Estructuras de orden para aplicaciones matriciales

Joseph C. Várilly

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, San José 11501, Costa Rica

Cienc. Tec. (CR) **8** (1984), 187–201

Resumen

Si $M(n)$ es el espacio de matrices $n \times n$ complejas, hay varias estructuras de orden en $\mathrm{End}(M(n))$, el espacio de sus endomorfismos. Hay nociones de positividad, positividad fuerte y positividad completa, que son en general inequivalentes. Se indica cómo caracterizar estas estructuras mediante ciertos conos convexos en $M(n^2)$; la estructura de orden es bastante compleja y aun en el caso $n = 3$ deja problemas abiertos.

Resumen

If $M(n)$ is the space of $n \times n$ complex matrices, there are several order structures on its space of endomorphisms $\mathrm{End}(M(n))$. We encounter notions of positivity, strong positivity and complete positivity, which are in general inequivalent. We show how to characterize these order structures using certain convex cones in $M(n^2)$; the order structure is quite complex and even in the case $n = 3$ there remain open problems.

Introducción

Desde el inicio del estudio de los espacios de Hilbert, se ha investigado también el álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de operadores sobre un espacio $\mathcal{H}$ de Hilbert y varias de sus subálgebras, con el propósito de modelar varios fenómenos de la mecánica cuántica; en el modelo – ver, por ejemplo, [5] – estas álgebras de operadores están generadas por una colección de "observables" de la teoría. En un enfoque de la mecánica cuántica (el cuadro de Heisenberg) el estado de un sistema se considera fijo mientras sus observables cambian con el tiempo; entonces la evolución en el tiempo es una colección de transformaciones que llevan $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (o una de sus subálgebras) en sí mismo. En años recientes se ha iniciado el estudio del álgebra de Banach $\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, ver [7], para poner en evidencia su estructura como álgebra de Banach y obtener herramientas para el estudio de transformaciones de observables.

Un aspecto importante de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es su estructura de orden; o mejor dicho, sus estructuras de orden, ya que hay varias opciones posibles. Un elemento de $\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ se llama *positivo* si preserva el cono positivo de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$; pero todas las aplicaciones "dinámicas" que han resultado útiles poseen una propiedad más fuerte llamada *positividad completa*. También hay una opción intermedia, llamada *positividad fuerte*, que ha resultado ser de interés. Es importante obtener criterios que permiten decidir cuando es que un elemento dado de $\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ cumple una de estas propiedades de positividad.

En esta nota se considera el caso finitodimensional de este problema, es decir, se toma $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ para n finito. A cada operador en $\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathbb{C}^n))$ se le puede asociar una matriz $n^2 \times n^2$; en este contexto el teorema de Stinespring [6] dice que los operadores completamente positivos corresponden a las matrices positivas. Se caracterizará los operadores positivos en términos de su cono dual.

1. Definiciones y notación

En este trabajo $\mathbb{C}$ denota al cuerpo de los números complejos, $\mathbb{C}^n$ el espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{C}$, considerado como espacio de Hilbert con el producto escalar usual. $M(n)$ denotará el álgebra de matrices complejas $n \times n$, y $\mathrm{End}(M(n))$ denotará el álgebra de aplicaciones lineales de $M(n)$ en $M(n)$. Se empleará las letras A, B, E, F, G para matrices en $M(n)$; 1 para la matriz identidad en $M(n)$; C y D para matrices en $M(n^2)$; e $\mathbb{1}$ para la matriz identidad en $M(n^2)$. T denotará una aplicación en $\mathrm{End}(M(n))$.

Se puede fijar una base ortonormal en $\mathbb{C}^n$, cuyos elementos son $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. El espacio dual $\mathbb{C}^{-n}$ de$\mathbb{C}^n$ tiene una base $\{e^{-1}, e^{-2}, \dots, e^{-n}\}$ donde

$$e^{-j}(e_i) := \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

En $M(n)$ usaremos las matrices E_i^j que tienen una entrada 1 en el lugar (i, j) y 0 en los demás lugares; obsérvese que $E_i^j E_k^l = \delta_k^j E_i^l$. Se sabe que el producto tensorial $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{-n}$ es isomorfo a $M(n)$ como espacio vectorial bajo la identificación $e_i \otimes e^{-j} \mapsto E_i^j$.

Denotamos por $M(n)^\circ$ el álgebra de matrices $M(n)$ con el producto opuesto $(A, B) \mapsto BA$. Si en $M(n^2)$ se denota por E_{li}^{kj} la matriz con entrada 1 en el lugar $(ni + j, nk + l)$, se puede definir un isomorfismo de álgebras

$$g\colon M(n) \otimes M(n) \xrightarrow{\simeq} M(n^2) \quad \text{por} \quad g(E_i^k \otimes E_l^j) := E_{li}^{kj}\ .$$

Escríbase $\underline{\mathrm{tr}}$ para denotar la *traza* en $M(n)$; en $M(n^2)$ se escribe la traza con $\underline{\mathrm{Tr}}$. El álgebra $M(n)$ posee una *involución* antilineal dada por $(E_i^j)^* := E_j^i$.

Para evitar muchos símbolos de sumatoria, se usará el *convenio de sumatoria* usual: cuando una letra se repite como índice superior e índice inferior, se sobreentiende una suma sobre todos sus valores posibles. Luego hay expansiones

$$A = a_j^i\, E_i^j \quad \text{para} \quad A \in M(n), \qquad C = c_{jk}^{il}\, E_{li}^{kj} \quad \text{para} \quad C \in M(n^2).$$

Finalmente, se usará $\{\, F_r : r = 1, 2, \dots, n^2 \,\}$ para denotar una base ortonormal de $M(n)$, es decir, una colección de matrices tales que $\mathrm{tr}(F_s^* F_r) = \delta_r^s$. También se escribe $F^s \equiv F_s^*$. En particular, se puede tomar $F_r := E_i^j$ para $r = ni + j$; se usará esta elección de los F_r para hacer los cálculos que siguen.

Definición 1. Se dice que una *matriz* $A \in M(n)$ es **positiva** si para todo $x \in \mathbb{C}^n$, vale $\langle x, Ax \rangle \geqslant 0$. A es positiva si y solo si $A = B^* B$ para algún $B \in M(n)$, si y solo si A es autoadjunta y todos sus autovalores son no negativos. Las matrices positivas forman un *cono convexo* $\boldsymbol{K}$ en $M(n)$ (es decir, si $A \in \boldsymbol{K}$, $t \geqslant 0$, entonces $tA \in \boldsymbol{K}$; y si $A \in \boldsymbol{K}$ y $B \in \boldsymbol{K}$, entonces $A + B \in \boldsymbol{K}$).

Definición 2. Se dice que una *aplicación lineal* $T \in \operatorname{End}(M(n))$ es **positiva** si T preserva el cono positivo de $M(n)$, es decir, $T(\boldsymbol{K}) \subseteq \boldsymbol{K}$.

Es evidente que tales T forman un cono convexo en $\operatorname{End}(M(n))$.

Definición 3. Se dice que una *aplicación lineal* $T \in \operatorname{End}(M(n))$ es $\boldsymbol{k}$**-positiva** para $k = 1, 2, \dots$ si $T \otimes \mathbb{1}$ es positiva en $\operatorname{End}(M(n) \times M(k)) = \operatorname{End}(M(nk))$; es fácil ver que una aplicación k-positiva es también $(k-1)$-positiva. Si T es k-positiva para todo $k \in \mathbb{N}$, se dice que T es **completamente positiva**. Se sabe (véase [8] por ejemplo) que $T \in \operatorname{End}(M(n))$ es completamente positiva si y solo si T es n-positiva.

2. Aplicaciones completamente positivas

Proposición 1. *Cada aplicación lineal* $T \in \operatorname{End}(M(n))$ *es dada por*

$$T(A) = c^r_s\, F^s A F_r \tag{1}$$

para alguna matriz C *en* $M(n^2)$*, y la correspondencia* $T \mapsto C$ *es una biyección lineal entre* $\operatorname{End}(M(n))$ *y* $M(n^2)$.

Demostración. El lado derecho de (1) es lineal en A y en C, y luego define una transformación lineal $C \mapsto T$ de $M(n^2)$ en $\operatorname{End}(M(n))$.

Ahora si $\{\, G_r : r = 1, 2, \dots, n^2 \,\}$ es otra base ortonormal de $M(n)$, entonces $F_r = u^s_r\, G_s$ donde U es una matriz unitaria en $M(n^2)$ y de ahí

$$T(A) := c^r_s\, F^s A F_r = \bar{u}^s_q c^r_s u^p_r\, G^q A G_p = (U^* C U)^p_q G^q A G_p\,,$$

así que el núcleo de la transformación $C \mapsto T$ tiene una dimensión que no depende de la base ortonormal; por eso podemos suponer que $F_r = E^j_i$ si $r = ni + j$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} T = 0 \implies \operatorname{tr}\bigl[T(E^j_i)\, E^l_k\bigr] = 0 &\implies \operatorname{tr}\bigl[c^{pv}_{qu}\, E^u_v E^j_i E^q_p E^l_k\bigr] = 0 \\ &\implies c^{jl}_{ki} = 0 \quad \text{para todo} \quad i, j, k, l, \end{aligned}$$

así que $T = 0 \implies C = 0$. En consecuencia, $C \mapsto T$ es lineal e inyectiva y también sobreyectiva pues $\dim M(n^2) = n^4 = \dim \operatorname{End}(M(n))$. □

Proposición 2. *Una aplicación lineal* $T \in \operatorname{End}(M(n))$ *es completamente positiva si y solo si la matriz correspondiente* C *es positiva en* $M(n^2)$.

Demostración. Para $X \in M(n)$, sea $\operatorname{Ad}(X)\, A := X^* A X$. Como $X^*(B^*B)X = (BX)^* BX$, es claro que la aplicación $\operatorname{Ad}(X)$ es positiva; además, como $\operatorname{Ad}(X) \otimes \mathbb{1} = \operatorname{Ad}(X \otimes 1)$ sobre $M(n) \otimes M(k)$, se ve que $\operatorname{Ad}(X)$ es completamente positiva.

De hecho, Kraus [4] ha mostrado que cada aplicación completamente positiva en $\operatorname{End}(M(n))$ es de la forma $\sum_k \operatorname{Ad}(X_k)$ donde la suma es finita. Escríbase $X_k =: x^r_k\, F_r$, $X^*_k =: x^{-k}_s\, F^s$, poniendo $x^{-k}_s := (x^s_k)^-$.

Tenemos entonces

$$T(A) = \sum_k X^*_k A X_k = x^{-k}_s x^r_k\, F^s A F_r; \quad \text{aquí} \quad c^r_s = x^{-k}_s x^r_k\,.$$

Si $a_r \in \mathbb{C}$ para $r = 1, 2, \ldots, n^2$, se obtiene

$$\bar{a}^s c^r_s a_r = \bar{a}^s x^{-k}_s x^r_k a_r = \sum_k |x^r_k a_r|^2 \geqslant 0,$$

así que C es positiva en $M(n^2)$.

Por otro lado, si C es positiva en $M(n^2)$, hay una matriz unitaria U en $M(n^2)$ tal que U^*CU es diagonal. Si $t_1, t_2, \ldots$ son los autovalores (no negativos) de C y si $F_r = u^s_r G_s$, obtenemos de (1) que $T(A) = t_r G^r A G_r$ o bien $T = \sum_r t_r \operatorname{Ad}(G_r)$; luego T es completamente positiva. □

Observación 1. Una caracterización de aplicaciones completamente positivas sobre $M(n)$ ha sido obtenido por Kossakowski en [3]. Posteriormente Gorini et al. [2] usaron esta caracterización para investigar la evolución de sistemas de espines.

Ejemplos. Con $F_r = E^j_i$, se tiene $T(A) = c^{il}_{jk} E^k_l (a^p_q E^q_p) E^j_i = c^{il}_{jk} a^k_i E^j_l$.

(a) $C = \mathbb{1}$. Entonces $T(A) = \delta^i_k \delta^l_j a^k_i E^j_l = a^i_i E^j_j = \operatorname{tr}(A)\, 1$.

(b) Si $c^{il}_{jk} = 1$ cuando $i = j = k = l$, 0 en otros casos, se tiene $T(A) = a^i_i E^i_i$ esta T es la proyección de $M(n)$ sobre subálgebra diagonal generado por los E^j_i con $i = j$.

(c) $c^{il}_{jk} = n^{-1} \delta^i_j \delta^l_k$. Es fácil calcular que el polinomio característico de C es $p(x) = x^{n^2-1}(x-1)$, así que C es un proyector de rango 1, y por ende es positivo. Se tiene $T(A) = n^{-1} a^k_i E^i_k = n^{-1} A$.

(d) $c^{il}_{jk} = \delta^i_j \delta^l_k$ corresponde a $T = \mathbb{1}$.

(e) Si se pone $c^{il}_{jk} = \delta^i_l \delta^j_k$, esta C no es positiva ya que es la suma directa de 1 (la identidad $n \times n$) y de $\frac{1}{2}n(n-1)$ bloques de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En este caso, $T(A) = \sum_{i,k} a^k_i E^k_i = A^t$, la matriz transpuesta de A. Por lo tanto (como es sabido), la transposición $A \mapsto A^t$ es una aplicación positiva pero no completamente positiva, para cualquier $n \geqslant 2$.

Observación 2. Se dice que T es *estelar* si $T(A^*) = T(A)^*$ para todo $A \in M(n)$. Es fácil comprobar que cada aplicación positiva es estelar. Si se escribe $c^{-s}_r := (c^r_s)^-$, se obtiene de (1) que

$$c^r_s F^s A^* F_r = (c^r_s F^s A F_r)^* = c^{-s}_r F^r A^* F_s = c^{-r}_s F^s A^* F_r$$

así que $c^{-r}_s = c^r_s$, es decir $C^* = C$, si y solo si T es estelar. En lo sucesivo, se supondrá que T es estelar y luego cada C será autoadjunta.

3. Aplicaciones positivas

Denotamos por $\boldsymbol{CP}$ el cono positivo de $M(n^2)$ (pues corresponde al cono de las aplicaciones completamente positivas); denotamos por $\boldsymbol{P}$ el cono en $M(n^2)$ que corresponde, según la ecuación (1), al cono de las aplicaciones positivas en $M(n^2)$. El ejemplo (e) muestra que $\boldsymbol{P} \neq \boldsymbol{CP}$.

Definición 4. Se identifica el espacio dual de $M(k)$ con $M(k)$, donde $B \in M(k)$ corresponde al funcional lineal $A \mapsto \mathrm{tr}(B^*A)$. Si $\boldsymbol{L}$ es un cono convexo en la parte autoadjunta de $M(k)$, se define su **cono dual** $\boldsymbol{L}_*$ por

$$\boldsymbol{L}_* := \{\, B \in M(k) : B = B^*,\ \mathrm{tr}(BA) > 0 \text{ para toda } A \in \boldsymbol{L} \,\}.$$

Es claro que $\boldsymbol{L}^*$ es también un cono convexo en la parte autoadjunta de $M(k)$.

Observación 3. Sea $\boldsymbol{K}$ el cono positivo en $M(k)$ (Definición 1). Entonces $\boldsymbol{K}$ es *autodual*, porque

$$B^*B \in \boldsymbol{K} \implies \mathrm{tr}(B^*BA^*A) = \mathrm{tr}(BA^*AB^*) = \mathrm{tr}((AB^*)^*AB^*) \geqslant 0$$

para todo $A^*A \in \boldsymbol{K}$; por otro lado, si G es autoadjunta con $\mathrm{tr}(GA^*A) \geqslant 0$ para todo A, se puede tomar A como un proyector sobre el espacio unidimensional generado por un autovector de G. El autovalor correspondiente será $\mathrm{tr}(AGA^*) = \mathrm{tr}(GA^*A) \geqslant 0$, así que $G \in \boldsymbol{K}$. En particular, con $k = n^2$, se ve que $\boldsymbol{CP}$ es autodual.

Proposición 3. *El cono dual $\boldsymbol{P}_*$ de $M(n^2)$ es isomorfo al producto tensorial de dos copias del cono positivo de $M(n)$.*

Demostración. La matriz C está en $\boldsymbol{P}$ si y solo si la aplicación lineal T dada por (1) es positiva, si y solo si $\sum_{r=1}^{n} \langle z_r, T(A^*A) z_r \rangle \geqslant 0$ para todo $A \in M(n)$ y todo $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}^n$, si y solo si

$$\bar{z}_l^r \bar{a}_m^k c_{jk}^{il} a_i^m z_r^j \geqslant 0 \quad \text{para todo} \quad a_q^p,\ z_r^s \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Al colocar $d_{li}^{kj} := \bar{a}_m^k a_i^m z_r^j \bar{z}_l^r$, la relación (2) se reduce a $\mathrm{Tr}(DC) \geqslant 0$.

Usando el isomorfismo $g\colon M(n) \otimes M(n)^\circ \to M(n^2)$ ya definido, se ve que $D = g(A^*A \otimes ZZ^*)$ donde $A = a_k^i E_i^k$, $Z = z_j^l E_l^j$. Luego si se escribe $\boldsymbol{K} \otimes \boldsymbol{K}$ para denotar el cono en $M(n) \otimes M(n)^\circ$ formado por sumas finitas de matrices de la forma $B_1 \otimes B_2$ donde B_1 y B_2 pertenecen al cono positivo $\boldsymbol{K}$ de $M(n)$, se puede interpretar (2) como

$$Tr(CD) \geqslant O \quad \text{para todo} \quad D \in g(\boldsymbol{K} \otimes \boldsymbol{K}).$$

En otras palabras, $\boldsymbol{P} = g(\boldsymbol{K} \otimes \boldsymbol{K})_*$. □

Definición 5. Sea U una matriz unitaria en $M(k)$, denotamos por α_U el automorfismo asociado de $M(k)$, es decir $\alpha_U(A) := UAU^*$. Se sabe que cada automorfismo de $M(k)$ es de esta forma y que U es única si además se requiere $\det U = 1$; en otras palabras, hay un isomorfismo de grupos $\alpha\colon \mathrm{SU}(k) \to \mathrm{Aut}(M(k))$.

Se define una acción β de $\mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(n)$ sobre $M(n) \otimes M(n)^\circ$ por $\beta_{U \times V}(A \otimes B) := UAV^*$ para $U, V \in \mathrm{SU}(n)$.

Definición 6. Si $\boldsymbol{L}$ es un cono convexo en $M(k)$ tal que $\mathrm{tr}(C) > 0$ para todo $C \in \boldsymbol{L}$ salvo $C = 0$, se denota por $\boldsymbol{L}_1$ el conjunto convexo de los $C \in \boldsymbol{L}$ tales que $\mathrm{tr}(C) = 1$; se denota por $\boldsymbol{L}_{1\mathrm{e}}$ el conjunto de los puntos extremos de $\boldsymbol{L}_1$. (Si $\boldsymbol{L}_1$ es compacto, el teorema de Krein y Milman garantiza que $\boldsymbol{L}_{1\mathrm{e}}$ no es vacío).

Como $\mathrm{Tr}(C) = c_{ji}^{ij}$ y $\mathrm{Tr}(g(A^*A \otimes ZZ^*)) = \bar{a}_m^i a_i^m z_r^j \bar{z}_j^r$, los conos $\boldsymbol{CP}$ y $g(\boldsymbol{K} \otimes \boldsymbol{K})$ en $M(n^2)$ son ejemplos de tales $\boldsymbol{L}$.

Proposición 4. *$\boldsymbol{CP}_{1\mathrm{e}}$ y $g(\boldsymbol{K}\otimes\boldsymbol{K})_{1\mathrm{e}}$ son órbitas bajo acciones, de* $\mathrm{SU}(n^2)$ *y de* $\mathrm{SU}(n)\times\mathrm{SU}(n)$ *respectivamente, sobre $M(n^2)$.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{K}$ el cono positivo de $M(k)$. Si $A\in\boldsymbol{K}$, es posible diagonalizar A, es decir que $A=a_i P^i$ donde cada $a_i\geqslant 0$ y los P^i son proyectores de rango 1 que conmutan entre sí. Entonces $\mathrm{tr}(A)=\sum_i a_i$.

Luego $\boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}$ se compone de proyectores de rango 1: como $\boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}$ es también compacto, contiene al menos un proyector P de rango 1.

Por cambio de base ortonormal en $\mathbb{C}^k$, hay un $U\in\mathrm{SU}(k)$ con $\alpha_U(P)=E^1_1$. Luego todos los proyectores de rango 1 forman la órbita de E^1_1 bajo la acción de $\mathrm{SU}(k)$. Como $\mathrm{tr}(\alpha_U(A))=\mathrm{tr}(UAU^*)=\mathrm{tr}(UU^*A)=\mathrm{tr}(A)$, esta acción preserva $\boldsymbol{K}_1$ y $\boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}$; en consecuencia, todos los proyectores de rango 1 son extremales en $\boldsymbol{K}_1$ y la órbita de E^1_1 es todo $\boldsymbol{K}_{1\mathrm{e}}$.

Tomando $k=n^2$, $\boldsymbol{CP}_{1\mathrm{e}}$ es la órbita de E^{11}_{11} bajo el grupo $\mathrm{SU}(n^2)$.

Tomando $k=n$, como $E^{11}_{11}=g(E^1_1\otimes E^1_1)$, se ve que $g(\boldsymbol{K}\otimes\boldsymbol{K})_{1\mathrm{e}}$ es la órbita de E^{11}_{11} bajo la acción inducida $g(\beta)$ de $\mathrm{SU}(n)\times\mathrm{SU}(n)$ sobre $M(n^2)$. □

Observación 4. Como $\dim(\mathrm{SU}(n)\times\mathrm{SU}(n))=(n^2-1)^2<n^4-1=\dim\mathrm{SU}(n)$, la inclusión $g(\boldsymbol{K}\otimes\boldsymbol{K})_{1\mathrm{e}}\subset\boldsymbol{CP}_{1\mathrm{e}}$ es estricta.

Observación 5. Por un argumento similar, $\boldsymbol{CP}$ y $\boldsymbol{P}_*$ son las órbitas, bajo $\mathrm{SU}(n^2)$ y $\mathrm{SU}(n)\times\mathrm{SU}(n)$ respectivamente, del conjunto de matrices diagonales $c^{ij}_{ji}E^{ij}_{ji}$ con entradas diagonales no negativas. Luego $D\in\boldsymbol{P}_*$ si y solo si D es diagonalizable por una rotación unitaria de la forma $g(\beta_{U\times V})$ con $U,V\in\mathrm{SU}(n)$.

A veces es útil considerar un concepto de positividad que es intermedia entre los dos que hemos considerado para aplicaciones que preservan la identidad 1.

Definición 7. Una aplicación lineal $T\in\mathrm{End}(M(n))$ se llama **fuertemente positiva** si $T(1)=1$ y además $T(A^*A)-T(A)^*T(A)$ es positiva para toda $A\in M(n)$.

Proposición 5. *Las aplicaciones fuertemente positivas forman un conjunto convexo en* $\mathrm{End}(M(n))$.

Demostración. Sean T_1 y T_2 fuertemente positivas, sea $r\in\mathbb{R}$ con $0\leqslant r\leqslant 1$ y sea $A\in M(n)$. Tómese $T:=(1-r)T_1+rT_2$.

Entonces $T(1)=(1-r)1+r1=1$. Además,

$$\begin{aligned}T(A^*A)-T(A)^*T(A)&=(1-r)T_1(A^*A)-(1-r)^2T_1(A)^*T_1(A)+rT_2(A^*A)-r^2T_2(A)^*T_2(A)\\&\quad-r(1-r)\big(T_1(A)^*T_2(A)+T_2(A)^*T_1(A)\big)\\&=(1-r)\big(T_1(A^*A)-T_1(A)^*T_1(A)\big)+r\big(T_2(A^*A)-T_2(A)^*T_2(A)\big)\\&\quad+r(1-r)\big(T_1(A)-T_2(A)\big)^*\big(T_1(A)-T_2(A)\big)\end{aligned}$$

es positiva para toda A. Luego la convexidad es clara. □

Proposición 6. *Si $T\in\mathrm{End}(M(n))$ es 2-positiva y si $T(1)=1$, entonces T es fuertemente positiva.*

Demostración. (Tomado de [1].) Identificando $M(n)\otimes M(2)$ con $M(2n)$, considérese

$$\begin{pmatrix}A^*&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^*A&A^*\\A&1\end{pmatrix}\xrightarrow{T\otimes\mathbb{1}}\begin{pmatrix}T(A^*A)&T(A^*)\\T(A)&T(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T(A^*A)&T(A)^*\\T(A)&1\end{pmatrix}=:R$$

en $M(2n)$. Si T es 2-positiva, $T \otimes \mathbb{1}$ es positiva y luego la matriz R es positiva, es decir $\langle \boldsymbol{y}, R\boldsymbol{y}\rangle \geqslant 0$ para todo $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^{2n}$.

Al tomar $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ -T(A)\boldsymbol{x} \end{bmatrix}$ con $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, se recibe

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{y}, R\boldsymbol{y}\rangle &= \langle \boldsymbol{x}, T(A^*A)\boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{x}, T(A)^*T(A)\boldsymbol{x}\rangle - \langle T(A)\boldsymbol{x}, T(A)\boldsymbol{x}\rangle + \langle T(A)\boldsymbol{x}, T(A)\boldsymbol{x}\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}, (T(A^*A) - T(A)^*T(A))\boldsymbol{x}\rangle \geqslant 0 \quad \text{para todo} \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n. \end{aligned}$$ □

Proposición 7. *No toda aplicación fuertemente positiva es completamente positiva, si $n \geqslant 2$.*

Demostración. Basta tomar $n = 2$ y construir ejemplos de aplicaciones fuertemente positivas que no son 2-positivas.

Defínase C por $c^{11}_{11} = c^{22}_{22} = s$, $c^{12}_{21} = c^{21}_{12} = (1 - s)$, $c^{22}_{11} = c^{11}_{22} = t$, y las demás entradas 0.

Supóngase que $s, t \in \mathbb{R}$ con $t^2 \leqslant s < t < 1$. Entonces la matriz $C \in M(4)$ es autoadjunta con $\det C = (1 - s)^2(s^2 - t^2) < 0$, así que $C \notin \boldsymbol{CP}$.

De (1) se ve que

$$T(a^i_j\, E^j_i) = a^1_1(sE^1_1 + (1 - s)E^2_2) + a^2_2((1 - s)E^1_1 + sE^2_2) + a^1_2\, tE^2_1 + a^2_1\, tE^1_2\,.$$

Con $A = E^2_1$, se obtiene

$$T(E^2_2) - T(E^1_2)T(E^2_1) = (1 - s)E^1_1 + (s - t^2)E^2_2 \quad \text{y} \quad T(1) = 1;$$

luego T es fuertemente positiva solo si $t^2 \leqslant s \leqslant 1$. Por otra parte, para cualquier $A \in M(2)$, $T(A^*A) - T(A)^*T(A)$ es autoadjunto y un cálculo tedioso muestra que su traza y su determinante son positivos cuando $t^2 \leqslant s \leqslant 1$, así que T es fuertemente positiva. □

Observación 6. Por las últimas dos proposiciones, la noción de positividad fuerte es intermedia entre las nociones de positividad y de positividad completa (es fácil ver que la aplicación transpuesta $A \mapsto A^t$ no es fuertemente positiva, ya que $(A^*A)^t - (A^t)^*A^t = A^t\overline{A} - \overline{A}A^t$ no es positiva a no ser que A sea normal).

Además, se sabe (véase [8] por ejemplo) que una aplicación k-positiva no es necesariamente $(k+1)$-positiva si $k < n$; luego hay toda una jerarquía de conos convexos en $M(n^2)$ que corresponden a estas nociones de positividad.

Algunos problemas que quedan abiertos son:

(a) caracterizar las aplicaciones fuertemente positivas para $n > 3$;

(b) investigar la jerarquía de conos de aplicaciones k-positivas para $k < n$;

(c) obtener criterios computacionales sobre los elementos c^{il}_{jk} que permite decidir si $C \in \boldsymbol{P}$;

(d) extender los resultados a álgebras matriciales de dimensión infinita.

Referencias

[1] H. Araki, "Normal positive linear mappings of norm 1 from a von Neumann algebra into its commutant and its application", Publ. RIMS Kyoto **8** (1972–73), 439–469.

[2] V. Gorini, A. Frigerio, M. Verri, A. Kossakowski and E. C. G. Sudarshan, "Properties of quantum Markovian master equations", CPP preprint, Austin, TX, 1976.

[3] A. Kossakowski, "On the necessary and sufficient conditions for a generator of a quantum dynamical semigroup", Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **20** (1972), 1021–1025.

[4] K. Kraus, "General state changes in quantum theory", Ann. Phys. **64** (1971), 311–335.

[5] J. von Neumann, *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1955.

[6] W. F. Stinespring, "Positive functions on C^*-algebras", Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 211–216.

[7] E. Størmer, "Regular abelian Banach algebras of linear maps of operator algebras", J. Funct. Anal. **37** (1980), 331–373.

[8] T. Takasaki and J. Tomiyama, "Stinespring type theorems for various types of completely positive maps associated to operator algebras", Math. Japonica **27** (1982), 129–139.