1 c$.

La zona de compresión resultante es un segmento de círculo, de profundidad a , como el que se muestra en la figura 9-19d. Para calcular la fuerza de compresión y su momento alrededor del centroide de la columna, es necesario calcular el área y la ubicación del centroide del segmento circular. Estos términos se pueden expresar como una función del ángulo θ como se muestra en la figura 9-20. El área del segmento es

$$A = h^2 \left(\frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{4} \right) \quad (9-17)$$

en donde θ está expresado en radianes. El momento de esta área alrededor del centro de la columna es

$$A\bar{y} = h^3 \left(\frac{\sin^3 \theta}{12} \right) \quad (9-18)$$

La forma del diagrama de interacción de una columna circular se ve afectada por el número de barras y por su orientación relativa a la dirección del eje neutro. De esta forma, la capacidad de momento alrededor del eje $x-x$ de la columna en la figura 9-19a es menor que la obtenida alrededor del eje $y-y$. Como el diseñador tiene poco control sobre el emplazamiento de las barras en columnas circulares, el diagrama de interacción debe ser calculado considerando la orientación de barras menos favorable. Para columnas circulares con más de 8 barras, este problema desaparece porque el emplazamiento de las barras se asemeja al de un anillo continuo.

9.4.3 Propiedades de los diagramas de interacción para columnas de concreto reforzado

DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN ADIMENSIONALES

Con frecuencia, es útil expresar los diagramas de interacción de manera adimensional. Esto puede llevarse a cabo dividiendo los valores de fuerza axial, P_n o ϕP_n , entre el área de la columna, A_g , o entre $f'_c A_g$ (1/0.85 veces la capacidad de carga axial del concreto por sí sólo) y dividiendo los valores de momento, M_n o ϕM_n , entre $A_g h$ o entre $f'_c A_g h$ (el cual tiene unidades de momento). Una familia de dichas curvas se grafica en las figuras 9-21 y 9-22. Ayudas de diseño, incluyendo curvas similares a éstas, son publicadas por el American Concrete Institute y otras organizaciones. El uso de estos gráficos facilita la labor de diseño de columnas.

EXCENRICIDAD DE LA CARGA

En la figura 9-9 se mostró que una carga P , aplicada a una columna con una excentricidad e , era equivalente a una carga actuando en el centroide, más un momento $M = Pe$ alrededor del centroide. Un segmento radial a través del origen de coordenadas en el diagrama de interacción tiene una pendiente P/M o $P/Pe = 1/e$. Por ejemplo, la carga y el momento balanceados calculados en el Ejemplo 9-1 corresponden a una excentricidad de $50.8\text{Mg-m}/180\text{Mg} = 0.28\text{ m}$, y un segmento radial a través de este punto (punto B en la figura 9-18) tendría una pendiente de $1/0.28\text{ m}$. El caso de flexión pura puede ser considerado como de excentricidad $M/P = \infty$, debido a que $P = 0$.

En un diagrama de interacción adimensional tal como el de la figura 9-21, un segmento radial tiene una pendiente igual a $(P/A_g)/(M/A_g h)$. Sustituyendo $M = Pe$ muestra que el segmento tiene una pendiente h/e o bien, $1/(e/h)$, en donde e/h representa la razón de la excentricidad con respecto al ancho de la columna. En la figura 9-21 se presentan los segmentos radiales correspondientes a varias razones de excentricidad. En la figura 9-21 se presentan también segmentos a trazos que cortan los segmentos radiales. Estos corresponden a esfuerzos traccionales en las barras ubicadas en la cara de tracción de la columna iguales a $f_s = 0$, $f_s = -0.5f_y$ y $f_s = -f_y$. Se usan para el diseño de empalmes en columnas.

COLUMNAS ASIMÉTRICAS

Si la sección transversal de la columna es simétrica alrededor del eje de flexión, el diagrama de interacción es simétrico alrededor del eje $M = 0$, como se puede ver en la figura 9-23a. Para columnas asimétricas, el diagrama tiene una inclinación como se muestra en la figura 9-23b, siempre y cuando los momentos sean calculados con respecto al centroide geométrico. El cálculo del diagrama de interacción se lleva a cabo siguiendo el mismo procedimiento utilizado en el Ejemplo 9-1, excepto que para los casos de deformaciones uniformes de tracción y compresión (P_o y P_t), la distribución asimétrica del refuerzo da origen a un momento de las fuerzas del acero alrededor del centroide. La figura 9-23a muestra el diagrama de interacción para la columna de la figura 9-17a y es igual al diagrama nominal mostrado en la figura 9-18. El diagrama de la figura 9-23b está hecho para una sección similar con 4 barras #9 en una cara y 2 barras #9 en la cara opuesta. Para momento positivo, la cara con 4 barras está en tracción. Como resultado, la carga balanceada para momento positivo es menor que la del momento negativo.

De manera similar, una deformación unitaria uniforme de 0.003 a lo largo de la sección, correspondiente a la capacidad máxima de carga axial, conduce a un momento, ya que las fuerzas en las dos capas de acero no son iguales.

9.4.4 Diagramas de interacción simplificados

En general, un diseñador tiene acceso a diagramas de interacción impresos o a programas de cómputo que calculan diagramas para usar en el diseño. Ocasionalmente esto no es

cierto, como por ejemplo en el diseño de pilas huecas de puentes, ductos de ascensores, o elementos de formas no convencionales. Los diagramas de interacción para tales elementos pueden ser calculados usando la solución mediante compatibilidad de deformaciones. En la mayoría de los casos es suficiente con representar el diagrama como una sucesión de segmentos rectos que unen los valores de carga y momento correspondientes a los cinco puntos mostrados en la figura 9-24. Estos puntos corresponden a las siguientes distribuciones de deformaciones unitarias:

1. Deformación unitaria uniforme de compresión de 0.003. Esto marca el punto 1 de la figura 9-24.
2. Distribución de deformación unitaria correspondiente a agrietamiento incipiente, con deformación unitaria de compresión de 0.003 en una cara y deformación nula en la otra. Esto marca el punto 2 de la figura 9-24.
3. Distribución de deformación unitaria correspondiente a condición balanceada, y distribución de deformaciones límite para control por compresión, con deformación unitaria de compresión de 0.003 en una cara y deformación unitaria de $-\varepsilon_y$ en la capa de refuerzo más próxima a la cara de tracción (punto 3).
4. Distribución de deformación unitaria correspondiente a control por tracción, deformación de compresión de 0.003 en una cara y deformación de -0.005 en la capa de refuerzo más próxima a la cara opuesta sometida a tracción (punto 4).
5. Deformación unitaria uniforme de tracción de $-\varepsilon_y$ en el acero cuando el concreto está agrietado (punto 5).

En la figura 9-24 se compara el diagrama de interacción obtenido en el Ejemplo 9-1 con un diagrama de interacción dibujado uniendo los puntos descritos arriba. El diagrama de cinco puntos es suficientemente preciso como para ser utilizado en diseño.

Es difícil calcular el caso de la flexión pura directamente. Si se requiere de este dato para una sección simétrica, este se puede estimar como el mayor de (1) la capacidad a flexión ignorando el refuerzo en la zona de compresión, o (2) el momento calculado ignorando el concreto y suponiendo una deformación unitaria de $5\varepsilon_y$ en el refuerzo adyacente a cada cara. Para la columna del Ejemplo 9-1 la capacidad de flexión pura, M_{on} , obtenido mediante la solución de compatibilidad de deformaciones es de 32.7 Mg-m, a comparar con 31.4 obtenido usando la línea a trazos en la figura 9-22, 32.6 Mg-m calculado como una viga en donde se ignora el refuerzo de compresión, y 30.5 Mg-m como un par proveniente del acero cuando se ignora el concreto. Esta columna tiene un porcentaje de acero alto. La precisión de estas aproximaciones disminuye conforme ρ se acerca al mínimo permitido.

9.5 Diseño de columnas cortas

9.5.1 Tipo de cálculos—Análisis y diseño

Si se conoce la sección transversal y se necesita calcular la capacidad, se debe conducir un *análisis*.

Si se conocen la carga y el momento aplicados y es necesario seleccionar una sección que los resista, se debe conducir un *diseño*. ¿Cómo? Suponiendo una sección, analizando si es adecuada, adecuando si no lo es y analizando de nuevo.

En cada caso, la parte de análisis se lleva a cabo más fácilmente usando diagramas de interacción.

9.5.2 Factores que inciden en la escogencia de columnas

ESCOGENCIA DE TIPO DE COLUMNA

En la figura 9-26 se comparan los diagramas de interacción para tres columnas, cada una con la misma resistencia de concreto f'_c y de acero f_y , la misma área de acero longitudinal A_{st} y la misma área de sección bruta A_g .

Para razones de excentricidad $e/h < 0.1$ la columna helicoidal es más efectiva en términos de capacidad de carga axial.

Para razones de excentricidad $e/h > 0.2$ la columna de estribos con barras en las caras más alejadas del eje de flexión (o rectangular) es más efectiva en términos de capacidad de flexión.

Para razones intermedias se usan secciones cuadradas con refuerzo en todas las caras si existe flexión biaxial.

Las columnas helicoidales no son usadas frecuentemente en regiones no sísmicas ya que no se demanda mucha ductilidad.

ESCOGENCIA DE PROPIEDADES DE MATERIAL Y RAZÓN DE REFORZAMIENTO

Para edificios pequeños se usa la misma resistencia del concreto para entrepisos y columnas.

Para edificios altos, el concreto de las columnas es de mayor resistencia para reducir el tamaño de la sección transversal. La resistencia del concreto de la columna no puede ser mayor que 1.4 veces la del entrepiso para garantizar que el entrepiso pueda transmitir las cargas de las columnas. (Artículo 10.12 del ACI 318-08) Se puede usar 250 kg/cm^2 para el entrepiso y 350 kg/cm^2 para las columnas.

Usar grado 60 para acero de columnas.

Según Artículo 21.6.3.1 del ACI 318-08, para zonas de sismicidad de moderada a alta

$$0.01 < \rho_t (= A_{st}/A_g) < 0.06$$

Si se usa $\rho_t < 0.01$ puede haber fluencia del acero debido al flujo plástico del concreto ante cargas de servicio.

Si se usan empalmes por traslapo es muy difícil colocar una cantidad de acero superior a 0.05. Columnas de aros o estribos raras veces usan una razón superior a 3%. Las excepciones a esto son las columnas del primer nivel en edificios altos en donde puede haber limitaciones arquitectónicas. En esos casos se pueden aglomerar las barras.

Para columnas helicoidales se pueden usar razones de hasta 5%.

Artículo 10.9.2 del ACI 318-08:

Número mínimo de barras en una columna rectangular: 4. (usar números pares del mismo tamaño)

Número mínimo de barras en una columna circular: 6.

ESTIMACIÓN DEL TAMAÑO DE COLUMNA

Si se consideran columnas en donde domina la demanda de carga axial se puede tomar:

Para columnas con estribos o aros:

$$A_g \geq \frac{P_u}{0.40(f'_c + f_y \rho_t)} \quad (9-19a)$$

Para columnas helicoidales:

$$A_g \geq \frac{P_u}{0.50(f'_c + f_y \rho_t)} \quad (9-19b)$$

Ambas ecuaciones subestiman el área para cuando hay momentos presentes. Se recomienda usar incrementos de 5 cm en las dimensiones de la sección transversal. No hay límite al tamaño mínimo de columnas según la norma ACI, sin embargo, es conveniente usar 25 cm y nunca menos de 20 cm. Para columna helicoidal el diámetro no debe ser menor de 30 cm.

COLUMNAS ESBELTAS

$$\frac{k\ell_u}{r} \leq 34 - 12 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) \quad (9-20)$$

Tomar $k=1$ y $0.3 < r < 0.25$ veces el peralte de la sección transversal o el diámetro.

REQUISITOS DE ESPACIAMIENTO DE BARRAS

Valen los requisitos para elementos a flexión. Ver figura 9-27.

9.5.3 Empalmes de barra

En los edificios ubicados en zonas de sismicidad de moderada a alta, las barras longitudinales en las columnas se empalman en la mitad central de la altura de entresijos. Para elementos sujetos a flexo compresión, los empalmes por traslapo están regidos por el [Artículo 21.6.3 del ACI 318-08](#), los empalmes mecánicos o los empalmes por soldadura están regidos por los [Artículos 21.1.6 y 21.1.7](#), respectivamente.

Los requisitos para empalmes por traslapo varían dependiendo del estado de esfuerzos en la barra ante carga última. En elementos sujetos a flexo compresión pueden ocurrir esfuerzos traccionales en una cara de la columna, como se pudo ver en el Ejemplo 9-1. Los gráficos de interacción para diseño, como el de la figura 9-21, usualmente incluyen líneas indicando la excentricidad para la cual ocurren esfuerzos traccionales en la capa de acero más cercana a la cara traccionada de la columna. En la figura 9-21 se indican con trazos para $f_s = 0$, $f_s = 0.5f_y$ y $f_s = f_y$ (en tracción). El rango de excentricidades para las cuales se requieren diferentes tipos de empalmes se muestra esquemáticamente en la figura 9-28.

El detalle de los empalmes en columnas es importante por dos razones. Primero, porque es posible que de manera automática se tienda a especificar un empalme de compresión. Por lo tanto, si el esfuerzo último en la barra es de tracción, el empalme resultará inadecuado. Segundo, si se requieren empalmes por traslapo de Clase B, (figura 9-28), entonces las longitudes de empalme pueden resultar excesivas. Para barras mayores que No. 8 o No. 9 la longitud del empalme puede exceder los 1.5 m y ser por lo tanto la mitad o más de la altura de entresijos. Las longitudes de empalme se pueden minimizar escogiendo la barra de menor diámetro posible y la resistencia del concreto más alta posible.

9.5.4 Espaciamiento y requisitos constructivos de aros

En las columnas de concreto reforzado se utilizan estribos cerrados por cuatro razones:

1. Los estribos cerrados previenen el pandeo de las barras longitudinales hacia la superficie externa de la columna.

Normalmente, el [Artículo 7.10.5](#) propone límites al tamaño, espaciamiento y configuración de los estribos de manera que puedan proveer soporte a las barras. El tamaño menor de un estribo es No. 3 para barras hasta No. 10 y No. 4 para las barras de mayor tamaño o para las barras aglomeradas. El espaciamiento vertical de los estribos no puede exceder 16 diámetros de barra longitudinal, $16d_{b,long}$, de distancia entre apoyos, ni 48 diámetros de estribo, $48d_{b,trans}$, para garantizar que el área de sección transversal de los estribos permita desarrollar las fuerzas necesarias para restringir el pandeo de las barras longitudinales. El espaciamiento máximo está limitado también a la menor dimensión de la columna. Para edificaciones con CDS D, E o F se requieren espaciamientos mucho menores. ([Artículo 21.6.4 del ACI 318-08](#))

La figura 9-29 muestra los requisitos del **Artículo 7.10.5**. Una barra está bien apoyada por el estribo si se encuentra en una de las esquinas o a una distancia $x < 15$ cm de alguna esquina. Estribos en forma de diamante o de octágono no son inusuales. Presentan la ventaja de mantener el centro de la columna abierto de manera que se pueda colocar el concreto con vibración sin que lo impidan los ganchos. Los extremos de los estribos deben anclarse con dobleces de 135° más una extensión de $6d_{b,trans}$ en zonas sísmicas.

2. Los estribos cerrados sostienen la armadura durante el proceso constructivo.
3. Los estribos cerrados debidamente detallados confinan el núcleo de concreto para un incremento de la ductilidad.
4. Los estribos cerrados sirven de refuerzo de cortante para la columna.

CANTIDAD DE ESPIRALES Y REQUISITOS DE ESPACIAMIENTO

El refuerzo helicoidal mínimo requerido por ACI fue escogido de manera que la segunda carga máxima alcanzada por el núcleo junto con el refuerzo longitudinal sea aproximadamente igual a la carga máxima inicial de la columna antes de que el recubrimiento se desprenda (ver figura 9-5A(a)). La figura 9-4 muestra que el núcleo de la columna helicoidal está sometido a compresión triaxial. Además, la ecuación 9-1 indica que la resistencia del concreto se ve incrementada por esta compresión.

La **ecuación (10-5) del ACI 318-08**

$$\rho_s = 0.45 \left(\frac{A_g}{A_{ch}} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_{yt}} \quad (9-21)$$

garantiza que se alcanza la segunda carga máxima mostrada en la figura 9-5A(a). Sin embargo, existe evidencia experimental de que se podría requerir más refuerzo helicoidal en columnas helicoidales de concreto de alta resistencia del que se especifica en la ecuación 9-19 para asegurar una falla dúctil.

9.5.5 Ejemplos de diseño

Se presenta un ejemplo para ilustrar el diseño de una sección transversal de columna.

Ejemplo 9-2 Diseño de columna para P_u y M_u dados

Diseñe una sección transversal de columna para soportar una carga axial $P_u = 350$ kips, un momento flexor $M_u = 110$ ft-kips y un cortante $V_u = 16$ kips. La columna es parte de un marco arriostrado con una altura libre de 10 ft 6 in.

Solución:

● Selección de propiedades de los materiales, tamaño inicial, y razón de refuerzo inicial.

Se seleccionan $f_y = 60$ ksi y $f'_c = 3$ ksi. El rango más económico de ρ_t es de 1 a 2 %.

Suponer que $\rho_t = 0.015$ como valor inicial. De la ecuación 9-17a,

$$A_g \geq \frac{P_u}{0.40(f'_c + f_y \rho_t)} = \frac{350}{0.40(3 + 60 \times 0.015)} = 224 \text{ in.}^2$$

Es decir, $A_g \geq 224 \text{ in.}^2$ o bien, una sección cuadrada de al menos 15.0 in. de lado. Como esta columna está sometida a momentos flexores en sus extremos, el resultado anterior subestima su tamaño. Se puede escoger una sección cuadrada de 16 in. de lado.

Para determinar una distribución de barras adecuada, se calcula la razón e/h :

$$e = \frac{M_u}{P_u} = \frac{110 \text{ ft-kips}}{350 \text{ kips}} = 0.314 \text{ ft}$$

Por lo tanto $e/h = 0.236$. Para este rango, la figura 9-26 indica que una columna con barras en dos caras sería la más eficiente. Usar columna de estribos cerrados con el refuerzo en dos caras.

Se puede despreciar el efecto de esbeltez de la columna si:

$$\frac{k\ell_u}{r} \leq 34 - 12 \left(\frac{M_1}{M_2} \right)$$

Como la columna forma parte de un marco arriostrado, $k \leq 1.0$. Además, normalmente se puede considerar que $-0.5 \leq M_1/M_2 \leq 0.5$. Se pueden usar entonces $k = 1$ y

$M_1/M_2 = 0.5$. Por lo tanto, el término izquierdo de la ecuación 9-18 resulta en

$$\frac{k\ell_u}{r} = \frac{1.0 \times 126 \text{ in.}}{0.3 \times 16 \text{ in.}} = 26.3$$

y el término derecho resulta en

$$34 - 12 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) = 34 - 12(+0.5) = 28$$

Como $26.3 < 28$, entonces la esbeltez se puede despreciar.

En resumen, se tiene una columna cuadrada de 16×16 in., de concreto de 3000 psi, con estribos cerrados y con el refuerzo de grado 60 ubicado en dos caras opuestas de la sección .

❷ Cálculo de γ .

Los diagramas de interacción de las figuras 9-21 y 9-22 están dibujados en términos de un valor particular del cociente γ , la distancia centro a centro de las capas externas de refuerzo sobre el peralte de la columna. Para estimar γ , suponer que las barras utilizadas son No. 8 y los estribos son No. 3. Para un recubrimiento de 1.5 in. libre hasta los estribos (ver figura 9-30),

$$\gamma = \frac{16 - 2(1.5 + 0.375 + 0.5)}{16} = 0.703$$

Como los diagramas de interacción están dados para $\gamma = 0.60$ y $\gamma = 0.75$ (ver figura 9-22), será necesario interpolar. Si se escogen barras que no sean No. 8, será necesario recalculer γ .

❸ Uso de diagramas de interacción para determinar ρ_t .

Se entra a los diagramas de interacción usando

$$\frac{\phi P_n}{A_g} = \frac{P_u}{A_g} = \frac{350}{16 \times 16} = 1.37$$

$$\frac{\phi M_n}{A_g h} = \frac{M_u}{A_g h} = \frac{110 \times 12}{16 \times 16 \times 16} = 0.322$$

De la figura 9-21 se tiene $\rho_t = 0.014$, y de la figura 9-22 se tiene $\rho_t = 0.013$. Usando interpolación lineal para calcular el valor para $\gamma = 0.703$:

$$\rho_t = 0.014 - 0.001 \times \frac{0.103}{0.15} = 0.0133$$

Si el valor de ρ_t calculado aquí excede 0.03 a 0.04, entonces se debe escoger un nuevo tamaño de sección. Si el valor de ρ_t es menor que 0.01, entonces se debe usar 0.01 (valor mínimo permitido por ACI) o se debe recalculer usando una sección más pequeña.

❹ Selección del refuerzo.

$$A_{st} = \rho_t A_g = 0.0133 \times 16 \times 16 = 3.41 \text{ in.}^2$$

Posibles combinaciones:

- 4 No. 9, $A_{st} = 4.00 \text{ in.}^2$, 2 en cada cara
- 8 No. 6, $A_{st} = 3.52 \text{ in.}^2$, 4 en cada cara
- 6 No. 7, $A_{st} = 3.60 \text{ in.}^2$, 3 en cada cara

Se escoge un número par de barras para que el refuerzo sea simétrico alrededor del eje de flexión. Se debe verificar que estas escogencias cumplan las reglas de espaciamiento. Usar una sección cuadrada de 16 in. con 6 No. 7.

⑤ Revisión de la capacidad de carga mínima.

P_u no debe exceder $\phi P_{n,max}$ dado en la ecuación 10-2 del ACI. Los límites horizontales superiores en los diagramas de interacción representan $\phi P_{n,max}$ y la sección escogida cae por debajo de estos límites superiores.

⑥ Diseño de empalmes por traslapo.

De los diagramas de interacción se puede leer que el esfuerzo en las barras adyacentes a la cara en tracción para $P_u/bh = 1.37$ y $M_u/bh^2 = 0.322$ es aproximadamente igual a $0.2f_y$ en tracción. Según los Art. 12.17.2.2 y 12.17.2.3 del ACI, el empalme debe ser Clase B si más de la mitad de las barras se empalman en cualquier sección o debe ser Clase A si la mitad o menos se empalman en un único lugar. Normalmente, todas las barras son empalmadas en una misma ubicación. Se supone que este es el caso. La longitud del empalme es $1.3\ell_d$. Según el [Artículo 12.2.2 del ACI 318S-08](#), ℓ_d para barras No. 7 es

$$\ell_d = \left(\frac{\psi_t \psi_e \lambda f_y}{20 \sqrt{f'_c}} \right) d_b = \left(\frac{60,000 \times 1.0 \times 1.0 \times 1.0}{20 \sqrt{3000}} \right) \times 0.875 = 47.9 \text{ in.}$$

Por lo tanto la longitud del empalme es $1.3\ell_d = 1.3 \times 47.9 = 62.3 \text{ in.}$

Este es un empalme muy largo. Es casi la mitad de la altura de entrepiso. Por esta razón, se cambia a 8 No. 6, cuatro en cada cara. El espacio libre entre las barras es de 3.08 in. lo cual excede $1.5d_b$. Para barras No. 6, ℓ_d es

$$\ell_d = \left(\frac{\psi_t \psi_e \lambda f_y}{25 \sqrt{f'_c}} \right) d_b = \left(\frac{60,000 \times 1.0 \times 1.0 \times 1.0}{25 \sqrt{3000}} \right) \times 0.75 = 32.9 \text{ in.}$$

Por lo tanto la longitud del empalme es $1.3\ell_d = 1.3 \times 32.9 = 42.7 \text{ in.}$ Usar 44 in.

⑦ Selección de estribos cerrados.

De acuerdo con el Art. 7.10.5.1 del ACI, se deben usar estribos No. 3 como mínimo. El espaciamiento requerido según el Art. 7.10.5.2 debe ser el valor menor que resulte de

$$16d_{b,\text{long}} = 16 \times \frac{3}{4} = 12 \text{ in.}$$

$$48d_{b,\text{trans}} = 48 \times \frac{3}{8} = 18 \text{ in.}$$

$$h_{\text{min}} = 16 \text{ in.}$$

Si $V_u > 0.5\phi V_c$, los estribos deben satisfacer los requisitos del capítulo 11 además de la sección 7.10.5 del ACI.

$$V_c = 2 \left(1 + \frac{N_u}{2000A_g} \right) \sqrt{f'_c} b_w d = 2 \left(1 + \frac{350,000}{2000 \times 16 \times 16} \right) \frac{\sqrt{3000} \times 16 \times 13.6}{1000} = 40.1 \text{ kips}$$

Como $V_u = 16$ kips es mayor que $0.5\phi V_c = 0.5 \times 0.75 \times 40.1 = 15.0$ kips entonces se debe cumplir con los artículos 7.10.5, 11.4.5.1 y 11.4.6.3 del ACI 318S-08.

De acuerdo con 11.4.5.1, el espaciamiento de estribos debe ser $s = d/2 = 13.6/2 = 6.8$ in., lo cual resulta menor que la exigencia del 11.4.6.3:

$$s_{\text{max}} = \frac{A_v f_{yt}}{0.75 \sqrt{f'_c} b_w} \leq \frac{A_v f_{yt}}{50 b_w}$$

$$s_{\text{max}} = \frac{2 \times 0.11 \times 40,000}{0.75 \times \sqrt{3000} \times 16} (= 13.4) \leq \frac{2 \times 0.11 \times 40,000}{50 \times 16} (= 11.0) \text{ in.}$$

Por lo tanto, se deben **usar aros No. 3 a 6 in. centro a centro**. Finalmente, para cumplir con el requisito del Artículo 7.10.5.3 del ACI 318-08 se debe añadir un gancho como se indica en la figura 9-30.

Resumen del diseño. Usar una columna cuadrada de 16 in. con 8 No. 6 de grado 60 y concreto de 3000 psi. Usar aros No. 3 grado 40 con gancho adicional a 6 in. centro a centro según figura 9-30. Empalmar por traslapeo todas las barras longitudinales 44 in. □

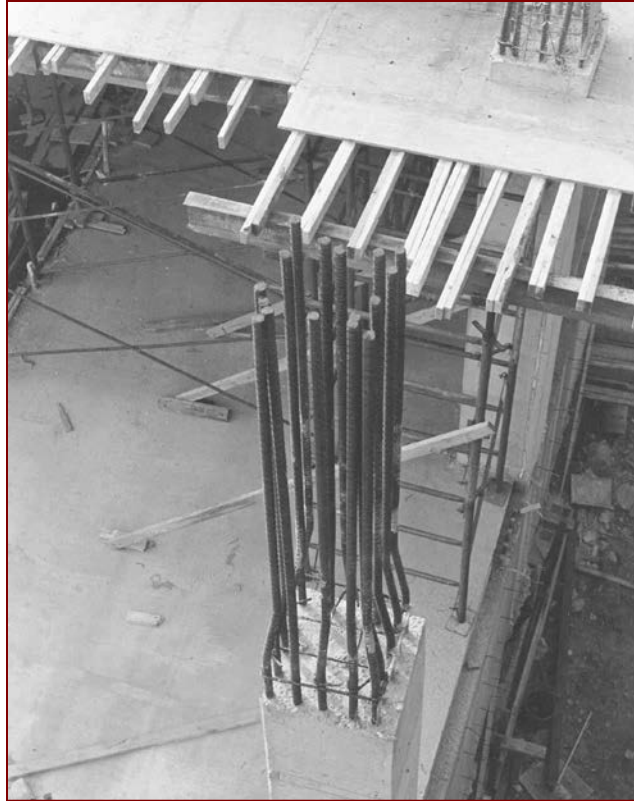


Figura 9–1 Columna con aros en construcción. (Fotografía cortesía de J. G. MacGregor)

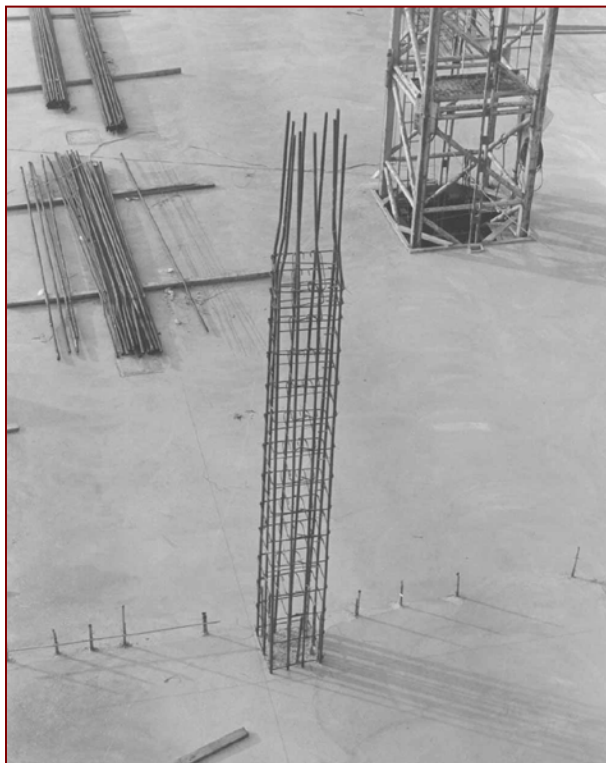


Figura 9–2 Canasta de armadura para columna con aros. (Fotografía cortesía de J. G. MacGregor)



Figura 9–3 Columna helicoidal. (Fotografía cortesía de J. G. MacGregor)

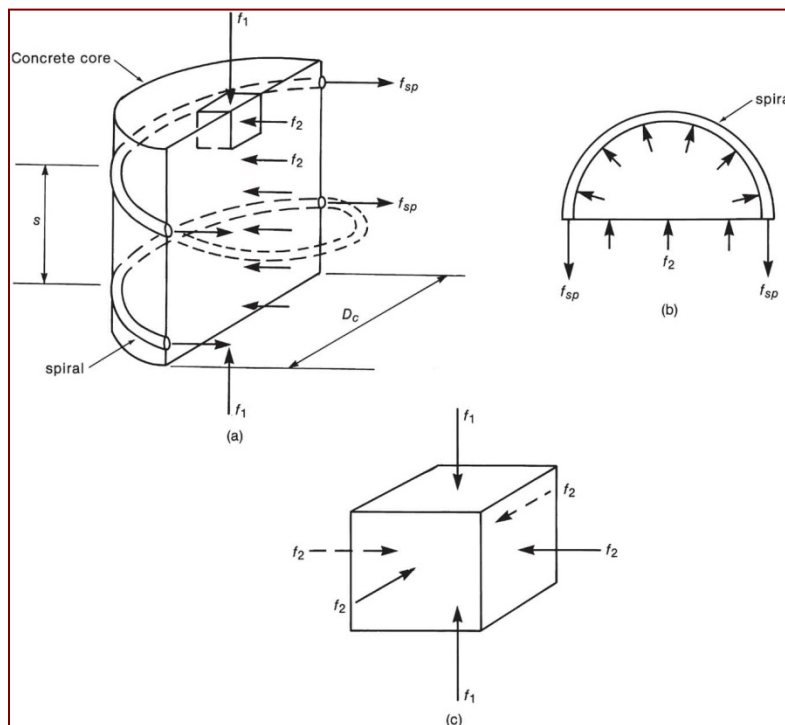
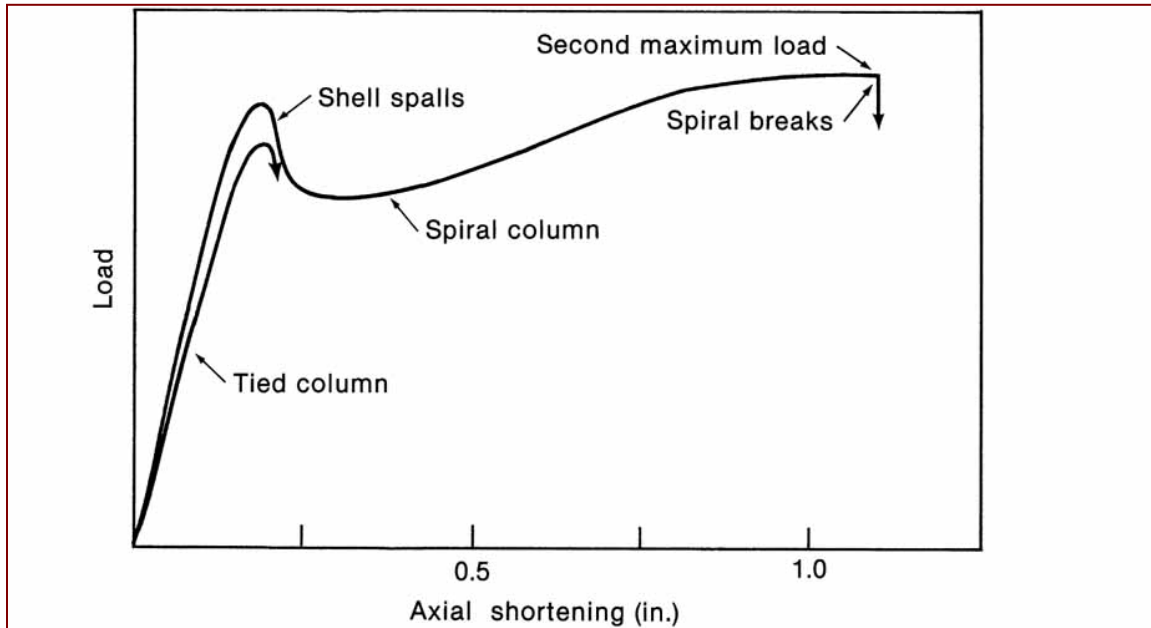
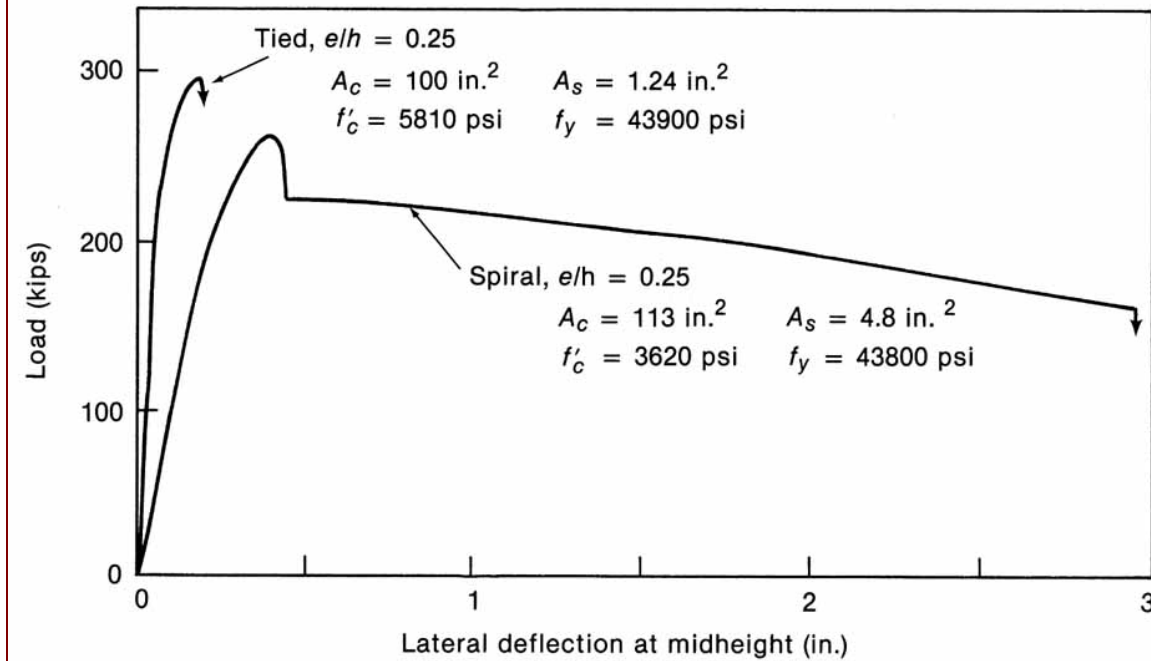


Figura 9–4 Esfuerzos triaxiales en núcleo de columna helicoidal.



(a) Axially loaded columns.



(b) Eccentrically loaded columns.

Figura 9-5A Curvas de carga vs. deformación para columnas helicoidales y de aros.

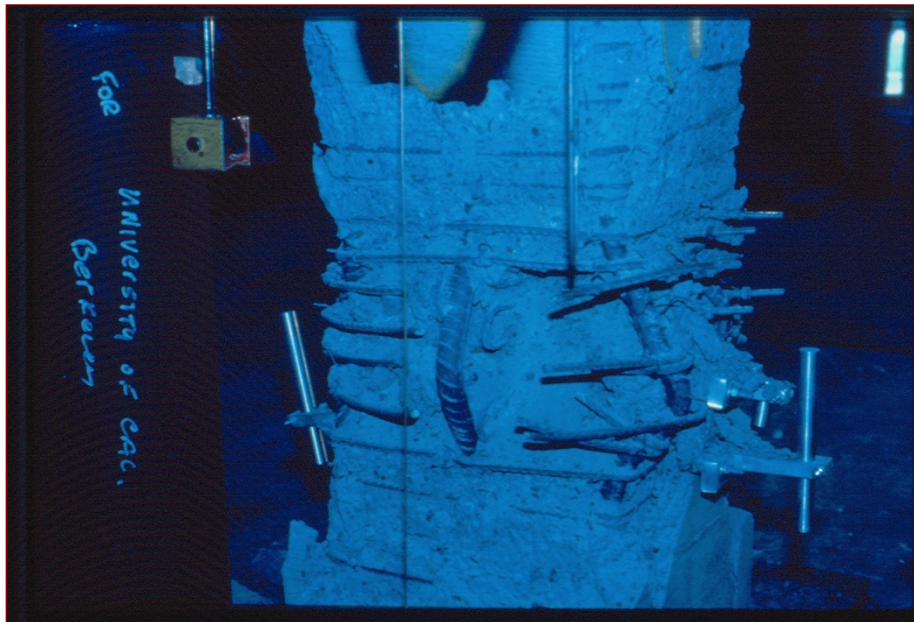
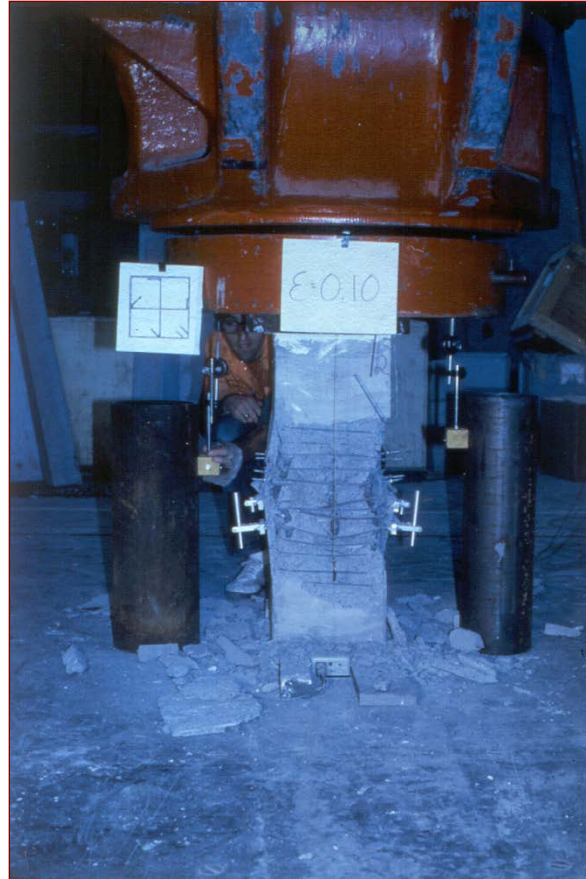


Figura 9-5B Prueba de laboratorio para columna con aros. (Fotografía cortesía de J. P. Moehle)



Figura 9–6 Columna con aros destruida durante el terremoto de San Fernando, CA 1971.
(Fotografía cortesía de NIST)

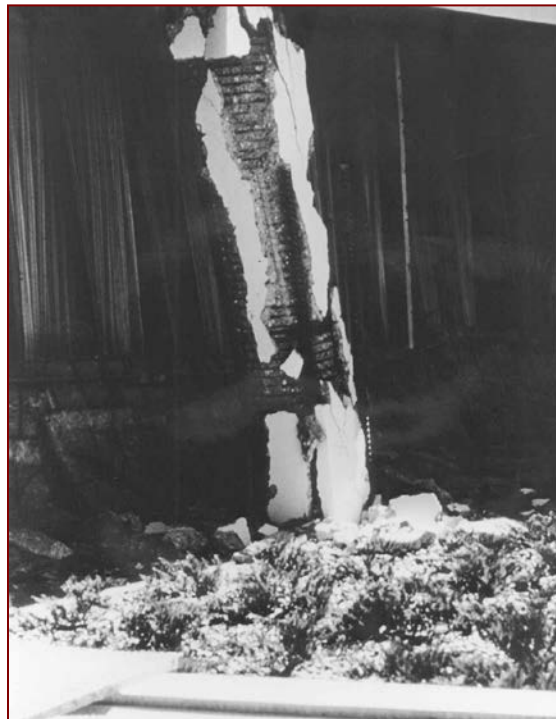


Figura 9–7 Columna helicoidal dañada durante el terremoto de San Fernando, CA 1971.
(Fotografía cortesía de NIST)

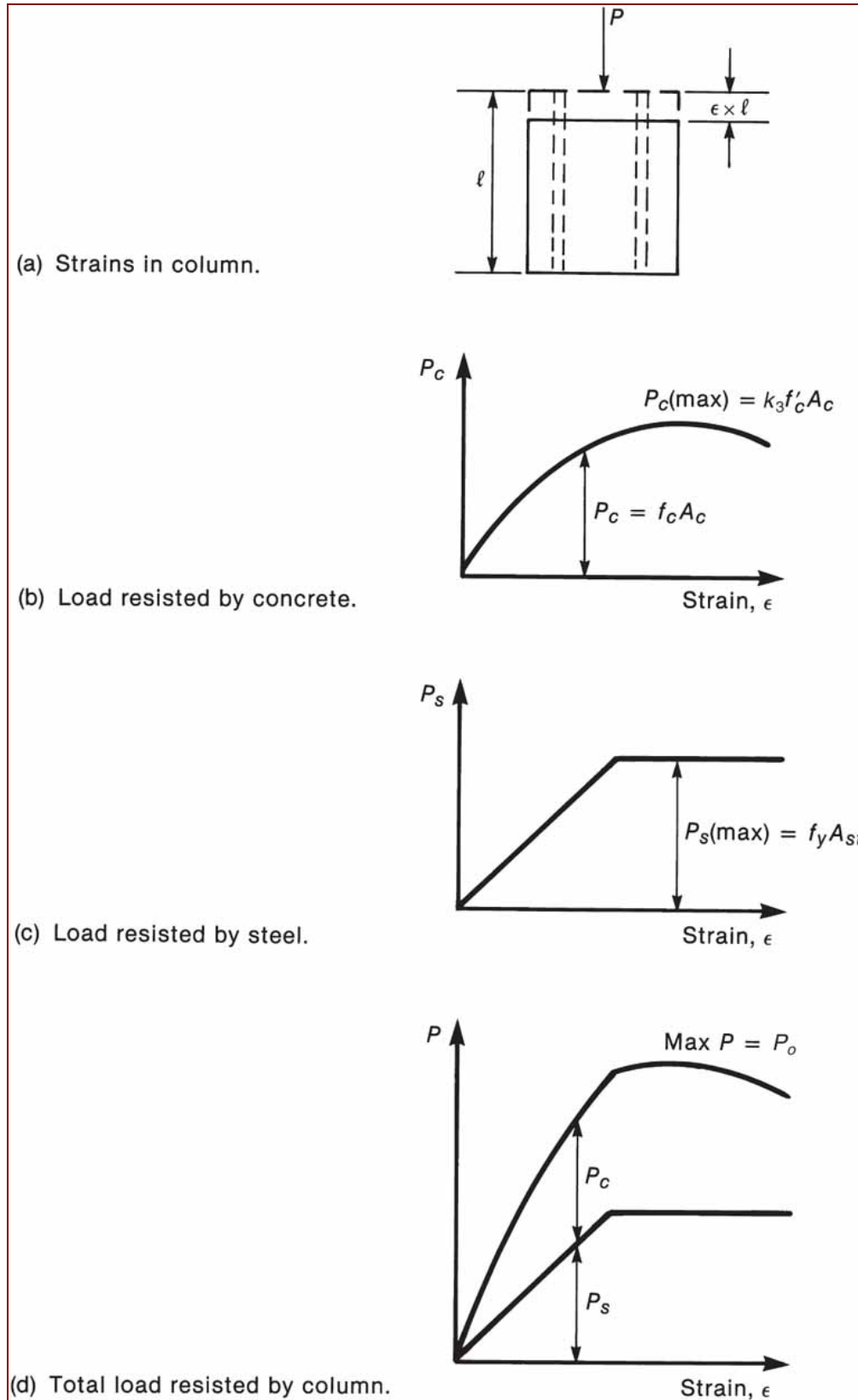


Figura 9–8 Resistencia de una columna cargada axialmente.

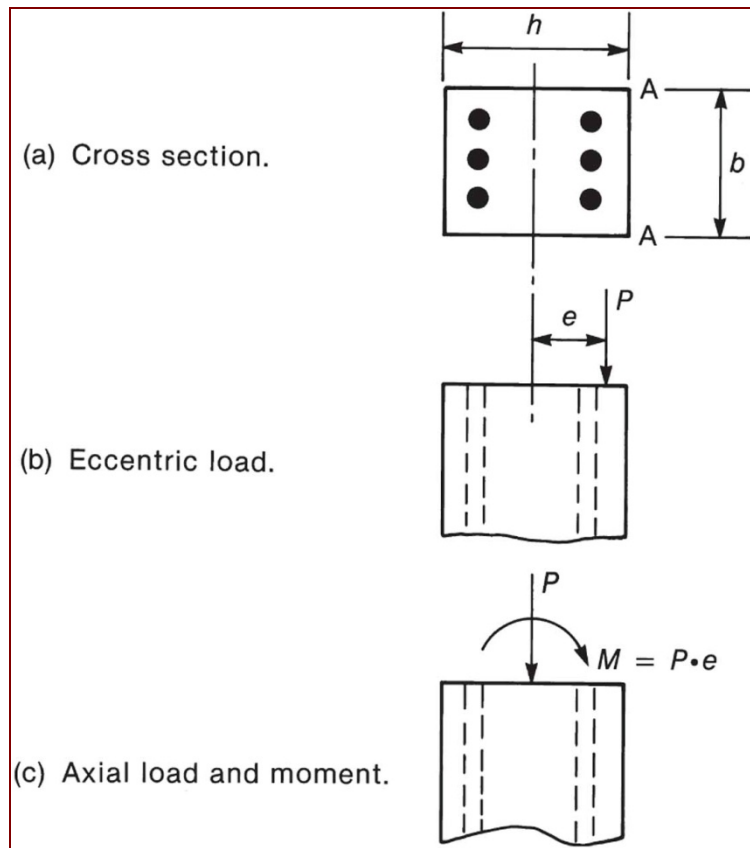


Figura 9-9 Carga y momento en una columna.

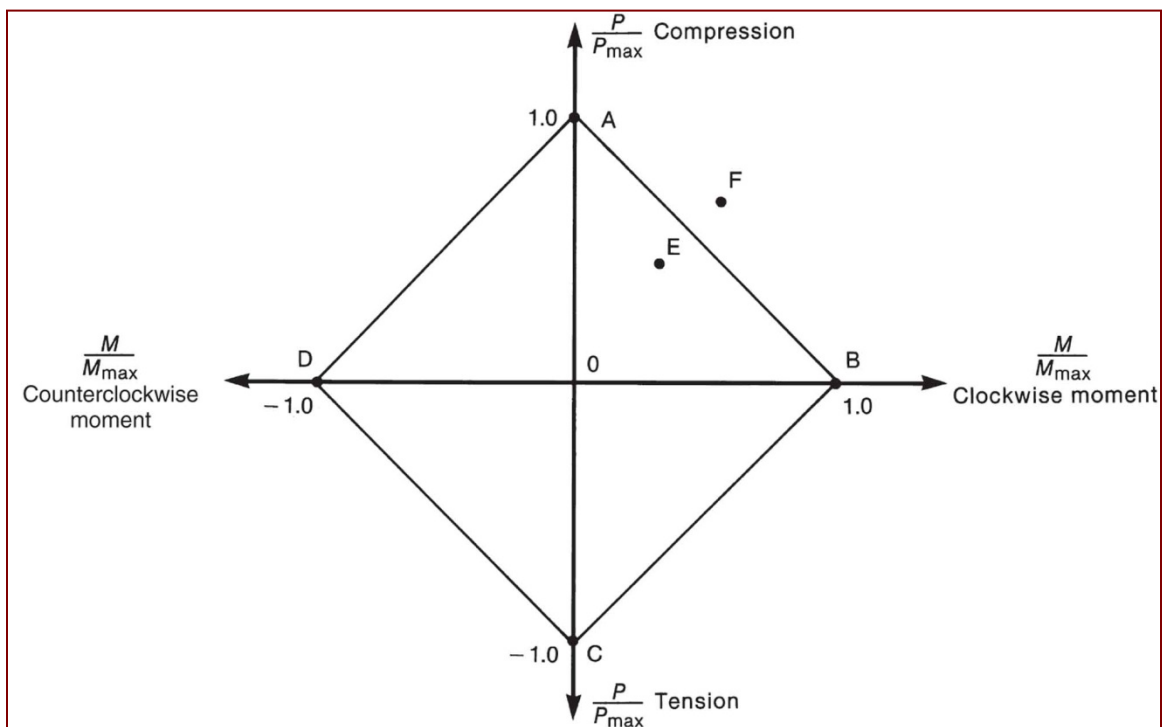


Figura 9-10 Diagrama de interacción para una columna elástica, $|f_{cu}| = |f_{tu}|$.

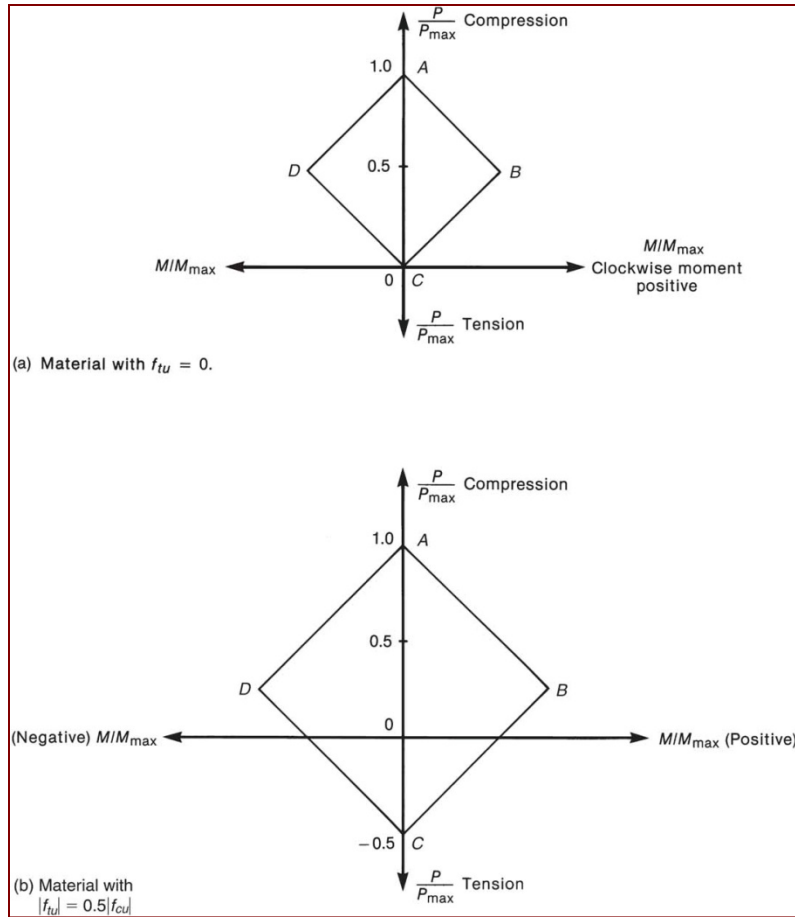


Figura 9–11 Diagramas de interacción para columnas elásticas, $|f_{cu}| \neq |f_{tu}|$.

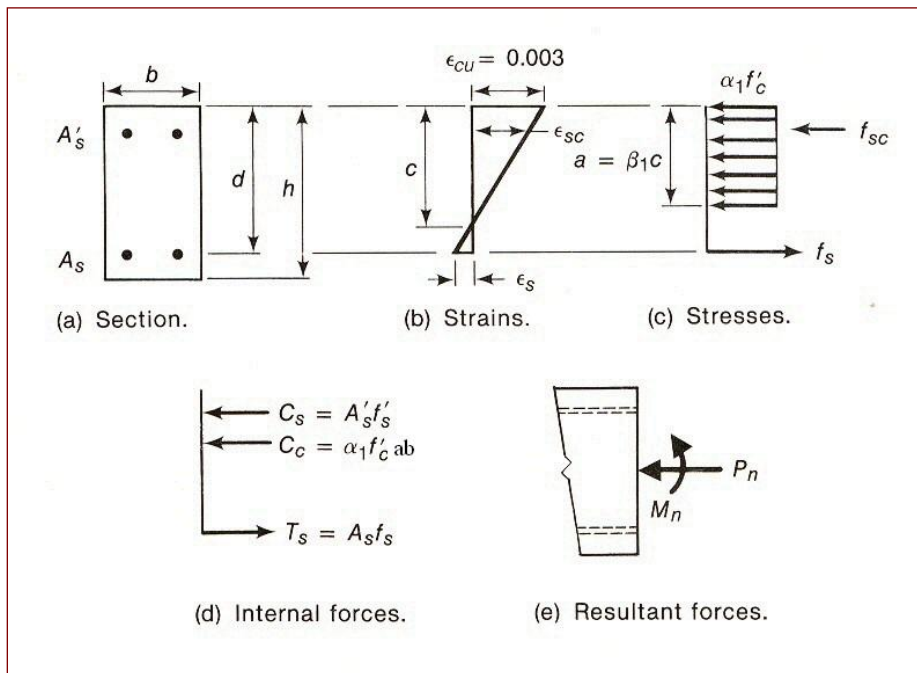


Figura 9–12 Cálculo de P_n y M_n para una distribución de deformaciones unitarias dada.

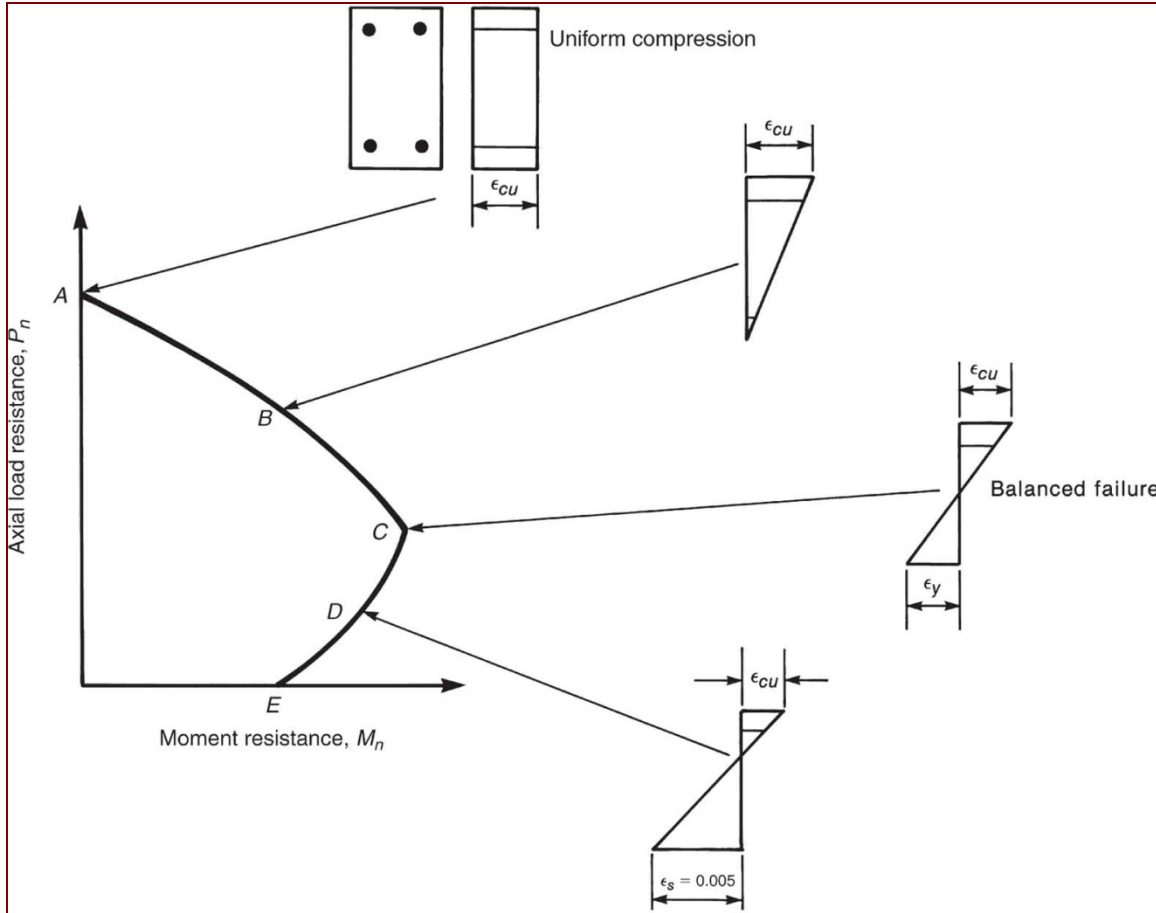


Figura 9–13 Distribuciones de deformaciones unitarias correspondientes a diferentes puntos en el diagrama de interacción.

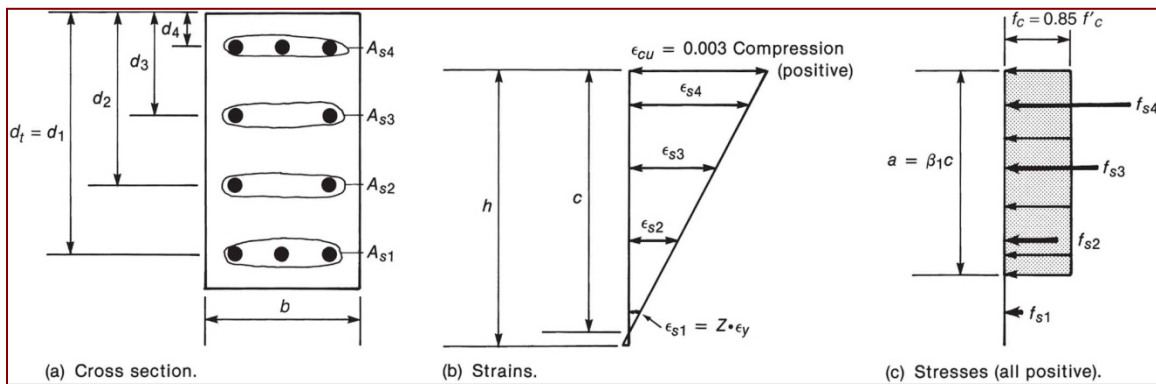


Figura 9–14 Notación y convención de signos.

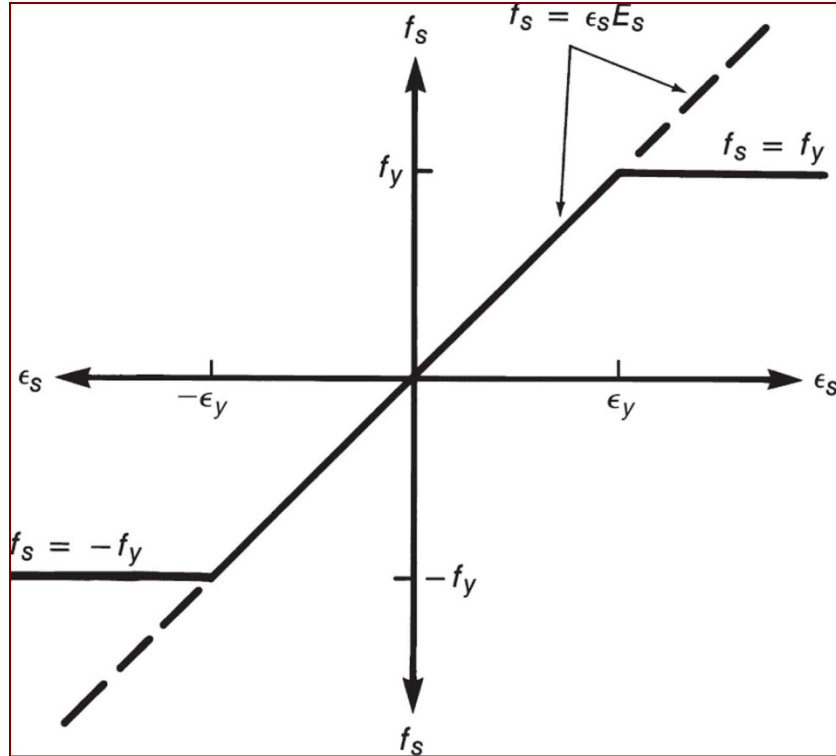


Figura 9-15 Cálculo de esfuerzos en el acero (Ec. 9-9).

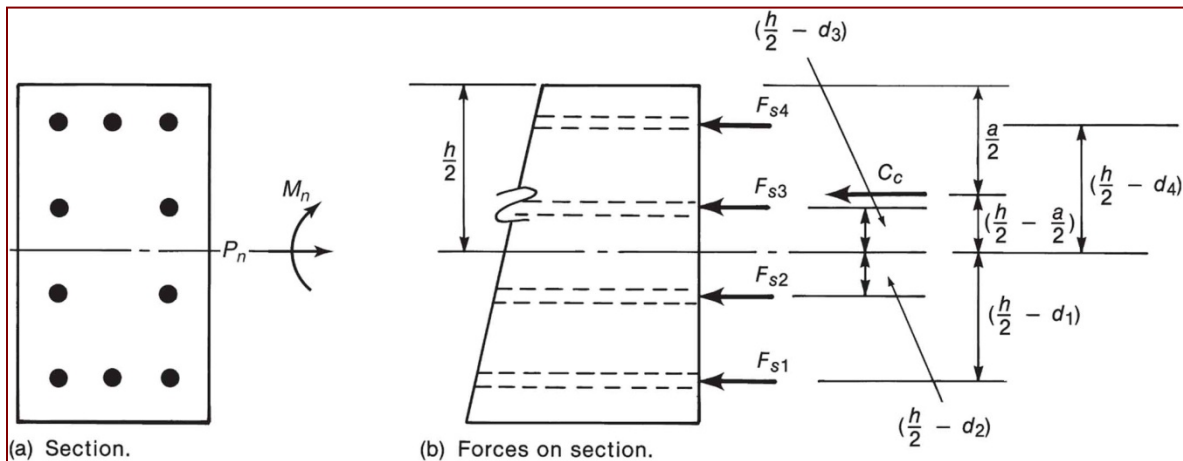


Figura 9-16 Fuerzas internas y brazos de palanca.

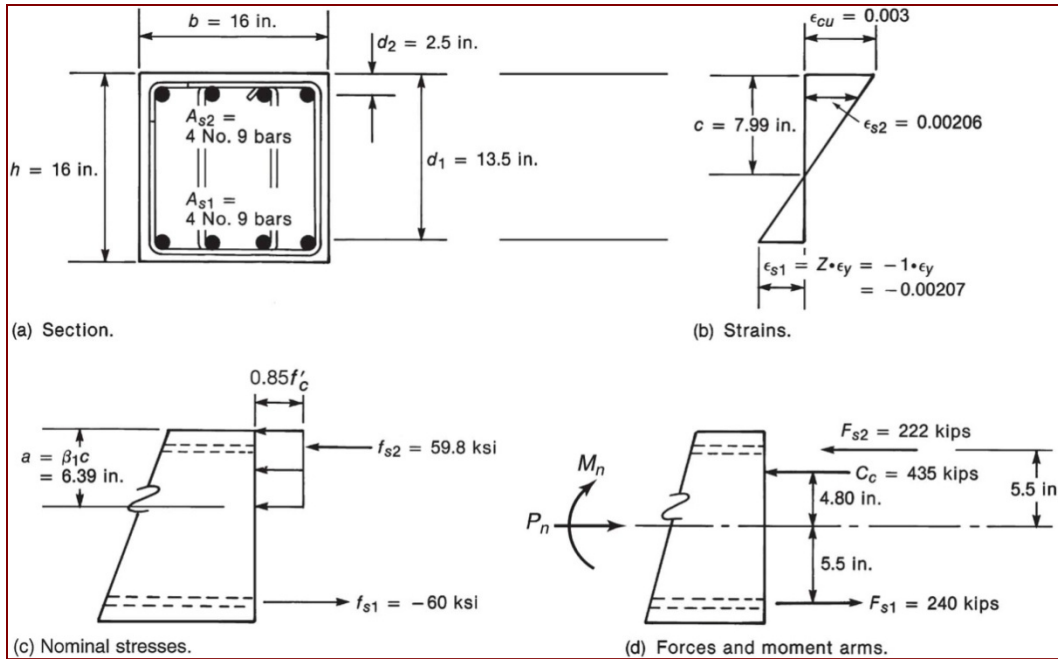


Figura 9-17 Cálculos—Ejemplo 9-1, $\epsilon_{s1} = -1\epsilon_y$, ($Z = -1$).

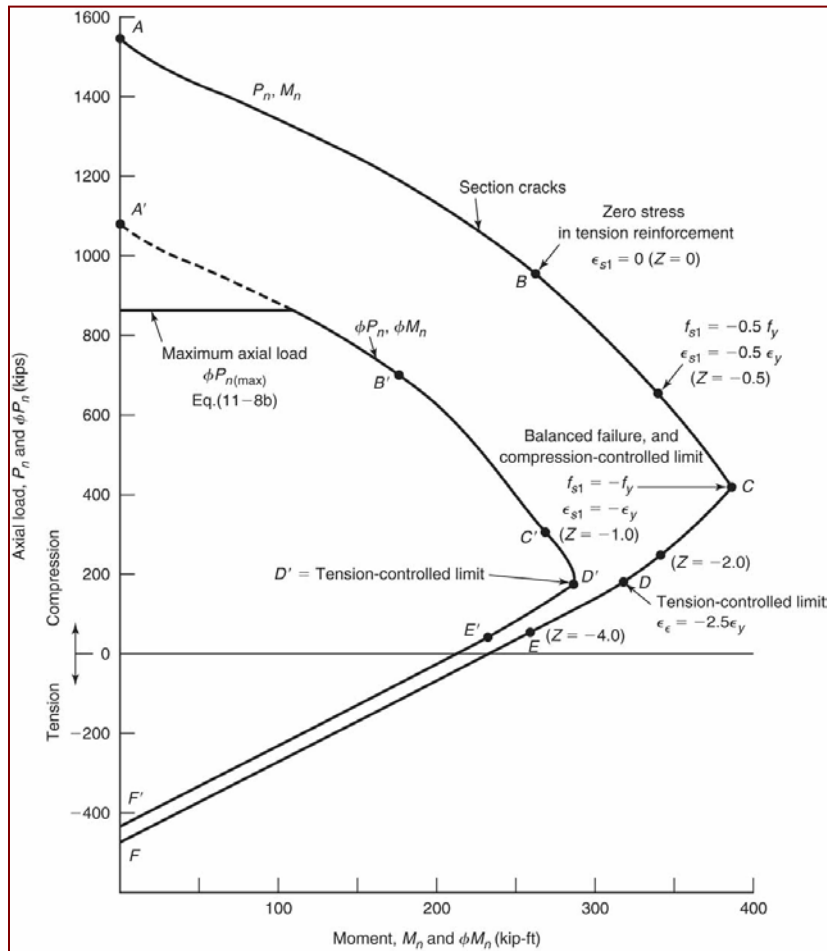


Figura 9-18 Diagrama de Interacción—Ejemplo 9-1.

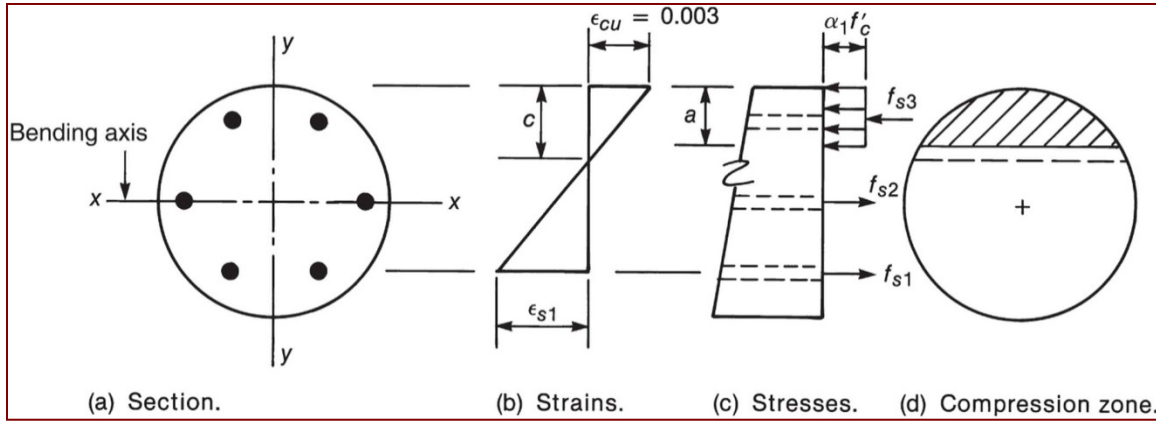


Figura 9-19 Columna circular.

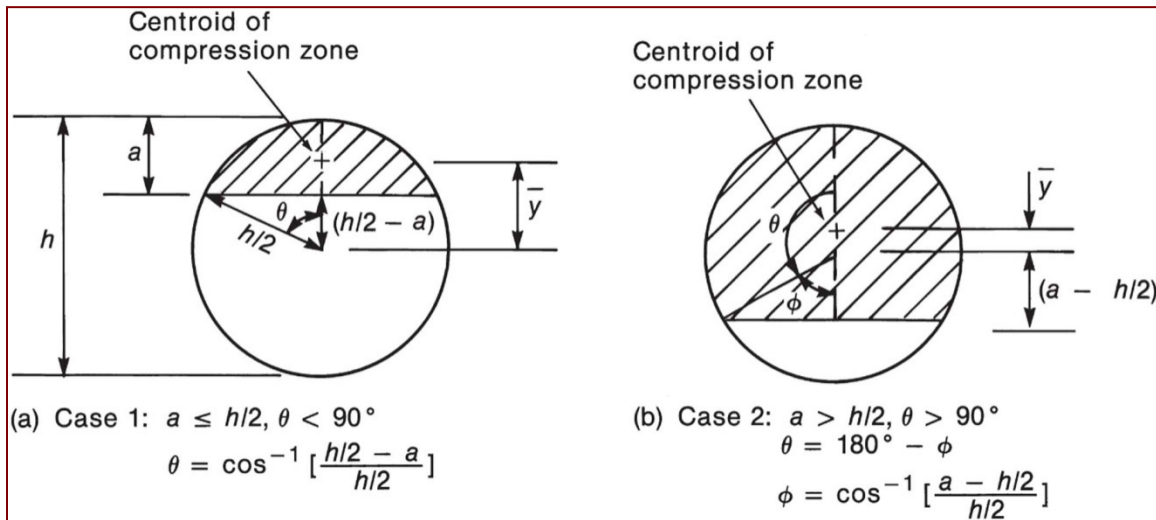


Figura 9-20 Segmentos circulares.

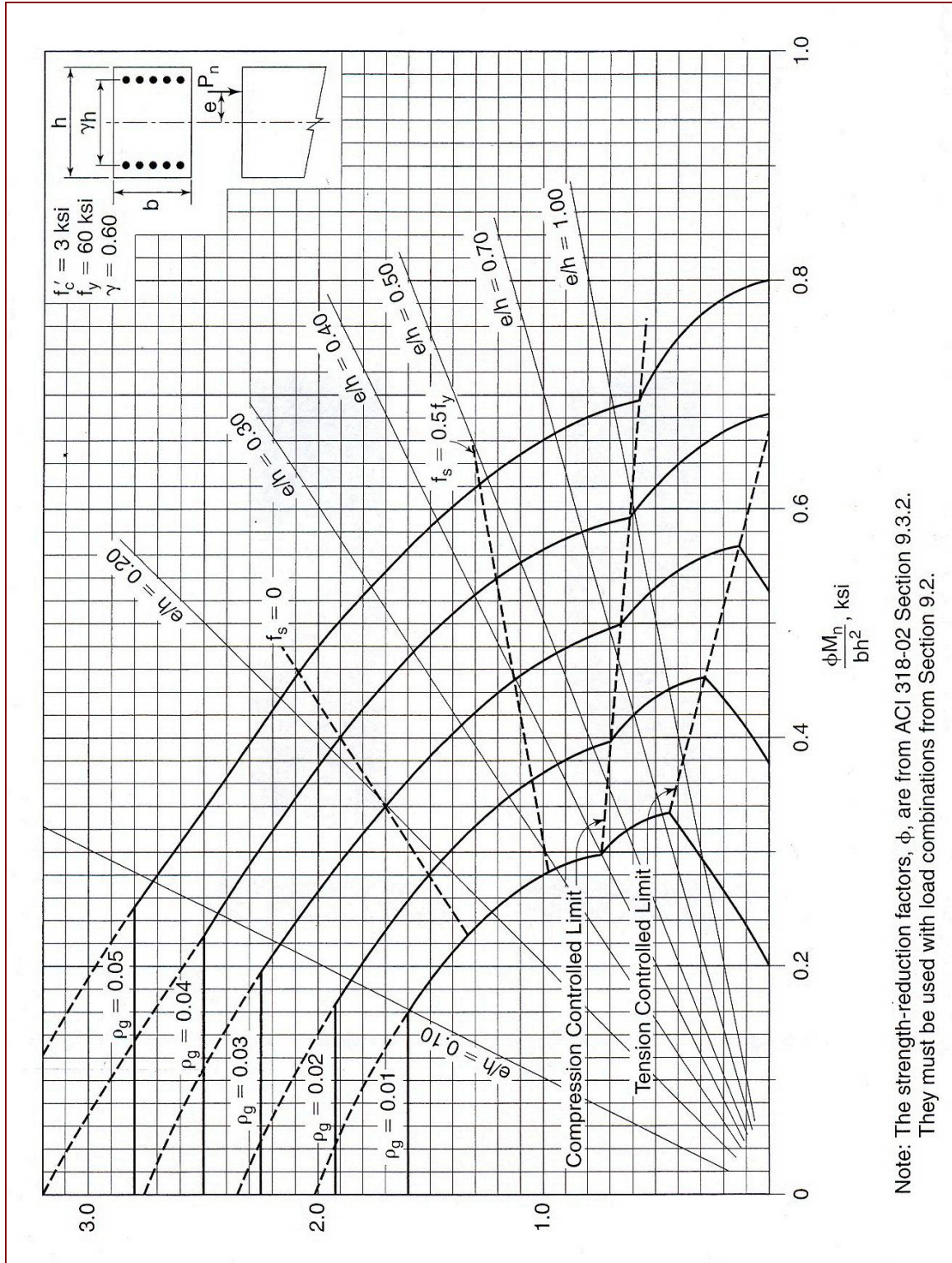


Figura 9-21 Diagrama adimensional de interacción para columnas con aros con barras en dos caras, $\gamma = 0.60$.

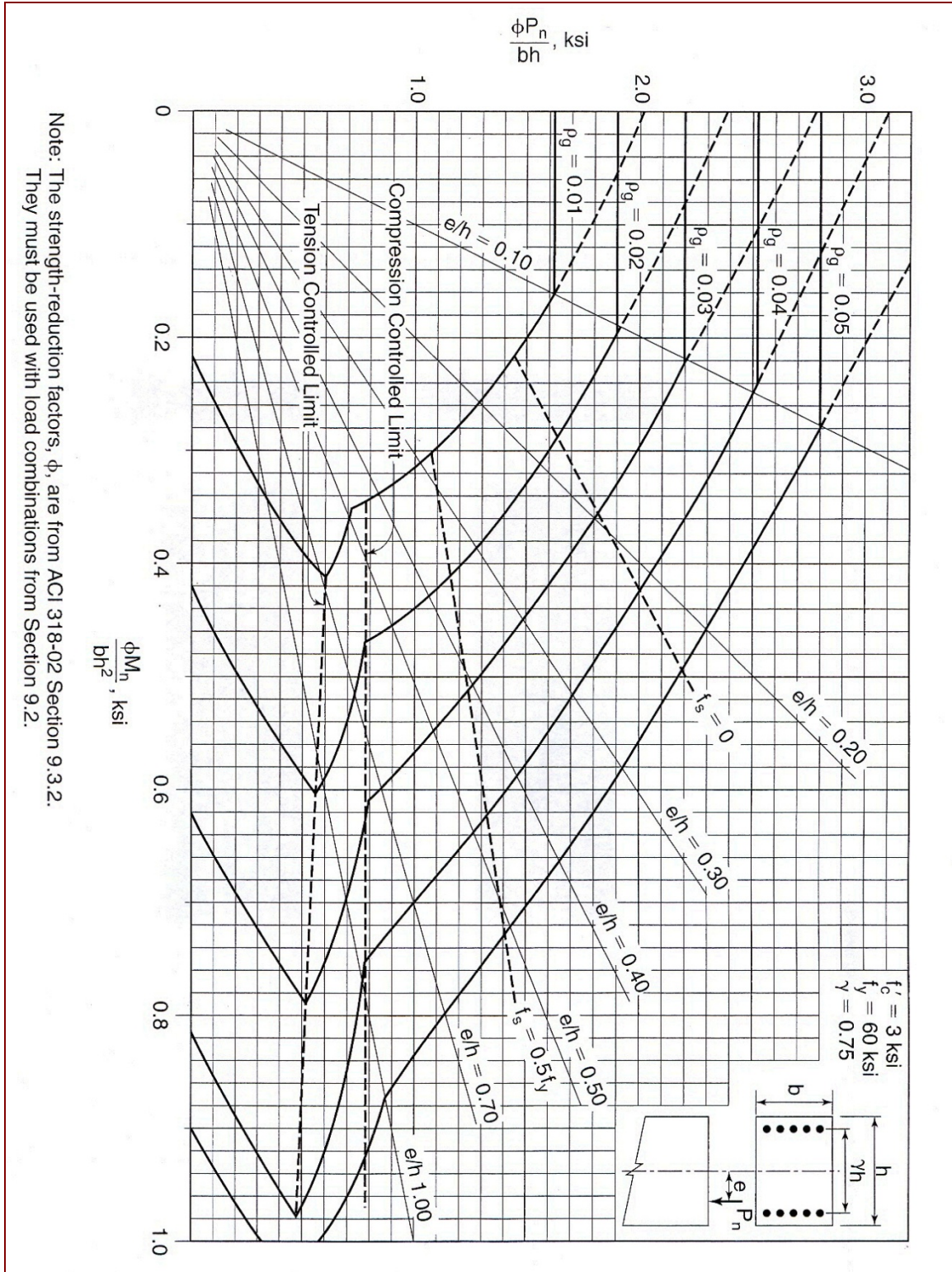


Figura 9-22 Diagrama adimensional de interacción para columnas con aros con barras en dos caras, $\gamma = 0.75$.

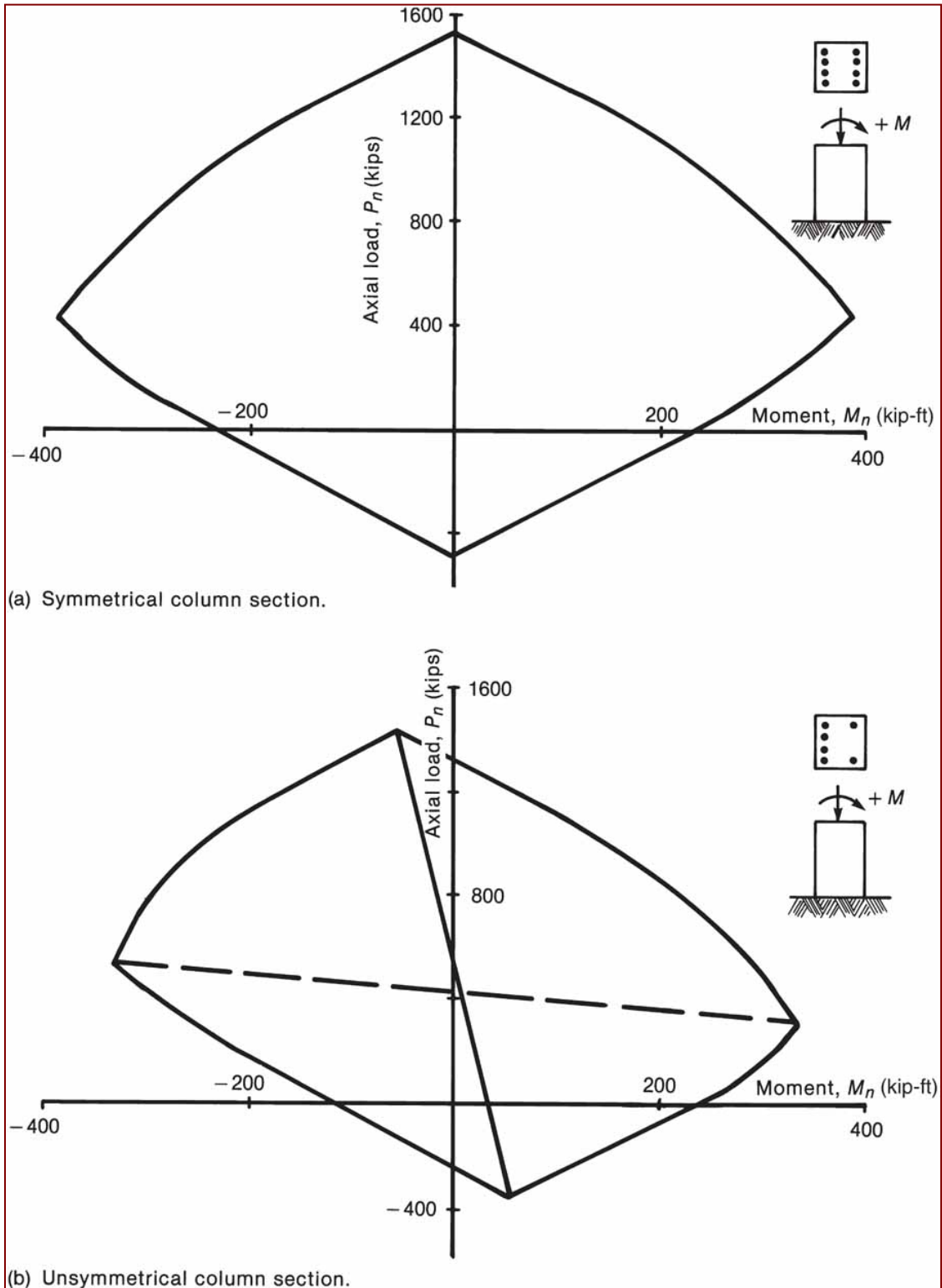


Figura 9–23 Diagramas de interacción para columnas simétricas y no simétricas.

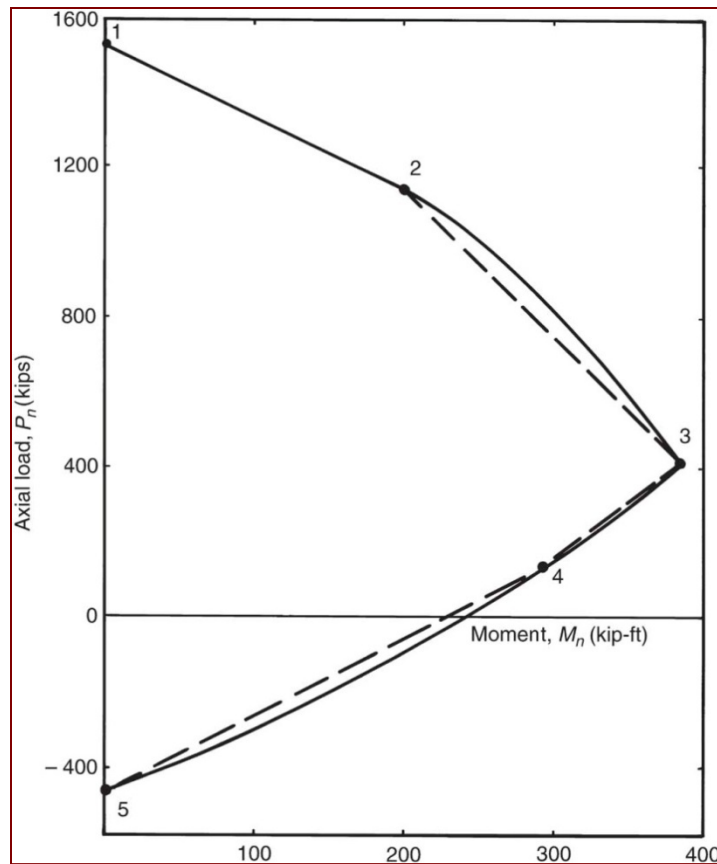


Figura 9–24 Diagrama de interacción simplificado.

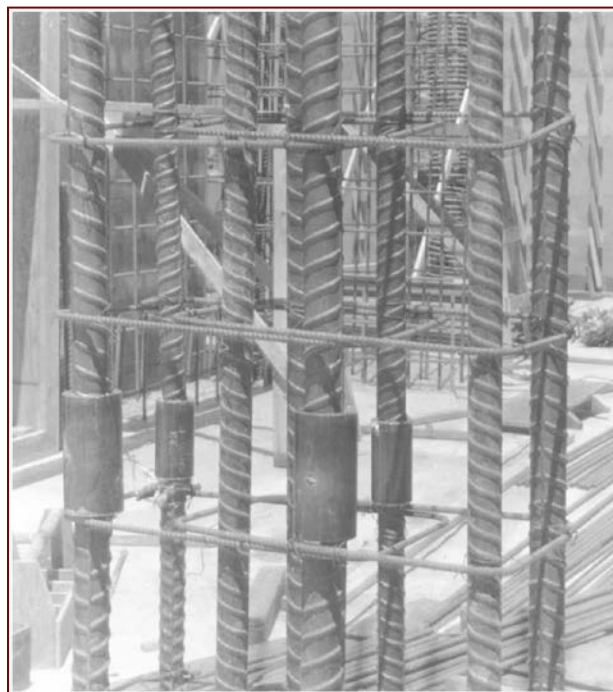


Figura 9–25 Empalme metálico: tracción o compresión. (Fotografía cortesía de Erico Products, Inc.)

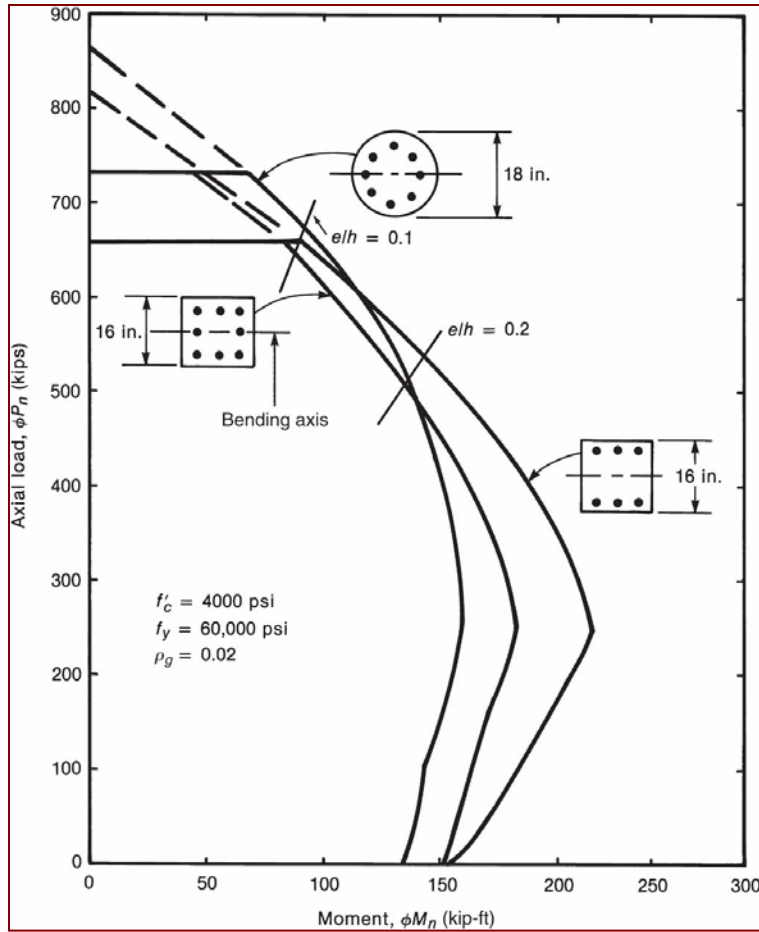


Figura 9–26 Efecto de tipo de columna sobre la forma del diagrama de interacción.

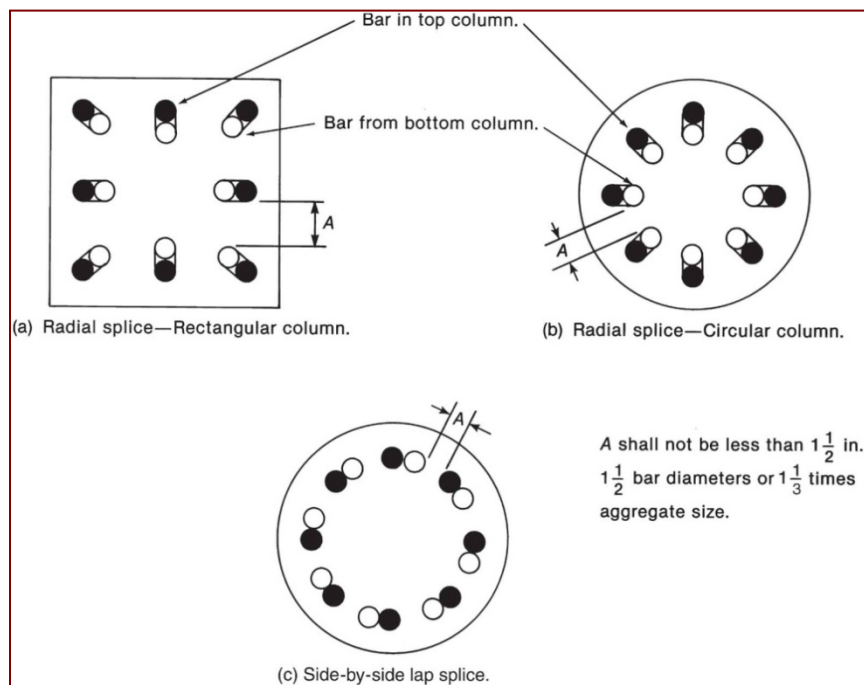


Figura 9–27 Arreglo de barras en empalmes por traslapeo en columnas.

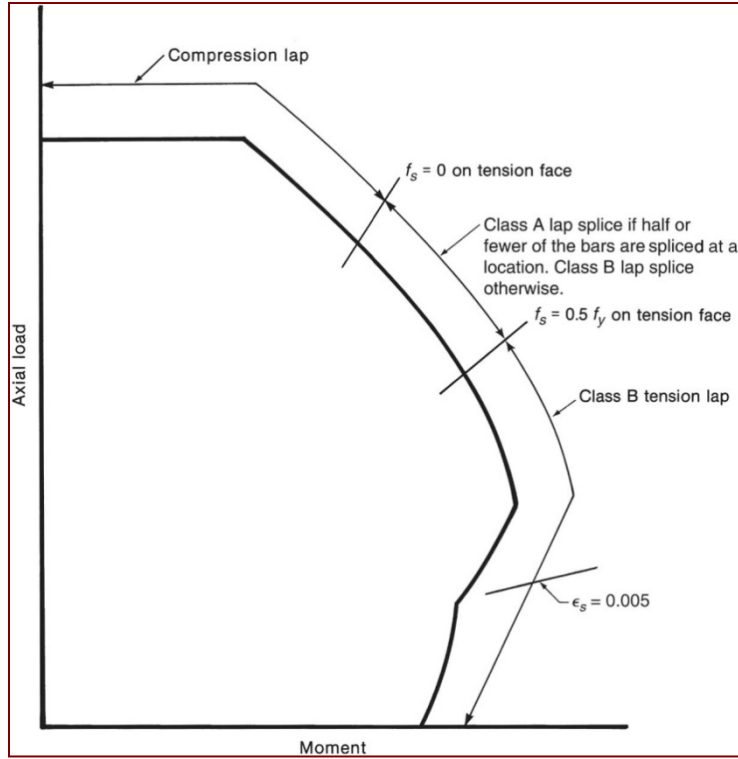


Figura 9–28 Tipos de empalmes por traslapo necesarios si todas las barras se empalman en cada piso.

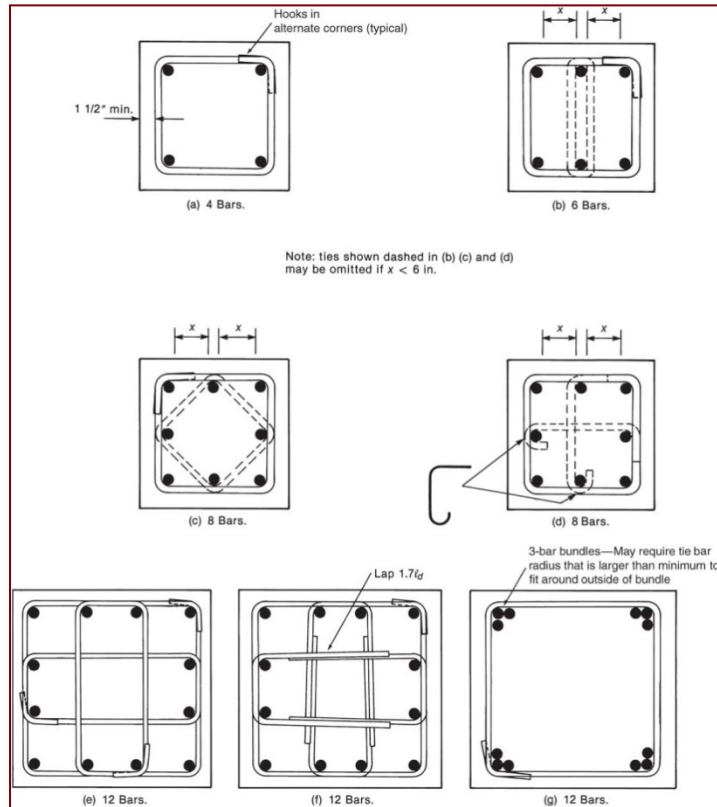


Figura 9–29 Configuraciones típicas de estribos.

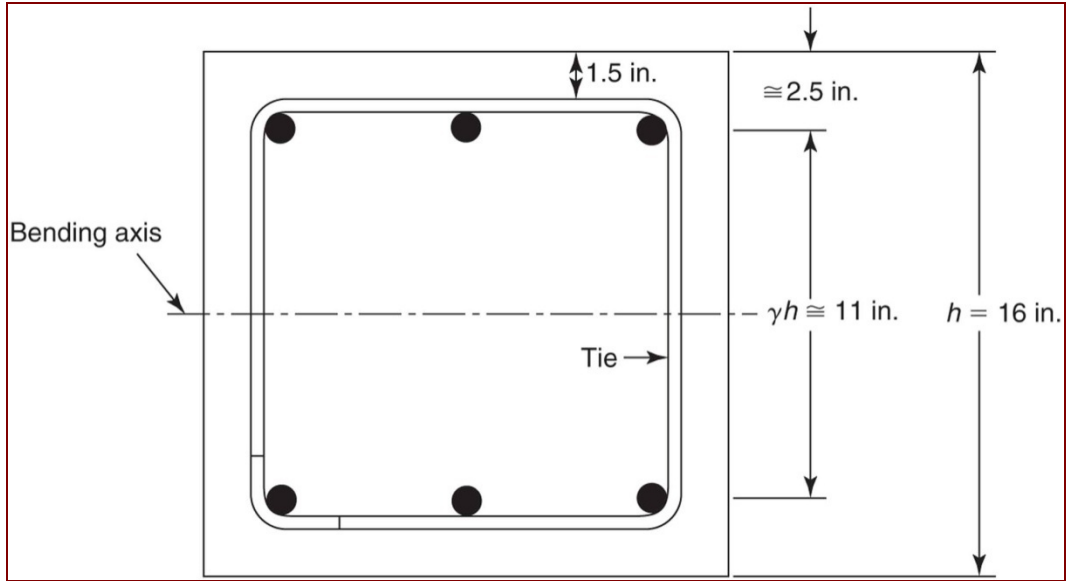


Figura 9-30 Cálculo de γ — Ejemplo 9-2.

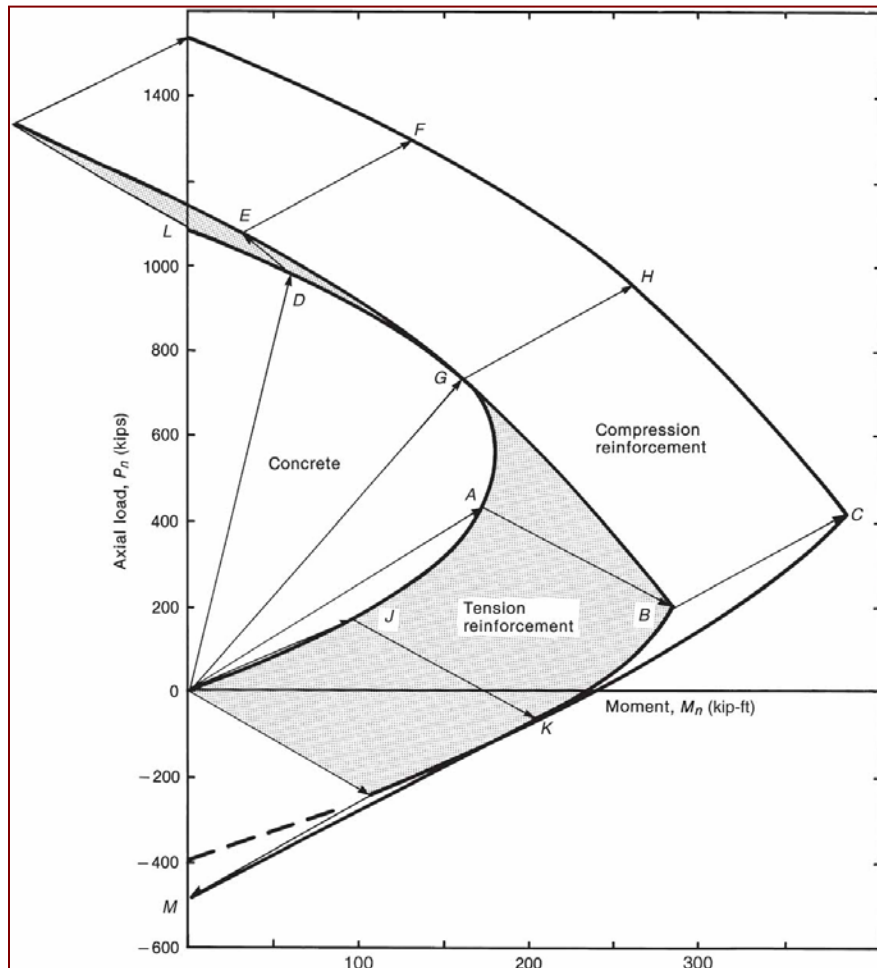


Figura 9-31 Componentes del diagrama de interacción — Ejemplo 9-1.

10. LOSAS EN DOS DIRECCIONES: COMPORTAMIENTO, ANÁLISIS Y DISEÑO

10.1 Introducción

Los sistemas estructurales consistentes de vigas continuas involucran el uso de losas en una dirección que acarrear la carga hacia las vigas. Si se incorporan las vigas dentro del peralte de la losa misma, se obtiene como resultado un sistema como el que se muestra en la Fig. 10-1. En ese caso, la losa distribuye cargas en dos direcciones. La carga en *A* puede pensarse como distribuida hacia *B* y *C* mediante una banda de losa, y de *B* hacia *D* y *E* y así sucesivamente por medio de otras bandas de losa. Como la losa debe transmitir cargas en dos direcciones, se le denomina *losa en dos direcciones*.

Las losas en dos direcciones representan una forma estructural única del concreto reforzado entre los principales materiales estructurales. Es eficiente, económica y ampliamente usada en sistemas estructurales. En la práctica las losas en dos direcciones se presentan en varias formas. Para cargas relativamente bajas, como las de los apartamentos y edificios similares, se usan *placas planas*. Como se puede ver en la Fig. 10-2a, esta placa es simplemente una losa de espesor uniforme apoyada sobre columnas. En un edificio de apartamentos la parte superior de la losa sería alfombrada y la parte inferior tendría un acabado de cielo raso del apartamento inferior. Las placas planas son más económicas para luces de 4.5 a 6 m.

Para luces más grandes, el espesor requerido para transferir el cortante de las cargas verticales hacia las columnas excede al requerido para flexión. Como resultado, el concreto en la zona central del panel no es usado eficientemente. Para aliviar la losa, para reducir los momentos y para ahorrar material, la losa en la parte central puede sustituirse con nervaduras perpendiculares como las que se muestran en la Fig. 10-2b. Se debe notar que cerca de las columnas, se retiene la profundidad completa de la losa para transferir el cortante de las cargas de la losa hacia las columnas. A este tipo de losa se les denomina *losa nervada* (o sistema de *viguetas en dos direcciones*) y se le da forma mediante encofrado de fibra de vidrio o domos de metal. Las losas nervadas se usan para luces de 7.5 a 12 m.

Para cargas altas en usos industriales, se puede usar el sistema de *losa plana* mostrado en la Fig. 10-2c. En este caso, la transferencia de cortante hacia la columna se alcanza engrosando la losa alrededor de la columna con *ábacos* o ensanchando la columna mediante *capiteles*. El ábaco normalmente se extiende un sexto de la luz en ambas direcciones desde la columna, dando resistencia y rigidez adicionales en la región de la columna sin necesidad de aumentar el volumen de concreto en el centro de la luz. Las *losas planas* se usan para cargas en exceso de 500 kg/m^2 y para luces de 6 a 9 metros. Capiteles como los mostrados en la Fig. 10-2c son menos comunes hoy en día que lo que fueron en la primera mitad del siglo pasado, debido al costo del encofrado. El sistema de

losas puede incorporar vigas entre algunas o entre todas las columnas. Si los paneles resultantes son aproximadamente cuadrados, el sistema se denomina *losa con vigas en dos direcciones* (Fig. 10-2d).

10.2 Antecedentes históricos de las losas en dos direcciones

Uno de los capítulos más interesantes en el desarrollo de las estructuras de concreto reforzado concierne a las losas en dos direcciones. Debido a que la mecánica de la acción de losa no se entendía bien cuando se construyeron las primeras losas, surgieron sistemas patentados a la par de métodos semiempíricos de diseño. Los trabajos publicados en los Estados Unidos sobre losas generaron copiosas y coloridas discusiones, con cada dueño de patente intentando probar que sus teorías estaban correctas y todas las demás equivocadas.

No está claro quienes construyeron las primeras losas planas. En su excelente resumen de la historia de las losas, Sozen y Siess (Sozen & Siess, 1963) sostienen que la primera verdadera losa plana estadounidense fue construida por C.A.P. Turner en 1906 en Minneapolis. En ese mismo año, Maillart construyó una losa plana en Suiza. Las losas de Turner eran conocidas como losas hongo porque las columnas se ensanchaban para sostener la losa, la cual tenía acero colocado en bandas en cuatro direcciones (i.e., dos direcciones ortogonales y las diagonales). Estas bandas se doblaban hacia abajo desde la parte superior de la losa encima de las columnas hacia la parte inferior en el centro de la losa. Parte del acero era doblado hacia abajo dentro de la columna, y se colocaban barras dobladas en círculo alrededor de las columnas (Fig. 10-3).

Los primeros edificios con losas se construyeron bajo el riesgo del diseñador, quien frecuentemente debía aportar una garantía por varios años y usualmente debía realizar pruebas de carga en las losas antes de que el cliente las aceptara. Turner basó sus diseños en los análisis realizados por H.T. Eddy, fundamentados en un análisis incompleto de la teoría de placas. En esta época, el uso de la analogía de viga transversal en diseño condujo a la equivocada creencia de que únicamente parte de la carga debía ser acarreada en cada dirección, de manera que la estática por alguna razón no aplicaba en la construcción de losas.

En 1914, J. R. Nichols (Nichols, 1914) usó la estática para calcular el momento total en un panel de losa. Este análisis es la base del diseño de losas en la norma **ACI 318** vigente y se presentará más adelante. La primera frase de su trabajo establecía que *aun cuando la estática no es suficiente para determinar los esfuerzos en losas planas de concreto reforzado, si impone ciertos requisitos mínimos en esos esfuerzos*. Eddy atacó esta proposición diciendo que *la suposición errónea fundamental de este trabajo aparece en la primera frase...* Turner pensaba que la publicación *involucra una muy singular combinación de los más diversos absurdos imaginables desde el punto de vista lógico, práctico y teórico*. A. W. Buel afirmó que *no había podido encontrar un sola verdad en el trabajo ni siquiera una explicación de hechos*. Mas aun, el sintió que era *contradicho por los hechos*. El análisis de Nichols sugería que los diseños de losas entonces vigentes

subestimaban los momentos por entre un 30 y un 50 por ciento. El enojo de las discusiones parece ser inversamente proporcional a la cantidad de sub-diseño de su sistema de losas favorito.

Aun cuando el análisis de Nichols es correcto y fue aceptado como tal a mediados de los años 20, no fue sino hasta 1971 en que la norma **ACI 318** lo reconoció en su totalidad y estableció que las losas planas fueran diseñadas para el 100 por ciento de los momentos predichos por la estática.

10.3 Comportamiento de losa cargada a falla en flexión

Hay cuatro o más etapas en el comportamiento de una losa en dos direcciones cargada hasta la falla en flexión:

1. Antes del agrietamiento, la losa se comporta como una placa elástica. Para cargas de corto plazo, las deformaciones, los esfuerzos y las deflexiones pueden calcularse con análisis elástico.
2. Después del agrietamiento pero antes de la fluencia del refuerzo, la losa deja de tener rigidez uniforme, ya que las regiones agrietadas tienen una rigidez a la flexión, EI , menor que las regiones no agrietadas; además, la losa deja de ser isotrópica ya que los patrones de grietas pueden ser diferentes en las dos direcciones. Aun cuando estas condiciones violan las suposiciones de la teoría elástica, las pruebas experimentales confirman que la teoría predice los momentos adecuadamente. Las losas de edificios normales generalmente presentan agrietamiento parcial ante cargas de servicio.
3. Eventualmente se inicia la fluencia del refuerzo en una o más regiones de gran momento y se esparce a través de la losa conforme los momentos se redistribuyen de áreas en fluencia hacia zonas todavía elásticas. El avance de la fluencia a través de una losa empotrada en cuatro lados se presenta en la Fig. 10-4. En este caso, la fluencia inicial ocurre en respuesta a momento negativo que forma rótulas plásticas localizadas en el centro de los lados largos (Fig. 10-4b). Estas rótulas se expanden a lo largo del lado mayor, y eventualmente, aparecen nuevas rótulas en los extremos de la losa (Fig. 10-4c). Mientras tanto, los momentos positivos en la franja central en la dirección corta se incrementan, debido a la redistribución de momentos causada por las rótulas plásticas en los extremos de esta franja. Finalmente el refuerzo fluye debido al momento positivo en esta franja como se muestra en la Fig. 10-4c. Con aumento adicional de la carga, las regiones de fluencia, denominadas ***líneas de fluencia***, dividen la losa en series de placas elásticas triangulares y trapezoidales como se muestra en la Fig. 10-4d. Las cargas correspondientes a este estado de comportamiento pueden estimarse mediante el uso de ***análisis de línea de fluencia***.
4. Aun cuando las líneas de fluencia dividen la placa para formar un mecanismo plástico, las rótulas se entran conforme aumenta la deflexión y la losa forma un arco de compresión muy somero, tal como se muestra en la Fig. 10-5. Esto supone que la estructura que rodea la losa es lo suficientemente rígida como para proveer

las reacciones al arco. Este estado de comportamiento no se toma en cuenta en los métodos de diseño vigentes.

Esta revisión de comportamiento se presenta para señalar, primero, que el análisis elástico de losas empieza a perder precisión conforme las cargas exceden las cargas de servicio, y segundo, que ocurre una gran redistribución de momentos una vez que se inicia la fluencia. En este caso se ha considerado una losa sobre muros o vigas muy rígidas. En el caso de una losa soportada por columnas aisladas, como la que se muestra en la Fig. 10-2a, se observaría un comportamiento similar excepto que el primer agrietamiento ocurriría en la parte superior de la losa alrededor de la columna seguido de agrietamiento en la parte inferior de la losa a mitad de distancia entre las columnas.

Las losas que fallan en flexión son extremadamente dúctiles. Las losas, en particular las placas planas, podrían también presentar un modo de falla frágil en cortante. El comportamiento y la resistencia en cortante de losas en dos direcciones serán discutidos en las secciones 10.7 y 10.8.

10.4 Análisis de Momentos en losas en dos direcciones

La Fig. 10-6 muestra un entrepiso hecho de tabloncillos simplemente apoyados sobre vigas simplemente apoyadas. El entrepiso soporta una carga de q Mg/m². El momento por unidad de ancho en los tabloncillos en la sección A-A es

$$m = \frac{q\ell_1^2}{8} \text{ m-Mg/m}$$

El momento total en todo el ancho del entrepiso es

$$M_{A-A} = (q\ell_2) \frac{\ell_1^2}{8} \text{ m-Mg} \quad (10-1)$$

Esta es la ecuación ya conocida para el momento máximo en un entrepiso simplemente apoyado de ancho ℓ_2 y de luz ℓ_1 .

Los tabloncillos aplican una carga uniforme de $q\ell_1/2$ en cada viga. El momento en la sección B-B en una viga es

$$M_{1b} = \left(\frac{q\ell_1}{2} \right) \frac{\ell_2^2}{8} \text{ m-Mg}$$

El momento total en ambas vigas es

$$M_{B-B} = (q\ell_1) \frac{\ell_2^2}{8} \text{ m-Mg} \quad (10-2)$$

Es importante notar que la carga completa fue transferida hacia Este y Oeste mediante los tablonos, causando un momento equivalente a $w\ell_1^2/8$, donde $w = q\ell_2$. Luego la carga completa fue transferida hacia Norte y Sur por las vigas, causando un momento similar en las vigas. Lo mismo sucede exactamente en la losa en dos direcciones mostrada en la Fig. 10-7. Los momentos totales requeridos a lo largo de las secciones A-A y B-B, respectivamente, son

$$M_{A-A} = (q\ell_2) \frac{\ell_1^2}{8} \quad \text{y} \quad M_{B-B} = (q\ell_1) \frac{\ell_2^2}{8} \quad (10-1, 10-2)$$

De nuevo, la carga completa fue transferida hacia Este y Oeste, y luego la carga completa fue transferida hacia Norte y Sur, esta vez por la losa en ambos casos. Esto, por supuesto, debe ser cierto siempre sin importar si la estructura tiene losas en una dirección y vigas, losa en dos direcciones o cualquier otro sistema.

10.4.1 Análisis de momentos en losas según Nichols

El análisis presentado en la derivación de (10-1) y (10-2) fue publicado en 1914 por Nichols. El análisis original de Nichols fue presentado para una losa sobre columnas circulares, en vez de apoyos puntuales como se supuso en la derivación de (10-1) y (10-2). Como las columnas rectangulares son más comunes hoy día, la derivación que se presenta a continuación considera ese caso. Se supone:

1. Panel rectangular interior típico en una estructura grande y
2. que todos los paneles en la estructura están sometidos a la misma carga uniforme.

Estas dos suposiciones se hacen para garantizar que las líneas de momento máximo, y por lo tanto las líneas sobre las cuales los cortantes y los momentos torsionantes son nulos, serán las líneas de simetría en la estructura. Esto permite aislar la porción de la losa mostrada en achurado en la Fig. 10-8a. Esta porción está delimitada por las líneas de simetría.

Las reacciones a las cargas verticales se transmiten hacia la losa mediante cortante alrededor de la cara de las columnas. Es necesario saber o suponer, la distribución de este cortante para calcular los momentos en este panel de losa. La máxima transferencia de cortante ocurre en las esquinas de la columna, la mínima transferencia ocurre en el centro de las caras de la columna. Por esta razón se supone que

3. las reacciones en la columna están concentradas en las cuatro esquinas de cada columna.

La Fig. 10-8b muestra una vista en elevación del elemento de losa con las fuerzas y momentos actuando en ella. La carga aplicada es $(q\ell_1\ell_2/2)$ en el centro del panel achurado, menos la carga en el área ocupada por la columna $(qc_1c_2/2)$. Esta carga es equilibrada por la reacción hacia arriba en las esquinas de la columna.

El **momento estático** total, M_o , es la suma del momento negativo, M_1 , y el momento positivo, M_2 , calculados sumando momentos alrededor de la línea A-A:

$$M_o = M_1 + M_2 = \left(\frac{q\ell_1\ell_2}{2}\right)\frac{\ell_1}{4} - \left(\frac{qc_1c_2}{2}\right)\frac{c_1}{4} - \left(\frac{q\ell_1\ell_2}{2} - \frac{qc_1c_2}{2}\right)\frac{c_1}{2}$$

y

$$M_o = \frac{q\ell_2}{8} \left[\ell_1^2 \left(1 - \frac{2c_1}{\ell_1} + \frac{c_2c_1^2}{\ell_2\ell_1^2} \right) \right]$$

La norma ACI ha simplificado ligeramente esta expresión reemplazando el termino en paréntesis cuadrados con ℓ_n^2 donde ℓ_n es la luz entre las caras de las columnas, dada por $\ell_n = \ell_1 - c_1$ y donde

$$\ell_n^2 = \ell_1^2 \left(1 - \frac{2c_1}{\ell_1} + \frac{c_1^2}{\ell_1^2} \right) \tag{10-4}$$

Una comparación entre (10-3) y (10-4) muestra que ℓ_n^2 difiere levemente del término entre paréntesis cuadrados en (10-3) y que la ecuación para el **momento estático total** puede reescribirse como (ACI 318 Ec. 13-4)

$$M_o = \frac{q\ell_2\ell_n^2}{8} \tag{10-5}$$

Para columnas circulares, Nichols supuso el cortante distribuido uniformemente alrededor de la cara de la columna, obteniendo

$$M_o = \frac{q\ell_2\ell_1^2}{8} \left[1 - \frac{4d_c}{\pi\ell_1} + \frac{1}{3} \left(\frac{d_c}{\ell_1} \right)^3 \right] \tag{10-6}$$

donde d_c es el diámetro de la columna o el capitel de la columna. Nichols simplifico esta expresión como

$$M_o = \frac{q\ell_2\ell_1^2}{8} \left(1 - \frac{2d_c}{3\ell_1} \right)^2 \tag{10-7}$$

El artículo ACI 318 13.6.2.2 expresa esto mediante la ecuación (10-5), donde ℓ_n está basado en la luz entre columnas cuadradas equivalentes con un área igual que la columna circular. En este caso, $c_1 = d_c\sqrt{\pi/2} = 0.886d_c$.

Para columnas cuadradas, el rango usual de c_1/ℓ_1 es aproximadamente de 0.05 a 0.15. Para $c_1/\ell_1 = 0.05$ y $c_1 = c_2$, (10-3) y (10-5) dan $M_o = Kq\ell_2\ell_1^2/8$, donde $K = 0.900$ y 0.903 , respectivamente. Para $c_1/\ell_1 = 0.15$ los valores respectivos de K son 0.703 y 0.723 . Así, (10-5) aproxima de manera cercana los momentos en una losa apoyada en columnas cuadradas, tornándose más conservadora conforme c_1/ℓ_1 se incrementa.

Para columnas circulares, el rango usual de d_c/ℓ_1 es aproximadamente de 0.05 a 0.20. Para $d_c/\ell_1 = 0.05$, (10-6) da $K = 0.936$, mientras (10-5), con ℓ_n definido usando $c_1 = d_c\sqrt{\pi}/2$, da $K = 0.913$. Para $d_c/\ell_1 = 0.2$, los valores correspondientes de K obtenidos con (10-6) y (10-5) son 0.748 y 0.677, respectivamente. De esta forma, para columnas circulares, (10-5) tiende a subestimar M_o por cerca de un 10 por ciento, comparado con (10-6).

Si se estudia el equilibrio del elemento mostrado en la Fig. 10-8c, se puede encontrar una ecuación para M_o similar, pero con ℓ_1 y ℓ_2 y c_1 y c_2 intercambiados. Esto indica una vez más que la carga total debe satisfacer equilibrio de momentos en ambas direcciones ℓ_1 y ℓ_2 .

10.5 Distribución de momentos en losas

10.5.1 Relación entre curvaturas y momentos en losas

Los principios del análisis elástico de losas en dos direcciones se presentan brevemente en la Sección 11.1. La ecuación básica para momentos es la ecuación (11-6).

Frecuentemente, en el estudio de placas de concreto, el coeficiente de Poisson, ν , se toma como nulo. En ese caso, (11-6) se reduce a

$$\begin{aligned} m_x &= -\frac{Et^3}{12} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \\ m_y &= -\frac{Et^3}{12} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \\ m_x &= -\frac{Et^3}{12} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (10-8)$$

En estas ecuaciones, $\partial^2 z/\partial x^2$ representa la curvatura en una franja de losa en la dirección x , y $\partial^2 z/\partial y^2$ representa la curvatura en una franja de losa en la dirección y donde la **curvatura** de una franja de losa es

$$\frac{1}{r} = -\frac{\varepsilon}{z}$$

donde r es el **radio de curvatura** (distancia desde el eje centroidal de la losa hasta el centro de la curva formada por la losa deflectada), $1/r$ es la curvatura, z es la distancia desde el eje centroidal hasta la fibra en donde ocurre la deformación unitaria ε . En un miembro elástico a flexión, la curvatura es

$$\frac{1}{r} = -\frac{M}{EI}$$

Esto muestra la relación directa entre momento y curvatura. De esta forma, si se visualiza la losa deformada, se puede estimar cualitativamente la distribución de momentos.

La Fig. 10-9a muestra una losa rectangular sobre vigas rígidas en todos los apoyos. En ella se muestran una franja longitudinal y dos transversales. Las deformadas de estas franjas y su correspondiente diagrama de momento se muestran en las Fig.s 10-9b a d. Cuando la deformada es cóncava hacia abajo, el momento causa compresión abajo—esto es, el momento es negativo. Esto también se puede colegir de (10-8). Como z fue tomado como positivo hacia abajo, una curvatura positiva $\partial^2 z / \partial x^2$ corresponde a una curva que es cóncava hacia abajo. De la ecuación (10-8), una curvatura positiva corresponde a un momento negativo. La magnitud del momento es proporcional a la curvatura.

La deflexión más grande, Δ_2 , ocurre en el centro del panel. Por lo tanto, las curvaturas (y por ende los momentos en la franja B) son mayores que los de la franja A . La parte central de la franja C es esencialmente plana, indicando que la mayor parte de la carga en esa región es transmitida por acción transversal en una dirección en el sentido corto de la losa.

La existencia del momento torsionante, m_{xy} , en una losa puede ilustrarse por medio de la analogía de la franja transversal. La Fig. 10-10 muestra una sección transversal de la franja B de la losa de la Fig. 10-9. Aquí, la losa es representada por medio de una serie de vigas transversales orientadas en dirección paralela a la franja C , la cual también se muestra en la Fig. 10-9. Las franjas de losa perpendiculares a la sección deben distorsionarse como se muestra en la Fig. 10-10, debido a los momentos torsionantes m_{xy} .

10.5.2 Momentos en losas apoyadas sobre muros o vigas rígidas.

La distribución de momentos en una serie de losas cuadradas y rectangulares se puede representar mediante métodos gráficos. La distribución de momentos negativos, M_A , y de momentos positivos, M_B , a lo largo de líneas transversales a la losa se indican como se muestra en la Fig. 10-13a y b. Estas distribuciones pueden dibujarse como líneas sólidas y áreas sombreadas, o como una serie de escalones, como se indican mediante líneas a trazos para M_A . La altura de la curva en cualquier punto indica la magnitud del momento en ese punto. Ocasionalmente, la distribución del momento flexionante en la franja A-B-C a través de la losa será graficada como se muestra en las Fig.s 10-11c o 10-9.

Los momentos se expresan en términos de Cqb^2 , donde b es la dimensión corta del panel. El valor de C sería 0.125 en una losa en una dirección, cuadrada, simplemente apoyada. Las unidades serán en Mg-m/m. En todos los casos, los diagramas de momentos corresponden a losas con carga uniformemente distribuida, q .

La Fig. 10-13 muestra los diagramas de momentos para una losa cuadrada simplemente apoyada. Los momentos actúan alrededor de los ejes mostrados (similares a Fig. 10-11a).

Los momentos máximos en la losa ocurren alrededor de un eje a lo largo de la diagonal, como se muestra en la Fig. 10-12b.

Es importante recordar que la carga total debe ser transferida de apoyo a apoyo por momentos en la losa o en las vigas. La Fig. 10-13a muestra una losa simplemente apoyada en dos extremos y apoyada en vigas rígidas en los otros dos extremos. Los momentos en la losa (que son iguales que los de la Fig. 10-12a) contabilizan únicamente el 19 por ciento del momento total. El balance de momentos se divide entre las dos vigas según se muestra.

La Fig. 10-13b muestra el efecto de reducción de la rigidez de las dos vigas de borde. Aquí, la rigidez unitaria de las vigas perimetrales ha sido reducida hasta ser igual a la de la losa. De esta forma el momento total es resistido por acción de losa en una dirección. El hecho de que los momentos alrededor del eje A-A sea constante indica que las curvaturas a mitad de luz de todas las franjas que cubre esa luz son iguales. Por otro lado, las curvaturas en la franja a lo largo del eje B-B en la Fig. 10-13a son mucho más pequeñas que las de la franja C-C, debido a que B-B está próximo a la viga rígida. Esto explica por qué los momentos de la losa en la Fig. 10-13a decrecen hacia las vigas perimetrales.

Las esquinas de una losa simplemente apoyada tienden a levantarse del apoyo, como se discutirá más adelante en esta sección. Los diagramas de momento que se han presentado aquí suponen que las esquinas no pueden levantarse debido a la presencia de una fuerza concentrada hacia abajo.

Los diagramas de momentos en losas cuadradas con apoyo de empotramiento que se muestran en la Fig. 10-14a contabilizan el 36 por ciento de los momentos estáticos; el resto está en las vigas de borde. Conforme aumenta la razón de largo a ancho, la porción central de la losa se semeja más a losa en una dirección.

10.5.3 Momentos en losas apoyadas sobre columnas aisladas.

En una placa plana o losa plana, la losa se apoya directamente sobre columnas sin vigas. En este caso, las partes más rígidas de la losa son las que van de columna a columna a lo largo de los cuatro lados del panel. Como resultado, los momentos son mayores en esas porciones de la losa.

La Fig. 10-15a ilustra los momentos en un panel interior típico que forma parte de una losa muy grande y en donde todos los paneles están cargados uniformemente con cargas iguales. La losa está apoyada sobre columnas circulares de un diámetro $c = 0.1\ell$. Los mayores momentos positivos y negativos ocurren en las franjas que van de columna a columna. En las Figs. 10-15b y c, se muestran los diagramas de curvatura y de momento para las franjas a lo largo de los ejes A-A y B-B. Ambas franjas presentan momentos negativos adyacentes a las columnas y momentos positivos a mitad de luz. En la Fig. 10-15d, se presenta el promedio del diagrama de momentos de la Fig. 10.15a sobre la **franja de la columna** de ancho $\ell_2/2$ y el promedio de la **franja intermedia** entre franjas de

columnas. El procedimiento de diseño de la norma ACI considera el promedio de momentos sobre el ancho de la franja de columna y el de la franja intermedia. La comparación de las Figs. 10-15a y d muestra que, inmediatamente adyacente a las columnas, los momentos elásticos teóricos pueden ser considerablemente mayores que lo indicado por los valores promedio.

El momento estático total, M_o , aquí considerado es

$$q\ell_n^2 \left[(0.122 \times 0.5\ell_2) + (0.041 \times 0.5\ell_2) + (0.053 \times 0.5\ell_2) + (0.034 \times 0.5\ell_2) \right] = 0.125q\ell_2\ell_n^2$$

La distribución de momentos presentada en la Fig. 10-14, para una losa cuadrada empotrada en todos los apoyos mediante vigas rígidas se vuelve a presentar en la Fig. 10-16a con los momentos promediados para las franjas de columna e intermedia de la misma manera que se había presentado en la Fig. 10-15 para el caso de momentos en placa plana. Además, la suma de los momentos de las vigas y de los momentos de la franja de columna ha sido dividida entre el ancho de la franja de columna y graficada como el ***momento total de la franja de columna***. La distribución de momentos en la Fig. 10-15d es muy similar a la distribución de momentos para las franjas de columna e intermedia mostrados en la Fig. 10-16a.

La Fig. 10-16b muestra un caso intermedio en el cual la rigidez de la viga, I_b , es igual a la rigidez I_s de la losa de ancho ℓ_2 . Aun cuando la división del momento entre la losa y la viga es diferente, la distribución de los momentos totales es nuevamente similar a la mostrada en las Figs. 10-15d y 10-16a.

El procedimiento de diseño en la norma ACI aprovecha esta similitud en la distribución de momentos totales mediante la presentación de un procedimiento unificado de diseño para la gama completa, desde losas apoyadas sobre columnas aisladas hasta losas apoyadas sobre vigas en dos direcciones.

10.6 Diseño de losas

La Sección **ACI 318S-08 13.5** permite el diseño de losas mediante cualquier procedimiento que satisfaga ambos, equilibrio y compatibilidad geométrica, siempre y cuando cada sección tenga una resistencia al menos igual a la resistencia requerida y que se cumplan los requisitos de funcionalidad. En la norma ACI se presentan en detalle dos procedimientos de diseño. Estos procedimientos son, el método directo de diseño—considerado en la Sección 10.7—y el método de diseño de pórtico equivalente—presentado en la Sección 10-8. Estos dos métodos difieren principalmente en la manera en la cual se calculan los momentos en las losas. El cálculo de los momentos en el método de diseño directo se basa en el ***momento estático total***, M_o , ya analizado anteriormente. En este método, la losa es analizada panel por panel, y se utiliza la ecuación (10-5) para calcular el momento total en cada panel y en cada dirección. El

momento estático es luego dividido en momentos positivos y momentos negativos, y éstos a la vez son divididos en franjas de columna y franjas centrales.

El segundo método se denomina método de pórtico equivalente. En él, la losa se subdivide en una serie de pórticos bidimensionales (en cada dirección), y los momentos positivos y negativos se calculan mediante un análisis elástico de pórticos. Una vez que se obtienen los momentos positivos y negativos, estos se subdividen en franjas de columna y franjas centrales de la misma manera que en el método directo de diseño. Otros métodos, como el método de líneas de fluencia (Capítulo 11) y el método de “franjas” son permitidos de acuerdo con la sección **ACI 318 13.5**.

10.6.1 Pasos en el diseño de losas

Los pasos a seguir en el diseño de una losa en dos direcciones son los siguientes:

1. Escogencia del trazado y el tipo de losa a usar. Los diferentes tipos de losas en dos direcciones y sus usos han sido discutidos brevemente en la Sección 10.1. La escogencia del tipo de losa esta altamente influenciado por consideraciones arquitectónicas y constructivas.
2. Escogencia del espesor de losa. Generalmente, el espesor de la losa se escoge para prevenir deflexiones excesivas ante cargas de servicio. Igualmente importante es escoger el espesor adecuado para resistir el cortante tanto en las columnas interiores como exteriores (ver Sección 10.10).
3. Escogencia del método de cálculo de los momentos de diseño. El **método del pórtico equivalente** usa análisis elástico para calcular los momentos positivos y negativos en los diferentes paneles de la losa. El **método de diseño directo** usa coeficientes para calcular esos momentos.
4. Cálculo de momentos positivos y negativos en la losa.
5. Cálculo de la distribución de momentos a través del ancho de la losa. La distribución lateral de momentos en un panel depende de la geometría de la losa y de la rigidez de las vigas (si las hay). Este procedimiento es el mismo independientemente de si los momentos negativos y positivos se calculan con el método directo o con el de pórtico equivalente.
6. Si hay vigas, una porción del momento debe ser asignada a las vigas.
7. La cuantía de refuerzo se escoge para los momentos obtenidos en los pasos 5 y 6. (Nota: los pasos 3 a 7 deben ser efectuados para ambas direcciones principales)
8. Se verifican las resistencias de cortante alrededor de las columnas.

Varios de los parámetros usados en este proceso serán definidos con anterioridad a la realización del diseño de losas.

10.6.2 Razón de rigidez entre viga y losa, α_f

Las losas se construyen usualmente con vigas que van de columna a columna alrededor del perímetro del edificio. Estas vigas rigidizan los bordes de la losa y ayudan a disminuir las deflexiones de los paneles internos de la losa. Losas con mucha carga y losas nervadas con luces muy grandes usualmente cuentan con vigas uniendo a todas las columnas de la estructura.

En la norma ACI, los efectos de la rigidez de las vigas sobre las deflexiones y la distribución de momentos se expresan como una función de α_f , definido como la rigidez a la flexión, $4EI/\ell$, de la viga dividida por la rigidez a la flexión de un ancho de la losa limitado lateralmente por las líneas de centro de los paneles adyacentes a cada lado de la viga:

$$\alpha_f = \frac{4E_{cb}I_b/\ell}{4E_{cs}I_s/\ell}$$

Como las longitudes, ℓ , de la viga y la losa son iguales, esta cantidad es presentada en la norma en forma simplificada como

$$\alpha_f = \frac{E_{cb}I_b}{E_{cs}I_s} \quad (10-9)$$

Donde E_{cb} y E_{cs} son los módulos de elasticidad de la viga y la losa de concreto, respectivamente, I_b e I_s son los momentos de inercia de la viga y la losa no agrietadas. Las secciones consideradas para el cálculo de I_b e I_s se muestran en la Fig. 10-17. La luz perpendicular a la dirección de diseño es ℓ_2 . En la Fig. 10-17c, los paneles adyacentes a la viga en consideración tiene luces transversales diferentes. El cálculo de ℓ_2 en tal caso se ilustra en el Ejemplo 10-4. Si no hay viga, $\alpha_f = 0$.

ACI 318 13.2.4 define una viga monolítica o totalmente compuesta como el alma de la viga más una porción de la losa a cada lado de la viga extendiéndose una distancia igual a la proyección mayor de la viga arriba o debajo de la losa, pero no mayor que cuatro veces el espesor de la losa. Esto se ilustra en la Fig. 10-18. Una vez que se han escogido los tamaños de la viga y de la losa, se pueden calcular los valores de α_f usando principios básicos de la mecánica.

Ejemplo 10-1 Cálculo de α_f para una viga de borde

Una losa de 20 cm de espesor está apoyada sobre una viga de borde de peralte total de 40 cm por 30 cm de ancho, como se muestra en la Fig. 10-19a. La losa y la viga fueron coladas monolíticamente, tienen concreto de igual resistencia, y módulo de elasticidad E_c . Calcule α_f . Como $f'_{cs} = f'_{cb}$ y $E_{cs} = E_{cb}$ entonces (10-9) se reduce a $\alpha = I_b/I_s$.

❶ **Cálculo de I_b .** La sección transversal de la viga es como se muestra en la Fig. 10-19b. El centroide de la viga está localizado a 17.5 cm de la fibra superior de la losa. El momento de inercia de la viga es

$$I_b = \left(30 \times \frac{40^3}{12} \right) + (30 \times 40) \times 2.5^2 + \left(20 \times \frac{20^3}{12} \right) + (20 \times 20) \times 7.5^2 = 203,000 \text{ cm}^4$$

❷ **Cálculo de I_s .** I_s se calcula para la parte achurada de la losa según la Fig. 10-19c:

$$I_s = 315 \times \frac{20^3}{12} = 210,000 \text{ cm}^4$$

❸ **Cálculo de α_f .**

$$\alpha_f = \frac{I_b}{I_s} = \frac{203,000}{210,000} = 0.967$$

□

10.6.3 Espesor mínimo de losas en dos direcciones

El artículo [ACI 318S-08 9.5.3](#) define espesores mínimos que generalmente son suficientes para limitar las deflexiones de las losas en valores aceptables. Se pueden usar losas más delgadas si se puede demostrar que las deflexiones calculadas no van a ser excesivas. El cálculo de deflexiones en losas se presenta en la Sección 10.6.

Losas sin vigas entre columnas internas

Para una losa sin vigas entre columnas internas y con una razón de luz larga vs. luz corta de 2 o menos, el espesor mínimo se puede tomar de la Tabla 10-1 ([ACI Tabla 9.5\(c\)](#)), pero no menor que 12.5 cm en losas sin ábacos o 10 cm en losas con ábacos con dimensiones definidas en el artículo [ACI 318S-08 13.2.5](#).

La norma [ACI 318S-08](#) permite el uso de losas más delgadas si las deflexiones calculadas satisfacen los límites dados en la [ACI 318 Tabla 9.5\(b\)](#).

Como se hace ver en la nota c de la Tabla 10-1, una viga debe tener una razón de rigidez α_f de 0.8 o mayor para ser denominada como viga de borde. Se puede demostrar que una viga de borde con peralte de al menos el doble del espesor h de la losa, y un área de al

menos $4h^2$, siempre tendrá un α_f mayor que 0.8. Esta regla práctica puede ser usada para simplificar la selección de los espesores de losa.

El espesor calculado con la Tabla 10-1 debe ser redondeado hacia arriba por 1 cm para losas de 15 cm o más de espesor. Redondeando hacia arriba se logra una losa más rígida y por lo tanto con menores deflexiones. Estudios sobre deflexiones en losas presentados por Thompson y Scanlon (Thompson & Scanlon, 1988) sugieren que losas sin vigas internas deberían tener espesores un 10% mayor que los valores mínimos recomendados por ACI para evitar deflexiones excesivas.

Losas con vigas entre apoyos internos

Para losas con vigas entre apoyos internos, el artículo **ACI 318S-08 9.5.3.3** brinda los siguientes espesores mínimos:

(a) Para $\alpha_{fm} \leq 0.2$, los espesores mínimos de la Tabla 10-1 gobiernan.

(b) Para $0.2 < \alpha_{fm} < 2.0$, el espesor no puede ser menor que

$$h = \frac{\ell_n \left(0.8 + \frac{f_y}{14000} \right)}{36 + 5\beta(\alpha_{fm} - 0.2)} > 12 \text{ cm} \quad (10-10)$$

(c) Para $\alpha_{fm} > 2.0$, el espesor no puede ser menor que

$$h = \frac{\ell_n \left(0.8 + \frac{f_y}{14000} \right)}{36 + 9\beta} > 9 \text{ cm} \quad (10-11)$$

(d) En extremos discontinuos, deberá proveerse una viga de borde con una razón de rigidez α_f no menor que 0.8 o bien el espesor de la losa deberá incrementarse al menos un 10% en ese borde del panel.

En (b) y (c),

h = espesor total

ℓ_n = luz libre mayor del panel de losa en consideración

α_{fm} = promedio de los valores de α_f para los cuatro lados del panel

β = razón de luz libre mayor sobre luz libre menor del panel

El espesor de una losa puede estar gobernado por el cortante. Esto es particularmente posible si los momentos son transferidos a las columnas de los bordes y puede ser importante en columnas internas entre dos luces con longitudes muy diferentes. La escogencia del espesor de losa para satisfacer los requisitos de cortante según se presenta en la Sección 10.10. En resumen, esa sección establece que se puede escoger un espesor

de losa de tal forma que $V_u \approx 0.50$ a $0.55(\phi V_c)$ en columnas de borde y $V_u \approx 0.85$ a $1.0(\phi V_c)$ en columnas internas.

10.7 El método directo de diseño

El método directo de diseño también pudo haber sido denominado el “método directo de análisis,” porque este método da valores para momentos en varias partes del panel de losa obviando la necesidad de un análisis estructural. El lector debe darse cuenta que este método de diseño se introdujo en un tiempo en el que la mayoría de los cálculos ingenieriles se hacían con reglas de calculo y el no había disponibilidad de ningun artefacto que hiciera cálculos repetitivos como los requeridos para analizar un sistema de entrepisos de losas continuas. Por tanto, para paneles de losa continuos con luces relativamente uniformes y sujetos a cargas distribuidas, se desarrollaron series de coeficientes de momentos que condujeran a un diseño seguro para flexion en sistemas de entrepisos en dos direcciones.

10.7.1 Limitaciones en el uso del método directo de diseño

El método directo de diseño es más fácil de usar que el método del pórtico equivalente, pero puede ser aplicado únicamente a losas multipaneles relativamente regulares. Las limitaciones, dadas en el artículo [ACI 318S-08 13.6.1](#), incluyen lo siguiente:

1. Debe haber un mínimo de tres luces continuas en cada dirección. De esta forma, la estructura mas pequeña a considerar será una de nueve paneles (3 por 3). Si hay menos de tres paneles, los momentos negativos internos provenientes del método directo de diseño tienden a ser muy pequeños.
2. Los paneles rectangulares deben tener una razón de largo vs. ancho no mayor que 2. Cuando esta razón es mayor que 2, el comportamiento unidireccional se torna predominante.
3. Las longitudes de luces sucesivas en cada dirección no deberán diferir en más de un tercio de la longitud de la luz mayor. Este límite es exigido para incentivar el uso de ciertos detalles de corte de barras estandarizados.
4. Las columnas pueden estar sesgadas de la cuadrícula rectangular del edificio hasta por un 10% de la luz paralela al sesgo. En un edificio con una disposición como ésta, se debe usar la ubicación real de las columnas para determinar las luces de la losa utilizadas en el cálculo de los momentos de diseño.
5. Todas las cargas deben ser únicamente gravitacionales y uniformemente distribuidas en todo el panel. El método directo de diseño no puede ser usado para pórticos no arriostrados, losas de fundación o losas preesforzadas.

6. La carga viva de servicio (no mayorada) no deberá ser mayor que dos veces el valor de la carga muerta de servicio. Solicitaciones de tablero o de franja con razones de carga viva vs. carga muerta muy grandes pueden conducir a momentos más grandes que los supuestos por este método de análisis.
7. Para un panel con vigas en las dos direcciones entre apoyos, la rigidez relativa de las vigas en las dos direcciones perpendiculares dadas por $\alpha_{f1}\ell_2^2/\alpha_{f2}\ell_1^2$ no deberá ser menor que 0.2 ni mayor que 5. El término α_f se define más adelante y ℓ_1 y ℓ_2 son las luces en las dos direcciones.

Las limitaciones 2 y 7 no permiten el uso del método directo de diseño para paneles de losa que transmiten carga como losas en una dirección.

10.7.2 Distribución interna de momentos en paneles – Losas sin vigas entre apoyos

Momento estático, M_o

Para diseño, la losa se considera como una serie de pórticos en dos direcciones, como se muestra en la Fig. 10-20. Estos pórticos se extienden hasta la mitad de la luz del panel a cada lado de la línea de columnas. En cada luz de cada uno de los pórticos, es necesario calcular el momento estático total, M_o . Por lo tanto se tendrá

$$M_o = \frac{q_u \ell_2 \ell_n^2}{8} \quad (10-5)$$

donde

q_u = carga mayorada por unidad de área

ℓ_2 = longitud transversal de la franja

ℓ_n = luz libre entre columnas

Para el cálculo de ℓ_n , las columnas circulares o columnas con capitel de diámetro d_c se reemplazan por una columna cuadrada de $0.886d_c$ de lado. En la Fig. 10-20 se muestran los valores de ℓ_2 y ℓ_n para los paneles en cada una de las direcciones consideradas. El ejemplo 10-2 ilustra el cálculo de M_o en un panel de losa típico.

Ejemplo 10-2 Cálculo del momento estático, M_o

Calcule el momento estático total, M_o , para los paneles de losa mostrados en la Fig. 10-13. La losa es de 20 cm de espesor y soporta una carga viva de 500 kg/m².

❶ Cálculo de las cargas uniformes mayoradas.

$$q_u = 1.2(0.2 \times 2.40) + 1.6(0.50) = 1.38 \text{ Mg/m}^2$$

Se debe notar que como el CSCR-02 permite una reducción de la carga viva, la carga viva debe ser multiplicada por el correspondiente factor de reducción antes de calcular q_u .

❷ **Consideración del panel A entre columnas 1 y 2.** El panel A se muestra como la zona achurada en la Fig. 10-21a. Los momentos calculados en esta parte del ejemplo serían usados para diseñar el refuerzo paralelo al eje 1-2 en este panel. De la ecuación (10-5) (ACI Ec. (13-3)),

$$M_o = \frac{q_u \ell_2 \ell_n^2}{8}$$

donde

ℓ_n = luz libre entre columnas

$$\ell_n = 6.70 - \frac{1}{2}(0.50) - \frac{1}{2}(0.60) = 6.15 \text{ m}$$

ℓ_2 = longitud transversal de la franja

$$\ell_2 = 6.40/2 + 6.10/2 = 6.25 \text{ m}$$

Por lo tanto,

$$M_o = \frac{1.38 \times 6.25 \times 6.15^2}{8} = 40.8 \text{ Mg-m}$$

❸ **Consideración del panel B entre columnas 1 y 4.** El panel B se muestra como la zona achurada en la Fig. 10-21b. Los momentos calculados en esta parte del ejemplo serían usados para diseñar el refuerzo paralelo al eje 1-4 en este panel.

En la Fig. 10-21c se muestra una sección de la losa con las columnas 1 y 4. La columna 4 tiene un capitel. El artículo ACI 318 13.1.2 define el diámetro efectivo de este capitel como el diámetro, medido en la base de la losa o del ábaco, del mayor cono circular recto con un vértice de 90° que pueda inscribirse dentro de la columna y el capitel. El contorno de tal cono se muestra con línea de trazos en la Fig. 10-21c y el diámetro, d_c , es 60 cm.

Para propósitos del cálculo de ℓ_n , los apoyos circulares son reemplazados con columnas rectangulares equivalentes de lado $c_1 = d_c \sqrt{\pi/2}$, o bien $0.886d_c$. Por lo tanto,

$$\ell_n = 6.10 - \frac{1}{2}(0.30) - \frac{1}{2}(0.886 \times 0.60) = 5.68 \text{ m}$$

$$\ell_2 = 5.80/2 + 6.70/2 = 6.25 \text{ m}$$

$$M_o = \frac{1.38 \times 6.25 \times 5.68^2}{8} = 34.8 \text{ Mg-m}$$

□

Momentos positivos y negativos en paneles

En el método de diseño directo, el momento estático total factorizado, M_o , se divide en momentos factorizados positivos y negativos de acuerdo con las reglas dadas en la Sección 13.6.3 de la norma **ACI 318S-08**. Estos se ilustran en la Fig. 10-22. En los paneles interiores, el 65 por ciento de M_o es asignado a la región de momento negativo y el 35 por ciento a las regiones de momento positivo. Esto es aproximadamente lo mismo como para una viga doblemente empotrada con carga uniformemente distribuida, donde el momento negativo es el 67 por ciento de M_o y el momento positivo es el 33 por ciento.

El extremo externo de un panel exterior tiene un empotramiento considerablemente menor que el apoyo interno. La división de M_o en un panel externo en regiones de momentos positivos y negativos se presenta en la Tabla 10-2. En dicha tabla, “borde externo no restringido” se refiere a una losa cuyos bordes externos descansan sobre, pero no están adheridas a, por ejemplo una pared de mampostería. “Borde externo totalmente restringido” se refiere a una losa cuyos bordes exterior es apoyado por, y es continua con, una pared de concreto con una rigidez a la flexión tan grande o más grande que la de la losa.

Si los momentos negativos calculados en dos lados del apoyo son diferentes, la sección de momento negativo de la losa se diseña para el mayor de los dos.

Disposición para patrones de carga

En el diseño de vigas de concreto con refuerzo continuo, se llevan a cabo análisis para unas cuantas distribuciones de carga viva para obtener los mayores valores de momento positivo y negativo en cada luz. En el caso de una losa diseñada mediante el método de diseño directo, no se hace este análisis. El método de diseño directo puede ser usado solamente cuando la carga viva no excede dos veces la carga muerta. Los efectos de los patrones de carga no son grandes en tal caso.

Disposición para cargas concentradas

La mayoría de las normas de construcción recomiendan que los entrepisos de oficinas sean diseñados para el efecto más grande ya sea de una carga uniformemente distribuida sobre todo un panel o de una carga concentrada colocada en cualquier parte del entrepiso y distribuida en un área de 75 cm por 75 cm. Las disposiciones para diseño de losas del ACI aplican únicamente para el caso de carga uniforme. Woodring y Siess estudiaron los momentos debidos a cargas concentradas actuando sobre paneles interiores cuadrados.

Para placas planas cuadradas de 6, 7.5 y 9 m, los momentos mayores debidos a una carga concentrada de 900 kg sobre un área cuadrada de 75 cm son equivalentes cargas uniformes de 191 o -112 kg/m², 132 o -78 kg/m², y 98 o -64 kg/m², respectivamente, para los tres tamaños de losa. La carga uniforme equivalente positiva (hacia abajo) son menores que las cargas de 196 a 489 kg/m² usadas en diseño de entresijos de apartamentos y oficinas y por lo tanto no gobiernan. Las cargas uniformes equivalentes negativa indican que, en algún punto de la losa, el peor efecto de la carga concentrada es equivalente al de una carga uniforme hacia arriba. Como todas éstas son menores que la carga muerta de un entresijo de concreto, el caso de la carga concentrada tampoco gobierna aquí tampoco. En resumen, el diseño para el caso de carga uniforme cumplirá el caso de la carga concentrada de 900 kg para las losas cuadradas de 6 m o mayores. Para cargas concentradas grandes, se puede usar un análisis de pórtico equivalente.

Definición de franjas de columna y franjas centrales

Como mostró en la Fig. 10-15a, los momentos varían en forma continua a través del ancho del panel de losa. Para ayudar en la colocación del acero de refuerzo, los momentos de diseño se promedian en las franjas de columna y en las centrales como se muestra en la Fig. 10-15d. Los anchos de estas franjas se definen en los artículos [ACI 318 13.2.1](#) y [13.2.2](#) y se ilustran en la Fig. 10-23. Las franjas de columna en ambas direcciones se extienden una cuarta de la luz menor, ℓ_{\min} , a cada lado de la línea de columnas.

Distribución de momentos entre franjas de columnas y franjas centrales

La [Sección 13.6.4](#) del [ACI 318S-08](#) define la fracción de los momentos positivos y negativos asignadas a las franjas de columna. La cantidad restante de momento positivo y negativo se asigna a la franja central adyacente (Fig. 10-25). La división es función de $\alpha_{f1}\ell_2/\ell_1$, que depende de la razón de aspecto del panel, ℓ_2/ℓ_1 , y de la rigidez relativa, α_{f1} , de las vigas (si existiesen) paralelas a e internas en la franja de la columna.

La Tabla 10-3 presenta los porcentajes de distribución del momento negativo factorizado para la franja de columna en todos los apoyos internos. Para un sistema de entresijo sin vigas interiores, $\alpha_{f1}\ell_2/\ell_1$ se toma como cero, porque $\alpha_{f1} = 0$. En este caso, el 75 por ciento del momento negativo se asigna a la franja de columna y el restante 25 por ciento se divide en partes iguales entre las dos franjas centrales adyacentes. Para casos en donde esté presente una viga en la franja de columna (en la dirección ℓ_1) y $\alpha_{f1}\ell_2/\ell_1 \geq 1.0$, aplica la tercera fila de la Tabla 10-3. Es posible que se requiera de interpolación lineal basado en la razón ℓ_2/ℓ_1 . Para casos en donde $0 \leq \alpha_{f1}\ell_2/\ell_1 \leq 1.0$, se requiere interpolación lineal entre los porcentajes dados en la segunda y tercera fila de la Tabla 10-3. Procedimientos similares se utilizan para la distribución de momentos factorizados en otros puntos a lo largo de la luz.

La Tabla 10-4 presenta los porcentajes de distribución del momento positivo factorizado de la franja de columna en el centro del vano para ambos vano interior y vano exterior. Para sistemas de entrepiso sin vigas interiores, el 60 por ciento del momento positivo es asignado a la franja de columna, y el restante 40 por ciento se divide por partes iguales entre las franjas centrales adyacentes. Si hay una viga presente en la franja de columna (en la dirección ℓ_1), aplicarán ya sea los porcentajes de la tercera fila o bien una interpolación entre los porcentajes dados en la segunda y la tercera fila de la Tabla 10-4.

En un borde exterior, la división del momento negativo factorizado en el extremo exterior distribuida a las franjas de columna y central perpendiculares al borde depende también de la rigidez torsional de la viga de borde, calculada como el módulo de cortante, G , multiplicado por la constante torsional, C , de la viga de borde, dividido entre la rigidez a la flexión de la losa perpendicular a la viga de borde (i.e., EI para una losa con un ancho igual a la longitud de la viga de borde desde el centro de un vano hasta el centro del vano contiguo, como se muestra en la Fig. 10-17d). Suponiendo que el coeficiente de Poisson es cero se tiene $G = E/2$, entonces la razón de rigidez torsional se define como

$$\beta_t = \frac{E_{cb} C}{2E_{cs} I_s} \quad (10-12)$$

donde la sección transversal de la viga de borde se toma como se define en la Sección 13.2.4 de la norma ACI y la Fig. 10-18. Si no hay viga de borde, β_t se puede considerar igual a cero.

El término C en (10-12) se refiere a la constante torsional de la viga de borde. Esta es más o menos equivalente al momento polar de inercia. Se calcula dividiendo la sección transversal en rectángulos y efectuando la sumatoria

$$C = \sum \left[\left(1 - 0.63 \frac{x}{y} \right) \frac{x^3 y}{3} \right] \quad (10-13)$$

donde x es la longitud del lado corto de un rectángulo y y es el lado largo. La subdivisión de la sección transversal de los elementos en torsión se ilustra en la Fig. 10-24. Diferentes combinaciones de rectángulos deben ser probadas para obtener el valor máximo de C . El valor máximo normalmente se obtiene cuando el rectángulo más ancho se toma lo más largo posible. Así, los rectángulos escogidos en la Fig. 10-24b dará un valor mayor de C que el que darían los de la Fig. 10-24a.

La Tabla 10-5 presenta la distribución porcentual del momento negativo factorizado para la franja de columna en el apoyo exterior. Esta tabla funciona de manera similar a las Tablas 10-3 y 10-4, con la adición de dos filas más para tomar en cuenta la presencia o ausencia de una viga de borde trabajando en torsión para transferir parte del momento negativo de la losa a la columna. Cuando no hay losa de borde ($\beta_t = 0$), todo el momento negativo es asignado a la franja de la columna. Esto es razonable porque no hay elemento torsional de borde para transferir el momento desde la franja central hasta la columna. Si

una viga de borde rígida está presente ($\beta_t \geq 2.5$), la Tabla 10-5 da porcentajes específicos para ser asignados a la franja de columna, dependiendo del valor de α_{f1} y de la razón ℓ_2/ℓ_1 , tal como se hizo en las Tablas 10-3 y 10-4. Para valores de β_t entre 2.5 y 0.0, y valores de $(\alpha_{f1}\ell_2/\ell_1)$ entre 1.0 y 0.0, pueden ser requeridos dos o tres niveles de interpolación lineal para determinar el porcentaje de momento negativo asignado a la franja de columna.

Si está presente una viga en la franja de columna (en la dirección ℓ_1), una porción del momento de la franja de columna es asignado a la viga, tal como se especifica en la Sección 13.6.5 de la norma ACI. Si la viga tiene $\alpha_{f1}\ell_2/\ell_1 \geq 1.0$, el 85 por ciento del momento de la franja de columna es asignado a la viga y el 15 por ciento a la losa. Esto es discutido más a fondo en la Sección 10-14 y en el Ejemplo 10-15.

Ejemplo 10-3 Cálculo de los momentos en un panel interior de una placa plana

La Fig. 10-25 muestra un panel interior de un entrepiso de placa plana en un edificio de apartamentos. El espesor de la losa es de 14 cm. La losa sostiene una carga viva de diseño de 250 kg/m^2 y una carga muerta superimpuesta de 125 kg/m^2 debida a particiones. Las columnas y la losa tienen un concreto de igual resistencia. La altura de entrepisos es 2.75 m. Calcule los momentos de las franjas de columna y central en la dirección corta del panel.

Solución:

1. Cálculo de las cargas factorizadas.

$$q_u = 1.2(0.14 \times 2400 + 125) + 1.6(250) = 953 \text{ kg/m}^2$$

Se debe notar que si la norma vigente permite la reducción de la carga viva, la carga de 250 kg/m^2 pueden ser multiplicados por el factor recomendado. La reducción deberá estar basada en un área tributaria igual al área total del panel $\ell_1 \times \ell_2$. (Notar que: $K_{LL} = 1.0$).

2. Cálculo de los momentos en los tramos cortos de la losa.

- a. Cálculo de ℓ_n y ℓ_2 y división de la losa en franjas central y de columna.

$$\ell_n = 4.0 - 0.25 = 3.75 \text{ m}$$

$$\ell_2 = 4.40 \text{ m}$$

La franja de columna se extiende el menor valor entre $\ell_2/4$ y $\ell_1/4$ a cada lado del eje de columnas, como se muestra en la Fig. 10.23 (Sección 13.2.1, ACI 318). Por lo tanto, la franja de columna se extiende $4.0/4 = 1.0 \text{ m}$ a cada lado del eje de columnas. El ancho total de la franja de columna es 2.0 m. Cada franja central se extiende desde el borde de la franja de columna hasta la línea central del panel. El ancho total de las dos franjas centrales es $4.40 - 2.0 = 2.40 \text{ m}$.

- b. Cálculo de M_o .

$$M_o = \frac{q_u \ell_2 \ell_n^2}{8} = \frac{0.953 \times 4.0 \times 3.75^2}{8} = 6.70 \text{ Mg-m} \quad (10-5)$$

- c. División de M_o en momentos positivos y negativos. De acuerdo con la Sección 13.6.3.2 de la norma ACI,

$$\text{Momento negativo} = -0.65M_o = -4.35 \text{ Mg-m}$$

$$\text{Momento positivo} = 0.35M_o = 2.35 \text{ Mg-m}$$

Este procedimiento se ilustra en la Fig. 10-26a, y la distribución de momentos totales resultante se muestra en la Fig. 10-26b.

- d. División de momentos entre las franjas central y de columna.

Momentos negativos: De la tabla 10-3 para $\alpha_{f1} \ell_2 / \ell_1 = 0$ ($\alpha_{f1} = 0$ porque no hay vigas entre las columnas A y B en este panel),

$$\text{Momento negativo franja de columna} = 0.75 \times -4.35 = -3.26 \text{ Mg-m}$$

$$\text{Momento negativo franja central} = 0.25 \times -4.35 = -1.09 \text{ Mg-m}$$

La mitad, -0.545 Mg-m , va a cada franja central adyacente. Como los paneles adyacentes tienen el mismo ancho, ℓ_2 , un momento similar será asignado a la otra mitad de cada franja central de manera que el momento negativo total de la franja central es -1.09 Mg-m .

Momentos positivos: De la tabla 10-4 para $\alpha_{f1} \ell_2 / \ell_1 = 0$,

$$\text{Momento positivo franja de columna} = 0.6 \times 2.35 = 1.41 \text{ Mg-m}$$

$$\text{Momento positivo franja central} = 0.4 \times 2.35 = 0.94 \text{ Mg-m}$$

Estos cálculos se ilustran en la Fig. 10-26a. Las distribuciones de momentos en las franjas de columna y central resultantes se resumen en la Fig. 10-26c. En la Fig. 10-27, los momentos en cada franja han sido divididos entre el ancho de esa franja. Este diagrama es muy similar a la distribución elástica de momentos presentada en la Fig. 10-15d.

3. Cálculo de los momentos en los tramos largos de la losa. Aun cuando no ha sido solicitado en este ejemplo, en el diseño de losas, será necesario ahora repetir los pasos 2(a) hasta 2(d) para la luz larga.

□

Ejemplo 10-4 Cálculo de momentos en un panel exterior de una placa plana

Calcular los momentos positivos y negativos en las franjas central y de columna del panel exterior de la losa entre las columnas B y E en la Fig. 10-28. La losa tiene 20 cm de espesor y soporta una carga muerta superimpuesta de servicio de 125 kg/m^2 y una carga viva de servicio de 300 kg/m^2 . La viga de borde tiene 30 cm de ancho por 40 cm de peralte y ha sido colada monolíticamente con la losa.

Solución:

1. Cálculo de las cargas factorizadas.

$$q_u = 1.2(0.20 \times 2400 + 125) + 1.6(300) = 1210 \text{ kg/m}^2$$

Igual que en el ejemplo anterior, si la norma vigente permite la reducción de la carga viva, la carga de 300 kg/m² pueden ser multiplicados por el factor recomendado. La reducción deberá estar basada en el área $l_1 \times l_2$.

2. Cálculo de los momentos en el tramo BE.

a. Cálculo de l_n y l_2 y división de la losa en franjas central y de columna.

$$l_n = 6.40 - \frac{0.35}{2} - \frac{0.40}{2} = 6.03 \text{ m}$$

$$l_2(\text{prom.}) = 5.80 \text{ m}$$

La franja de columna se extiende el menor valor entre $l_2/4$ y $l_1/4$ a cada lado del eje de columnas. La franja de columna se extiende $6.40/4 = 1.52 \text{ m}$ hacia el eje AD y $5.50/4 = 1.37 \text{ m}$ hacia el eje CF , como se muestra en la Fig. 10-28a. El ancho total de la franja de columna es 2.90 m. La mitad de la franja central entre BE y CF tiene un ancho de 1.37m y la otra mitad es de 1.52m, como se muestra.

b. Cálculo de M_o .

$$M_o = \frac{q_u l_2 l_n^2}{8} = \frac{1.21 \times 5.80 \times 6.03^2}{8} = 31.9 \text{ Mg-m} \tag{10-5}$$

c. División de M_o en momentos positivos y negativos. La distribución del momento hacia las regiones positiva y negativa es según la Tabla 10-2. En la terminología de la Tabla 10-2, ésta es una “losa sin vigas entre apoyos internos y con viga de borde.” Según la tabla, el momento total se divide de acuerdo a lo siguiente,

$$\text{Momento negativo interior } M_u = -0.70M_o = -22.3 \text{ Mg-m}$$

$$\text{Momento positivo } M_u = 0.50M_o = 16.0 \text{ Mg-m}$$

$$\text{Momento negativo exterior } M_u = -0.30M_o = -9.60 \text{ Mg-m}$$

Este cálculo se ilustra en la Fig. 10-29. Los momentos positivo y negativos se muestran en la Fig. 10-28b.

d. División de momentos entre las franjas central y de columna.

Momentos negativos interiores: Esta división es función de $\alpha_{f1} l_2 / l_1$, el cual es nuevamente cero, porque no hay vigas paralelas al eje BE . De la Tabla 10-3,

$$\begin{aligned} \text{Momento negativo interior franja de columna} &= 0.75 \times -22.3 = -16.7 \text{ Mg-m} \\ &= -5.76 \text{ Mg-m/m de ancho de franja de columna} \end{aligned}$$

$$\text{Momento negativo interior franja central} = 0.25 \times -22.3 = -5.60 \text{ Mg-m}$$

La mitad de esto va a cada una de las mitades de franja central adyacentes a la franja de columna BE .

Momentos positivos: De la tabla 10-4,

$$\begin{aligned}\text{Momento positivo franja de columna} &= 0.60 \times 16.0 = 9.60 \text{ Mg-m} \\ &= 3.31 \text{ Mg-m/m de ancho de franja de columna}\end{aligned}$$

$$\text{Momento positivo franja central} = 0.4 \times 16.0 = 6.40 \text{ Mg-m}$$

La mitad de esto va a cada una de las mitades de franja central.

Momentos negativos exteriores: De la Tabla 10-5, el momento negativo exterior se divide según $\alpha_{f1} \ell_2 / \ell_1$, (nuevamente igual a cero porque no hay viga paralela a ℓ_1)

$$\beta_t = \frac{E_{cb} C}{2E_{cs} I_s} \quad (10-12)$$

donde E_{cb} y C se refieren al elemento de torsión mostrado en la Fig. 10-30, y E_{cs} e I_s se refieren a la franja de losa siendo diseñada (la franja de columna y las dos mitades de franja central achuradas en la Fig. 10-28a). Para calcular C , se divide la viga de borde en dos rectángulos. Se considerarán las dos posibilidades mostradas en la Fig. 10-30. Para la Fig. 10-30a, la ecuación (10-13) da

$$C = \frac{(1 - 0.63 \times 30/40) 30^3 \times 40}{3} + \frac{(1 - 0.63 \times 20/20) 20^3 \times 20}{3} = 209,600 \text{ cm}^4$$

Para la Fig. 10-30b, $C = 146,100 \text{ cm}^4$. Se toma el mayor de estos dos valores; por lo tanto $C = 209,600 \text{ cm}^4$.

I_s es el momento de inercia de la franja de losa que está siendo considerada, la cual tiene $b = 5.79 \text{ m}$ y $h = 20 \text{ cm}$. Por lo tanto,

$$I_s = \frac{(579) \times 20^3}{12} = 386,000 \text{ cm}^4$$

Como f'_c es el mismo en la viga y en la losa, $E_{cb} = E_{cs}$ y

$$\beta_t = \frac{209,000}{2(386,000)} = 0.271$$

Interpolando en la Tabla 10-5, se tiene

Para $\beta_t = 0$: 100 por ciento para la franja de columna

Para $\beta_t = 2.5$: 75 por ciento para la franja de columna

Por lo tanto, para $\beta_t = 0.271$, 97.2 por ciento para la franja de columna, y se tiene

$$\text{Momento negativo exterior franja de columna} = 0.972 \times -9.60 = -9.33 \text{ Mg-m}$$

$$\text{Momento negativo exterior franja central} = 0.25 \times -22.3 = -0.27 \text{ Mg-m}$$

La mitad de esto va a cada una de las mitades de franja central adyacentes a la franja de columna *BE*.



10.7.3 Transferencia de Momentos a las Columnas

Columnas exteriores

Cuando el diseño se lleva a cabo con el Método de Diseño Directo, la Sección 13.6.3.6 del la norma ACI 318 especifica que el momento a ser transferido desde una losa hacia una columna de borde es $0.30M_o$. Este momento es utilizado para calcular los esfuerzos de cortante debidos a la transferencia de momento hacia la columna de borde, tal como se presenta en la sección 10-11. Aun cuando no está establecido específicamente en la norma ACI, se puede suponer que este momento es alrededor del centroide del perímetro de cortante. El momento negativo exterior proveniente de los cálculos del método de diseño directo se divide entre las columnas arriba y debajo de la losa en proporción a la rigidez a la flexión de la losa, $4EI/\ell$. Los momentos de columna resultantes son utilizados en el diseño de las columnas.

Columnas interiores

En las columnas interiores, los cálculos de transferencia de momento y el momento total utilizados en el diseño de las columnas arriba y debajo del entrepiso se basan en un momento desbalanceado resultante de la distribución dispereja de la carga viva. El momento desbalanceado se calcula suponiendo que la luz larga adyacente a la columna esta cargada con la carga muerta factorizada y la mitad de la carga viva factorizada, mientras que la luz corta acarrea únicamente la carga muerta factorizada. El momento negativo total desbalanceado en la junta es por lo tanto

$$M = 0.65 \left[\frac{(q_{Du} + 0.5q_{Lu})\ell_2\ell_n^2}{8} - \frac{q'_{Du}\ell'_2(\ell'_n)^2}{8} \right]$$

Donde q_{Du} y q_{Lu} se refieren a la carga muerta y carga viva factorizadas en la luz larga y q'_{Du} se refiere a la carga muerta factorizada en la luz corta adyacente a la columna. Los valores ℓ_2 y ℓ_n se refieren al tramo más largo de las luces adyacentes y los valores ℓ'_2 y ℓ'_n se refieren al tramo más corto. El factor 0.65 es la fracción del momento estático asignado al momento negativo en un apoyo interior según la sección 13.6.3.2 de la norma ACI. Una porción del momento desbalanceado se distribuye entre las losas, y el resto va a las columnas. Se supone que la mayoría del momento es transferido a las columnas, resultando en

$$M_u = 0.07 \left[(q_{Du} + 0.5q_{Lu})\ell_2\ell_n^2 - q'_{Du}\ell'_2(\ell'_n)^2 \right] \quad (10-14)$$

Este momento es utilizado en el cálculo de los esfuerzos cortantes debidos a la transferencia de momento en una columna interior. También, es distribuido entre las columnas arriba y debajo de la junta en proporción a su rigidez a la flexión para determinar los momentos utilizados para diseñar las columnas.

10-8 Métodos de Pórticos Equivalentes

10-9 Uso de Computadores para el Análisis de Pórticos Equivalentes

10-10 Resistencia de Cortante en Losas en Dos Direcciones

Ejemplo 10-11 Revisión del cortante en una y en dos direcciones en una columna interior de una placa plana

La figura adjunta muestra una columna interior en una gran losa placa-plana uniforme. La losa tiene 6 in. de espesor. Usualmente se utiliza un peralte efectivo promedio, d , como el mostrado en la Fig. 10-63, en el cálculo de la resistencia de cortante en losas en dos direcciones. El cortante en una dirección y el de punzonamiento en dos direcciones se revisan usualmente cerca de columnas en donde el refuerzo superior se coloca en dos direcciones principales para resistir momentos flexores negativos. La Sección 7.7.2 de la norma ACI establece que el recubrimiento mínimo para el refuerzo de una losa es $\frac{3}{4}$ in. Por lo tanto, suponiendo que se trata de barras No. 4 (diámetro = 0.5 in.), el valor d promedio para la determinación de la resistencia de cortante de la losa es

$$d(\text{prom}) = 6 \text{ in.} - 0.75 \text{ in.} - 0.5 \text{ in.} = 4.75 \text{ in.}$$

La losa soporta una carga muerta superimpuesta uniforme de 15 psf y una carga viva superimpuesta uniforme de 60 psf. El concreto de peso normal tiene una resistencia a la compresión de 3000 psi. Los momentos transferidos de la losa a la columna (o viceversa) se suponen despreciables. Revise si la capacidad de cortante es adecuada.

Solución:

❶ Determinación de la carga uniforme factorizada.

$$q_u = 1.2 \left(\frac{6}{12} \times 150 + 15 \right) + 1.6 \times 60 = 204 \text{ psf}$$

$$q_u = 0.204 \text{ psf}$$

❷ **Revisión del cortante en una dirección.** El cortante en una dirección es crítico a una distancia d de la cara de la columna. Por tanto, las secciones críticas para cortante en una dirección son A-A y B-B en la Fig. 10-62. Las aéreas con carga que causan cortante en estas secciones se denotan como achuradas. Los bordes externos son los ejes de simetría

en donde $V_u = 0$. Debido a que el área tributaria para la sección A-A es más grande, es ésta la sección más crítica.

- (a) Cálculo de V_u en la sección A-A.

$$V_u = 0.204 \text{ ksf} \times 8.10 \text{ ft} \times 18 \text{ ft} = 29.7 \text{ kips}$$

- (b) Cálculo de ϕV_n para cortante en una dirección. Como no hay refuerzo de cortante, se tiene

$$\phi V_n = \phi V_c$$

$$\phi V_c = 0.75 \left(2\lambda \sqrt{f'_c} b d \right)$$

$$\phi V_c = 0.75 \left(2 \times 1 \sqrt{3000} \times \left(18 \text{ ft} \times \frac{12 \text{ in.}}{\text{ft}} \right) \times 4.75 \text{ in.} \times \frac{1 \text{ kip}}{1000 \text{ lb}} \right) = 84.3$$

Como $\phi V_c > V_u$, la losa resiste el cortante en una dirección.

❸ **Revisión del cortante de punzonamiento en dos direcciones.** El cortante de punzonamiento es crítico en una sección rectangular ubicada a $d/2$ de la cara de la columna, como se muestra en la Fig. 10-64. La carga en el área achurada causa cortante en el perímetro crítico. De nuevo, los bordes externos son los ejes de simetría en donde $V_u = 0$.

- (a) Cálculo de V_u en el perímetro crítico para cortante en dos direcciones.

$$V_u = 0.204 \text{ ksf} \left[(18 \text{ ft} \times 18 \text{ ft}) - \left(\frac{16.75 \text{ in.}}{12} \times \frac{30.75 \text{ in.}}{12} \right) \text{ft}^2 \right] = 65.4 \text{ kips}$$

- (b) Cálculo de ϕV_n para la sección crítica. La longitud del perímetro crítico es

$$b_o = 2(16.75 + 30.75) = 95 \text{ in.}$$

Entonces, V_c se debe tomar como el menor valor de los siguientes tres resultados. Según la ecuación 10-24,

$$V_c = 4\lambda \sqrt{f'_c} b_o d$$

$$V_c = 4 \times 1 \sqrt{3000} \times 95 \times 4.75 \times \frac{1 \text{ kip}}{1000 \text{ lb}} = 98.9 \text{ kips}$$

Para la ecuación 10-25,

$$\beta = \frac{26}{12} = 2.17$$

Por tanto,

$$V_c = \left(2 + \frac{4}{\beta} \right) \lambda \sqrt{f'_c} b_o d$$

$$V_c = \left(2 + \frac{4}{2.17} \right) \times 1 \sqrt{3000} \times 95 \times 4.75 \times \frac{1 \text{ kip}}{1000 \text{ lb}} = 95.0 \text{ kips}$$

Para la ecuación 10-26, $\alpha_s = 40$ para esta columna interior. Por tanto,

$$V_c = \left(\frac{\alpha_s d}{b_o} + 2 \right) \lambda \sqrt{f'_c} b_o d$$

$$V_c = \left(\frac{40 \times 4.75}{95} + 2 \right) \times 1 \sqrt{3000} \times 95 \times 4.75 \times \frac{1 \text{ kip}}{1000 \text{ lb}} = 98.9 \text{ kips}$$

Finalmente, el menor valor es $V_c = 95.0$ kips, de manera que $\phi V_c = 0.75 \times 95.0 = 71.3$ kips. **En vista de que ϕV_c excede V_u (65.4 kips), la losa se considera apropiada.**

□

10-11 Transferencia de cortante y momento combinados en losas en dos direcciones

10.11.1 Conexiones losa-columna cargadas con cortante y momento

Cuando cargas laterales o cargas gravitacionales desbalanceadas causan una transferencia de momento entre la losa y la columna, el comportamiento es complejo—involucra flexión, cortante y torsión en la porción de la losa adherida a la columna, como se muestra en las Figs. 10-71a y 10-72a. Dependiendo de las resistencias relativas en esos tres modos, las fallas pueden tomar varias formas. Investigación en transferencia de momento y cortante en losas se presenta en (ACI-ASCE Committee 426, August 1974), (Regan & Braestrup, 1985) y (Hawkins, 1974).

Se revisan aquí brevemente los métodos para el diseño de conexiones losa-columna que transfieren cortante y momento, seguidos por un ejemplo usando el método de diseño presentado en el Comentario de la norma **ACI 318-11**.

1. **Método de viga.** El método más fundamental de diseñar para transferencia de momento y cortante a columnas encontrado en la literatura considera la conexión como consistiendo de la región de la junta más porciones pequeñas de las franjas de losa y vigas proyectándose desde cada cara de la junta donde haya una losa adyacente (Hawkins, 1974). Estas franjas están solicitadas por momentos, cortantes y torsiones, y fallan cuando los esfuerzos combinados corresponden a uno o más de los modos individuales de falla de los miembros que ingresan a la junta. Para una viga de borde, el modelo da un estimado de la distribución final de los momentos hacia la columna. El modelo de viga solamente es conceptual y no ha sido desarrollado suficientemente como para ser usado en diseño.
2. **Método tradicional de diseño del Comentario de la Norma ACI 318 (Método J_c).** El método tradicional de ACI usado para calcular el esfuerzo cortante máximo en la sección crítica alrededor de la columna en la conexión losa-columna que transfiere ambos cortante y momento está dado por

$$v_u = \frac{V_u}{b_o d} \pm \frac{\gamma_v M_u c}{J_c} \quad (10-30)$$

donde b_o es la longitud del perímetro crítico de cortante, d es el peralte efectivo de la losa, y J_c es un momento polar de inercia efectivo para la sección crítica de cortante que será definido con más detalle más adelante. V_u es el cortante factorizado que está siendo transferido de la losa a la columna, y se le supone como actuando a través del centroide de la sección crítica de cortante. M_u es el momento factorizado que está siendo transferido en la conexión, y c es la medida desde el centroide del perímetro crítico de cortante hasta el borde del perímetro en donde el esfuerzo, v_u , está siendo calculado. γ_v es la fracción del momento que es transferida por esfuerzos de cortante en la sección crítica y es definido como

$$\gamma_v = 1 - \gamma_f \quad (10-31)$$

donde γ_f es la fracción del momento que es transferida mediante flexión directa. El refuerzo ya diseñado para flexión en esta región puede ser usado para satisfacer en todo o en parte este requisito de resistencia.

Para losas sin refuerzo de cortante, el valor máximo de v_u de la ecuación (10-30) debe satisfacer límites de esfuerzo basados en las ecuaciones (10-24), (10-25), y (10-26) en una sección crítica ubicada a $d/2$ por fuera de la cara de la columna. Se supone que los esfuerzos de cortante debidos al cortante directo, V_u , mostrados en las Figs. 10-71b y 10-72b, pueden ser sumados a los esfuerzos de cortante en la misma sección debido a la transferencia de momento, M_u , mostrados en las Figs. 10-71c y 10-72c. Se estima que ocurre falla cuando la suma máxima de los esfuerzos de cortante alcanza un valor límite $\phi v_c = \phi V_c / (b_o d)$.

Se requerirá proveer suficiente refuerzo para la losa dentro de un *ancho de transferencia* para acomodar la fracción del momento de transferencia, $\gamma_f M_u$. La sección 13.5.3.2 de la norma **ACI 318** define el *ancho de transferencia* como el ancho de columna, c_2 , más 1.5 veces el espesor de la losa o del ábaco a cada lado de la columna (Figs. 10-73a y b). Para momentos transferidos perpendicularmente al borde de una losa en donde no esté presente una viga de borde, las recomendaciones de diseño del comité ACI 352 y la sección 21.3.6.1 de la norma **ACI 318** exigen que se use un ancho de transferencia menor (Fig. 10-73c). Aun cuando el reporte del Comité ACI 352 (ACI Committee 352, 1988) y el capítulo 21 del **ACI 318** tratan sobre cargas sísmicas, resultados de pruebas reportadas por Simmonds y Alexander (Simmonds, 1987) mostrados en la Fig. 10-74 indican que las barras de la losa que no estén ancladas en la columna no resultarán muy efectivas para transferir momento hacia la columna. Por tanto, se recomienda que el ancho de transferencia reducido mostrado en la Fig. 10-73c sea usado para todos los casos de diseño—sísmicos y no sísmicos. También se recomienda que los diseñadores sigan las recomendaciones para detallado de refuerzo provistos por el reporte del Comité 352 para proveer algo de resistencia torsional al borde de la losa adyacente a la columna.

El Comité 326 en su reporte de 1962 recomendaba que cuando se transfirieran momentos perpendiculares al borde de la losa, se usara $\gamma_v = 0.20$. Esto implicaba

que el 80 por ciento del momento era transferido por el refuerzo de momento y el 20 por ciento por esfuerzos de cortante en la sección crítica de cortante ubicada a $d/2$ afuera de la cara de la columna. Basados en sus pruebas en juntas interiores losa-columna con columnas cuadradas, Hanson y Hanson (Hanson & Hanson, 1968) propusieron un $\gamma_f = 0.60$. Por tanto, ellos supusieron que 60 por ciento del momento era transferido por refuerzo de flexión en la losa. Esto duplicó γ_v para la losa comparado con lo recomendado para conexiones de borde, duplicándose de esta forma los esfuerzos de cortante debidos a transferencia de momento.

La sección 13.5.3.2 de la norma ACI define la fracción del momento transferido por flexión, γ_f , como

$$\gamma_f = \frac{1}{1 + (2/3)\sqrt{b_1/b_2}} \quad (10-32)$$

donde b_1 es el ancho total de la sección crítica medida perpendicularmente al eje alrededor del cual actúa el momento, y b_2 es el ancho total paralelo al eje (Fig. 10-75).

Para una sección cuadrada crítica donde $b_1 = b_2$, γ_f es 0.60 y $\gamma_v = 1 - \gamma_f$ es 0.40, lo cual significa que el 60 por ciento del momento desbalanceado es transferido a la columna por el refuerzo de flexión en la losa y 40 por ciento mediante esfuerzos excéntricos de cortante. La ecuación (10-32) fue calibrada para dar $\gamma_f = 0.6$ cuando $b_1 = b_2$, según lo propuesto por (Hanson & Hanson, 1968) para proveer una transición a $\gamma_f = 1$ para una losa adherida a un lado de un muro y a γ_f acercándose a cero para una losa apoyada en el extremo de un muro largo.

Sustentado en resultados de pruebas experimentales, el Comité 352 del ACI mostró que un diagrama de interacción de cota inferior para momento, M , y cortante, V , combinados pueden ser representados por las dos líneas de trazos en la Fig. 10-76. El área dentro de esas líneas no incluye ninguna falla. Esta relación puede ser usada para modificar el valor de γ_f de forma tal que la fracción del momento supuestamente a ser transferido por flexión es incrementado mientras la fracción transferida por cortante es reducida.

La sección 13.5.3.3 de la norma ACI permite al diseñador incrementar γ_f de 0.6 a 1.0 si el cortante factorizado, V_u , en la conexión es menor que 0.75 veces la resistencia de diseño de cortante, ϕV_c , encontrado usando el V_c mínimo de las ecuaciones (10-24), (10-25) y (10-26). El mismo incremento de γ_f es permitido en conexiones esquineras cuando V_u es menor o igual a $0.5 \times \phi V_c$. Un incremento de 25 por ciento de γ_f es permitido en conexiones interiores cuando V_u es menor o igual que $0.4 \times \phi V_c$.

- 3. Transferencia de momento y cortante en columnas de borde—Método de análisis alterno.** El procedimiento tradicional de ACI discutido en la subsección anterior involucra algunos cálculos detallados para ubicar el centroide de cortante y para evaluar J_c para una conexión exterior cuando el momento está siendo transferido perpendicularmente al borde de la losa. Dos autores (Alexander & Simmonds, 2005) han propuesto una expresión alternativa y más fácil para evaluar el esfuerzo cortante máximo debido a la transferencia de cortante y momento en tales conexiones de borde. Este método será presentado después del desarrollo de las expresiones para el procedimiento tradicional de ACI.

10.11.2 Propiedades del perímetro de cortante

PROPIEDADES DE LOS PERÍMETROS CRÍTICOS DE CORTANTE EN CONEXIONES LOSA-COLUMNA—MÉTODO DEL COMENTARIO DE LA NORMA ACI

El procedimiento de diseño para análisis de la transferencia de cortante y momento en conexiones losa-columna de ACI sirve para las conexiones interiores, de borde y esquinas mostradas en la Fig. 10-75 y usa la ecuación (10-30) para calcular los esfuerzos en la sección crítica de cortante. Cuando se calculan las propiedades de sección de diversos perímetros de cortante, éstos perímetros generalmente se subdividen en un número de lados individuales similar al mostrado en la Fig. 10-77.

El término J_c se define en el Comentario de la norma ACI como una propiedad análoga al *momento polar de inercia* del perímetro de cortante en la conexión. Este término se usa para tomar en cuenta torsiones y cortantes en las caras del perímetro de cortante. Para calcular J_c , las secciones críticas de cortante se subdividen en dos, tres o cuatro lados individuales, como se muestra en la Fig. 10-75. El término J_c es la suma de los diferentes valores de momento polar de inercia efectivos calculados para cada uno de los lados.

MOMENTO POLAR DE INERCIA, J_c , PARA UN LADO AISLADO DE UN PERÍMETRO CRÍTICO DE CORTANTE

Los textos de estática o de mecánica de materiales presentan los procedimientos de cálculo de los momentos de inercia y los momentos polares de inercia de áreas rectangulares que son similares a los lados individuales de la sección crítica alrededor de una columna. Normalmente, estas discusiones sobre momentos de inercia se limitan a casos donde la superficie del área en consideración puede ser graficada sobre una hoja de papel. El concepto se desvirtúa cuando se aplica a secciones críticas de cortante abiertas tridimensionales como las mostradas en la Fig. 10-75.

Para calcular los momentos de inercia del perímetro crítico de cortante, la sección crítica se descompone en de dos a cuatro placas. El rectángulo en la Fig. 10-77 representa el lado $A-D$ del perímetro de cortante de tres lados de la Fig. 10-75b. El momento polar de inercia de este rectángulo alrededor del eje $z-z$, perpendicular al plano del rectángulo y desplazado una distancia \bar{x} desde el centroide del rectángulo, está dado por

$$J_c = (I_x + I_y) + A\bar{x}^2$$

$$J_c = \left(\frac{bd^3}{12} + \frac{db^3}{12} \right) + (bd)\bar{x}^2 \quad (10-33)$$

PROPIEDADES DE UNA SECCIÓN RECTANGULAR CERRADA CRÍTICA DE CORTANTE

El centroide de la sección crítica de cortante de cuatro lados mostrada en la Fig. 10-75a pasa a través del centroide de los lados *DA* y *CB*. Por tanto, $c_{AB} = c_{CD} = b_1/2$. El cálculo del momento polar de inercia efectivo de la sección rectangular cerrada mostrada en la Fig. 10-75a es similar al cálculo de J_c para un lado aislado perpendicular al eje *x-x*, más términos para los dos lados paralelos al eje.

$$J_c = J_c (\text{alrededor de eje } x \text{ para caras } AD \text{ y } BC) + A\bar{x}^2 (\text{caras } AB \text{ y } CD)$$

$$J_c = 2 \left(\frac{b_1 d^3}{12} + \frac{d b_1^3}{12} \right) + 2(b_2 d) \left(\frac{b_1}{2} \right)^2 \quad (10-34)$$

donde

$$b_1 = c_1 + 2(d/2)$$

= longitud de los lados del perímetro de cortante perpendicular al eje de flexión

$$b_2 = c_2 + 2(d/2)$$

= longitud de los lados del perímetro de cortante paralelo al eje de flexión

c_1 = ancho de columna perpendicular al eje de flexión

c_2 = ancho de columna paralelo al eje de flexión

Si se encuentran presentes aberturas grandes adyacentes a las columnas, el perímetro de cortante será discontinuo, como se muestra en la Fig. 10-57a. Si esto ocurre, los cálculos de la ubicación del centroide y de J_c deben incluir el efecto de las aberturas.

COLUMNAS DE BORDE

En el caso de una columna de borde con un momento actuando alrededor del eje paralelo al borde, el centroide del perímetro crítico está más cerca de la cara interna de la columna que de la cara externa (Fig. 10-75b). Como resultado, los esfuerzos de cortante debidos al momento mostrado en la Fig. 10-72c son mayores en las esquinas externas del perímetro de cortante. Si M_u es grande y V_u es pequeño, en estos puntos puede ocurrir un esfuerzo de cortante negativo. Si M_u debido a la combinación de cargas laterales y cargas gravitacionales es positivo en esta junta (en vez de negativo como se muestra en la Fig. 10-72c), el esfuerzo de cortante mayor ocurrirá en las esquinas externas.

Momentos alrededor de un eje paralelo al borde (eje *z-z* en Fig. 10-75b). Para el perímetro de tres lados mostrado en la Fig. 10-75b y tomando b_1 como la longitud del lado perpendicular al borde, como se muestra, la ubicación del eje centroidal *z-z* se calcula como:

$$c_{AB} = \frac{\text{momento de área de los lados alrededor de } AB}{\text{área de los lados}}$$

$$c_{AB} = \frac{2(b_1d)b_1/2}{2(b_1d) + b_2d} \tag{10-35}$$

El momento polar J_c del perímetro de cortante está dado por

$$J_c = J_c (\text{alrededor de eje } z \text{ para caras } AD \text{ y } BC) + A\bar{x}^2 (\text{cara } AB)$$

$$J_c = 2 \left[\frac{b_1d^3}{12} + \frac{db_1^3}{12} + (b_1d) \left(\frac{b_1}{2} - c_{AB}^2 \right) \right] + b_2dc_{AB}^2 \tag{10-36}$$

Momentos alrededor de un eje perpendicular al borde (eje w-w en Fig. 10-75b).

Cuando se considera este caso, las definiciones de b_1 y b_2 , como se muestran en la Fig. 10-75b, deben ser revertidas para su uso en la ecuación (10-32). A continuación, sin embargo, los valores de b_1 y b_2 serán como se muestran en la Fig. 10-75b. Para este caso, la ubicación del centroide es $c_{BC} = c_{AD} = c = b_2/2$. El momento polar de inercia efectivo alrededor del eje w para la sección de tres lados en la Fig. 10-75b es

$$J_c = J_c (\text{alrededor de eje } w \text{ para cara } AB) + A\bar{x}^2 (\text{caras } BC \text{ y } AD)$$

$$J_c = \left(\frac{b_2d^3}{12} + \frac{db_2^3}{12} \right) + 2(b_1d)c^2 \tag{10-37}$$

COLUMNAS ESQUINERAS

Para el perímetro de dos lados mostrado en la Fig. 10-75c con dimensiones b_1 y b_2 , la ubicación del eje centroidal z-z es

$$c_{AB} = \frac{(b_1d)b_1/2}{b_1d + b_2d}$$

El momento polar de inercia del perímetro de cortante es

$$J_c = J_c (\text{alrededor de eje } z \text{ para cara } BC) + A\bar{x}^2 (\text{cara } AB)$$

$$J_c = \left[\frac{b_1d^3}{12} + \frac{db_1^3}{12} + (b_1d) \left(\frac{b_1}{2} - c_{AB} \right)^2 \right] + b_2dc_{AB}^2$$

COLUMNAS CIRCULARES

Para cálculos de cortante y momento combinados, el comité 426 del ACI-ASCE recomienda que el perímetro de cortante de columnas circulares se base en el de una columna cuadrada con el mismo centroide y con la misma longitud de perímetro. En este caso, la columna cuadrada equivalente tendrá lados de longitud $c = \sqrt{\pi}d_c/2 = 0.886d_c$, donde d_c es el diámetro de la columna. En la Fig. 10-78 se ilustran dos casos.

10.11.3 Patrones de carga para esfuerzo cortante máximo debido a transferencia de cortante y momento combinados

El esfuerzo cortante máximo en las secciones críticas alrededor de columnas que sirven de apoyo a una losa deben ser calculados de un *caso de carga consistente* que produce una suma de esfuerzos de cortante debidos a carga gravitacional y momento que se espera sea un máximo. El término *caso de carga consistente* implica una combinación de cargas que se espera ocurran juntas.

Para columnas interiores. El esfuerzo cortante máximo ocurre generalmente cuando todos los paneles del piso o del techo que rodean una columna son cargados con las cargas muerta y viva factorizadas. Sin embargo, si dos paneles adyacentes tienen longitudes significativamente diferentes, se debe considerar un segundo caso de carga en donde solo el panel con la luz más larga adyacente es cargado con la carga viva factorizada completa. Este caso de carga producirá una transferencia de momento mayor, pero una fuerza de cortante menor.

Para columnas de borde. (a) Para el caso de momentos que actúan alrededor de un eje paralelo al borde, la carga crítica para esfuerzo cortante máximo ocurre con las cargas muerta y viva factorizadas actuando simultáneamente en ambos paneles de borde adyacentes a la columna. (b) Para el caso de momentos que actúan alrededor de un eje perpendicular al borde, podría ser necesario considerar dos casos. Para un caso, se deben aplicar cargas muerta y viva factorizadas a ambos paneles adyacentes. Este caso producirá la fuerza cortante máxima, pero un momento de transferencia menor. Para el otro caso, solo se debe aplicar carga viva factorizada al panel más largo de los dos paneles adyacentes. Este caso producirá un momento de transferencia mayor, pero una fuerza de cortante menor.

Para columnas esquineras. El esfuerzo cortante máximo ocurre normalmente debido al caso de carga donde se aplican cargas muerta y viva factorizadas a todos los paneles del sistema de piso.

10.11.4 Cálculo del momento alrededor del centroide del perímetro de cortante

La distribución de esfuerzos calculada con la ecuación (10-30) e ilustrada en la Fig. 10-72 supone que V_u actúa a través del centroide del perímetro de cortante y que M_u actúa alrededor del eje centroidal de este perímetro. Cuando se usa software de análisis estructural, los valores de V_u y M_u pueden ser calculados ya sea en un punto nodal ubicado en el centroide de la columna o en la cara de la columna sobre la que se apoya la losa. Para el método de diseño directo, V_u y M_u se calculan normalmente en la cara de la columna. La única excepción es para el momento de transferencia en una columna de borde donde la sección 13.6.3.6 de la norma ACI fija el valor igual a $0.3M_o$ y se supone que actúa en el centroide del perímetro crítico de cortante.

Después de determinar el centroide del perímetro cortante, se puede usar el equilibrio de un diagrama de cuerpo libre para determinar los valores para V_u y M_u que actúan en el centroide. La Fig. 10-79a representa el caso de una columna exterior con el cortante y el momento calculados inicialmente como actuando en la cara de la columna que soporta la

losa. Un cálculo de equilibrio puede ser usado para determinar el momento y el cortante resultantes en el centroide del perímetro crítico, como se indica en la Fig. 10-79a. Un cálculo similar puede ser usado si el cortante y el momento se consideran inicialmente como actuando en el centroide de la columna, como se muestra en la Fig. 10-79b. Para una columna interior, el eje centroidal para el perímetro crítico de cortante debería pasar por el centroide de la columna. Por tanto, si el cortante y el momento se determinan inicialmente en las caras de una columna interior, se puede usar el cálculo de equilibrio mostrado en la Fig. 10-79c para determinar el cortante y el momento en el centroide del perímetro de cortante. Si debido a aberturas cercanas a una columna interior el centroide del perímetro de cortante no coincide con el centroide de la columna, se pueden hacer ajustes simples a los cálculos mostrados en la Fig. 10-79c.

10.11.5 Consideración de transferencia de momento en ambas direcciones principales

La ecuación (10-30) para la revisión de la transferencia de cortante y momento combinados en una conexión losa-columna fue desarrollada inicialmente en los años 60. Esta expresión se obtuvo suponiendo la transferencia de momento de cada dirección principal por separado. Para aplicaciones típicas en edificios, el enfoque común es que el ingeniero estructural use esta ecuación para revisar el esfuerzo cortante máximo en el perímetro de la sección crítica de cortante resultante de la transferencia de cortante y momento en una única dirección a la vez. Por supuesto, esta revisión debe realizarse en ambas direcciones principales usando casos de carga consistentes, tal como se discutió anteriormente.

Ocasionalmente, debido a longitudes de paneles y distribución de columnas inusuales, el ingeniero estructural puede decidir que no es apropiado revisar el esfuerzo cortante máximo debido a momentos actuando simultáneamente alrededor de ambos ejes principales. Para tales casos, un tercer término sería añadido a la ecuación (10-30) como se muestra en la siguiente expresión.

$$v_u = \frac{V_u}{b_o d} \pm \frac{\gamma_v M_{u1} c}{J_{c1}} \pm \frac{\gamma_v M_{u2} c}{J_{c2}} \quad (10-40)$$

donde V_u , M_{u1} y M_{u2} se refieren al cortante y los momentos alrededor de los dos ejes principales para un caso consistente de carga, y J_{c1} y J_{c2} (y los correspondientes valores de c) se refieren a propiedades del perímetro crítico de cortante, según se definieron previamente (Fig. 10-75). Se debe notar que este procedimiento resultaría en el cálculo del esfuerzo cortante máximo en un punto, mientras que las disposiciones de la norma ACI se refieren únicamente a límites de esfuerzo sobre un área definida. Por tanto, si se usa este procedimiento de cálculo, el diseñador estructural tendrá que usar criterio ingenieril cuando compare el esfuerzo de cortante máximo con el límite ϕv_n (o más comúnmente ϕv_c). En el Anexo B del reporte del Comité 421 de ACI, se supone que un sobreesfuerzo de 15 por ciento es aceptable debido a la anticipada redistribución de esfuerzos alejándose de la esquina más esforzada del perímetro crítico.

10.11.6 Análisis alterno del máximo esfuerzo de cortante debido a transferencia de cortante y momento combinados en conexiones exteriores

En un artículo reciente (Alexander & Simmonds, 2005), Alexander y Simmonds presentan las siguientes expresiones para la determinación del esfuerzo cortante máximo en la sección crítica en la cara frontal de una columna exterior resultante de la transferencia de cortante y momento actuando alrededor del eje paralelo al borde de la losa.

$$v_u = 0.65 \times \frac{V_u + \frac{M_{u,cara}}{4d}}{(c_1 + c_2)d} \quad (10-41)$$

V_u es el cortante factorizado a ser transferido, $M_{u,cara}$ es el momento factorizado en la cara del la columna, d es el peralte efectivo de la losa, y c_1 y c_2 son las dimensiones de la columna perpendicular y paralela al borde de la losa (Fig. 10-76c). Alexander y Simmonds establecen que la ecuación (10-41) es suficientemente simple como para ser usada en el dimensionamiento preliminar de la losa o del ábaco, y que provee suficiente concordancia con los esfuerzos máximos obtenidos con la ecuación (10-30). Una comparación de los resultados de las ecuaciones (10-30) y (10-41) se presenta en el ejemplo 10-13.

10.11.7 Refuerzo de cortante para conexiones losa-columna que transfieren cortante y momento

La sección 11.11.7.2 de la norma ACI establece que los esfuerzos de cortante que resultan de la transferencia de cortante y momento combinados debe suponerse como variando linealmente alrededor del centroide de la sección crítica definida en la sección 11.11.1.2. La norma 11.11.2 limita el esfuerzo cortante máximo en el perímetro crítico según:

- (a) En losas sin refuerzo de cortante, el esfuerzo factorizado de cortante no deberá exceder

$$\phi v_n = \phi V_c / b_o d \quad (10-42)$$

donde V_c se toma como la resistencia de cortante mas pequeña según las ecuaciones (10-24), (10-25) y (10-26).

- (b) En losas con refuerzo de cortante, el esfuerzo factorizado de cortante no deberá exceder

$$\phi v_n = \phi (V_c + V_s) / (b_o d) \quad (10-18)$$

donde V_c se limita a $2\lambda\sqrt{f'_c}$ cuando se usa refuerzo de cortante tipo estribo y a $3\lambda\sqrt{f'_c}$ cuando se usa refuerzo de cortante tipo encabezado. El cortante V_s se definió previamente en la ecuación (10-29). La sección 11.11.7.2 de la norma ACI también indica que el diseño debe tomar en consideración la variación en esfuerzos de cortante alrededor de la columna, y limita el esfuerzo cortante

máximo a $2\lambda\sqrt{f'_c}$ en la sección crítica ubicada a $d/2$ de la línea de brazos de estribos o cabezas de cortante que se extiende hacia afuera de la columna. Como se muestra en la Fig. 10-70, este perímetro crítico de cortante externo puede tomar una forma inusual que no está cubierta por las expresiones para J_c para los perímetros críticos mostrados en la Fig. 10-75. Elgabry y Ghali desarrollaron expresiones para manejar estas secciones que subsecuentemente fueron usadas en el reporte del Comité 421 del ACI.

Ejemplo 10-13 Revisión de transferencia de cortante y momento combinados en una columna de borde.

Una columna de 12 in. por 16 in. está ubicada a 4 in. del borde de una losa plana sin vigas de borde, como se muestra en la Fig. 10-80. La losa es de 6.5 in. de espesor, con un peralte efectivo de 5.5 in. El concreto de peso normal tiene una resistencia de 3500 psi y la resistencia de fluencia del refuerzo es de 60,000 psi. El método directo de diseño indica un momento estático, M_o , de 152 kip-ft en el panel externo. El cortante del panel exterior es 31.3 kips. La porción de la losa fuera de la línea de centro de la columna produce una fuerza de cortante factorizada de 4.0 kips actuando a 6 in. fuera de la línea de centro de la columna. La carga que causa el momento alrededor del eje perpendicular al borde es menos crítico que el momento alrededor del eje $z-z$ (eje paralelo al borde). Usar los factores de carga de la sección 9.2 de la norma ACI.

Solución:

① Ubicación del perímetro de cortante crítico. El perímetro de cortante crítico está localizado a $d/2$ de las caras de la columna. Como el borde de la losa está a menos de $2h$ de la cara externa de la columna, se toma un perímetro similar al mostrado en la Fig. 10-57b como el crítico.

② Cálculo del centroide del perímetro de cortante.

$$c_{AB} = \frac{\Sigma Ay}{A} \text{ (donde } y \text{ se mide desde } AB)$$

$$c_{AB} = \frac{2(18.75 \times 5.5)(18.75/2)}{2(18.75 \times 5.5) + 21.5 \times 5.5} = 5.96 \text{ in.}$$

Por tanto, $c_{AB} = 5.96$ in. y $c_{CD} = 12.79$ in.

③ Cálculo del momento alrededor del centroide del perímetro de cortante. Para la porción de la losa que cubre de la línea de centro de la columna de borde hasta la primera columna interior, la sección 13.6.3.6 de la norma ACI define el momento a transferir en la columna de borde como $0.3M_o = 0.3 \times 152 = 45.6$ kip-ft. Se supone que éste es

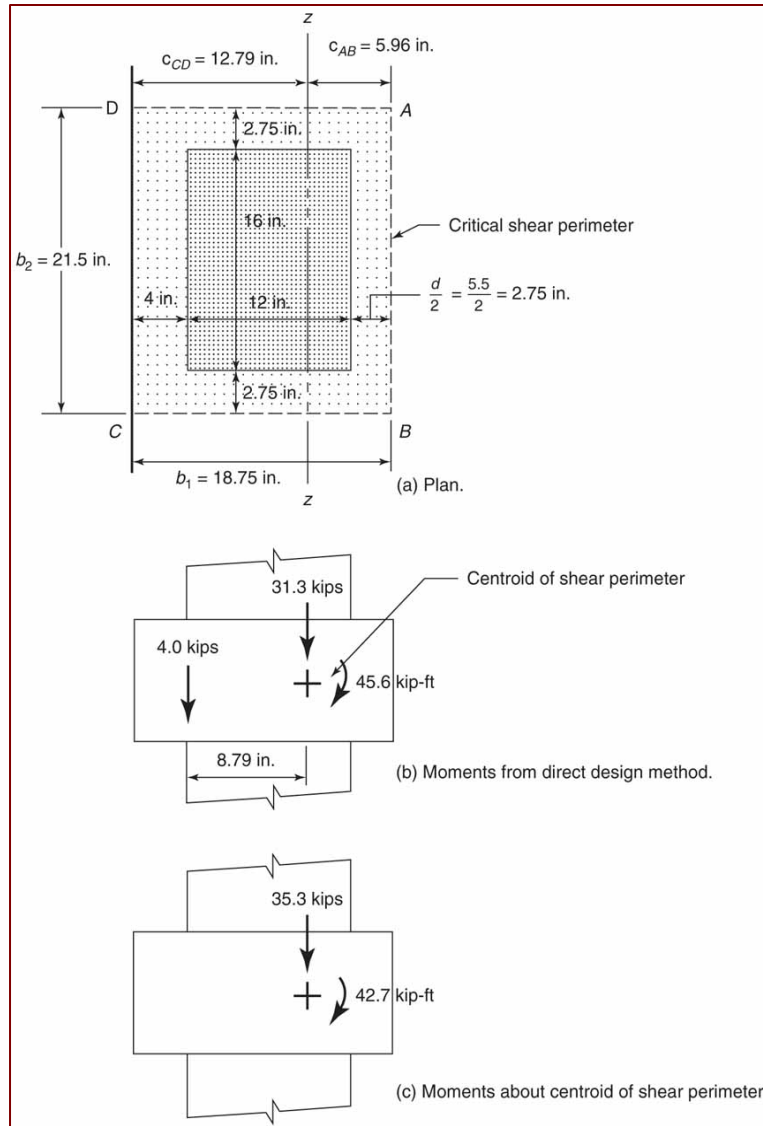


Fig. 10-80 Junta de unión losa-columna para el Ejemplo 10-13.

alrededor del centroide del perímetro de cortante y que el V_u del panel exterior actúa a través de este punto. La porción de la losa fuera de la línea de centro de la columna tiene un cortante de $V_{uc} = 4$ kips actuando a $6 \text{ in.} + 2.79 \text{ in.}$ del centroide del perímetro de cortante. El momento total alrededor del centroide del perímetro de cortante es

$$M_u = 45.6 \text{ kip-ft} - 4 \text{ kips} \times 8.79 / 12 \text{ ft} = 42.7 \text{ kip-ft}$$

El cortante total a ser transferido es

$$V_u = 31.3 \text{ kips} + 4 \text{ kips} = 35.3 \text{ kips}$$

④ **Cálculo de ϕV_c y $V_u / \phi V_c$.** V_c es el valor más pequeño dado por las ecuaciones (10-24) a (10-26). Como se usan los factores de carga de la sección 9.2 de la norma ACI, se usará el factor de reducción de la resistencia $\phi = 0.75$. Revisar cual ecuación rige para V_c . Se considera la forma de la columna y se inicia con la ecuación (10-25):

$$V_c = \left(2 + \frac{4}{\beta}\right) \lambda \sqrt{f'_c} b_o d$$

donde

$$\beta = \frac{\text{lado largo de la columna}}{\text{lado corto de la columna}} = \frac{16}{12} = 1.33$$

$$(2 + 4/1.33) = 5 > 4 \text{ (no rige)}$$

Se considera el tamaño del perímetro crítico y se revisa la ecuación (10-26):

$$V_c = \left(\frac{\alpha_s d}{b_o} + 2\right) \sqrt{f'_c} b_o d$$

donde $\alpha_s = 30$ para una columna de borde y $b_o = 2 \times 18.75 \text{ in.} + 21.5 \text{ in.} = 59 \text{ in.}$

Por tanto, $(30 \times 5.5/59) + 2 = 4.80 > 4$ (no rige)

Entonces, usar la ecuación (10-24) con un coeficiente de 4:

$$V_c = 4 \lambda \sqrt{f'_c} b_o d$$

$$\phi V_c = 0.75 \times 4 \times 1 \sqrt{3500} \times 59 \times 5.5 = 57.6 \text{ kips}$$

De esta forma, $\phi V_c = 57.6 \text{ kips}$, y $V_u/\phi V_c = 35.3 \text{ kips}/57.6 \text{ kips} = 0.613$.

5 Determinar la fracción del momento transferida por flexión, γ_f .

$$\gamma_f = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{18.75}{21.5}}} = 0.616$$

La norma ACI en su sección 13.5.3.3 permite que γ_f sea incrementado hasta 1.0 si $V_u/\phi V_c$ no excede 0.75 y si la cuantía de refuerzo resultante $\rho \leq 0.375 \rho_b$ dentro de un ancho $c_2 + 3h$ centrado en la columna. Del paso 4, $V_u/\phi V_c = 0.613$. Por tanto, suponer $\gamma_f = 1.0$ y revisar la cantidad de refuerzo requerida.

6 Diseño del refuerzo para transferencia de momento por flexión.

Ancho efectivo para flexión: $c_2 + 3h = 16 \text{ in.} + 3 \times 6.5 \text{ in.} = 35.5 \text{ in.}$

Momento: $1.0 \times 42.7 \text{ kip-ft} = 42.7 \text{ kip-ft} = 42,700 \text{ lb-ft}$

Suponer que $jd = 0.975d$. Entonces

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y jd} = \frac{42,700 \text{ lb-ft} \times 12 \text{ in./ft}}{0.9 \times 60,000 \text{ psi} \times 0.95 \times 5.5 \text{ in.}} = 1.82 \text{ in.}^2$$

Probar con diez barras No. 4 = 2.00 in.² Como este cálculo está basado en una estimación de jd , se debe calcular a para $A_s = 2.00 \text{ in.}^2$; después se debe recalculer A_s usando ese valor de a :

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{2.00 \times 60,000}{0.85 \times 3500 \times 35.5} = 1.14 \text{ in.}$$

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y (d - a/2)} = \frac{42,700 \times 12}{0.9 \times 60,000 (5.5 - 1.14/2)} = 1.92 \text{ in.}^2$$

Usar diez barras No. 4 = 2.00 in.² Para esto, A_s se calcula como

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{2.00 \text{ in.}^2}{35.5 \text{ in.} \times 5.5 \text{ in.}} = 0.0102$$

de la ecuación (4-24),

$$\rho_b = \frac{0.85 \beta_1 f'_c}{f_y} \left(\frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_y} \right) = \frac{0.85 \times 0.85 \times 3500}{60,000} \left(\frac{0.003}{0.003 + 0.00207} \right) = 0.0249$$

y

$$0.375 \rho_b = 0.00935$$

Como $\rho > 0.375 \rho_b$, γ_f no puede ser incrementado a 1.0. Se supondrá que se puede incrementar a algún valor entre 0.616 y 1.0, siempre que el valor de ρ para el momento resistente no exceda $0.375 \rho_b$. Se proveerán arbitrariamente ocho barras No. 4 con $A_s = 1.60 \text{ in.}^2$ Estas darían $\rho < 0.375 \rho_b$ y transferirían $\phi M_n = 36.3 \text{ kip-ft} = \gamma_f M_u$. El momento transferido mediante cortante es $\gamma_v M_u = 42.7 \text{ kip-ft} - 36.3 \text{ kip-ft} = 6.4 \text{ kip-ft}$.

7 Cálculo del momento torsional de inercia J_c . La ecuación 10-36 aplica para momentos alrededor del eje z-z. De esa ecuación

$$\begin{aligned} J_c &= 2 \left(\frac{b_1 d^3}{12} \right) + 2 \left(\frac{d b_1^3}{12} \right) + 2 (b_1 d) \left(\frac{b_1}{2} - c_{AB} \right)^2 + (b_2 d) c_{AB}^2 \\ &= \frac{2 \times 18.75 \times 5.5^3}{12} + \frac{2 \times 5.5 \times 18.75^3}{12} \\ &\quad + 2 (18.75 \times 5.5) \left(\frac{18.75}{2} - 5.96 \right)^2 + (21.5 \times 5.5) 5.96^2 \\ &= 13,200 \text{ in.}^4 \end{aligned}$$

8 Cálculo de los esfuerzos de cortante.

$$\begin{aligned} v_u &= \frac{V_u}{b_o d} \pm \frac{\gamma_v M_u c}{J_c} \\ v_u &= \frac{35,300}{59 \times 5.5} \pm \left(\frac{6400 \times 12}{13,200} \right) c \\ &= 109 \pm 5.82 c \end{aligned}$$

El esfuerzo cortante en AB es ($c_{AB} = 5.96 \text{ in.}$)

$$\begin{aligned} v_{u,AB} &= 109 + 5.82 \times 5.96 \\ &= 144 \text{ psi} \end{aligned}$$

El esfuerzo cortante en CD es ($c_{CD} = 12.79$ in.)

$$\begin{aligned}v_{u,CD} &= 109 - 5.82 \times 12.79 \\ &= 34.6 \text{ psi}\end{aligned}$$

Del paso 4, $\phi V_c = 57.6$ kips, por lo tanto

$$\phi v_c = \frac{\phi V_c}{b_o d} = \frac{57,600}{59 \times 5.5} = 178 \text{ psi}$$

Como $\phi v_c > v_u$, el cortante está bien. **Usar una columna de 12 in. por 16 in., como se muestra en la Fig. 10-80, con ocho barras No. 4 a 5 in. centro a centro, centradas en la columna.**

9 Verificación de la precisión de método aproximado. Este paso se ejecuta simplemente para revisar el método aproximado de Alexander y Simmonds para la revisión del esfuerzo cortante máximo debido a la transferencia de cortante y momento en una conexión exterior. Suponga que se puede usar $\gamma_v M_u$ del paso 6 como $M_{u,cara}$, entonces de la ecuación (10-41);

$$\begin{aligned}v_u &= 0.65 \times \frac{V_u + \frac{M_{u,cara}}{4d}}{(c_1 + c_2)d} \\ v_u &= 0.65 \times \frac{35,300 + \frac{6400 \times 12}{4 \times 5.5}}{(12 + 16)5.5} = 164 \text{ psi}\end{aligned}$$

Esto es aproximadamente un 15% mayor que los esfuerzos calculados en la cara AB en el paso 8. Para una revisión rápida del espesor de diseño de la losa, este nivel de incertidumbre es considerado como de precisión adecuada. También, la precisión de la ecuación (10-41) podría haber sido afectada por el relativamente bajo porcentaje del momento que es transferido mediante esfuerzos de cortante excéntricos.

□

10-12 Requisitos de Detalle y de Refuerzo

10.12.1 Abacos

Los ábacos son porciones más gruesas adyacentes a las columnas, como las mostradas en las Figs. 10-81 o 10-2c. Se utilizan por tres razones principales:

1. El espesor mínimo de la losa requerido para limitar deflexiones (ver sección 10-6) puede reducirse en un 10 por ciento si la losa tiene ábacos en cumplimiento de la sección 13.2.5 de la norma ACI. El ábaco rigidiza la losa en la región de momentos mayores y por tanto reduce la deflexión.

2. Un ábaco con dimensiones en cumplimiento de la sección 13.2.5 de la norma ACI puede ser usado para reducir la cuantía de refuerzo para momento negativo requerido a través de una columna en una losa plana. Mediante el incremento del peralte total de la losa, se incrementa el brazo de palanca, jd , usado en el cálculo del área de acero, resultando en menos refuerzo requerido en esta región.
3. Un ábaco da peralte adicional a la columna incrementando así el área del perímetro crítico de cortante.

En la Fig. 10-81 se muestra el tamaño mínimo de un ábaco según la sección 13.2.5 de la norma ACI. La sección 13.3.7 de la norma establece que cuando se calcula el refuerzo de flexión para momento negativo, el espesor del ábaco por debajo de la losa a ser usado en los cálculos no se puede tomar mayor que una cuarta parte de la distancia del borde del ábaco a la cara de la columna o del capitel. Si el ábaco fuera más profundo, se supone que los esfuerzos máximos de compresión no fluirían al fondo del ábaco y por tanto el espesor total no sería efectivo.

Por economía en formaleta, el espesor del ábaco, mostrado como h_d en la Fig. 10-81, deber guardar relación con las dimensiones reales de la madera, tales como $\frac{3}{4}$ in., $1 \frac{1}{2}$ in., $3 \frac{1}{2}$ in., $5 \frac{1}{2}$ in. (tamaños nominales de madera de 1 in., 2 in., 4 in., o 6 in.) o alguna combinación de éstos, más el espesor de la madera contrachapada usada en las formaletas. El ábaco debe estar siempre en la parte inferior de la losa (en una losa sujeta a cargas gravitacionales), de manera que el acero para momento negativo cubra su longitud total.

10.12.2 Capiteles de Columnas

Ocasionalmente, la parte superior de la columna es ensanchada, como se muestra en las Fig.s 10-82b y 10-2c. Esto se hace para proveer un perímetro de cortante más grande en la conexión y para reducir la luz libre, ℓ_n , usada en el cálculo de los momentos.

La sección 6.4.7 de la norma ACI exige que el concreto del capitel sea colocado al mismo tiempo que el de la losa. Como resultado, la formaleta para el entrepiso se vuelve considerablemente más complicada y cara. Por esta razón, otras alternativas, tales como ábacos o refuerzo de cortante en losas, deberían ser consideradas antes de seleccionar capiteles. Si se deben usar capiteles, lo más deseable es usar el mismo tamaño en todo el proyecto.

El diámetro o la dimensión efectiva del capitel se define en la sección 13.1.2 de la norma ACI como la parte del capitel inscrita dentro del mayor cono circular o piramidal con un vértice de 90° que puede ser incluido dentro de la columna de apoyo. El diámetro se mide en la parte inferior de la losa o ábaco, como se ilustra en la Fig. 10-82. Este diámetro efectivo es el utilizado en la definición del ancho efectivo para la transferencia de momento, $c_2 + 3h$, y para definir la luz, ℓ_n . El concreto fuera de las líneas de 45° puede ser usado para incrementar la resistencia de cortante.

10.12.3 Descolgado para cortante

Los descolgados para cortante son proyecciones por debajo de la losa, similares a los ábacos, pero que no necesariamente satisfacen los límites dimensionales de la sección 13.2.5 de la norma ACI. Los descolgados se usan para incrementar la resistencia de cortante en la conexión losa-columna mediante el incremento local del peralte efectivo de la losa. Sirven esencialmente el mismo propósito que un capitel de columna, pero por su forma rectilínea (Fig. 10-82b), ocupan una formaleta más sencilla. La única restricción dimensional en los descolgados para cortante es que su extensión horizontal desde la cara de la columna debe ser mayor o igual que su proyección vertical por debajo de la losa (sección 13.2.6 de ACI). En general, la proyección vertical de un descolgado para cortante por debajo de la losa será de un 50 por ciento a mayor de un 100 por ciento del espesor de la losa adyacente al descolgado. También, usualmente se extienden suficientemente lejos de la cara de la columna para asegurar que la capacidad de cortante en el perímetro crítico exterior al descolgado de cortante no rige la resistencia nominal de cortante de la conexión. Las ecuaciones (10-24) a (10-26) deben ser usadas para evaluar la resistencia nominal de cortante para el perímetro crítico dentro del descolgado para cortante y para el perímetro externo al descolgado de cortante ambos.

10.12.4 Refuerzo

SECUENCIA DE EMPLAZAMIENTO

En una placa plana o losa plana, los momentos son mayores en las franjas de losa que cubren las direcciones largas de los paneles. Como resultado, el refuerzo para la luz larga generalmente se coloca más cercano a las partes superior e inferior de la losa que el refuerzo de la dirección corta. Esto da el mayor peralte efectivo para el mayor momento. Para losas apoyadas en vigas con un α_f mayor que aproximadamente 1.0, lo opuesto es cierto, y el patrón de refuerzo debe ser revertido. Si una secuencia particular de colocación ha sido supuesta en el diseño del refuerzo, esto debe ser conocido o anotado en los planos. También es importante mantener el mismo arreglo de capas en el entrepiso completo, para evitar confusión en el campo. Por tanto, si el refuerzo E-W está más cercano a las partes superior e inferior de la losa en un área determinada entonces este arreglo debería ser mantenido en toda la losa.

RECUBRIMIENTO Y PERALTE EFECTIVO

La sección 7.7.1 de la norma ACI especifica que el recubrimiento mínimo libre en losas debe ser $\frac{3}{4}$ in. para barras No. 11 y menores, si la losa no está expuesta al suelo o a la intemperie. Para concreto expuesto a intemperie, el recubrimiento mínimo libre es 1 $\frac{1}{2}$ in. para barras No. 5 y menores y 2 in. para barras más grandes. En tableros de concreto para parqueos expuestos a nieve e hielo se recomiendan recubrimientos mayores debido a la aplicación de sales para deshielar y usualmente se recomienda también el uso de barras de refuerzo con revestimiento epóxico. La sección 7.7.5 sugiere usar 2 in. de recubrimiento en ese caso. Puede ser necesario incrementar el recubrimiento para

resistencia al fuego, lo cual estará determinado normalmente por el reglamento de construcción local.

El refuerzo en una losa en dos direcciones con luces de hasta 25 ft será usualmente de barras No. 5; para luces de más de 25 ft, será de No. 5 o No. 6. Para las luces largas en una placa plana o losa plana, $d = h - 3/4 - 0.5d_b$, y para las luces cortas, $d = h - 3/4 - 1.5d_b$. Para diseño preliminar, estos valores se pueden tomar como:

Placa plana o losa plana con luces de hasta 25 ft:

$$\text{Luz larga } d \approx h - 1.1 \text{ in.} \quad (10-43a)$$

$$\text{Luz corta } d \approx h - 1.7 \text{ in.} \quad (10-43b)$$

Placa plana o losa plana con luces de más de 25 ft:

$$\text{Luz larga } d \approx h - 1.15 \text{ in.} \quad (10-43c)$$

$$\text{Luz corta } d \approx h - 1.9 \text{ in.} \quad (10-43d)$$

Es importante tener una estimación conservadora para el peralte efectivo d en losas, porque las imprecisiones constructivas normales tienden a resultar en valores de d que son menores que los mostrados en planos.

REQUISITOS DE ESPACIAMIENTO, REFUERZO MÍNIMO, Y TAMAÑO MÍNIMO DE BARRAS

La sección 13.3.1 de la norma ACI requiere que el área mínima de refuerzo provista para flexión, $A_{s,min}$, no sea menor que:

$0.0020bh$ si se usan barras deformadas de grado 40 o 50

$0.0018bh$ si se usan barras deformadas de grado 60 o malla electrosoldada

El espaciamiento máximo de refuerzo en secciones críticas de diseño para momentos positivos y negativos tanto en la franja central como en la franja de columna no debe exceder dos veces el espesor de la losa (sección 13.3.2 de ACI) y el espaciamiento de barras tampoco debe exceder 18 in. (sección 7.12.2.2 de ACI).

Aun cuando no hay límite establecido para el tamaño de las barras, el Instituto para Acero de Refuerzo del Concreto (www.crsi.org) recomienda que el acero superior en una losa no debe ser menor que barras No. 4 a 12 in. centro a centro, para dar adecuada rigidez para prevenir desplazamiento de las barras bajo tránsito ordinario de trabajadores antes de que el concreto sea colocado.

CALCULO DEL AREA REQUERIDA DE ACERO

El cálculo del acero requerido está basado en las ecuaciones (5-16) y (13-44), como se ilustran en los ejemplos 5-4 y 13-13, esto es,

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y jd} \quad (10-44)$$

donde $jd \approx 0.95d$ para losas de proporciones normales. Una vez que se ha calculado un valor provisional de A_s para la sección de máximo momento, se calcula la profundidad del bloque de esfuerzos de compresión, a , y luego este valor se usa para calcular un valor mejorado de $jd = d - a/2$. Este procedimiento es usado para calcular A_s en todas las secciones de momento máximo en la losa. También es necesario revisar si la sección es controlada por tracción y si A_s excede $A_{s,\min}$ definido en la sección 13.3.1 de la norma ACI.

CORTES DE BARRAS Y ANCLAJES

Para losas sin vigas, la sección 13.3.8.1 de la norma ACI permite que las barras sean cortadas como se muestra en la Fig. 10-83 (Fig. 13.3.8 de ACI). Cuando paneles adyacentes tienen longitudes diferentes, la extensión de las barras de momento negativo más allá de la cara del apoyo está basada en la longitud del panel mayor.

Antes de 1989, la Fig. 13.3.8 de la norma ACI también mostraba detalles para losas con barras rectas y barras dobladas alternativamente. Aun cuando esa disposición de barras es permitida, los detalles para barras dobladas han sido eliminados de la figura, porque esos detalles son rara vez usados hoy día. Si se diseñara o revisara una losa de este tipo, los detalles deben ser revisados de acuerdo con la Fig. 13.4.8 de la norma ACI de 1983 y modificada en concordancia con la sección 13.3.8.5 de la norma ACI.

La sección 13.3.4 de la norma ACI requiere que todo el acero de momento negativo perpendicular a un borde sea doblado, enganchado, o anclado en vigas de borde, columnas y muros a lo largo del borde para desarrollar f_y en tracción. Si no hay viga de borde, este acero debe ser enganchado para actuar como refuerzo torsional y debe extenderse hasta el espesor de recubrimiento mínimo del borde de la losa.

DETALLE DE REFUERZO DE LOSA EN UNA COLUMNA DE BORDE

La transferencia de cortante y momento de la losa a una columna exterior o esquinera supone que el borde de la losa actuará como un elemento en torsión. El Comité 352 de ACI ha recomendado detalles para conexiones losa-columna de borde. Tomando en cuenta esas recomendaciones, se pueden puntualizar los siguiente detalles:

- (a) El acero superior requerido para transferir el momento $\gamma_f M_u$ según la sección 13.5.3.2 de la norma ACI debe ser colocado en un ancho igual al menor de $2(1.5h) + c_2$ o $2c_1 + c_2$ centrado en la columna (Fig. 10-84), donde c_1 es la distancia de la cara interna de la columna al borde de la losa pero no más que el peralte de la columna, c_1 y c_2 es el ancho de la columna.
- (b) Refuerzo equivalente de torsión, como el descrito en la referencia (ACI Committee 352, 1988), debe ser provisto a lo largo del borde de la losa dentro de las dimensiones definidas en (a) y extendiéndose al menos dos espesores de losa más allá de la cara lateral de la columna.

REFUERZO DE INTEGRIDAD ESTRUCTURAL

Cuando ocurre una falla por punzonamiento de cortante, desaparece la capacidad de cortante en la columna y la losa se cae, halando el refuerzo superior de la parte superior de la losa. Si la losa impacta a la losa inferior, esa losa probablemente fallará también, causando un tipo de falla progresiva. Investigaciones hechas por Mitchell y Cook sugieren que esto puede prevenirse colocando refuerzo a través de la columna en la parte inferior de la losa. La sección 13.3.8.5 de la norma ACI requiere que todo el refuerzo inferior en la franja de columna en las dos direcciones sea continua o sea de traslapeo o de traslapeo mecánico con un traslapeo de Clase B (ver Fig. 10-83). Al menos dos de las barras inferiores en cada dirección deben pasar a través del núcleo de la columna. En este contexto, el término “núcleo de la columna” significa que esas barras deben colocarse en el espacio dentro de las barras de refuerzo esquinero de la columna. En las columnas exteriores o esquineras, al menos dos barras perpendiculares al borde deben ser dobladas, enganchadas o ancladas de alguna forma dentro del núcleo de la columna. A las barras que pasan a través de la columna se les denomina *acero integral*. El reporte del Comité 352 de ACI recomienda que una cantidad específica de acero integral pase a través del núcleo de la columna para prevenir el colapso progresivo. En la mayoría de los casos, el requisito del Comité 352 resulta en un área ligeramente mayor de acero integral que el requerido por la norma ACI.

10-13 Diseño de Losas sin Vigas

Ejemplo 10-14 Diseño de un entrepiso de placa plana sin vigas de borde—Método de Diseño Directo.

La Fig. 10-85 muestra la planta de un segmento de un entrepiso. No hay vigas de borde.

□

10-14 Diseño de Losas con Vigas en Dos Direcciones

Debido a su peralte adicional, una viga es más rígida que la losa adyacente, y por tanto, atrae cargas y momentos adicionales. Esto fue discutido en la sección 10-5 e ilustrado en las Figs. 10-13 y 10-16. Los momentos promedio en la franja de columna son casi iguales en una placa plana (Fig. 10-15d) y en una losa con vigas entre todas las columnas (Fig. 10-16b). En este último caso, el momento de la franja de columna es dividido entre la losa y la viga. Esto reduce la cantidad de refuerzo requerido para la losa en la franja de columna porque la viga debe ser reforzada para acarrear la mayor parte de la carga.

La mayor rigidez de las vigas reduce las deflexiones totales, permitiendo usar una losa más delgada que en el caso de una placa plana. Por tanto, una ventaja de las losas con vigas en dos direcciones estriba en su peso reducido. Además, el cortante en dos direcciones no rige para la mayoría de las losas con vigas en dos direcciones, de nuevo permitiendo losas más delgadas. Esto es contrarestando por el incremento en la profundidad total del sistema de entrepiso y por el incremento en los costos de formaleta y de colocación de refuerzo.

El método directo de diseño para el cálculo de momentos en la losa y las vigas sigue el mismo procedimiento usado para losas sin vigas, con un paso adicional. Por tanto, el diseñador, igual que siempre:

1. calcula M_o .
2. divide M_o entre regiones de momento positivo y de momento negativo
3. divide los momentos positivos y negativos entre las franjas centrales y de columnas
y adicionalmente
4. divide los momentos de la franja de columna entre la viga y la losa.

La fracción de momento asignada a las franjas central y de columna en el paso 3 y la división de momentos entre la viga y la losa en el paso 4 son funciones de $\alpha_{f1} \ell_2 / \ell_1$, donde α_{f1} es la razón de rigidez viga-losa en la dirección para la cual se está diseñando el refuerzo. (Ver Ejemplo 10-1.)

Cuando las losas están apoyadas sobre vigas con $\alpha_{f1} \ell_2 / \ell_1 \geq 1.0$, se deben diseñar las vigas para fuerzas de cortante calculadas suponiendo áreas tributarias limitadas por líneas de 45° en las esquinas de los paneles y las líneas de centro de los paneles, tal como se muestra en la Fig. 10-93. Si las vigas tienen un $\alpha_{f1} \ell_2 / \ell_1$ entre 0 y 1.0, las fuerzas de cortante calculadas a partir de estas áreas tributarias se multiplican por $\alpha_{f1} \ell_2 / \ell_1$. En tal caso, el remanente del cortante debe ser transmitido a la columna mediante cortante en la losa. La norma ACI mantiene silencio sobre cómo se hace esto. La interpretación más común involucra el uso de cortante en dos direcciones en la losa entre las vigas y cortante en una dirección en las vigas, como se muestra en la Fig. 10-94. Con frecuencia, surgen problemas cuando $\alpha_{f1} \ell_2 / \ell_1$ es menor que 1.0, porque el perímetro para cortante en dos direcciones resulta inadecuado para transferir la porción del cortante que no es transferida por las vigas. Por tanto se recomienda escoger tamaños de viga tales que $\alpha_{f1} \ell_2 / \ell_1$ exceda 1.0 para una losa en dos direcciones.

El tamaño de las vigas está también regido por sus resistencias a cortante y flexión. La sección transversal deben ser suficientemente grandes para que $V_u \leq \phi(V_c + V_s)$, donde un límite superior práctico para $V_c + V_s$ sería de alrededor de $(6\sqrt{f'_c} b_w d)$. La ubicación crítica para flexión es el punto de momento negativo máximo, donde la cuantía de refuerzo, ρ , no debe exceder $0.5\rho_b$, según se presenta en el Capítulo 5.

Ejemplo 10-15 Diseño de una losa en dos direcciones con vigas en ambas direcciones—Metodo de Diseño Directo

La Fig. 10-95 muestra la planta de una porción de un entrepiso con vigas entre todas las columnas. Para simplicidad en la formaleta, las vigas han sido propuestas del mismo ancho que las columnas. El entrepiso soporta su propio peso, una carga muerta superimpuesta de 5 psf para cieloraso y dispositivos mecánicos más 25 psf para particiones futuras, más una carga viva de 80 psf. El muro exterior pesa 300 lb/ft y es soportado por la viga de borde. La altura de entrepisos arriba y abajo del entrepiso en cuestión son 12 ft y 14 ft, respectivamente. Las fuerzas laterales son resistidas por un ducto de elevadores que no se muestra en la planta. Diseñar las franjas E-W de la losa a lo largo de los ejes de columna A y B, usando concreto de peso normal de 4000 psi y refuerzo de Grado 60. Usar los factores de carga y de reducción de resistencia del Capítulo 9 de la norma ACI.

Este ejemplo ilustra varias cosas no incluidas en el Ejemplo 10-14, entre ellas

- el efecto de las vigas de borde sobre el espesor requerido,
- el uso de factores de reducción de carga viva,
- el efecto de las vigas en la división de los momentos entre la losa y la viga en la franja de columna,
- la distribución de momentos negativos en donde el método directo de diseño da grandes diferencias entre los momentos en cada lado de un apoyo, y
- el cálculo del cortante en la viga y la losa.

Para cargas vivas de 100 psf o menos, sobre paneles con un área superior a 400 ft², la carga viva puede reducirse según la ecuación (2-15):

$$L = L_o \left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{K_{LL} A_T}} \right) \quad (2-15)$$

donde L y L_o son las cargas vivas reducida y especificada, respectivamente, A_T es el área tributaria y K_{LL} es un factor para convertir el área tributaria en un área de influencia. En el caso de la losa en dos direcciones, el área tributaria, A_T , normalmente se toma como el área del panel medida de centro a centro de las columnas y K_{LL} es igual a 1.0.

Solución:

❶ **Selección del método de diseño y factores de carga y resistencia.** La sección 13.6.1 de la norma ACI pone límites al uso del método de diseño directo. Estos se revisan tal como se hizo en el paso 1 del ejemplo 10-14. Se requiere revisar un ítem adicional (Sección 13.6.1.6 de la norma ACI): las vigas deben escogerse de manera que todas tengan igual ancho y peralte. Como resultado, la razón $\alpha_{f1} \ell_2^2 / \alpha_{f2} \ell_1^2$ debe caer dentro de los límites dados. Por tanto, se puede usar el método de diseño directo, pero se usará el método de análisis de portico para poder incluir cargas de viento en un paso de diseño posterior.

2 Selección del espesor de la losa y el tamaño de la viga. El espesor de la losa se escoge de manera que satisfaga los límites de deflexión una vez que se conozca el tamaño de la viga. Si $\alpha_f \ell_2 / \ell_1$ excede 1.0 para todas las vigas, todo el cortante es transferido a las columnas por las vigas, haciendo innecesario la revisión de cortante cuando se selecciona el espesor de la losa. Si solo se contara con vigas de borde, el espesor mínimo de la losa para deflexión estaría regido por la Tabla 10-1 y sería $\ell_n / 33 = 8.18$ in., con base en $\ell_n = 22.5$ ft. Para seleccionar un espesor de losa con vigas entre columnas interiores, el espesor será reducido arbitrariamente un 15 por ciento para tomar en cuenta el efecto rigidizador de las vigas, resultando en un espesor de prueba de 7 in. Suponer una viga con un peralte total de alrededor de 2.5 veces el espesor de la losa para obtener un valor de α_f un poco mayor que 1.0.

Para la primera prueba, seleccionar un espesor de losa de 7 in. y una viga de 18 in de ancho por 18 in. de peralte. Revisar el espesor usando las ecuaciones (10-10) y (10-11). Las secciones transversales de las vigas se muestran en la Fig. 10-96. Primero se calcula α_f como

$$\alpha_f = \frac{E_{cb} I_b}{E_{cs} I_s} \tag{10-9}$$

Para una viga de borde, el centroide está a 7.94 in. de la fibra superior de la sección, dando $I_b = 10,900$ in.⁴. El ancho de la losa que trabaja con la viga a lo largo del eje A es 123 in., resultando en $I_s = 3520$ in.⁴ y $\alpha_f = 3.10$.

Para la viga a lo largo del eje 1, el ancho de la losa es 117 in., dando $\alpha_f = 3.26$. Para las vigas interiores, $I_b = 12,500$ in.⁴; a lo largo del eje B, el ancho de la losa es 258 in., dando $\alpha_f = 1.70$; a lo largo de los ejes C y 3, el ancho de la losa es 288 in., dando $\alpha_f = 1.52$; a lo largo del eje 2, el ancho de la losa es 252 in., dando $\alpha_f = 1.74$;

Los cálculos de espesor se presentan en la Tabla 10-15. Un espesor de 6.19 in. es el mayor valor requerido, de manera que el espesor de 7 in. escogido es satisfactorio. Antes de continuar, revisar si los cortantes en la columna con la mayor area tributaria pondría fuerzas de cortante excesivas en las vigas de esa columna:

$$q_u = 1.2(7/12 \times 0.15 + 0.005 + 0.025) + 1.6 \times 0.080 = 0.269 \text{ ksf}$$

Ignorando el peso propio de la viga y suponiendo que el valor de d es $(18 - 2.5) = 15.5$ in. Entonces,

$$V_u = 0.269 \left[24 \text{ ft} \times 24 \text{ ft} - \left(\frac{18 + d(\text{viga})}{12} \right)^2 \right] = 150 \text{ kips}$$

ϕV_c para las cuatro vigas es (usando $\lambda = 1.0$):

$$\sum \phi V_c = 4 \left[0.75 \times 2 \times 1 \sqrt{4000} \times 18 \times 15.5 \right] \times \frac{1 \text{ kip}}{1000 \text{ lbs}} = 106 \text{ kips}$$

Por tanto, $V_u \leq 2 \sum \phi V_c$, lo cual no será excesivo si se usan estribos. De esta forma, usar las vigas seleccionadas previamente.

3 Cálculo de los momentos en la franja de losa a lo largo del eje B (Fig. 10-95). Esta franja de losa actúa como un pórtico cubriendo las columnas B1, B2, B3, etc. En esta franja de losa, la dirección ℓ_1 es paralela al eje B, la dirección ℓ_2 es perpendicular. Los paneles de losa B1-B2 y B4-B5 son paneles “externos”; los otros dos son paneles “interiores.”

Los valores de ℓ_n , ℓ_2 , etc. se muestran en la Fig. 10-95. Los cálculos son presentados en la Tabla 10-16.

Renglón 4(a). El área de influencia del panel puede ser tomada como $\ell_1 \times \ell_2$.

Renglón 4(b). Las cargas vivas reducidas basadas en la ecuación (2-15).

Renglón 5. Momentos de diseño en los extremos de las luces y a mitad de viga se calculan usando el modelo de pórtico mostrado en la Fig. 10-97. Para las secciones de columna, usar el momento de inercia bruto. Para tomar en cuenta el agrietamiento en las secciones de losa-viga, usar simplemente la sección de la viga de 18 in. por 18 in. para calcular el momento de inercia efectivo para este análisis de cargas gravitacionales. La carga muerta no factorizada que actúa en la losa-viga en cada luz debido a las cargas muertas de la losa y superimpuesta en

$$w_D (\text{losa-viga}) = [7/12 \times 0.15 + 0.030] \times 21.5 \text{ ft} = 2.53 \text{ k/ft}$$

La carga viva no factorizada que actúa sobre la losa-viga en la luz B1-B2 es:

$$w_L = 0.080 \text{ ksf} \times 21.5 \text{ ft} = 1.72 \text{ k/ft}$$

Como este valor es menor que tres cuartas partes de la carga muerta, la sección 13.7.6.2 de la norma ACI establece que solo es necesario considerar el caso de carga de carga muerta y carga viva factorizadas actuando sobre todos los paneles (i.e., se pueden ignorar los patrones de carga). Los momentos de diseño que resultan con la aplicación de este caso de carga al pórtico de la Fig. 10-97, usando carga viva reducida en los paneles apropiados, se presentan en el renglón 5 de la Tabla 10-16. Con este análisis también se pueden obtener los momentos en los extremos de las columnas, aunque no se incluyen en este ejemplo.

Renglón 6. Como el peso de la viga será resistido por la viga únicamente, se usó un análisis independiente para esta carga muerta que actúa directamente en la viga.

$$w_D (\text{viga}) = \frac{18 \times 11}{144} (\text{ft}^2) \times 0.150 \text{ k/ft}^3 = 0.21 \text{ k/ft}$$

4 Cálculo de momentos en la franja de losa a lo largo del eje A (Fig. 10-95). Esta franja de losa actúa como un pórtico cubriendo las columnas A1, A2 y A3. Esta franja de losa incluye una viga de borde (A1-A2, A2-A3, etc.) paralela a las luces de la losa. En esta franja de losa, los paneles A1-A2 y A4-A5 son paneles “externos”; los otros dos son paneles “interiores.” Los cálculos se presentan en la Tabla 10-17 y proceden de la misma manera que los cálculos en la Tabla 10-16, excepto por lo anotado a continuación:

- (a) Debido a lo pequeño de las áreas de influencia para esta luz a lo largo del sistema de entrepiso, no hay reducción de carga viva para ninguna de las luces.
- (b) Para el análisis estructural, las cargas muerta y viva no factorizadas que actúan sobre la losa-viga son:

$$w_D (\text{losa-viga}) = [7/12 \times 0.15 + 0.030] \times 10.25 \text{ ft} = 1.21 \text{ k/ft}$$

$$w_L = 0.080 \text{ ksf} \times 10.25 \text{ ft} = 0.82 \text{ k/ft}$$

Como antes, se usará un análisis independiente para la carga muerta aplicada directamente a la viga, la cual debe incluir también el peso del muro a lo largo del borde de la losa:

$$w_D (\text{viga}) = \frac{18 \times 11}{144} \times 0.150 + 0.300 = 0.51 \text{ k/ft}$$

5 y 6 Cálculo de los momentos en las franjas de losa N-S. Aun cuando una solución completa para esta losa incluiría los cálculos para momentos en las franjas N-S, tanto como en las franjas E-W, estas se omitirán aquí.

7 Para franjas con luces E-W, distribución de los momentos positivos y negativos a las franjas de columna, las franjas centrales y a las vigas. En los pasos 3 y 4, se calculan los momentos a lo largo de los ejes A y B. Estos momentos deben ser distribuidos ahora a las franjas central y de columna, y el momento de la franja de columna debe ser dividido entre la losa y la viga.

- (a) Dividir la losa en franjas central y de columna. Los anchos de las franjas de columna según se definen en la sección 13.2.1 de la norma ACI varían de panel a panel. A lo largo del eje B, el ancho de la franja de columna es de 9.0 ft en la luz B1-B2 y 10.75 ft en la luz B2-B3. Para tener consistencia en el diseño del refuerzo de la losa de luz a luz, se supone un ancho de franja de columna constante de 9 ft.
- (b) Dividir los momentos entre la franja de columna y la franja central. Estos cálculos se presentan en la Tabla 10-18, que semeja la planta de la losa. Las flechas ilustran el flujo de momentos a las diferentes partes de la losa. La división de momentos es una función de la razón de rigidez de la viga para la viga paralela a la franja que está siendo diseñada y la razón largo ancho del panel. Para las franjas E-W, estos términos se resumen subsecuentemente. Los valores de α_f fueron calculados en el paso 2, y los valores de l_1 y l_2 se presentan en las Tablas 10-16 y 10-17. Para las franjas interiores, l_2 se toma igual al valor utilizado en el cálculo de momentos en las franjas. Se tienen los siguientes cálculos:

$$\text{Panel B1 - B2: } l_1 = 18 \text{ ft, } l_2 = 21.5 \text{ ft, } \alpha_{f1} = 1.70, \frac{l_2}{l_1} = 1.19, \frac{\alpha_{f1} l_2}{l_1} = 2.03$$

$$\text{Panel B2 - B3: } l_1 = 24.0 \text{ ft, } l_2 = 21.5 \text{ ft, } \alpha_{f1} = 1.70, \frac{l_2}{l_1} = 0.90, \frac{\alpha_{f1} l_2}{l_1} = 1.52$$

$$\text{Panel C1 - C2: } l_1 = 18 \text{ ft, } l_2 = 24.0 \text{ ft, } \alpha_{f1} = 1.52, \frac{l_2}{l_1} = 1.33, \frac{\alpha_{f1} l_2}{l_1} = 2.03$$

$$\text{Panel C2 - C3: } l_1 = 24.0 \text{ ft, } l_2 = 24.0 \text{ ft, } \alpha_{f1} = 1.52, \frac{l_2}{l_1} = 1.0, \frac{\alpha_{f1} l_2}{l_1} = 1.52$$

La norma ACI no es clara acerca de cual ℓ_2 debe ser usado cuando se considera un panel de borde. En la práctica actual, la mayoría de los diseñadores toma ℓ_2 igual al ancho total del panel de borde. Así

$$\text{Panel A1 - A2: } \ell_1 = 18 \text{ ft, } \ell_2 = 19 \text{ ft, } \alpha_{f1} = 3.10, \frac{\ell_2}{\ell_1} = 1.06, \frac{\alpha_{f1}\ell_2}{\ell_1} = 3.27$$

$$\text{Panel A2 - A3: } \ell_1 = 24.0 \text{ ft, } \ell_2 = 19 \text{ ft, } \alpha_{f1} = 3.10, \frac{\ell_2}{\ell_1} = 0.79, \frac{\alpha_{f1}\ell_2}{\ell_1} = 2.45$$

Renglon 1. Estos momentos provienen de los renglones 5 de la Tabla 10-16 y 10-17. Los momentos en la franja C provienen de cálculos similares. Notar que el mayor de los dos momentos de la losa es utilizado en el primer apoyo interior.

Renglon 2. Momentos exteriores negativos: la Tabla 10-5 da la fracción del momento negativo exterior resistido por la franja de columna. Esto es obtenido de los valores para ℓ_2/ℓ_1 y $\alpha_{f1}\ell_2/\ell_1$ recién calculadas más

$$\beta_t = \frac{E_{cb}C}{2E_{cs}I_s} \tag{10-12}$$

donde C es la constante torsional para la viga, calculada con la ecuación (10-13). La sección transversal de la viga de borde efectiva para torsión es definida en la sección 13.7.5 de la norma ACI. La sección transversal efectiva se muestra en la Fig. 10-96. Para calcular C, la viga se divide en rectángulos. El valor máximo de C corresponde a los rectángulos mostrados en la Fig. 10-96a, y $C = 13,700 \text{ in.}^4$

El I_s en la ecuación (10-12) es el momento de inercia de la luz de la losa apoyada sobre la viga de borde. Así, $I_s = \ell_2 h^3 / 12$. Como la losa y la viga son coladas al mismo tiempo, $E_{cb} = E_{cs}$. De esta forma se tienen los siguientes resultados:

(a) Franja de losa A: $I_s = (10.25 \times 12) \frac{7^3}{12} = 3520 \text{ in.}^4$, $\beta_t = \frac{13,700}{2 \times 3520} = 1.95$.

Interpolando en la Tabla 10-5 para $\ell_2/\ell_1 = 1.06$, $\alpha_{f1}\ell_2/\ell_1 = 3.27$ y $\beta_t = 1.95$ da 0.79 del momento negativo exterior para la franja de columna (en la columna A1).

(b) Franja de losa B: $I_s = 7370 \text{ in.}^4$, $\beta_t = 0.93$, $\ell_2/\ell_1 = 2.03$ y $\alpha_{f1}\ell_2/\ell_1 = 2.03$.

Interpolando en la Tabla 10-5 da 0.88 veces el momento negativo exterior para la franja de columna (en la columna B1).

(c) Franja de losa C: $I_s = 8230 \text{ in.}^4$, $\beta_t = 0.83$, $\ell_2/\ell_1 = 1.19$ y $\alpha_{f1}\ell_2/\ell_1 = 2.03$.

Interpolando en la Tabla 10-5 da 0.88 veces el momento negativo exterior para la franja de columna

Momentos positivos:

(a) Franja de losa A: $\ell_2/\ell_1 = 1.06$, $\alpha_{f1}\ell_2/\ell_1 > 1.0$. De la Tabla 10-4, 73 por ciento de los momentos positivos van a las franjas de columnas.

- (b) Franja de losa B: $l_2/l_1 = 1.19$, $\alpha_{f1}l_2/l_1 > 1.0$. De la Tabla 10-4, 69 por ciento de los momentos positivos van a las franjas de columnas.
- (c) Franja de losa C: $l_2/l_1 = 1.33$, $\alpha_{f1}l_2/l_1 > 1.0$. De la Tabla 10-4, 65 por ciento de los momentos positivos van a las franjas de columnas.

Momentos negativos interiores: Como $\alpha_{f1}l_2/l_1 > 1.0$, la Tabla 10-3 da la misma división de momento negativo interior entre las franjas central y de columna que para los momentos positivos. Por tanto, interpolando en la Tabla 10-3, 73, 69 y 65 por ciento de los momentos negativos en las franjas de losa A, B y C van para la franja de columna.

Renglón 4(a). Los momentos de la franja de columna se dividen entre la losa y la viga, siguiendo las reglas dadas en las secciones 13.6.5.1 y 13.6.5.2 de la norma ACI. Si $\alpha_{f1}l_2/l_1 \geq 1.0$, 85 por ciento del momento de la franja de columna se asigna a la viga.

Para esta losa, esto es cierto en todos los casos.

Renglón 4(b). Estos momentos provienen del análisis del pórtico mostrado en la Fig. 10-97 sujeto al peso del alma de la viga para los ejes A, B y C, mas el peso del muro exterior a lo largo del eje A.

Renglón 5. Los momentos finales en la franja central entre los ejes A y B, en la losa en la franja de columna a lo largo del eje B, y en la viga a lo largo del eje B se grafican en la Fig. 10-98. Nota: cálculos detallados similares pueden ser completados para todas las luces en la dirección E-W.

8 Diseño del refuerzo de la losa. El diseño del refuerzo de la losa se lleva a cabo de la misma manera que en el ejemplo anterior.

9 Diseño de vigas. Las vigas deben ser diseñadas para momento, cortante y anclaje de refuerzo, como en los ejemplos en el capítulo 4. Las vigas de borde también están sujetas a un torque distribuido, el cual puede ser considerado como uniformemente distribuido, como lo permite la sección 11.5.2.3 de la norma ACI. El diseño de vigas de borde sujetas a cortante y torsión se cubre en los capítulos 5 y 6.

Como $\alpha_{f1}l_2/l_1 \geq 1.0$ para todas las vigas, la sección 13.6.8.1 de la norma ACI requiere que las vigas sean diseñadas para cortante causado por cargas en las áreas tributarias mostrado en la Fig. 10-99a. Para las vigas a lo largo del eje A, los correspondientes diagramas de cargas y de cortante de la viga se muestran en las Figs. 10-99b y c. El diseño de estribos se hace en concordancia con las secciones 11.1 a 11.4 de la norma ACI. Nota: Algunos de los momentos extremos en la Fig. 10-99b provienen de resultados del análisis estructural que no se muestran en las Tablas 10-16 y 10-17.

□

10-15 Cargas de Construcción en Losas

La mayoría de los edificios con losas en dos direcciones son construidos con el uso de *formaletas volantes*, las cuales pueden ser removidas lateralmente hacia afuera del edificio y luego son levantadas o *voladas* para formar el piso superior. Cuando la formaleta volante es removida de la parte inferior de la losa, el peso de la losa es tomado por puntales que son puestos en su sitio mediante acuñamiento para tomar la carga. En la Fig. 10-xx se pueden observar grupos de formaletas volantes y puntales. Para ahorrar en el número de puntales necesarios, se acostumbra apuntalar de tres a seis pisos por debajo de la losa que está siendo colada. Como resultado, el peso del concreto fresco es soportado por los tres a seis pisos inferiores. Como estos entrepisos tienen diferentes edades, cada uno toma una fracción diferente de la carga de la nueva losa. El cálculo de las cargas de construcción en losas se presenta en (Agerwal & Gardner, 1974). Dependiendo del número de entrepisos que deban ser apuntalados, la secuencia de colado y la remoción de formaleta, y el peso del material de construcción estibado, la carga máxima de construcción en una losa dada puede alcanzar de 1.8 a 2.2 veces la carga muerta de la losa. Esto puede estar cercano a la capacidad de la losa, particularmente si, como es el caso usual, la losa no ha alcanzado su resistencia completa cuando ocurren las cargas de construcción. Estas altas cargas causan agrietamiento de las menos que completamente curadas losas de concreto y conducen a deflexiones de corto y largo plazo mayores que las que se de otra forma se esperarían (Sbarounis, 1984).

10-16 Deflexiones en Sistemas de Losas en Dos Direcciones

Deflexiones excesivas son potencialmente un problema significativo para sistemas de losas en dos direcciones, que causan entrepisos colgantes y particiones, puerta y ventanas dañadas. La sección 9.5.3.2 de la norma ACI presenta espesores mínimos de losas en dos direcciones para evitar deflexiones excesivas (ver Tabla 10-1). Como se indicó anteriormente, es buena práctica redondear el espesor mínimo de la Tabla 10-1 hacia el siguiente cuarto de pulgada mayor para losa de menos de 6 in. de espesor y hacia la siguiente media pulgada para losas de más espesor. Se permiten losas de menor espesor, pero las deflexiones calculadas deben ser menores que las deflexiones permitidas dadas en la Tabla 9.5(b) de la norma ACI, determinadas usando el mayor valor de ℓ para el panel.

10-17 Uso de Postensionamiento

Tabla 10-1 Espesor mínimo de losas sin vigas interiores

Resistencia de fluencia, f_y^b (kg/cm ²)	Sin ábacos ^a			Con ábacos ^a		
	Paneles exteriores		Paneles interiores	Paneles exteriores		Paneles interiores
	Sin vigas de borde	Con vigas de borde ^c		Sin vigas de borde ^c	Con vigas de borde	
2800	$l_n/33$	$l_n/36$	$l_n/36$	$l_n/36$	$l_n/40$	$l_n/40$
4200	$l_n/30$	$l_n/33$	$l_n/33$	$l_n/33$	$l_n/36$	$l_n/36$
5250	$l_n/28$	$l_n/31$	$l_n/31$	$l_n/31$	$l_n/34$	$l_n/34$

l_n es la longitud de la luz libre en la dirección larga, medida de cara a cara de los apoyos.

^aLa geometría requerida de un ábaco se definen en la Sección 13.2.5 de la Norma ACI.

^bPara resistencias de fluencia entre los valores dados, usar interpolación lineal.

^cLosas con vigas entre columnas a lo largo del borde exterior. El valor de α_f para la viga de borde no deberá ser menor que 0.8.

Tabla 10-2 Distribución del Momento Estático Mayorado Total, M_o , en un Vano Final

	(1)	(2)	(3)		(4)	(5)
	Borde exterior no restringido	Losa con vigas entre todos los apoyos	Losa sin vigas entre los apoyos interiores		Con viga de borde	Borde exterior totalmente restringido
			Sin viga de borde	Con viga de borde		
Momento negativo mayorado interior	0.75	0.70	0.70	0.70	0.70	0.65
Momento positivo mayorado	0.63	0.57	0.52	0.50	0.50	0.35
Momento negativo mayorado exterior	0	0.16	0.26	0.30	0.30	0.65

Fuente: Sección 13.6.3.3 de la norma ACI 318S-08.

Tabla 10-3 Distribución porcentual de momento mayorado negativo interior para franja de columna

l_2/l_1	0.5	1.0	2.0
$(\alpha_{f1} l_2/l_1) = 0$	75	75	75
$(\alpha_{f1} l_2/l_1) \geq 0$	90	75	45

Tabla 10-4 Distribución porcentual de momento mayorado positivo para franja de columna

l_2/l_1	0.5	1.0	2.0
$(\alpha_{f1} l_2/l_1) = 0$	60	60	60
$(\alpha_{f1} l_2/l_1) \geq 0$	90	75	45

Tabla 10-5 Distribución porcentual de momento mayorado negativo exterior para franja de columna

l_2/l_1		0.5	1.0	2.0
$(\alpha_{f1} l_2/l_1) = 0$	$\beta_i = 0$	100	100	100
	$\beta_i \geq 2.5$	75	75	75
$(\alpha_{f1} l_2/l_1) \geq 0$	$\beta_i = 0$	100	100	100
	$\beta_i \geq 2.5$	90	75	45

Tabla 10-6 Distribución de Momentos—Ejemplo 10-9

	A2		B2		C2		D2					
	COF = 0.508		COF = 0.507		COF = 0.508							
	0	0.434	0.566	0.304	0.471	0.225	0.225	0.471	0.304	0.566	0.434	0
	Vol.	Col.	Losa	Losa	Col.	Losa	Losa	Col.	Losa	Losa	Col.	Vol.
FEM	-4.0	0	+82.9	-82.9	0	+105	-105	0	+82.9	-82.9	0	+4.0
B1		-36.0	-46.9	-6.7	-10.4	-5.0	+5.0	+10.4	+6.7	+46.9	+36.0	
C1			-3.4	-23.8		+2.5	-2.5		+23.8	+3.4		
B2		+1.5	+1.9	+6.5	+10.0	+4.8	-4.8	-10.0	-6.5	-1.9	-1.5	
C2			+3.3	+1.0		-2.4	+2.4		-1.0	-3.3		
B3		-1.4	-1.9	+0.4	+0.7	+0.3	-0.3	-0.7	-0.4	+1.9	+1.4	
C3			+0.2	-0.9		-0.2	+0.2		+0.9	-0.2		
B4		-0.1	-0.1	+0.3	+0.5	+0.2	-0.2	-0.5	-0.3	+0.1	+0.1	
Suma	-4.0	-36.0	36.0	-106	+0.80	105	-105	-0.80	+106	-36.0	36.0	+4.0
Suma en junta		0			0			0			0	

Tabla 10-7 Valores de α y β recomendados para rigidez a la flexión en elementos viga y losa

Región de la losa	valor de α (para ancho efectivo αl_2)	valor de β (para $l_e = \beta l_g$)
Regiones de momento positivo	0.5	0.5
Regiones de momento negativo (columnas interiores)	0.5	0.5 para gravedad 0.33 para carga lateral
Regiones de momento negativo (columnas exteriores)	0.2 a 0.5 (función de la rigidez de la viga de borde)	

Tabla 10-8 Resultados de análisis: Momentos de diseño de software estándar vrs. CEFM

Caso de análisis	Momento en cara exterior (kip-ft)	Vano final		Vano interior	
		Momento a mitad de vano (kip-ft)	Momento en cara interior (kip-ft)	Momento en cara interior (kip-ft)	Momento a mitad de vano (kip-ft)
CEFM	-24.4	55.1	-80.6	-80.0	50.7
Caso 1	-37.8	50.4	-74.2	-79.4	52.3
Caso 2	-37.0	50.6	-74.7	-79.4	52.3
Caso 3	-39.5	54.8	-62.7	-70.9	60.8

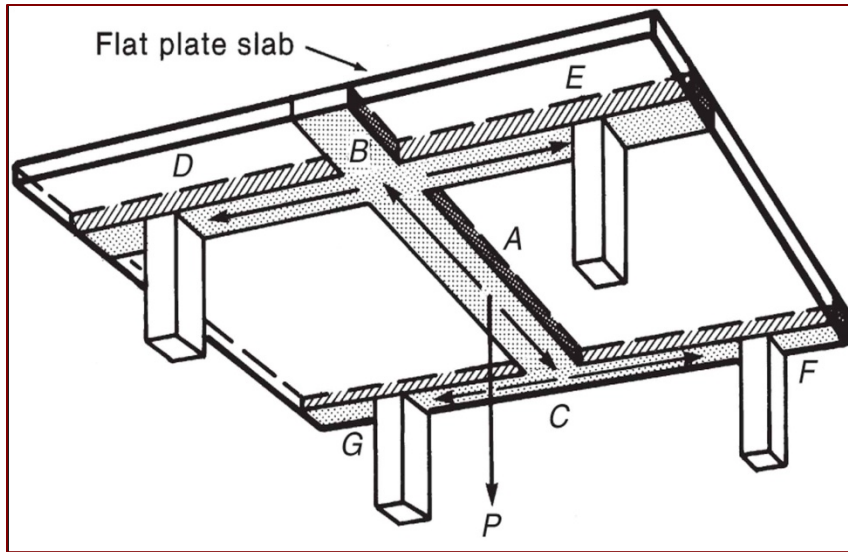


Figura 10-1 Flexión en dos direcciones.

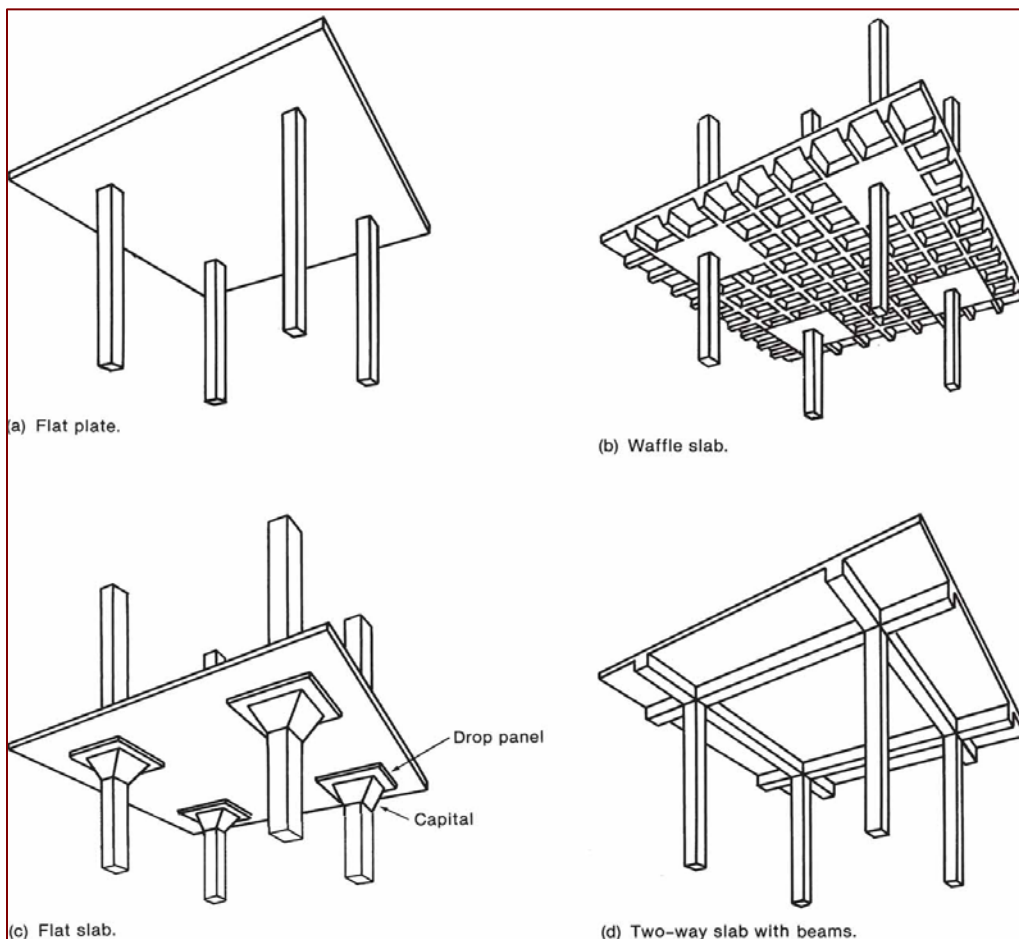


Figura 10-2 Tipos de losas en dos direcciones.

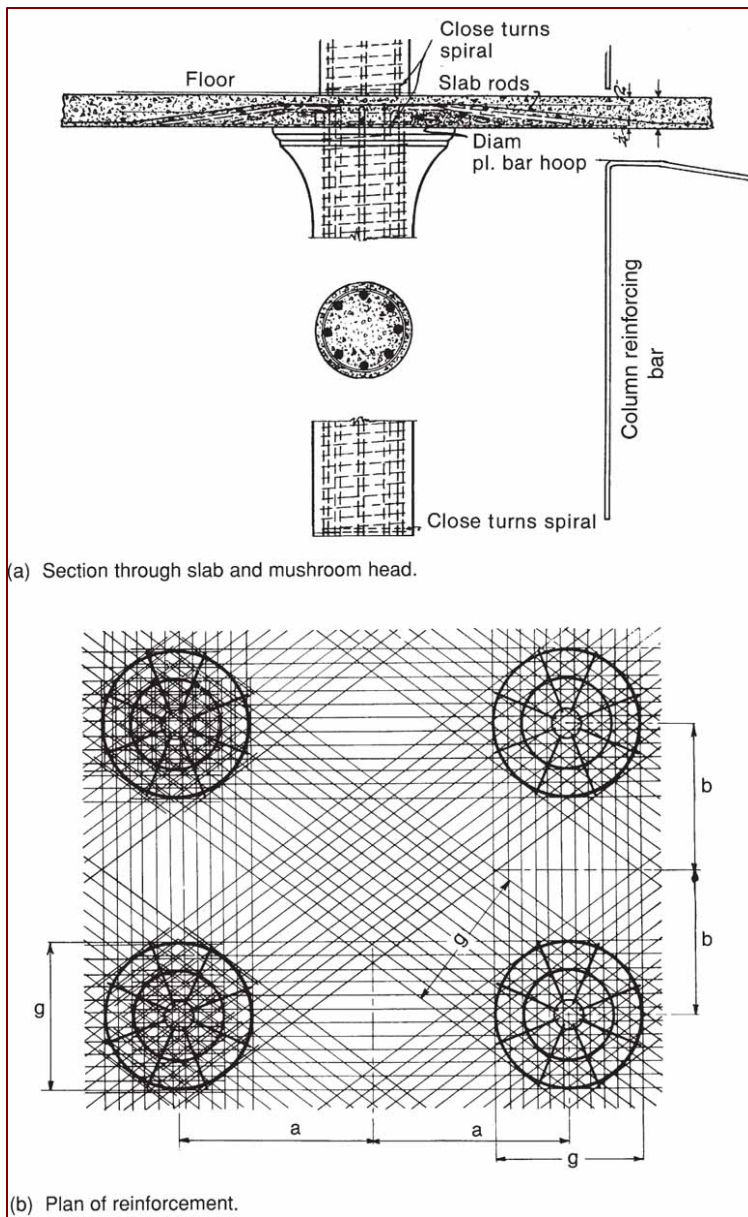


Figura 10-3 Losa de hongo de C.A.P. Turner.

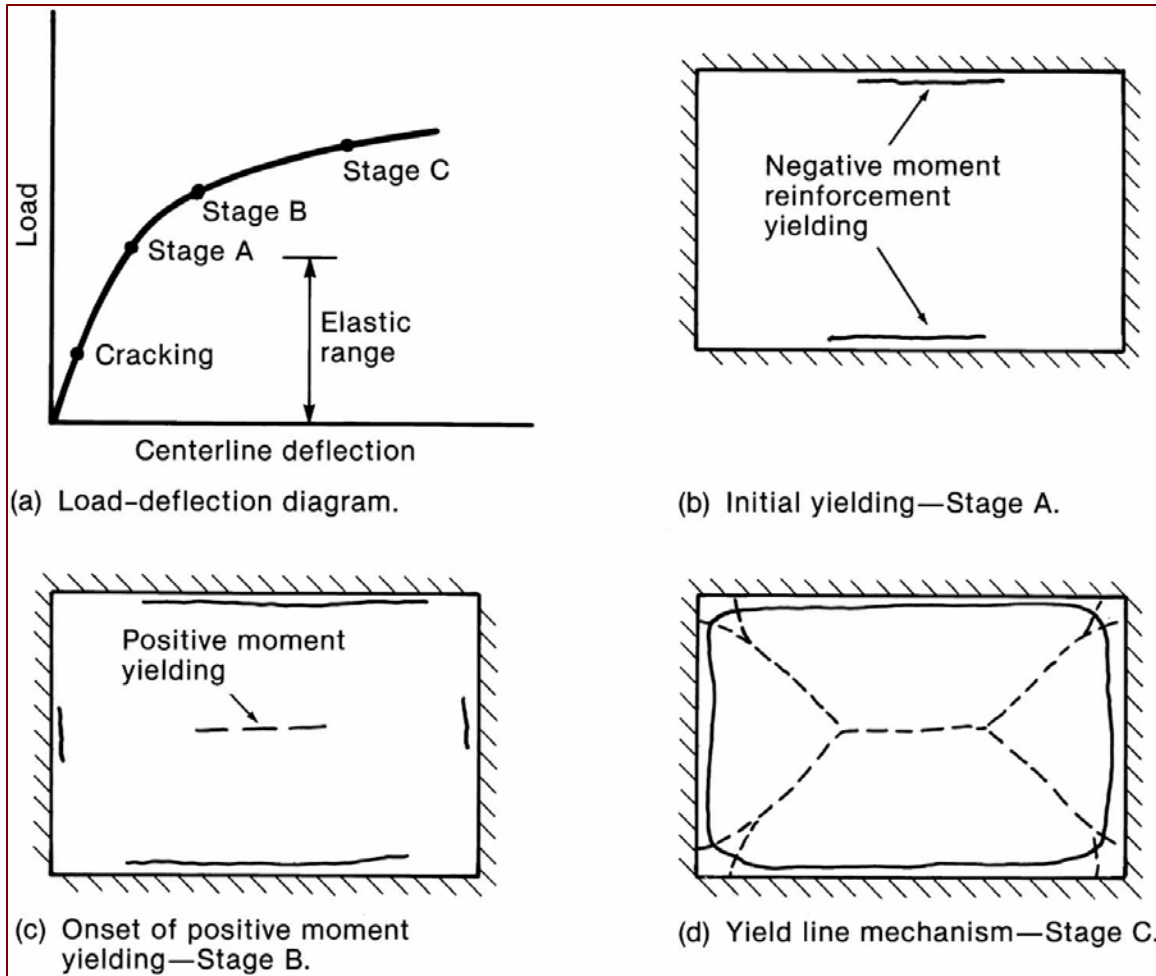


Figura 10-4 Acción inelástica en una losa empotrada en sus cuatro lados.

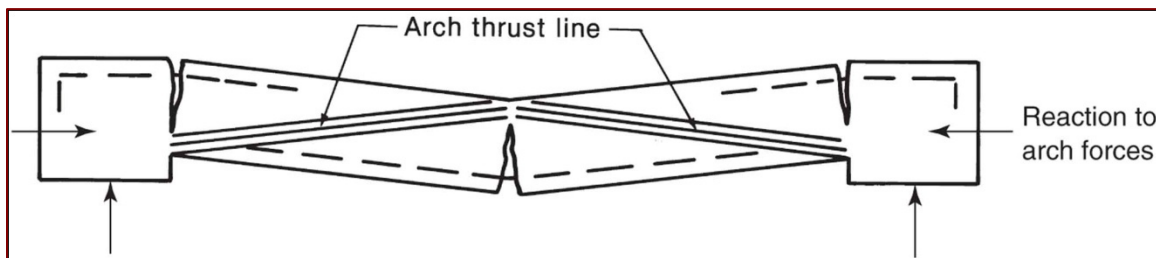


Figura 10-5 Acción de arco en una losa.

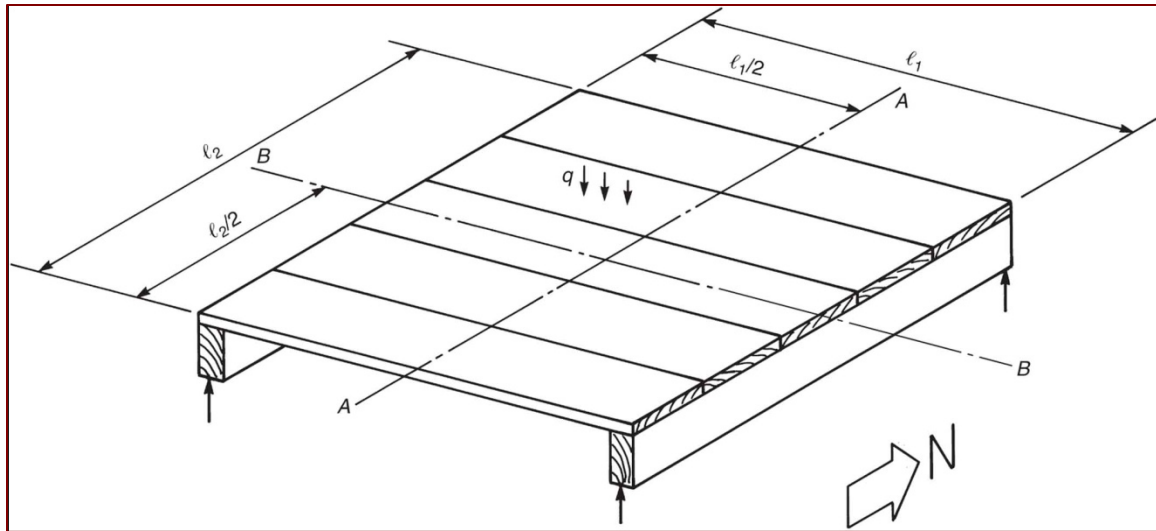


Figura 10-6 Momentos en un entrepiso de vigas y tablonos.

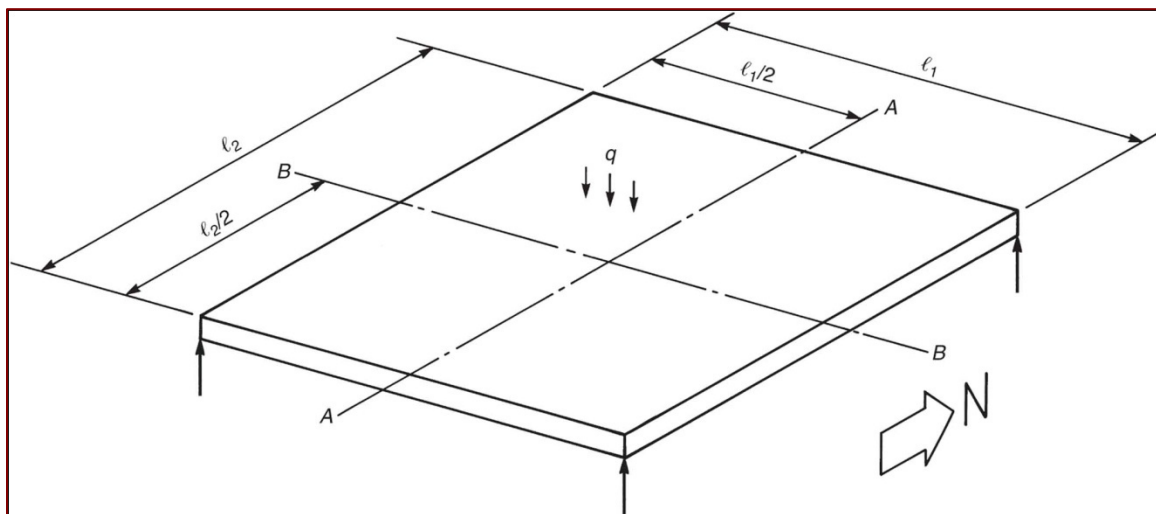


Figura 10-7 Momentos en una losa en dos direcciones.

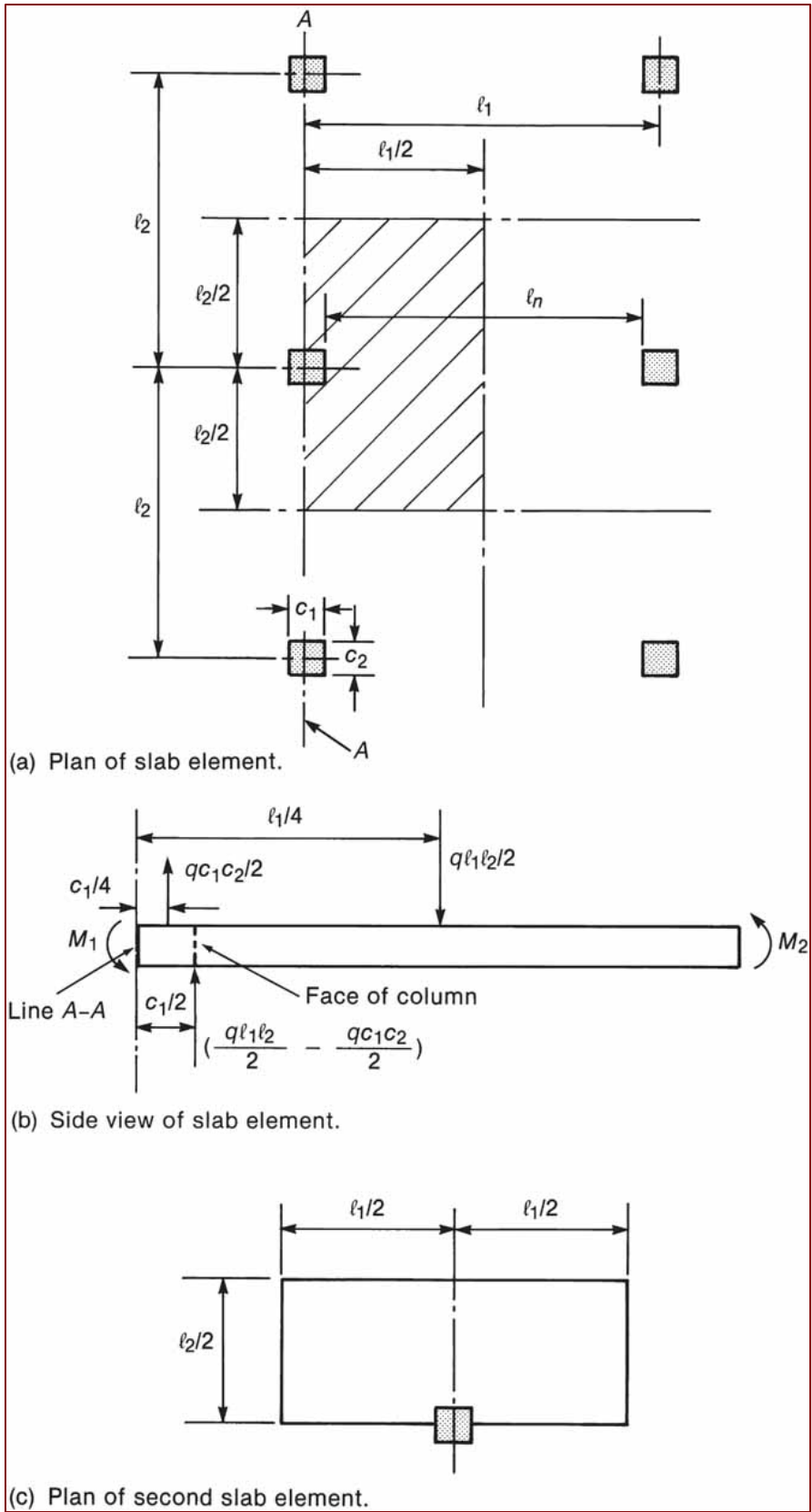


Figura 10-8 Losa considerada por Nichols en su análisis.

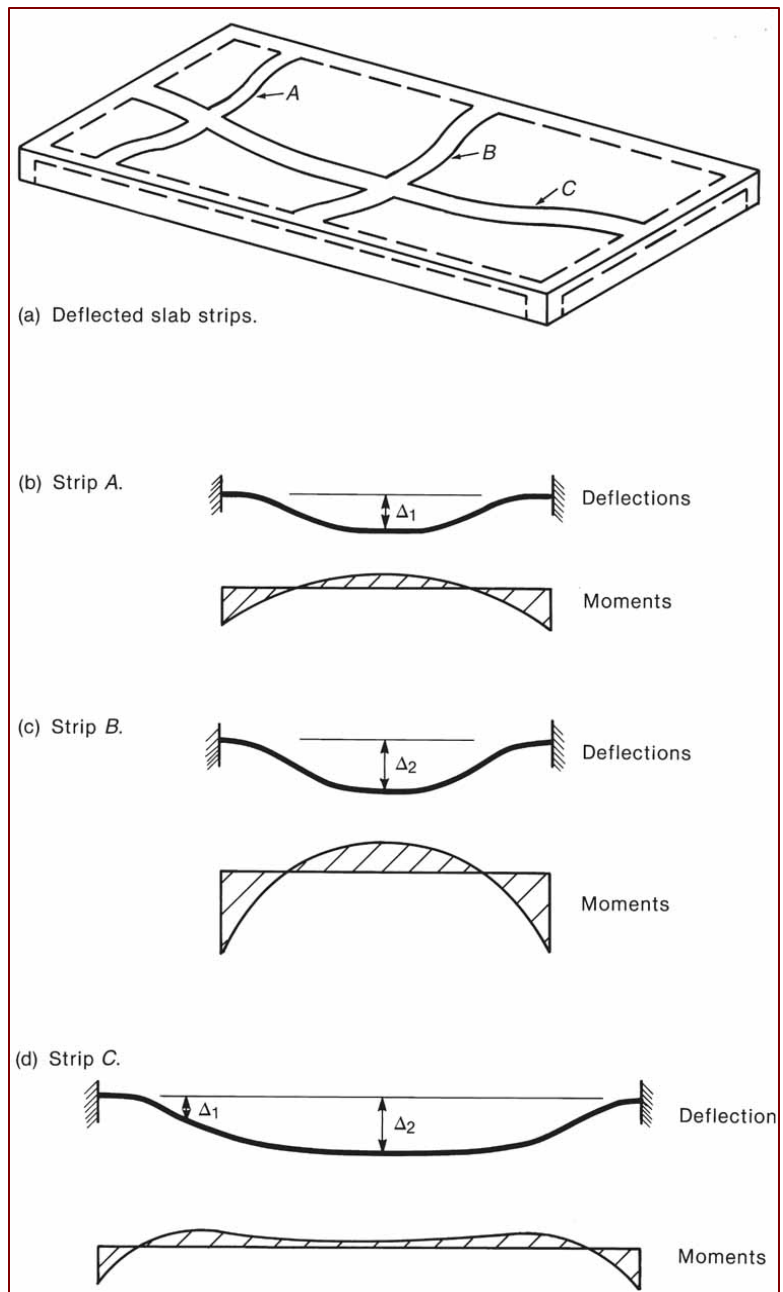


Figura 10-9 Relación entre curvatura y momentos en una losa.

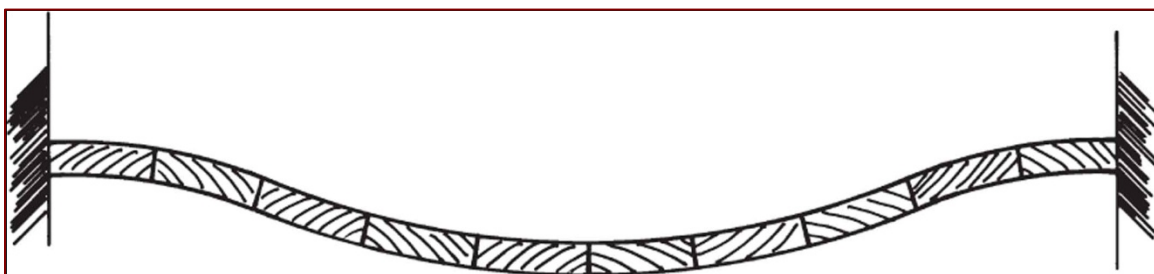


Figura 10-10 Deflexión de la franja B de la figura 10-9.

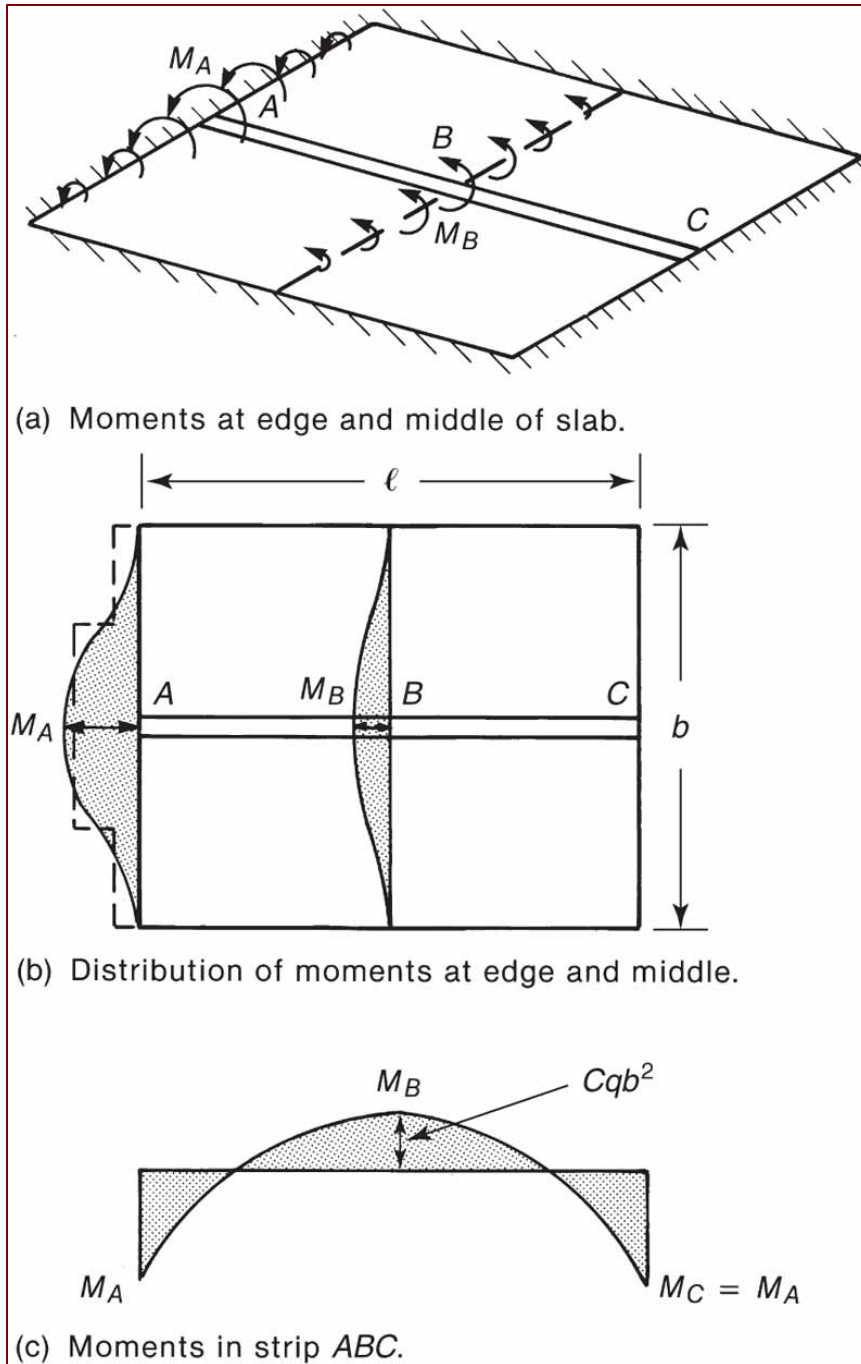


Figura 10-11 Tipos de diagramas de momento: losa empotrada en todas direcciones.

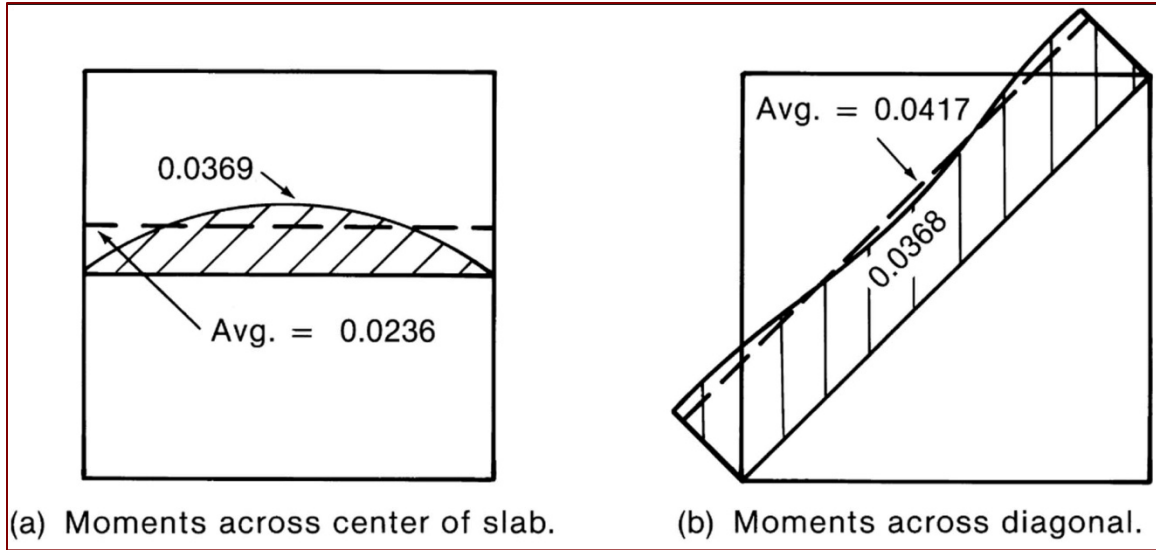


Figura 10-12 Momentos en una losa cuadrada simplemente apoyada.

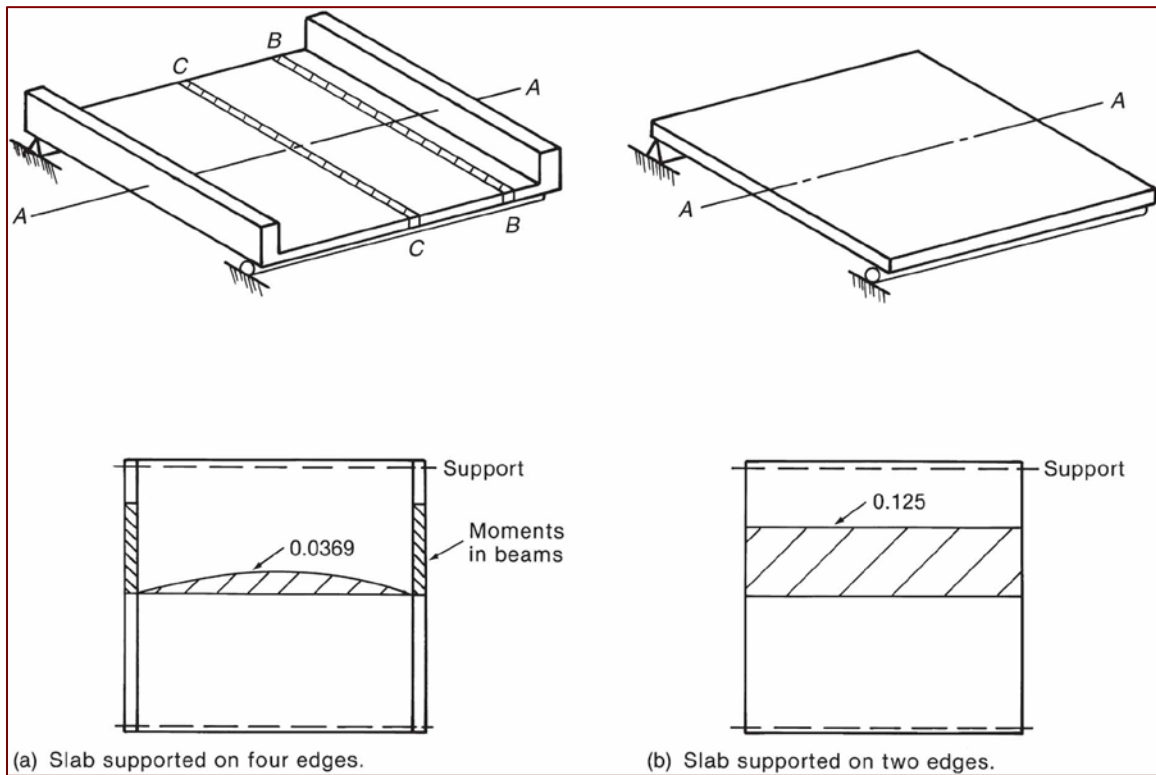


Figura 10-13 Efecto de la rigidez de las vigas de borde sobre los momentos en la losa.

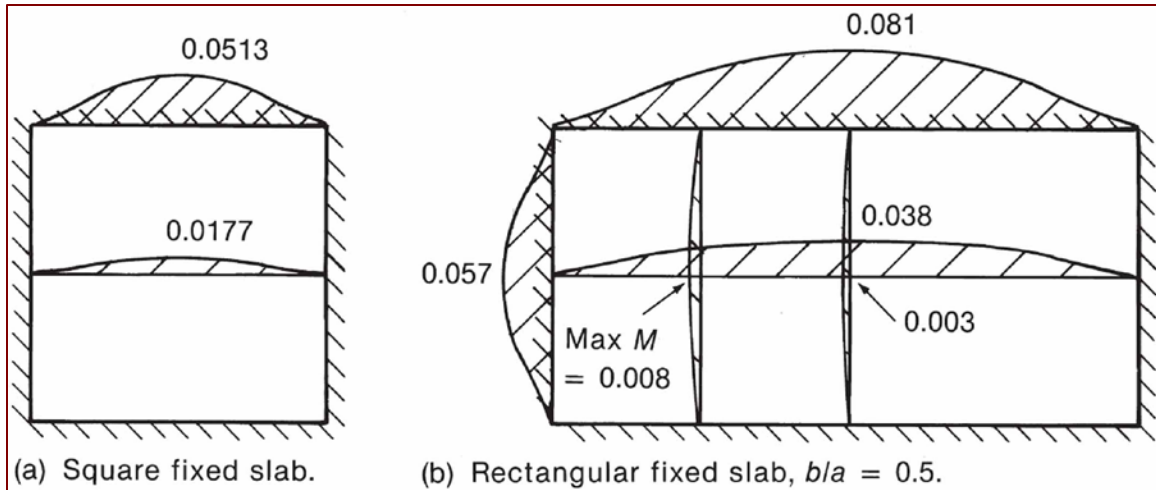


Figura 10-14 Momentos flexionantes unitarios en losas rectangulares con apoyos fijos.

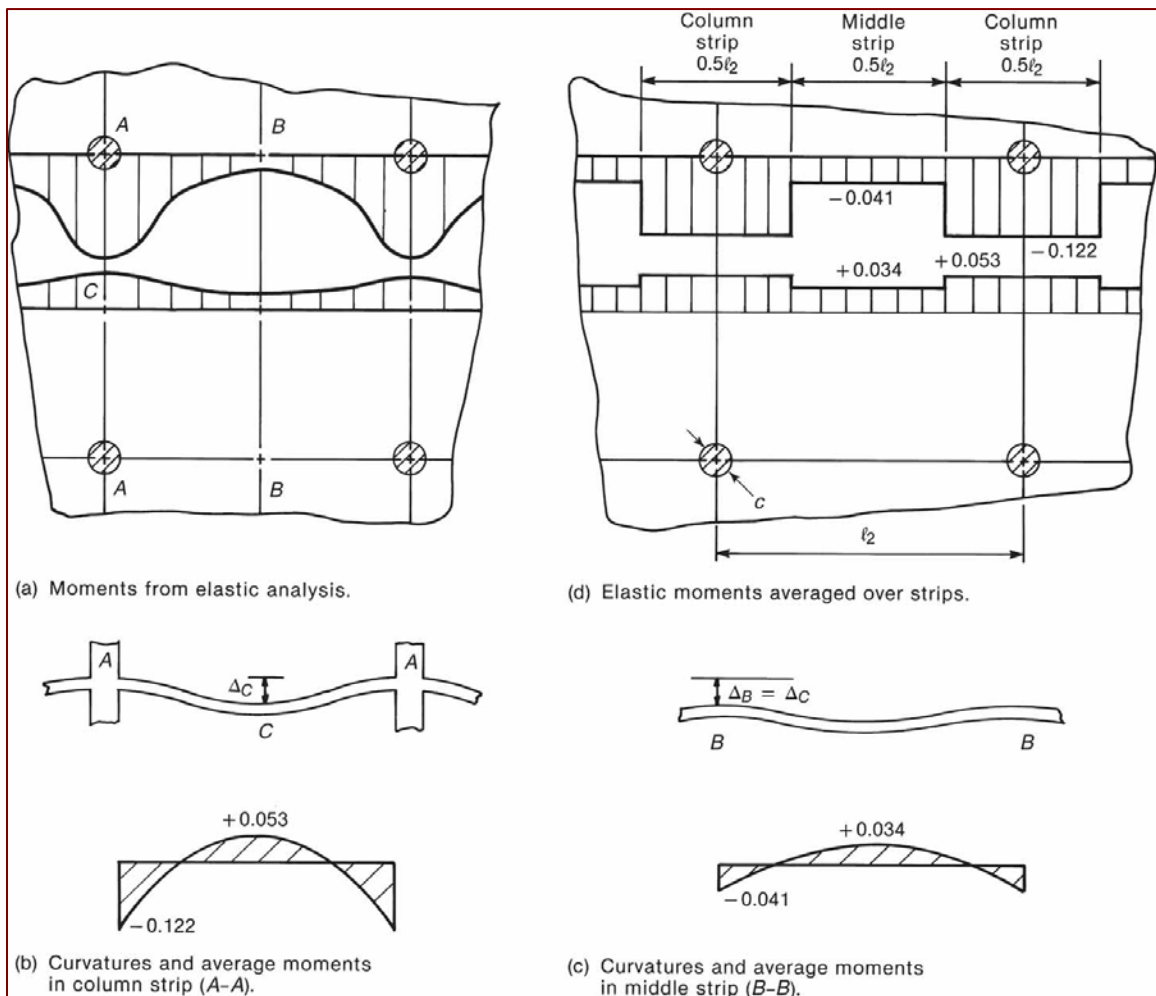


Figura 10-15 Momentos en una losa apoyada sobre columnas aisladas donde $l_2/l_1 = 1.0$ y $c/l_1 = 0.1$.

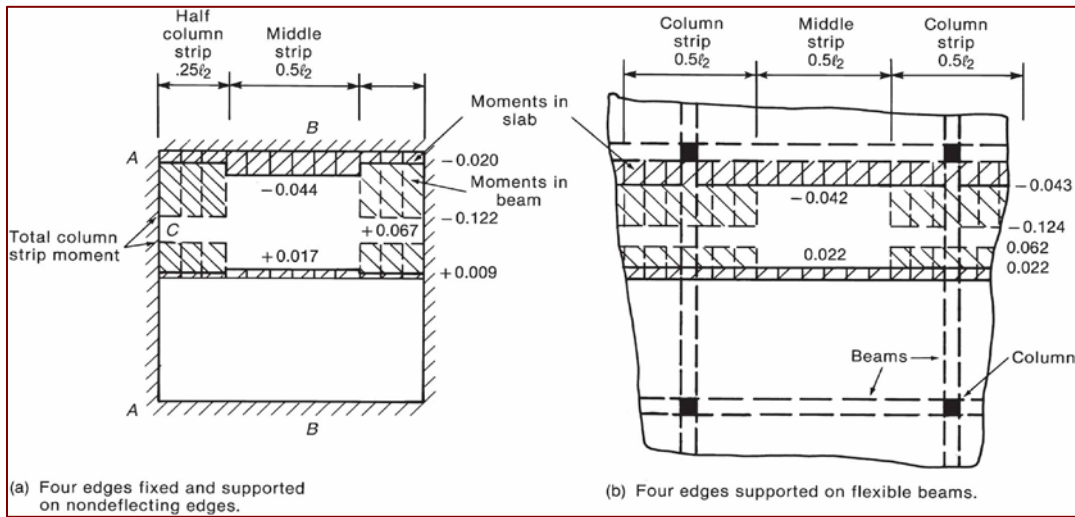


Figura 10-16 Momentos en losas en donde $l_2/l_1 = 1.0$.

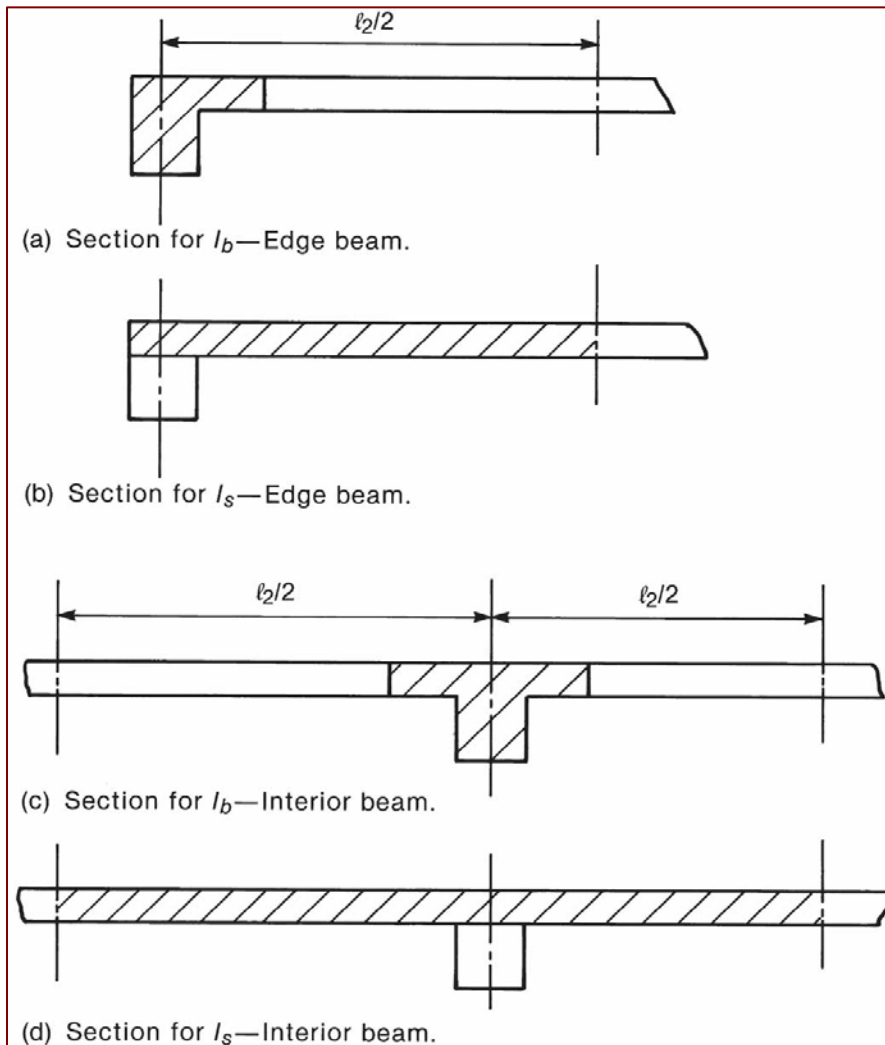


Figura 10-17 Secciones de viga y de losa para el cálculo de α_f .

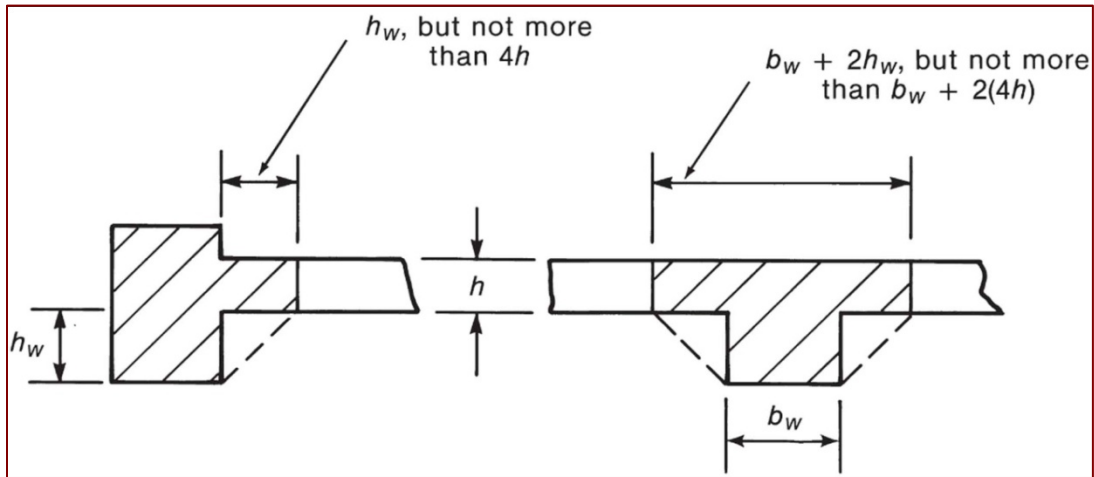


Figura 10-18 Secciones transversales de vigas según definición de ACI 318 13.2.4.

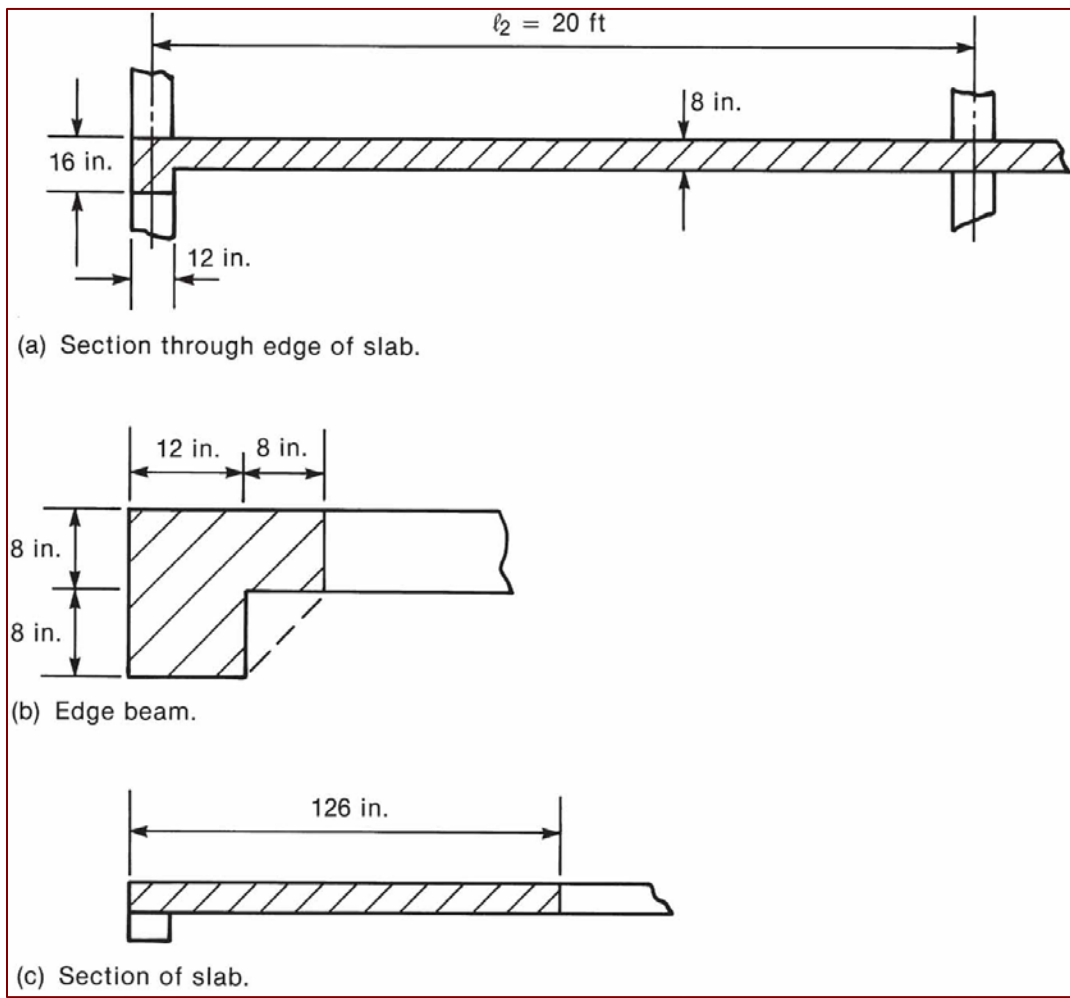


Figura 10-19 Losa del Ejemplo 10-1.

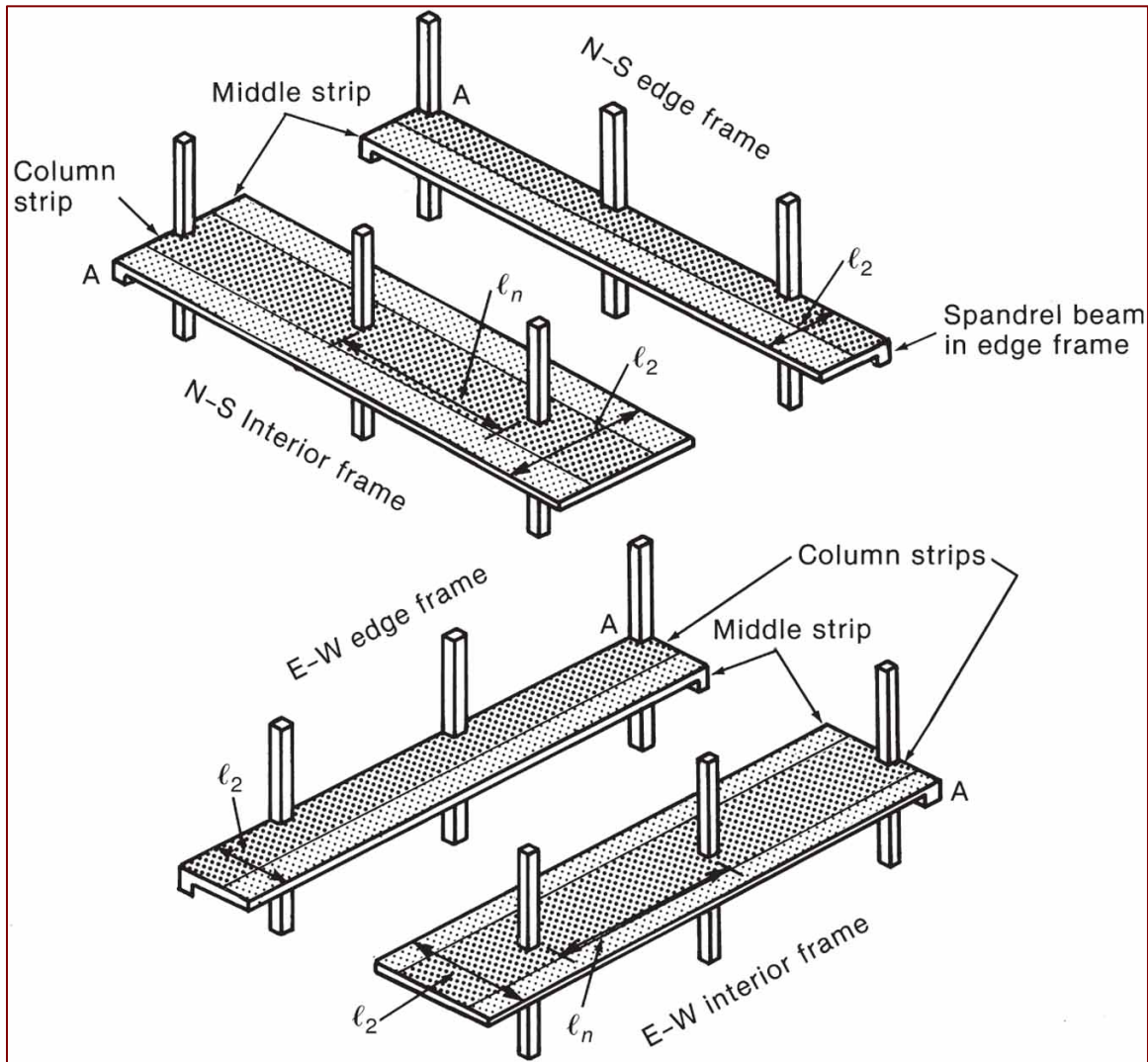


Figura 10-20 División de una losa en pórticos para diseño.

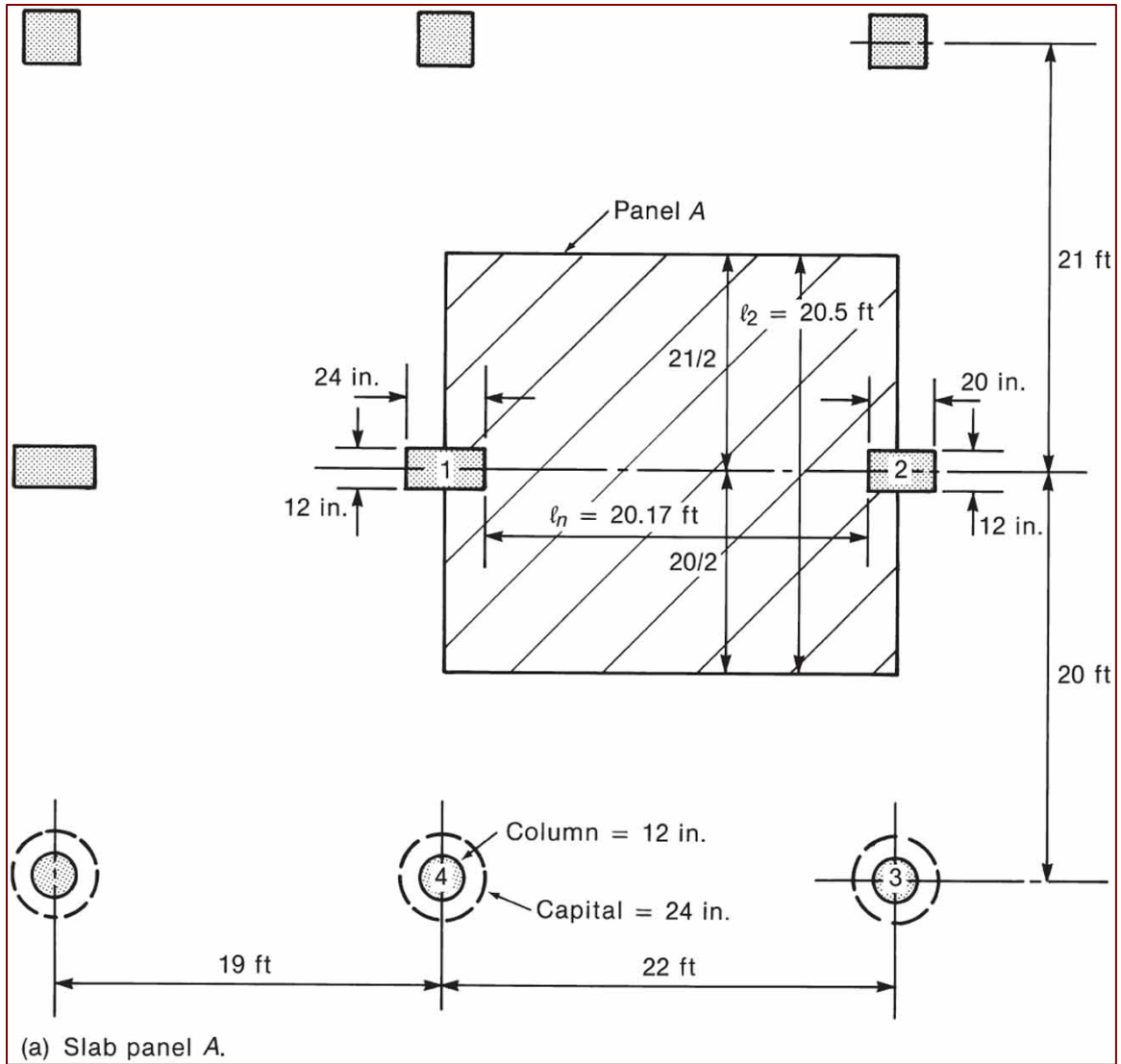


Figura 10-21 Losa para el Ejemplo 10-2.

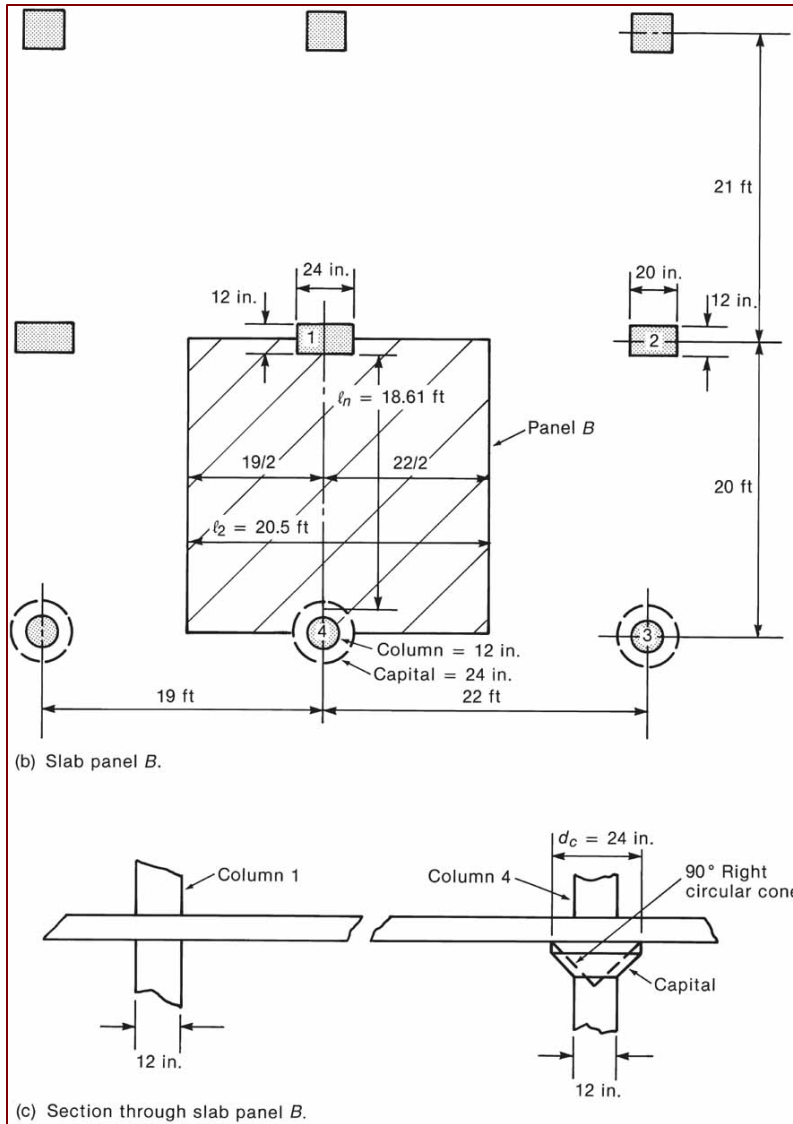


Figura 10-21 Losa para el Ejemplo 10-2.

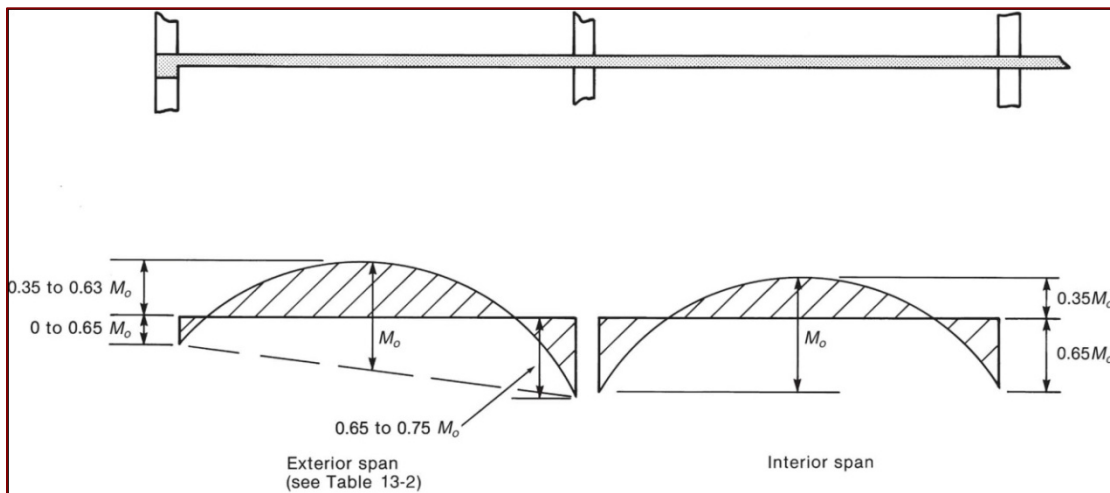


Figura 10-22 Asignación de regiones de momento positivo y negativo.

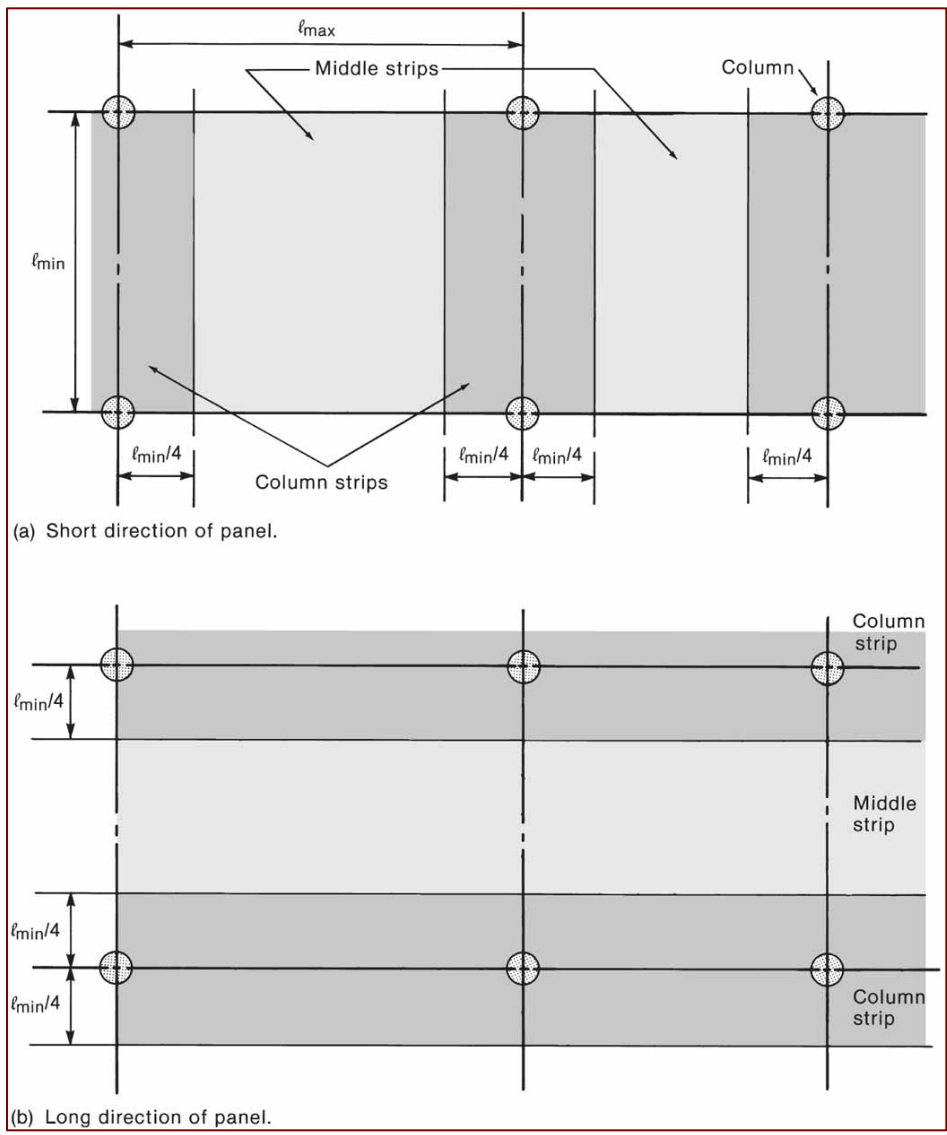


Figura 10-23 Definición de las franjas central y de columna.

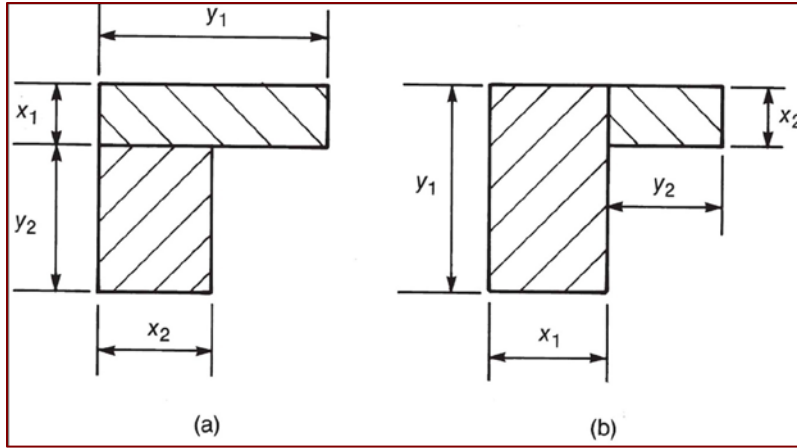


Figura 10–24 División de elementos de borde para el cálculo de la constante torsional C .

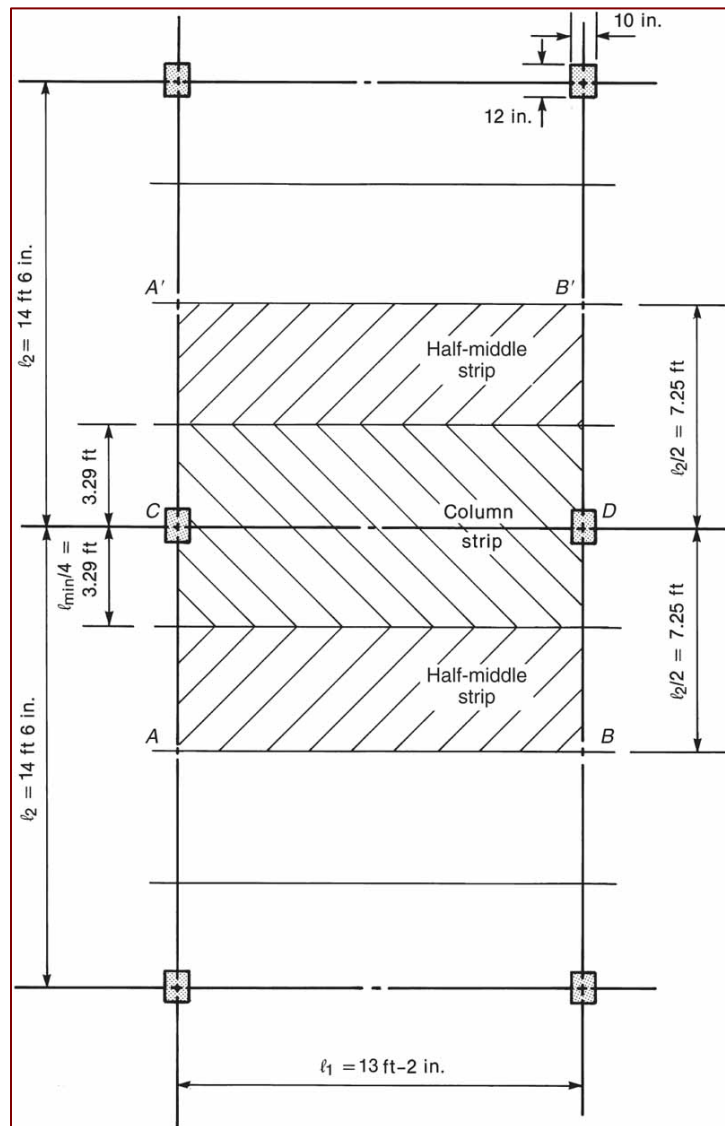


Figura 10–25 Panel interior de una placa plana para el Ejemplo 10-3.

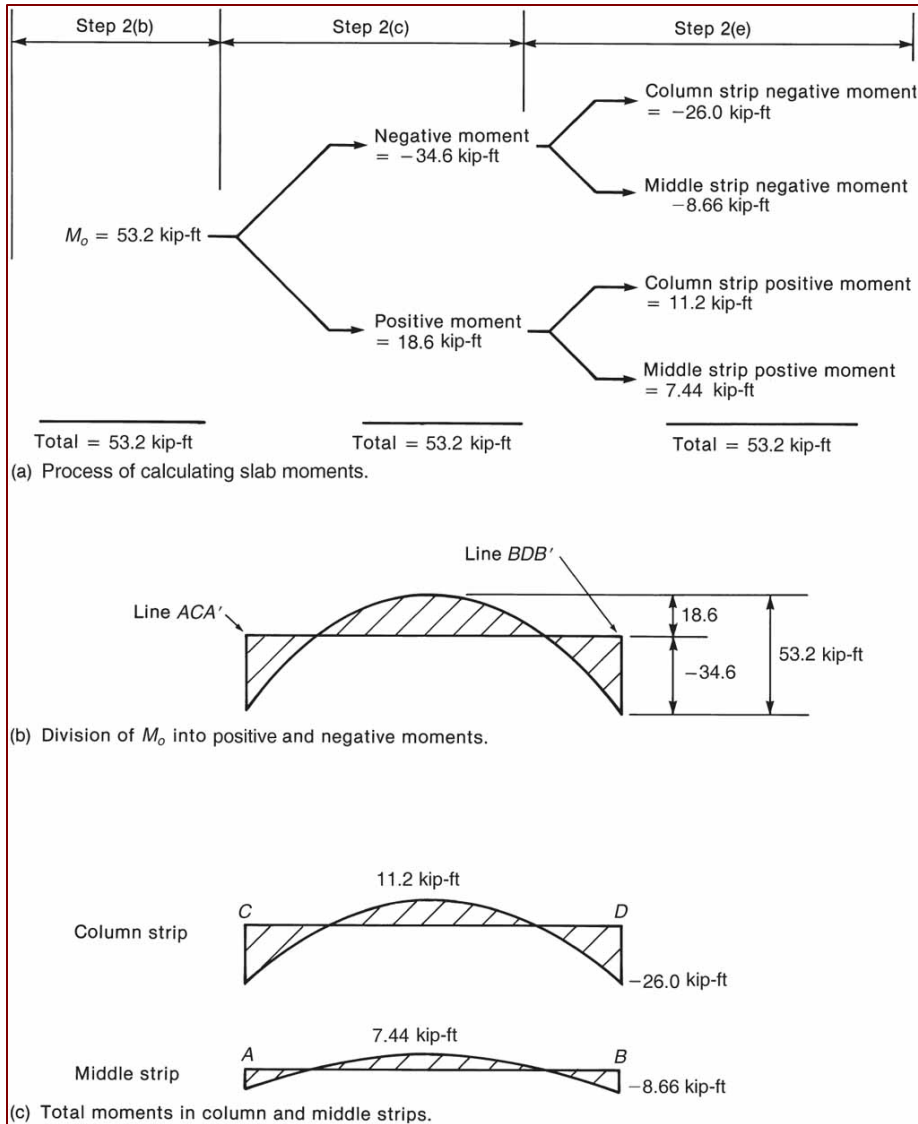


Figura 10–26 Distribucion de momentos en un panel interior o losa plana—Ejemplo 10-3.

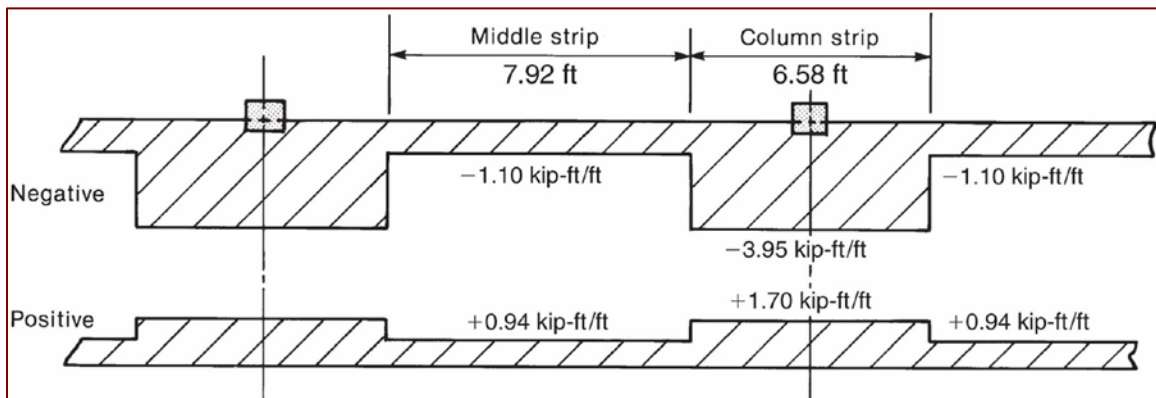


Figura 10–27 Cálculo de momentos—Ejemplo 10-3.

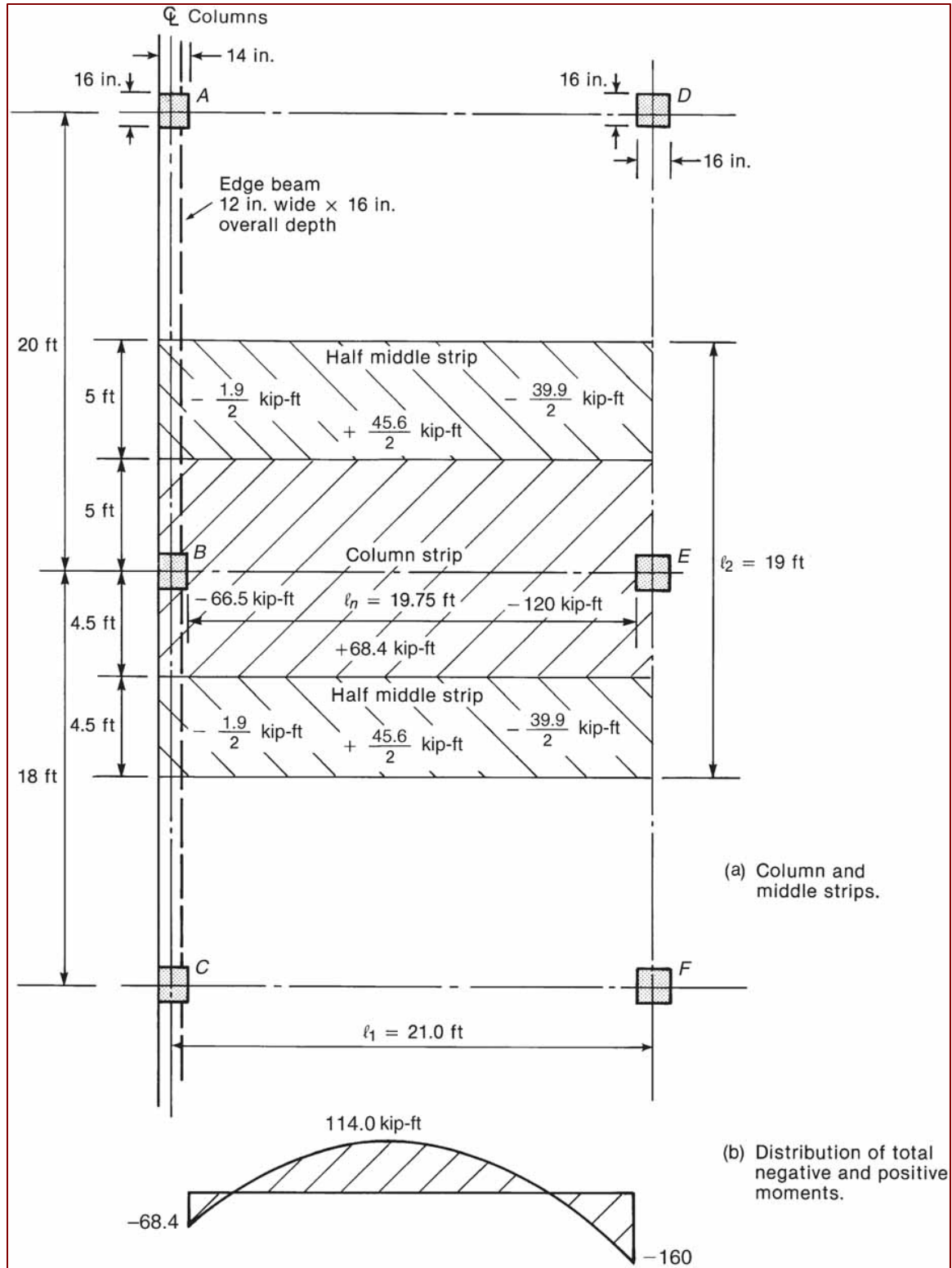


Figura 10-28 Cálculo de momentos en un tramo final—Ejemplo 10-4.

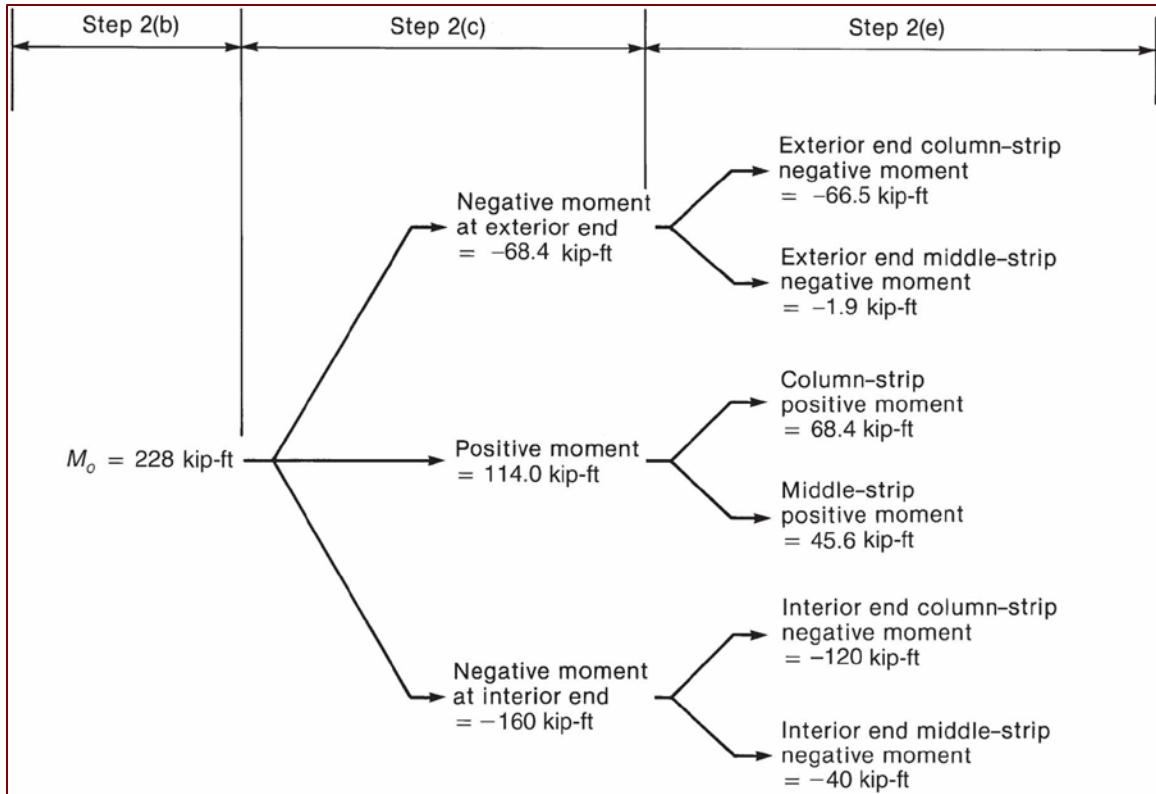


Figura 10-29 Cálculo de momentos en un tramo final para Ejemplo 10-4.

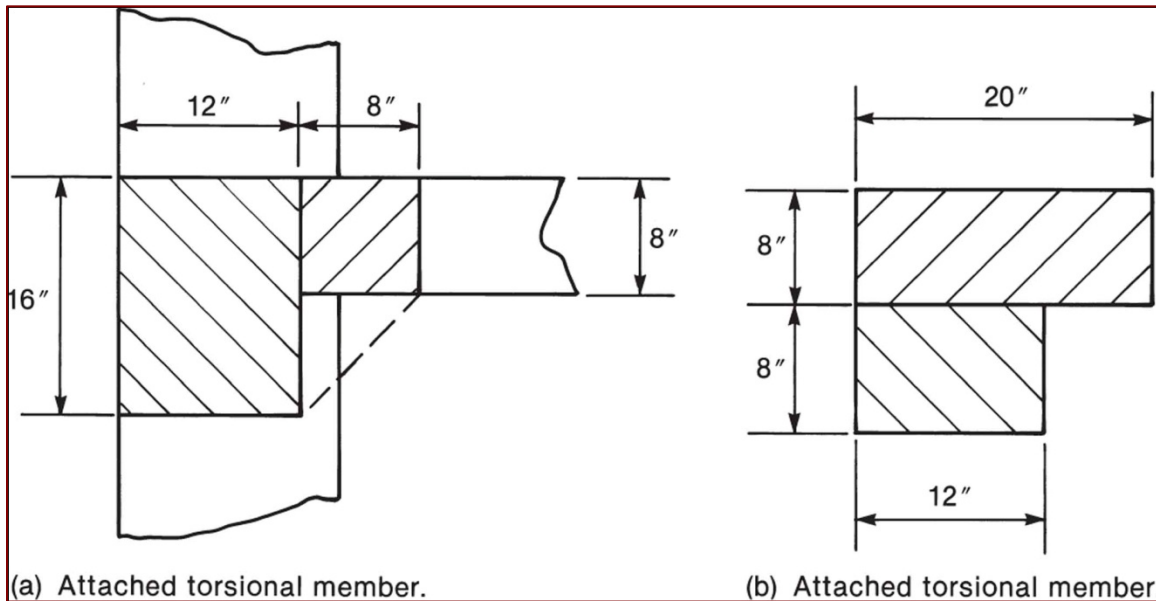


Figura 10-30 Losa, columna y viga de borde para Ejemplo 10-4.

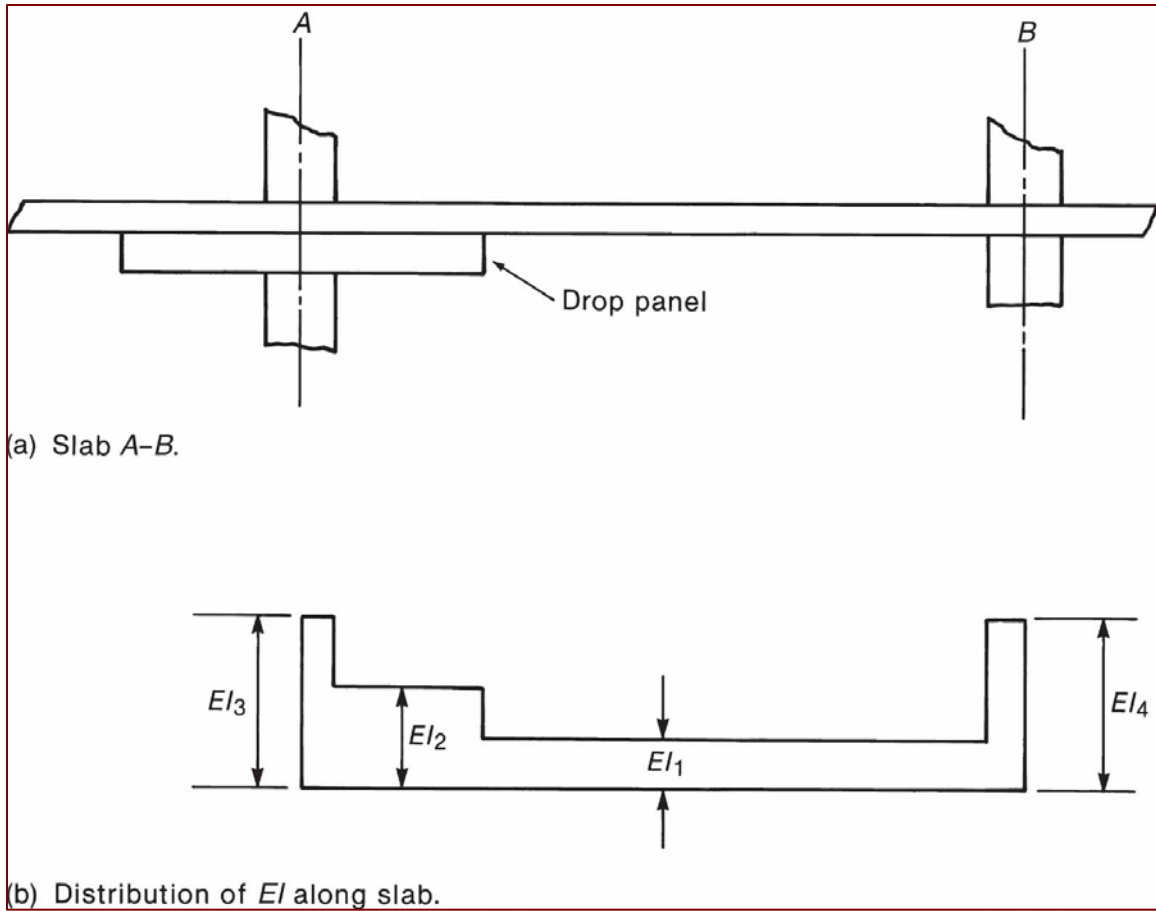


Figura 10-31 Variación de rigidez a lo largo de un vano.

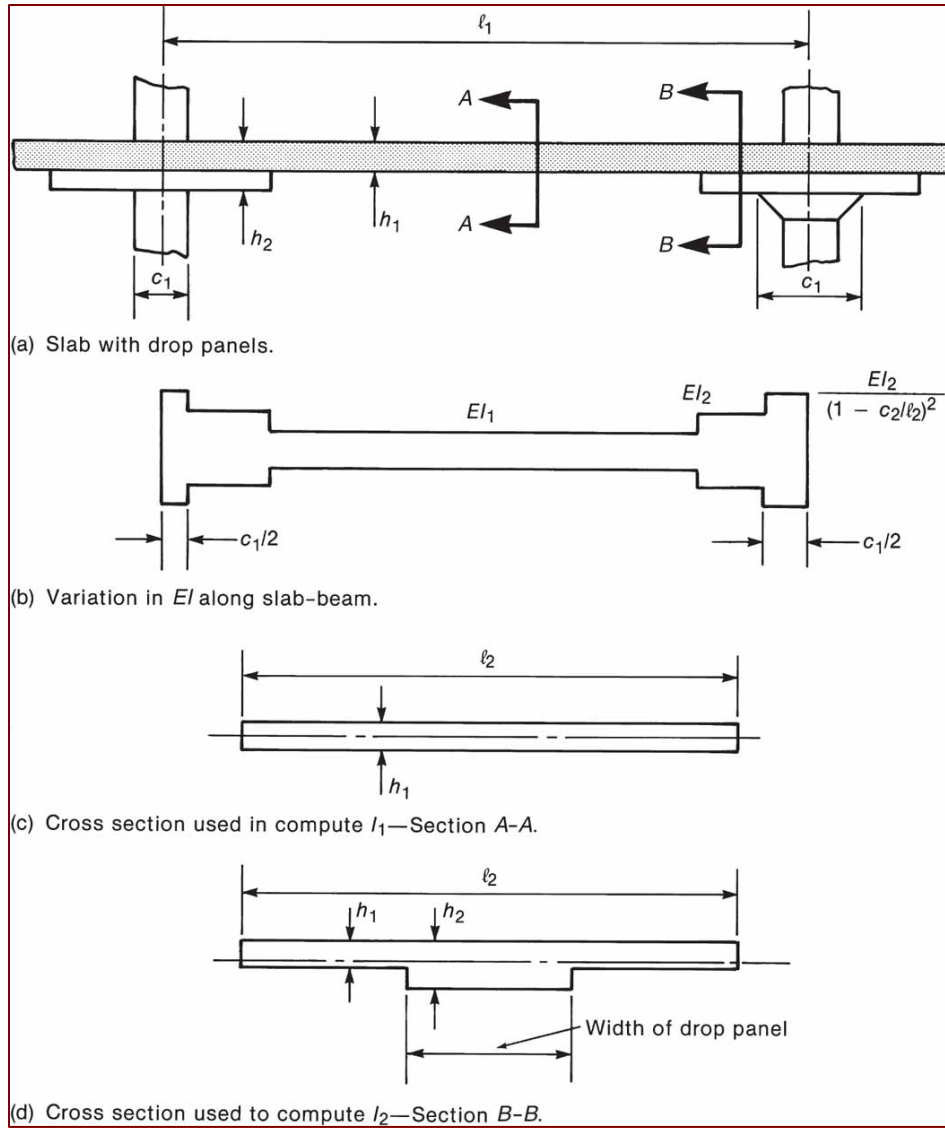


Figura 10-32 Valores EI para una losa con un ábaco.

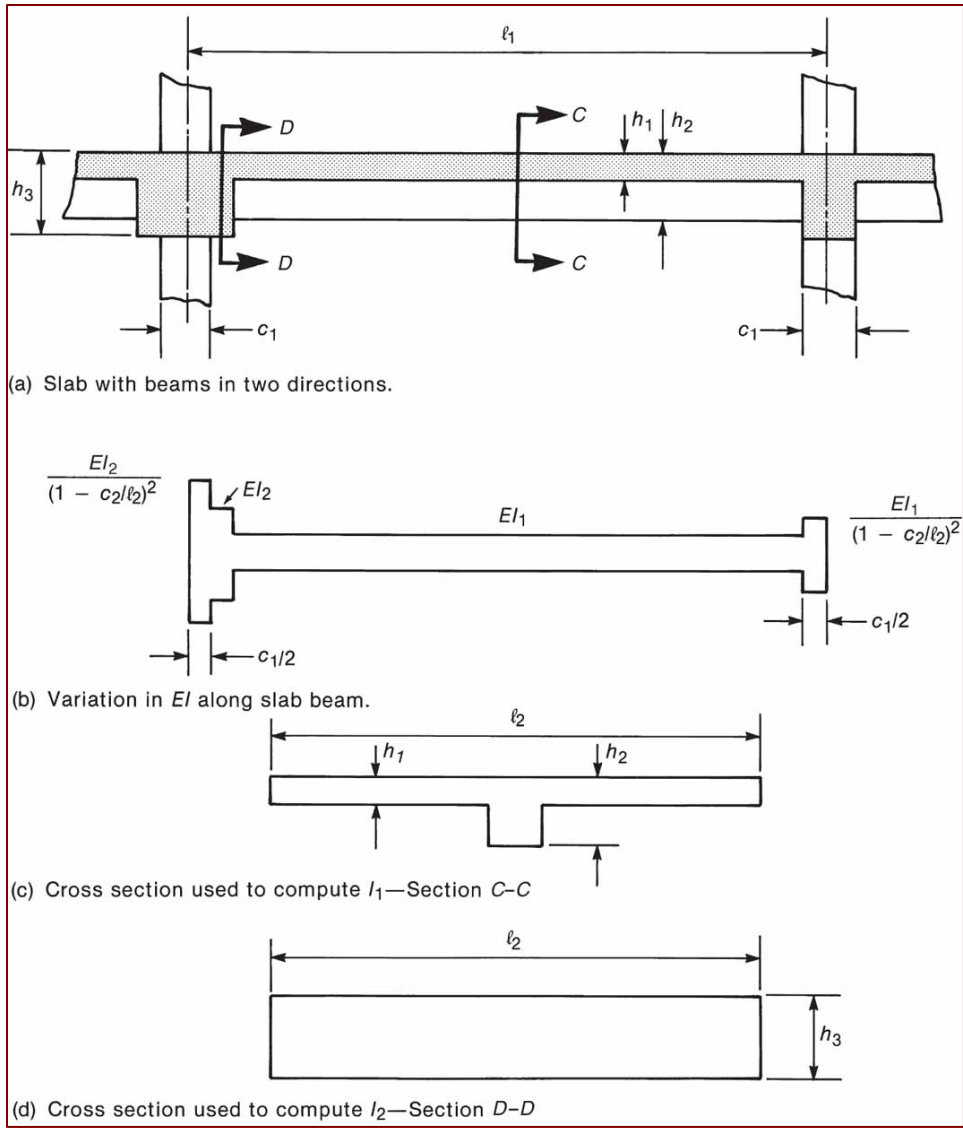


Figura 10–33 Valores EI para una losa y viga.

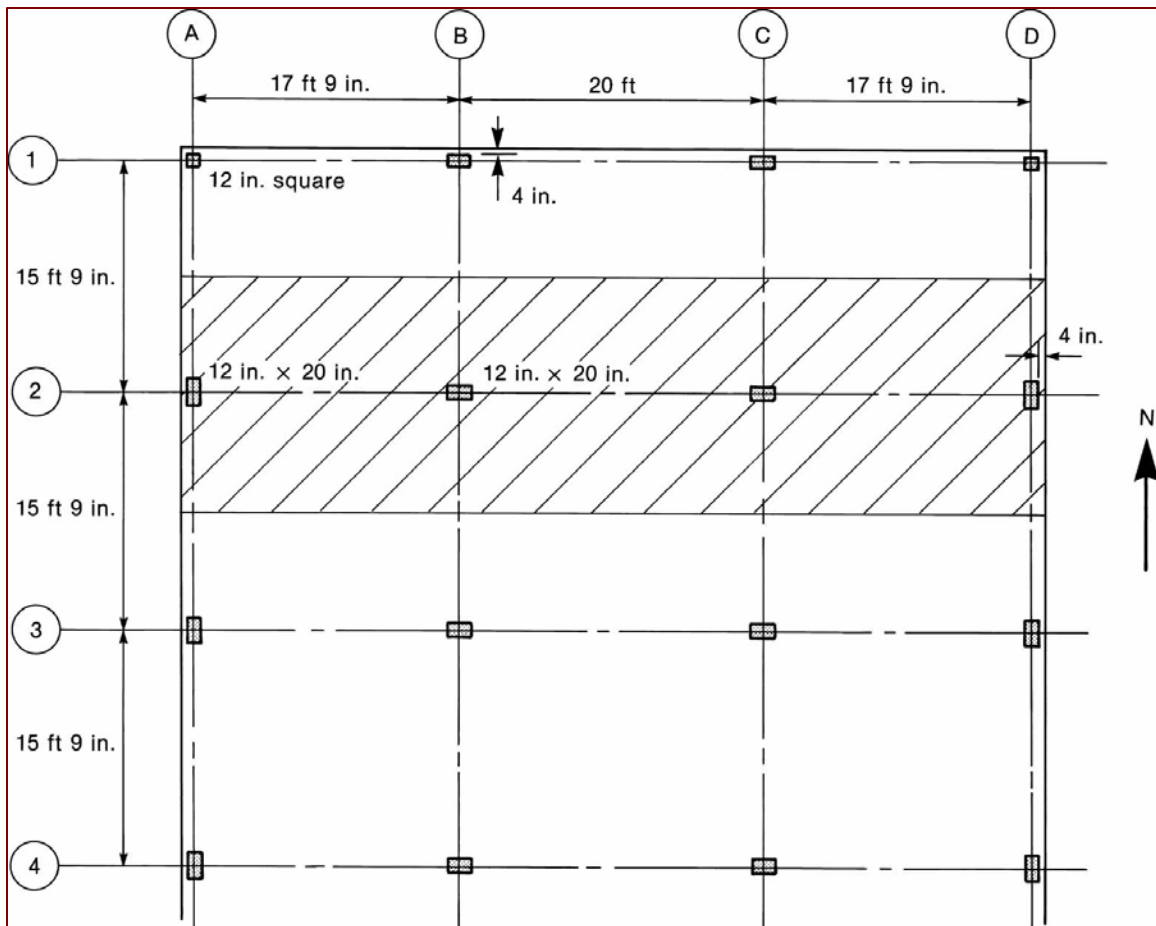


Figura 10-34 Planta de un entrespacio de placa plana—Ejemplos 10-5, 10-7, 10-9 y 10-10.

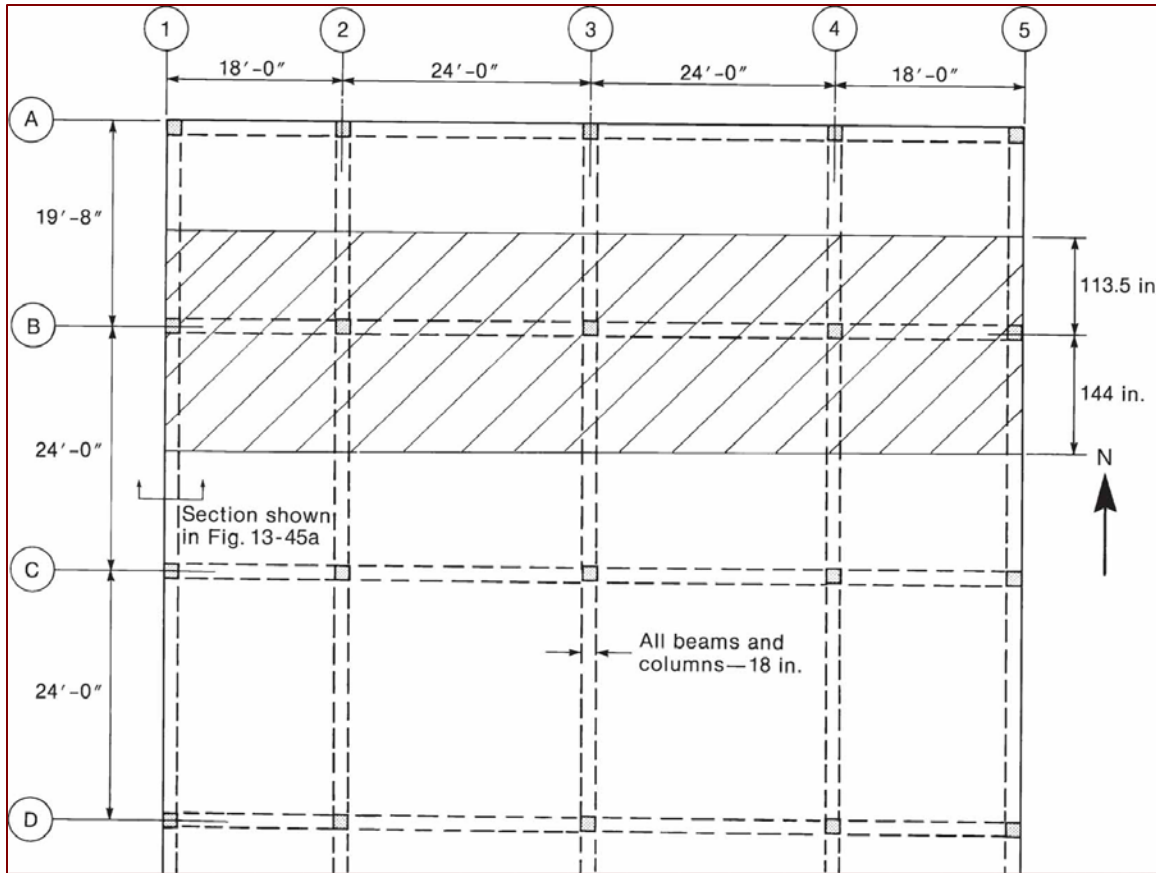


Figura 10–35 Losas en dos direcciones con vigas—Ejemplos 10-6 y 10-8.

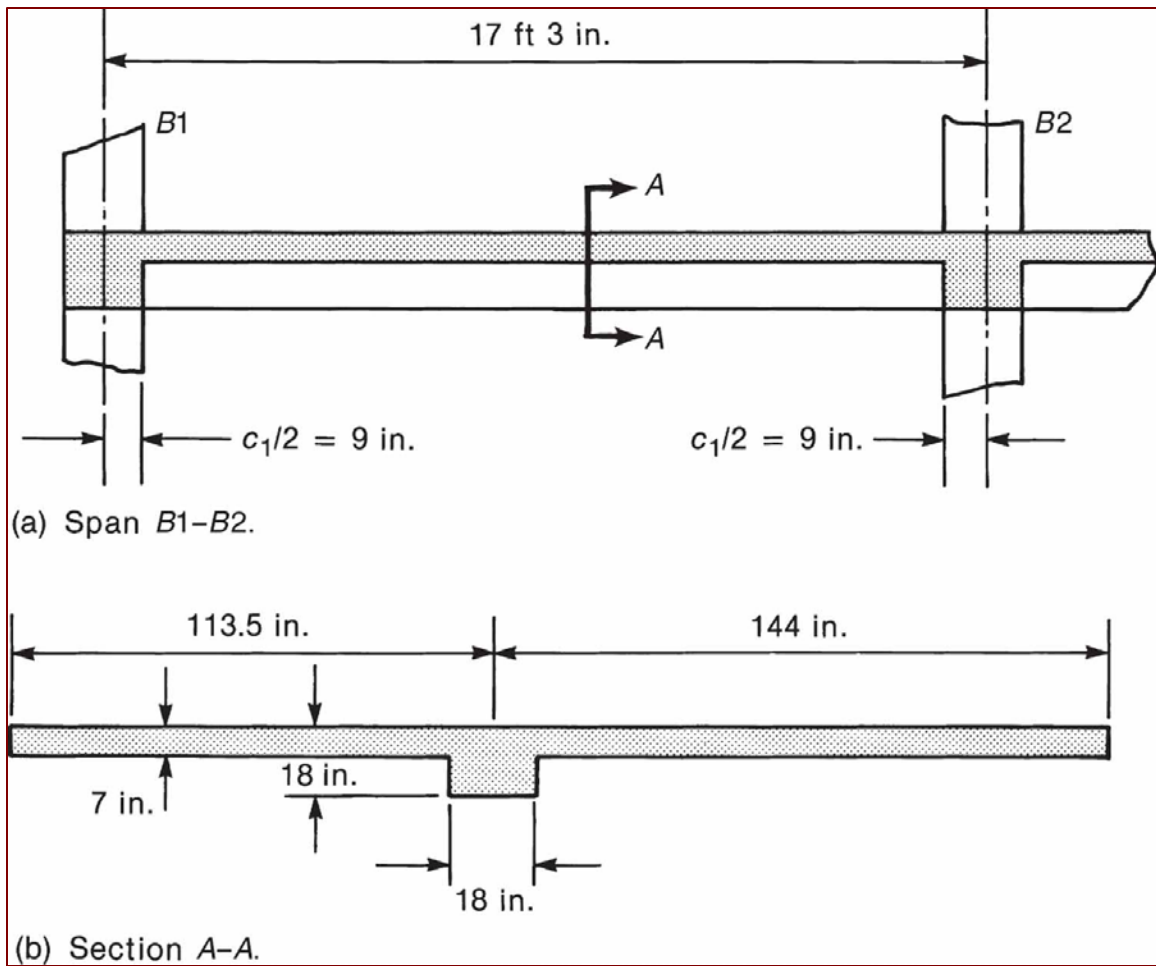


Figura 10-36 Tramo $B1-B2$ —Ejemplo 10-6.

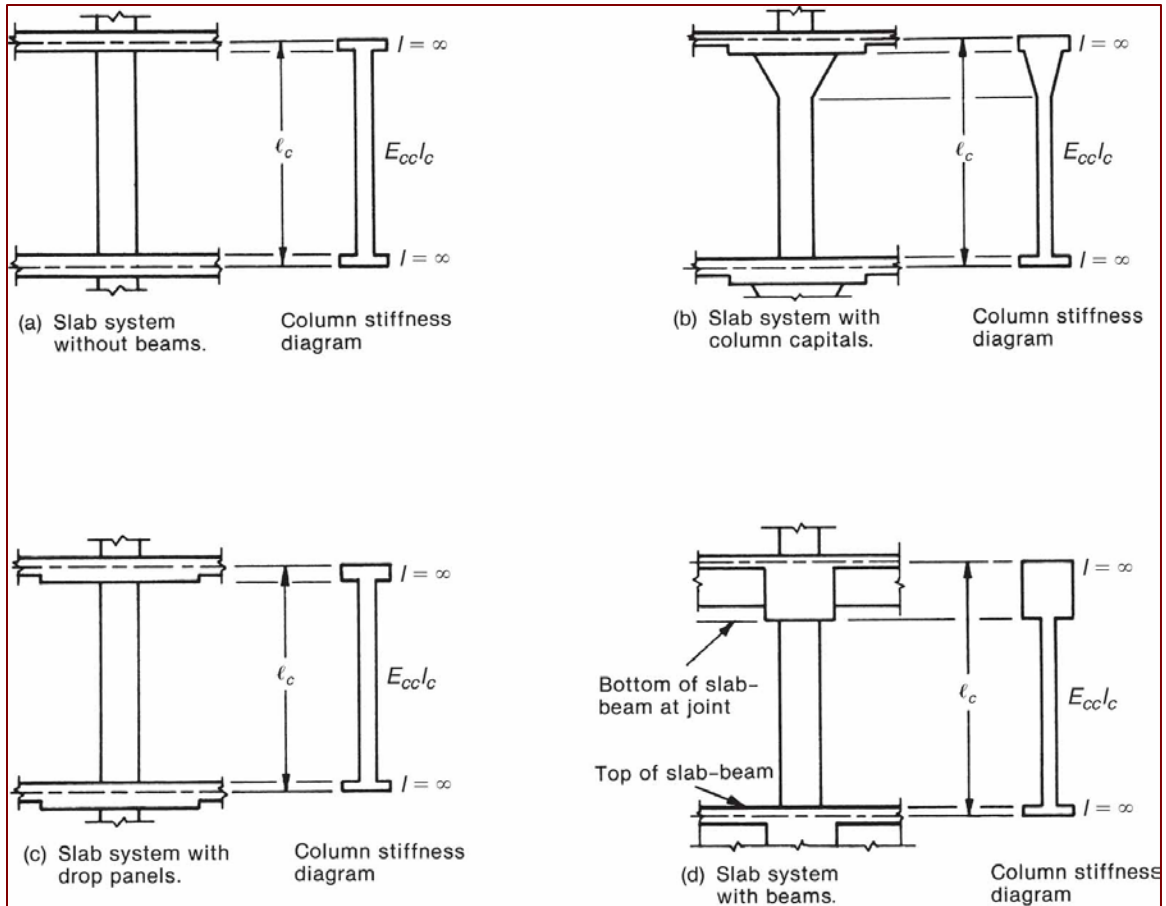


Figura 10–37 Secciones para los cálculos de rigidez de columna, K_c .

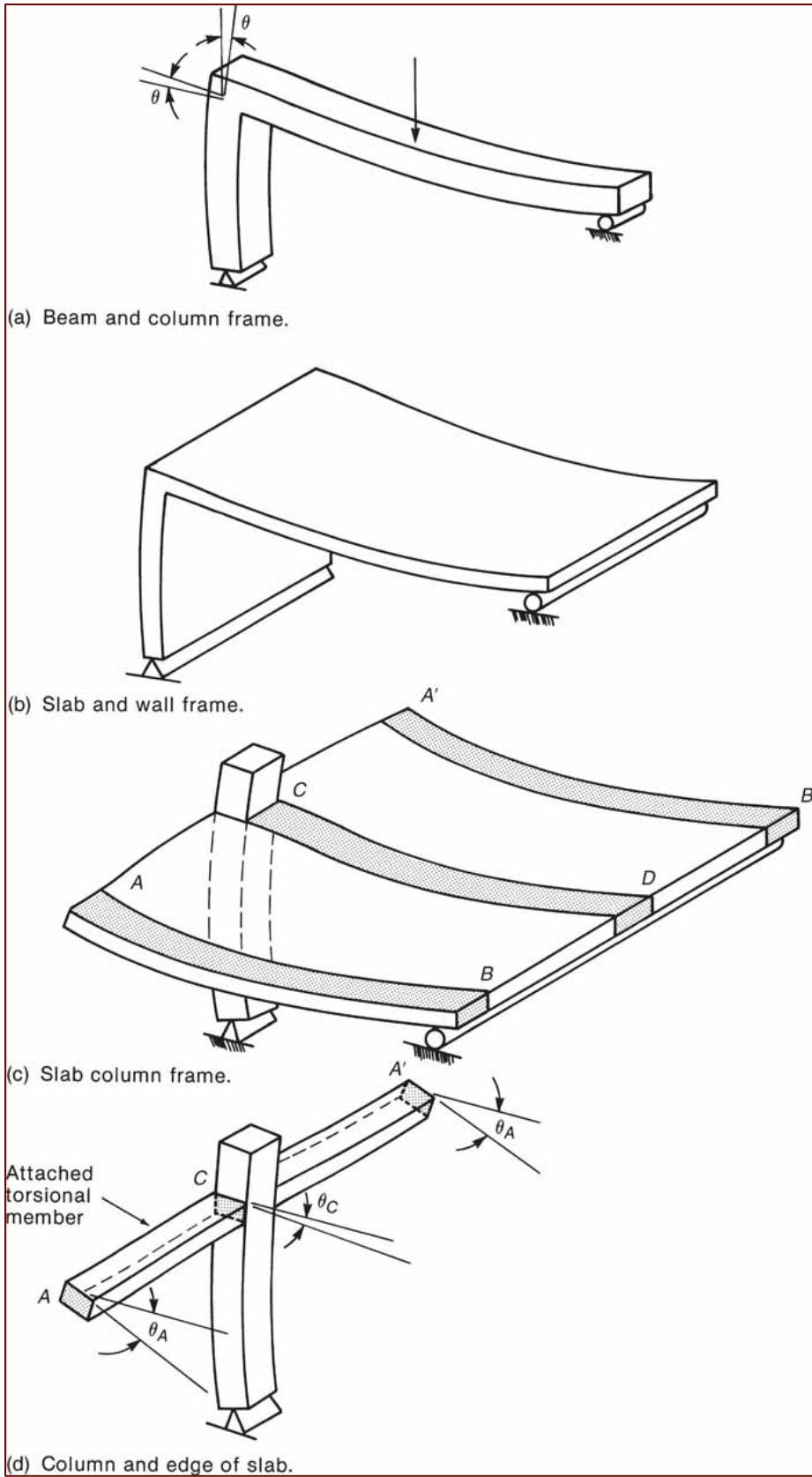


Figura 10-38 Acción de pórtico y torsión de elemento de borde.

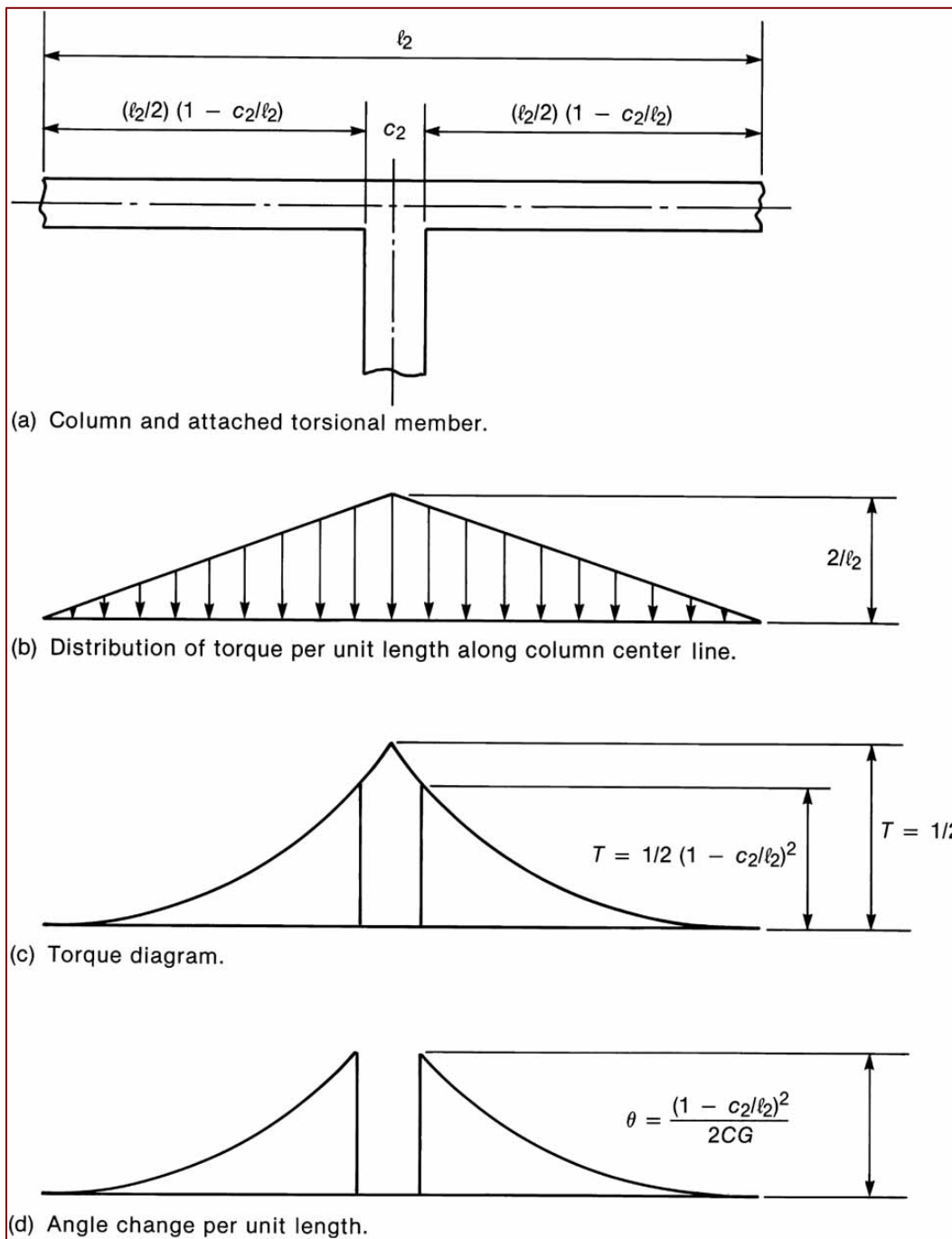


Figura 10-39 Cálculo de K_r . (Tomado de [10-17].)

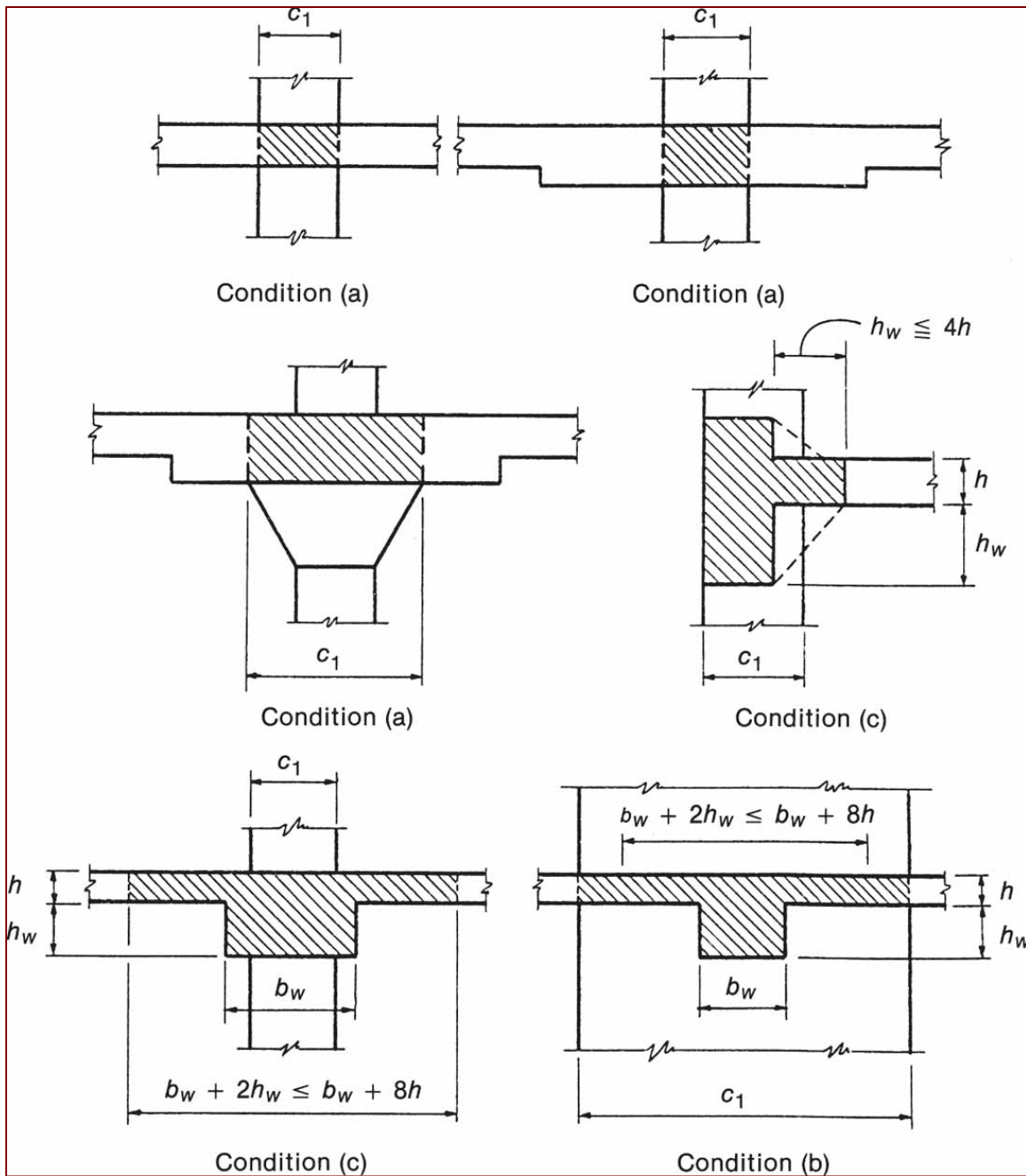


Figura 10-40 Elementos en torsión (Tomado de [10-15], cortesía de Portland Cement Association.)

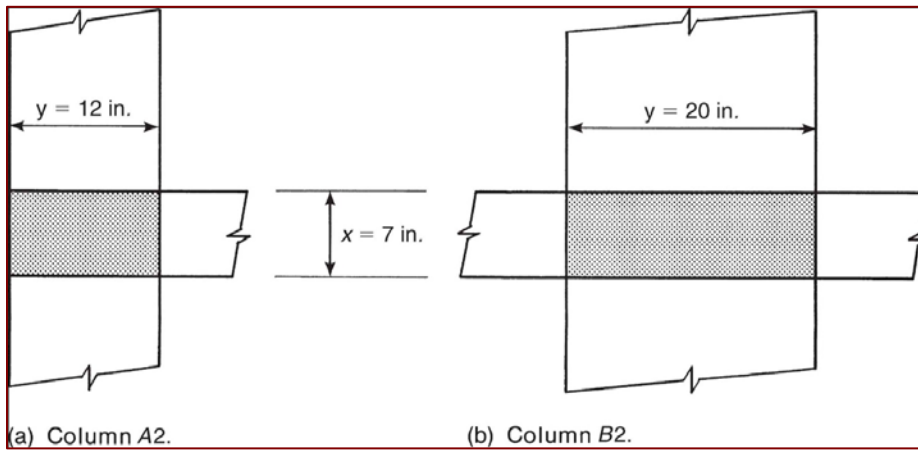


Figura 10-41 Elementos en torsión para el Ejemplo 10-7.

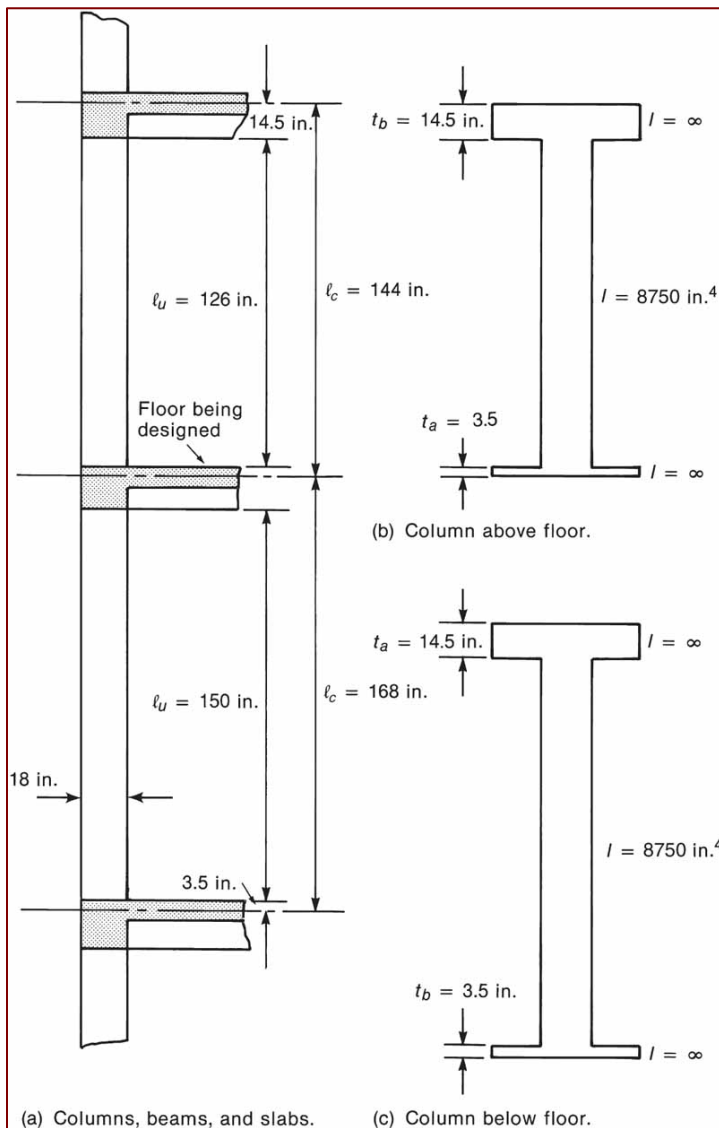


Figura 10-42 Columnas exteriores de la junta de losa en B1 para ejemplo 10-8.

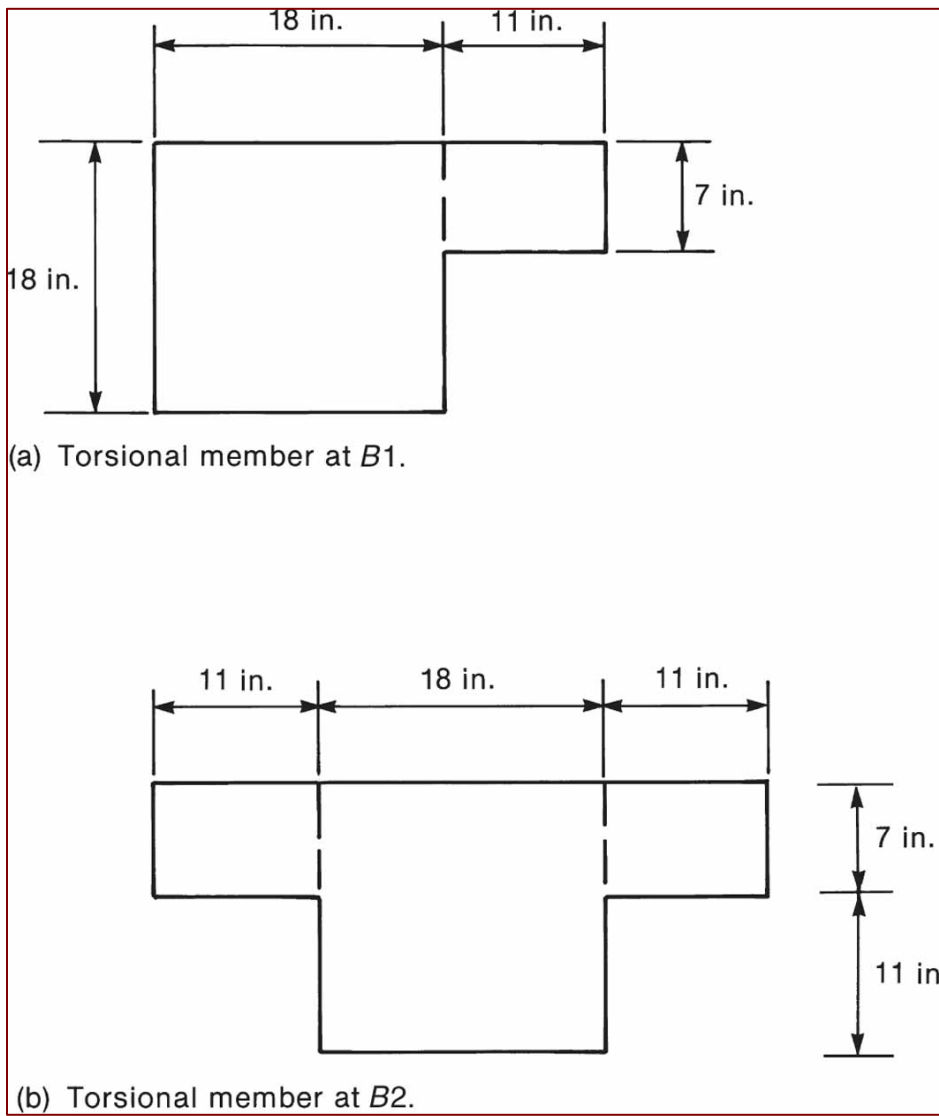


Figura 10-43 Elementos en torsión en $B1$ y $B2$ para el Ejemplo 10-8.

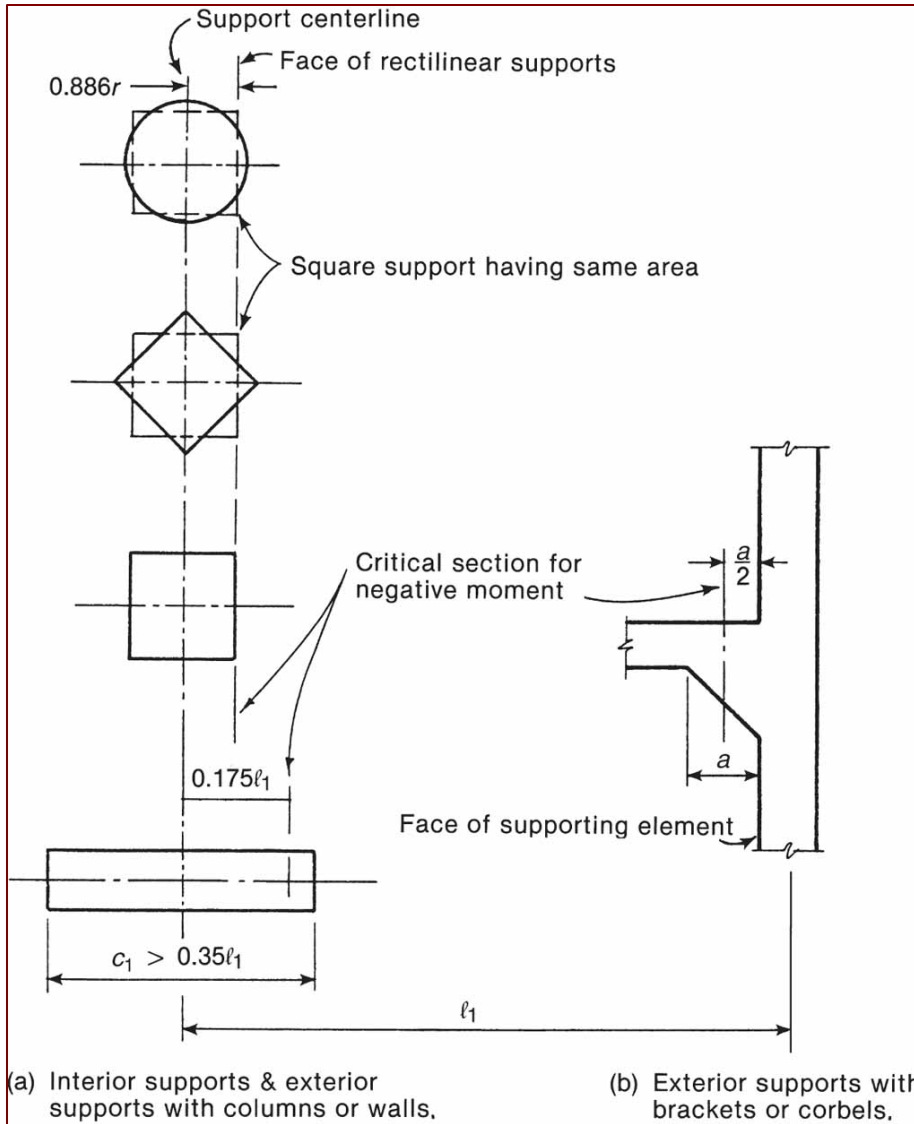


Figura 10-44 Secciones críticas para momento negativo. (Tomado de [10-15], cortesía de Portland Cement Association.)

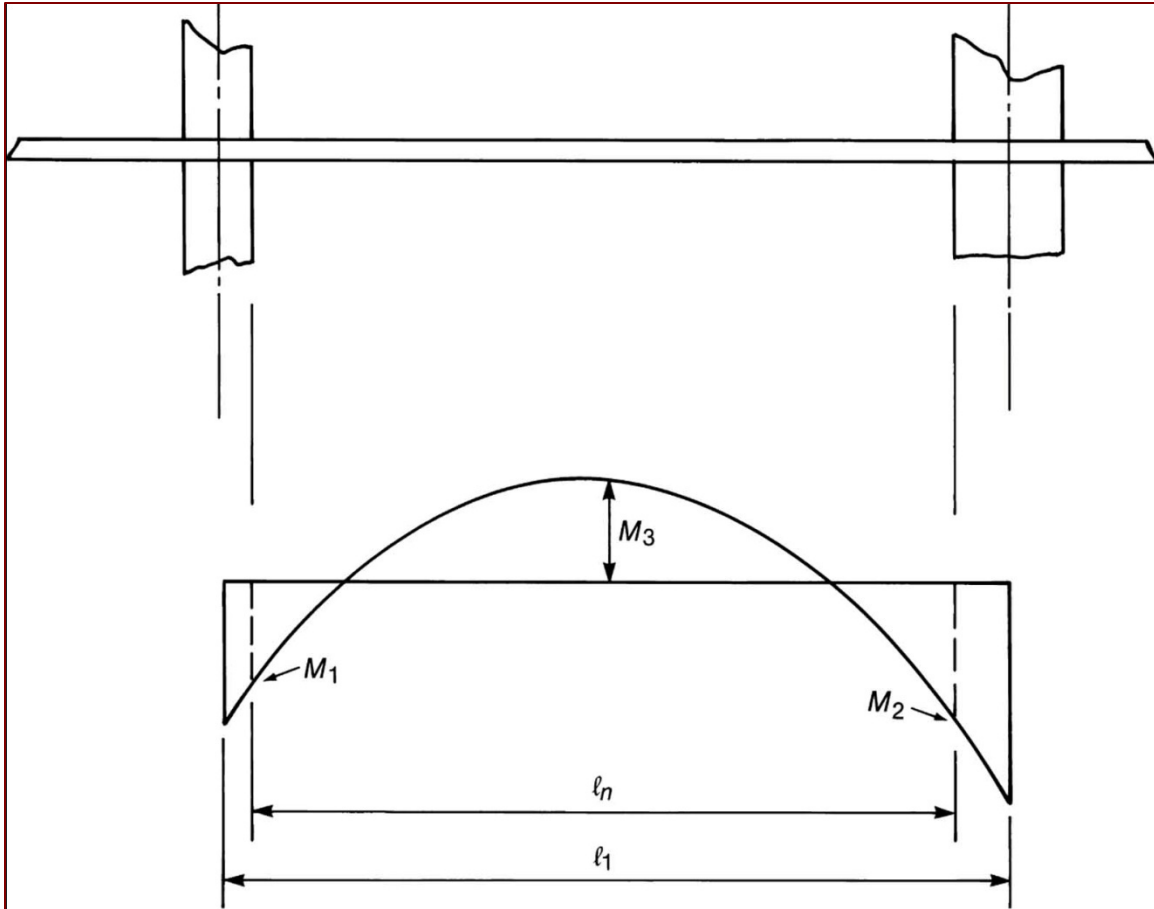


Figura 10-45 Momentos positivos y negativos en una viga losa.

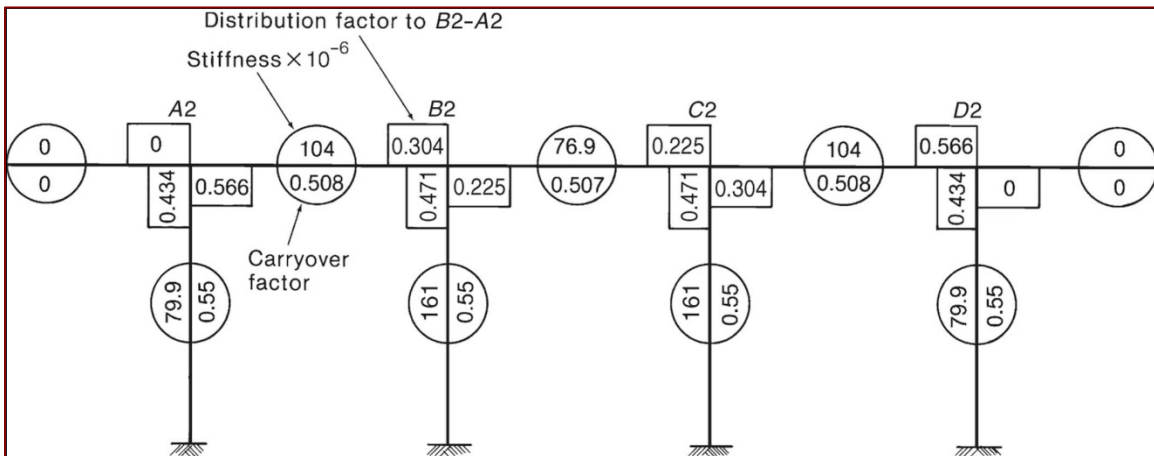


Figura 10-46 Factores de rigidez, de acarreo y de distribución—Ejemplo 10-9.

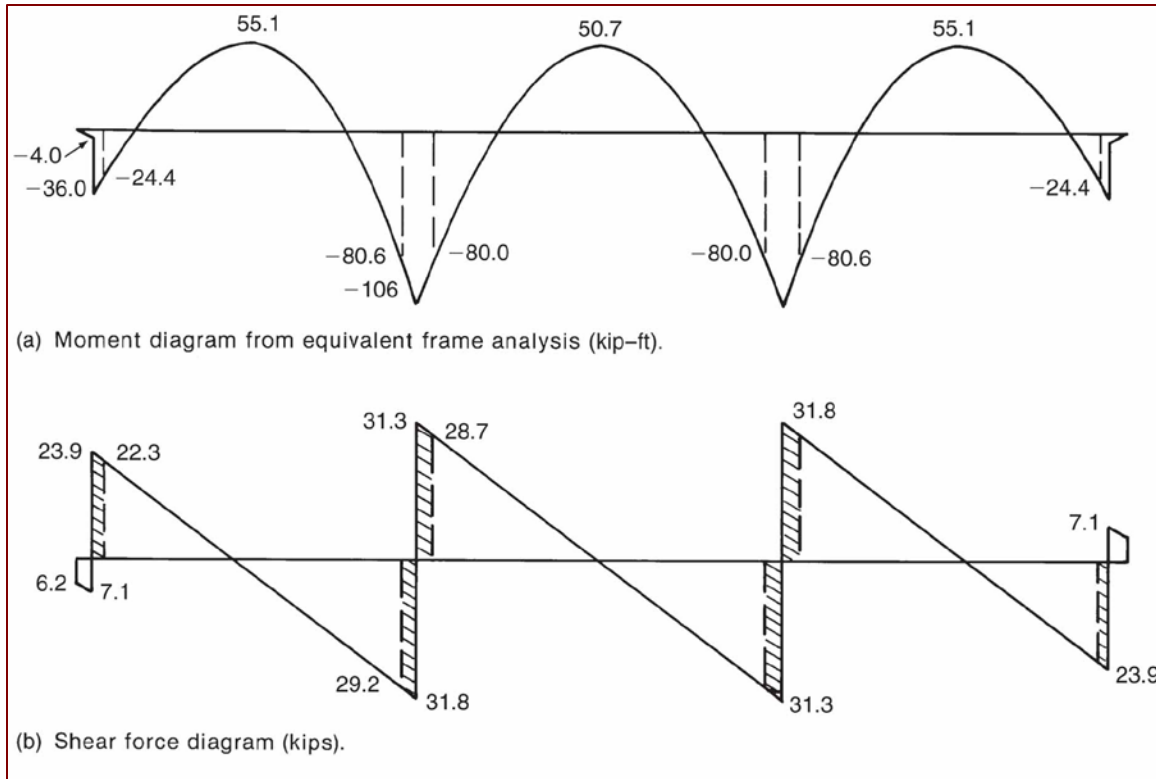


Figura 10-47 Momentos y cortantes en pórtico del eje 2 para el Ejemplo 10-9.

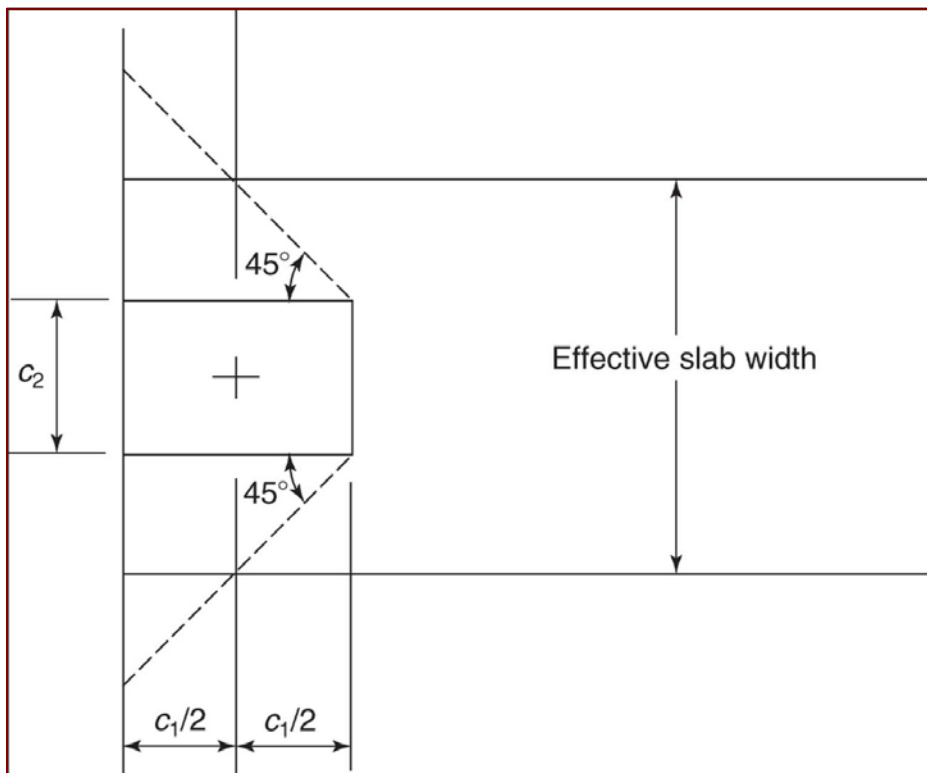


Figura 10-48 Valor mínimo para ancho efectivo de losa en conexiones losa columna exteriores.

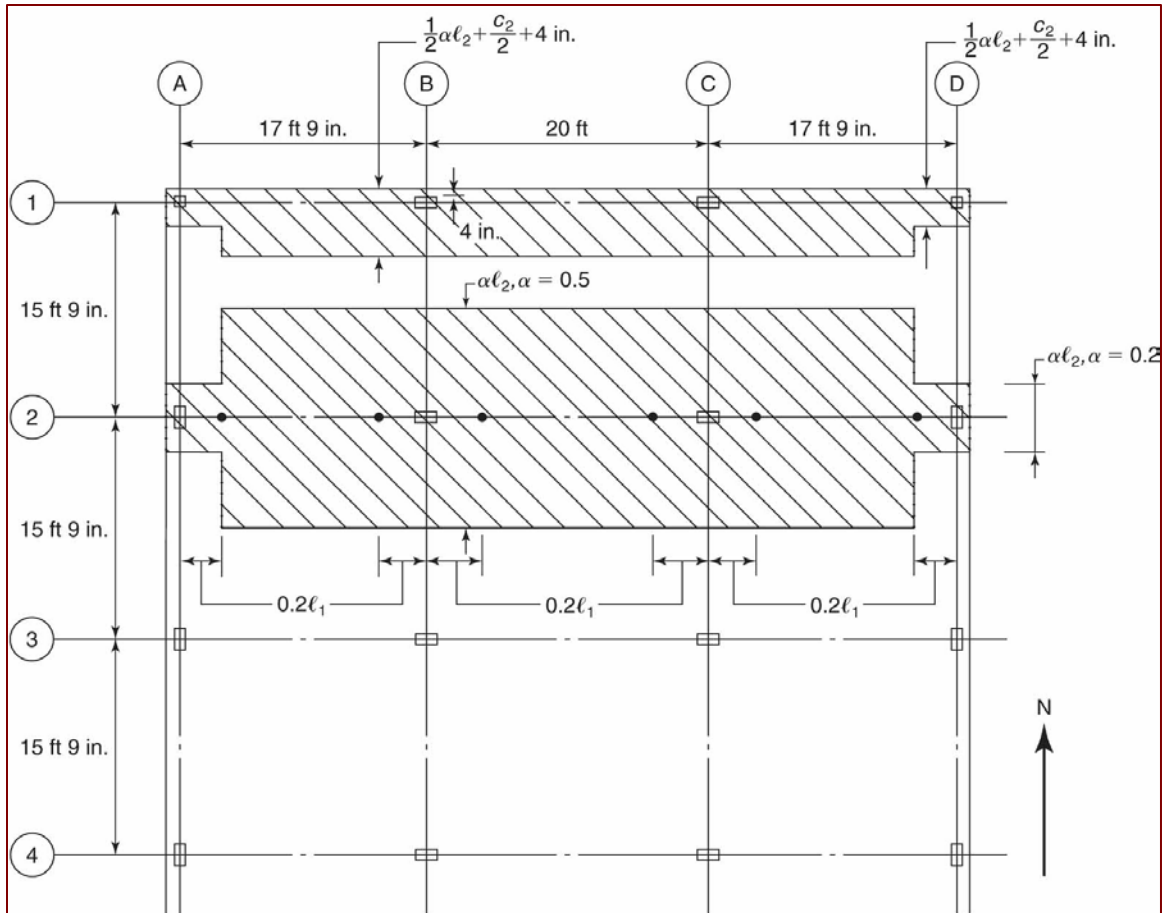


Figura 10-49 Ancho efectivo de losa, αl_2 , y ubicación para nodos intermedios a lo largo de la luz.

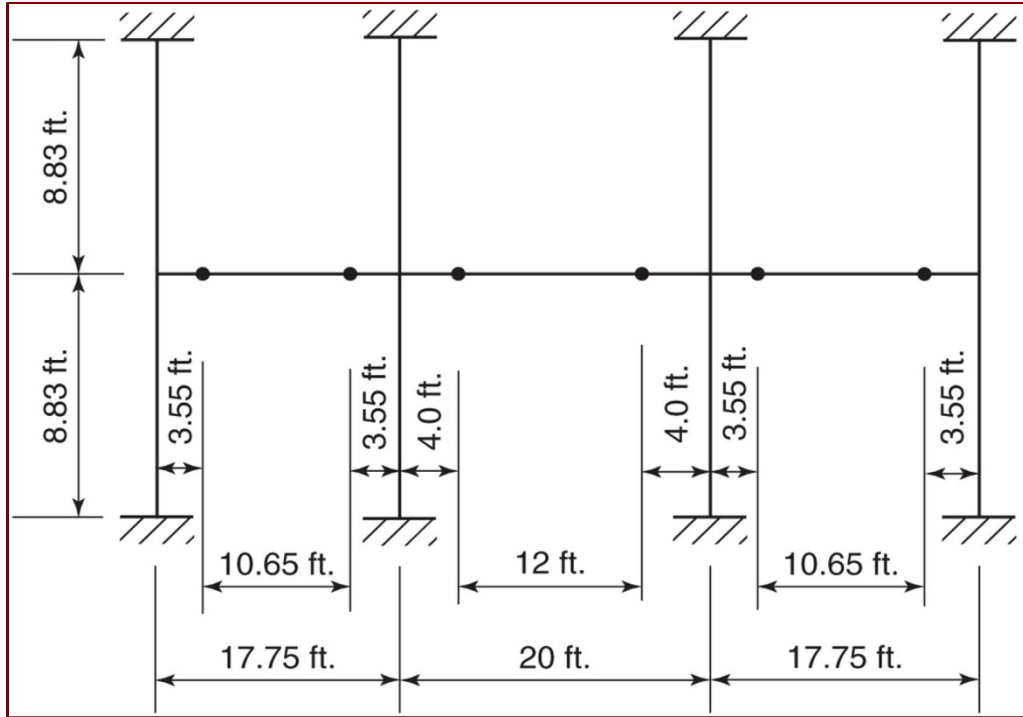


Figura 10-50 Dimensiones y ubicación de puntos nodales para pórtico de losa columna analizado en el Ejemplo 10-10.

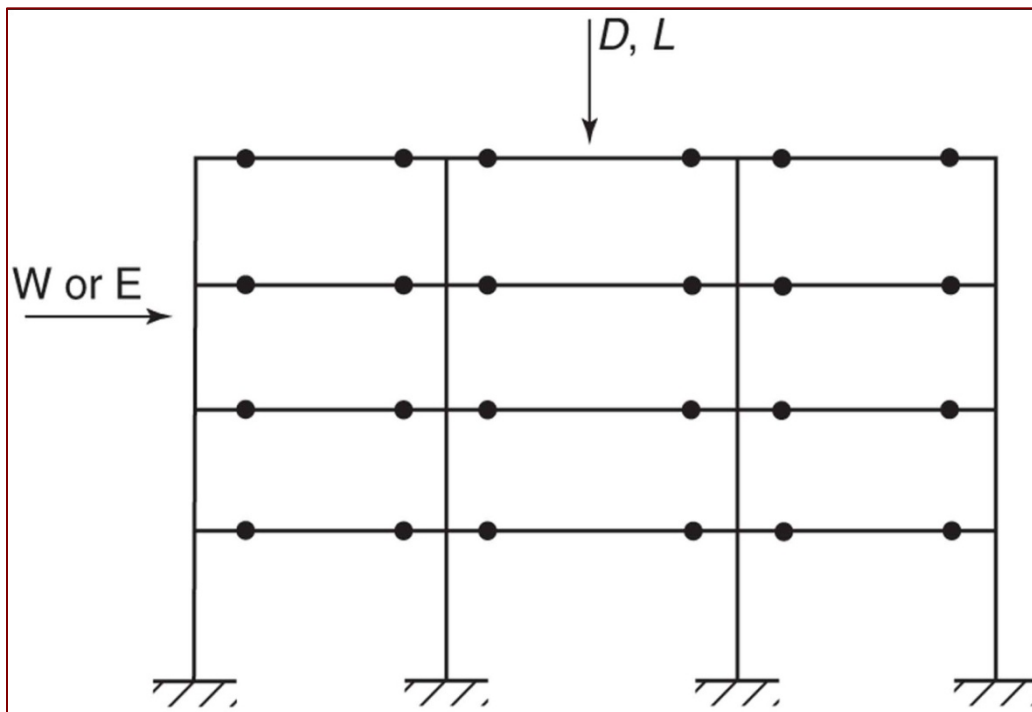


Figura 10-51 Modelo de pórtico equivalente para análisis de pórtico losa-columna sujeto a cargas gravitacionales y laterales.

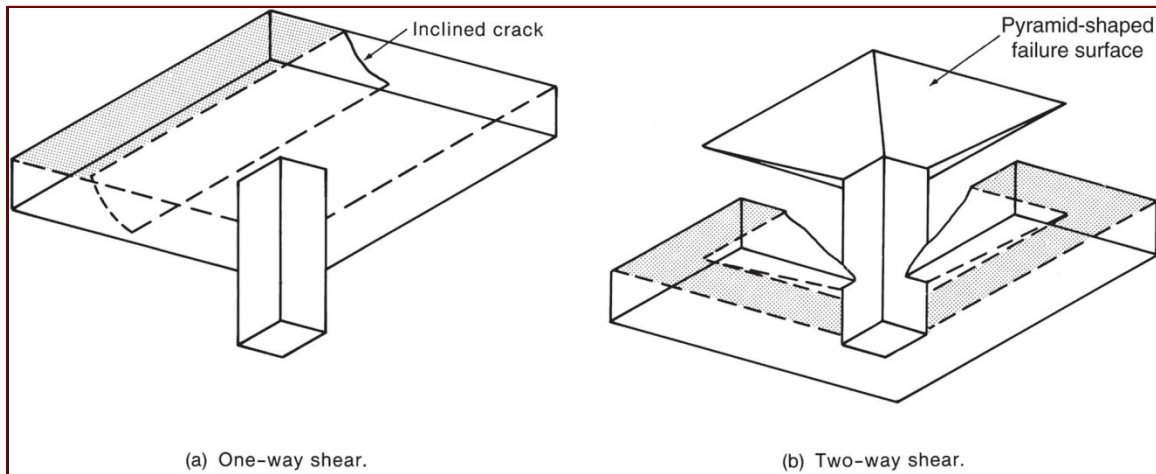


Figura 10-52 Falla de cortante en una losa.

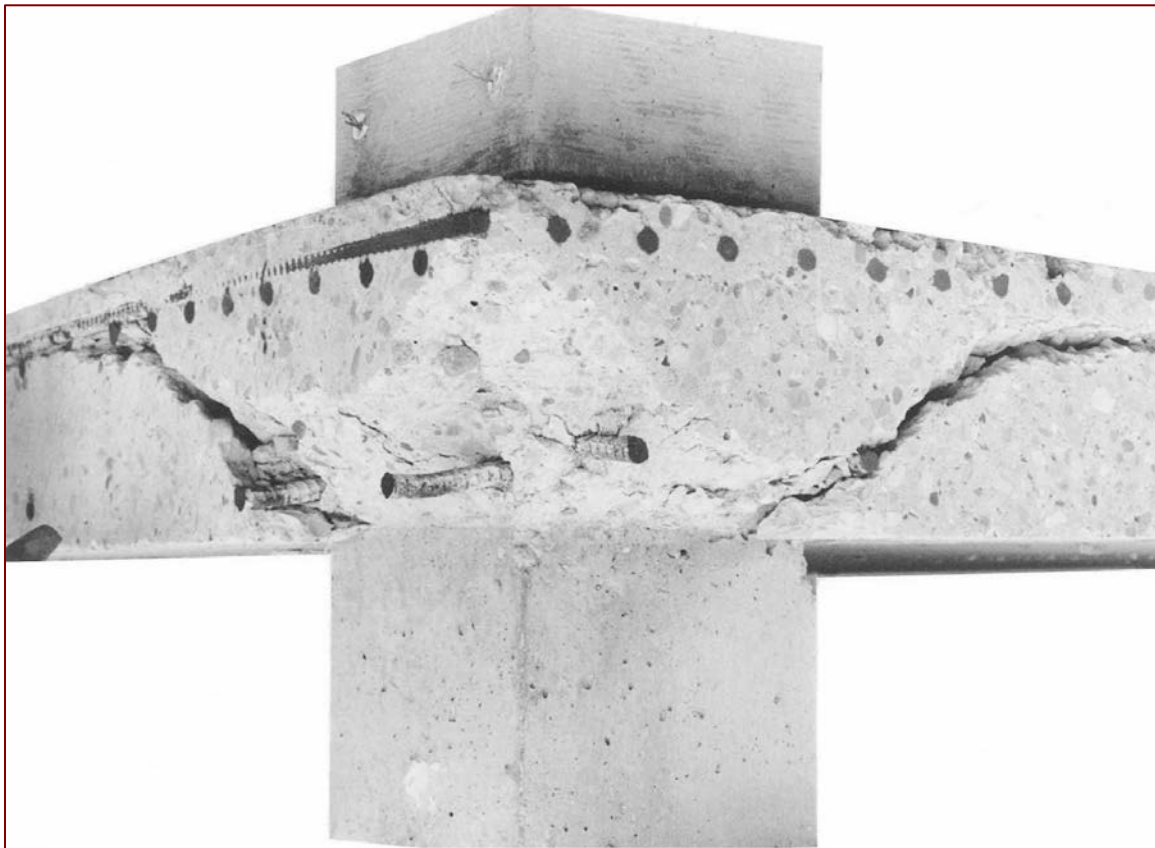


Figura 10-53 Grietas inclinadas en una losa después de la falla de cortante.

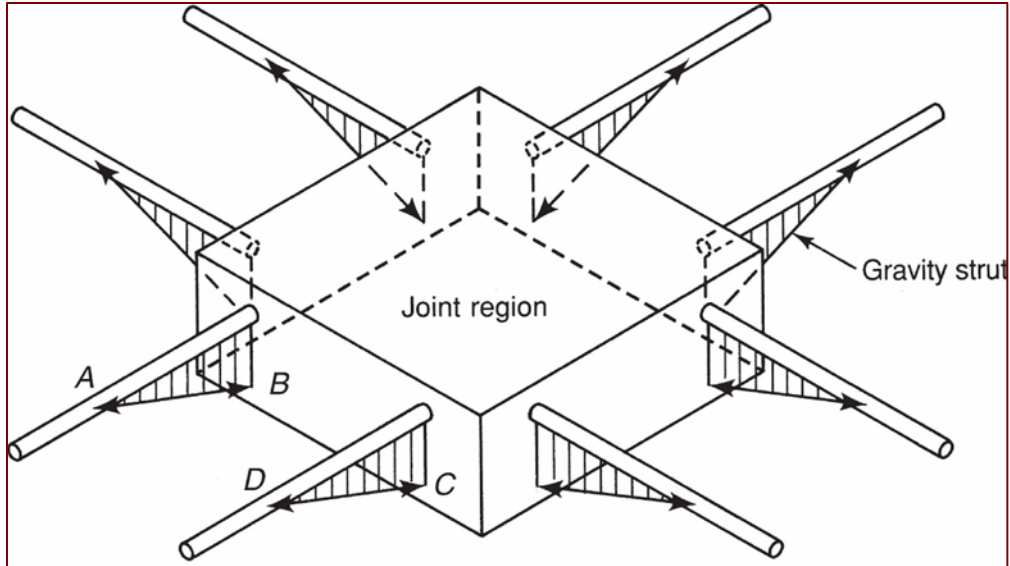


Figura 10-54 Modelo de cercha para transferencia de cortante en una columna interior.

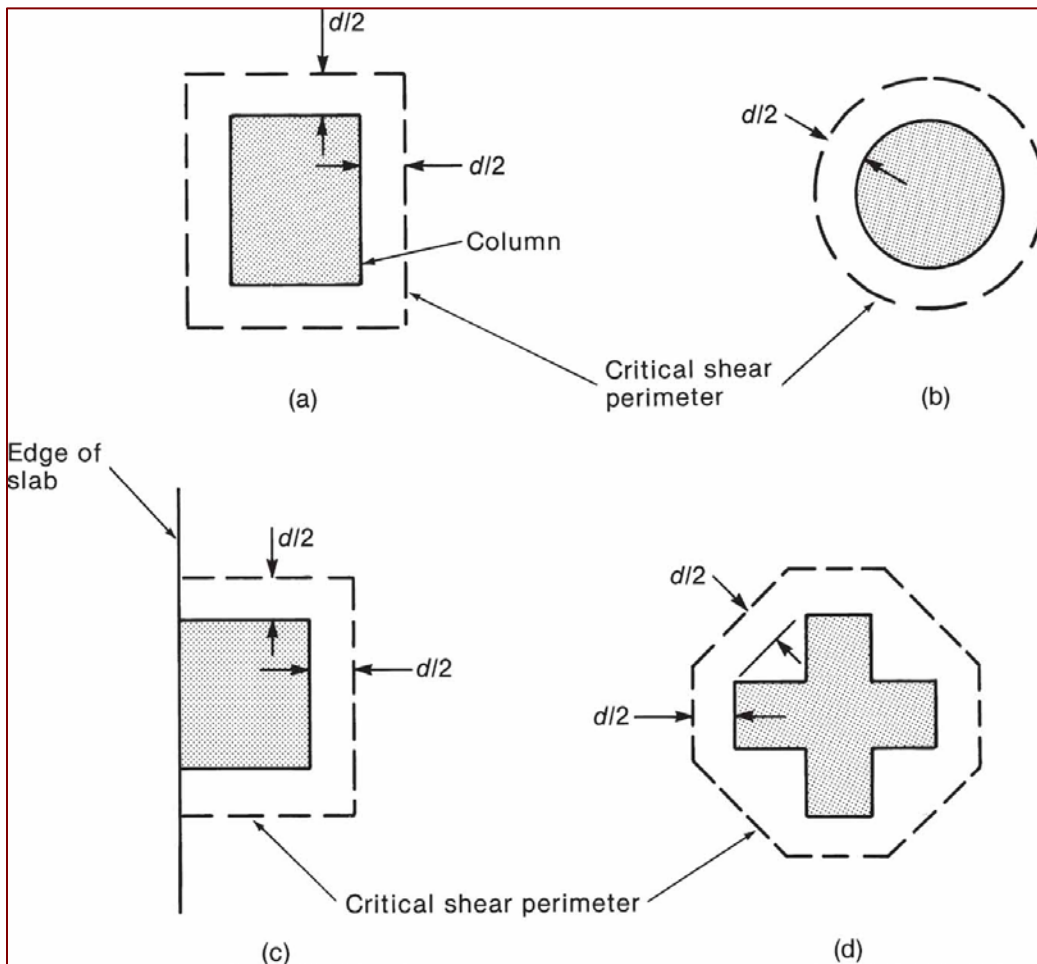
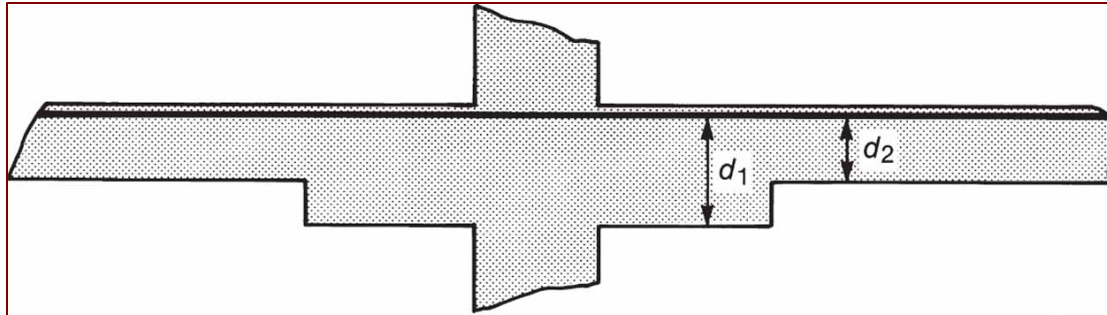
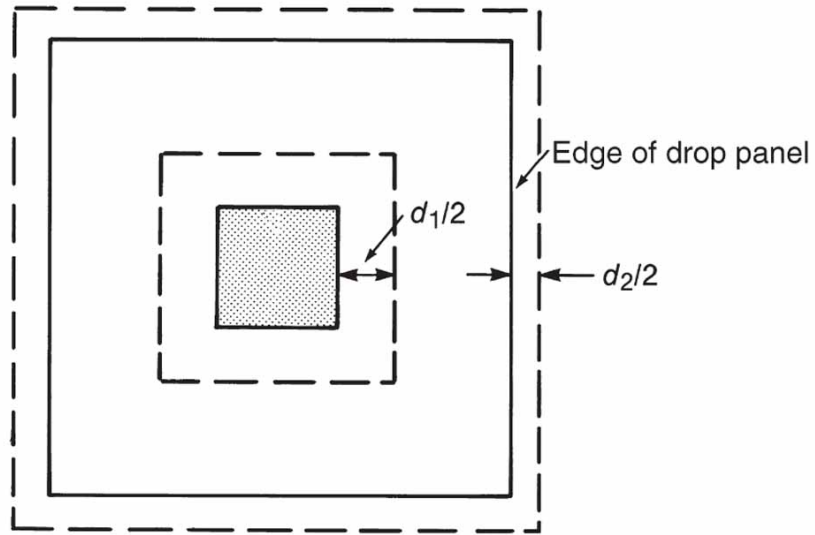


Figura 10-55 Ubicación de perímetros críticos de cortante.



(a) Section through drop panel.



(b) Critical sections.

Figura 10-56 Secciones críticas en una losa con ábacos.

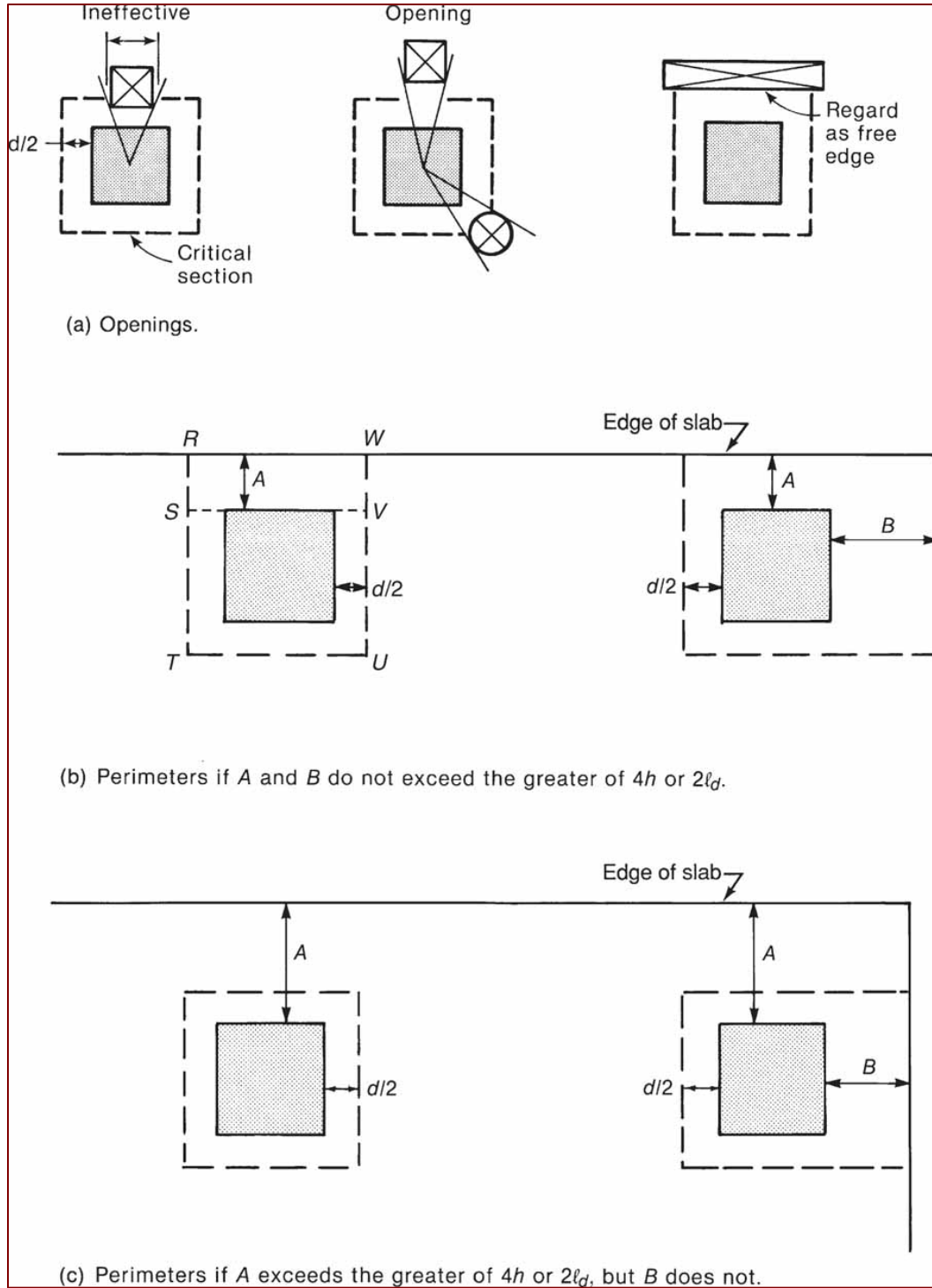


Figura 10-57 Efectos de las aberturas y los bordes en el perímetro crítico de cortante.

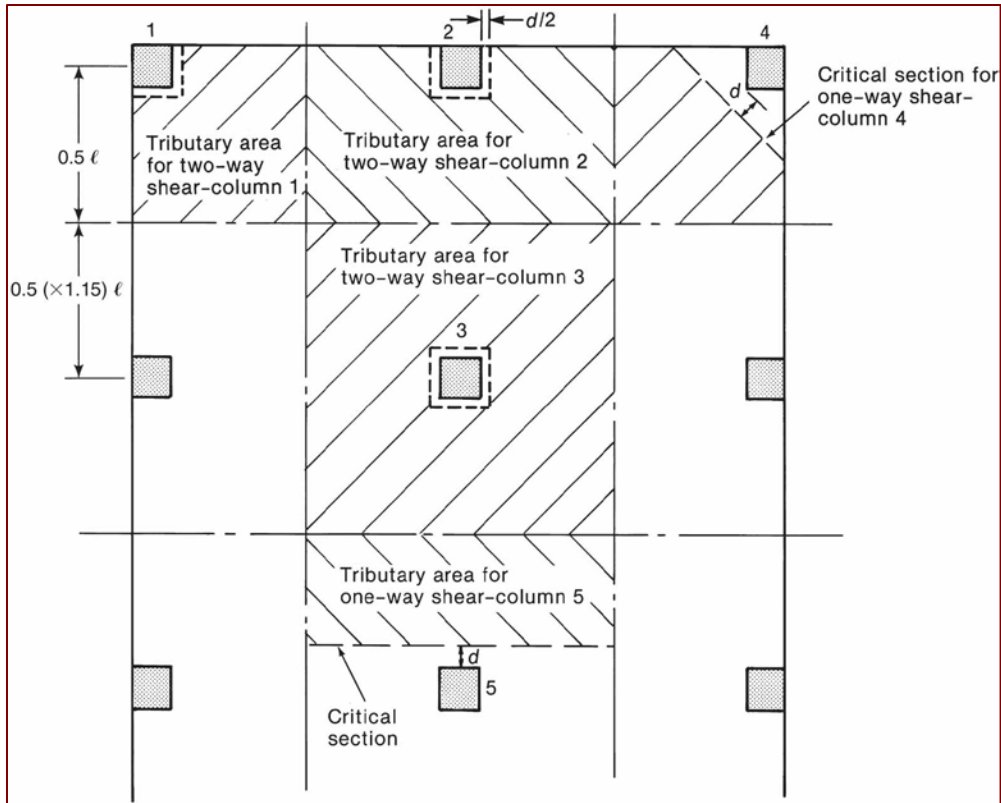


Figura 10-58 Secciones críticas áreas tributarias para cortante en placas planas.

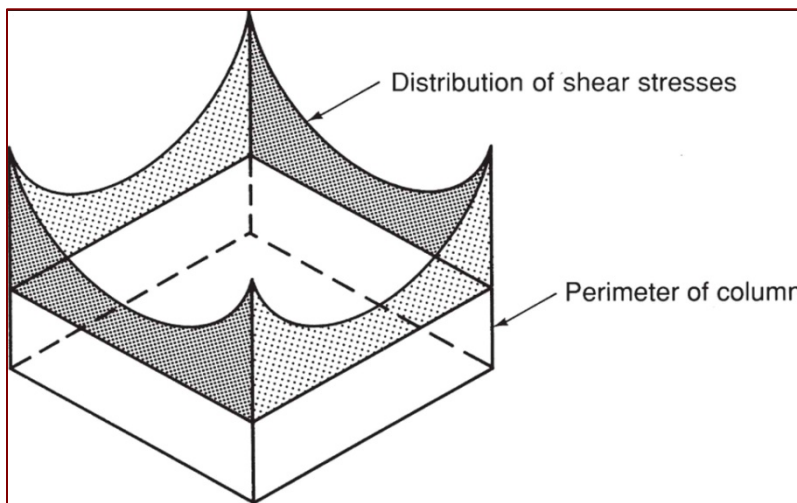


Figura 10-59 Distribución de cortante alrededor del perímetro de un cuadrado.

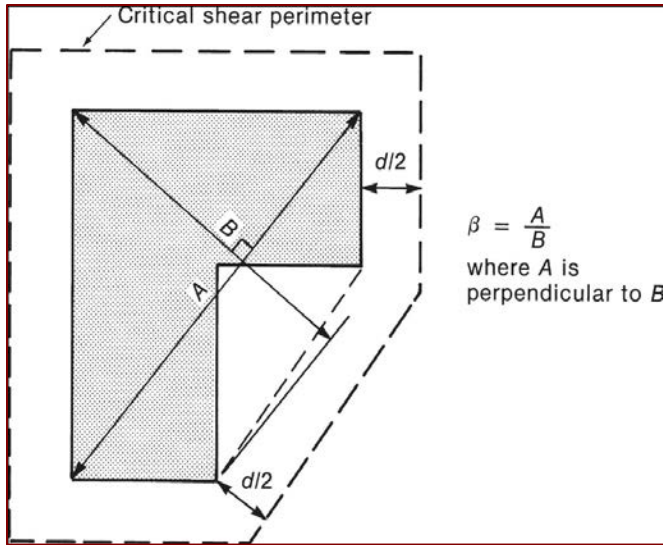


Figura 10-60 Definición para columnas de forma irregular.

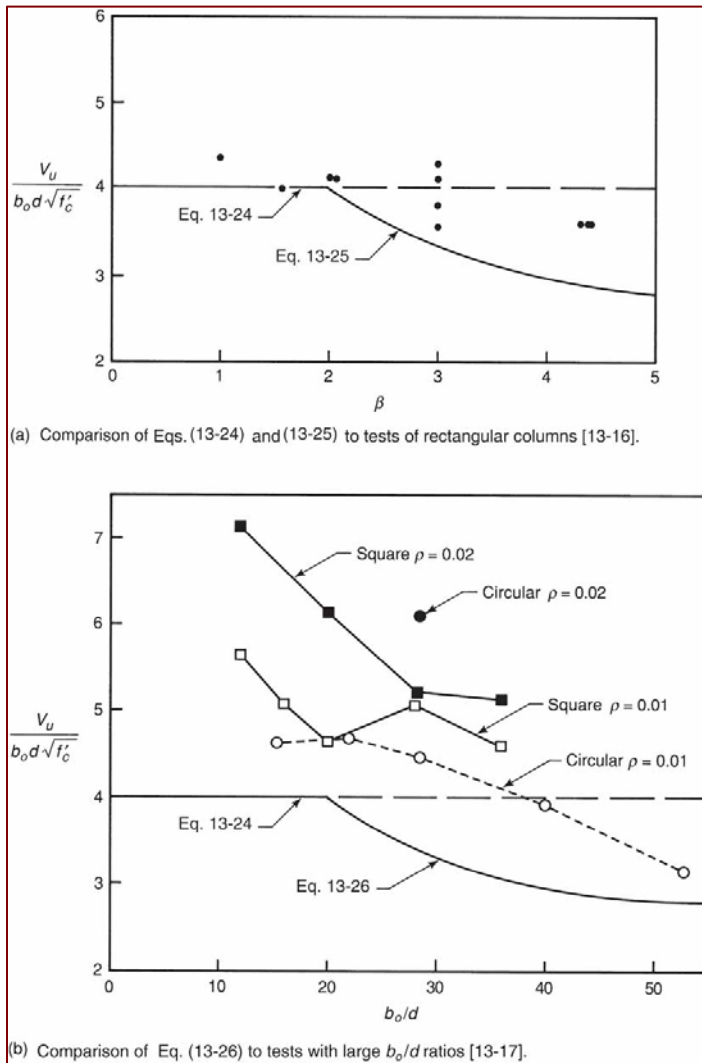


Figura 10-61 Comparación de ecuaciones de diseño con datos experimentales.

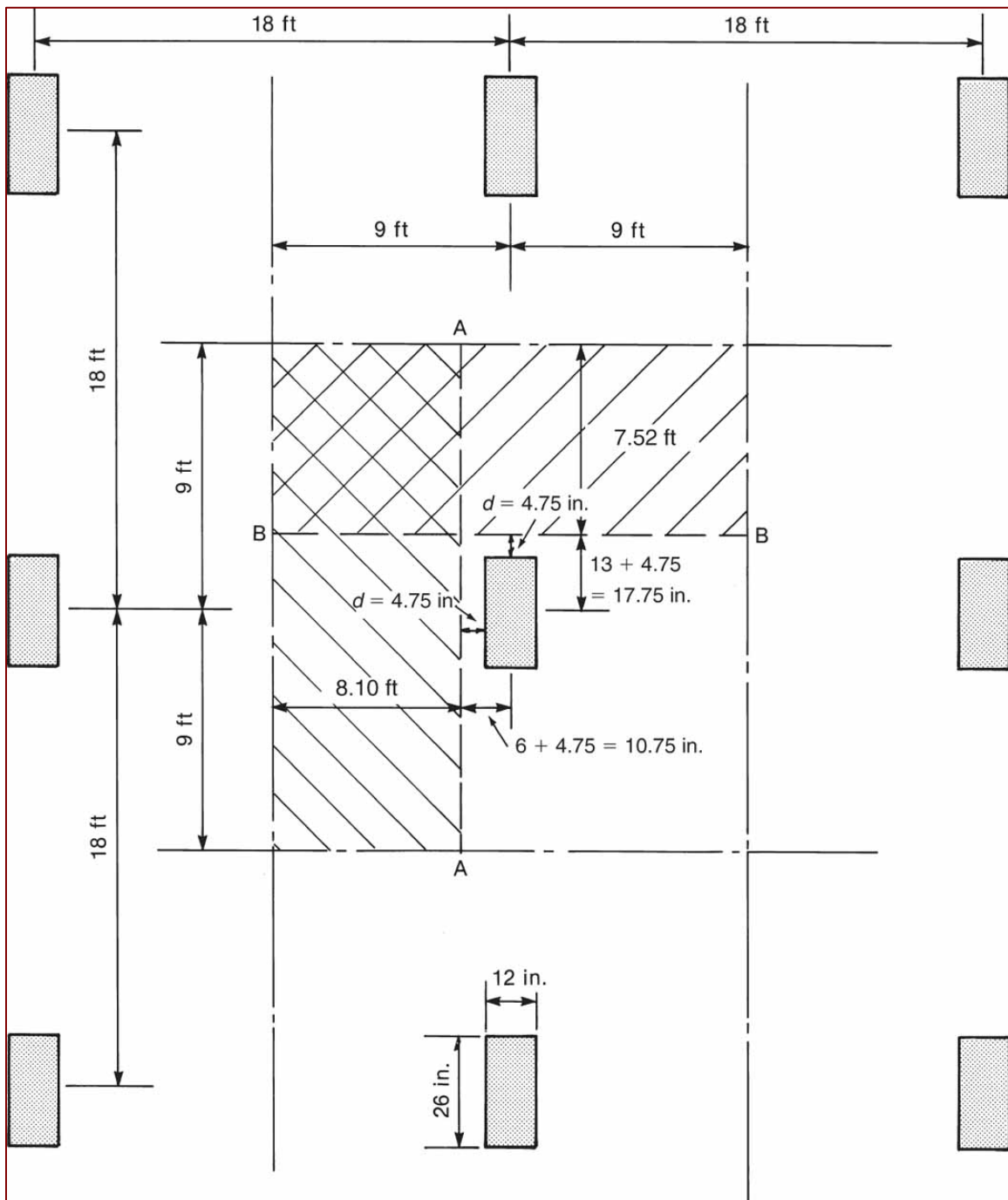


Figura 10-62 Secciones críticas para cortante en una dirección en columna interior del Ejemplo 10-11.

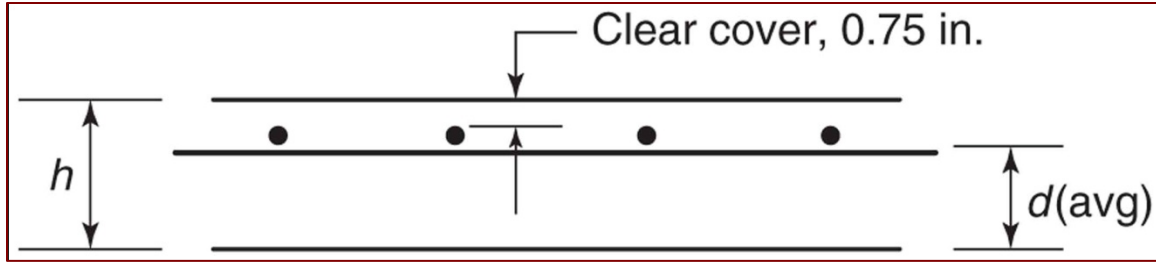


Figura 10–63 Determinación de $d(\text{prom.})$ para usar en evaluación de resistencia a cortante de losas en dos direcciones.

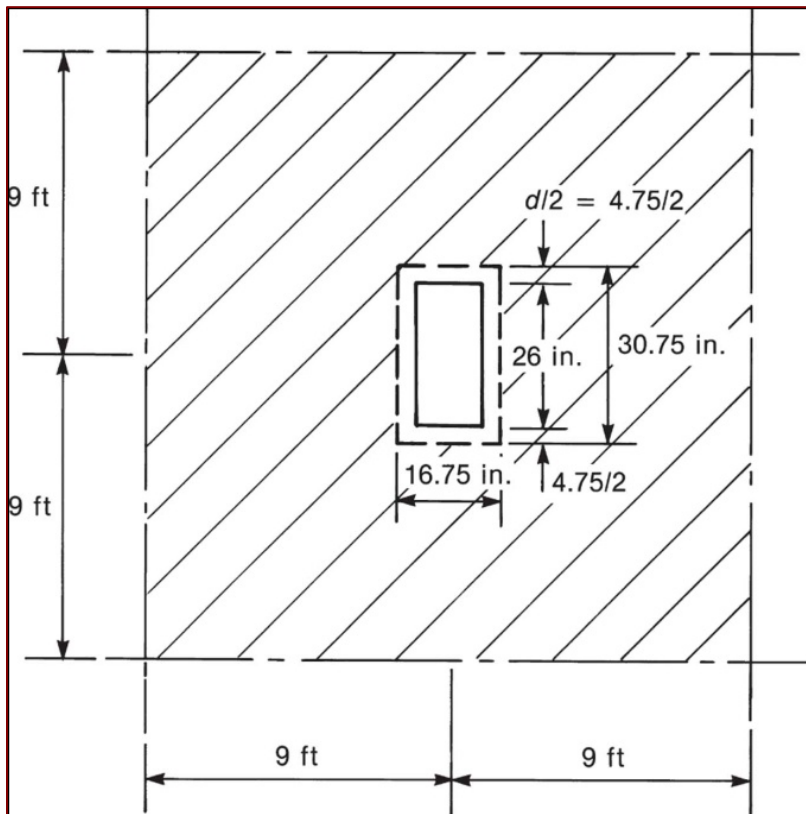


Figura 13–64 Área con carga y secciones críticas para cortante en dos direcciones.

11 LOSAS EN DOS DIRECCIONES: ANÁLISIS ELÁSTICO Y DE LÍNEA DE FLUENCIA

En esta sección se revisan brevemente los conceptos involucrados en el análisis elástico de losas con el propósito de mostrar la relación entre las cargas aplicadas y los momentos internos en la losa. Más importante aun, este desarrollo también permite visualizar la relación entre momentos y curvaturas en las losas.

Las losas se pueden subdividir en losas *gruesas* (con espesor mayor que un décimo de la luz), losas *delgadas* (con un espesor menor que un cuarentavo de la luz) y losas *intermedias*. Las losas gruesas transmiten una porción de las cargas con acción de arco somero con fuerzas de compresión significativas, con el resultado de que la fuerza de compresión resistente interna C es mayor que la fuerza interna de tracción T . Las losas delgadas transmiten una porción de las cargas mediante acción de membrana a tracción; por lo tanto, T es mayor que C . Una losa intermedia no exhibe ni acción de arco ni acción de membrana y por lo tanto tiene $T = C$.

La figura 11-9 muestra un corte en un elemento de una losa intermedia de dos direcciones. Este elemento está sometido a la acción de los momentos mostrados en la figura 11-9a y a la de los cortantes y cargas mostrados en 6-9b.

Existen dos tipos de momentos en cada borde: momentos flexionantes m_x y m_y alrededor de ejes paralelos a los bordes, y momentos torsionantes m_{xy} y m_{yx} alrededor de ejes perpendiculares a los bordes. Los momentos se muestran como momentos vectoriales con flechas de cabeza doble. El momento en cuestión actúa alrededor de la flecha de acuerdo con la regla de mano derecha. La longitud del vector representa la magnitud del momento. Los vectores pueden ser sumados numéricamente o en gráficamente. Los momentos m_x , etcétera, se definen para una unidad de ancho del borde en el que actúan, así como los cortantes V_x , etcétera. Los momentos m_x y m_y son positivos, correspondiendo a compresión en la superficie superior. Los momentos de torsión en bordes adyacentes actúan causando compresión en la misma superficie de la losa, en la esquina entre dos bordes, como se muestra en la figura 11-9a.

Sumando fuerzas verticales se obtiene

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = -w \quad (11-8)$$

Sumando momentos alrededor de ejes paralelos a x y a y despreciando términos de orden superior se obtiene, respectivamente,

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = V_y \quad \text{y} \quad \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = V_x \quad (11-9)$$

Se puede mostrar que $m_{xy} = m_{yx}$. Diferenciando (11-9) y sustituyendo en (11-8) se obtiene la ecuación básica de equilibrio para losas intermedias:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -w \quad (11-10)$$

Esta es una ecuación únicamente de estática y rige independientemente del comportamiento del material de la placa. Para una placa elástica, la deflexión, z , puede relacionarse con la carga aplicada por medio de la expresión

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = -\frac{w}{D} \quad (11-11)$$

donde la rigidez de la placa es

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (11-12)$$

en donde ν es el coeficiente de Poisson. El término D es equivalente al valor EI para un ancho unitario de losa.

En análisis elástico de placas, la solución de (11-11) permite obtener las deflexiones, z , y los momentos se calculan a partir de

$$\begin{aligned} m_x &= -D \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \\ m_y &= -D \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \\ m_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (11-13)$$

en donde z es positivo hacia abajo.

La solución de (11-13) se puede encontrar en libros de teoría de placas elásticas.

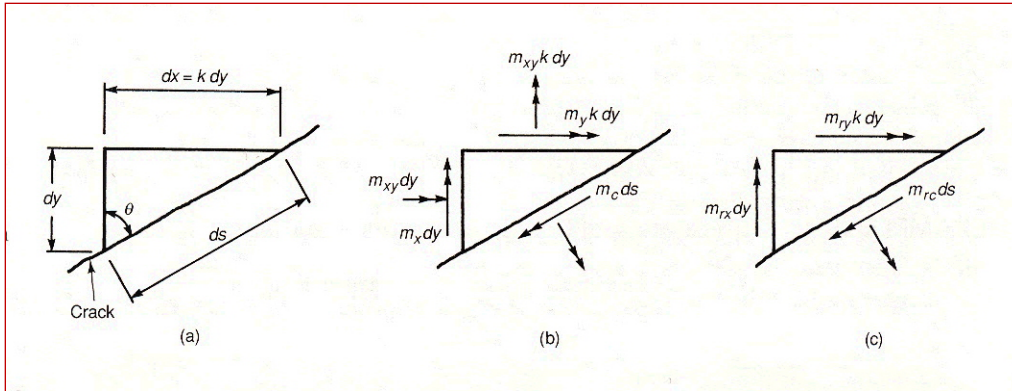


Figura 11-27

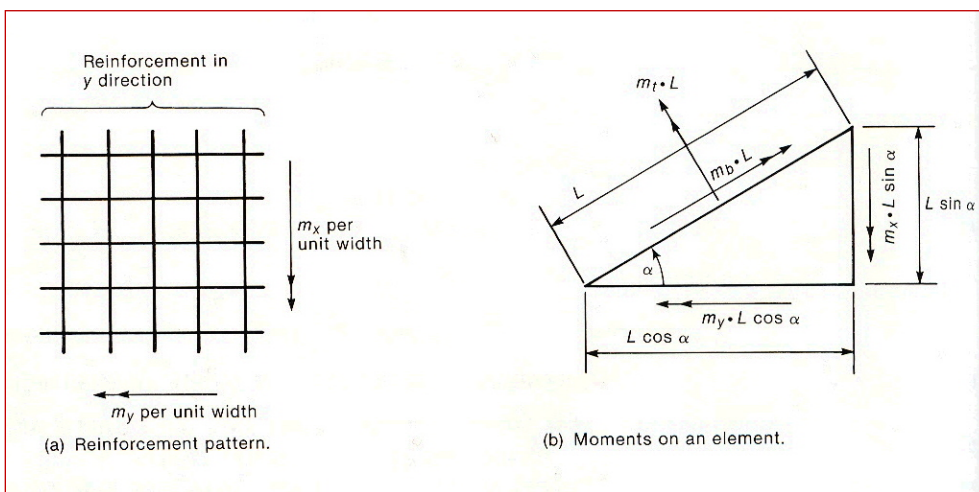


Figura 11-28

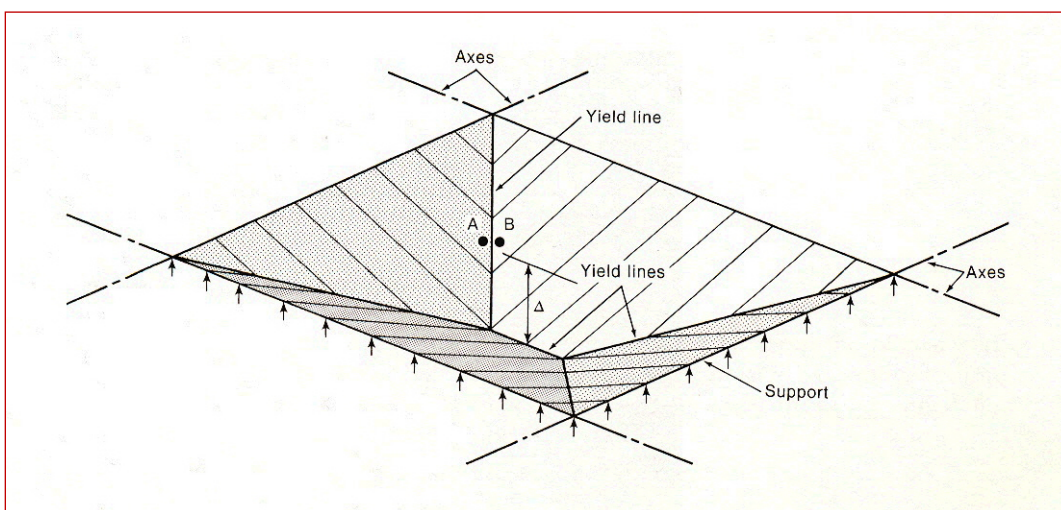


Figura 11-29

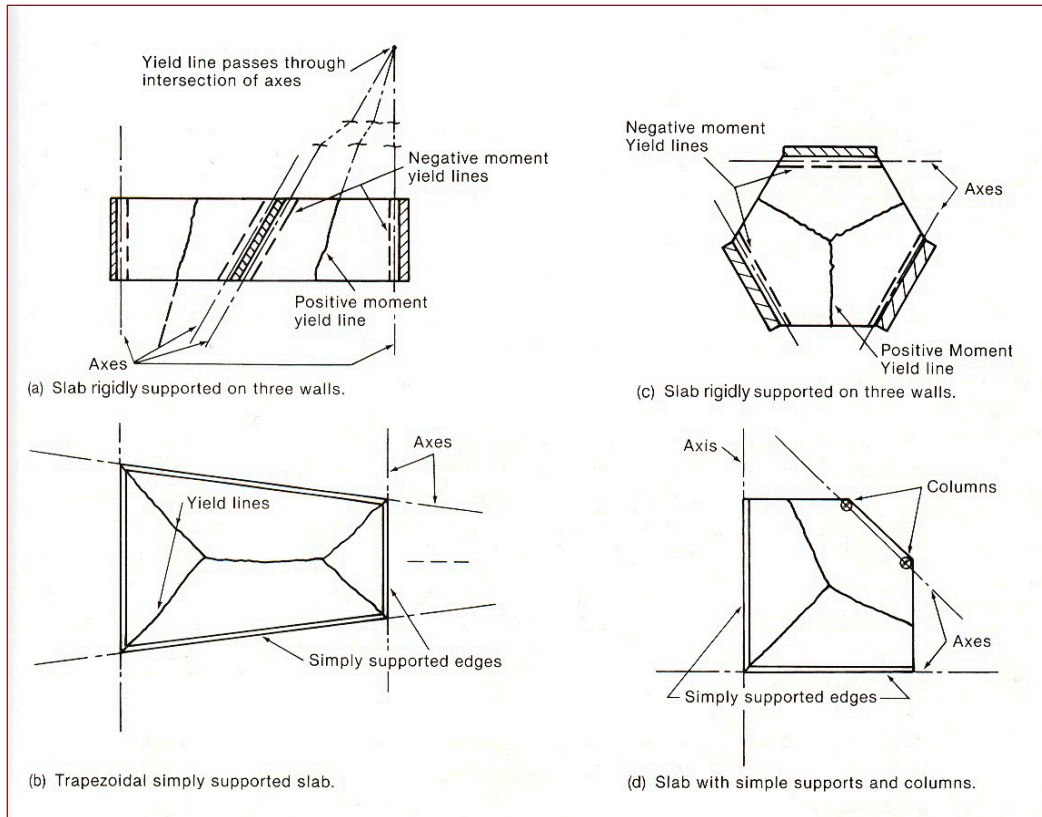


Figura 11-30

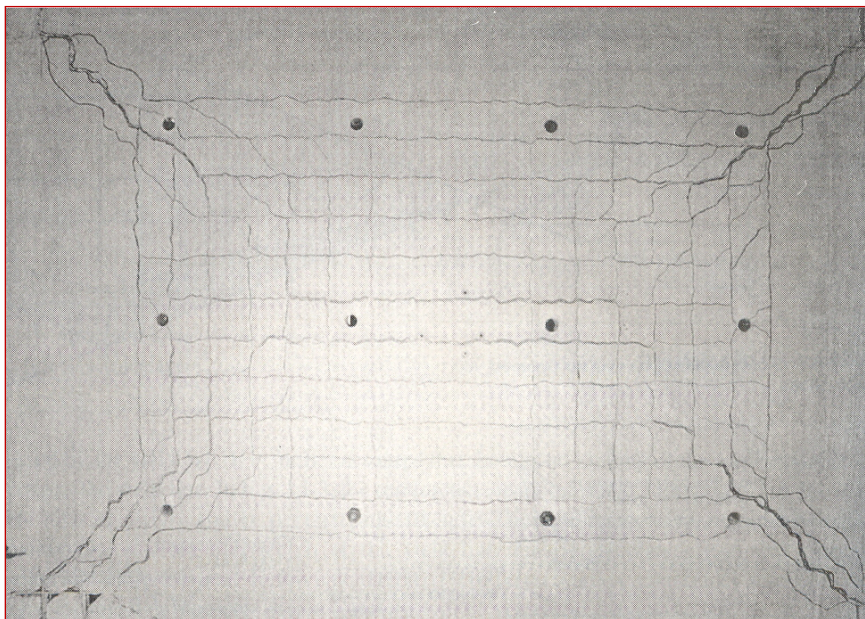


Figura 11-31

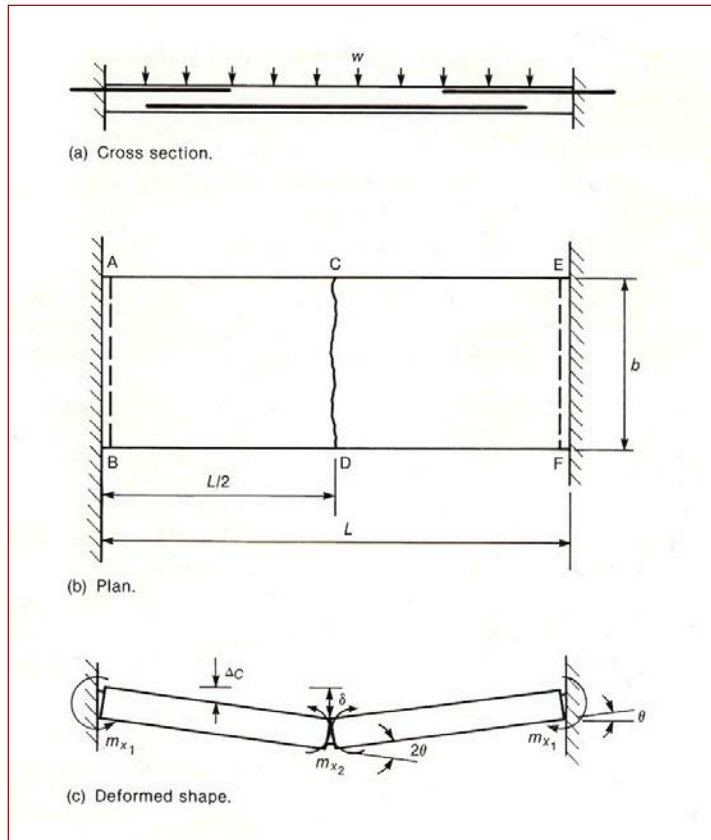


Figura 11-32

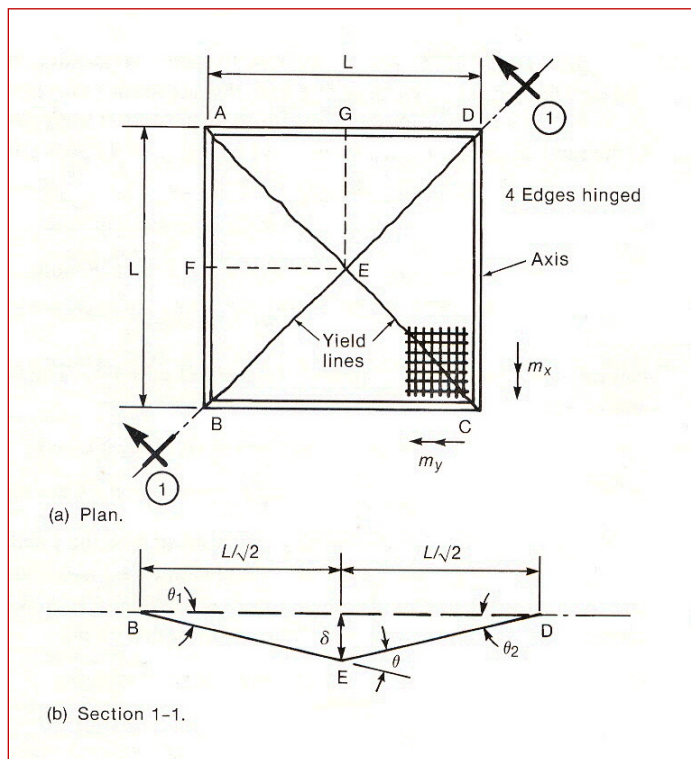


Figura 11-33

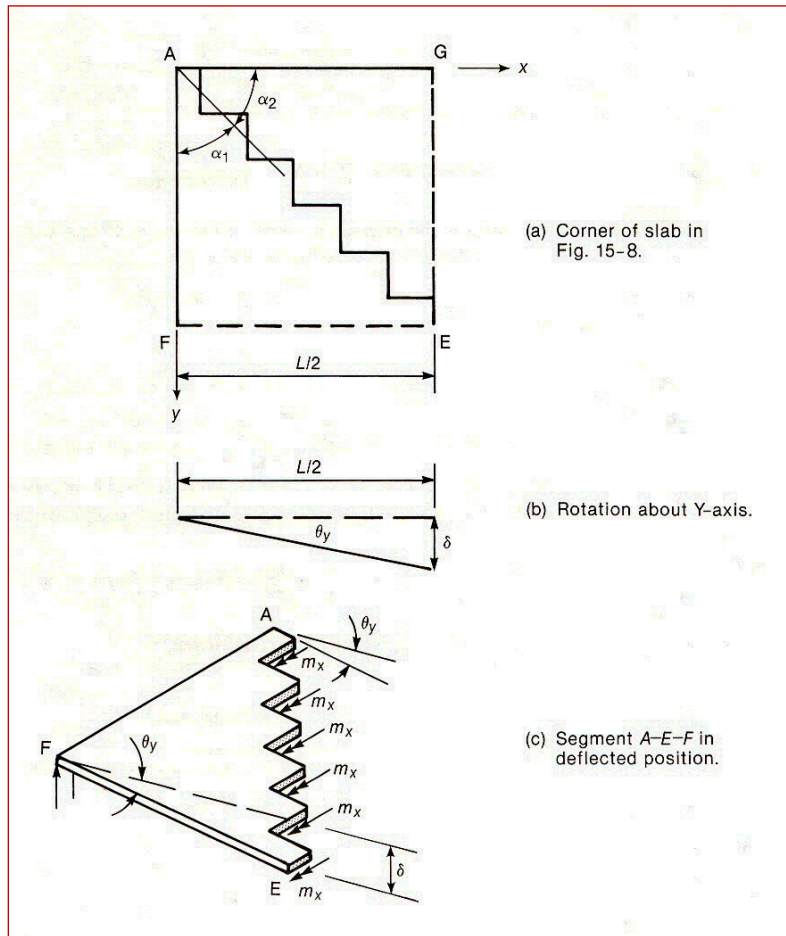


Figura 11-34

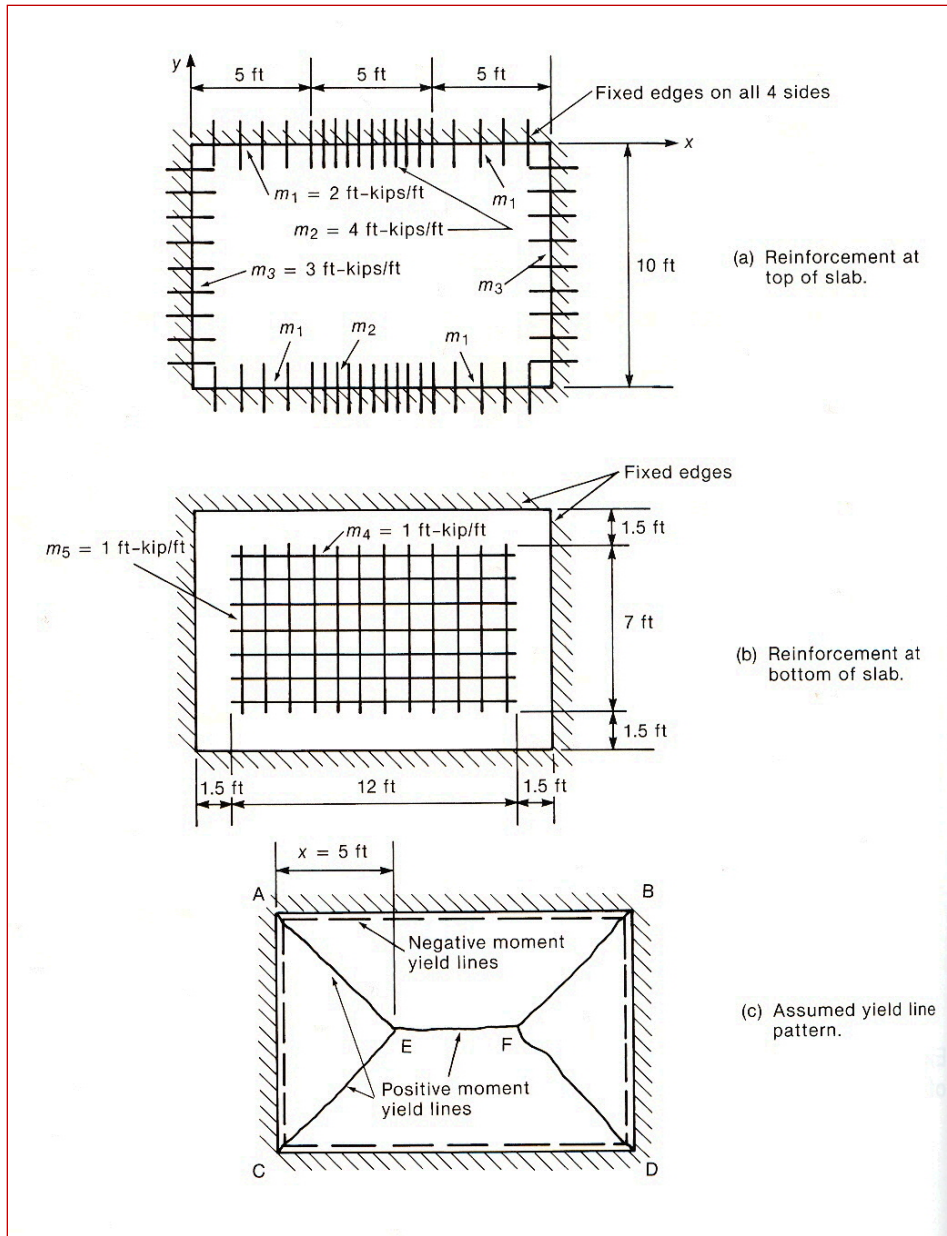


Figura 11-35

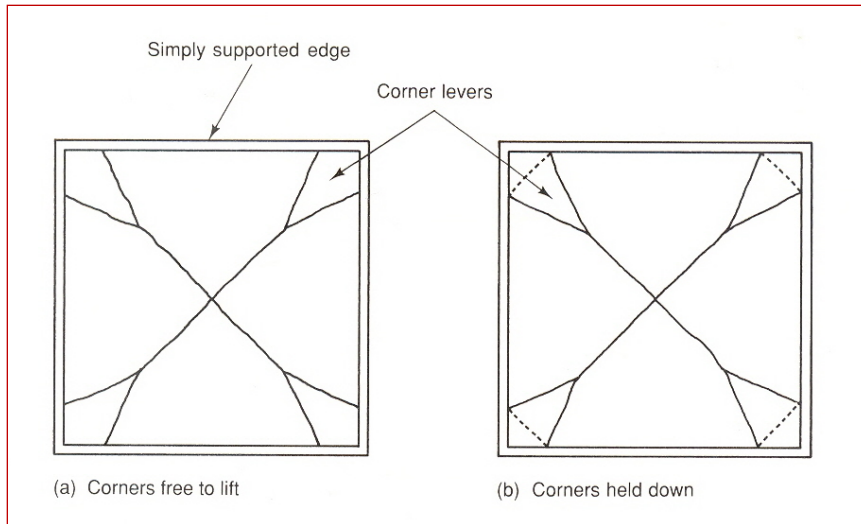


Figura 11-12 Momentos en una losa cuadrada simplemente apoyada.

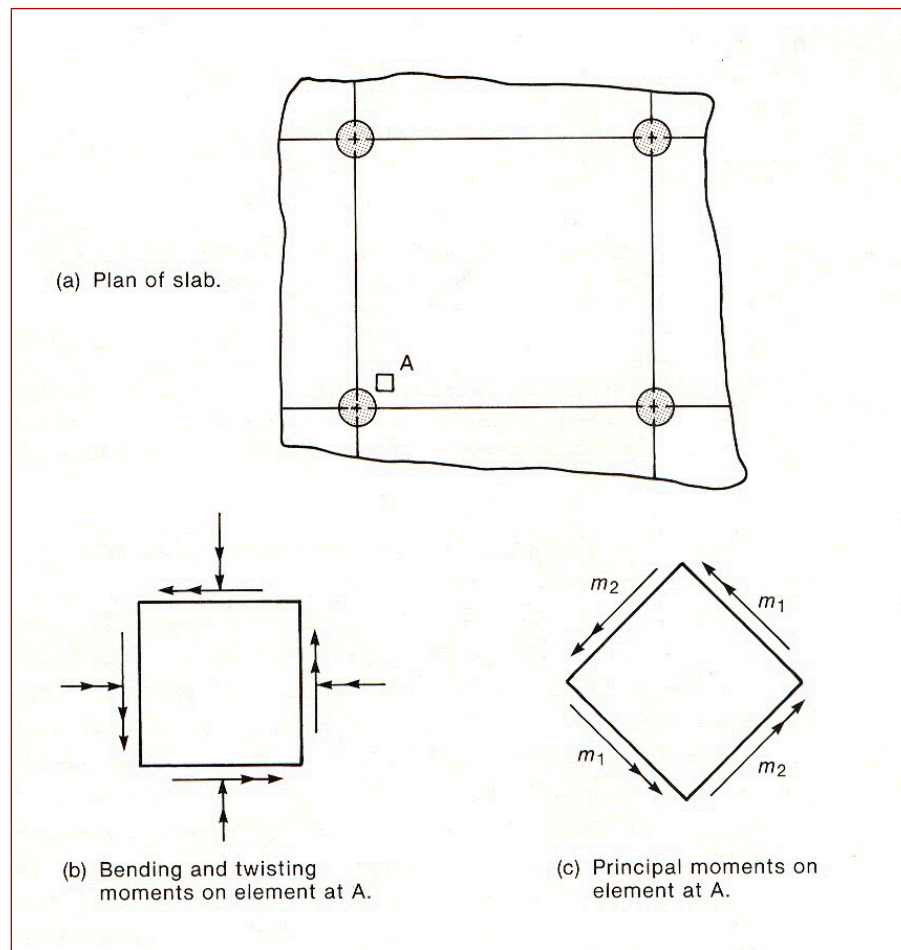


Figura 11-36

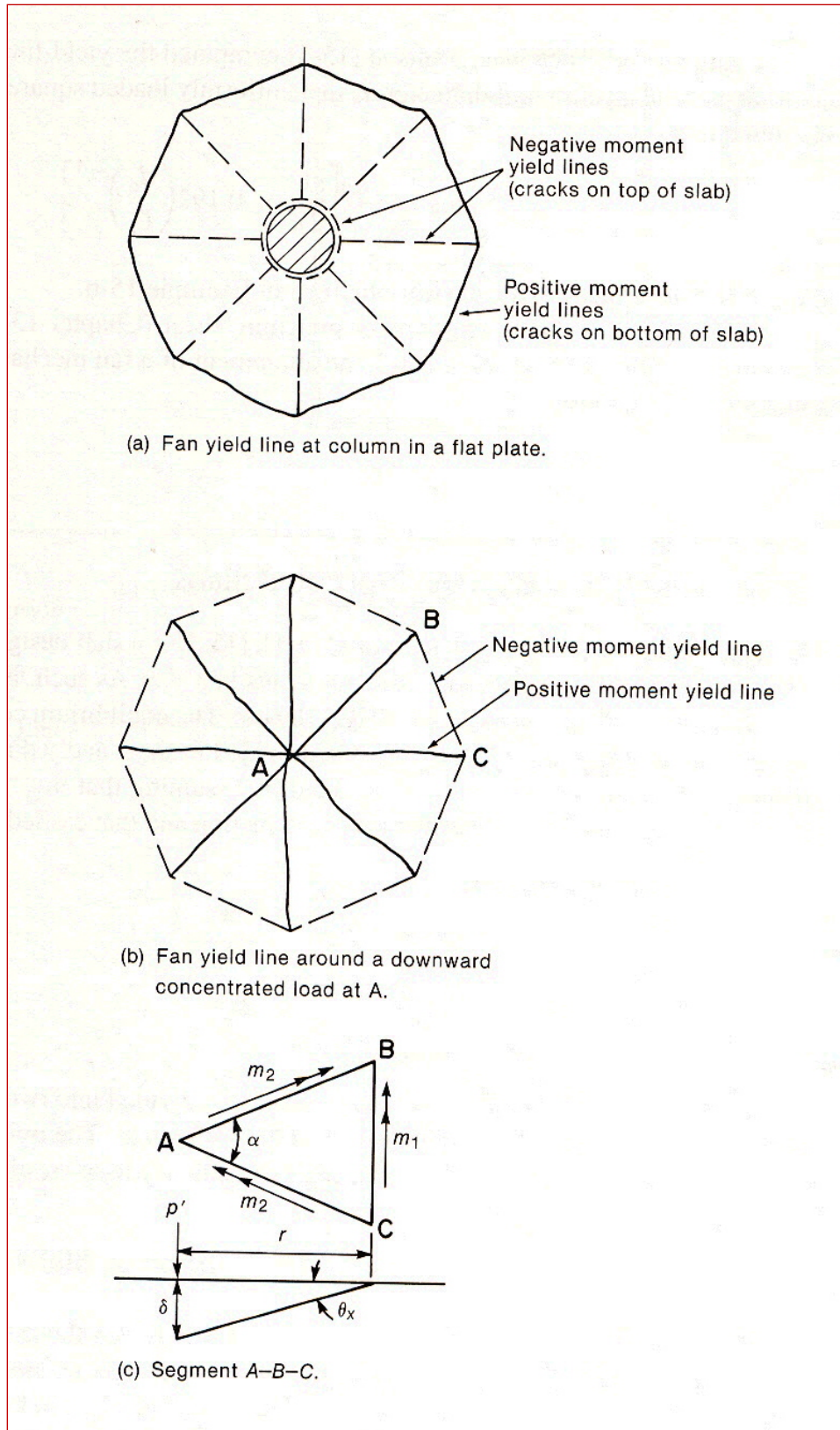


Figura 11-37

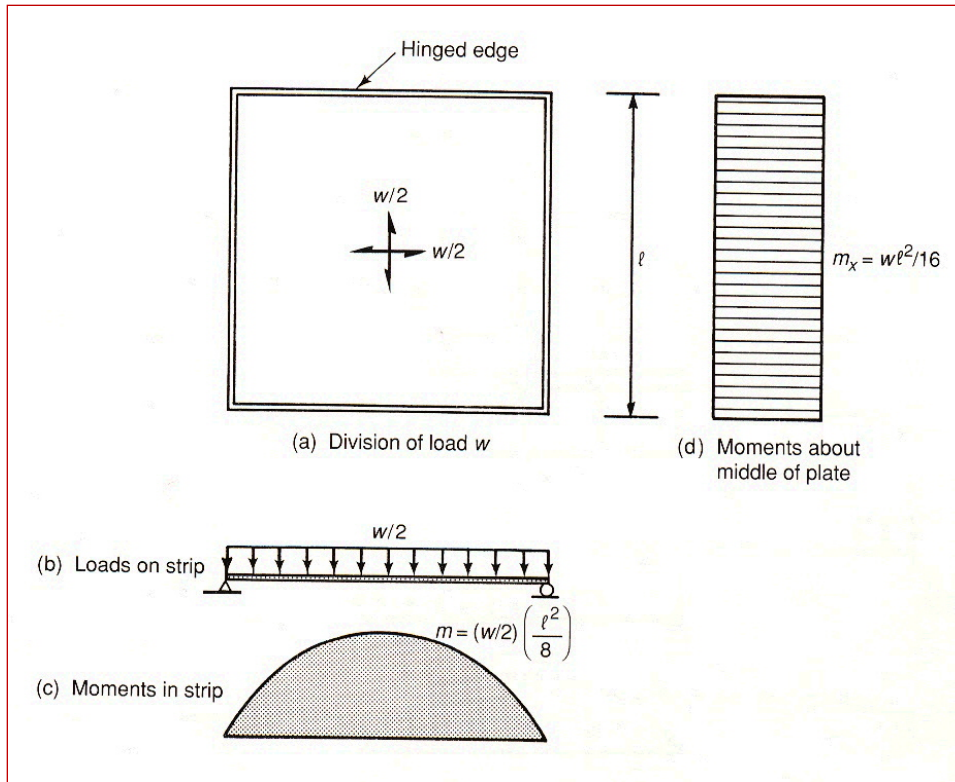


Figura 11-38

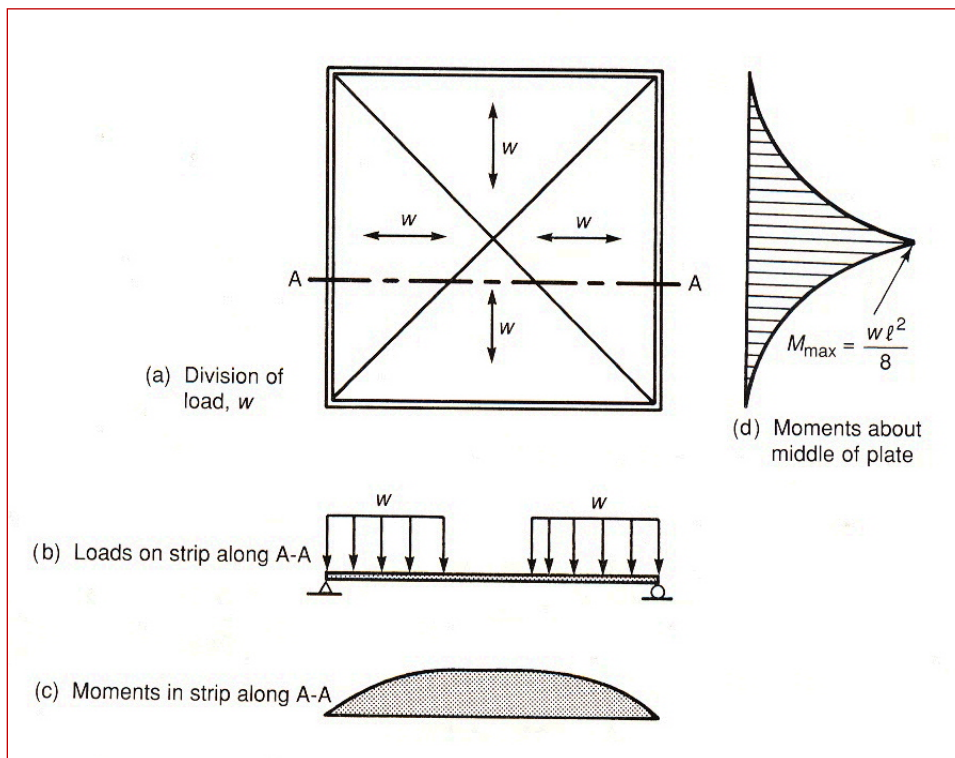


Figura 11-39

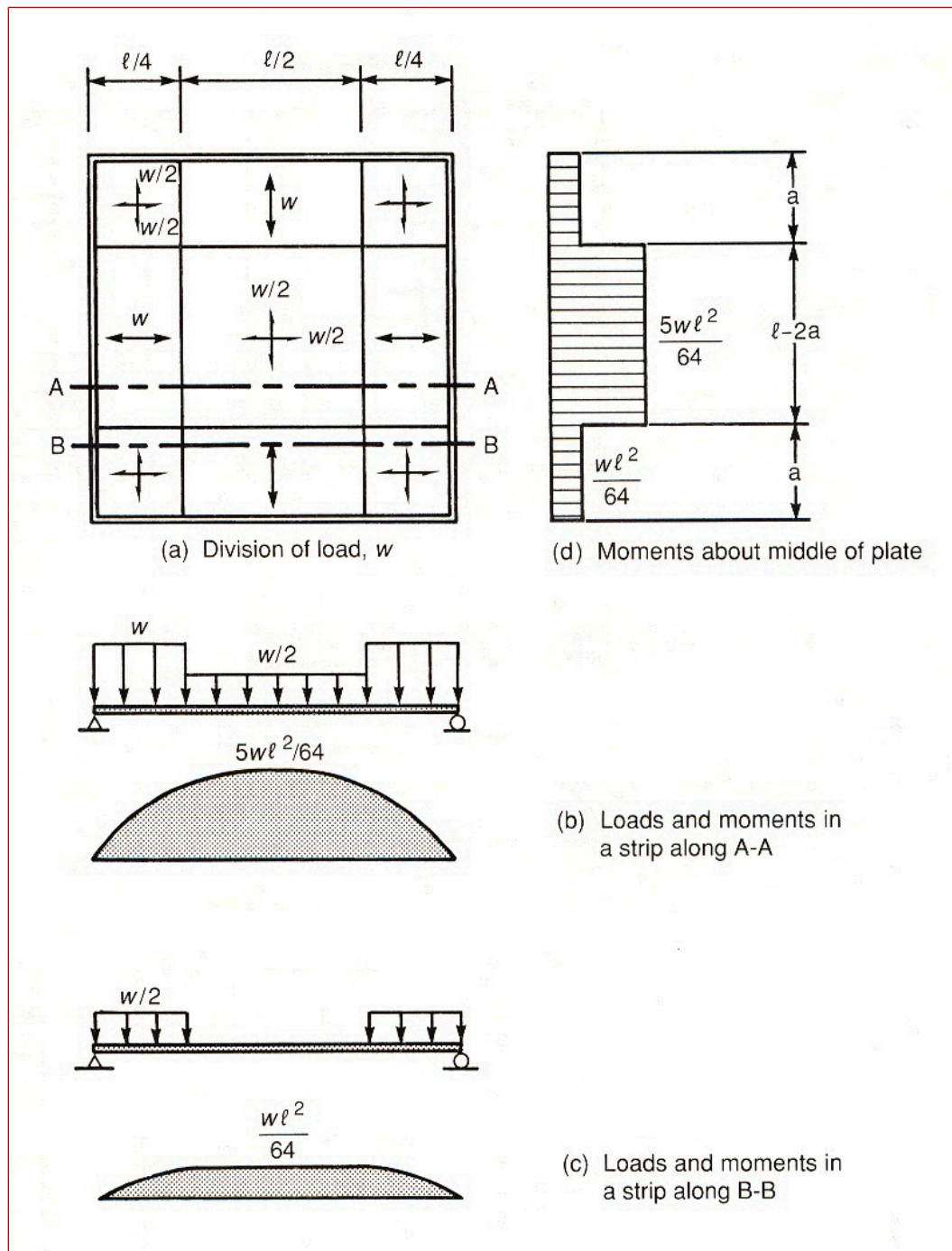


Figura 11-40

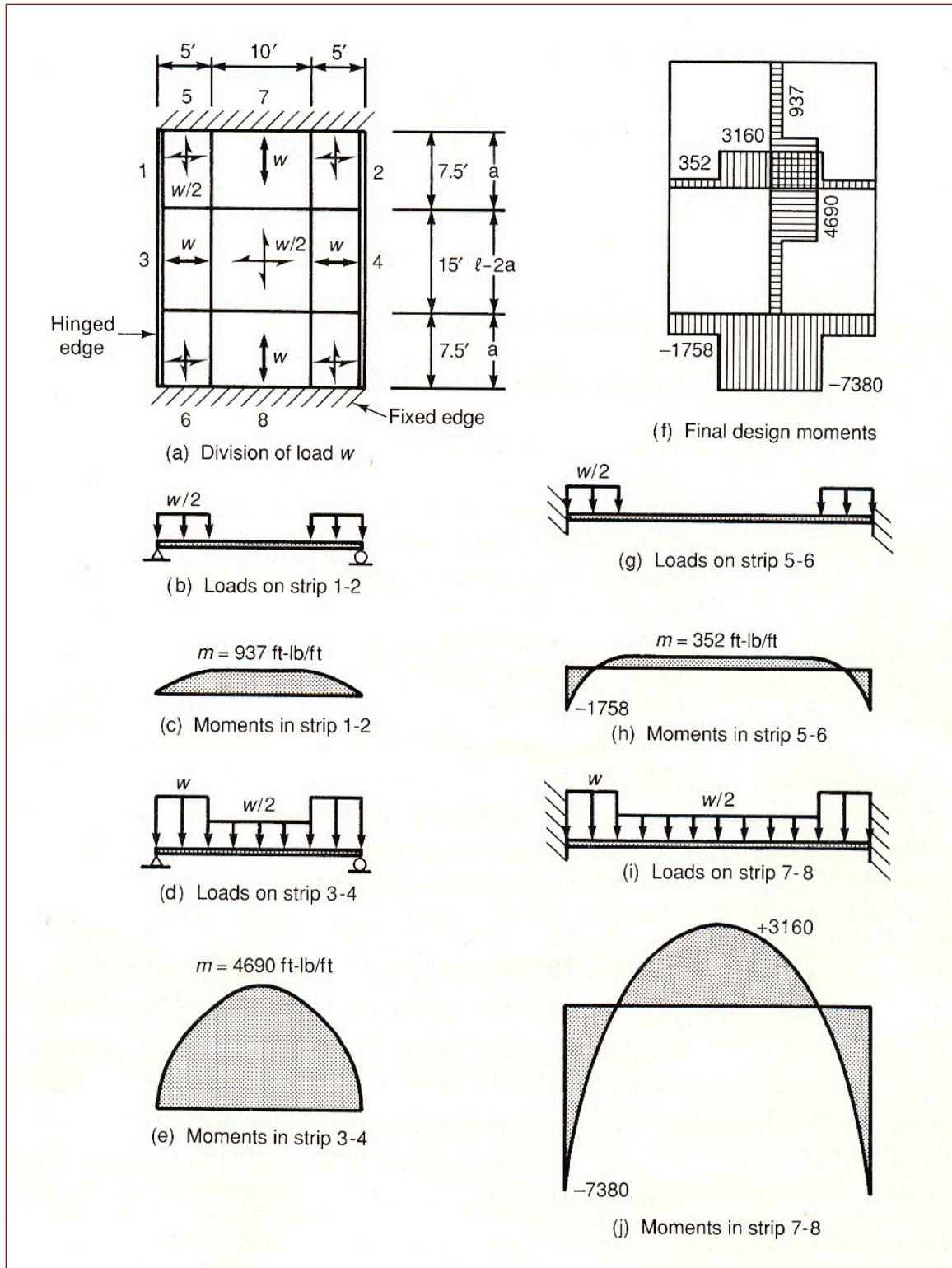


Figura 11-41

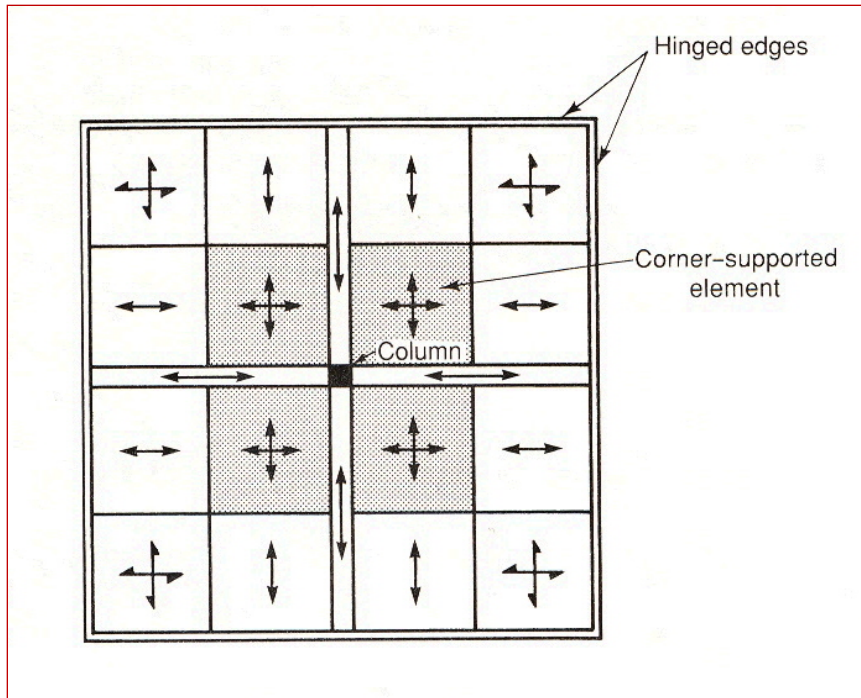


Figura 11-42

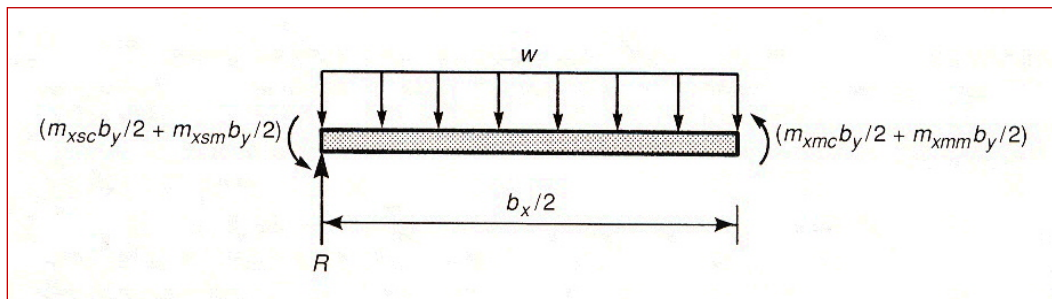


Figura 11-43

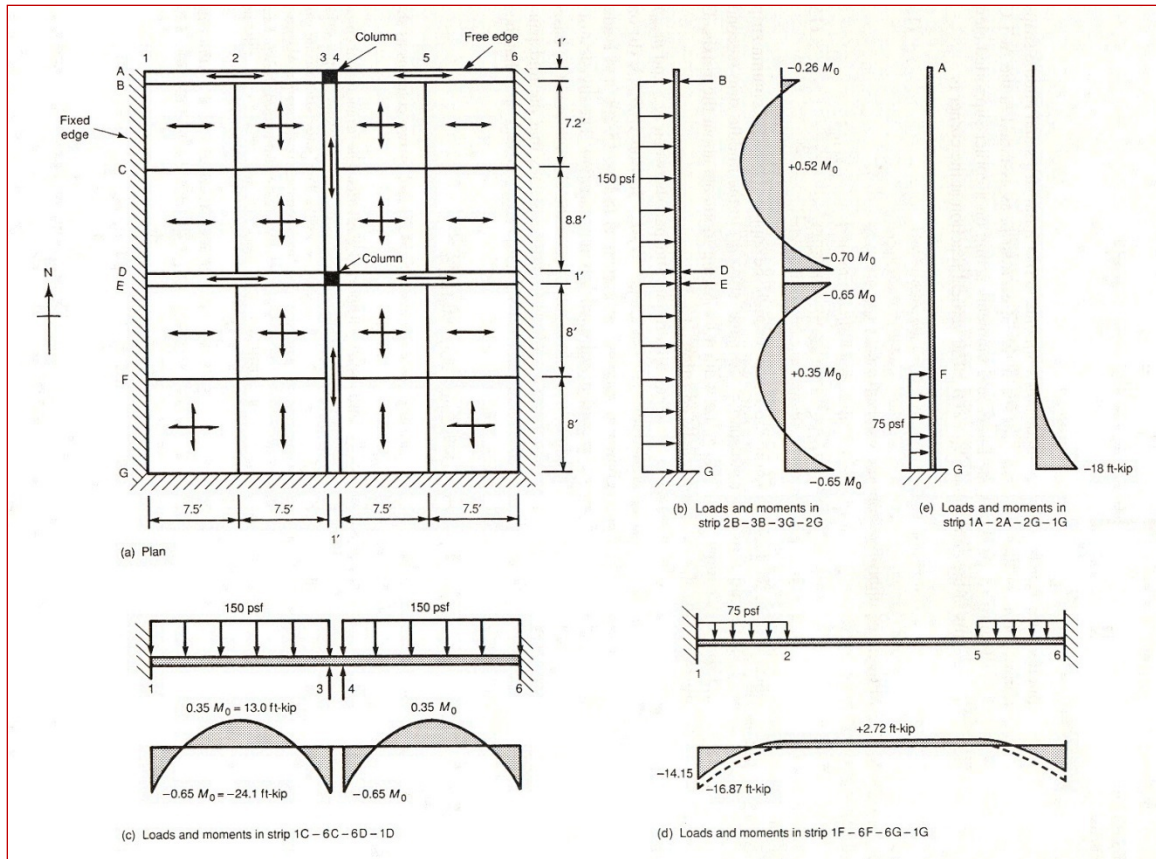


Figura 11-44

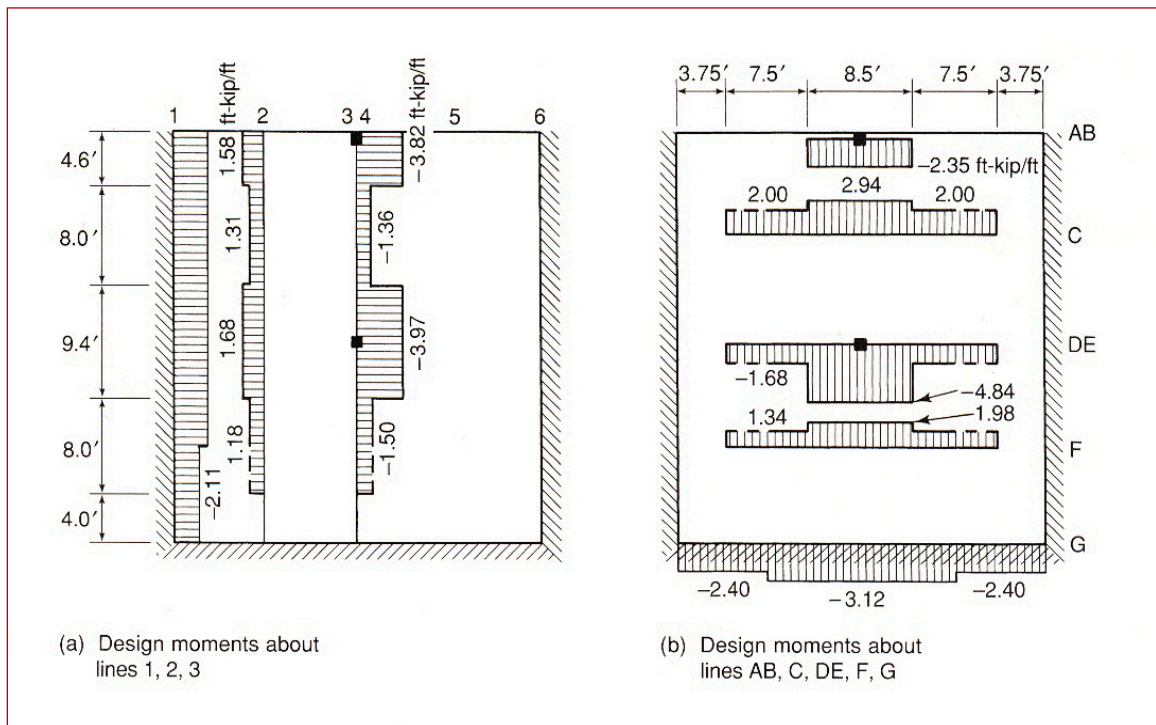


Figura 11-45

12 DISEÑO SISMO RESISTENTE

12.1 Introducción

La teoría de tectónica de placas visualiza a la tierra como consistente de un núcleo fluido magmático viscoso con un número de placas de roca de menor densidad flotando sobre éste. Las superficies expuestas de las placas forman los continentes y el fondo oceánico. Conforme pasa el tiempo, las placas se mueven en forma relativa entre sí, separándose en algunas regiones y colisionando en otras. Cuando se separan, forman brechas generalmente ubicadas en el fondo oceánico. En algunos casos, el magma fluye a la superficie. Las regiones en las que las placas colisionan o se deslizan una a la par de la otra son denominadas como zonas de fallamiento. En las placas se generan esfuerzos de compresión y de cizallamiento y la energía de deformación se acumula en los bordes de las placas. En un momento determinado, los esfuerzos y la energía de deformación en una falla entrabada superan el límite de resistencia a la ruptura o al deslizamiento a lo largo de la falla. Una vez iniciada la ruptura, la energía es liberada rápidamente, causando que se propaguen vibraciones intensas desde la falla. Tres tipos principales de ondas de esfuerzos viajan a través de las capas de roca: ondas primarias (compresión), ondas secundarias (cortante), y ondas superficiales—cada una a diferente velocidad. Como resultado, los efectos de estas ondas sísmicas en conjunto con las condiciones locales de sitio conducen a diferentes movimientos del terreno en los distintos sitios. Los terremotos pueden involucrar regiones de corrimiento y/o desplazamiento a lo largo de las fallas superficiales.

Los movimientos sísmicos imparten aceleraciones verticales y horizontales, a , a la base de la estructura. Si la estructura fuera completamente rígida, fuerzas de magnitud $F = ma$ se generarían en ella, donde m es la masa de la estructura. Como las estructuras reales no son rígidas, las fuerzas reales generadas difieren de este valor dependiendo del período de la edificación y de los períodos dominantes de las excitaciones sísmicas. La determinación de la fuerza sísmica, E , se torna más complicada porque los registros de los movimientos sísmicos contienen un gran rango de frecuencias y valores máximos de aceleración en la base.

12.1.1 Requisitos para diseño sísmico

Los procedimientos para el análisis y diseño de estructuras para resistir los efectos de los movimientos sísmicos están en un estado continuo de desarrollo. Además del trabajo del Comité de la Norma ACI, otros entes reguladores y grupos de investigación evalúan y mejoran las disposiciones para análisis y diseño tipo norma. Por tanto, cambios significativos a las disposiciones de las normas continúan apareciendo de una manera rápida. Por esta razón, algunos de los requisitos de diseño en este capítulo serán modificados en el transcurso de pocos años. Sin embargo, la filosofía de diseño y los procedimientos generales de diseño para elementos de concreto reforzado están bien establecidas y no cambiarán significativamente a lo largo del tiempo. Este capítulo se

concentra en esos principios generales y ofrece las más recientes disposiciones del ACI para el diseño sismorresistente de elementos de concreto reforzado. Una discusión más a fondo del comportamiento inelástico de los elementos de concreto reforzado y de los procedimientos de diseño sismorresistente para edificaciones de concreto reforzado la presentan Sozen y García.

12.2 Espectro de Respuesta Sísmico

El efecto del tamaño y del tipo de ondas de vibración liberadas durante un terremoto dado pueden ser organizadas para ser más útiles en diseño en términos de un *espectro de respuesta* para un terremoto dado o para un grupo de terremotos. La figura 12-1a muestra un grupo de péndulos amortiguados invertidos, cada uno de los cuales tiene un período de vibración T diferente. Para encontrar un punto en un espectro de respuesta, una de estas estructuras de péndulo hipotéticas es sometida analíticamente a las vibraciones registradas durante un terremoto específico. La aceleración más grande de esta estructura de péndulo durante el registro completo del terremoto puede ser graficada como se muestra en la figura 12-1b. Repitiendo esto para cada una de las estructuras de péndulo mostrados en la figura 12-1a y graficando los valores pico de cada una de las estructuras pendulares produce un *espectro de respuesta de aceleración*.

Generalmente, el eje vertical del espectro es normalizado expresando las aceleraciones calculadas en términos de la aceleración debida a la gravedad. Si, por ejemplo, la ordenada de un punto en el espectro de respuesta es 2 para un período T dado, significa que la aceleración pico de la estructura pendular para ese valor de T y para ese terremoto fue el doble de la debida a la gravedad. El contenido aleatorio de ondas de un terremoto causa que el gráfico del espectro de respuesta de aceleración sea una línea quebrada como se muestra en la figura 12-2c. Los espectros de la Figura 12-1b han sido suavizados.

12.2.1 Espectros de Velocidad y de Desplazamiento

Siguiendo el procedimiento usado para obtener un espectro de aceleración, pero graficando la velocidad pico relativa al terreno para todo terremoto versus los períodos del grupo de estructuras pendulares, se obtiene el *espectro de respuesta de velocidad*. Un gráfico de los desplazamientos máximos de la estructura relativos al terreno para todo el terremoto se denomina *espectro de respuesta de desplazamiento*. Estos tres espectros para un terremoto específico medido en sitios en roca o en suelo firme se muestra en la figura 12-2.

12.2.2 Factores que afectan los espectros de respuesta pico

PERIODO DE LA EDIFICACIÓN

Fuerzas sísmicas laterales están estrechamente relacionadas al período fundamental de la edificación. Para períodos menores que 0.5 s, el efecto máximo para una estructura sobre un sitio de suelo firme resulta de la magnificación de la aceleración, como se muestra por

los picos más altos en la figura 12-2c. Para estructuras con períodos medios (de 0.5 s a 2.0 s), la respuesta estructural mayor aparece en la figura 12-2b, el espectro de respuesta de velocidad. Finalmente, para períodos largos (mayores que 2.0 s), la respuesta estructural dominante aparece en el espectro de desplazamientos.

El período para el primer modo de vibración, denominado como el **período natural o fundamental**, puede estimarse con ecuaciones empíricas dadas en ASCE 7, o del método de Rayleigh. Para estructuras de concreto, el período, T , en segundos puede estimarse con la expresión

$$T = C_T h_n^{3/4} \quad (12-1a)$$

donde T es el período en segundos, h_n es la altura de la edificación por encima de la base, $C_T = 0.030$ para edificaciones de concreto con pórticos resistentes a momento proveyendo el 100% de la resistencia a fuerza lateral requerida y $C_T = 0.020$ para todas las demás estructuras de concreto. El exponente y el coeficiente C_T fueron cambiados a variables en la versión más reciente del ASCE 7.

Alternativamente, el período fundamental de edificaciones que no exceden 12 pisos y que consisten enteramente de pórticos de concreto resistentes a momentos con altura de entrepisos de al menos 3.05 m (10 pies) puede estimarse como

$$T = 0.1N \quad (12-1b)$$

donde N es el número de pisos por encima del nivel de base exterior.

A partir de una serie de estudios después del terremoto de Chile de 1985, Wight et al. reportaron que para edificios donde el sistema resistente a fuerzas laterales consistía de un alto porcentaje de muros estructurales, el período fundamental de tales edificios puede estimarse como

$$T = 0.05N \quad (12-1c)$$

EFFECTO DEL AMORTIGUAMIENTO SOBRE EL ESPECTRO DE RESPUESTA

Cada una de las curvas en la figura 12-1b corresponde a un grado de amortiguamiento específico. El amortiguamiento es una medida de la disipación de energía en la estructura y se debe al agrietamiento, a la fricción por deslizamiento entre las grietas, y al deslizamiento en las conexiones con los elementos no estructurales. Conforme el amortiguamiento se incrementa, las ordenadas del espectro de respuesta decrecen. Típicamente, una edificación de concreto reforzado tendrá de 1 a 2 por ciento de amortiguamiento crítico previo a su exposición a un terremoto. Conforme se desarrollan el agrietamiento y el daño estructural y no estructural durante el terremoto, el amortiguamiento crece a al menos 5 por ciento. Por definición, el **amortiguamiento crítico** inhibe la vibración estructural.

EFFECTO DE LA DUCTILIDAD SOBRE LA FUERZAS SÍSMICAS

Conforme un péndulo elástico no amortiguado es desplazado hacia la derecha, se almacena energía en él en la forma de energía de deformación unitaria. La energía almacenada es igual al área achurada bajo el diagrama de carga versus deflexión lateral

mostrado en la figura 12-3a. Cuando el péndulo es liberado en forma repentina, esta energía vuelve a entrar al sistema como energía cinética (velocidad) que empuja al péndulo hacia la izquierda. Este péndulo oscilará según se indica en el diagrama de carga versus deflexión.

Si el péndulo desarrollara una rótula plástica en su base, el diagrama de carga versus deflexión para la misma deflexión lateral sería como el mostrado en la figura 12-3b. Cuando este péndulo es liberado en forma repentina, únicamente la energía indicada por el triángulo *a-b-c* vuelve a entrar al sistema como energía cinética, el resto es disipado fundamentalmente mediante el agrietamiento del concreto y la fluencia del acero.

Estudios sobre edificaciones hipotéticas elásticas y elastoplásticas sujetas a un número de diferentes acelerogramas sugieren que las deflexiones laterales mínimas de estructuras elásticas y elastoplásticas son aproximadamente iguales para estructuras de períodos de moderados a largos. La figura 12-4 compara los diagramas de carga versus deflexión para una estructura elástica y para una estructura elastoplástica sujetas a la misma deflexión lateral, Δ_u . La razón entre la deflexión máxima, Δ_u , y la deflexión al momento de fluencia para la estructura inelástica, Δ_y , se denomina **razón de ductilidad de desplazamiento**, μ :

$$\mu = \frac{\Delta_u}{\Delta_y} \quad (12-2)$$

En la figura 12-4, se puede observar que, para una razón de ductilidad de 4, la fuerza lateral que actúa en la estructura elastoplástica sería $1/\mu = 1/4$ de la de la estructura elástica a la misma deflexión máxima. Por tanto, si una estructura es dúctil, se puede diseñar para fuerzas sísmicas menores.

12.2.3 Efecto de la rigidez del suelo de cimentación sobre el espectro de respuesta

El espectro de respuesta en roca normalmente presenta una gráfica por debajo del espectro de respuesta de una estructura cimentada sobre capas de suelo entre la roca y las zapatas de la edificación. Para estructuras sobre capas de suelo aluvional, el incremento en las ordenadas del espectro de respuesta es una función de la amplificación causada por las diferentes capas de suelo. Desde 1995, las normas de diseño sísmico han recomendado que los diseñadores incluyan los efectos de los suelos de cimentación en la respuesta sísmica.

12.3 Requisitos para Diseño Sísmico

12.3.1 Categorías de Diseño Sísmico

Las normas de diseño sísmico disponen que le sea asignada una **categoría de diseño sísmico** específica a cada estructura o edificación. Esta designación se hace con base en tres parámetros clave, i.e., la intensidad esperada del **movimiento sísmico**, la **clasificación del sitio**, y el **factor de importancia de la edificación**. La norma ASCE/SEI

7 incluye varios mapas de aceleraciones de respuesta espectral para períodos de 0.2 s y 1.0 s para todos los Estados Unidos y sus dominios (Puerto Rico, Guam, etc.). Las aceleraciones de respuesta sísmica, junto con la clasificación de sitio, se usan para establecer el espectro de respuesta de diseño para una estructura. La clasificación de sitio es función de las propiedades locales del suelo en donde la estructura será ubicada. Las clasificaciones varían desde Clase A – roca dura, hasta Clase E – arcilla blanda y Clase F – suelo que requiere un análisis especial de respuesta de sitio. Los factores de importancia se relacionan con las **categorias de uso de la edificación** definidas en el documento. Estas categorías van de Categoría I – edificios y otras estructuras que representan una amenaza baja para la vida humana en caso de falla, hasta categoría IV – edificios y otras estructuras designadas como instalaciones esenciales. Los edificios en categoría de uso IV tienen el factor de importancia más alto.

Con base en el espectro de respuesta de diseño, el cual es una función del movimiento sísmico anticipado y de la clasificación de sitio, en conjunto con el factor de importancia, el ASCE 7 le asigna a la edificación una categoría de diseño sísmico específica de la A a la F. La categoría de diseño sísmico A es para estructuras ubicadas en suelos firmes en donde el movimiento sísmico máximo anticipado es considerablemente bajo. Las categorías de diseño sísmico B, C, D, E y F representan estructuras donde ya sea se anticipan movimientos sísmicos más grandes, o el sitio de emplazamiento consiste de suelos más blandos, o bien que las edificaciones tengan una importancia más alta. El capítulo 21 de la norma **ACI 318-08** contiene requisitos específicos para edificaciones de concreto basados en las categorías de diseño sísmico que les han sido asignadas, tal como se discute en la sección 12-6 adelante.

12.3.2 Sistemas estructurales para resistencia de fuerzas laterales

La magnitud de la fuerza lateral de diseño para estructuras de concreto es función del espectro de respuesta de diseño para el sitio de ubicación de la edificación y para el tipo de sistema estructural usado para resistir esas fuerzas. Según lo discutido anteriormente, los sistemas estructurales más dúctiles pueden ser diseñados de forma segura para fuerzas sísmicas menores que las que se deben utilizar para sistemas de ductilidad limitada. Esto es manejado en el ASCE 7 mediante la definición de un **coeficiente de modificación de respuesta, R** , el cual es mayor para sistemas estructurales más dúctiles. Los sistemas estructurales generales definidos en ASCE 7 incluyen **sistemas de muros de carga, sistemas de pórticos resistentes a momentos, y sistemas duales** que consisten de una combinación de muros de corte y pórticos resistentes a momentos que trabajan en conjunto para resistir las fuerzas laterales. En general, los sistemas de muros de carga son menos dúctiles que los pórticos resistentes a momentos o los sistemas duales. Además, dependiendo del nivel de detallado estructural, que va desde **ordinario** hasta **especial**, se asigna una gama de diferentes factores R a los pórticos resistentes a momentos y a los sistemas duales. Los edificios designados con categorías de diseño sísmico altas requerirán detallado estructural especial, según se discute en la sección 12-6.

12.3.3 Efecto de la configuración de la edificación

Uno de los pasos más importantes en el diseño sísmico de una edificación es la escogencia de la configuración estructural—esto es, la distribución de masas y rigideces en la edificación y la escogencia de rutas de carga mediante las cuales las fuerzas laterales llegarán eventualmente al terreno. En años recientes, las normas de diseño sísmico han clasificado a los edificios como *regulares* o *irregulares*. Las irregularidades incluyen muchos aspectos del diseño estructural que conducen a daño por sismo. Los edificios irregulares requieren de un análisis estructural más detallado, previsiones de diseño para reducir el impacto de cada irregularidad, y más requisitos de detallado que para edificios regulares. Las irregularidades se clasifican como *irregularidades en planta* o *irregularidades en elevación*, según se resumen a continuación.

IRREGULARIDADES EN PLANTA

1. **Irregularidades torsionales.** Idealmente, un edificio sometido a sismos debería ser simétrico—o al menos, la distancia entre el centro de masa (punto a través del cual actúan las fuerzas sísmicas en un piso dado) y el centro de resistencia debería ser lo más pequeña posible. Si hay una excentricidad, como la que se muestra en la figura 12-5a, el edificio sufrirá deflexión torsional tal como se muestra. La columna en el punto *A* en la figura 12-5a experimentará cortantes mayores que la columna en el punto *B*. La ubicación del centro de resistencia es afectada por la presencia de los elementos estructurales y de los “no estructurales” ambos.

La deflexión relativa calculada arriba y abajo en un piso es denominada *deriva de entrepiso*, δ_{\max} . Existe una irregularidad torsional categoría 1a cuando la deriva de entrepiso máxima en un extremo del piso es mayor que 1.2 veces el promedio de deriva en el mismo entrepiso. Esta definición aplica solamente a edificios con diafragmas rígidos o semirígidos.

Existe una irregularidad torsional categoría 1b cuando la razón de deriva elástica máxima versus deriva promedio excede 1.4.

Los edificios irregulares deben tener resistencia y rigidez torsionales significativas. En vista de que los muros individuales en la figura 12-5b están más alejados del centro que los de la figura 12-5c, aquellos proveen más resistencia a la torsión. El núcleo del edificio en la figura 12-5c es casi un tubo cerrado, lo cual tiende a ser más rígido en torsión que paredes independientes. La planta en la figura 12-5d, usada para edificios esquineros es particularmente inapropiada. Tiene una gran excentricidad y muy poca resistencia torsional.

2. **Irregularidad por esquina entrante.** Si la planta tiene esquinas entrantes y el sistema de entrepiso se proyecta más allá de la esquina entrante en un 15 por ciento de la dimensión en planta del edificio, se dice que el edificio cuenta con *irregularidad por esquina entrante*. Para el edificio de la izquierda en la figura 12-6, una solución consiste en separar las dos alas mediante una junta lo suficientemente ancha para que las alas puedan oscilar libremente sin contacto entre sí. Si esto no es posible o práctico, la región que une las dos partes debe ser reforzada para resistir la tendencia a separarse.

- 3. Irregularidad por discontinuidad de diafragma.** La figura 12-7 muestra la planta de un diafragma de entrepiso transmitiendo fuerzas sísmicas a los muros de corte en cada extremo del edificio. El diafragma se comporta como una viga aperaltada de alma muy delgada que desarrolla tracción y compresión en sus bordes. Discontinuidades abruptas o cambios en los diafragmas, tales como una perforación en un patín, pueden conducir a daño significativo.

Si hay cambios abruptos en la rigidez de los diafragmas, incluyendo un corte o una abertura cubriendo más del 50 por ciento del diafragma o del área de sección transversal, o 50 por ciento de un piso al siguiente, se dice que el edificio tiene una **irregularidad por discontinuidad de diafragma**. La pérdida de área de sección transversal para la discontinuidad mostrada en la figura 12-7 es menor que 50 por ciento y no calificaría como una irregularidad de diafragma.

IRREGULARIDADES EN ELEVACIÓN

Las irregularidades en elevación son cambios abruptos en la geometría, la resistencia, o la rigidez de una estructura de un entrepiso al siguiente.

- 1. Irregularidad por rigidez—Piso blando.** Un piso blando categoría 1a es uno en el cual la rigidez lateral está entre 70 y 80 por ciento de la de los entrepisos inmediatamente superior o inmediatamente inferior. Esto se convierte en una **irregularidad de piso blando extrema** (1b) si la rigideces laterales van de 60 a 70 por ciento de aquellas de los pisos adyacentes. El piso blando creado mediante la terminación o la reducción considerable de la rigidez de las muros de cortante del primer piso, mostrado en la figura 12-8, concentra las deformaciones laterales en ese nivel.
- 2. Irregularidad por peso (masa).** Existe una irregularidad por masa en donde la masa efectiva de cualquier entrepiso excede el 150 por ciento de la masa efectiva del entrepiso adyacente.
- 3. Discontinuidad geométrica vertical.** Este tipo de irregularidad ocurre cuando la dimensión horizontal del sistema resistente a fuerzas laterales en cualquier piso es mayor que el 130 por ciento de un piso adyacente.
- 4. Discontinuidad en el plano en elementos verticales que resisten fuerzas laterales.** Se considera que existe una discontinuidad en el plano cuando un desplazamiento en el plano de los elementos resistentes a fuerzas laterales es mayor que la longitud de esos elementos, tal como se muestra en la figura 12-9c, o donde la rigidez de los elementos resistentes en el piso inferior es menor que la del piso en cuestión.
- 5. Discontinuidad en resistencia lateral—Piso débil.** Existe un piso débil si la resistencia lateral de un piso es menor que el 80 por ciento de la del piso superior. La resistencia lateral de un piso es la resistencia total de todos los elementos resistentes a fuerzas laterales en ese piso.

Variaciones en las rigideces de las columnas atraen fuerzas hacia las columnas más rígidas. Debido a sus diferentes longitudes libres, la rigidez lateral de la columna *D* en la figura 12-10 sería cuatro veces la de la columna *B* para la misma sección transversal.

Inicialmente, la columna D sería llamada a resistir cuatro veces la fuerza cortante de la columna B . Con frecuencia, tal columna falla en cortante justo encima de la pared. Algunas veces el cambio en la rigidez de la columna es causado por la restricción del libre movimiento causado por elementos no estructurales, tales como muros de mampostería como el mostrado en la figura 12-10.

12.4 Fuerzas Sísmicas en Estructuras

La norma ACI no especifica movimientos sísmicos para un sitio dado ni da detalles sobre como deben ser analizadas las estructuras ante acciones sísmicas. Estos detalles son presentados en la normativa general de construcción para cada lugar. Actualmente, la normativa general de construcción permiten diferentes niveles de análisis sísmico. Los tres procedimientos de análisis permitidos por el ASCE 7 son el procedimiento de *fuerza lateral equivalente*, el procedimiento de *análisis espectral modal* y un procedimiento de *análisis inelástico de respuesta en el tiempo*.

COMPONENTES VERTICAL Y HORIZONTAL DE E

Las normas de diseño sísmico norteamericanas, publicadas desde 1997 dividen la carga sísmica, E , en componentes horizontal y vertical, E_h y E_v de la siguiente manera:

$$E = E_h + E_v$$
$$E = Q_E + 0.2S_{DS}D$$

Q_E es el efecto de carga horizontal causado por las fuerzas sísmicas. E_v es la componente vertical de las fuerzas sísmicas, tomado igual a $0.2S_{DS}D$, donde S_{DS} es la aceleración espectral de diseño para período corto, tal como 0.2s, y D es la carga muerta.

12.4.1 Método de fuerza lateral equivalente para el cálculo de las fuerzas sísmicas

Normalmente se permite el método de fuerza lateral equivalente para edificaciones regulares de hasta 20 pisos. Alguna veces puede usarse para edificaciones irregulares si se brinda atención especial a los tipos de irregularidades.

Pruebas geotécnicas del suelo subyacente en el sitio ayudan al diseñador a estimar el grado en el cual la interacción suelo-estructura modifica los efectos sísmicos en la estructura.

CORTANTE SÍSMICA BASAL, V

El cortante sísmico basal se calcula según

$$V = C_s W$$

donde C_s es el coeficiente de respuesta sísmica para la edificación, y W es el peso sísmico efectivo de la edificación.

COEFICIENTE DE RESPUESTA SÍSMICA, C_s

Normalmente, el coeficiente de respuesta sísmica está dado por

$$C_s = \frac{S_{DS}}{R/I}$$

donde S_{DS} cuantifica el espectro de respuesta como una función del período T , del amortiguamiento, y la rigidez de la cimentación; R es un **factor de modificación de la respuesta** que toma en cuenta la reducción en cargas sísmicas causada por la acción inelástica y la disipación de energía; e I es el factor de importancia sísmica de la edificación según su uso.

En la figura 12-11 se presenta un gráfico típico de C_s como función de T . Algunas veces esta curva es dibujada con tres ramas, añadiendo una sección de pendiente empinada en los períodos bajos. La forma final usada depende de los factores incorporados en C_s .

PESO SÍSMICO EFECTIVO DE LA EDIFICACIÓN, W

El peso, W , de la edificación usado para calcular V intenta representar las cargas gravitacionales probablemente presentes cuando ocurra el terremoto. En la norma ASCE 7, W es calculado como

$$W = 100 \begin{array}{l} \text{por ciento de la carga muerta no factorizada,} \\ + \text{ la carga de particiones basada en su peso propio (o un peso mínimo de 10 psf),} \\ + \text{ en áreas usadas para almacenaje, al menos 25 por ciento de la carga viva no} \\ \text{factorizada,} \\ + \text{ en donde el diseño indique cargas por encima de 30 psf, no menos del 20} \\ \text{por ciento de la carga no factorizada de nieve en el techo,} \\ + \text{ la carga no factorizada del contenido total de los tanques presentes, y} \\ + \text{ el peso del equipamiento permanente} \end{array}$$

FACTOR DE MODIFICACIÓN DE RESPUESTA, R

El factor de modificación de respuesta, R , incluye

- (a) la habilidad de la estructura de disipar energía mediante acción inelástica, tal como se muestra en la figura 12-4b, y
- (b) la redundancia de la estructura.

Se supone que el nivel de ductilidad gobierna la reducción en fuerzas sísmicas para los diferentes sistemas de resistencia lateral de fuerzas. Los valores típicos se presentan en la Tabla 12-1.

Tabla 12-1 Coeficiente de modificación de respuesta, R , para resistencia sísmica

Sistema estructural básico	Sistema sismorresistente	Coeficiente de modificación de respuesta R
Sistema de muro de carga	Muros de cortante especiales de concreto reforzado	5
Sistema de edificación aporricada	Muros de cortante especiales de concreto reforzado	6
Sistema de pórtico resistente a momentos	Pórticos especiales resistentes a momentos (SMF)	8
	Pórticos intermedios resistentes a momentos (IMF)	5
	Pórticos ordinarios resistentes a momentos (OMF)	3
Sistema dual con un SMF capaz de resistir al menos un 25 por ciento de las fuerzas sísmicas prescritas	Muros de cortante especiales de concreto reforzado	7
Sistema dual con un IMF capaz de resistir al menos un 25 por ciento de las fuerzas sísmicas prescritas	Muros de cortante especiales de concreto reforzado	6.5
	Muros de cortante ordinarios de concreto reforzado	5.5

Fuente: Versión abreviada del ASCE 7

12.4.2 Distribución de fuerzas laterales en la altura de la edificación

El cortante basal de la ecuación (12-9) es distribuido como una serie de fuerzas laterales en cada nivel de entrepiso y en el techo. En general, la distribución de las fuerzas laterales se supone similar a la forma deflectada para el primer modo de oscilación, el cual corresponde a una distribución de triangular invertida de fuerzas laterales para estructuras de período corto. El coeficiente, k , en la ecuación (12-8) es usado para tomar en cuenta los modos altos de oscilación.

Por tanto, la fuerza lateral para cualquier nivel de entrepiso, x , es

$$F_x = VC_{vx} \tag{12-7}$$

donde

$$C_{vx} = \frac{w_x h_x^k}{\sum_{i=1}^n w_i h_i^k} \tag{12-8}$$

en la cual F_x , w_x y h_x son la fuerza lateral, el peso, y la altura respectivamente al nivel x por encima de la base; $i = 1$ indica el primer nivel de la edificación por encima de la base; e $i = n$ indica el nivel superior (techo). El coeficiente, k , es un exponente relacionado con el período estructural. Se toma igual a 1.0 para períodos estructurales de 0.5 s o menores, y se toma igual a 2.0 para períodos de 2.5 o mayores. Para períodos estructurales entre 0.5 y 2.5 s, k se determina mediante interpolación lineal entre 1.0 y 2.0. En la figura 12-12 se muestra distribuciones de fuerza lateral típicas.

CORTANTE DE ENTREPISO

El cortante, V_x , en cualquier entrepiso x es la suma de las fuerzas laterales, F_i , que actúan por encima de ese entrepiso:

$$V_x = \sum_{i=x}^n F_i \quad (12-9)$$

TORSIÓN DE ENTREPISO

El cortante de entrepiso, V_x , en un piso se considera como actuando horizontalmente a través del centro de masa del entrepiso, lo cual resulta en un momento torsional, T , igual al producto de las fuerzas sísmicas por la excentricidad horizontal, e_x o e_y , entre el centro de masa y el centro de resistencia, medido perpendicularmente a la línea de acción de la fuerza sísmica. Para tomar en cuenta la torsión accidental, se añade un momento torsional, T_{ax} , igual al cortante de entrepiso por la distancia e_{ay} . La norma ASCE 7 toma e_{ay} igual a $\pm 0.05L_b$, donde L_b es la longitud horizontal de la edificación perpendicular a la supuesta dirección de la fuerza aplicada. Por tanto,

$$T_x = V_x \times e_y + V_x \times e_{ay} \quad (12-10)$$

donde T_x es el momento torsional debido a las fuerzas sísmicas en la dirección x , e_y es la distancia en la dirección y entre el centro de masa y el centro de resistencia, y e_{ay} es el 5 por ciento de la longitud de la edificación en la dirección x . El segundo término representa un incremento accidental en los efectos torsionales. Tal incremento puede ocurrir si, por ejemplo, una columna esquinera, tal como la columna A en la figura 12-5a, se agrieta y pierde parte de su rigidez antes de que las otras columnas se agrieten. Cuando esto ocurre, el centro de resistencia se mueve hacia las columnas más rígidas (hacia la izquierda de la figura 12-5a), incrementando con esto los efectos torsionales. Cada elemento en la edificación se diseña entonces para los efectos más severos de las torsiones accidentales debidas a fuerzas en las direcciones x y y .

ANÁLISIS

En un análisis estructural elástico lineal para pórticos se usan las fuerzas laterales totales. Para estructuras regulares, se pueden usar modelos bidimensionales independientes. Para edificaciones de concreto, se utilizan las propiedades de sección agrietada. Para estructuras irregulares, se debe usar análisis tridimensional. En donde los diafragmas sean flexibles relativos a los elementos resistentes a fuerzas laterales, esa flexibilidad debe ser incluida en el análisis.

En resumen, dos conceptos son importantes aquí. Primero, la fuerza desarrollada en la estructura no tiene un valor fijo, sino que resulta de la rigidez de la estructura y su respuesta al movimiento del terreno. Segundo, si una estructura es detallada para que pueda responder de manera dúctil ante el movimiento del terreno, las fuerzas sísmicas se toman como una fracción de los valores de las fuerzas elásticas.

12.5 Ductilidad en Elementos de Concreto Reforzado

Los factores que afectan la ductilidad de las vigas de concreto reforzado bajo carga aplicada monotónicamente han sido discutidos anteriormente, en la sección 4-2. (Ver las figuras 4-11 y 4-12.) La ductilidad a la flexión de una viga se incrementa conforme la cuantía de refuerzo ρ baja y conforme la cuantía de refuerzo negativo ρ' aumenta.

Cuando un elemento de concreto reforzado está sujeto a carga, se desarrollan grietas de flexión y de cortante, como se muestra en la figura 12-13a. Cuando la carga es revertida, estas grietas se cierran y aparecen nuevas grietas. Después de varios ciclos de carga, el elemento lucirá como se indica en la figura 12-13b. El extremo izquierdo de la viga está dividido en una serie de bloques de concreto sostenidos en su sitio gracias a la canasta de refuerzo. Si la viga se agrieta a través de su peralte, como se muestra en la figura 12-13b, el cortante es transferido a través de la grieta ante bajas rotaciones mediante acción de dovela del refuerzo longitudinal y fricción debida a entramamiento a lo largo de la grieta. Si el concreto de recubrimiento se aplasta, las barras longitudinales se pandearán a menos que cuenten con la restricción provista por estribos cerrados muy cercanos entre sí. Los estribos cerrados también proveen confinamiento al núcleo de concreto, incrementando la ductilidad de la viga.

Se debe notar que la razón de ductilidad de desplazamiento de la viga presentada anteriormente, Δ_u/Δ_y , se define en la ecuación (12-2) en términos de la deflexión Δ en el extremo de la viga, de manera similar a la mostrada en la figura 12-13. En vista de que la mayoría de la deformación está concentrada en la región agrietada de rotulación plástica, la ductilidad de rotación, θ_u/θ_y , medida en la longitud de la zona de rotulación plástica y la ductilidad de curvatura, ϕ_u/ϕ_y , medida en la sección de momento máximo para la viga son mayores que la ductilidad de deflexión requerida, Δ_u/Δ_y .

En la sección 3-4, se demostró que el concreto sometido a esfuerzos de compresión triaxial incrementa ambos su resistencia y su ductilidad (figura 3-15). En una columna espiral, la expansión lateral del concreto dentro del núcleo genera esfuerzos de tracción en la espiral, y esto a la vez causa una presión de confinamiento en el núcleo de concreto conduciendo a un incremento en la resistencia y la ductilidad del núcleo (figura 9-5). El capítulo 21 de la norma ACI exige que las vigas, columnas y extremos de muros de corte cuenten con **estribos cerrados de confinamiento** en donde se espera que haya fluencia del refuerzo de flexión. Los estribos cerrados de confinamiento son estribos cerrados muy cercanos entre sí o espirales, cuyos extremos terminan en ganchos de 135° con extensiones de seis diámetros de barra (pero no menos de 3 in.) hacia el núcleo confinado. Los estribos cerrados de confinamiento deben enlazar el refuerzo longitudinal y dar apoyo lateral a esas barras de la misma manera que es requerido para estribos de columna en la sección 7.10.5.3 de la norma **ACI 318-08**. Aun cuando los estribos cerrados de confinamiento pueden ser circulares, lo más común es que sean rectangulares, como se muestra en la figura 12-14, porque la mayoría de las vigas y las columnas tienen secciones rectangulares. El núcleo de concreto mostrado en forma achurada en la figura 12-14a es confinado por el estribo cerrado de confinamiento. Como

resultado, tiende a ser más dúctil y un poco más resistente que el concreto no confinado. Además de confinar el núcleo de concreto, los estribos cerrados de confinamiento previenen el pandeo de las barras longitudinales y actúan como refuerzo de cortante.

Los elementos de los pórticos especiales resistentes a momentos diseñados usando el capítulo 21 de la norma ACI pueden alcanzar ductilidades de deflexión superiores a 5 y los muros bien detallados para flexión pueden alcanzar alrededor de 4, comparado con 1 o 2 para el caso de pórticos convencionales.

Los coeficientes de modificación de respuesta, R , dados en la Tabla 12-1 son una medida de las ductilidades de deflexión que pueden alcanzar los diferentes tipos de estructuras.

12.6 Disposiciones Generales del ACI para Diseño Sísmico

12.6.1 Aplicabilidad

Las disposiciones para el diseño sísmico en el capítulo 21 de la norma ACI fueron ampliadas en la edición del 2002 para extender su aplicabilidad a estructuras prefabricadas.

Las secciones 21.1.1.2 a 21.1.1.6 presentan los requisitos de diseño para estructuras asignadas a las categorías de diseño sísmico (SDC) B hasta F, los cuales fueron discutidas en la sección 12-3. Estas disposiciones se resumen en la Tabla 12-2.

El capítulo 21 de la norma ACI se refiere a un pórtico resistente a momentos diseñado usando los capítulos del 1 al 19 de la norma como un pórtico ordinario (OMF), y a un pórtico resistente a momentos diseñado usando los capítulos del 1 al 19 más la sección 21.3 de la norma, que exige detallado especial, como un pórtico intermedio (IMF). Un pórtico resistente a momentos diseñado usando los capítulos del 1 al 19 y las secciones 21.13 a 21.1.7, y 21.5 a 21.8 se denomina como un pórtico especial (SMF).

12.6.2 Materiales

La resistencia a la compresión del concreto no puede ser menor que 3000 psi (Sección 21.1.4.1 de la norma ACI). Como algunos concretos livianos de alta resistencia presentan fallas por aplastamiento frágil, la resistencia de los concretos livianos no debe superar los 5000 psi a menos que el buen comportamiento del concreto liviano de alta resistencia en particular esté debidamente respaldado.

El refuerzo que resiste esfuerzos inducidos por sismo en elementos de pórticos y en elementos de borde de muros deben cumplir con la norma ASTM A 706, *Standard Specification for Low-Alloy Steel Deformed and Plain Bars for Concrete Reinforcement*. El acero ASTM 615 también puede ser utilizado si se cumple con lo establecido en la sección 21.1.5.2 partes (a) y (b) de la norma ACI.

12.6.3 Factores de carga, combinaciones de carga y factores de reducción de resistencia

El diseño se basa en

$$\phi R_n \geq R_u \quad (12-11)$$

donde R_u es la suma de los efectos de carga factorizados para una combinación de carga aplicable, U . R_n es la resistencia nominal de un elemento y ϕ es el factor de reducción de resistencia aplicable según las secciones 9.2 y 9.3 de la norma ACI.

12.6.4 Factores de carga y de resistencia—Secciones 9.2 y 9.3 de la norma ACI

La sección 9.2.1 de la norma ACI presenta siete combinaciones de carga, incluyendo dos que incluyen cargas sísmicas, E :

$$\text{Combinación de carga 9-5} \quad U = 1.2D + 1.0E + 1.0L + 0.2S \quad (\text{ACI Ec. 9-5})$$

y

$$\text{Combinación de carga 9-7} \quad U = 0.9D + 1.0E + 1.6H \quad (\text{ACI Ec. 9-7})$$

donde D es el efecto de carga muerta no factorizado, L es el efecto de carga viva no factorizado, S es el efecto de carga de nieve no factorizado, E es el efecto de carga de sismo no factorizado y H es el efecto debido al peso y la presión de suelo no factorizado, incluyendo al agua presente en el suelo u otros materiales. (Un efecto es el resultado de una fuerza actuando en una estructura.)

La combinación de carga 9-7 es usada cuando la carga muerta estabiliza una estructura sujeta a cargas de volcamiento o a reversión de esfuerzos.

La sección 9.3.4 de la norma ACI define factores de reducción especiales, ϕ , para tres tipos de elementos *sensibles al cortante* encontrados en diseño sísmico. En la parte (a) para elementos estructurales con resistencia nominal a cortante menor que el cortante correspondiente al desarrollo de la resistencia nominal de flexión del elemento, el factor ϕ debe ser tomado como 0.60. En la parte (b) para diafragmas, el factor ϕ para resistencia a cortante no debe exceder el menor de los valores de ϕ en el cortante usado para los componentes verticales del sistema primario resistente a fuerzas laterales. En la parte (c), el factor ϕ para cortante en las juntas y en vigas de amarre con refuerzo diagonal se establece como 0.85. Las fuerzas de cortante en estos elementos se determinan mediante el procedimiento de *diseño por capacidad*, según se discute en la próxima sección, y el factor ϕ se seleccionó para ser consistente con ediciones anteriores de la norma ACI.

12.6.5 Diseño por capacidad

Los detalles de refuerzo requeridos para asegurar ductilidad adecuada de las regiones de rotulación en una estructura cargada lateralmente tiende a ser tediosa de diseñar y cara de implementar. Esta complejidad se reduce si la estructura es diseñada de manera que

únicamente unas pocas secciones transversales formen rótulas ante cargas sísmicas, mientras que el resto de la estructura cuente con suficiente refuerzo para mantenerse elástica. Considere, por ejemplo, un muro estructural especial con los diagramas de cortante y momento mostrados en la figura 12-15. Este muro está cargado con cargas verticales totales N_u y cargas horizontales totales E . En un diseño no sísmico, el tamaño del muro y el refuerzo del muro sería escogido para tener la rigidez deseada más una resistencia igual o mayor que el efecto de las cargas factorizadas.

Como este muro actúa como un voladizo vertical, la primera rótula plástica se espera que ocurra en la base del muro. En un *diseño por capacidad* esta sección es diseñada para formar una rótula ante un nivel de carga lateral que permitirá que la rótula sea detallada para comportamiento dúctil bajo flexión y carga axial de compresión. Sin embargo, al mismo tiempo, las secciones alejadas de la región de rótula se diseñan para permanecer elásticas durante la historia de carga, de esta forma evitando la necesidad de detallado sísmico en esas secciones.

En vista de que una falla a cortante en la región de rótula no sería dúctil, la resistencia a cortante en la base del muro se escoge para que exceda el cortante esperado cuando el muro forma la rótula de flexión, como se muestra por las envolventes de momento y cortante en la figura 12-15. También, las resistencias de momento de todas las secciones no escogidas para formar rótulas exceden los momentos debidos al mecanismo de rotulación supuesto para la estructura. A este proceso se le denomina *diseño por capacidad*.

La estructura no es meramente diseñada para resistir los efectos de carga aplicados; sino que es proporcionada de tal forma que las resistencias de momento y cortante de todos los elementos que no fluyen en la estructura excedan las cargas correspondientes a la fluencia de los elementos críticos que el diseñador ha seleccionado.

12.6.6 Diseño de Columna Fuerte – Viga Débil

Si se forman rótulas plásticas en columnas, la estabilidad de la estructura se puede ver comprometida, como se muestra en la figura 12-8. Por tanto, el diseño de pórticos resistentes a momento dúctiles intenta forzar la estructura a responder en lo que es denominado como acción de columna fuerte – viga débil en la cual las rótulas plásticas inducidas por las fuerzas sísmicas se forman en los extremos de las vigas, como se muestra en la figura 12-16. Las regiones rotulantes se detallan para mantener su capacidad de cortante mientras las rótulas plásticas sufren fluencia por flexión positiva y negativa ambas.

Tabla 12-2 Secciones de la norma ACI aplicables a varias Categorías de Diseño Sísmico*

Categoría de diseño sísmico	Pórticos resistentes a momento	Vigas, Columnas y Juntas	Muros estructurales y Vigas de acople	Diafragmas	Cimentaciones
A	Ninguna	Ninguna	Ninguna	Ninguna	Ninguna
B	21.2	Ninguna	Ninguna	Ninguna	Ninguna
C	21.3	Ninguna	Ninguna	Ninguna	Ninguna
D, E, F	21.5, 21.6 y 21.13 para elementos del pórtico que no forman parte del sistema resistente a fuerzas laterales	21.7	21.9	21.11	21.12

*en adición a los capítulos 1 a 19 de la norma ACI.

12.7 Elementos en flexión en Pórticos Especiales

12.7.1 Límites geométricos en secciones transversales de vigas

La sección 21.5 de la norma ACI define un elemento en flexión como un elemento proporcionado para resistir flexión en primera instancia y sin carga axial o con una carga axial factorizada menor que $(A_g f'_c / 10)$. Se establecen limitaciones geométricas en la razón vano versus peralte ($\ell_n \geq 4h$) para evitar acción de viga aperaltada, excepto que este límite no aplica para vigas de acople en muros de cortante. Los anchos de los elementos en flexión en pórticos especiales resistentes a momento no deben ser menor que (a) 0.3 veces el peralte de la viga, o (b) 10 in., o (c) no más que el ancho del elemento de apoyo, c_2 , más una distancia a cada lado del elemento de apoyo igual al menor de la dimensión, c_2 , o 0.75 veces la dimensión perpendicular del elemento de apoyo, c_1 .

12.7.2 Clasificación de los momentos resistentes

En el diseño sísmico se usan dos niveles de momento resistente:

$M_n =$ **resistencia nominal de momento**, calculada usando la resistencia a la fluencia, f_y , y la resistencia especificada del concreto, f'_c . La resistencia nominal de momento es usada en la sección 21.6.2.2 de la norma ACI para asegurar que las columnas son más fuertes que las vigas que se encuentran en la junta.

$M_{pr} =$ **resistencia probable de momento**, calculada usando $1.25f_y$ porque la resistencia de fluencia promedio tiende a ser mayor que f_y y porque el refuerzo longitudinal de la viga alcanzará probablemente endurecimiento por deformación en las zonas de rotulación plástica. La resistencia probable de momento es usada en la sección 21.5.4.1 de la norma ACI para asegurar que las resistencias a cortante de las vigas exceden los cortantes que equilibran la rotulación de flexión en los extremos de las vigas. También se usa en la sección 21.6.5.1 para calcular los cortantes en las columnas.

CÁLCULO DE RESISTENCIA A MOMENTO DE SECCIONES DE VIGAS

En el cálculo de las capacidades de momento sujetas a fuerzas sísmicas, ha sido práctica muy difundida ignorar el refuerzo de compresión de la viga y cualquier refuerzo de tracción en el patín (losa) para una viga en flexión negativa (tracción en la parte superior). Ignorar el refuerzo de la losa resulta en la resistencia calculada de la viga menor de lo que sería si estos efectos fueran incluidos en los cálculos. Esta sobrerresistencia en flexión, consume parte de la reserva de resistencia de cortante provista mediante un procedimiento de diseño por capacidad. Para evitar una subestimación de la resistencia a la flexión de la viga, la sección 21.6.2.2 de la norma ACI ahora exige que el acero en los patines en tracción de la viga sea incluido en el cálculo de las resistencias de columna requeridas.

12.7.3 Refuerzo longitudinal (horizontal)

Las cargas sísmicas causan el diagrama de momento mostrado con línea continua en la figura 12-17b cuando el pórtico se desplaza hacia la derecha y un diagrama opuesto indicado por línea de trazos cuando el pórtico se desplaza hacia la izquierda. A esto hay que añadir los momentos de cargas muerta y viva mostrados en la figura 12-17c, resultando en la envolvente de momentos de la figura 12-17d. Los momentos máximos en el vano ocurren normalmente en la cara de la columna. Además de proveer resistencia de momento adecuada, el refuerzo de flexión debe satisfacer los siguientes requisitos de detallado indicados en la sección 21.5.2 de la norma ACI:

1. Al menos dos barras continuas deben ser provistas arriba y abajo.
2. Las áreas de refuerzo arriba y abajo en cada sección no debe ser menor que las dadas en la ecuación 10-3 de la norma ACI, ni menor que $200b_w d / f_y$. La cuantía de refuerzo, $\rho = A_s / bd$, no debe exceder 0.025 para el refuerzo superior e inferior ambos.
3. La resistencia a momento positivo de la sección de la viga en la cara de la junta viga – columna no debe ser menor que la mitad de la resistencia de momento negativo. (Ver la figura 12-17e). Esto provee $\rho' \geq 0.5\rho$, lo que permite a la viga desarrollar grandes curvaturas en las regiones rotulantes y mejora grandemente la ductilidad de los extremos de las vigas.
4. En cada sección, la capacidad de momento positivo y negativo no debe ser menor que una cuarta parte de la capacidad de momento máximo en la cara de cualquiera de las juntas. Esto también aparece graficado en la figura 12-17e.

El límite superior en ρ de 0.025 en el punto 2 es mayor que el ρ que sería usado normalmente en una viga no sísmica con acero Grado 60 y la mayoría de las resistencias de concreto. Se establece tan alto porque siempre habrá refuerzo de confinamiento y acero de compresión ρ' igual a al menos 0.25ρ .

12.7.4 Desarrollo y empalme de refuerzo de flexión

Las longitudes de desarrollo y las longitudes de empalme en las secciones 12.2 y 12.15 de la norma ACI aplican a pórticos resistentes a fuerzas sísmicas excepto por lo alterado en la sección 21.7.4 de la norma ACI que trata sobre desarrollo de barras en juntas viga-columna. La sección 21.5.2.3 de la norma ACI prohíbe empalmes por traslapeo

1. dentro de las juntas;
2. dentro de la distancia $2h$ de las caras de la junta; y
3. en ubicaciones en donde fluencia por flexión puede ocurrir debido a deformación lateral del pórtico.

Los empalmes por traslapeo deben estar enlazados por estribos cerrados de confinamiento o espirales con un espaciamiento igual o menor que 4 in. o $d/4$. Los empalmes mecánicos pueden ser usados de acuerdo con las limitaciones de la sección 21.5.2.4 de la norma ACI. No se recomienda soldadura; la soldadura de punto de barras para propósitos de ensamblaje fragiliza las barras localmente, y por lo tanto no es permitido.

12.7.5 Refuerzo transversal

Se requiere refuerzo transversal

1. para confinar el concreto,
2. para prevenir pandeo de las barras en compresión en áreas de rotulación plástica (sección 21.5.3 de la norma ACI),
3. para proveer resistencia de cortante adecuada (sección 21.5.4 de la norma ACI), y como se mencionó en la sección anterior, y
4. para confinar empalmes por traslapeo.

REFUERZO DE CONFINAMIENTO

Los estribos cerrados para confinamiento y para control de pandeo de refuerzo longitudinal se requieren

1. a lo largo de una distancia igual a $2h$ de la cara de los apoyos y
2. dentro de $2h$ a cada lado de otros puntos donde la rotulación plástica puede resultar debido a deformaciones laterales del pórtico.

El espaciamiento de los estribos cerrados de confinamiento es indicado en la sección 21.5.3.2 de la norma ACI. En el resto de la viga, ya sean estribos o estribos cerrados son requeridos a un espaciamiento máximo $d/2$.

La sección 2.2 de la norma ACI define un **gancho sísmico** como un gancho en un estribo, o gancho suplementario que tiene un doblez no menor de 135° con una extensión de seis diámetros de barra (pero no menos de 3 in.) que amarra al refuerzo longitudinal y proyecta dentro del concreto confinado en el interior del estribo.

Un **gancho suplementario** se define como una barra de refuerzo continua que tiene un gancho sísmico en un extremo y un gancho de al menos 90° con una extensión de no

menos de seis diámetros de barra en el otro extremo, como se muestra en la figura 12-18a. Ambos ganchos deben enlazar barras longitudinales periféricas. Los ganchos de 90° de dos ganchos suplementarios sucesivos enlazando las mismas barras longitudinales deben alternarse en sus extremos, excepto por lo permitido en la sección 21.5.3.6 de la norma ACI.

Un **estribo cerrado de confinamiento** es un estribo, como el mostrado en la figura 12-18c, o un estribo arrollado en forma continua. Un estribo cerrado puede ser hecho con varias barras de refuerzo, cada una con ganchos sísmicos en uno o ambos extremos. Esto permite el uso de un número de barras o malla electrosoldada entrelazante para lograr una canasta de estribos y barras longitudinales para una viga o una columna. En elementos a flexión, la sección 21.5.3.6 de la norma ACI permite que los estribos cerrados de confinamiento sean hechos con un gancho suplementario como se muestra en la figura 12-18a más un estribo con ganchos sísmicos en cada extremo, como se muestra en la figura 12-18b. Si las barras longitudinales enlazadas por los ganchos complementarios están confinadas por una losa en un único lado de la viga, como se muestra en la figura 12-18d, los ganchos de 90° en los ganchos complementarios pueden ser colocados en un solo lado.

REFUERZO DE CORTANTE

Cuando el pórtico es desplazado lateralmente mediante deformaciones inelásticas requeridas para desarrollar la ductilidad de la estructura, el refuerzo en los extremos de la viga fluirán a menos que la resistencia de momento sea varias veces el momento debido a las cargas sísmicas. La fluencia del refuerzo establece un límite superior sobre los momentos que pueden ser desarrollados en los extremos de la viga. Las fuerzas cortantes de diseño, V_e , se basan en los cortantes debidos a cargas muerta y viva factorizadas (figura 12-19c) más los cortantes debidos a la rotulación en los dos extremos de la viga para el pórtico desplazándose hacia la derecha o hacia la izquierda, como se muestra en la figura 12-19a. M_{pr} es la resistencia probable de momento de los elementos, basada en las dimensiones y en el refuerzo en la junta y suponiendo una resistencia a la tracción de $1.25f_y$ y $\phi = 1.0$. Para una viga rectangular sin cargas axiales, la sección 21.5.4.1 dispone que las vigas sean diseñadas para la suma de

$$V_{sway} = \frac{M_{pr1} + M_{pr2}}{\ell_n}$$

y

$$V_g = \frac{w_u \ell_n}{2}$$

Por tanto, el cortante total de diseño es

$$V_e = V_g \pm V_{sway}$$

donde

$$M_{pr} = 1.25f_y A_s (d - a/2)$$

donde,

$$a = \frac{1.25 f_y A_s}{0.85 f'_c b}$$

La viga es entonces diseñada para la envolvente de fuerza de cortante resultante con $V_u = V_e$ de manera usual, excepto que si

- (a) el cortante, V_{sway} , debido a los momentos M_{pr1} y M_{pr2} es la mitad o más del cortante total, V_e , en el vano y
- (b) la fuerza axial factorizada (si la hay) incluyendo los efectos de sismo es menor que $(A_g f'_c / 20)$,

entonces V_c se toma como cero. El daño al área rotulante debido a las repetidas reversiones de carga reduce enormemente la capacidad de la sección transversal de resistir cortante, lo que requiere de más esfuerzo transversal. Los estribos cerrados de confinamiento y los estribos provistos por la sección 21.5.3 de la norma ACI también pueden servir como refuerzo de cortante.

Ejemplo 12-1 Diseño de un elemento a flexión en un pórtico especial resistente a momento

La viga mostrada en la figura 12-20a y b es una viga típica de entrepiso en un pórtico especial resistente a momento de un edificio de oficinas. La viga soporta una carga muerta uniforme no factorizada de 4.0 kips/ft y una carga viva uniforme no factorizada de 2 kips/ft. Las resistencias del concreto de peso normal y el acero de refuerzo son 4000 psi y 60,000 psi respectivamente. Diseñe el refuerzo.

Solución:

❶ Selección del nivel de diseño sísmico. Los cálculos de fuerza sísmica no se presentan en detalle. Se escoge arbitrariamente $S_{DS} = 0.30g$

❷ Cálculo de las combinaciones de cargas factorizadas según la norma ACI. La sección 9.2.1 de la norma [ACI 318-08](#) presenta siete combinaciones de carga para el diseño estructural de edificios. Dos de estas aplican específicamente para cargas sísmicas. Con frecuencia, la primera selección del refuerzo de la viga se hace utilizando las combinaciones de carga no sísmica de la sección 9.2.1, porque la viga debe ser capaz de resistir cargas normales mientras espera el terremoto. Después de esto, los requisitos de detallado sísmico del capítulo 21 de la norma ACI será usado para escoger el acero de las regiones en donde se formaran rotulas plásticas ante cargas sísmicas. Sustituyendo el factor de carga viva 0.5 de la sección 9.2.1(a) en la ecuaciones (9-3) y (9-5) y reemplazando E en las ecuaciones (9-5) y (9-7) con la ecuación (12-4), y mediante sustitución similar en las otras combinaciones de carga, las cargas factorizadas se pueden calcular según:

1. LC 9-1 $U = 1.4 \times 4.0 = 5.60$ kips/ft ACI (9-1)
2. LC 9-2 $U = 1.2 \times 4.0 + 1.6 \times 2.0 = 8.0$ kips/ft ACI (9-2)

$$3. \text{ LC 9-3 } U = 1.2 \times 4.0 + 0.5 \times 2.0 = 5.8 \text{ kips/ft} \quad \text{ACI (9-3)}$$

Combinaciones de carga sísmica

$$5. \text{ LC 9-5 } U = 1.2D + 1.0E + 0.5L + 0.2S \quad \text{ACI (9-5)}$$

$$7. \text{ LC 9-7 } U = 0.9D + 1.0E + 1.6H \quad \text{ACI (9-7)}$$

Tomando S y H iguales a cero y sustituyendo la ecuación (12-4) en las combinaciones con cargas E se tiene

$$5. \text{ LC 9-5 } U = 1.2D + 1.0(Q_E) + 1.0(0.2S_{DS}D) + 0.5L$$

$$7. \text{ LC 9-7 } U = 0.9D + 1.0(Q_E) + 1.0(0.2S_{DS}D)$$

donde Q_E es la componente horizontal de E y $0.2S_{DS}D$ es la componente vertical. La componente horizontal será incluida en las fuerzas laterales cuando el sistema resistente a fuerzas laterales sea analizado. El componente vertical será adicionado a las demás cargas verticales de la viga de entrepiso. Por tanto se tiene

$$5. \text{ LC 9-5 } U = 1.2 \times 4.0 + 1.0(0.2 \times 0.3 \times 4.0) + 0.5 \times 2.0 = 6.04 \text{ kips/ft}$$

$$7. \text{ LC 9-7 } U = 0.9 \times 4.0 - 1.0(0.2 \times 0.3 \times 4.0) = 3.36 \text{ kips/ft}$$

Las combinaciones 9-6 y 9-7 de ACI aplican en casos en donde la carga muerta estabiliza una estructura con sollicitación lateral de viento o de sismo que puedan causar volcamiento. Este no es normalmente el problema en el diseño de vigas, y las combinaciones de carga 9-6 y 9-7 normalmente no se aplicarían. Casos en los que estas dos combinaciones de carga pueden aplicar incluyen el de una viga con voladizo, donde la reacción en el extremo que no está en voladizo que ancla el momento de la extensión en voladizo puede cambiar el signo de hacia arriba en el extremo de la viga a hacia abajo (resistiendo el levantamiento).

Las cargas uniformes máximas factorizadas sobre la viga que se está diseñando son

$$2. \text{ LC 9-2: } w_u = 8.0 \text{ kips/ft}$$

$$5. \text{ LC 9-5: } w_u = 6.04 \text{ kips/ft}$$

La carga vertical más grande es $w_u = 8.0$ kips/ft.

3 ¿Satisface la viga la definición de elemento en flexión? La sección 21.5.1 de la norma ACI pide que los elementos en flexión tengan

- (i) una fuerza factorizada de compresión menor que $0.1A_g f'_c$. No hay carga axial—OK
- (ii) un vano no menor que cuatro veces el peralte efectivo, $\ell_n/d = 22 \times 12/21.5 = 12.3$ —OK.
- (iii) un ancho
 - a. no menor que 10 in.—OK.
 - b. no mayor que el ancho de la columna—OK.

Por tanto, la viga satisface los requisitos exigidos. Si no los cumpliera, habría sido necesario cambiar sus dimensiones.

4 **Cálculo de los momentos de diseño.** Para todas las secciones, la viga debe tener $\phi M_u \geq M_u$, en donde M_u es el momento debido a las cargas gravitacionales factorizadas más el componente vertical de las cargas sísmicas. Se usará la sección 8.3.3 de la norma

ACI para calcular los momentos debidos a carga gravitacional en secciones criticas de un vano extremo para momentos negativos y positivos máximos. Normalmente, esto sería parte del análisis del pórtico.

Momento negativo exterior debido a carga gravitacional para LC 9-2:

$$M_u = \frac{w_u \ell_n^2}{16} = \frac{8.0 \times 22^2}{16} = -242 \text{ kip-ft}$$

Momento positivo central debido a carga gravitacional para LC 9-2: $M_u = 277 \text{ kip-ft}$

Momento negativo interior debido a carga gravitacional para LC 9-2: $M_u = -387 \text{ kip-ft}$

El refuerzo escogido para cada sección transversal, el momento último, y las resistencias de momentos nominal y probable se muestran en la Tabla 12-3. A las diferentes secciones se les asigna un número de caso indicado en la primera columna de la tabla.

5 Cálculo del acero requerido para flexión.

Caso 1, Tabla 12-3—Apoyo interior, momento negativo, deriva hacia la derecha.

Suponiendo acción de viga rectangular, se calcula el refuerzo requerido para

$M_u = -387 \text{ kip-ft}$. Suponer una capa de refuerzo, $d = 24 - 2.5 = 21.5 \text{ in.}$ Se ignora el refuerzo de compresión (si lo hubiera).

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y j d}$$

Suponer que $j = 0.90$ y $\phi = 0.90$. Por tanto

$$A_s = \frac{387 \times 12}{0.9 \times 60 \times 0.9 \times 21.5} = 4.44 \text{ in.}^2$$

Para una primera estimación, tomar seis barras No. 8, $A_s = 4.74 \text{ in.}^2$ Estas cabrán en una capa. La sección 21.7.2.3 de la norma ACI pide que los tamaños de las barras se limiten para que el ancho o el peralte de la columna paralelo a las barras sean al menos $20d_b$. Las columnas son cuadradas de 24 in. Esto hace que el diámetro máximo de barra sea $24/20 = 1.2 \text{ in.}$ Por tanto, las barras No. 9 son las más grandes que pueden ser usadas, y las barras No. 8 están bien.

Caso	Ubicación	Dirección de deriva	M_u kip-ft	Refuerzo	A_s in. ²	ϕM_n kip-ft	M_{pr} kip-ft
1.	M negativo extremo interno	Derecha	-387	4 No. 8 más 2 No. 7	4.36	390	531 cw
2.	M negativo extremo externo	Izquierda	-242	3 No. 7 más 2 No. 6	2.68	247	339 ccw
3.	M positivo extremo externo	Derecha	+124	3 No. 7	1.80	169	233 cw
4.	M positivo extremo interno	Izquierda	+195	3 No. 7 más 1 No. 6	2.24	208	286 ccw
5.	M positivo centro	Cualquiera	+277	4 No. 7 más 2 No. 6	3.28	300	n.d.

Nota: "cw" y "ccw" significan "dirección horaria" y "dirección antihoraria," respectivamente.

Sin embargo, la resistencia de momento de una viga con seis barras No. 8 es 12 por ciento más alta de lo necesario. Por tanto, se tiene

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{4.74 \times 60}{0.85 \times 4 \times 24} = 3.49 \text{ in.}$$

$$\phi M_n = \phi A_s f_y (d - a/2)$$

$$\phi M_n = 0.9 \times 4.74 \times 60 (21.5 - 3.49/2) = 5060 \text{ kip-in} = 421 \text{ kip-ft}$$

Usar cuatro barras No. 8 más dos barras No. 7, $A_s = 4.36 \text{ in.}^2$ Estas barras dan $\phi M_n = 390 \text{ kip-ft}$, lo cual satisface $M_u = -387 \text{ kip-ft}$.

Sección 21.5.2.1 de la norma ACI

Revisar si $A_s \geq A_{s,min}$.

$$A_{s,min} = \frac{3\sqrt{f'_c}}{f_y} b_w d, \text{ pero no menor que } \frac{200b_w d}{f_y} \quad \text{ACI Ec. (10-3)}$$

$$A_{s,min} = 1.63 \text{ in.}^2, \text{ pero } \geq 1.72 \text{ in.}^2 \rightarrow A_{s,min} = 1.72 \text{ in.}^2$$

$$A_s = 4.36 \text{ in.}^2 > A_{s,min} = 1.72 \text{ in.}^2 \text{—OK.}$$

$$\text{Revisión de si } \rho = \frac{4.36}{24 \times 21.5} = 0.0085 \leq 0.025 \text{—OK.}$$

Revisión de si la sección es controlada por tracción.

$$c = a/\beta_1 = 3.2/0.85 = 3.76 \text{ in.}$$

Como $c < 0.375d$, la sección es controlada por tracción y $\phi = 0.9$.

Caso 1—Apoyo interno, momento negativo. Usar cuatro barras No.8 más dos barras No. 7 arriba en el apoyo interno. $A_s = 4.36 \text{ in.}^2, \phi M_u = -390 \text{ kip-ft}$

Caso 2—Apoyo exterior, momento negativo. Del paso 4, $M_u = -242 \text{ kip-ft}$. Este momento es requerido para soportar las cargas gravitacionales factorizadas cuando no hay terremoto. Usar tres barras No. 7 más dos barras No. 6,

$A_s = 2.68 \text{ in.}^2$, $\phi M_n = 247 \text{ kip-ft}$ —OK. En estas dos secciones, Casos 1 y 2, las cargas gravitacionales controlan la selección del acero. Para el resto del vano, se provee refuerzo longitudinal para satisfacer reglas de detallado de la sección 21.5.2 de la norma ACI.

Caso 3—Apoyo exterior, momento positivo. La sección 21.5.2.2 de la norma ACI exige que la resistencia a momento positivo en la cara del apoyo sea al menos 0.5 veces el ϕM_n para el acero de momento negativo en la cara del apoyo: $0.5 \times 247 = 124 \text{ kip-ft}$.

Diseñar para 124 kip-ft. **Usar tres barras No. 7**, $A_s = 1.80 \text{ in.}^2$, $a = 1.32 \text{ in.}$, y

$\phi M_n = 169 \text{ kip-ft}$. Del paso 4, el A_s mínimo era 1.72 in.^2 . Se limitará el acero de flexión a $A_s \geq 1.72 \text{ in.}^2$. Como resultado, no es posible usar menos que tres barras No. 7.

Caso 4—Apoyo interior, momento positivo. La sección 21.5.2.2 requiere que la resistencia a momento positivo en la cara de la junta no sea menos que 0.5 veces la resistencia de momento negativo ϕM_n provista por el refuerzo para momento negativo en la cara de la misma junta. Por tanto, la resistencia mínima de momento positivo exigida por la sección 21.5.2.2 de ACI es $0.5 \times 390 = 195 \text{ kip-ft}$. Diseñar el apoyo interior para un momento positivo de $\phi M_n = 195 \text{ kip-ft}$. **Usar tres barras No. 7 más una barra No.6, con la barra No. 6 cortada como se muestra en la figura 12-20a.** Antes de cortar, $A_s = 2.24 \text{ in.}^2$, y $\phi M_n = 208 \text{ kip-ft}$

Caso 5—Centro, momento positivo: Del paso 4, el momento positivo máximo en el centro es 277 kip-ft. Usar cuatro barras No. 7 más dos barras No. 6, $A_s = 3.28 \text{ in.}^2$,

$\phi M_n = 300 \text{ kip-ft}$;

A_s satisface los mínimos. La deformación unitaria extrema de tracción, ϵ_t , excede 0.005, por tanto la viga es controlada por tracción y ϕ puede ser tomado como 0.9.

Resistencias mínimas de momentos positivo y negativo: La sección 21.5.2.2 de la norma ACI exige que las resistencias mínimas de momentos positivo y negativo en cualquier sección de la viga no debe ser menor que 0.25 veces la resistencia máxima de momento negativo provista en cada junta: $0.25 \times 390 \text{ kip-ft} = 97.5 \text{ kip-ft}$. Dos barras No. 7 son adecuadas como acero mínimo.

El acero escogido para flexión y para cumplir con las disposiciones de detallado se muestra en la figura 12-20b.

⑥ **Cálculo de las resistencias de momento probable, M_{pr} .** Se calculan los cortantes sísmicos en la viga mediante la suposición de que se forman rotulas plásticas en cada extremo de la viga con el refuerzo esforzado a $1.25 f_y$ y $\phi = 1.0$.

Momentos para pórtico con deriva hacia la derecha (ver figura 12-21a)

Caso 1—Momento negativo probable extremo interior. Usar cuatro barras No. 8 más dos barras No. 7, y $A_s = 4.36 \text{ in.}^2$ de acero superior. La profundidad del bloque de esfuerzos, a , y el momento resistente, M_{pr} , para el acero superior, con $1.25 f_y$ y $\phi = 1.0$, son

$$a = \frac{(1.25 \times 60) \times 4.36}{0.85 \times 4 \times 24} = 4.01 \text{ in.}$$

$$M_{pr} = \frac{(1.25 \times 60) \times 4.36 \times (21.5 - 4.01/2)}{12} = 531 \text{ kip-ft}$$

(sentido horario en el extremo interior de la viga).

Caso 3—Momento positivo probable extremo exterior para acero inferior. Usar tres barras No. 7, $A_s = 1.80 \text{ in.}^2$. Por tanto

$$M_{pr} = \frac{(1.25 \times 60) \times 1.80 \left(21.5 - \frac{1.25 \times 60 \times 1.80}{1.7 \times 4 \times 24} \right)}{12} = 233 \text{ kip-ft}$$

(sentido horario en el extremo exterior de la viga).

Momentos para pórtico con deriva hacia la izquierda (ver figura 12-21c)

Caso 2—Momento negativo probable extremo exterior. Usar tres barras No. 7 más dos barras No. 6, y $A_s = 2.68 \text{ in.}^2$. El momento resistente probable es $M_{pr} = 339 \text{ kip-ft}$, sentido antihorario en el extremo exterior de la viga.

Caso 4—Momento positivo probable extremo interior. Usar tres barras No. 7 más una barra No. 6, y $A_s = 2.24 \text{ in.}^2$. El momento resistente probable es $M_{pr} = 286 \text{ kip-ft}$, sentido antihorario en el extremo interior de la viga.

7 Cálculo de la envolvente de fuerza cortante y diseño de los estribos. La figura 12-21a muestra los momentos y la carga uniforme para la combinación de carga 9-5 actuando sobre la viga para el pórtico con deriva hacia la derecha. Las reacciones consisten de dos partes:

Se desarrollan rótulas en ambos extremos de la viga, con momentos rotulantes en la región de momento negativo de $M_{pr} = 233 \text{ kip-ft}$ en el extremo exterior y 531 kip-ft en el extremo interior.

Reacciones debidas a cargas gravitacionales: $w_u \ell_n / 2 = 8.0 \times 22 / 2 = 88 \text{ kips}$ hacia arriba en cada extremo.

Reacciones debidas a M_{pr} en cada extremo, *pórtico moviéndose hacia la derecha*:

$$(M_{pr1} + M_{pr2}) / \ell_n = (233 + 531) / 22 = 34.7 \text{ kips} \downarrow \text{ en extremo izquierdo}$$

$$\text{Reacción total en extremo izquierdo} = 88 \text{ kips} \uparrow + 34.7 \text{ kips} \downarrow$$

$$= 53.3 \text{ kips} \uparrow \text{ en extremo izquierdo}$$

$$\text{Reacción total en extremo derecho} = 123 \text{ kips} \uparrow \text{ en extremo derecho}$$

El diagrama de fuerza cortante se presenta en la figura 19-21b.

Reacciones debidas a M_{pr} en cada extremo, *pórtico moviéndose hacia la izquierda*:

$$\begin{aligned} (M_{pr1} + M_{pr2})/\ell_n &= (339 + 286)/22 = 28.4 \text{ kips } \uparrow \text{ en extremo izquierdo} \\ &= 88\text{kips } \uparrow + 28.4\text{kips } \uparrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Reacción total en extremo izquierdo} &= 116\text{kips } \uparrow \text{ en extremo izquierdo} \\ &= 59.6\text{kips } \uparrow \text{ en extremo derecho} \end{aligned}$$

El diagrama de fuerza cortante se presenta en la figura 19-21d. Ambos diagramas son superimpuestos en la figura 19-21e para mostrar el cortante máximo en cada sección.

Estribos para cortante: El artículo 21.5.4.2 de la norma ACI establece que V_c deberá ser tomada igual a cero si

(a) el cortante V_{deriva} debido a plastificación en los dos extremos de la viga excede la mitad o más del cortante máximo; y

(b) la fuerza axial factorizada de compresión, incluyendo los efectos sísmicos, es menor que $A_g f'_c/20$.

De otra forma, V_c toma el valor regular $V_c = 2\lambda\sqrt{f'_c}b_w d$ —o los efectos de carga axial sobre V_c puede ser incluido usando la ecuación 11-4 de la norma ACI.

Las reacciones para cargas gravitacionales son 88 kips hacia arriba en ambos extremos de la viga, independientemente de la dirección de deriva. Para deriva hacia la derecha, mostrada en la figura 19-21a y b, el cortante debido a los momentos de deriva más las reacciones gravitacionales, suman 53.3 kips en A y 123 kips en B. $V_{\text{deriva}} = 34.7$ kips no excede la mitad de la resistencia máxima requerida de cortante en el tramo. Por tanto, V_c se toma en todas las secciones como el valor usual para vigas.

Extremo exterior: Cortante máximo $V_u = 116$ kips

12.8 Columnas en Pórticos Especiales

La sección 21.6 de la norma ACI aplica para columnas de pórticos resistentes a fuerzas sísmicas y con una carga axial mayor que $(A_g f'_c/10)$. Las columnas de pórticos en regiones de alta amenaza sísmica deben satisfacer dos restricciones geométricas: la dimensión mas pequeña a través del centroide de la columna debe ser al menos 12 in., y la razón dimensión menor entre dimensión mayor de la sección transversal no debe ser menor que 0.4. Estos límites aseguran una robustidad mínima y produce una sección transversal que puede ser confinada usando estribos cerrados de geometría práctica, contrario a lo que resultaría con columnas altamente rectangulares.

12.8.1 Capacidad requerida y refuerzo longitudinal

Es altamente recomendable que las rotulas plásticas se formen en las vigas y no en las columnas. Como la carga muerta debe ser transferida siempre hacia abajo a través de las

columnas, el daño a las columnas debe de tratar de minimizarse. La sección 21.6.2 de la norma ACI exige el uso de un diseño columna fuerte – viga débil. En caso de que esto no sea posible, si las columnas en cuestión añaden a la rigidez y a la resistencia de la edificación entonces se desprecian en el análisis estructural (i.e. se supone que han fallado). (Si la inclusión en el análisis de tales columnas tiene un efecto negativo sobre la rigidez o la resistencia, entonces deben ser incluidas en el análisis.)

Comportamiento de columna fuerte – viga débil se hace más factible con el requisito de que (ver figura 12-25)

$$\sum M_{nc} \geq (6/5) \sum M_{nb} \quad (12-16)$$

donde M_{nc} es la capacidad nominal a flexión de las columnas correspondientes a la combinación de carga sísmica factorizada conducente a la menor carga axial y por tanto a la menor resistencia a la flexión, y M_{nb} es la capacidad nominal a flexión de las vigas en esa junta.

Las columnas que no satisfacen la ecuación (12-16) deben tener refuerzo transversal satisfaciendo 21.6.4.2 de la norma ACI en toda su longitud.

El refuerzo longitudinal se diseña para cargas axiales y momentos de la misma manera que para las columnas no sísmicas. Puede variar desde $\rho = 0.01$ a 0.06 . Generalmente es difícil colocar y empalmar más de 2 o 3 por ciento de refuerzo en una columna.

Como el recubrimiento probablemente se desprenda en regiones de rotulación plástica, que se formarán cerca de los extremos de la columna, las barras longitudinales que deban empalmarse por traslapeo deben ser empalmadas en la porción central de la altura de la columna. Tales empalmes deben ser diseñados como empalmes de tracción, debido a que los momentos alternantes ocasionados por las cargas cíclicas alternativamente someten a esfuerzos de tracción y de compresión ambas caras de la columna. Mas aun, frecuentemente hay una posibilidad de fuerzas de levantamiento. La considerable longitud requerida para un empalme por traslapeo de tracción puede requerir el uso de barras de menor diámetro o bien de empalmes mecánicos.

12.8.2 Refuerzo transversal

REFUERZO DE CONFINAMIENTO

Refuerzo transversal en la forma de espirales o estribos cerrados debe ser provisto en una longitud ℓ_o desde cada extremo de la columna para confinar el concreto y prevenir que las barras longitudinales se pandeen. La longitud ℓ_o es el mayor de (Sección 21.6.4.1 de la norma ACI)

- (a) el peralte de la columna, h en la cara de la junta
- (b) un sexto de la altura de la columna, y
- (c) 18 in.

La sección 2.16.4.3 de la norma ACI exige que dentro de la longitud ℓ_o el espaciamiento del refuerzo transversal no exceda

- (a) un cuarto de la dimensión mínima, b o h , de la sección transversal de la columna;
- (b) seis veces el diámetro de la barra longitudinal; y
- (c) la distancia

$$s_o = 4 + \left(\frac{14 - h_x}{3} \right) \quad (12-17)$$

donde h_x = espaciamiento horizontal máximo entre estribo cerrado de confinamiento o extremos de gancho suplementario en todas las caras de la columna (figura 12-14b), pero no menor que 4 in. ni mayor que 6 in. El refuerzo transversal también sirve como refuerzo de cortante y debe cumplir con los espaciamientos mínimos para esos estribos.

Si se usa refuerzo helicoidal, este es diseñado de acuerdo a lo descrito en la sección 9-5 mediante el uso de la ecuación ACI (10-5). Un límite inferior adicional en la razón de refuerzo helicoidal es dado por la ecuación ACI (21-3). Este regirá si A_g/A_c es menor que 1.27, lo cual, para un recubrimiento de 1 ½ in., ocurrirá para columnas mayores que 24 in. de diámetro.

Debido a que la presión lateral sobre los estribos cerrados causa deflexión hacia afuera, los estribos cerrados son menos eficientes en el confinamiento del núcleo de concreto que el refuerzo helicoidal (figura 12-14a). La ecuación para el area requerida de estribos cerrados, ecuación ACI (21-4), se basó en la ecuación para refuerzo helicoidal, ecuación ACI (10-5), pero la constante fue seleccionada para dar estribos cerrados con aproximadamente un tercio más de área de sección transversal que lo requerido para refuerzo helicoidal; esto es,

$$A_{sh} = 0.3 \frac{s b_c f'_c}{f_{yt}} \left(\frac{A_g}{A_{ch}} - 1 \right) \quad (12-18)$$

pero no menor que

$$A_{sh} = 0.09 \frac{s b_c f_c'}{f_{yt}} \tag{12-19}$$

donde

A_{ch} = área de sección transversal del núcleo de la columna medido desde la parte externa de los estribos

A_g = área bruta de la sección

A_{sh} = área total de la sección transversal de todos los brazos de los estribos cerrados y ganchos complementarios dentro de un espaciamiento s y perpendicular a la dimensión h_c (figura 12-14c)

b_c = dimensión de la sección transversal del núcleo de concreto, medido centro a centro de los brazos externos de los estribos cerrados

s = espaciamiento de los estribos medido paralelo al eje de la columna

A_{sh} se revisa separadamente para cada dirección.

La figura 12-14 muestra disposiciones típicas de estribos cerrados para una columna. La distancia máxima entre los brazos de estribos cerrados o ganchos complementarios en el plano de la sección transversal es 14 in. Los estribos cerrados deben satisfacer también la sección 7.10.5.3 de la norma ACI, la cual dispone que todas las barras esquineras y las barras laterales alternas estén enlazadas por un estribo o por un gancho suplementario.

Las columnas que soportan muros de cortante discontinuos son extremadamente susceptibles al daño sísmico. La sección 21.6.4.6 dispone que las columnas cuenten con estribos cerrados o refuerzo espiral a lo largo de toda la altura de tales elementos. Estos estribos cerrados deben extenderse dentro del muro desde la cara de la columna y la zapata u otros elementos bajo la columna.

REFUERZO DE CORTANTE

El refuerzo transversal también debe ser diseñado para cortante. La fuerza de diseño de cortante V_{sway} se calcula suponiendo acción inelástica ya sea en las columnas o en las vigas.

- (a) El cortante correspondiente a las rótulas plásticas en cada extremo de la columna dado por

$$V_{sway} = \frac{M_{prc, arriba} + M_{prc, abajo}}{\ell_u}$$

donde $M_{prc, arriba}$ y $M_{prc, abajo}$ son las capacidades probables de momento arriba y debajo de la columna y ℓ_u es la altura libre de la columna. Estos son obtenidos de un diagrama de interacción para la resistencia probable, $P_n - M_{pr}$ de la columna, para el rango de cargas factorizadas en el elemento para la combinación de cargas bajo consideración.

- (b) No debe ser menor que

$$V_{sway} = \frac{\sum M_{prb, arriba} DF_{arriba} + \sum M_{prb, abajo} DF_{abajo}}{\ell_u}$$

donde $\sum M_{prb, arriba}$ y $\sum M_{prb, abajo}$ son la suma de las capacidades probables de momento de las vigas que llegan a la junta en la parte superior e inferior de la

columna para una deriva hacia la izquierda o hacia la derecha, y DF_{arriba} y DF_{abajo} son los factores de distribución de momentos arriba y debajo de la columna que esta siendo diseñada. Esto refleja la filosofía de columna fuerte – viga débil y la ecuación (12-16), que hace a las vigas más débiles que las columnas.

(c) pero no menor que el cortante factorizado proveniente de un análisis de pórtico.

El refuerzo transversal es diseñado para cortante de acuerdo con la sección 11.1.1 de la norma ACI, y V_c puede ser incrementado para permitir el efecto de las cargas axiales, excepto que, dentro de la longitud ℓ_o definida en la discusión sobre refuerzo de confinamiento, V_c debe ser tomado igual a cero cuando la fuerza de cortante inducida por sismo representa la mitad o más de la fuerza máxima de cortante en los tramos ℓ_o y si la fuerza de compresión factorizada es menor que $A_g f'_c / 20$ (Sección 21.6.5.2 de la norma ACI). Columnas con carga axial tan baja se comportan esencialmente como una viga. Por tanto, la contribución del concreto a la capacidad de cortante, V_c , se toma igual a cero en zonas de potencial rotulación plástica en los extremos de una columna, tal como fue hecho para zonas de rotulación plástica en los extremos de las vigas.

Se debe notar que, aun cuando la carga axial incrementa V_c , también incrementa la tasa de degradación de cortante. Por esta razón, puede ser prudente ignorar V_c cuando una porción grande del cortante proviene de las cargas sísmicas.

Ejemplo 12-2 Diseño de una Columna

La columna que da apoyo al extremo interior de la viga diseñada en el Ejemplo 12-1 es de cuadrada de 24 in. y construida con concreto normal de 4000 psi y acero de 60,000 psi. La altura de entrepisos es de 12 ft, con vigas de 24 in. de peralte en cada piso, dando una luz libre de 10 ft. El tamaño de la columna y la altura de entrepisos son los mismos para los pisos superior e inferior a la columna que se está diseñando. Los momentos, cortantes y cargas axiales no factorizados provenientes de un análisis elástico para cargas sísmicas se presentan en la Tabla 12-4. Diseñe el refuerzo de la columna. Use los factores de carga de las secciones 9.2.1 y 9.2.1(a) de la norma ACI, excepto que no se considerarán cargas de viento (W), cargas de fluido (F), cargas de empuje de suelo (H), cargas de techo (L_r o S o R) ni cargas provenientes de deformaciones restringidas (T).

Solución:

12.9 Juntas de Unión en Pórticos Especiales

El flujo de fuerzas dentro de una junta viga – columna y el diseño de tales juntas ha sido discutido en la sección 10-12, y un ejemplo de diseño de una junta exterior no sísmica se presenta en el Ejemplo 10-7. Las disposiciones de la norma para juntas pórticos especiales resistentes a momento (SMF) se presentan en la sección 21.7 de la norma ACI. El reporte del Comité ACI 352 presenta un tratamiento más profundo de las recomendaciones de diseño para conexiones viga – columna.

La sección 21.7.2.1 requiere que las fuerzas en la junta sean calculadas tomando el esfuerzo en el refuerzo de flexión en vigas como $1.25 f_y$. Esto es análogo a usar la resistencia probable en los cálculos de cortante en columnas y vigas en pórticos especiales resistentes a momento.

La sección 21.7.2.3 limita el diámetro del refuerzo longitudinal de la viga que pasa a través de una junta a $1/20$ del ancho de la junta paralelo a las barras de la viga. Cuando se forman rótulas en las vigas, el refuerzo de la viga es llevado a esfuerzo de fluencia real en un lado de la junta y es esforzado en compresión en el otro lado. Esto resulta en esfuerzos de adherencia muy altos en la junta, posiblemente conducentes a deslizamiento de la barra en la junta. La longitud mínima adherida para tal barra en una junta es entonces $20d_b$, lo cual es considerablemente menos que lo requerido por las ecuaciones de longitud de desarrollo del capítulo 12 de la norma ACI. La longitud adherida mínima fue seleccionada de resultados de pruebas de juntas sometidos a cargas cíclicas para limitar, pero no para eliminar enteramente el deslizamiento de la viga de la barra en la junta.

El comité 352 de ACI usa el mismo límite para el diámetro de barras de columna que pasan a través de una junta de viga-columna (i.e., el diámetro de la barra de la columna no debe exceder $1/20$ de la profundidad global de la viga de menos peralte que llega a la junta). Aun cuando esta recomendación de diseño no ha sido adoptada por el comité de la norma ACI, basado en resultados de investigación, se recomienda que los diseñadores intenten satisfacer este límite cuando se seleccione el tamaño de las barras de columna.

La sección 21.7.3.1 de la norma ACI requiere estribos cerrados de confinamiento enlazando el refuerzo longitudinal de columna en todas las juntas en pórticos especiales resistentes a momento. En juntas confinadas por vigas en los cuatro lados que satisfacen la sección 21.7.3.2, la cantidad de refuerzo de confinamiento es reducida, y su espaciamiento es menos restrictivo dentro de la altura de la viga de menor peralte que entra en la junta.

La sección 21.7.4.1 da límites superiores a la resistencia de cortante de las juntas. Como se indica en la 10-12, estos son menores que las resistencias de cortante de la junta recomendados en juntas no sísmicas. Esto refleja el daño posible a las juntas que resulta de cargas cíclicas.

La sección 21.7.5 da longitudes de desarrollo especiales para ganchos y barras rectas en juntas. Estas son mas cortas que la longitud de desarrollo dadas en el capítulo 12 de la norma ACI debido a que los efectos del confinamiento de la junta mediante estribos cerrados ya ha sido incluido.

12.10 Diafragmas Estructurales

12.11 Muros Estructurales

12.12 Elementos de Pórticos no Diseñados para Resistir Fuerzas Inducidas por Movimientos Sísmicos

La Sección 21.13 de la norma **ACI 318-08** provee disposiciones menos rigurosas para elementos que no forman parte del sistema resistente a fuerzas laterales sujeto a sismos severos. Tales elementos deben poder resistir las fuerzas axiales factorizadas debidas cargas gravitacionales y los momentos y cortantes inducidos cuando el pórtico es deflectado lateralmente hasta el doble de las deflexiones laterales elásticas calculadas bajo cargas laterales factorizadas. Tradicionalmente, el sistema pórtico espacial definido en la tabla 12-1 era diseñado suponiendo que los elementos de pórtico resistían únicamente cargas gravitacionales, mientras que muros de cortante resistían todas las cargas laterales. Durante el terremoto de Northridge en 1994, las columnas de un numero de edificaciones como de este tipo colapsaron cuando se vieron sujetas a los desplazamientos impuestos por el terremoto. La Sección 21.13 emitida posterior a este evento se tornó considerablemente más estricta.

12.13 Estructuras Prefabricadas Especiales

Desde 2002, el Capítulo 21 de la norma **ACI 318-08** ha incluido disposiciones para diseño sísmico de elementos de pórtico y muros estructurales prefabricados. Las disposiciones para pórticos especiales construidos con piezas prefabricadas se presentan en la sección 21.8 de la norma. Esta sección le da al diseñador la opción de usar conexiones dúctiles (Sección 21.8.2) o conexiones fuertes (Sección 21.8.3) entre los elementos prefabricados. La primera opción supone que al menos una parte del comportamiento inelástico durante la respuesta estructural global ante movimientos sísmicos fuertes ocurrirá en las conexiones entre elementos prefabricados. La segunda opción supone que las conexiones permanecerán elásticas y que las zonas de rotulas plásticas ocurrirán en otros puntos de los elementos prefabricados. Basado en las resistencias probables de los elementos en los puntos de ubicación de las rótulas plásticas, se puede usar un procedimiento de diseño basado en capacidad para determinar la resistencia requerida para las conexiones entre elementos prefabricados.

Los muros estructurales prefabricados deben satisfacer todas las disposiciones de diseño para muros estructurales colados en sitio dadas en la Sección 21.9 y presentadas arriba en el aparte 12-11. También se permite el uso de muros estructurales prefabricados intermedios con la salvedad de que deben cumplir con las disposiciones de la Sección 21.4 de la norma **ACI 318-08**.

12.14 Cimentaciones

La Sección 21.12 de la norma **ACI 318-08** considera las cimentaciones para estructuras sismorresistentes, incluyendo zapatas, losas de fundación, cabezales de pilotes, y cajones (caissons). El principal énfasis es en la resistencia al extracción del refuerzo que se extiende desde la estructura hasta los cimientos. Se prescribe refuerzo mínimo de confinamiento y de cortante en pilotes, pilas y cajones.

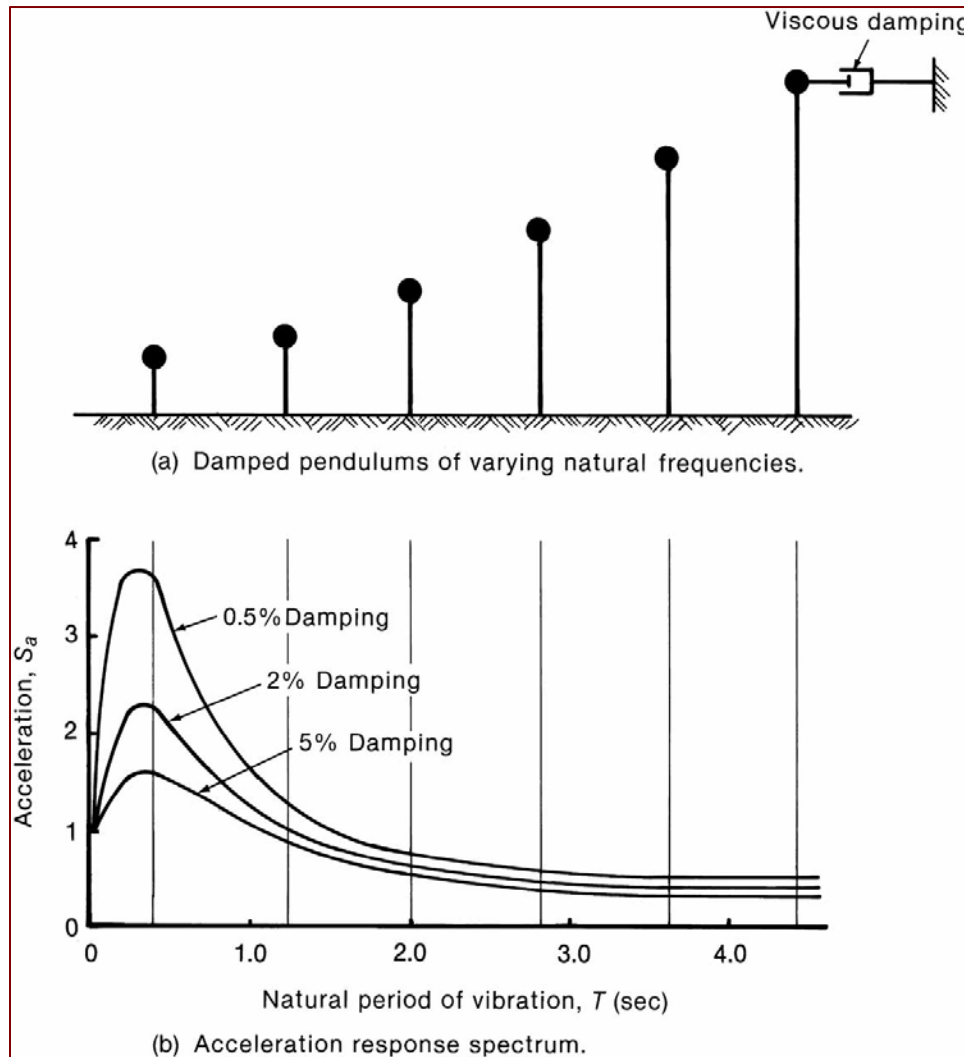


Figura 12-1

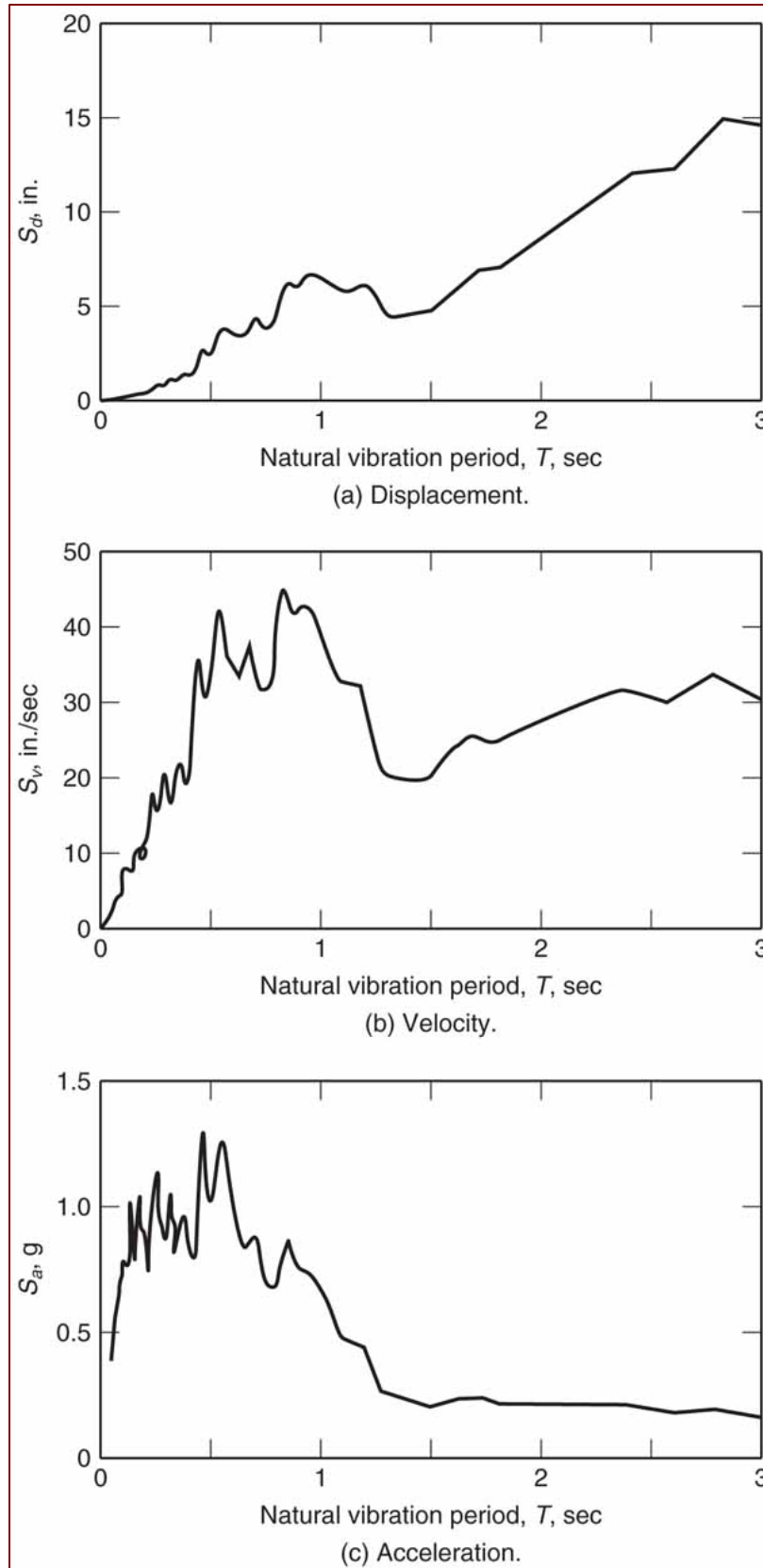


Figura 12-2

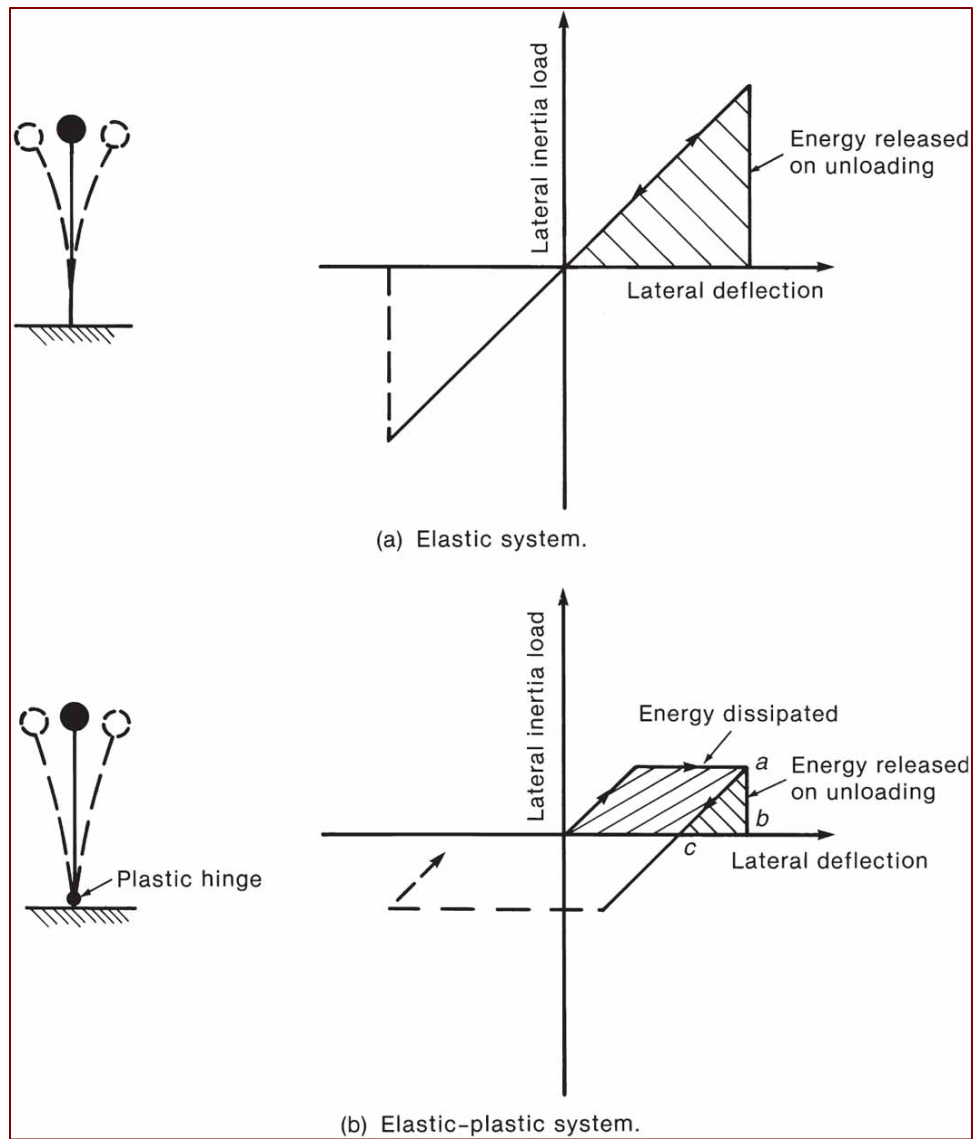


Figura 12-3 Energía en péndulos en vibración. (Tomado de Park, R. & Paulay, T., Reinforced Concrete Structures, 1975.)

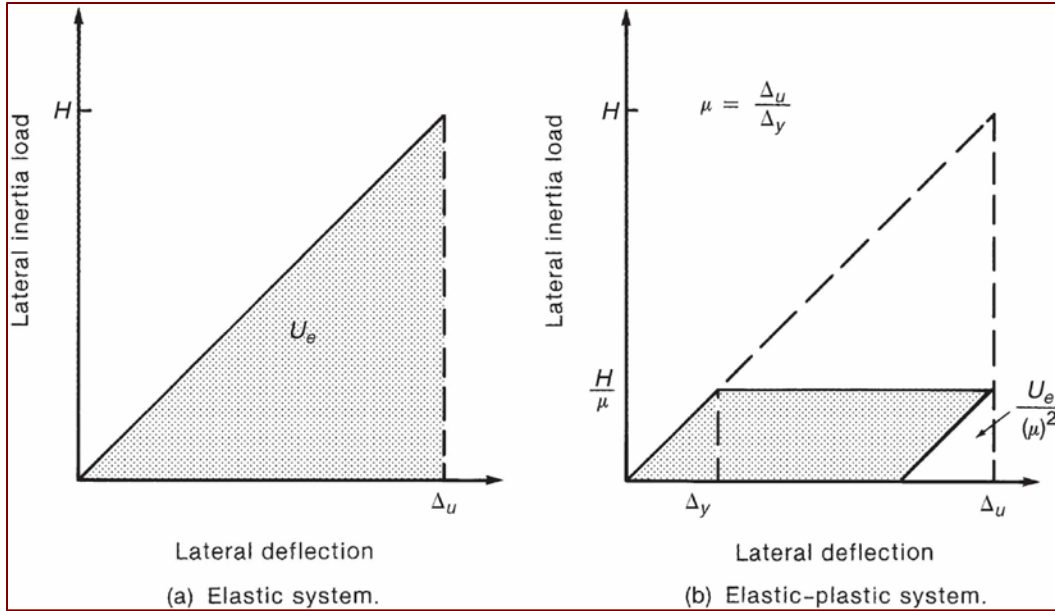


Figura 12-4 Efecto de la razón de ductilidad, μ , sobre fuerza lateral y energía de deformación unitaria en estructuras deflectadas un mismo Δ_u . (Tomado de Park, R. & Paulay, T., Reinforced Concrete Structures, 1975.)

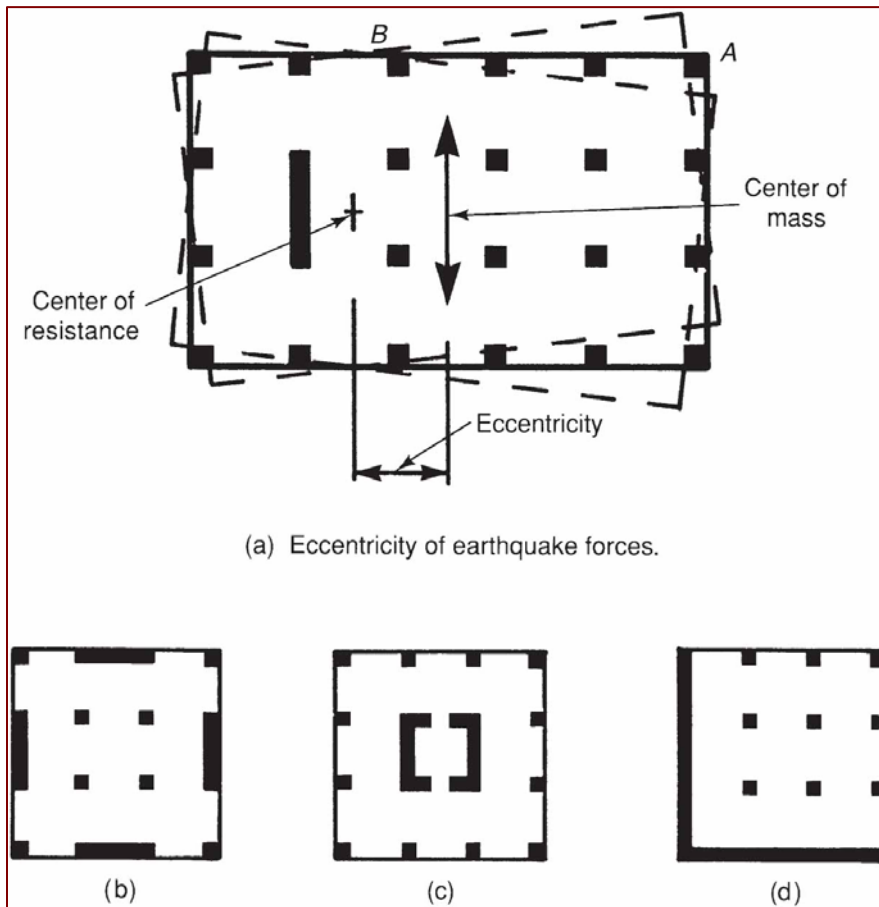


Figura 12-5 Excentricidades y deformaciones torsionales.

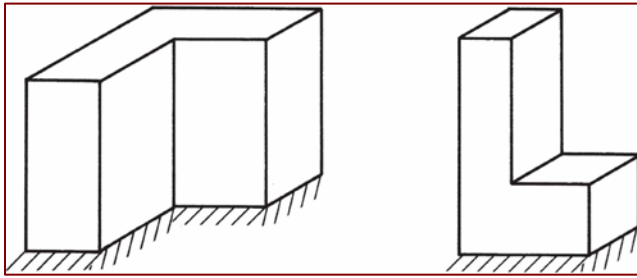


Figura 12-6 Irregularidades geométricas.

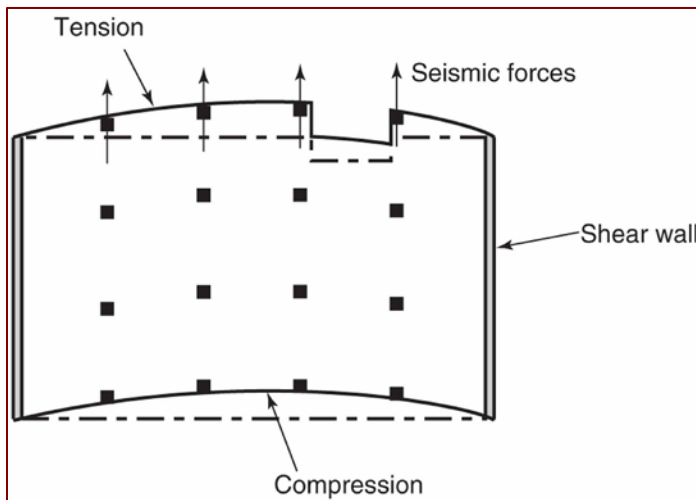


Figura 12-7 Discontinuidades de diafragmas.

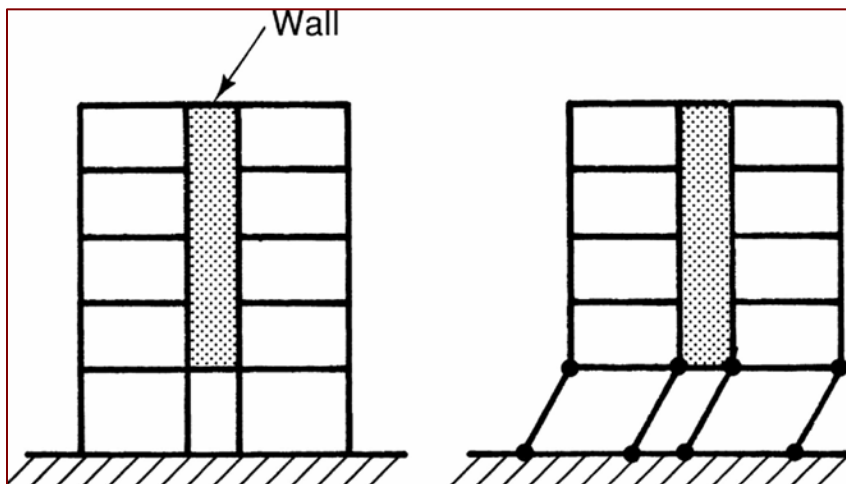


Figura 12-8 Piso blando debido a muros de corte discontinuos.

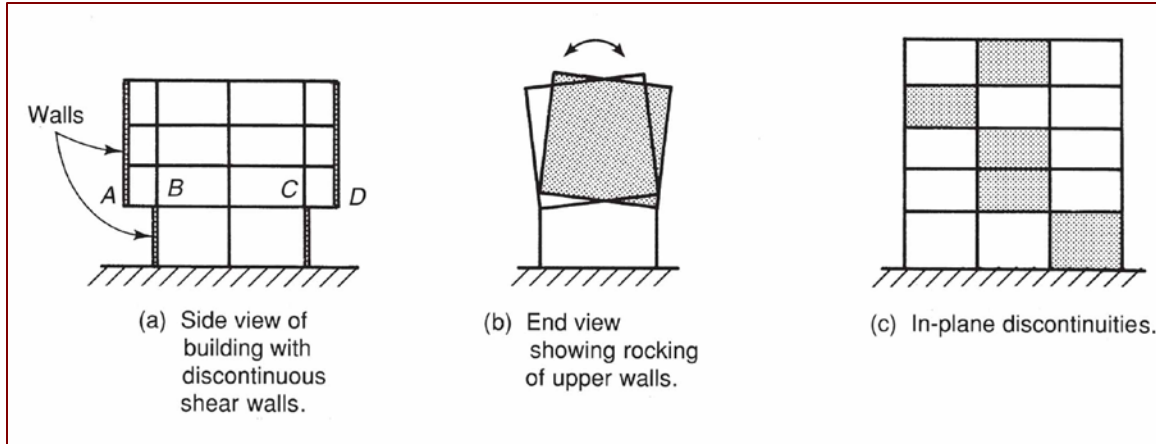


Figura 12-9 Muros de corte discontinuos.

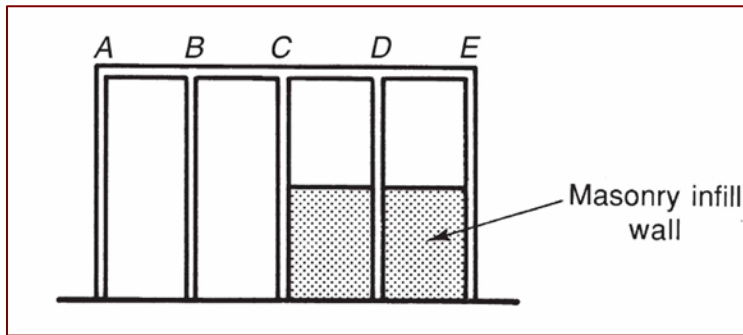


Figura 12-10 Diferencias en rigideces de columnas.

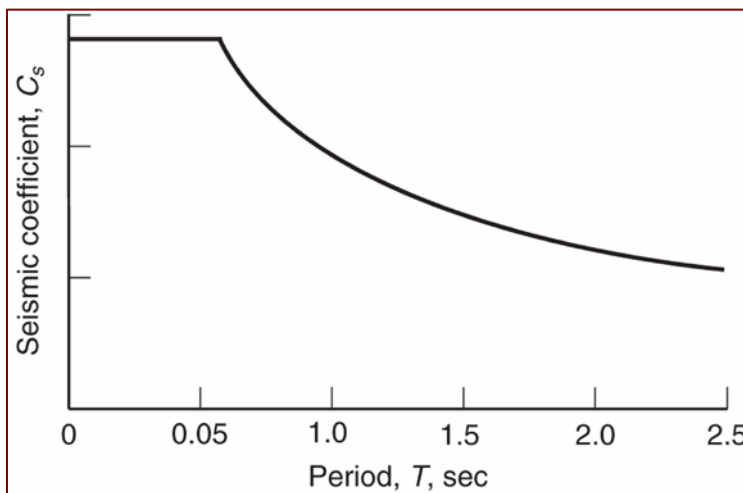


Figura 12-11 Variación del coeficiente de respuesta sísmica, C_s , versus período, T .

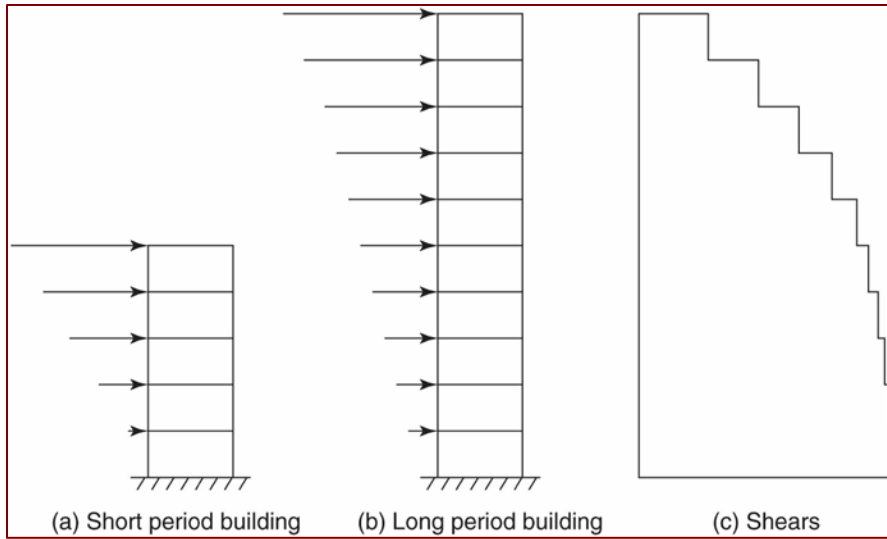


Figura 12–12 Distribución de fuerzas laterales equivalentes y cortantes.

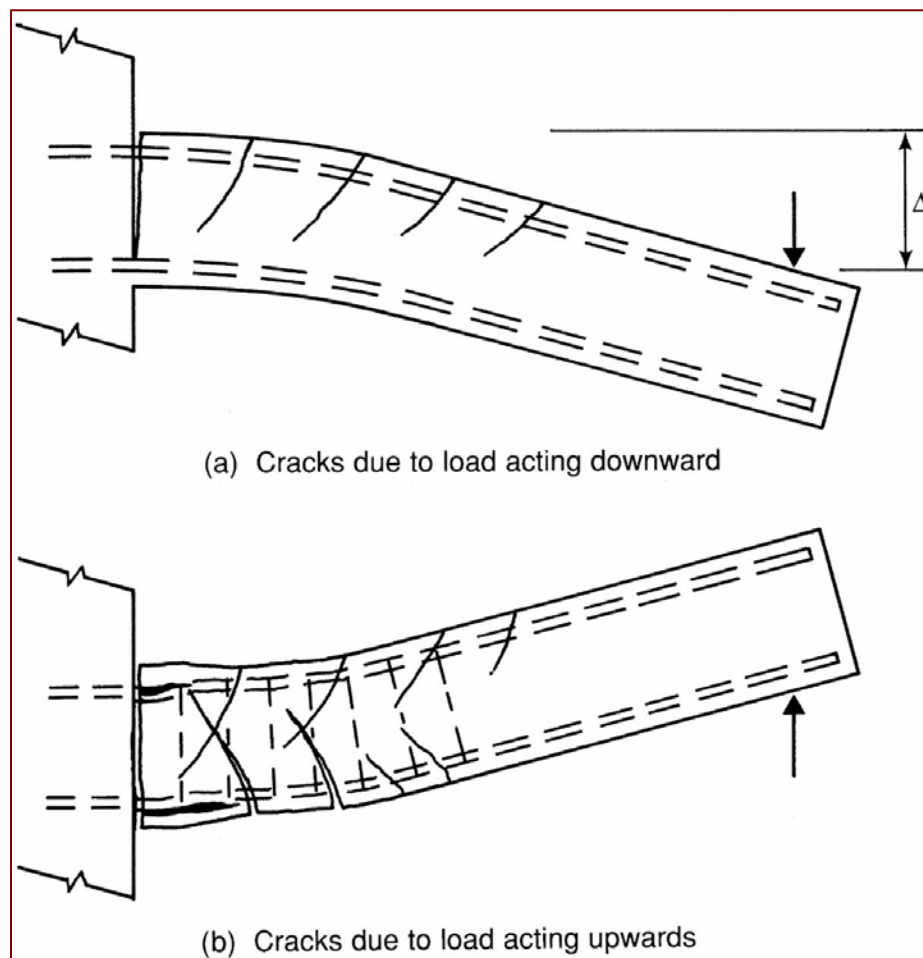


Figura 12–13 Viga sujeta a cargas cíclicas.

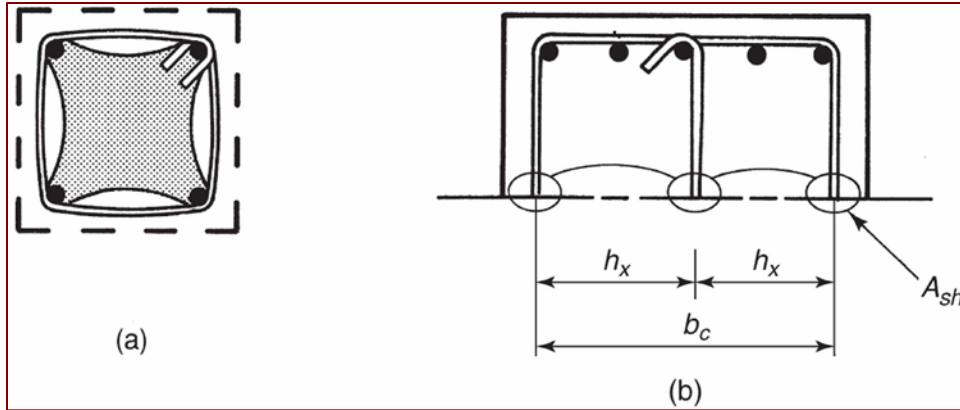


Figura 12–14 Confinamiento con estribos cerrados.

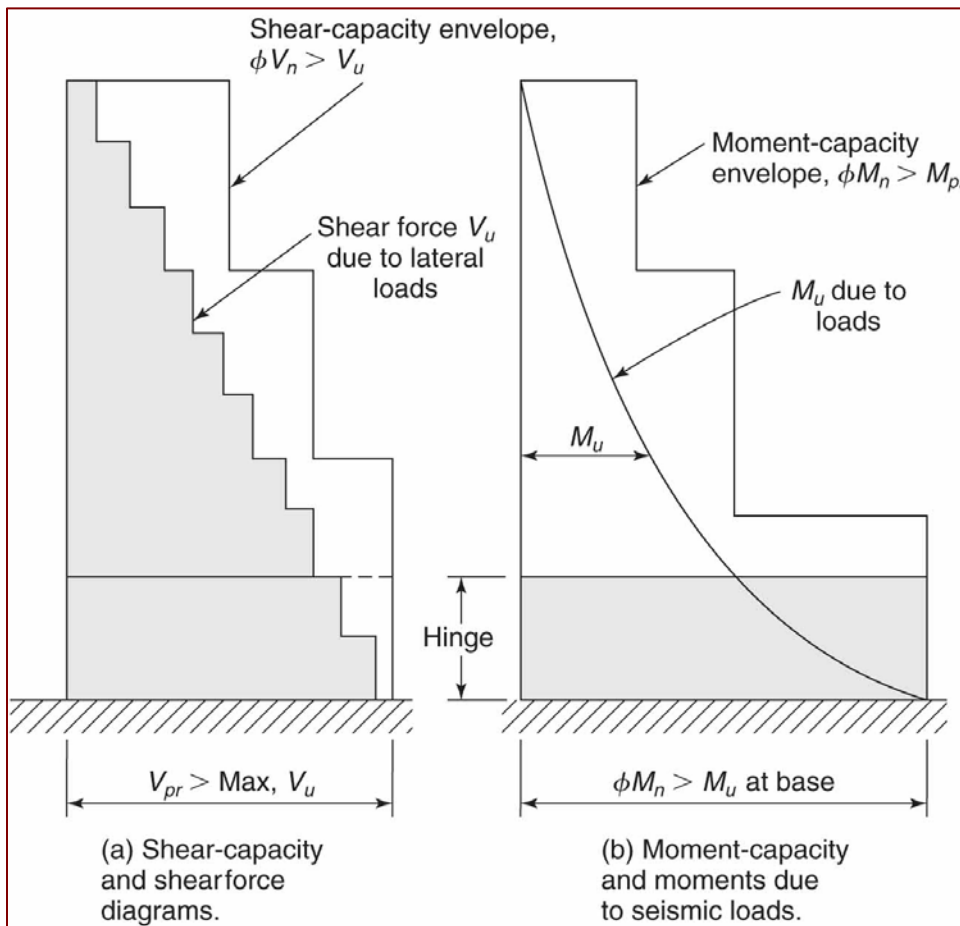


Figura 12–15 Diseño por capacidad de un muro de corte.

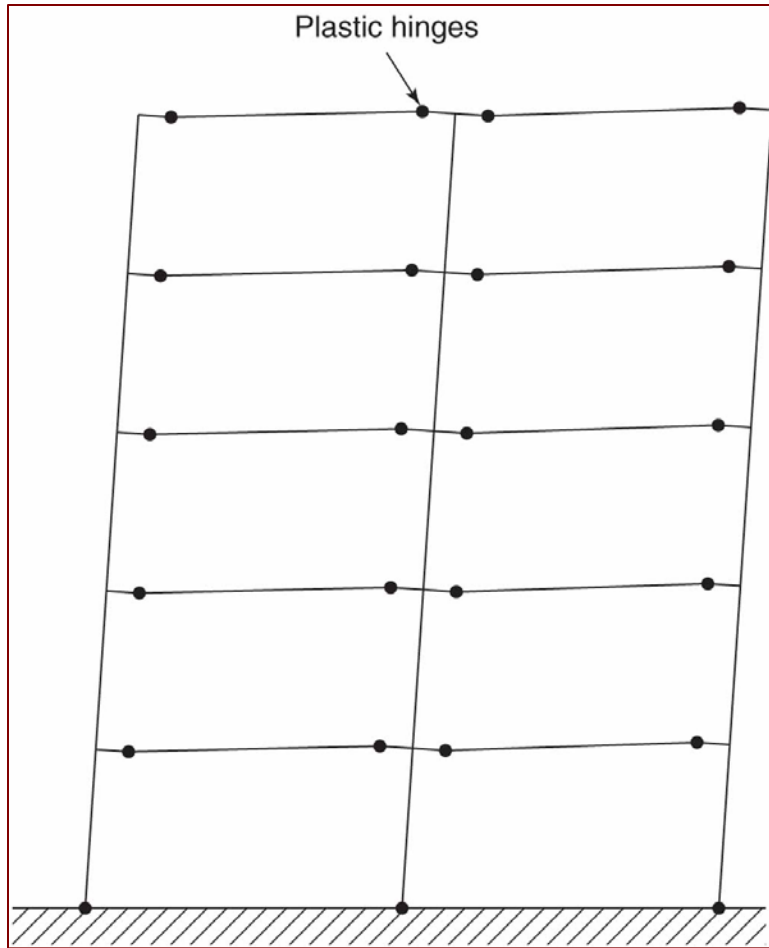


Figura 12-16 Comportamiento de columna fuerte – viga débil.

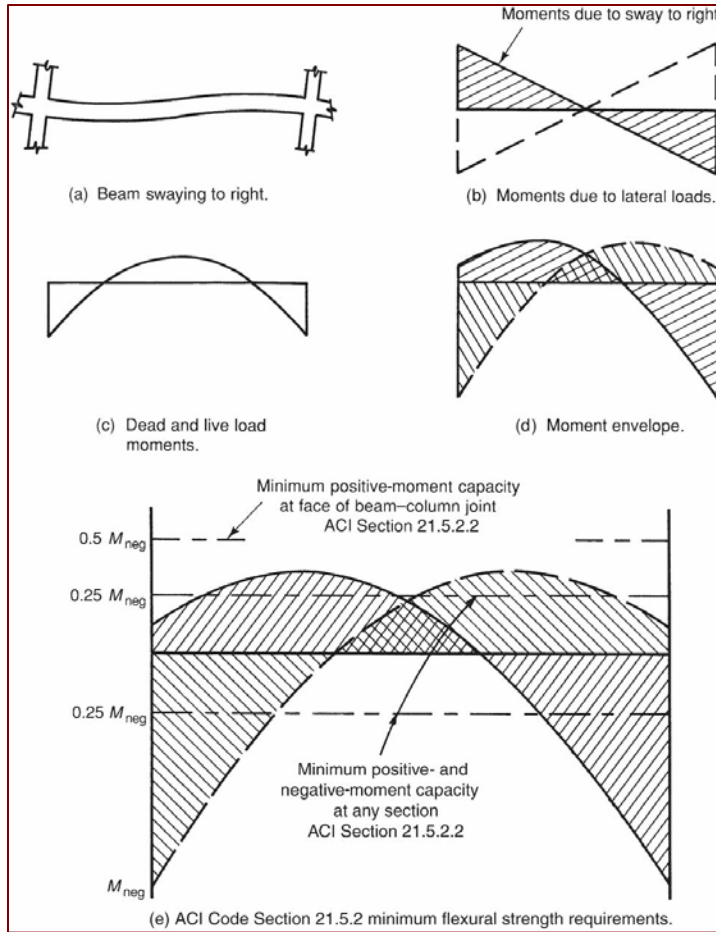


Figura 12–17 Diagrama de momento debido a cargas gravitacionales y a cargas sísmicas.

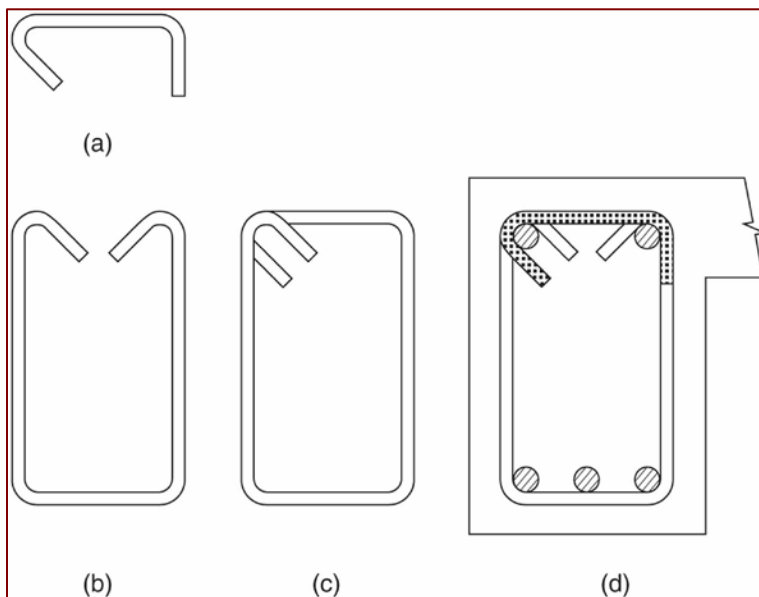


Figura 12–18 Estribos de confinamiento y ganchos suplementarios.

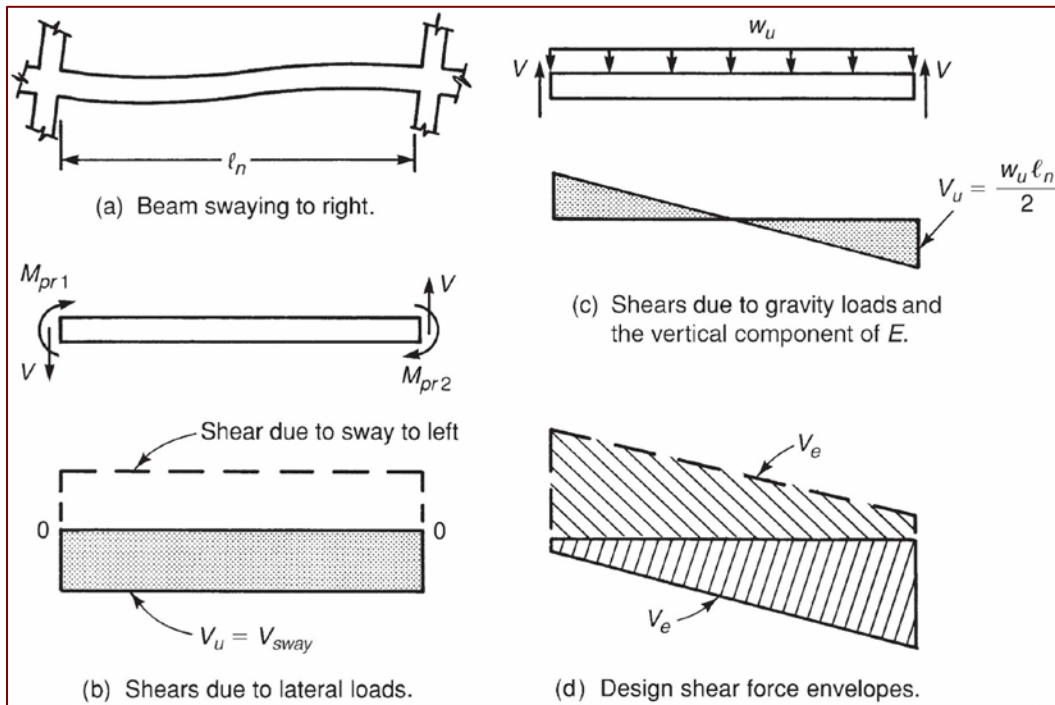


Figura 12–19 Diagramas de fuerza de cortante debido a cargas gravitacionales y a cargas sísmicas.

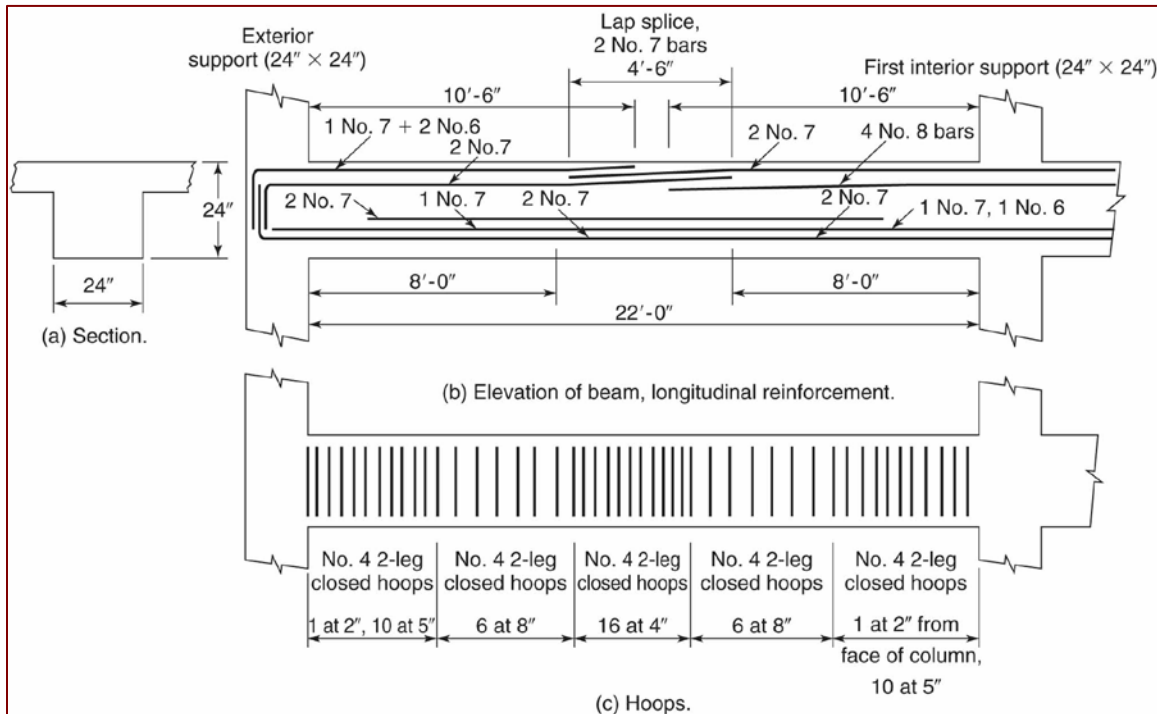


Figura 12–20 Viga—Ejemplo 12-1.

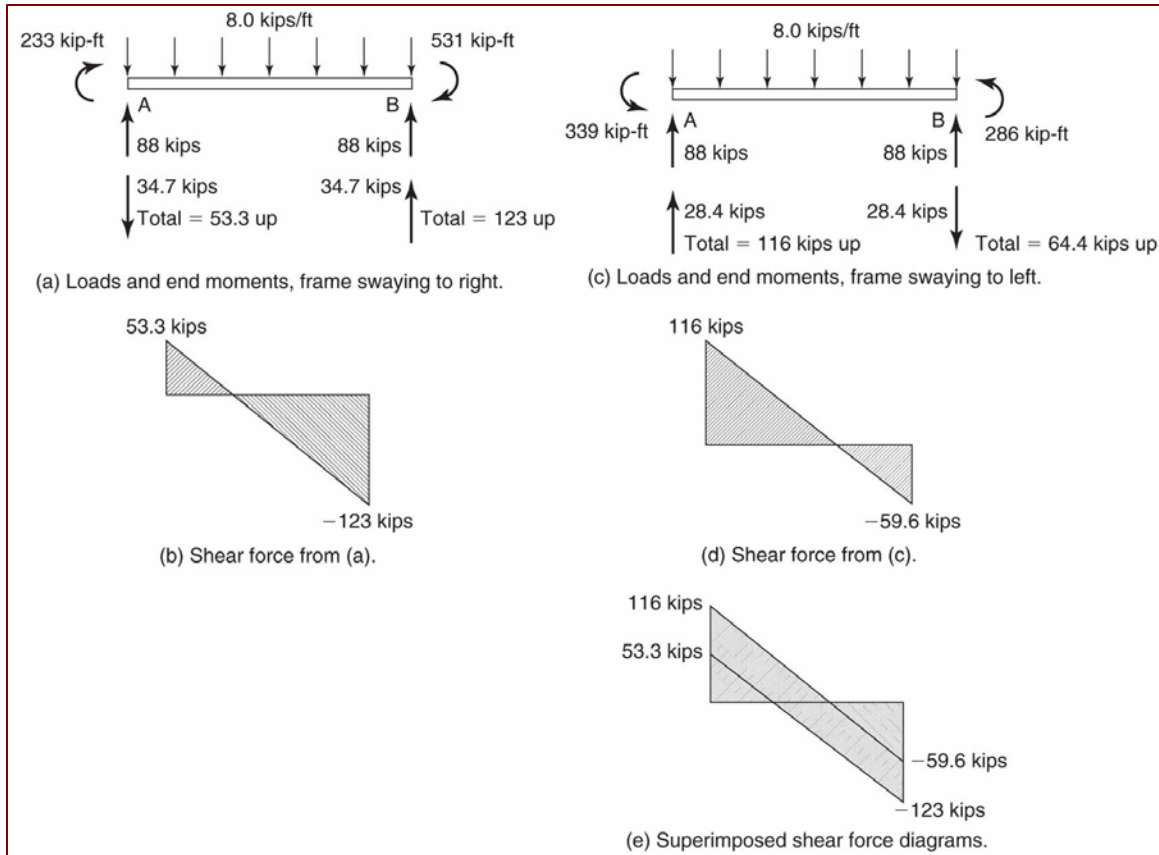


Figura 12-21 Cálculo de fuerzas cortantes—Ejemplo 12-1.

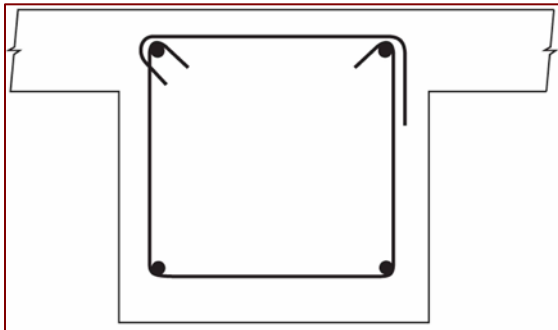


Figura 12-22 Estribo cerrado de confinamiento No. 4 de dos brazos—Ejemplo 12-1.

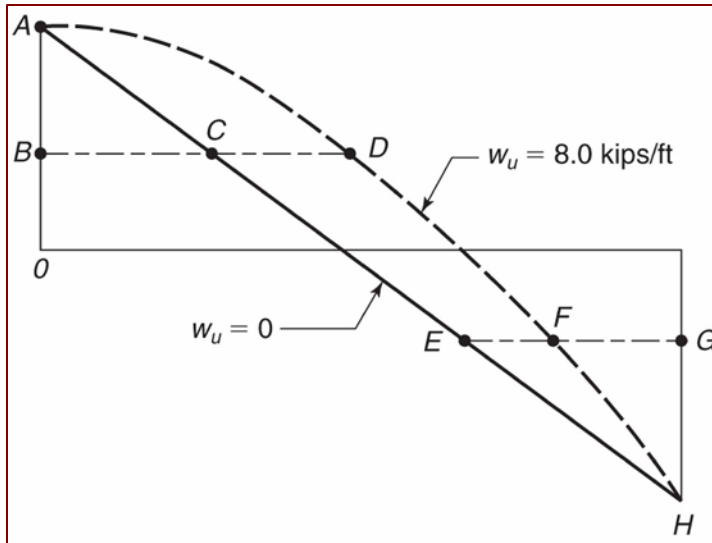


Figura 12–23 Efecto de carga uniforme sobre puntos de corte.

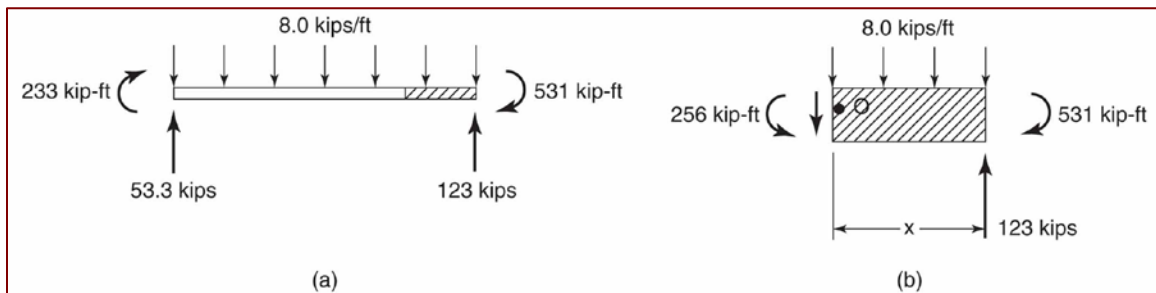


Figura 12–24 Cálculo de puntos de corte—pórtico con deriva derecha—Ejemplo 12-1.

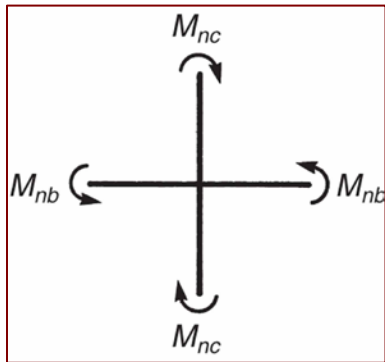


Figura 12–25 Momentos en una junta viga – columna—general.

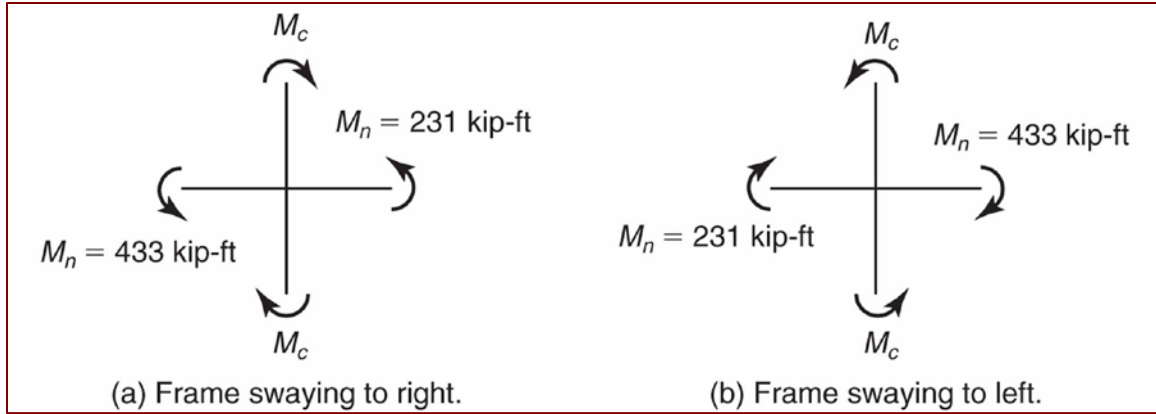


Figura 12–26 Momentos en una junta viga – columna—Ejemplo 12-2.

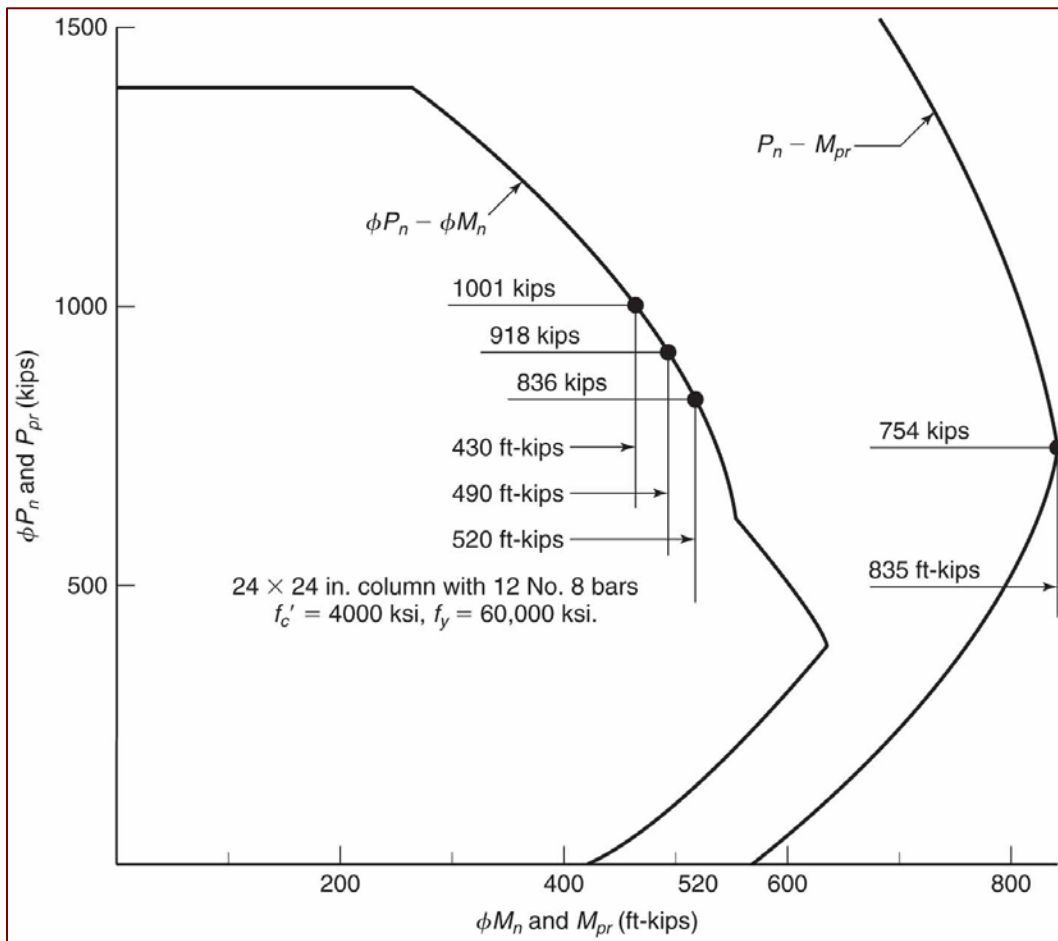


Figura 12–27 Diagramas de Interacción para $\phi P_n - \phi M_n$ y para $P_n - M_{pr}$.

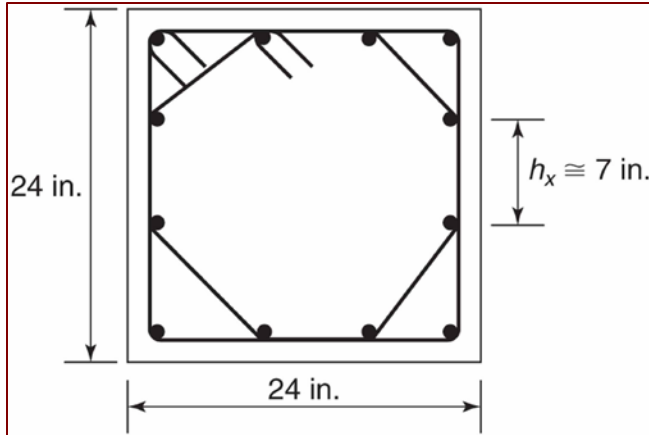


Figura 12–28 Estribos cerrados de confinamiento—Ejemplo 12-2.

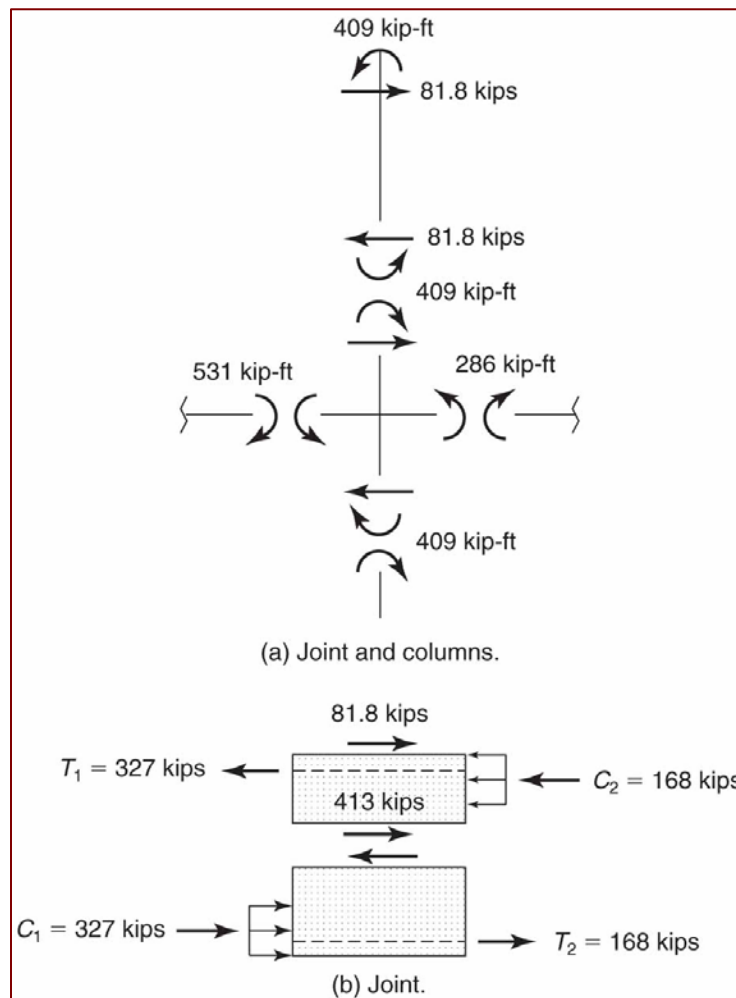


Figura 12–29 Diagramas de cuerpo libre de la junta—Ejemplo 12-3.

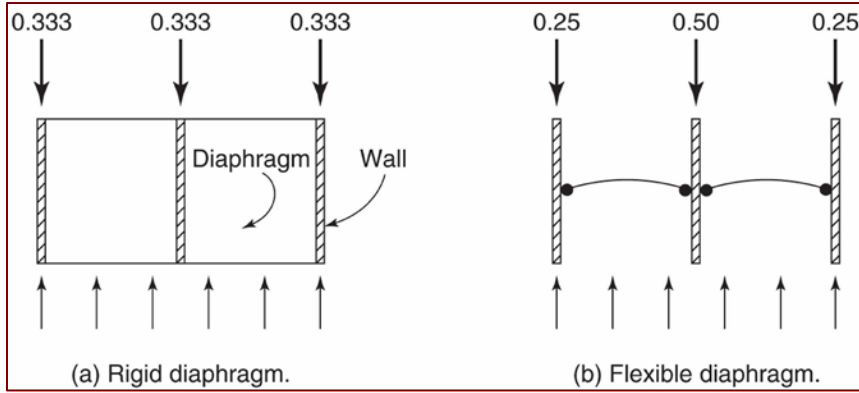


Figura 12-30 Vista en planta de un edificio mostrando el efecto de rigidez de diafragma sobre la distribución de cargas laterales a los muros en una edificación.

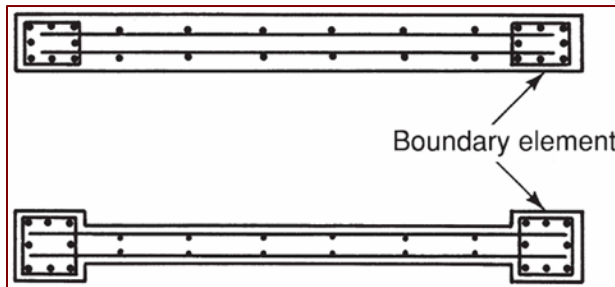


Figura 12-31 Vista en planta de los muros estructurales con elementos de borde.

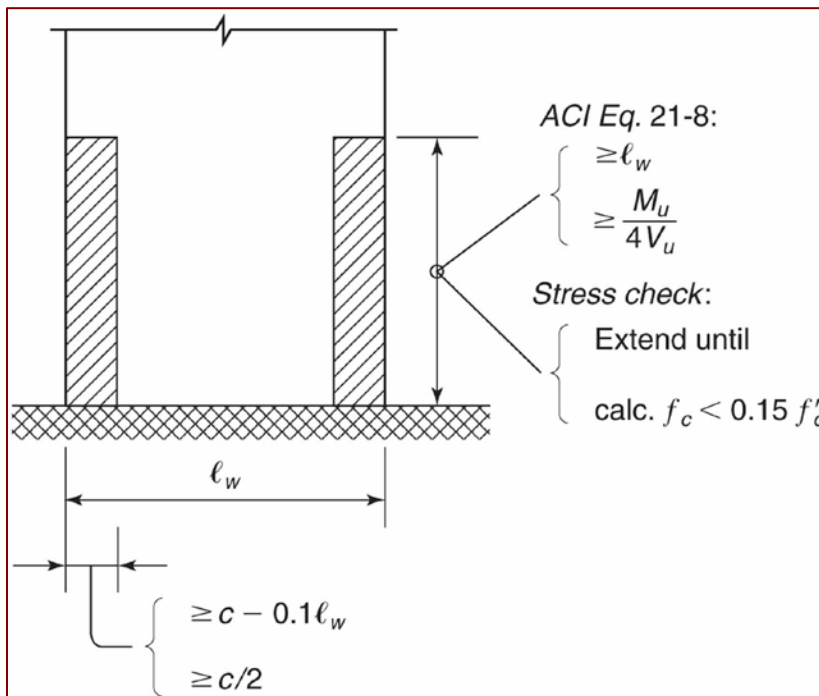


Figura 12-32 Tamaño de la región de borde en donde se requiere acero de confinamiento especial.

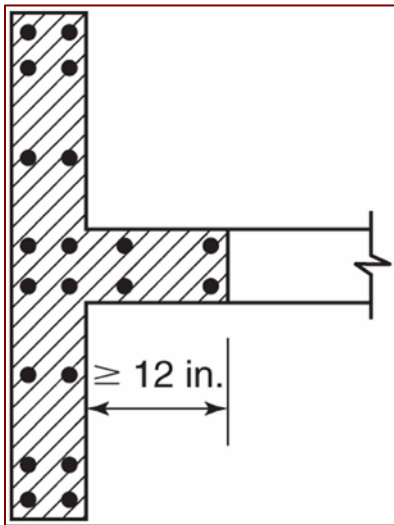


Figura 12–33 Extensión requerida de la región de confinamiento especial en el alma del muro con alas.

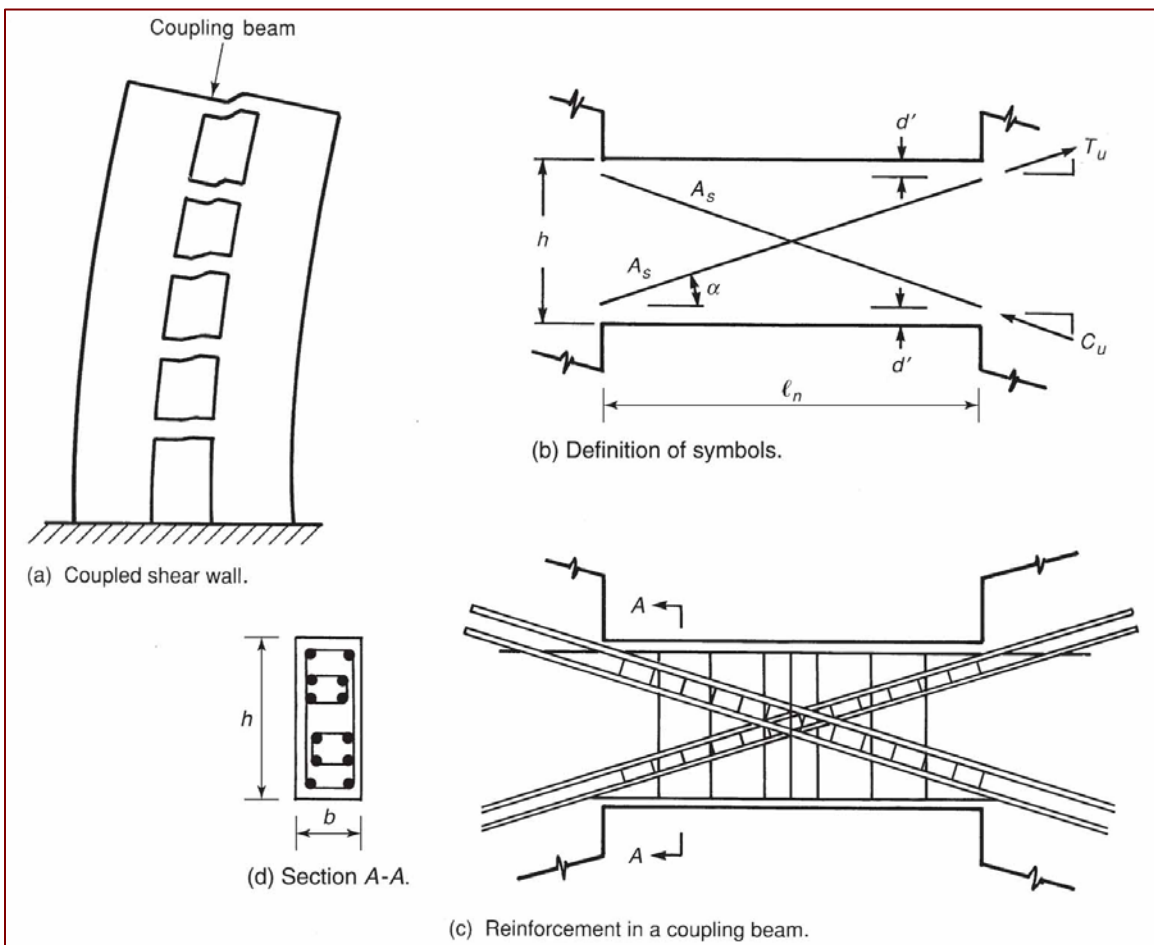


Figura 12–34 Muros de corte acoplados y vigas de acople.

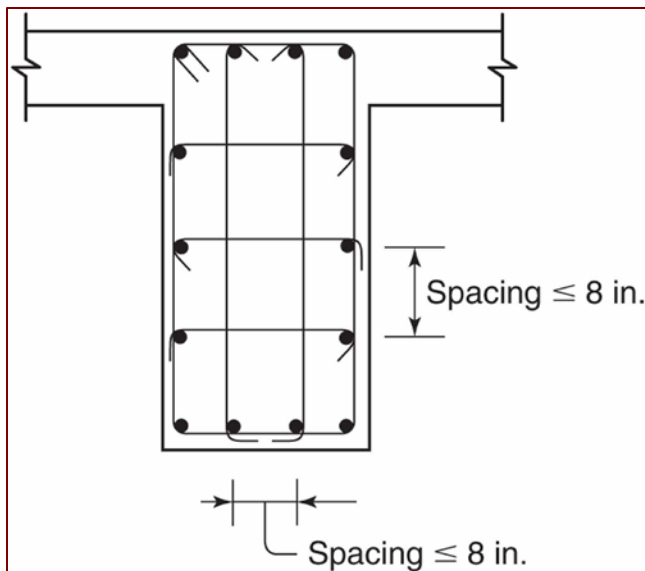


Figura 12–35 Procedimiento alternativo para refuerzo de confinamiento en vigas de acople.



Primer edificio con muros de concreto reforzado construido en Costa Rica (1908). Castillo Azul del Lic. Máximo Fernández Alvarado, hoy día propiedad de la Asamblea Legislativa, San José, Costa Rica

REFERENCIAS

ACI Comité 318, *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural (ACI 318S-08) y Comentario*; American Concrete Institute, Detroit, 2008.

ACI Committee 340, *ACI Design Handbook (ACI 340R-97)*, ACI Publication SP-17(97), American Concrete Institute, Detroit, 1997.

American Society of Civil Engineers, *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures*, ASCE 7-05, Reston, Virginia, USA, 2006, 376 pp.

Colegio Federado de Ingenieros y Arquitectos, *Código Sísmico de Costa Rica 2002*, 1a. ed. Editorial Tecnológica de Costa Rica, Cartago, Costa Rica, 2003.

Collins, Michael P. and Mitchell, Dennis, *Prestressed Concrete Structures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1991, 766 pp.

Concrete Reinforcing Steel Institute, "Design Handbook 2002", 9th edition, 2003.

Hsu, Thomas T. C., "Torsion of Structural Concrete—Behavior of Reinforced Concrete Rectangular Members," *Torsion of Structural Concrete*, ACI Publication SP-18, American Concrete Institute, Detroit, 1968, pp. 441-460.

INVU, Reglamento de Construcciones, La Gaceta No. 56, Alcance No. 17, 22 de marzo 1983. (Reformado en Gaceta 117, 22 de junio 1987 y sesión # 65 del INVU, 23 de marzo 1988).

Kupfer, H. B., Hilsdorf, H. K., and Rusch, K., "Behavior of Concrete under Biaxial Stress," *ACI Journal, Proceedings*, Vol. 66, No. 8, August 1969, pp. 656-666.

Lessig, N. N., *Determination of the Load Carrying Capacity of Reinforced Concrete Elements with Rectangular Cross-Section Subjected to Flexure with Torsion*. Work 5, Institute Betona i Zhelezobetona, Moscú, 1959, pp. 4-28.

Lampert, Paul, *Torsion und Biegung von Stahlbetonbalken (Torsion and Bending of Reinforced Concrete Beams)*, Bericht 27, Institute für Baustatik, Zurich, January 1979.

Lampert, Paul & Collins, Michael P., "Torsion, Bending, and Confusion—An attempt to Establish the Facts," *ACI Journal, Proceedings*, Vol. 69, No. 8 August 1972, pp. 500-504.

Lampert, Paul, & Thürlimann, Bruno, "Ultimate Strength and Design of Reinforced Concrete Beams in Torsion and Bending," *Publications*, International Association for Bridge and Structural Engineering, Zurich, Vol. 31-I, 1971, pp. 107-131.

Wight, James K. & MacGregor James G., *Reinforced Concrete: Mechanics and Design*, 5th ed., Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 2008.

Park, Robert and Paulay, Thomas, *Reinforced Concrete Structures*, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1975, 769 p.

Productos de Concreto S.A., *Catálogo General*, Décimocuarta Edición, 1992.

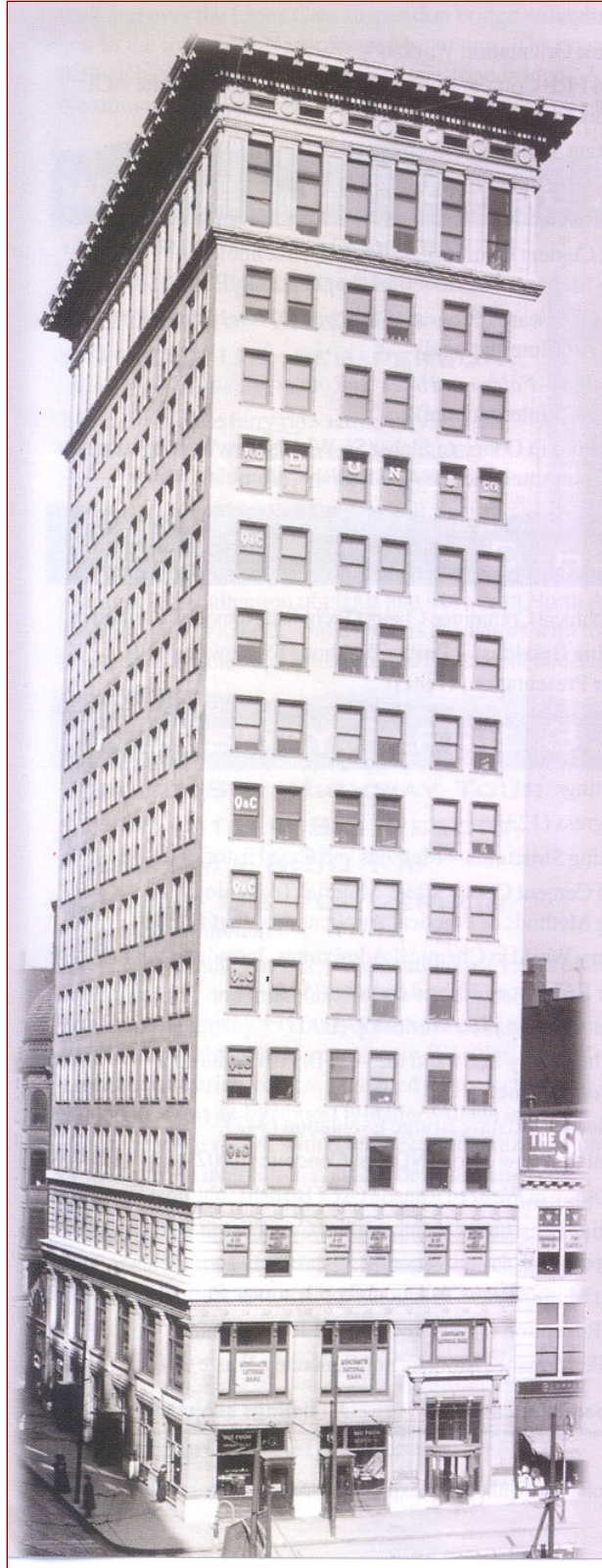
Taylor, Howard P.J. *Investigation of Forces Carried across Cracks in Reinforced Concrete Beams in Shear by Interlock of Aggregate*, TRA 42.447, Cement and Concrete Association, London, 1970, 22p.

Whitney, Charles S., “Design of Reinforced Concrete Members under Flexure or Combined Flexure and Direct Compression,” *ACI Journal, Proceedings*, Vol. 34, No. 2 March-April 1937.

APÉNDICES

Programa del Curso

--



Edificio Ingalls, 16 pisos, 63 m de altura, primer edificio alto (rascacielos) construido con concreto reforzado. (Cincinnati, Ohio, U.S.A., 1902)