

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
SISTEMA DE ESTUDIOS DE POSGRADO

COMPORTAMIENTO REGULAR Y CAÓTICO EN ÓRBITAS
GEODÉSICAS CON MOMENTO DE MASA CUADRUPOLAR.

Tesis sometida a la consideración de la Comisión del Programa de
Estudios de Posgrado de Física para optar al grado y título de Maestría
Académica en Física

ADRIÁN FRANCISCO EDUARTE ROJAS

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio, Costa Rica

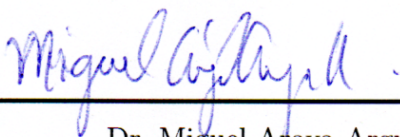
2021

Dedicatoria

Deseo agradecer profundamente:

A mis padres por su apoyo durante la redacción del presente trabajo. Y a los profesores Francisco Frutos y Rodrigo Carboni por sus consejos y guía.

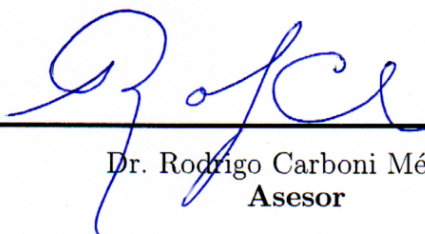
“Esta tesis fue aceptada por la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Física de la Universidad de Costa Rica, como requisito parcial para optar al grado y título de Maestría Académica en Física.”



Dr. Miguel Araya Arguedas
**Representante del Decano
Sistema de Estudios de Posgrado**



Dr. Francisco Frutos Alfaro
Director de Tesis



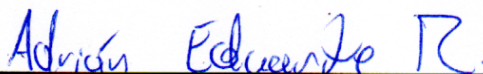
Dr. Rodrigo Carboni Méndez
Asesor



Dr. Herbert Morales Ríos
Asesor



Dr. Jorge Gutiérrez
**Director
Programa de Posgrado en Física**



Adrián Francisco Eduarte Rojas
Candidato

Índice general

Dedicatoria	ii
Hoja de aprobación	iii
Tabla de Contenidos	iv
Resumen	vi
Abstract	vii
Lista de tablas	viii
Lista de figuras	ix
Lista de abreviaturas	xiii
Lista de símbolos	xiv
1. Introducción	1
1.1. Introducción.	1
1.2. Antecedentes.	2
2. Marco Teórico	5
2.1. Elementos de Mecánica Clásica.	5
2.2. Sistemas Dinámicos	12
2.2.1. Caos y Secciones de Poincaré.	14
2.2.2. Teoremas de Kolmogorov-Arnold-Moser y Poincaré-Birkhoff.	17
2.3. Relatividad General.	18
2.4. Métricas que modelan los objetos compactos.	24
2.4.1. Métrica de Kerr.	27

2.4.2. Métrica tipo-Kerr con momento de masa cuadrupolar.	28
3. Resultados y Simulaciones	29
3.1. Resultados y Simulaciones de la métrica tipo-Kerr con Momento de Masa Cuadrupolar.	29
3.1.1. Momentos Cuadrupolares $q = 0,01$	34
3.1.2. Momento Cuadrupolar de Masa $q = 0,3$	37
3.1.3. Momento Cuadrupolar de Masa $q = 0,7$	39
3.1.4. Característica al variar el momento de masa cuadrupolar.	40
3.1.5. Comparación con otros Espacio-Tiempo producto de objetos compactos.	44
3.2. Número de rotación.	45
4. Conclusiones	60
Anexos	62
A. Diagramas de Flujo	63
B. Soluciones de las Ecuaciones de Campo de Einstein para el Exterior de Objetos Compactos	67
B.1. Métrica de Hartle-Thorne.	67
B.2. Métrica de Quevedo-Mashhoon.	68
B.3. Métrica de Manko-Novikov.	70
Bibliografía	72

Resumen.

En el estudio de órbitas alrededor de objetos compactos como por ejemplo agujeros negros, donde los efectos relativistas están presentes, se encuentran órbitas que presentan trayectorias caóticas. Estudiamos el movimiento de partículas de prueba con masa unitaria en una métrica tipo Kerr con momento de masa cuadrupolar y resolvemos numéricamente las ecuaciones de movimiento utilizando un programa escrito en C que encuentra las órbitas con diferentes condiciones iniciales y construye las correspondientes secciones de Poincaré del conjunto de órbitas, así el problema inicial de órbitas se transforma en un problema de puntos fijos, lo cual hace fácil el análisis de las regiones caóticas del movimiento. Adicionalmente, se analiza el número de rotación para identificar resonancias y regiones caóticas.

Abstract.

In the study of orbits near compact objects like black holes, where the relativistic behaviour is present, it is found that orbits follow chaotic trajectories. We study the motion of unitary mass particles in a Kerr-like metric with mass quadrupole moment and solve numerically the equations of motion via a C program that finds the orbits with different initial conditions and construct the respective Poincaré section of the orbit set, so the initial condition problem transforms into a fixed point problem which simplifies the analysis of chaotic regions of the motion. Additionally, we analyze the rotation number in order to identify resonances and chaotic regions.

Índice de cuadros

3.1. Característica del punto elíptico principal u_0	42
3.2. Característica del punto elíptico de la isla cercana a la última órbita estable u'_0	43

Índice de figuras

3.1. Órbita en el espacio de configuración típico de Kerr ($q = 0$). Los parámetros son: $M = 1,0$, $a = 0,99$, $E = 0,932516$, $L_z = 1,2$ y las condiciones iniciales son: $r = 7,1$, $\theta = \pi/2$, $\phi = 0$, $t = 0$, $p_r = 0$, $p_\phi = L_z = 1,2$, $p_t = -E = -0,932516$. La condición de p_θ se calcula por medio de la ecuación (2.65) seleccionando la raíz positiva de esta ecuación.	30
3.2. Proyección r - $\cos(\theta)$ de la figura (3.1).	30
3.3. Proyección $\rho - z$ de la figura (3.1).	31
3.4. Sección de Poincaré del plano $\theta = \pi/2$ y $p_\theta \geq 0$ para los parámetros: $M = 1,0$, $a = 0,99$, $E = 0,932516$, $L_z = 1,2$ y $q = 0$, la cual coincide con Kerr.	32
3.5. Órbita correspondiente al único punto elíptico ubicado en $r = 6,294$ de la sección de Poincaré de la figura (3.4) para el conjunto de parámetros $M = 1$, $a = 0,99$, $L_z = 1,2$ y $E = 0,932516$. Las condiciones otras iniciales $\theta = \pi/2$, $\phi = 0$, $t = 0$, $p_r = 0$, $p_\phi = L_z$ y $p_t = -E$. La condición p_θ se calcula por medio de la ecuación (2.65).	32
3.6. Detalle de de la figura 3.5 en la región del horizonte cercana a la última órbita estable.	33
3.7. Sección de Poincaré para el conjunto de parámetros $M = 1,0$, $a = 0,99$, $L_z = 1,2$, $E = 0,932516$ y $q = 0,01$	35
3.8. Sección de Poincaré para el conjunto de parámetros $M = 1$, $a = 0,99$, $L_z = 1,2$, $E = 0,932516$ y $q = 0,01$	36
3.9. Sección de Poincaré para el conjunto de parámetros $M = 1,0$, $a = 0,99$, $L_z = 1,2$, $E = 0,932516$ y $q = 0,3$, mostrando la primera isla detectada en $r = 3,48$	37
3.10. Sección de Poincaré para el conjunto de parámetros $M = 1,0$ $a = 0,99$, $L_z = 1,2$, $E = 0,932516$ y $q = 0,3$, en la zona cercana al horizonte de eventos.	38

3.11. Sección de Poincaré para el conjunto de parámetros $M = 1,0$, $a = 0,99$, $L_z = 1,2$, $E = 0,932516$ y $q = 0,3$. Se muestra una ampliación de la figura (3.10) cerca del intervalo entre puntos hiperbólicos.	38
3.12. Sección de Poincaré para la estructura cercana al extremo izquierdo con el conjunto de parámetros $M = 1,0$, $a = 0,99$, $L_z = 1,2$, $E = 0,932516$ y $q = 0,3$. Se muestra una ampliación de la figura (3.10) en las estructuras más cercanas al horizonte de eventos.	39
3.13. Sección de Poincaré para la estructura cercana al extremo izquierdo con el conjunto de parámetros $M = 1,0$, $a = 0,99$, $L_z = 1,2$, $E = 0,932516$ y $q = 0,7$	40
3.14. Posición del punto central u_0 de la isla principal de estabilidad en la sección de Poincaré de $q = 0,3$	41
3.15. Posición del punto central u'_0 de la estructura cercana a la última órbita estable en la sección de Poincaré de $q = 0,3$	41
3.16. Relación de la posición del centro principal u_0 de la sección de Poincaré al aumentar el momento cuadrupolar de masa.	42
3.17. Relación de la posición del centro de la isla prominente cercana al horizonte de eventos de la sección de Poincaré al aumentar el momento cuadrupolar de masa.	43
3.18. Movimiento de una partícula restringida a la superficie de un toro. Las frecuencias ω_r y ω_θ se utilizan para calcular el número de rotación por definición.	45
3.19. Ilustración del ángulo formado por los vectores \vec{r}_n y \vec{r}_{n+1} , cuando apuntan al centro de las islas.	46
3.20. Variación del número de rotación para $q = 0,1$ respecto a la posición radial inicial sobre la línea $p_r = 0$	47
3.21. Sección de Poincaré para los parámetros $M = 1,0$, $a = 0,99$, $E = 0,932516$, $L_z = 1,2$ y $q = 0,1$, mostrando las resonancias respectivas. Particularmente, cerca de la última órbita estable se ve los puntos dispersos correspondientes la zona caótica.	48
3.22. Comparación del número de rotación sobre la línea $p_r = 0$ de $q = 0,1$ con la sección de Poincaré correspondiente.	49
3.23. Variación del número de rotación para $q = 0,3$ respecto a la posición radial inicial sobre la línea $p_r = 0$. Se señalan tres regiones de resonancia $2/9$, $2/7$ y $2/5$	50

3.24. Comparación del número de rotación sobre la línea $p_r = 0$ de $q = 0,3$ con la sección de Poincaré correspondiente. Las líneas en color rojo muestran la relación entre los puntos hiperbólicos con los saltos, las líneas verdes la extensión de las islas con las zonas constantes del número de rotación.	50
3.25. Comparación del número de rotación sobre la línea $p_r = 0$ de $q = 0,3$ con la sección de Poincaré correspondiente, se marcan en verde las zonas caóticas.	51
3.26. Comparación del número de rotación sobre la línea $p_r = 0$ de $q = 0,5$ con la sección de Poincaré correspondiente, se señalan en pares de líneas verde y azul las zonas caóticas y en rojo la extensión de dos islas que cruzan $p_r = 0$.	52
3.27. Comparación del número de rotación sobre la línea $p_r = 0$ de $q = 0,7$ con la sección de Poincaré correspondiente, se señalan en verde las zonas caóticas y en rojo los centros de las resonancias $2/9$, $6/25$, $9/37$ y $2/7$ que cruzan $p_r = 0$.	53
3.28. Comparación del número de rotación sobre la línea $p_r = 0$ de $q = 0,9$ con la sección de Poincaré correspondiente, se señalan en verde las zonas caóticas que cruzan $p_r = 0$. Se señalan las resonancias $2/9$, $6/25$ y $9/37$ que cruzan el eje $p_r = 0$.	54
3.29. Detalle del número de rotación la figura (3.28) en el intervalo caótico entre las resonancias $6/25$ y $9/37$.	54
3.30. Detalle del número de rotación la figura (3.28) en el intervalo caótico entre la resonancia de $9/37$ y el punto hiperbólico ubicado en $r = 3,30812$.	55
3.31. Detalle del número de rotación la figura (3.30), se muestra las diferentes planicies que aparecen en la zona caótica.	55
3.32. Proyección sobre el plano ecuatorial de dos órbitas de $q = 0,9$ con un tiempo de simulación moderado y ubicadas en la región caótica entre las resonancias de $6/25$ y $9/37$ de la figura (3.29) con condiciones iniciales idénticas excepto $r_1 = 3,30011$ y $r_2 = 3,30012$. Ambas órbitas permanecen <i>adheridas</i> durante este trayecto, donde son prácticamente indistinguibles.	56
3.33. Detalle de la figura (3.32). Durante el trayecto las órbitas se mantienen unidas entre sí.	57
3.34. Prolongación de la trayectoria de la figura (3.32), donde al aumentar el tiempo de simulación el efecto de permanecer en una región caótica se visualiza cuando divergen ambas órbitas.	57

3.35. Espacio de configuraciones de la figura (3.34). Ambas geodésicas divergen cuando el tiempo de simulación es lo suficientemente grande.	58
3.36. Trayectoria de una geodésica caótica de $q = 0,9$ ubicada entre las resonancias de $2/9$ y $6/25$ con condición inicial $r = 3,29$. Está órbita evoluciona para dirigirse al horizonte de eventos.	58
A.1. Función principal (main) la cuál controla los datos y realiza las llamadas correspondientes a las subrutinas.	64
A.2. Primera parte del diagrama de flujo para la función del método de Runge-Kutta-Fehlberg.	65
A.3. Segunda parte del diagrama de flujo para la función del método de Runge-Kutta-Fehlberg.	66

Lista de abreviaturas

KAM Kolmogorov-Arnold-Moser

PB Poincare-Birkhoff

Lista de símbolos

$\eta_{\mu\nu}$	métrica de Minkowski
$g_{\mu\nu}$	métrica general
τ	tiempo propio
\vec{v}	vector en espacio plano de tres dimensiones
\dot{f}	derivada de la función f respecto a un parámetro afín como el tiempo propio
x^μ	vector de coordenadas generalizadas en espacio-tiempo de cuatro dimensiones
ξ^μ	vector de coordenadas locales en espacio-tiempo de cuatro dimensiones
a_μ	vector covariante
$T^{\mu\dots\nu}$	tensor contravariante
$T_{\mu\dots\nu}$	tensor covariante
$T_{\mu\dots\nu}^{\alpha\dots\beta}$	tensor mixto
$T_{\mu\dots\nu;\kappa}^{\alpha\dots\beta}$	derivada covariante respecto a la coordenada x^κ
$\frac{D}{D\tau}$	derivada covariante respecto al parámetro afín τ



Autorización para digitalización y comunicación pública de Trabajos Finales de Graduación del Sistema de Estudios de Posgrado en el Repositorio Institucional de la Universidad de Costa Rica.

Yo, Adrián Francisco Eduarte Rojas, con cédula de identidad 2-0713-0248, en mi condición de autor del TFG titulado COMPORTAMIENTO REGULAR Y CAÓTICO EN ÓRBITAS GEODÉSICAS CON MOMENTO DE MASA CUADRUPOLAR.

Autorizo a la Universidad de Costa Rica para digitalizar y hacer divulgación pública de forma gratuita de dicho TFG a través del Repositorio Institucional u otro medio electrónico, para ser puesto a disposición del público según lo que establezca el Sistema de Estudios de Posgrado. SI NO *

*En caso de la negativa favor indicar el tiempo de restricción: _____ año (s).

Este Trabajo Final de Graduación será publicado en formato PDF, o en el formato que en el momento se establezca, de tal forma que el acceso al mismo sea libre, con el fin de permitir la consulta e impresión, pero no su modificación.

Manifiesto que mi Trabajo Final de Graduación fue debidamente subido al sistema digital Kerwá y su contenido corresponde al documento original que sirvió para la obtención de mi título, y que su información no infringe ni violenta ningún derecho a terceros. El TFG además cuenta con el visto bueno de mi Director (a) de Tesis o Tutor (a) y cumplió con lo establecido en la revisión del Formato por parte del Sistema de Estudios de Posgrado.

INFORMACIÓN DEL ESTUDIANTE:

Nombre Completo: Adrián Francisco Eduarte Rojas

Número de Carné: B12315 Número de cédula: 2-0713-0248

Correo Electrónico: adrian.eduarte@ucr.ac.cr

Fecha: 11/11/2021 Número de teléfono: 89433891

Nombre del Director (a) de Tesis o Tutor (a): Dr. Francisco Frutos Alfaro

Adrián Eduarte R.
FIRMA ESTUDIANTE

Nota: El presente documento constituye una declaración jurada, cuyos alcances aseguran a la Universidad, que su contenido sea tomado como cierto. Su importancia radica en que permite abreviar procedimientos administrativos, y al mismo tiempo genera una responsabilidad legal para que quien declare contrario a la verdad de lo que manifiesta, puede como consecuencia, enfrentar un proceso penal por delito de perjurio, tipificado en el artículo 318 de nuestro Código Penal. Lo anterior implica que el estudiante se vea forzado a realizar su mayor esfuerzo para que no sólo incluya información veraz en la Licencia de Publicación, sino que también realice diligentemente la gestión de subir el documento correcto en la plataforma digital Kerwá.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción.

Las técnicas computacionales han permitido un gran avance en diversas áreas de la ciencia al permitir visualizar el comportamiento de la dinámica de ciertos sistemas descritos por medio de un conjunto de ecuaciones, en este sentido la relatividad general se ha visto ampliamente beneficiada por el uso de programas computacionales ya que las ecuaciones resultantes pueden ser muy complicadas debido al campo gravitacional fuerte de objetos compactos como agujeros negros y las no linealidades presentes. Utilizando programas computacionales se ha podido simular el comportamiento de la dinámica que siguen las partículas tanto masivas como no masivas cerca del horizonte de eventos de un agujero negro [5].

El presente proyecto consiste en el estudio de la dinámica de partículas de prueba de masa unitaria alrededor de agujeros negros que rotan sobre su eje mediante la implementación de un programa en C de superficies de Poincaré. Debido a que muchos modelos que describen el campo gravitacional en el exterior de objetos compactos son de reciente publicación existe poca literatura específica para estos modelos como la métrica tipo-Kerr [6], por lo tanto la realización de simulaciones y el análisis de los diversos comportamientos del espacio de fases permitirá comprender como este modelo puede presentar caos.

El uso de la teoría de sistemas dinámicos para complementar el conocimiento de la mecánica clásica ha generado importantes resultados especialmente en sistemas no lineales y el correspondiente caos presente en sistemas físicos. El retrato de fases permite estudiar propiedades del movimiento de partículas y permite visualizar como el sistema puede oscilar de manera regular o irregular en alguna región del espacio y determinar la evolución del mismo. En el caso de sistemas no lineales el caos puede estar presente si

las condiciones son adecuadas, para ello el uso de soluciones numéricas y por lo tanto de computadoras es indispensable, ya que para estos casos no existe una solución analítica.

Al avanzar en el conocimiento del comportamiento de los objetos compactos tanto teórica como experimentalmente nos damos cuenta que el uso de simulaciones cada vez es más que necesario ya que permite comparar directamente la teoría con lo observado. Existen diversas soluciones a las ecuaciones de Einstein que modelan la región externa al horizonte de eventos del agujero negro, cada una revela información de como el espacio-tiempo puede deformarse dependiendo de la masa, la rotación e incluso la forma y la carga del agujero negro. La combinación de los conocimientos de mecánica clásica, relatividad general y sistemas dinámicos tiene el potencial de revelar información concerniente a los objetos compactos previamente no vista.

Dado el avance en la rapidez con la que las computadoras pueden realizar cálculos, el proyecto de investigación pretende crear una herramienta computacional capaz de aprovechar las capacidades modernas de las computadoras, como el procesamiento en paralelo y el trabajo en memoria RAM, para obtener soluciones numéricas a diversas geodésicas para partículas masivas cerca de objetos compactos.

Una de las principales herramientas de estudio lo constituyen las secciones de Poincaré. Su construcción permite visualizar las posibles estructuras del movimiento alrededor de objetos compactos y analizar las implicaciones físicas de posibles elementos de caos y regiones de estabilidad.

Este trabajo se enfoca, inicialmente, en el estudio de una métrica (soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein) que presentan momento cuadrupolar de masa de manera perturbativa a la solución de Kerr por medio de un parámetro adicional, esta deformación del objeto compacto afectará la dinámica del movimiento particularmente en la región cercana al horizonte de eventos y posteriormente en la comparación con diversas métricas presentes en la literatura y así visualizar las particularidades de cada solución a las ecuaciones de Einstein.

1.2. Antecedentes.

El movimiento planetario a inspirado a científicos como Kepler y Newton para tratar de describir y explicar su paso por los cielos lo cual llevo al desarrollo de las leyes de Kepler para el movimiento planetario y la ley de gravitación universal de Newton la cual unida a las leyes de la mecánica Newtoniana de hecho puede predecir las leyes de Kepler [2]. Como tal los planetas se mueven en órbitas elípticas con el sol en uno de los focos de la elipse. Este movimiento sería el caso solamente si existiera el sol y un planeta,

el efecto de los otros planetas va a efectuar una perturbación en la órbita dando lugar a una precesión del perihelio, esto permitió predecir la existencia del planeta Neptuno. Sin embargo, al aplicar esta técnica al planeta Mercurio que también presenta una alta precesión del perihelio no se pudo encontrar nunca un objeto planetario capaz de perturbar fuertemente la órbita de Mercurio [2,9].

Tiempo después Einstein dio una descripción de la gravedad y la geometría del espacio-tiempo en su teoría de la Relatividad General, al aplicarla con la solución de Schwarzschild se logró demostrar que la precesión del perihelio de Mercurio se debe a las no linealidades debidas al campo gravitacional del Sol [15]. Esta solución de Schwarzschild representa un espacio-tiempo deformado por una masa sin rotación y presenta una singularidad la cual representa el radio de Schwarzschild e indica que si un objeto masivo tiene un radio igual al radio de Schwarzschild entonces el objeto genera una singularidad en el espacio-tiempo conocida como agujero negro, el cual tiene una gravedad tan intensa que ni la luz no es capaz de escapar del horizonte de eventos [1, 15, 16, 18].

Existen más soluciones a las ecuaciones de Einstein las cuales pueden modelar el espacio-tiempo circundante de un objeto compacto cuando tiene nuevas características como rotación. Roy Kerr quien logró encontrar una solución exacta a esta clase de objetos compactos [15, 16]. Grossman et al. [10] muestra el comportamiento regular y armónico de la solución de Kerr.

A partir de la métrica de Kerr existen muchas más que se obtienen al realizarle perturbaciones y en el límite que la perturbación desaparece deben ser iguales. La métrica de Manko-Novikov la cual representa el espacio-tiempo exterior al objeto compacto con simetría axial en el vacío además de presentar multipolos [7, 14]. La métrica de Quevedo-Mashoon constituye una solución que es la superposición de la métrica de Kerr con la de Erez-Rosen, también contando con un momento cuadrupolar de masa [7, 14]. Además, recientemente otro trabajo de una métrica tipo-Kerr que modela a un objeto achatado nuevamente por medio del momento cuadrupolar [6].

La teoría de sistemas dinámicos puede utilizarse en conjunto a la mecánica relativista para estudiar el movimiento caótico como presenta el trabajo de Contopoulos et al. [3, 4, 13]. Finalmente, una serie de investigaciones proponen usar el espectro medido de las ondas gravitacionales para estudiar la naturaleza de las geodésicas producidas por objetos compactos y en particular determinar la estructura del espacio-tiempo circundante a dicho objeto. Si esta estructura presenta caos y su dinámica se puede asociar a medidas experimentales, entonces sería una confirmación de que el objeto compacto no presenta simetría esférica y un estudio detallado permitirá inferir el parámetro del momento cuadrupolar por medio de simulaciones y comparación con los datos experi-

mentales [27–29].

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Elementos de Mecánica Clásica.

En el siglo XVII Isaac Newton fundamenta las leyes de la mecánica clásica junto con aportes al cálculo infinitesimal, esto dio inicio a grandes avances en física y matemática actuales, gracias a ello se puede calcular el movimiento de objetos cotidianos a partir del análisis de las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo. Sin embargo, existen otros formalismos para formular la mecánica clásica que permiten generalizar los conceptos dados por Newton, además de permitir matemáticamente estudiar las áreas de la donde la mecánica de Newton no puede aplicarse como el mundo cuántico y la relatividad general. Estos formalismos tienen como base el *principio de mínima acción de Hamilton*, que indica que todo sistema mecánico se puede caracterizar por una función $L(q_i, dq_i/dt, t)$, donde el conjunto de q_i se conocen como *coordenadas generalizadas* y dq_i/dt como *velocidades generalizadas* [9, 12].

Si en dos instantes de tiempo t_1 y t_2 se conocen el valor de las coordenadas $q_i(t_1) = q_1$ y $q_i(t_2) = q_2$, entonces la acción se define por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, dq_i/dt, t) dt \quad (2.1)$$

El principio de Hamilton establece que la trayectoria seguida por el sistema dinámico es aquella que minimice la acción. Para determinar tal trayectoria se realiza una variación de las coordenadas $\delta q_i(t)$ tal que $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ y se establece $\delta S = 0$. Adicionalmente, se utiliza el convenio de suma de Einstein [9, 12].

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, dq_i/dt, t) dt = 0 \quad (2.2)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt = 0 \quad (2.3)$$

Por la propiedad de las variaciones se tiene que puede conmutar con las derivadas $\delta \dot{q} = \delta(dq/dt) = d(\delta q)/dt$ y se puede integrar por partes [9, 12].

$$\delta S = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i dt = 0 \quad (2.4)$$

El primer término de la ecuación (2.4) se anula al evaluar δq_i . Dado que las variaciones δq_i son arbitrarias, entonces el término en la integral debe ser nulo, lo cual da las *ecuaciones de Euler-Lagrange* las cuales describen a evolución del sistema mecánico por medio de n ecuaciones de segundo orden, una por cada coordenada q_i .

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (2.5)$$

Para la mayoría de sistemas mecánicos puede obtenerse la función L conocida como *lagrangiano*, por medio de la energía cinética T y la energía potencial V , donde el lagrangiano toma la forma $L = T - V$ en caso de sistemas no disipativos. En caso de tener sistemas con fuerzas no conservativas siempre se puede obtener un lagrangiano modificando la acción por medio de multiplicadores de Lagrange [9, 12].

Al comparar con la segunda ley de Newton, se define el momento conjugado como $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$. La ventaja de las ecuaciones de Euler-Lagrange es que permite visualizar simetrías y cantidades conservadas en diversas coordenadas como las esféricas, a diferencia de las leyes de Newton que resulta complicado de generalizar a otras coordenadas. Sin embargo, al igual que las Leyes de Newton, se requieren n ecuaciones de segundo grado en q para poder integrar el sistema [9, 12].

La mecánica hamiltoniana es el segundo formalismo utilizado para integrar un sistema físico, en la cual la función $H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ codifica la información de un sistema físico por medio de las coordenadas generalizadas y sus correspondientes momentos conjugados. Esta función está altamente relacionada con la energía del sistema y en muchos casos es una cantidad conservada. Para definir el *hamiltoniano* se utiliza la transformada de Legendre de las velocidades generalizadas del lagrangiano:

$$H(q_i, p_i, t) = p_i \dot{q}_i \Big|_{p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i} - L(q_i, \dot{q}_i, t) \Big|_{p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i} \quad (2.6)$$

donde la barra vertical indica que las velocidades deben reemplazarse por su momento conjugado respectivo ya que el hamiltoniano es solo función de las coordenadas generalizadas, los respectivos momentos conjugados y el tiempo. Para obtener las ecuaciones

de movimiento por medio del hamiltoniano se analiza el diferencial del hamiltoniano y las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned}
 dH &= \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\
 &= \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\
 &= -\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt
 \end{aligned}$$

Comparando los términos que acompañan los diferenciales, se obtienen las *ecuaciones canónicas de Hamilton* que describen el movimiento del sistema [9, 12]

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2.7)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (2.9)$$

En caso de que el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo entonces el hamiltoniano es una constante de movimiento, en la mayor parte de los casos es la energía del sistema ya que [9, 12]

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$\frac{dH}{dt} = -\dot{p}_i \dot{q}_i + \dot{q}_i \dot{p}_i - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$H(q_i, p_i) = E \quad (2.10)$$

Las ecuaciones diferenciales (2.7) y (2.8) permiten determinar la evolución temporal de las coordenadas y sus momentos generalizados. El conjunto de coordenadas generalizadas q_i y momentos conjugados p_i juntos forman el espacio de fases de un sistema el cual contiene la información de la dinámica del mismo. En el caso de que las ecuaciones son muy complicadas puede ser necesario el uso de métodos numéricos para resolverlas, lo cual es especialmente útil cuando el sistema es no lineal [9, 12].

Originalmente este formalismo fue descubierto como parte de la mecánica clásica y

tiene mucha utilidad al considerar un gran número de partículas. Además, ofrece una ventaja considerable sobre la visión de Newton y es que puede generalizarse para la relatividad general y usar las mismas ecuaciones canónicas.

Existe un tercer formalismo para modelar sistemas físicos por medio de una sola ecuación diferencial parcial conocida como *ecuación de Hamilton-Jacobi*. En la ecuación (2.4) se tomó que las variaciones deben ser nulas en los puntos extremos del sistema $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$. Sin embargo, al tomar la acción como función de las coordenadas y solamente se utiliza la variación inicial $\delta q_i(t_1) = 0$ se obtiene este nuevo formalismo. También, en la ecuación (2.4) se utilizan las ecuaciones de Euler-Lagrange para eliminar el término de la integral, $\delta q_i(t_1) = 0$ para evaluar el límite inferior del lado derecho y se utiliza $t_2 = t$ para el límite superior [9, 12]

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = p_i \delta q_i \quad (2.11)$$

De la ecuación (2.11), se obtiene una definición alternativa al momentum conjugado del sistema

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad (2.12)$$

Como las variaciones no afectan el tiempo en la acción o el lagrangiano, entonces se puede considerar a la acción como función de las coordenadas generalizadas y del tiempo. Adicionalmente, por la propia definición de la acción se puede obtener la derivada total de la acción respecto al tiempo [9, 12]

$$\frac{dS}{dt} = L = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + p_i \dot{q}_i \quad (2.13)$$

Utilizando la definición del hamiltoniano se obtiene:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(q_i, p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, t \right) = 0 \quad (2.14)$$

Esta expresión se conoce como *ecuación de Hamilton-Jacobi*. Esta única ecuación permite integrar de manera general las ecuaciones de movimiento [9, 12].

En caso de que el sistema conserve la energía mecánica E , entonces la solución de la ecuación anterior adquiere la forma $S(q_i, t) = S_0(q_i) - Et$, lo cual permite separar la acción y encontrar una acción reducida S_0 que solo depende de las coordenadas generalizadas. Adicionalmente, si alguna de las coordenadas q_j es cíclica entonces su momento conjugado p_j es una cantidad conservada y la acción puede separarse nuevamente $S_0(q_1, \dots, q_j, \dots) = p_j q_j + S_1$, donde S_1 no depende de q_j . El proceso se puede

repetir para todas las variables cíclicas. Aunque los sistemas reales poseen pocas o tal vez ninguna variable cíclica, es posible encontrar en muchos casos especiales tantas constantes de separación α_i como coordenadas independientes [9, 12].

Para sistemas que conserven la energía mecánica y presentan movimiento periódico se puede encontrar un conjunto de variables llamadas *variables de acción-ángulo* que simplifican las ecuaciones de movimiento. Para sistemas de un solo grado de libertad el hamiltoniano toma la forma $H(q, p) = E$, en este caso se puede resolver para encontrar el momentum conjugado como función de la coordenada y la energía $p(q, E)$. Se define la variable de acción J como [9]

$$J = \oint pdq \quad (2.15)$$

La variable J únicamente es función de la energía por lo tanto el hamiltoniano toma la forma $H(J) = E$ y J es una constante de movimiento. La acción reducida, también llamada función característica de Hamilton, pasa a ser función de la coordenada generalizada q y de la acción J , $S_0 = S_0(q, J)$. Utilizando la ecuación de Hamilton-Jacobi como una transformación canónica y la acción reducida $S_0 = S_0(q, J)$ como generatriz de la transformación se puede ver a J como un momento conjugado, mientras que su coordenada asociada conocida como variable angular ω está dada por la ecuación de transformación [9, 12]

$$\omega = \frac{\partial S_0}{\partial J} \quad (2.16)$$

Dado que el hamiltoniano únicamente es función de J se puede establecer las ecuaciones de movimiento por medio de las ecuaciones canónicas

$$\dot{J} = 0, \quad (2.17)$$

$$\dot{\omega} = \frac{\partial H(J)}{\partial J} = v(J) \quad (2.18)$$

donde $v(J)$ es una función de J y constante [9]. Entonces, la integración de $\dot{\omega}$ da como resultado

$$\omega = v(J)t + \beta \quad (2.19)$$

Con las ecuaciones anteriores se puede encontrar la solución del sistema en términos de las variables de acción-ángulo, $q = q(J, \omega, t)$. Adicionalmente, al considerar un cambio de ω durante un periodo en la coordenada original q , definido por [9]

$$\Delta\omega = \oint \frac{\partial\omega}{\partial q} dq = \oint \frac{\partial^2 S_0}{\partial q \partial J} dq \quad (2.20)$$

Dado que J no es la variable de integración, la derivada respecto a J puede salir de la integral [9]

$$\Delta\omega = \frac{d}{dJ} \oint \frac{\partial S_0}{\partial q} dq = \frac{d}{dJ} \oint p dq = \frac{d}{dJ} J = 1 \quad (2.21)$$

Como se está tomando solamente un periodo de tiempo τ , se tiene que

$$\Delta\omega = v\tau = 1 \quad (2.22)$$

Entonces, la constante v representa la frecuencia del movimiento. Esta técnica permite encontrar frecuencias asociadas al movimiento sin necesidad de obtener la solución completa del sistema [9].

Las variables de acción-ángulo pueden generalizarse para ciertos sistemas especiales que cumplen con las mismas condiciones anteriores. Si existe un conjunto de coordenadas que vuelven completamente separable la ecuación de Hamilton-Jacobi, entonces se puede encontrar una acción reducida para cada coordenada y una constante de separación [9].

Por lo tanto se pueden encontrar que los momentos p_i son de la forma

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} S_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = p_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (2.23)$$

Adicionalmente, se definen las variables de acción J_i para cada coordenada q_i

$$J_i = \oint p_i dq_i = \oint (q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n) dq_i \quad (2.24)$$

De la separación de variables y la definición de J_i se puede ver que cada variable de acción ahora es alguna función de las constantes de separación α_i . Al identificar α_1 con la energía del sistema, se obtiene

$$H(J_1, \dots, J_n) = \alpha_1 \quad (2.25)$$

Las variables de ángulo correspondientes ω_i toman la forma

$$\omega_i = \frac{\partial S_0}{\partial J_i} \quad (2.26)$$

Finalmente, las ecuaciones de movimiento se generalizan

$$\dot{J}_i = 0 \quad (2.27)$$

$$\dot{\omega}_i = \frac{\partial H(J_1, \dots)}{\partial J_i} = v_i(J_1, \dots) \quad (2.28)$$

Aunque el movimiento de algún sistema físico no sea periódico, las variables (q_i, p_i) pueden presentar periodicidades en su subespacio de fases. Si las frecuencias separadas no forman fracciones racionales de las restantes, entonces la trayectoria no forma una curva cerrada. En su lugar forma una curva abierta de Lissajous. Cuando las frecuencias forman fracciones racionales, entonces el movimiento es periódico. La ventaja de este formalismo es que puede caracterizar al sistema por sus frecuencias sin necesidad de obtener la solución completa [9].

Para un sistema con n grados de libertad se puede describir por medio de un espacio de fases $2n$ dimensional utilizando las coordenadas generalizadas q_i y sus respectivos momentos p_i . Un sistema que pueda ser completamente separable en la ecuación de Hamilton-Jacobi entonces posee un conjunto de n constantes de movimiento J_i llamadas acciones como se mencionó anteriormente. Las acciones forman un subespacio de fases n dimensional cuya topología es un toro n dimensional, cuyos puntos están dados por las variables angulares ω_i [30].

Los n ciclos independientes del sistema corresponden a cada uno de los distintos circuitos del toro. Un sistema con un solo grado de libertad su toro corresponde a las curvas cerradas $H(q, p) = E$. Para un sistema con muchos grados de libertad, la naturaleza de la trayectoria está determinada por sus frecuencias $v_i(J_1, \dots)$. Si las frecuencias son todas inconmensurables, entonces la trayectoria nunca regresará a su punto inicial y eventualmente cubrirá densamente al toro. Por otro lado si existe algún par de frecuencias cuya razón sea un número racional, entonces el movimiento se restringe a un subespacio del toro. En particular, si existen $n - 1$ razones independientes de números racionales entre las frecuencias, entonces el subespacio es de unidimensional y su trayectoria es una curva cerrada [30].

El problema de Kepler puede ser tratado utilizando las variables de acción ángulo ya que cumple con las condiciones de periodicidad y conservación de la energía [9, 30]. Sin embargo, existen potenciales que no pueden ser integrables por lo cual la teoría de perturbaciones puede obtener una solución aproximada con un error dependiente del parámetro de perturbación [9]. En estos sistemas perturbados la maquinaria de construcción de toros permite encontrar propiedades utilizando análisis de frecuencias por medio de la transformada de Fourier. La mayoría de las órbitas débilmente caóticas

permanecerán muy cerca de las trayectorias regulares, pasando entre toros invariantes [31].

2.2. Sistemas Dinámicos

Un sistema dinámico es una representación matemática de la evolución de un estado representado por las n variables de estado $x^i(t)$ las cuales dependen de un parámetro t , para la mayoría de aplicaciones de la física puede ser el tiempo. Los sistemas dinámicos pueden ser de tiempo continuo si t es una variable continua en este caso se representa por la ecuación (2.29) que es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. El otro posible sistema dinámico está representado por variable discreta en este caso la ecuación (2.30) es un conjunto de ecuaciones recursivas, en este caso el tiempo siempre evoluciona como un número entero positivo [17]

$$\dot{x}^i = f^i(x^j, t) \quad (2.29)$$

$$x^i(k+1) = f^i(x(k), k) \quad (2.30)$$

La mayoría de sistemas físico no requieren que la variable de evolución aparezca explícitamente en las funciones f^i , pero en caso de que aparezca es suficiente con aumentar el número de variables con $x^{n+1} = t$ así un sistema no autónomo se puede convertir en uno autónomo. Muchos sistemas dinámicos presentes en la física se pueden modelar como sistemas lineales, por lo tanto se puede simplificar la forma de las ecuaciones (2.29) y (2.30), de manera que queden ecuaciones matriciales, para simplificar la notación el conjunto de variables de estado se representará por \vec{x} [17]

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \quad (2.31)$$

$$\vec{x}(k+1) = A\vec{x}(k) \quad (2.32)$$

De la ecuación (2.32) se puede reducir a un estado inicial $\vec{x}(0)$ iterado $k+1$ veces para tener la solución final [17]

$$\vec{x}(k+1) = A^{k+1}\vec{x}(0) \quad (2.33)$$

La solución de un sistema dinámico continuo se denomina integral del sistema, la cual muchas veces no se puede conseguir de manera analítica; sin embargo, existen

métodos numéricos para obtenerla. Un sistema dinámico tiene una clase especial de puntos que van a caracterizar la integral del sistema, los cuales muchas veces son más fáciles de obtener analíticamente y dan mucha información del comportamiento del sistema, tales puntos se denominan puntos fijos o estacionarios y se caracterizan, en un sistema continuo, por la ecuación (2.34) y para un sistema discreto por la ecuación (2.35) [17]

$$\dot{\vec{x}} = 0 \quad (2.34)$$

$$\vec{x}(k+1) = \vec{x}(k) \quad (2.35)$$

Un sistema dinámico cuya condición inicial es un punto fijo implica que el sistema no evolucionará, se quedará en ese punto fijo. Los puntos fijos se pueden clasificar como estables también llamados atractores o sumideros, inestables llamados repulsores o fuentes. Un sistema dinámico cuya condición inicial sea muy cercana a un punto fijo inestable tiene la propiedad de que empieza a evolucionar de manera que se aleje de ese punto inestable a pesar de ser punto fijo de ahí el nombre repulsor, se puede identificar el sistema como un flujo entonces el punto inestable es similar a una fuente y la corriente se aleja de este punto. Mientras que si el sistema empieza lo suficientemente cerca de un punto fijo estable, este evolucionará hasta dicho punto motivo por el cual se llama atractor o sumidero. Existe otro posible punto fijo en el cual en una dirección del flujo se tiene un punto fijo estable, pero en otra dirección es inestable. Se dice que un punto es Liapunov estable si todas las trayectorias que empiezan cerca de este punto fijo permanecen cercanas a él en todo momento [17].

El retrato de fases o espacio de fases se conoce a la variedad formada en el caso de un sistema dinámico sencillo por $\{x_i, \dot{x}_i\}$. El estudio de un sistema al verificar su espacio de fases puede revelar la información de puntos fijos y de la evolución del sistema. En sistemas dinámicos se conoce al espacio formado por $\{x_i\}$, lo que se ven como órbitas dependiendo de la configuración inicial [17].

En un sistema físico el espacio de fases es un poco más complejo ya que el espacio de fases está formado por $\{x_i, p_i\}$, los puntos del espacio de configuraciones o coordenadas generalizadas $\{x_i\}$ y sus respectivos momentos conjugados $\{p_i\}$, por lo cual la definición de momentos conjugados a partir de un lagrangiano permite a un sistema físico establecer el retrato de fases [17].

Otro concepto de suma importancia es el del ciclo límite el cual es una trayectoria cerrada *aislada*, en donde aislada significa que las trayectorias vecinas no son cerradas.

Si el campo vectorial se atrae a las trayectorias entonces se dice estable o atractiva, si el campo vectorial es saliente del ciclo límite se dice inestable y existen casos combinados por lo que recibe el nombre de semi estable [17].

Los ciclos límites son propios de los sistemas no lineales, un sistema lineal puede llegar a tener órbitas cerradas pero no son aisladas. Además, un sistema gradiente es aquel en que existe una función diferenciable V tal que el sistema dinámico se puede transformar en $d\vec{x}/dt = -\nabla V$, donde V se conoce como función potencial y un resultado importante de esta función es que las órbitas cerradas no existen para sistemas gradientes. Este resultado es de suma importancia porque permite analizar un sistema dinámico a partir de esta función aún cuando no sea un sistema físico [17].

El estudio de sistemas no lineales siempre presenta particularidades y el teorema de Poincaré-Bendixon da un fuerte indicativo del tipo de comportamiento de un sistema dinámico. En un plano de fase si una trayectoria está confinada a una región acotada y cerrada que no contiene puntos fijos entonces la trayectoria eventualmente se aproxima a una órbita cerrada, nada más complicado es posible. Pero para sistemas de varias dimensiones puede ocurrir muchas cosas, las trayectorias pueden circular sobre una región acotada sin llegar a un punto fijo, ni estabilizarse en un ciclo límite por ejemplo algunas de las órbitas de agujeros negros de tipo Kerr. Otras trayectorias en el espacio de configuraciones pueden realizar complejas geométricas al estar oscilando entre dos ciclos límite sin asentarse en ninguno como el atractor extraño de Lorenz, donde la evolución de la partícula es aperiódica y sensible a cualquier cambio minúsculo en las condiciones iniciales [17].

2.2.1. Caos y Secciones de Poincaré.

Cuando un sistema dinámico no lineal presenta una serie de evoluciones diferentes para condiciones iniciales muy cercanas entre sí, se dice que presenta caos ya que las soluciones empiezan a divergir exponencialmente unas de otras después de algún momento determinado, Las ecuaciones donde se presenta son deterministas, pero cuando se presenta el caos se vuelven impredecibles debido a la alta sensibilidad a las condiciones iniciales. También existe otra forma de presentarse el caos y es la sensibilidad al cambio de uno o más parámetros del sistema dinámico, por ejemplo el mapeo logístico de la ecuación (2.36), en el cual dependiendo del parámetro r el movimiento puede pasar de ser ordenado a caótico incluso pasando por ventanas o islas de estabilidad [9]

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \tag{2.36}$$

Aunque existen diversas formas de relacionar el caos y determinar si realmente existe caos o no, el exponente de Liapunov permite dar un vistazo como divergen dos órbitas diferentes que en el momento de iniciar su recorrido se encuentren muy cercanas entre sí. Además, el exponente de Liapunov permite clasificar si en un tiempo lejano las órbitas se alejan exponencialmente o se mantienen muy juntas. Para ello se toma la distancia en cada momento entre órbitas $s(t)$ y la ecuación (2.37) da la manera de aproximar el coeficiente λ . Si $\lambda > 0$ el movimiento es caótico y se puede empezar a apreciar el caos para un tiempo $\tau \sim 1/\lambda$ y mientras mayor sea el tiempo la evolución caótica es completamente aparente. Si el exponente de Liapunov es negativo entonces las órbitas permanecen cercanas una de la otra por un tiempo indefinido y el resultado es un atractor normal [9,17]

$$s(t) \sim s_0 e^{\lambda t} \quad (2.37)$$

Un mapa de Poincaré es un corte al espacio de fases de manera transversal, así las órbitas del espacio de fase cruzan cierta sección del espacio con una dimensión menor por ejemplo un plano cada cierto tiempo. De esta manera el problema de órbitas en el espacio de fases se puede transformar en un problema de puntos fijo, este problema generalmente se aborda por computadora debido a las extensas ecuaciones no lineales muchas veces imposibles de resolver de manera analítica. Una vez construido un mapa de Poincaré es posible encontrar órbitas cerradas y movimiento periódico e incluso zonas de estabilidad y caos [17].

El caos como tal es un fenómeno que solo se presenta en fenómenos no lineales, los sistemas hamiltonianos no lineales más simples son aquellos de tercer orden que se pueden considerar como perturbaciones a un sistema conocido como un oscilador armónico. Al fijar los parámetros del sistema hamiltoniano de $2n$ dimensiones y las condiciones iniciales se puede construir la sección de Poincaré al tomar una de las coordenadas generalizadas y su respectivo momento conjugado q_i, p_i se puede construir una superficie de Poincaré. Se debe tomar en cuenta si el sistema físico descrito por un lagrangiano no depende explícitamente del tiempo entonces el hamiltoniano es una cantidad conservada en muchos casos la energía del sistema o la energía efectiva del sistema, lo cual va a imponer la reducción del movimiento en una dimensión y además las simetrías del sistema reducen los grados de libertad reduciendo más las dimensiones del sistema. Lo anterior tiene una consecuencia importante al tomar un sistema hamiltoniano con energía fija, las condiciones iniciales no son libres entre sí el propio hamiltoniano impone una relación entre condiciones iniciales, al menos una de las condiciones debe calcularse para mantener el parámetro de la energía [9].

Las secciones de Poincaré se visualizan por medio de cálculos numéricos, y al construirla se pueden ver trayectorias cerradas en las cuales el punto central es un punto fijo del sistema. En mecánica clásica newtoniana los hamiltonianos son invariantes antes transformaciones del tipo $\dot{q}_i \rightarrow -\dot{q}_i$ lo cual implica una simetría en el eje $\dot{q}_i = 0$ en una sección de Poincaré, pero no necesariamente sobre el eje $q_i = 0$ ya que las perturbaciones y términos no lineales sólo son funciones de las coordenadas. En sistemas hamiltonianos presentes en relatividad general esta invarianza no necesariamente existe ya que el hamiltoniano puede presentar términos cruzados $\dot{q}_i \dot{q}_j$ [9].

Además, las secciones de Poincaré pueden presentar regiones ovaladas que si se buscan condiciones para hacerlas más pequeñas colapsan a puntos fijos llamados *puntos fijos elípticos*. Para una *única* sección de Poincaré que presente una curva continua que se interseccione a sí misma, los puntos de intersección se denominan puntos hiperbólicos [9].

El caos puede o no presentarse en un sistema hamiltoniano no lineal, dependiendo de la capacidad de influir el término no lineal, para términos no lineales que dependan de algún parámetro de manera perturbativa si el parámetro es lo suficientemente pequeño puede no presentarse el caos, sin embargo, al ir creciendo el comportamiento del sistema dinámico va a cambiar drásticamente desde empezar a parecer las zonas ovaladas y curvas con puntos hiperbólicos, hasta presentar regiones de puntos dispersos al azar sin formar curvas. Estos puntos dispersos en la sección de Poincaré corresponden a la intersección de esta sección con un atractor extraño de varias dimensiones, lo cual es una evidencia de caos. Al ir aumentando este parámetro hasta un valor crítico se llenará prácticamente todo el espacio disponible para la sección de Poincaré, dejando pocas trayectorias regulares cerradas o ninguna [9].

Las islas de estabilidad son regiones de trayectorias cerradas cuando el caos está presente de manera análoga a un mar de caos con islas de estabilidad. En una sección de Poincaré también al realizar una ampliación cerca de ciertos puntos especiales como los puntos hiperbólicos o donde hay curvas cercanas entre sí, se puede llegar a observar que estas regiones no necesariamente se cortan en un punto, en cambio pueden ser una serie de islas y puntos de caos muy próximos entre sí formando estructuras que se repiten. Las curvas regulares grandes en una sección de Poincaré pueden llamarse islas de orden cero, las islas de orden uno se denominan a las posibles islas circundantes, de esta manera se puede establecer una jerarquía de islas que puede llegar a ser infinita, teniendo geometría fractal [9].

2.2.2. Teoremas de Kolmogorov-Arnold-Moser y Poincaré-Birkhoff.

La mayoría de los sistemas hamiltonianos reales tienden a ser no integrables por pequeños términos perturbativos. En muchos de estos casos, se puede descomponer el hamiltoniano total \mathcal{H} en dos partes $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \Delta\mathcal{H}$, donde \mathcal{H}_0 es el término dominante e integrable y $\Delta\mathcal{H}$ es la perturbación pequeña. Para facilitar el análisis se realiza una transformación canónica al término dominante $\mathcal{H}_0(p, q)$ a un nuevo hamiltoniano que sea nulo $K_0(P, Q) = 0$. Para el término dominante $K_0 = 0$ se pueden resolver las ecuaciones canónicas de Hamilton para obtener nuevas coordenadas y momentos Q_0, P_0 que son constantes de movimiento. Al aplicar la misma transformación al hamiltoniano completo \mathcal{H} se obtiene un hamiltoniano transformado ΔK_0 que se usa para obtener las correcciones a primer orden de las coordenadas y momentos Q_1, P_1 por medio de las ecuaciones de movimiento [9]

$$\frac{\partial}{\partial P} \Delta K_0(P, Q) = \frac{dQ_1}{dt} \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial Q} \Delta K_0(P, Q) = -\frac{dP_1}{dt} \quad (2.39)$$

Al integrar las ecuaciones anteriores se pueden obtener el primer orden de perturbación de las coordenadas. Al continuar con el proceso para obtener las ecuaciones de orden superior se obtiene una técnica iterativa para obtener cada vez mejores aproximaciones al sistema completo. Sin embargo, identificar cuando un sistema perturbado va a tener soluciones estables o cuando las soluciones pueden tener comportamiento que las mantendrá por largos periodos de tiempo cercanas a las soluciones no perturbadas requiere el uso de dos teoremas que identifican su evolución temporal [9, 19].

El primer teorema importante en el estudio de sistemas no-integrables relacionado con caos y en particular a órbitas sometidas a campos gravitacionales fuertes producto de objetos compactos como agujeros negros o estrellas de neutrones es el teorema Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) [9]:

Si el movimiento acotado de un sistema Hamiltoniano integrable \mathcal{H}_0 se perturba por un pequeño $\Delta\mathcal{H}$ que hace Hamiltoniano total $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \Delta\mathcal{H}$, no integrable y si se satisfacen las siguientes condiciones: la perturbación $\Delta\mathcal{H}$ es pequeña y las frecuencias ω_i de \mathcal{H}_0 son inconmensurables.

Entonces el movimiento permanecerá confinado a un N -toro, excepto para un conjunto despreciable de condiciones iniciales que resulta en una trayectoria serpenteante

sobre la superficie de energía.

El segundo teorema importante que caracteriza el movimiento de sistemas hamiltonianos sometidos a una perturbación es el teorema de Poincaré-Birkhoff (PB), en su forma simplificada [19]:

Para un sistema hamiltoniano sometido a una perturbación, de las infinitas órbitas resonantes de la parte integrable del sistema solamente sobreviven un número par al ser perturbado. La mitad de estas órbitas periódicas son estables, la otra mitad son inestables.

El teorema de KAM indica que la forma de las órbitas perturbadas serán similares a las pertenecientes del sistema no perturbado, apenas se deforman los toros. Mientras que el teorema de PB muestra que el rompimiento de los toros al someter al hamiltoniano a una perturbación dará la formación de nuevas estructuras visibles en la sección de Poincaré.

2.3. Relatividad General.

A inicios del siglo XX Albert Einstein se dio cuenta que las leyes de Newton solo eran una aproximación de las leyes que gobiernan el Universo cuando la velocidad es mucho menor a la velocidad de la luz y el campo gravitacional es relativamente débil. La teoría de la relatividad general trata el campo gravitatorio como una deformación del espacio y el tiempo debido a la presencia de la materia, el éxito de esta teoría ha permitido grandes avances en la astronomía y astrofísica, ya que logra predecir correctamente diversos fenómenos como las anomalías en la órbita de Mercurio, lentes gravitacionales y la existencia de agujeros negros [1].

Para expresar el comportamiento del espacio-tiempo se hace uso de la geometría diferencial donde la métrica es la manera matemática de generalizar el concepto de distancia, solamente que ahora se consideran que existen tres dimensiones espaciales y una temporal, de manera similar al teorema de Pitágoras. Para efectos de simplificar las ecuaciones se tomará el sistema de unidades naturales donde la rapidez de la luz en el vacío es unitaria al igual que la constante de gravitación universal de Newton $c = G = 1$. En caso de tener un espacio-tiempo plano la métrica que la representa es la de Minkowski que en coordenadas cartesianas tiene la forma

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.40)$$

Acá el objeto $\eta_{\mu\nu}$ se conoce como *tensor métrico o métrica de Minkowski* y se representa matricialmente como

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

El elemento dx^μ se representa por un vector de 4 componentes de la forma

$$dx^\mu = \begin{pmatrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Se puede observar en la ecuación (2.41) una propiedad de los tensores métricos, al intercambio de los índices μ con ν permanece invariante por lo que es simétrico con respecto a estos índices. Como se observa en la ecuación (2.40) el tiempo cuenta con un signo diferente a las coordenadas espaciales esto es característico de la relatividad especial y general, a esto se le denomina *signatura* [1]. Cabe destacar que la escogencia de signos puede cambiar en diversas fuentes literarias y no afectará la física, sin embargo, una vez escogida una convención de signos debe mantenerse para tener consistencia en la física.

Albert Einstein formuló su teoría al darse cuenta que la geometría del espacio-tiempo es debido al campo gravitacional producido por la materia y la energía, en otras palabras podemos expresar un campo gravitacional por medio de una métrica $g_{\mu\nu}$. En ausencia de gravedad en el vacío el espacio-tiempo adquiere una geometría plana dada por la métrica de Minkowski. Además, por medio de experimentos mentales y geometría diferencial formuló el principio de equivalencia que establece que para cada punto del espacio-tiempo en un campo gravitacional es posible escoger un sistema de coordenadas inercial local tal que en un vecindario del punto lo suficientemente pequeño las leyes de la naturaleza toman la misma forma que en un sistema de coordenadas cartesianas sin acelerar en ausencia de gravedad [18].

Como Weinberg indica este principio es algo vago, pero da coincidencias con la geometría diferencial en especial con un axioma que Gauss tomó para fundamentar la geometría no-euclídea. Para estudiar las ecuaciones de Einstein primero se debe establecer una manera matemática del principio de equivalencia. Entonces en una región muy pequeña del espacio-tiempo se puede tomar un conjunto de coordenadas ξ^μ localmente inerciales también llamadas coordenadas geodésicas locales en las cuales no se siente la fuerza gravitacional. En analogía con la segunda ley de Newton se puede cons-

truir una ecuación de movimiento en estas coordenadas, las cuales no van a presentar fuerzas gravitacionales.

Para construir una ecuación que siempre mantenga la forma al aplicar un cambio a coordenadas se debe utilizar un parámetro invariante llamado parámetro afín, si tenemos una partícula masiva el tiempo propio puede utilizarse como parámetro afín, que en el caso de velocidades pequeñas es igual a la noción de tiempo tradicional que se tenía de mecánica clásica. El tiempo propio es el tiempo que marca un reloj que está en reposo respecto a una partícula [18]

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (2.43)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es una métrica en un espacio tiempo en presencia de gravedad.

Por analogía con la segunda ley de Newton se puede construir una fuerza generalizada que permanezca invariante ante una transformación de coordenadas, por lo cual representa una ley de la física, para ello se debe utilizar el tiempo propio como parámetro

$$f^\alpha = m \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} \quad (2.44)$$

En coordenadas inerciales locales está fuerza simplemente se anula ya que no están presentes ni los efectos gravitacionales y da la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (2.45)$$

Esta ecuación nos da un camino recto en un vecindario muy pequeño donde se pueden usar coordenadas inerciales, sin embargo, se desea encontrar una ecuación de movimiento en coordenadas generalizadas que permita ver el efecto de la gravedad presente. Por lo tanto, se aplica una transformación de coordenadas, en este caso se nota que el tiempo propio es un invariante ante una transformación por lo tanto al cambiar a coordenadas generales

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.46)$$

Al realizar cambios de coordenadas solamente las ecuaciones escritas en el lenguaje de tensores van a mantener la forma es decir son invariantes. Existen objetos similares a tensores y vectores que no poseen leyes de transformación homogéneas por lo cual al aplicar una transformación de coordenadas la ecuación tendría nuevos términos que no tienen significado físico. Tales objetos como el símbolo de Christoffel, que pronto se

definirá, contienen las primeras derivadas del tensor métrico en su regla de transformación lo cual no corresponde a la de un tensor, sin embargo, combinaciones de este objeto pueden generar tensores y por lo tanto representar leyes físicas [18].

Si se reduce algebraicamente está ecuación al de multiplicar por $\partial x^\lambda / \partial \xi^\alpha$ se obtiene

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (2.47)$$

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.48)$$

Está ecuación se conoce como ecuación de la geodésica, representa la trayectoria de una partícula en un espacio-tiempo en presencia de un campo gravitacional. Tal ecuación también puede obtenerse a partir de principio variacional. El objeto $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ se conoce como símbolo de Christoffel o conexión afín la cual da una medida de cómo se deforma el espacio-tiempo, este objeto no es un tensor debido a que su ley de transformación no representa la de un tensor mixto [18]

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda'} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\tau\sigma}^\rho + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \quad (2.49)$$

El símbolo de Christoffel tal como se definió presenta el inconveniente de utilizar dos sistemas coordenados para ser calculado, uno localmente inercial y otro de coordenadas generalizadas, sin embargo, se puede encontrar una relación directa del símbolo de Christoffel con la métrica y sus primeras derivadas, se puede demostrar que [18]

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right) \quad (2.50)$$

Al diferenciar un vector o un tensor respecto a alguna de las coordenadas o incluso al parámetro afín no necesariamente se encuentra un nuevo tensor, debido a que al realizar una transformación de coordenadas a una derivación parcial de uno de estos objetos se encuentran términos no homogéneos por lo que es necesario una nueva operación similar a la derivación capaz de generar nuevos vectores o tensores tal operación se conoce como derivada covariante respecto a la coordenada x^α denotada por $T_{;\alpha}$, donde T es un vector o un tensor ya sea covariante o contravariante [18]

$$T_{\lambda;\rho}^{\mu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\rho} T_\lambda^{\mu\sigma} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu T_\lambda^{\nu\sigma} + \Gamma_{\rho\nu}^\sigma T_\lambda^{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\rho}^\kappa T_\kappa^{\mu\sigma} \quad (2.51)$$

También es posible definir la derivada covariante respecto a una curva $x^\alpha(\tau)$, en este caso la derivación es muy similar, simplemente se continua por regla de la cadena y se define por [18]

$$\frac{DT_\nu^\mu}{D\tau} = T_{\nu;\lambda}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} \quad (2.52)$$

Si la derivada covariante respecto a una curva $x^\alpha(\tau)$ es cero, la ecuación resultante da la evolución del vector conocida como transporte paralelo. Este concepto es muy importante, ya que si se realiza a lo largo de una curva cerrada en una variedad y el vector regresa al punto de destino, entonces cualquier cambio se debe a la curvatura de tal variedad [18].

Una propiedad importante de la derivación covariante es que la derivada de una función escalar coincide con la derivada covariante. También es una operación lineal y sigue las propiedades de regla del producto de derivadas. La derivada covariante del tensor métrico es cero debido a que en coordenadas inerciales locales la conexión afín y la derivada parcial se anulan, debido a esto al realizar la transformación a cualquier otra coordenada de un tensor también se anularía la derivada covariante del tensor métrico [18].

Al analizar la geometría de espacios curvos con las leyes de la física Einstein llegó a la conclusión de que existe un principio que debe ligar ambos mundos en especial con la gravitación, el principio se denomina *Covariancia General* para complementar el principio de equivalencia, este principio establece que la forma de las ecuaciones de la física en forma de relatividad especial y en ausencia de campos gravitacionales se pueden reemplazar las derivadas parciales por derivadas covariantes para incluir el campo gravitacional, y la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ por la métrica en espacio-tiempo curvo $g_{\mu\nu}$ [18].

Para encontrar el efecto gravitacional sobre una partícula a partir de las coordenadas inerciales locales y la relatividad especial primero se busca ecuaciones que se cumplen en ausencia de campos como la conservación de la cuadrivelocidad de una partícula masiva en coordenadas inerciales locales ξ^α [18]

$$U_f^\alpha = \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \quad (2.53)$$

$$\frac{dU_f^\alpha}{d\tau} = 0 \quad (2.54)$$

Esta ecuación aún no es covariante general, primero debe pasarse a coordenadas generalizadas y cambiar a derivadas covariantes, entonces se obtiene nuevamente la ecuación de la geodésica (2.48) [18]

$$\frac{DU^\mu}{D\tau} = \frac{dU^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu U^\nu U^\lambda = 0 \quad (2.55)$$

donde

$$U^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (2.56)$$

Aunque la ecuación de la geodésica represente la trayectoria de una partícula con una masa pequeña en un espacio-tiempo curvo, todavía falta encontrar la relación con la curvatura de la variedad y una manera de encontrar la métrica en presencia de la gravedad. Debido a que el espacio tiempo cuenta con $3 + 1$ dimensiones es necesario representar la curvatura por medio del tensor de Riemann-Christoffel $R_{\mu\nu\kappa}^\lambda$ [18]

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda \quad (2.57)$$

Como tal este es el único tensor que se puede formar con la métrica y sus primeras y segundas derivadas, además tiene la propiedad que si este tensor es idénticamente cero junto con que el tensor métrico tenga tres autovalores del mismo signo en cualquier sistema coordenado para algún punto X , entonces el espacio-tiempo es plano y el tensor métrico es equivalente a la métrica de Minkowski para todo punto del espacio tiempo. En muchas aplicaciones y literatura se encuentra la versión completamente covariante del tensor de curvatura [18]

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\sigma} R_{\mu\nu\kappa}^\sigma \quad (2.58)$$

Si se contrae el tensor de Riemann es posible encontrar un único tensor conocido como tensor de Ricci, cualquier otra contracción daría cero [18]

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \quad (2.59)$$

El tensor de Ricci tiene la propiedad de ser simétrico con respecto al cambio de los índices y al contraerlo da el escalar de curvatura R [18]

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} \quad (2.60)$$

Las ecuaciones de campo de Einstein son un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales las cuales relacionan la curvatura del espacio-tiempo con la presencia de materia, en ellas se usan para encontrar los coeficientes de la métrica. Las propias ecuaciones de campo de Einstein relacionan el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ el cual representa una especie de medida de la curvatura del espacio-tiempo con el tensor de energía impulso el cual representa la presencia de materia y campos físicos. Para ello se basa en comparaciones con la mecánica clásica, en este caso se toma el tensor de segundo orden más general

posible que tenga divergencia covariante igual a cero, tal tensor está formado por el tensor de curvatura de Ricci junto con la métrica. El resultado da las ecuaciones de campo de Einstein, en el caso de presencia de materia el tensor de energía-impulso aparece, pero tiene divergencia covariante también igual a cero [1, 16, 18]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.61)$$

Además, en las ecuaciones de campo (2.61) aparece la constante cosmológica Λ la cual fue introducida por Einstein para mantener la consistencia de las ecuaciones y actualmente se conoce como la densidad de energía oscura del universo. Para estudios a gran escala del universo requiere la presencia de la constante que actualmente sigue sin conocerse su valor exacto, aunque se ha determinado que tiene un valor sumamente pequeño y para los estudios de objetos estelares esta constante no va a afectar el movimiento de partículas de prueba por lo que se puede usar como $\Lambda = 0$ [1].

La relatividad General es la teoría que fundamenta la cosmología actual, la cual relaciona la geometría del espacio-tiempo con la gravedad principalmente y otros campos y se representa como soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein y a partir de ellas Friedmann obtuvo las soluciones para una métrica homogénea e isotrópica la cual describe a gran escala el universo, además de presentar también la expansión del universo y de ella se pudieron deducir que el universo tuvo una era donde la radiación predominaba sobre la materia [1, 18].

2.4. Métricas que modelan los objetos compactos.

Existe una gran cantidad de estudios para modelar el comportamiento de la dinámica de las partículas alrededor de objetos compactos tanto modelos teóricos basados en relatividad general, observaciones de estrellas, materia y radiación cerca de los agujeros negros; sin embargo, los modelos teóricos tienen el detalle de presentar ecuaciones diferenciales muy complejas que en muy pocos casos sencillos pueden ser resueltas de manera analítica y la única manera de visualizarlas es usando simulaciones por computadora las cuales permiten obtener datos muy precisos del comportamiento general los cuales pueden ser constatados con observaciones de materia alrededor de ellos [1, 2].

El más sencillo de los modelos que representan la deformación del espacio alrededor de un objeto esférico es la métrica de Schwarzschild, el cual modela el espacio-tiempo estático fuera del objeto compacto, estacionario y con simetría esférica [1]

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.62)$$

El modelo de la ecuación (2.62) puede utilizarse para describir las órbitas planetarias en el sistema solar que para el caso de la mayoría de planetas se reduce a las leyes de Kepler y Newton; sin embargo, la órbita de Mercurio al estar tan cerca del Sol puede presentar una precesión. La precesión del perihelio implica que la órbita va cambiando con el tiempo, manteniendo constante el plano orbital, y la relatividad general a través de la ecuación (2.62) predice correctamente este movimiento. Si el radio del objeto que crea la deformación es igual al radio que se encuentra en el denominador llamado radio de Schwarzschild $r = 2MG/c^2$ el objeto se convierte en un agujero negro lo cual se ve como una indefinición, un agujero, en el propio espacio-tiempo. La física en el interior de un agujero negro aún no se comprende exactamente por la gravedad extrema en este lugar y la falta de un modelo de mecánica cuántica de la gravedad efectiva [1, 2, 15].

La formación de agujeros negros se debe al colapso de estrellas mucho más masivas que el Sol, las cuales al finalizar su vida dejan de fusionar elementos en su núcleo y la gravedad comienza a aplastar la estrella. Debido a los procesos cuánticos como el principio de exclusión de Pauli y la neutronización, las capas exteriores de la estrella explotan violentamente liberando una gran cantidad de energía mientras que el núcleo se aplasta hasta convertirse en una estrella de neutrones o un agujero negro dependiendo de la masa original de la estrella. El modelo de la ecuación (2.62) es sumamente sencillo para describir a un agujero negro ya que no considera si se encuentra en rotación [2, 15].

Las métricas estacionarias, es decir con rotación, en general pueden escribirse de la siguiente forma [6]

$$ds^2 = -V dt^2 + 2W dt d\phi + X dr^2 + Y d\theta^2 + Z d\phi^2 \quad (2.63)$$

donde V , W , X , Y , Z se denominan potenciales y pueden especificarse para simplificar la forma de la métrica. Cada potencial es función de las coordenadas espaciales y temporales. Los momentos generalizados obtenidos a partir de la métrica son

$$\begin{aligned} p_t &= \mu(-V\dot{t} + W\dot{\phi}) = -E \\ p_r &= \mu X\dot{r} \\ p_\theta &= \mu Y\dot{\theta} \\ p_\phi &= \mu(W\dot{t} + Z\dot{\phi}) = L_z \end{aligned} \quad (2.64)$$

De estos momentos generalizados p_t y p_ϕ son cantidades conservadas para toda la órbita, relacionadas con la energía E de la partícula de prueba de masa μ y la componente del momentum angular L_z sobre el eje de simetría y son característicos para todas las métricas de la forma de la ecuación (2.63). Una vez planteados los momentos generales se puede obtener el hamiltoniano \mathcal{H}

$$\mathcal{H} = \frac{\mu}{2} \left(-\frac{1}{\mu^2(VZ + W^2)}(E^2Z + 2EL_zW - L_z^2V) + \frac{p_r^2}{\mu^2X} + \frac{p_\theta^2}{\mu^2Y} \right) = \mathcal{E} \quad (2.65)$$

El propio hamiltoniano es igual a una cantidad conservada análoga a la energía que se tomará igual a $\mathcal{E} = -1$ para partículas de prueba con masa y $\mathcal{E} = 0$ en caso de partículas sin masa como la luz. A partir de esto se usan las ecuaciones de canónicas de Hamilton (2.7) y (2.8) para modelar el movimiento de una partícula de prueba alrededor del agujero negro dada una métrica en términos de sus potenciales V , W , X , Y , Z , lo cual queda explícito en las ecuaciones (2.66)

$$\begin{aligned} \dot{r} &= p_r/X \\ \dot{\theta} &= p_\theta/Y \\ \dot{t} &= \frac{1}{\tilde{\rho}^2}(EZ + L_zW) \\ \dot{\phi} &= \frac{1}{\tilde{\rho}^2}(L_zV - EW) \\ \dot{p}_r &= \frac{1}{2} (p_r^2 \partial_r X/X^2 + p_\theta^2 \partial_r Y/Y^2 + \partial_r V_{alm}) \\ \dot{p}_\theta &= \frac{1}{2} (p_r^2 \partial_\theta X/X^2 + p_\theta^2 \partial_\theta Y/Y^2 + \partial_\theta V_{alm}) \\ \dot{p}_\phi &= 0 \\ \dot{p}_t &= 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

Dada la dificultad para obtener una expresión analítica para la solución de estas ecuaciones diferenciales acopladas se utiliza un programa de computadora para resolverlas numéricamente, tomando la masa de la partícula de prueba como $\mu = 1$ para efectos de simplificar las ecuaciones.

2.4.1. Métrica de Kerr.

Un modelo ampliamente usado en las investigaciones sobre agujeros negros y otros objetos compactos es el de Kerr que toma en cuenta la rotación del propio objeto compacto, además de ser una solución exacta de las ecuaciones de campo. Para describir la rotación del objeto compacto se utiliza el momentum angular J o el momentum angular por unidad de masa $a = J/M$. La métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist está dada por [15]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 Mr \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.67)$$

donde

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \quad (2.68)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (2.69)$$

Una característica importante del espacio-tiempo modelado por la métrica de Kerr es la integrabilidad, la existencia de la solución exacta a la ecuación diferencial de la geodésica. Esto se debe principalmente a la existencia de la constante de Carter que es una cantidad conservada y permite al sistema ser integrable [16]. Los sistemas integrables por definición no son caóticos ya que no tienen alta sensibilidad a las condiciones iniciales [3]. Adicionalmente, el movimiento alrededor de un objeto compacto con métrica de Kerr se visualiza como un *toro* alrededor del objeto [16].

Las métricas consideradas a continuación, a pesar de tener características en común con la métrica de Kerr, no presentan la constante de Carter, por lo tanto no son sistemas integrables y cuyas soluciones son numéricas o son aproximadas [6, 11, 14]. Esta clase de métricas pueden poseer geodésicas caóticas y también cadenas de Birkhoff u otras estructuras en el espacio de fases que puede visualizarse en una sección de Poincaré. Sin embargo, cabe recalcar que por el teorema de KAM, la mayoría de los toros de las órbitas no son destruidos, solamente se deforman ligeramente del caso de Kerr [20].

2.4.2. Métrica tipo-Kerr con momento de masa cuadrupolar.

Entre las métricas, existe una que modela aproximadamente el espacio-tiempo alrededor de un objeto achatado que rota y tiene la característica de que posee explícitamente el momento cuadrupolar de masa. Conocida como métrica tipo-Kerr con momento de masa cuadrupolar fue propuesta por Frutos et al. es dada por el siguiente conjunto de ecuaciones [6, 8]

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{e^{-2\psi}}{\rho^2} (\Delta - a^2 \sin^2 \theta) \\
 W &= -\frac{2Jr}{\rho^2} \sin^2 \theta \\
 X &= \rho^2 \frac{e^{2\chi}}{\Delta} \\
 Y &= \rho^2 e^{2\chi} \\
 Z &= \frac{e^{2\chi}}{\rho^2} ((r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta) \sin^2 \theta
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

donde

$$\psi = \frac{q}{r^3} P_2 + 3 \frac{Mq}{r^4} P_2 \tag{2.71}$$

$$\chi = \frac{qP_2}{r^3} + \frac{1}{3} \frac{Mq}{r^4} (-1 + 5P_2 + 5P_2^2) + \frac{1}{9} \frac{q^2}{r^6} (2 + 6P_2 + 21P_2^2 + 25P_2^3) \tag{2.72}$$

y P_2 es un polinomio de Legendre

$$P_2 = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \tag{2.73}$$

El parámetro q es el momento cuadrupolar de masa y representa la deformación de la fuente de campo gravitacional respecto a un objeto esférico.

En el Anexo (B) se presentan otras soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein utilizadas para modelar el espacio-tiempo circundante al objeto compacto. Estos modelos presentan momentos de masa cuadrupolar pero se diferencian entre sí por la expansión multipolar.

Capítulo 3

Resultados y Simulaciones

3.1. Resultados y Simulaciones de la métrica tipo-Kerr con Momento de Masa Cuadrupolar.

Como se menciona en la sección (2.4.2), la métrica tipo-Kerr es una solución aproximada de las ecuaciones de campo de Einstein, basada en una perturbación hasta el orden cuadrupolar de la métrica de Kerr [6]. En otras palabras el parámetro del término cuadrupolar q determina la perturbación a la métrica de Kerr. Cabe resaltar que el caso $q = 0$ coincide exactamente con la métrica de Kerr.

Tomando esto en cuenta se han realizado diferentes simulaciones, utilizando el programa escrito en lenguaje C para este proyecto y la herramienta GNUPLOT para el proceso de graficación. Para los cálculos de las órbitas en la métrica tipo Kerr se tomó como base $q = 0$ y se aumentó posteriormente este parámetro.

Para iniciar el estudio del comportamiento de las geodésicas para la métrica de tipo Kerr, primeramente se selecciona un conjunto de parámetros para el caso $q = 0$ el cual debe reproducir la métrica de Kerr.

Para el conjunto de parámetros $M = 1,0$, $a = 0,99$, $E = 0,932516$, $L_z = 1,2$ y $q = 0$, los cuales fueron tomados de [10] ya que presentan una base para comparar con el caso Kerr. En este artículo presentan diversas simulaciones con el objetivo de mostrar casos especiales del comportamiento armónico. Está estructura armónica puede perturbarse al aumentar el momento de masa cuadrupolar. En la figura (3.1) se muestra una simulación de la trayectoria en el espacio de configuraciones para el conjunto de parámetros seleccionados.

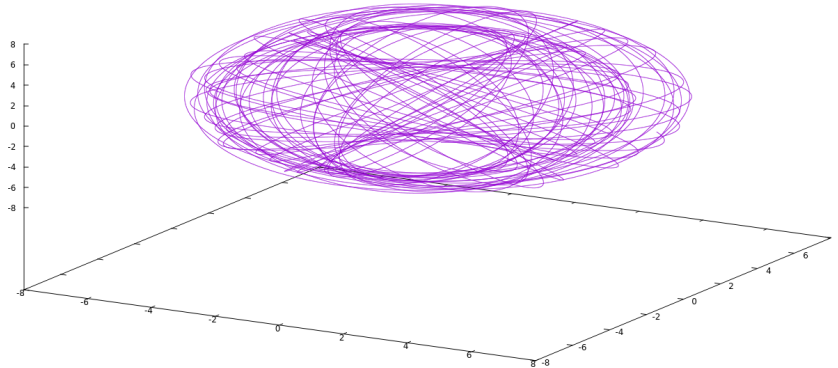


Figura 3.1: Órbita en el espacio de configuración típico de Kerr ($q = 0$). Los parámetros son: $M = 1,0$, $a = 0,99$, $E = 0,932516$, $L_z = 1,2$ y las condiciones iniciales son: $r = 7,1$, $\theta = \pi/2$, $\phi = 0$, $t = 0$, $p_r = 0$, $p_\phi = L_z = 1,2$, $p_t = -E = -0,932516$. La condición de p_θ se calcula por medio de la ecuación (2.65) seleccionando la raíz positiva de esta ecuación.

Como se ve en la figura (3.2) la proyección r - $\cos(\theta)$ nos puede mostrar que esta órbita no es cerrada ya que rellena el espacio permitido.

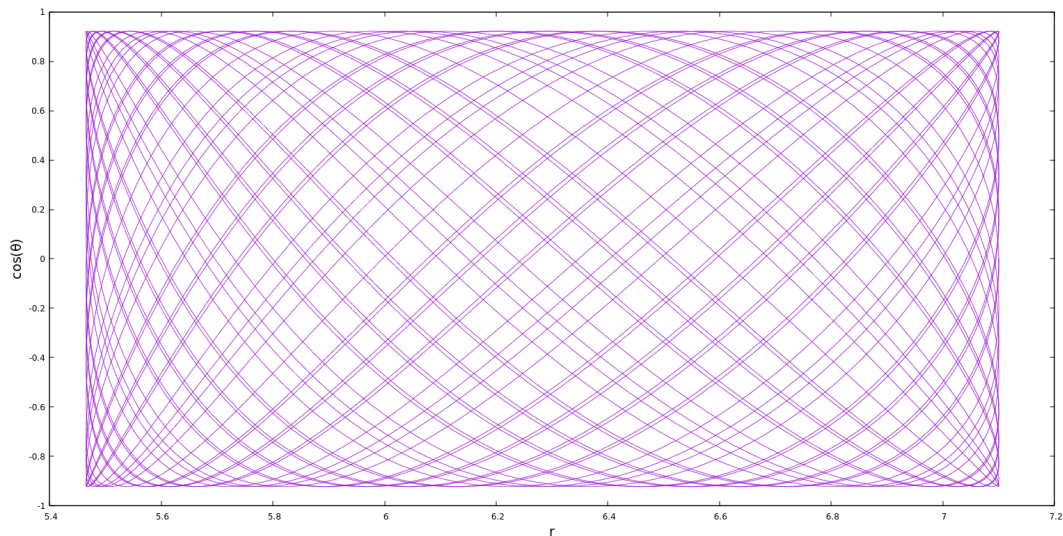


Figura 3.2: Proyección r - $\cos(\theta)$ de la figura (3.1).

La proyección ρ - z de la figura (3.3) muestra la región permitida según la energía del sistema.

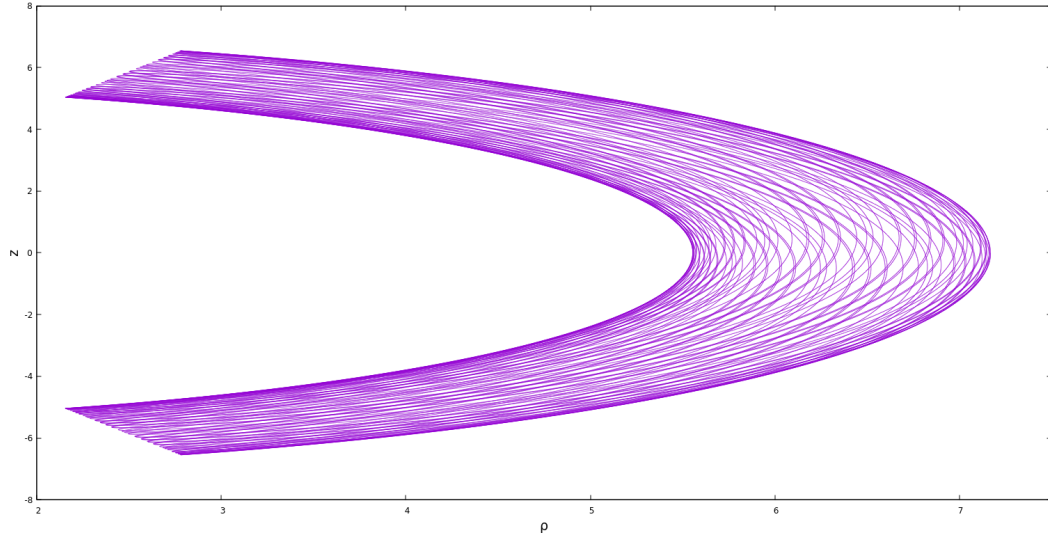


Figura 3.3: Proyección $\rho - z$ de la figura (3.1).

La sección de Poincaré de la figura (3.4) muestra la intersección en el plano $\theta = \pi/2$ y $p_\theta > 0$ de la familia de órbitas del espacio de fases con los parámetros anteriores. En esta figura se observa que el conjunto de trayectorias forman una estructura regular de *elipses* debido a que la métrica de Kerr forman geodésicas integrables [10,15,16], por lo tanto no se debe esperar encontrar alguna clase de estructura de islas en ninguna parte ni siquiera cerca del horizonte de eventos [26].

En esta misma figura solamente se observa un único punto elíptico, el centro de las curvas cerradas que corresponde a $r = 6,294455$. En la figura (3.5) se muestra la órbita en el espacio de configuraciones. Dado que este punto elíptico en el mapa de Poincaré se encuentra sobre el eje de $p_r = 0$ entonces también corresponde a un punto estacionario para la coordenada radial lo cuál implica que no va haber un cambio en el momentum radial. En la figura esto se visualiza en una órbita ordenada donde la partícula se encuentra siempre con $r = 6,294455$. Además, cabe recalcar que las coordenadas de Boyer-Lyndquist la coordenada radial no corresponde exactamente con la coordenada radial esférica, lo cual se refleja que la geodésica siga un camino ligeramente achatado en lugar de ser esférico.

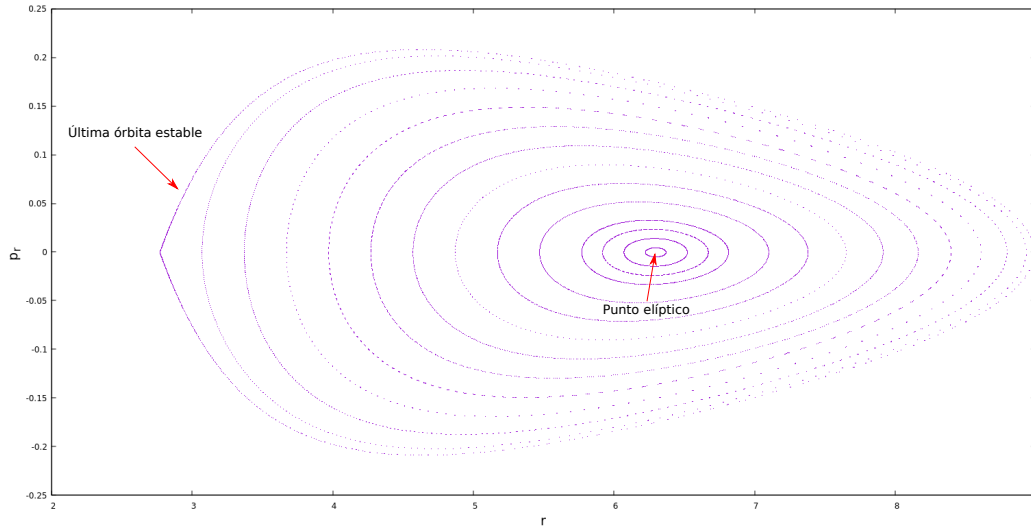


Figura 3.4: Sección de Poincaré del plano $\theta = \pi/2$ y $p_\theta \geq 0$ para los parámetros: $M = 1,0$, $a = 0,99$, $E = 0,932516$, $L_z = 1,2$ y $q = 0$, la cual coincide con Kerr.

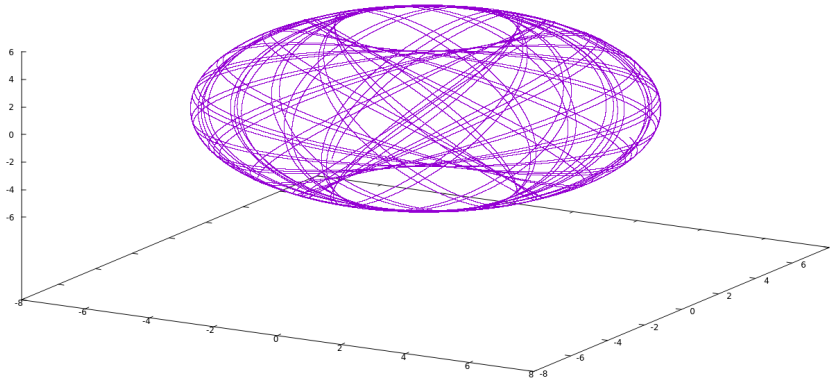


Figura 3.5: Órbita correspondiente al único punto elíptico ubicado en $r = 6,294$ de la sección de Poincaré de la figura (3.4) para el conjunto de parámetros $M = 1$, $a = 0,99$, $L_z = 1,2$ y $E = 0,932516$. Las condiciones otras iniciales $\theta = \pi/2$, $\phi = 0$, $t = 0$, $p_r = 0$, $p_\phi = L_z$ y $p_t = -E$. La condición p_θ se calcula por medio de la ecuación (2.65).

Las secciones de Poincaré perturbadas por medio del momento cuadrupolar q van a presentar islas, algunas centradas en el eje $p_r = 0$ y otras aparecen de manera simétrica fuera de él. Por el teorema de KAM, cuando hay una pequeña perturbación a las órbitas integrables, entonces la mayoría de los *toros* perturbados van a sobrevivir deformados y a tales toros se les conoce como *toros de KAM* [19]. Adicionalmente, cuando el campo

gravitacional sea más intenso y asimétrico, en particular si q es lo suficientemente alto, al estar cerca de la última órbita estable, entonces se espera visualizar caos en la dinámica de la trayectoria. Existen dos posibilidades para los toros destruidos. La primera, que estas trayectorias se vuelvan inestables y se dirijan al horizonte de eventos. La segunda, que se transformen en estructuras de tipo islas y puntos hiperbólicos en la sección de Poincaré.

En la figura (3.6) se observa con más detalle las diferentes órbitas en la región correspondiente a las zonas estables más cercanas al objeto compacto y muestra la región con la última órbita estable para este conjunto parámetros. Cualquier otra geodésica entre el horizonte de eventos en el plano $r = 1,14107$ y última órbita estable $r = 2,76819$, deberá caer al horizonte de eventos. En esta región la gravedad es tan intensa que las partículas masivas no tienen más opción que dirigirse eventualmente al horizonte del objeto compacto.

Adicionalmente, se puede observar que cualquier órbita inestable para este caso, no genera ninguna clase de estructura en la sección de Poincaré, estas geodésicas se encuentran fuera de la isla de estabilidad principal y solamente corresponden a partículas que caen al horizonte de eventos.

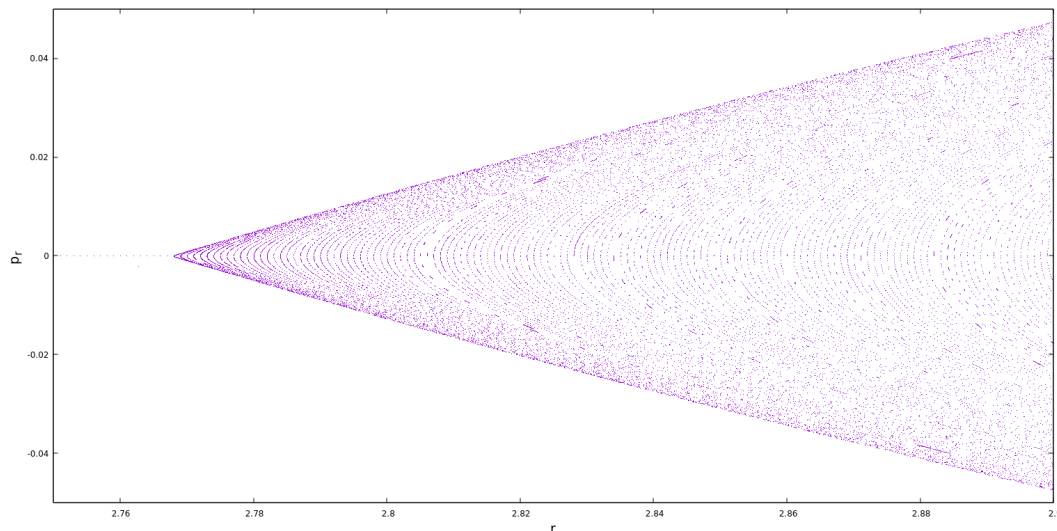


Figura 3.6: Detalle de de la figura 3.5 en la región del horizonte cercana a la última órbita estable.

Dado que el sistema dinámico es integrable debido a la existencia de las cuatro constantes de movimiento: energía, la componente z del momento angular, la energía del reposo y la constante de Carter [16], entonces se refleja en la ausencia de otras estructuras en la sección de Poincaré. Se concluye que no puede existir ninguna región

caótica cuando se utiliza la métrica de Kerr como modelo para representar el espacio-tiempo alrededor de un objeto compacto. Además, una consecuencia en la dinámica de las partículas masivas es que cualquier órbita estable con suficiente tiempo va a rellenar una región similar a un *toro*, sin importar las condiciones iniciales [3].

3.1.1. Momentos Cuadrupolares $q = 0,01$.

En esta sección se analizan de las diferencias en la dinámica del movimiento de una partícula de prueba al agregar el parámetro de momento de masa cuadrupolar q . En la sección anterior se pudo observar que en la sección de Poincaré existen únicamente curvas cerradas delimitadas por la última órbita estable la cuál separa la región de estabilidad de la zona donde las partículas caen al horizonte de eventos si está muy cerca o escapar si está muy largo.

En la métrica tipo-Kerr las ecuaciones de movimiento no tienen variables separables debido a la perturbación del momento de masa cuadrupolar q . Esta consecuencia se refleja en la pérdida de la constante de Carter, por lo tanto el sistema no es integrable si $q \neq 0$. Manteniendo el mismo conjunto de parámetros anteriores de masa, energía, momento angular en el eje z , y parámetro de giro para describir la familia de geodésicas, pero agregando el momento q , nos encontramos, que aunque este sea una perturbación pequeña, la dinámica del campo gravitacional cambia cerca del horizonte de eventos.

Al escoger una perturbación relativamente pequeña como $q = 0,01$ se podrán observar tanto similitudes como diferencias destacables. Entre las similitudes primeramente, existe una concordancia entre el modelo Kerr y el tipo-Kerr en la forma general de las secciones de Poincaré como se observa en la figura (3.7).

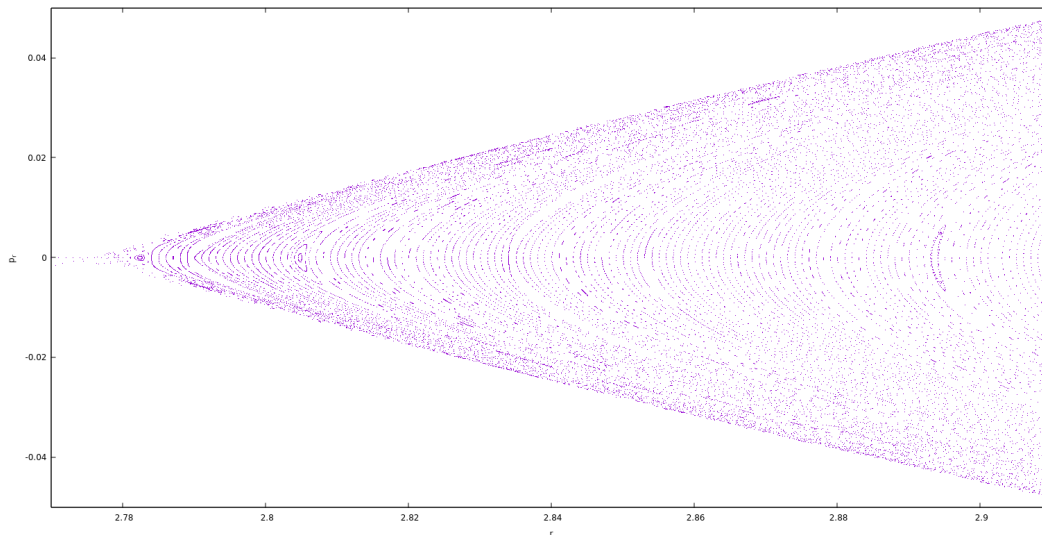


Figura 3.7: Sección de Poincaré para el conjunto de parámetros $M = 1,0$, $a = 0,99$, $L_z = 1,2$, $E = 0,932516$ y $q = 0,01$.

Segundo, se puede observar que para r alto (lado derecho de la figura) se pueden formar estructuras de islas no mostradas en la figura anterior debido a que son más delgadas y menos propensas a aparecer. Lo cuál implica que la perturbación q afecta poco esta región como se puede esperar. Se puede interpretar con una analogía utilizando el campo eléctrico de un objeto compacto cargado en donde no importa la forma que tenga el objeto, a una distancia grande el campo eléctrico va pareciéndose al campo de una carga puntual. En el caso de la masa con momento cuadrupolar que representa una deformación de un objeto esférico, a una distancia grande el campo gravitacional se parece más al modelo de Kerr y a una distancia considerablemente más grande esperaríamos que sea un potencial Newtoniano clásico.

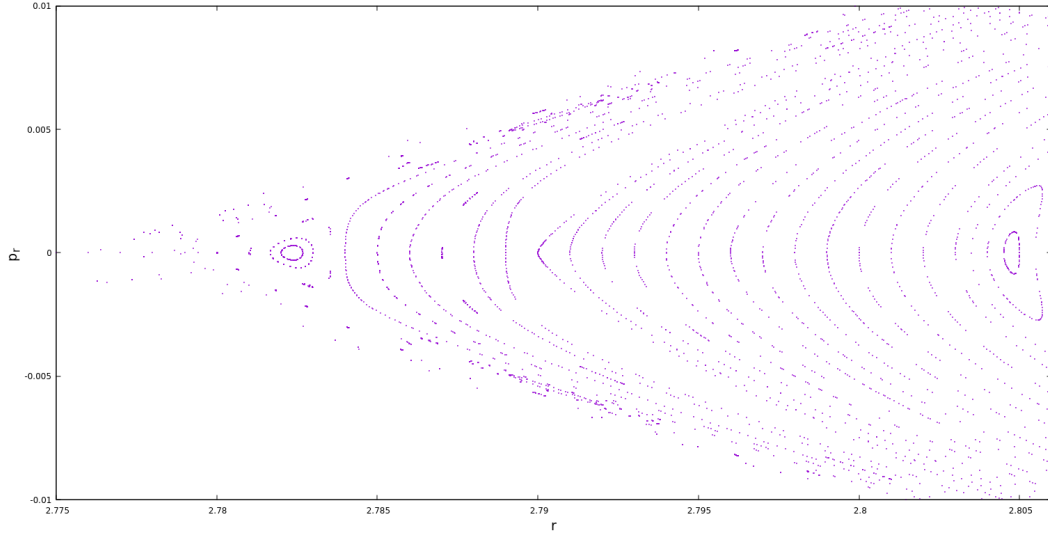


Figura 3.8: Sección de Poincaré para el conjunto de parámetros $M = 1$, $a = 0,99$, $L_z = 1,2$, $E = 0,932516$ y $q = 0,01$.

Las diferencias de ambos modelos se comienzan a visualizar cerca del horizonte de eventos, incluso con un valor pequeño de $q = 0,01$ ya se visualiza la presencia de islas entre las órbitas, como se observa en las figuras (3.7) y (3.8). Para caracterizar la dinámica debida al intenso campo gravitacional y la deformación de la masa se observan las nuevas estructuras que aparecen según el momento de masa cuadrupolar q y se compara también con las diferencias al aumentar este parámetro.

Primeramente, se observa la aparición islas centradas en $p_r = 0$ entre las curvas cerradas grandes en la parte izquierda de la figura (3.7), cerca de $r = 2,782$, $r = 2,787$, $r = 2,803$ y $r = 2,895$. Adicionalmente, aparecen multitudes de islas fuera del eje $p_r = 0$ de manera simétrica. Los espacios en blanco relativamente grandes entre curvas grandes también representan la presencia de islas en esa región de $r = 2,84$ y $p_r = \pm 0,01$.

Además, una característica común que tendrán las secciones de Poincaré para la métrica tipo-Kerr caracterizadas por el momento de masa cuadrupolar q diferente de cero será la isla más cercana al horizonte de eventos. A pesar de que pueden aparecer otras islas más cercanas al aumentar q , la prominencia de esta isla la hace de particular interés. Esta isla centrada en $r = 2,78236$, muestra una separación más abrupta que otras islas. Por último se puede observar que la última órbita estable es más difícil de determinar visualmente aunque debe encontrarse cerca de $r = 2,77614$ para $p_r = 0$, lo que indica que la presencia de la isla obliga a que la última órbita estable se mueva hacia afuera un poco.

3.1.2. Momento Cuadrupolar de Masa $q = 0,3$.

En esta sección se analizarán las estructuras que aparecen al utilizar q con un valor intermedio de 0,3. Además, se estudiará las implicaciones en la dinámica de las partículas al seguir la trayectoria dada por la geodésica.

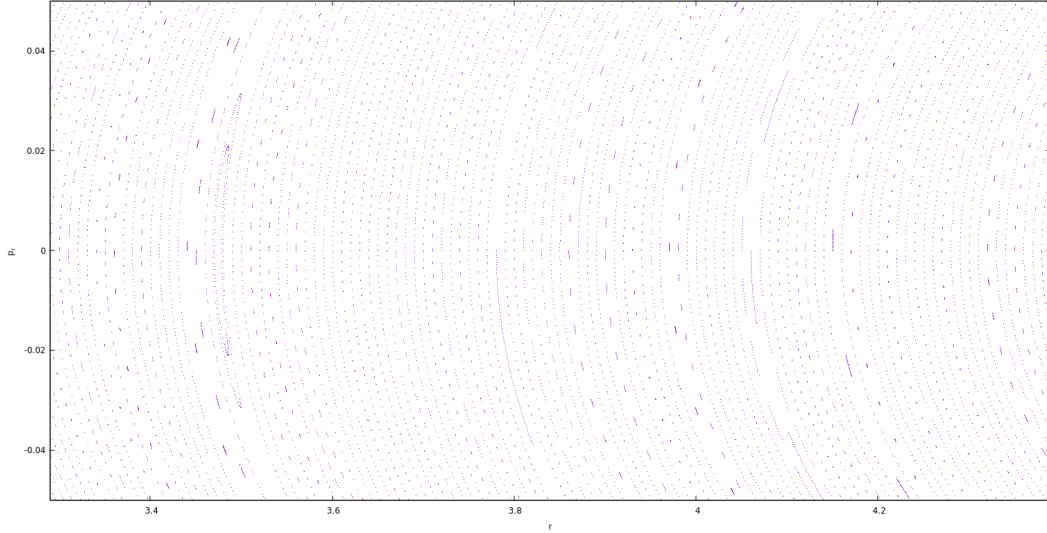


Figura 3.9: Sección de Poincaré para el conjunto de parámetros $M = 1,0$, $a = 0,99$, $L_z = 1,2$, $E = 0,932516$ y $q = 0,3$, mostrando la primera isla detectada en $r = 3,48$.

En la figura (3.9) se muestra la primera isla detectada centrada en el punto $p_r = 0$ y $r = 3,475$. Como se puede observar en esta región no existen islas satélite ni puntos dispersos. Sin embargo, muestra la existencia de irregularidades en forma de islas en el campo gravitacional al acercarse al horizonte de eventos. Está pequeña región es característica de una partícula que puede tener una especie de *subórbita* al acercarse al interior.

Al comparar con la sección anterior en la cual la aparición de la primera isla para q fue apenas en $r = 2,895$, mientras que en el caso $q = 0,3$ la isla más externa aparece para un radio más grande cerca de $r = 3,5$ lo que indica que la deformación del objeto compacto representada por el momento de masa cuadrupolar tiene una fuerte consecuencia sobre la estructura del espacio-tiempo circundante.

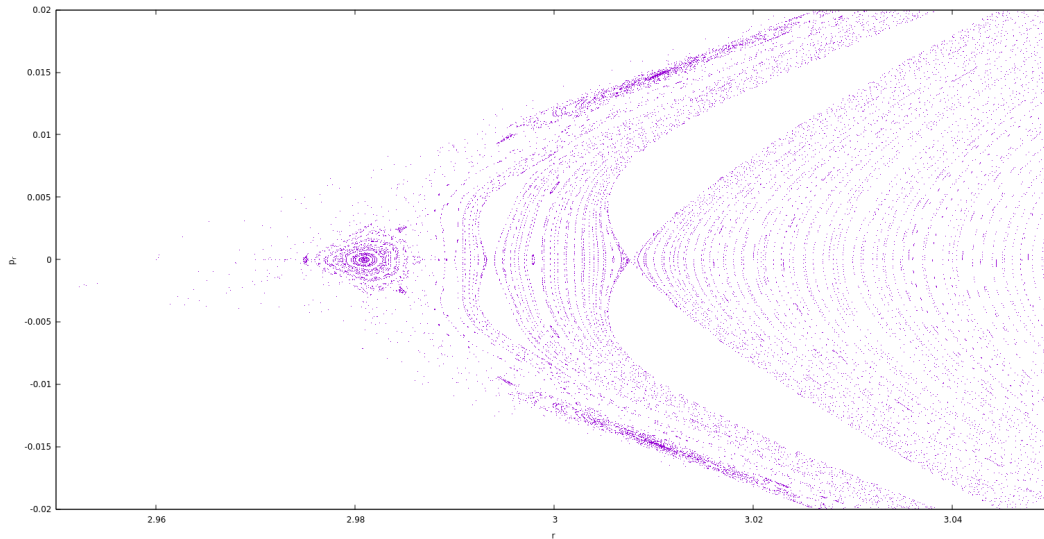


Figura 3.10: Sección de Poincaré para el conjunto de parámetros $M = 1,0$, $a = 0,99$, $L_z = 1,2$, $E = 0,932516$ y $q = 0,3$, en la zona cercana al horizonte de eventos.

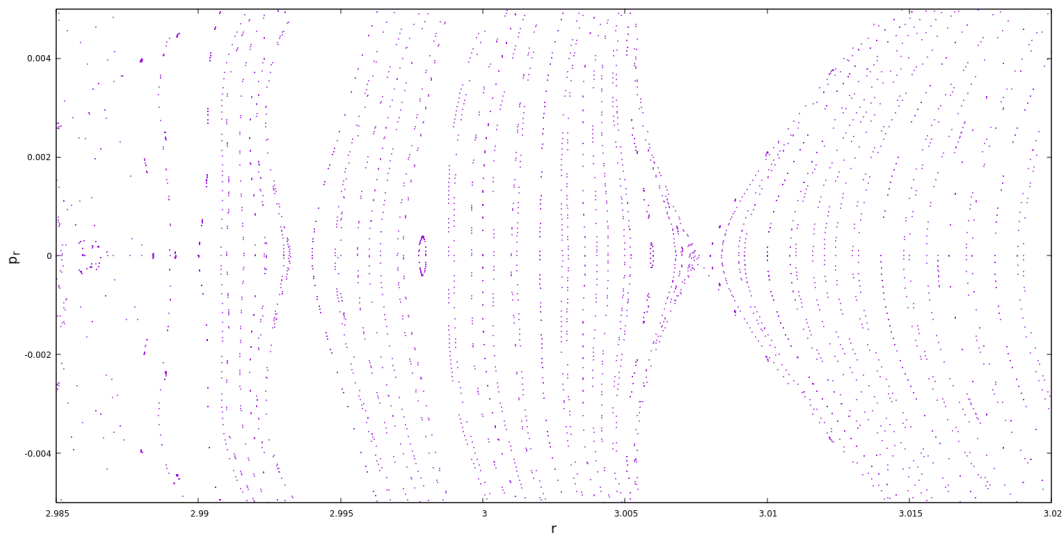


Figura 3.11: Sección de Poincaré para el conjunto de parámetros $M = 1,0$, $a = 0,99$, $L_z = 1,2$, $E = 0,932516$ y $q = 0,3$. Se muestra una ampliación de la figura (3.10) cerca del intervalo entre puntos hiperbólicos.

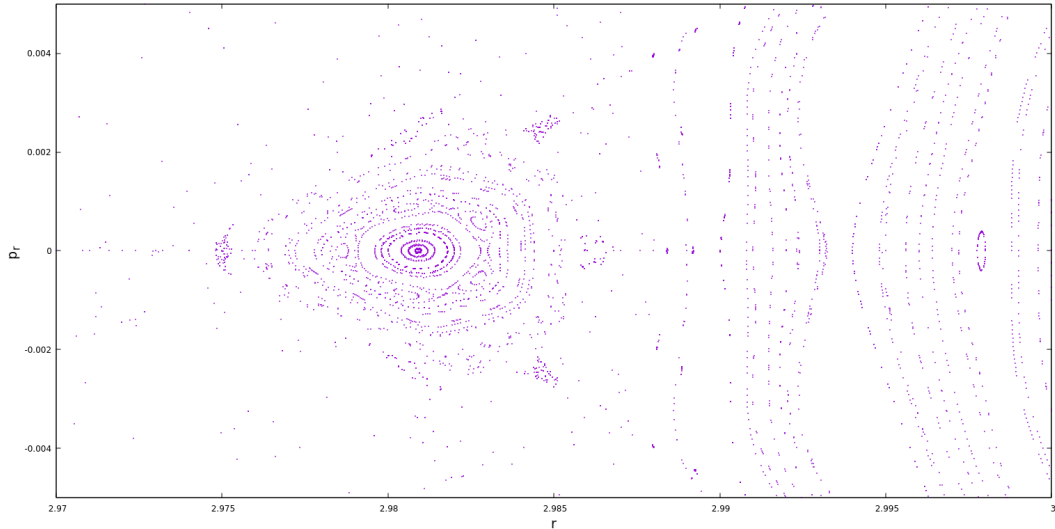


Figura 3.12: Sección de Poincaré para la estructura cercana al extremo izquierdo con el conjunto de parámetros $M = 1,0$, $a = 0,99$, $L_z = 1,2$, $E = 0,932516$ y $q = 0,3$. Se muestra una ampliación de la figura (3.10) en las estructuras más cercanas al horizonte de eventos.

Cuando se observan las órbitas más cercanas al horizonte de eventos como se muestra en la figura (3.10), se puede apreciar la aparición de diversas estructuras adicionales como puntos hiperbólicos todos con momento radial nulo ($p_r = 0$), aquellos donde se cortan secciones, como lo es el de $r = 3,00775$. Justo a la derecha de este punto se puede notar que las estructuras en la sección de Poincaré son bastante regulares. Las secciones en blanco por encima y debajo del punto hiperbólico están llenas de islas de manera simétrica. Sin embargo, justo a la izquierda del punto aparece una cadena de islas delgada como se muestra en la figura (3.11). Aún más, aparece una segunda cadena cerca de $r = 3,005$. Cabe recalcar que existe otro punto hiperbólico más externo cerca de $r = 3,185$ no mostrado en las figuras anteriores, pero no presenta ninguna otra estructura apreciable.

Al adentrarse más, la estructura especial cercana a la última órbita estable ha movido su centro cerca de $r = 2,981$, como se observa en la figura (3.12). Sin embargo, la característica más notoria en su evolución es la aparición de varias islas satélite en su vecindario. Junto con indicios de puntos dispersos que serían un indicativo de caos, el cuál se analizará más adelante utilizando el número de rotación.

3.1.3. Momento Cuadrupolar de Masa $q = 0,7$.

En la figura (3.13) se muestran las estructuras más relevantes que aparecen en el corte del espacio de fases cuando se incrementa el momento de masa cuadrupolar a

$q = 0,7$. Aparte de la isla centrada en $r = 6,144$ que posee una frontera definida entre la región de puntos dispersos, aparecen muchas otras islas rodeadas de satélites como en $(r, p_r) = (3,2012, \pm 0,00303)$, $(r, p_r) = (3,206, 0)$. En $(r, p_r) = (3,2106, 0)$ aparece una resonancia ligeramente deformada junto con una cadena de otras islas siguiendo el patrón zigzagueante. El punto hiperbólico en $r = 3,215$ realmente está formado por una serie islas diminutas. Este punto hiperbólico se nota que separa la región caótica de la zona estable, aún así existen del lado derecho de dicho punto varias resonancias. Finalmente, en los *lóbulos* que parecen simétricamente a ambos lados del eje p_r y cerca del punto hiperbólico separan la región caótica de una estable. Estos lóbulos están rodeados por varias cadenas de islas de orden superior. En la sección (3.2) se comprueba que efectivamente la zona caótica termina en $r = 3,215$.

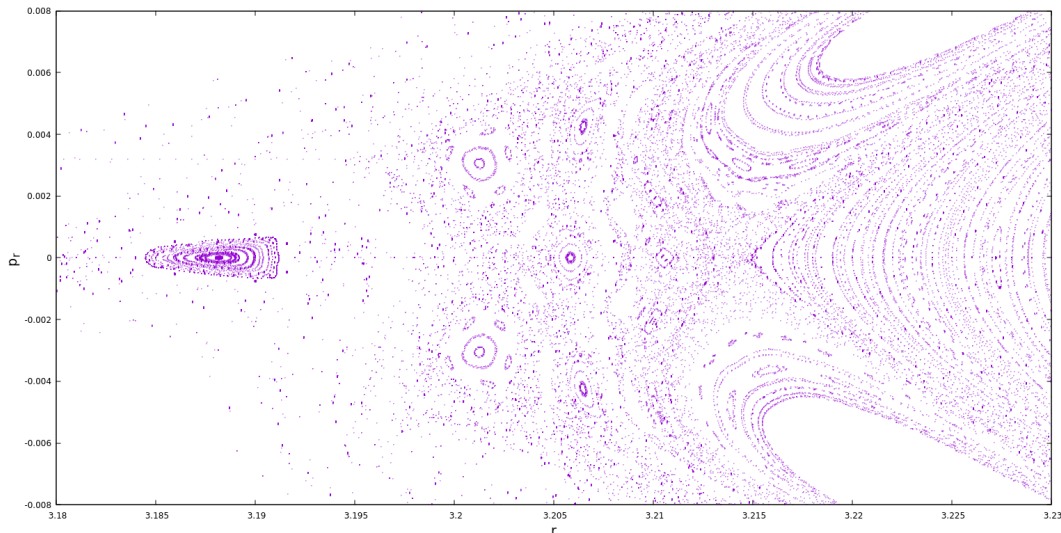


Figura 3.13: Sección de Poincaré para la estructura cercana al extremo izquierdo con el conjunto de parámetros $M = 1,0$, $a = 0,99$, $L_z = 1,2$, $E = 0,932516$ y $q = 0,7$.

3.1.4. Característica al variar el momento de masa cuadrupolar.

Al considerar la posición radial de alguna órbita periódica como función de algún parámetro del sistema y manteniendo el resto fijos, se puede observar rasgos distintivos para cada familia de órbitas, como señalan Contopoulos et al. en su artículo esta clasificación recibe el nombre de *característica* [4]. En ese artículo presentan la característica para los puntos centrales de las órbitas grandes y para algunas islas, al variar la componente z del momento angular o la energía del sistema. Sin embargo, no realizan un estudio de la evolución al modificar el parámetro del momento de masa cuadrupolar.

Dado que el momento de masa cuadrupolar representa el parámetro de perturbación a la métrica de Kerr, la evolución de la aparición de estructuras en el espacio de fases está directamente relacionada con dicho parámetro.

A continuación se presentan dos imágenes ilustrativas de la posición de los puntos u_0 y u'_0 , además de las tablas correspondientes de la evolución de la característica de dichos puntos.

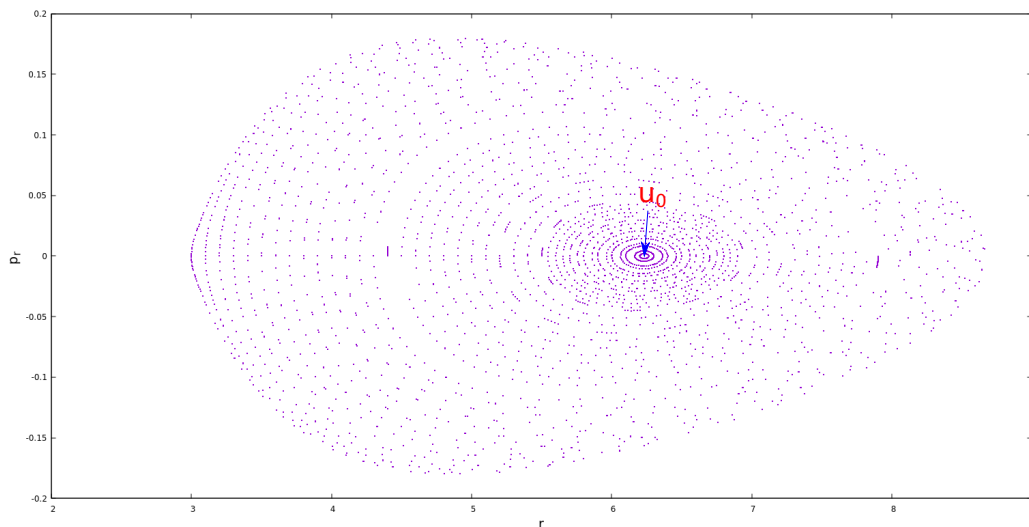


Figura 3.14: Posición del punto central u_0 de la isla principal de estabilidad en la sección de Poincaré de $q = 0,3$.

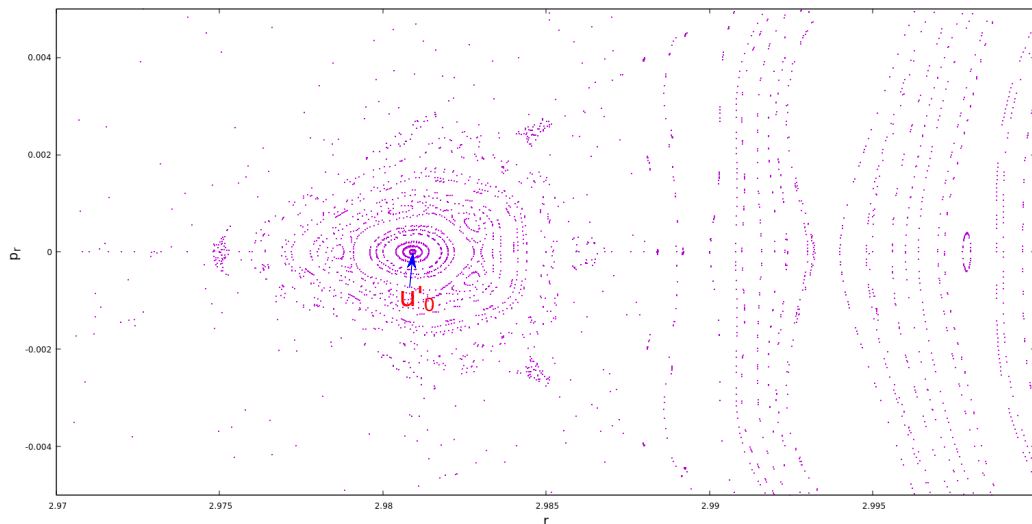


Figura 3.15: Posición del punto central u'_0 de la estructura cercana a la última órbita estable en la sección de Poincaré de $q = 0,3$.

Cuadro 3.1: Característica del punto elíptico principal u_0 .

Momento de Masa Cuadrupolar q	Posición del Centro Principal
0	6,294
0,01	6,293
0,1	6,274
0,2	6,253
0,3	6,232
0,4	6,211
0,5	6,189
0,6	6,167
0,7	6,144
0,8	6,121
0,9	6,098
0,95	6,086

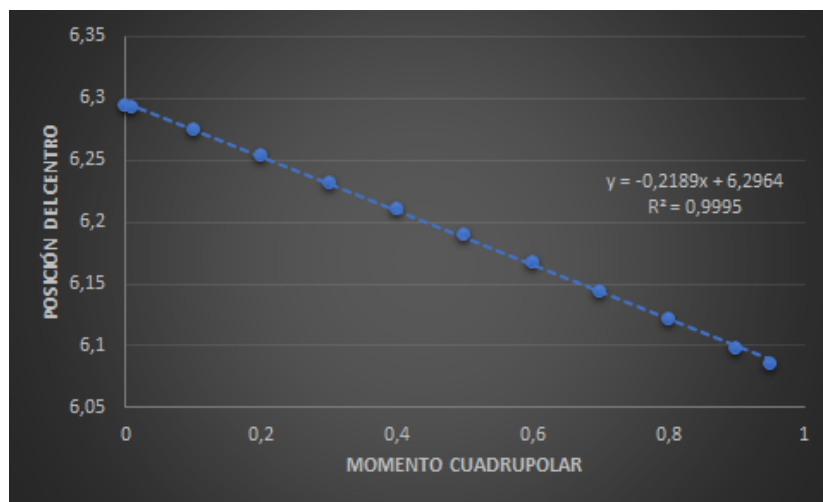


Figura 3.16: Relación de la posición del centro principal u_0 de la sección de Poincaré al aumentar el momento cuadrupolar de masa.

Como se puede apreciar en la figura (3.16), existe una correlación lineal en el movimiento del punto fijo del centro de la isla principal de las secciones de Poincaré al aumentar la intensidad del momento de masa cuadrupolar. El efecto se traduce en un acercamiento al objeto compacto que genera la deformación del espacio-tiempo. Adicionalmente, se presenta en la figura (3.16) que el coeficiente de correlación lineal es muy cercano a 1,0, lo cuál permite concluir que efectivamente la relación lineal.

La estructura de islas cerca del borde de la última órbita estable, también presenta

movimiento al aumentar q , la siguiente tabla resume esta información.

Cuadro 3.2: Característica del punto elíptico de la isla cercana a la última órbita estable u'_0 .

Momento de Masa Cuadrupolar q	Posición del Centro de la Isla
0	-
0,01	2,782
0,1	2,8619
0,2	2,9228
0,3	2,9809
0,4	3,0362
0,5	3,0890
0,6	3,1396
0,7	3,1882
0,8	3,2350
0,9	3,2803
0,95	3,3025

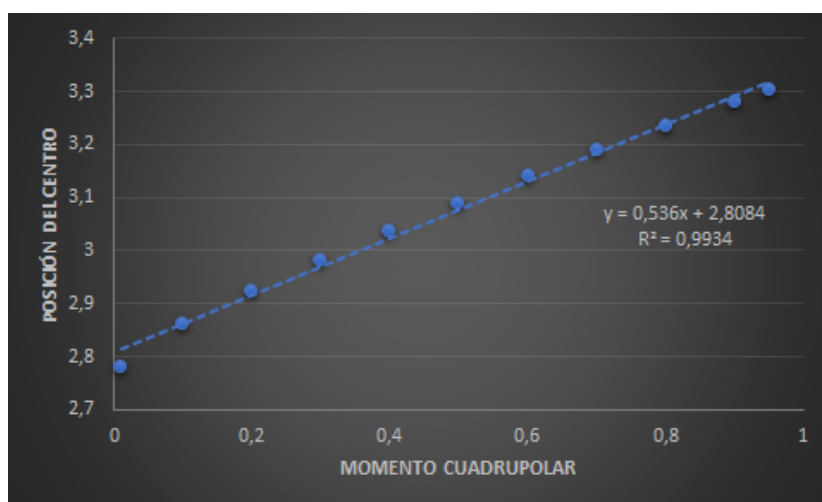


Figura 3.17: Relación de la posición del centro de la isla prominente cercana al horizonte de eventos de la sección de Poincaré al aumentar el momento cuadrupolar de masa.

La deformación del objeto compacto también repercute en las estructuras que aparecen en el espacio de fases, al aumentar el momento cuadrupolar se comienzan a destruir los toros cercanos al objeto. Adicionalmente, los toros sobrevivientes más cercanos al objeto comienzan a fragmentarse en cadenas de pequeñas islas cercanas muy cercanas, dando la apariencia de puntos dispersos. En la figura (3.17) aparece que el centro de

la estructura prominente cercana al horizonte de eventos comienza a alejarse lo cual coincide con la destrucción de los toros. En este caso también se aprecia una relación lineal, visto por el coeficiente de correlación cercano a 1,0.

3.1.5. Comparación con otros Espacio-Tiempo producto de objetos compactos.

Lukes-Gerakopoulos [19], muestra en su artículo las características de la naturaleza no-integrable de las geodésicas producto del modelo de Zipoy-Vorhees. Este modelo representa el espacio-tiempo de un objeto compacto con simetría axial y no rotativo. Esta métrica para el caso especial del parámetro $\delta = 1$ se reduce al caso de la métrica de Schwarzschild o si $\delta = 0$ que se reduce inmediatamente a ser el espacio-tiempo de Minkowski, la cuál es un caso especial ya que es integrable. Presenta entre sus resultados secciones de Poincaré con la presencia de órbitas cuasi-integrables, capas caóticas y cadenas de Birkhoff para diferentes parámetros.

Adicionalmente, se hace énfasis que esta métrica no es integrable en los casos generales ($\delta \neq 1$ o $\delta \neq 0$) debido al hecho de no presentar la constante de Carter [16, 18, 19], la cual es una constante de movimiento adicional a la energía o el momento angular en z . El parámetro de Zipoy-Vorhees representa la perturbación respecto al espacio-tiempo de Schwarzschild, lo cuál indica que ya no existe simetría esférica. Entonces la fuente del campo gravitacional es un objeto compacto achatado.

Entre los resultados notables se presenta diversas secciones de Poincaré que muestran claras similitudes con los resultados obtenidos para la métrica tipo-Kerr. Se muestra claramente que existen muchas de las mismas estructuras en el espacio de fases. Cerca del horizonte de eventos, aparece la estructura de una isla central rodeada de islas satélites y una región de puntos dispersos. Además, las regiones de puntos hiperbólicos son similares y aparecen separando la sección de puntos dispersos de la zona cuasi-integrable.

Estas similitudes entre la geometría del espacio de fases muestran claramente que la falta de la constante de Carter, como ocurre en las ecuaciones de movimiento de la métrica tipo-Kerr o en la métrica de Zipoy-Vorhees, produce el efecto de la destrucción de las órbitas de tipo toroidal características de las métricas integrables. El efecto de achatamiento de la fuente tiene un fuerte impacto en las geodésicas ya que permite la formación de estructuras solamente visibles por una sección de Poincaré.

3.2. Número de rotación.

El número de rotación mide el cociente de las frecuencias ω_r/ω_θ del movimiento a través del toro como se muestra en la figura (3.18), en caso de una órbita resonante da como resultado un número racional y corresponde a la posición de una isla en la sección de Poincaré. Además, cuando se gráfica el número de rotación en función de la posición inicial, en la zona de las islas son constantes racionales. En un punto hiperbólico hay un salto debido al cambio abrupto en la sección de Poincaré del comportamiento de las trayectorias, en este punto se separan los toros en dos regiones diferentes.

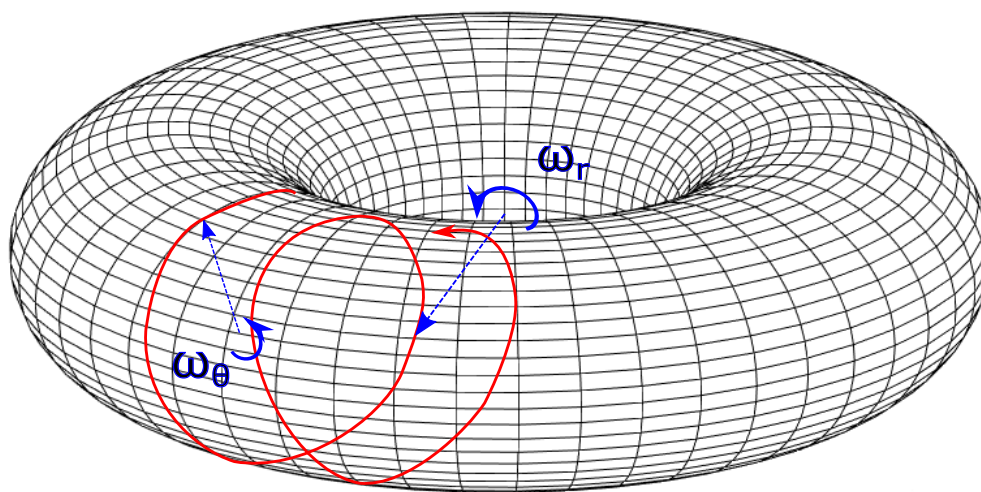


Figura 3.18: Movimiento de una partícula restringida a la superficie de un toro. Las frecuencias ω_r y ω_θ se utilizan para calcular el número de rotación por definición.

También, debido al comportamiento anómalo cuando el campo gravitacional es más intenso y asimétrico, entonces pueden aparecer multitudes de islas diminutas de manera desordenada. En dichas zonas caóticas el número de rotación no está correctamente definido, puede mostrar una alta variación de picos y valles. Es incluso posible identificar algunas zonas de estabilidad correspondiendo a resonancias pequeñas mezcladas en la región caótica. [3, 4, 13, 19, 20].

Como mencionan Contopoulos, Lukes-Gerakopoulos y Santos [3, 4, 13, 19, 20, 25], el número de rotación ν_θ es un test realizado a la sección de Poincaré para determinar una clasificación de las islas que aparecen producto de la perturbación. En particular, este test permite determinar los intervalos donde las órbitas caóticas permanecen *pegadas* [25].

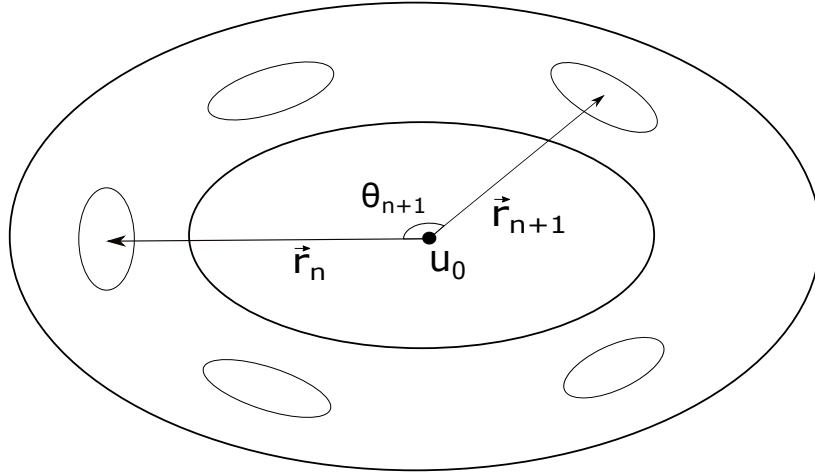


Figura 3.19: Ilustración del ángulo formado por los vectores \vec{r}_n y \vec{r}_{n+1} , cuando apuntan al centro de las islas.

Para poder calcular el número de rotación a partir de una sección dada, primero se debe encontrar el centro de la isla principal u_0 . El cuadro (3.1) muestra el cambio de la posición del centro de la principal cuando se aumenta el momento de masa cuadrupolar q . Posteriormente se definen los vectores \vec{r}_n partiendo del punto central u_0 hasta al n -ésimo punto de la sección de Poincaré para una órbita dada. Posteriormente se calcula el ángulo formado por dos vectores consecutivos $\theta_{n+1} = \angle(\vec{r}_{n+1}, \vec{r}_n)$, como se muestra en la figura (3.19). El número de rotación está definido por la siguiente ecuación

$$\nu_\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n} \sum_{j=1}^n \theta_j \quad (3.1)$$

Al construir la gráfica del número de rotación para $p_r = 0$ se puede detectar zonas caóticas fácilmente y también de clasificar la mayor parte de las islas de acuerdo con el número racional correspondiente. En la figura (3.19) se presenta el ejemplo de como se vería la distribución de los vectores para una resonancia de $2/5$.

Cabe destacar que la construcción del algoritmo computacional para calcular ν_θ tiene unas características extra. En primer lugar, se debe tomar en cuenta que los ángulos pueden tener valores superiores a π radianes. Esto implica que se debe utilizar la definición de producto escalar y productora vectorial al mismo tiempo para calcular el ángulo de manera correcta. Se debe tomar cada caso de los signos del seno y coseno para el computo del ángulo.

Adicionalmente, dado que los puntos de la sección de Poincaré tienen asociado un pequeño error numérico debido a que fue necesario incluir una tolerancia al plano ecuatorial, entonces pueden pasarse algunos puntos extra sobre la sección o el otro posible

caso es que se eliminen puntos que sí corresponden a la sección. Estos puntos son muy cercanos al punto verdadero por lo tanto pueden adicionar una gran cantidad de ángulos pequeños que no corresponden a ν_θ . Dado que el cálculo se hace de manera numérica y no analítica, es imposible construir un límite al infinito, entonces se debe escoger un número alto de ángulos para que el error en ν_θ sea despreciable. Si se adicionan esos ángulos pequeños entonces el valor de n crece mucho más de lo necesario y por lo tanto da una gráfica incorrecta a ν_θ . Para construir el algoritmo de manera correcta debe optimizarse el error permitido en la sección de Poincaré de manera que no elimine puntos correctos y eliminar ángulos pequeños producto de la adición de puntos extra. Para el conjunto de valores escogidos anteriormente es suficiente con eliminar ángulos menores a 6×10^{-3} radianes y permitir que los puntos del plano ecuatorial donde se encuentra la sección tengan una posición angular $\theta = \pi/2 \pm 2,0 \times 10^{-4}$ radianes.

Por último, la construcción del algoritmo anterior se hace de manera genérica por lo tanto si se cambia de modelo de métrica, el cálculo sigue siendo el mismo, solamente debe optimizarse los valores del margen de error permitido. Sin embargo, existen otros métodos para obtener ν_θ , basados en el cálculo de las frecuencias por las que la partícula se mueve en el toro. Para ello se puede hacer el método de linealizar las ecuaciones del sistema dinámico como se muestra en [22] o utilizar el análisis de Fourier para encontrar la razón de las frecuencias [23, 24]. Estos métodos son específicos para cada sistema dinámico por lo que su implementación resulta poco conveniente ya que requiere empezar desde cero para cada caso.

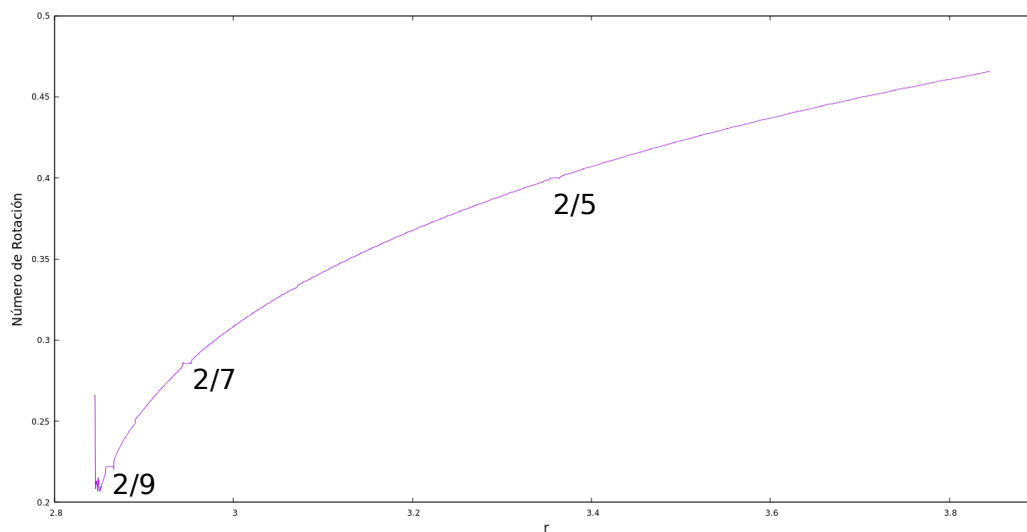


Figura 3.20: Variación del número de rotación para $q = 0, 1$ respecto a la posición radial inicial sobre la línea $p_r = 0$.

En la figura (3.20) se muestra la variación del número de rotación respecto a la distancia radial inicial de las órbitas, para una posición angular de colatitud $\theta = \pi/2$ y momento radial inicial $p_r = 0$. Con estas características coincide con el eje de simetría horizontal de la sección de Poincaré correspondiente como se observa en la figura (3.22). Se pueden identificar fácilmente tres zonas constantes en el número de rotación correspondientes a zonas de resonancia $2/9$, $2/7$ y $2/5$, las cuales indican la presencia de islas y el ancho relativo de las mismas en la sección de Poincaré. Adicionalmente, cerca de $r = 2,85$ se identifican puntos dispersos que indican donde el número de rotación se indefine y presenta la región caótica. Esta zona claramente se encuentra cerca del borde de la última órbita estable como se muestra en la figura (3.21) .

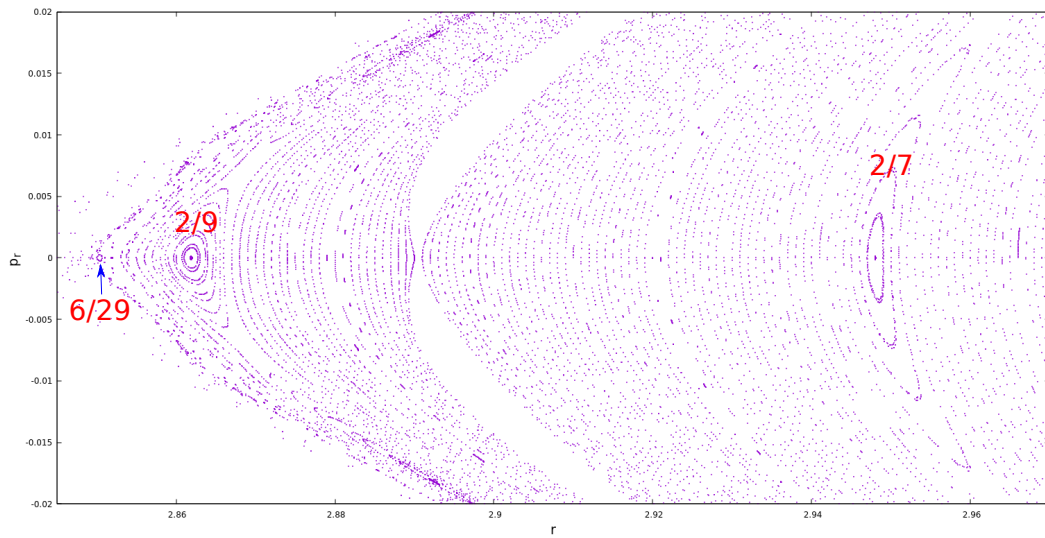


Figura 3.21: Sección de Poincaré para los parámetros $M = 1,0$, $a = 0,99$, $E = 0,932516$, $L_z = 1,2$ y $q = 0,1$, mostrando las resonancias respectivas. Particularmente, cerca de la última órbita estable se ve los puntos dispersos correspondientes la zona caótica.

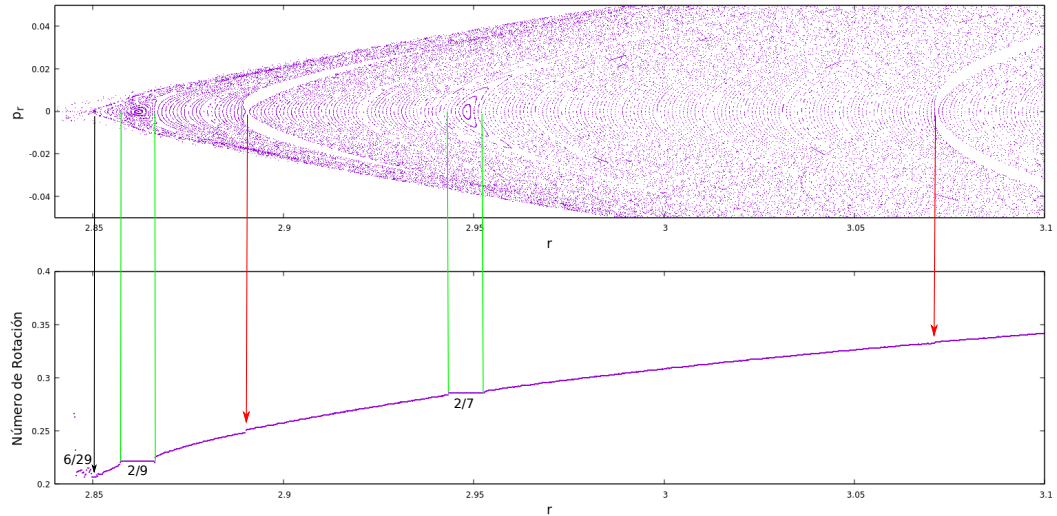


Figura 3.22: Comparación del número de rotación sobre la línea $p_r = 0$ de $q = 0,1$ con la sección de Poincaré correspondiente.

En la figura (3.22) se refleja directamente la relación entre las resonancias de $2/9$ y $2/7$, donde se puede identificar fácilmente que la región constante corresponde con el ancho de la isla. También, los saltos correspondiente a la presencia de punto hiperbólico están marcados por las flechas de color rojo. Adicionalmente, existe otra resonancia de $6/29$ con centro en $r = 2,8503$. Esta isla, además de ser muy delgada, está cerca de la región caótica del espacio de fases. Este comportamiento es una muestra del caos incipiente debido al rompimiento de la simetría esférica del objeto compacto. Existen otras resonancias muy delgadas en la región caótica que no se logran apreciar en la figura anterior pero se reflejan en la variabilidad del número de rotación. También, para distancias más lejanas, fuera del rango mostrado por la figura anterior, existen otras resonancias. Sin embargo, dado que el campo gravitacional es menos intenso y el efecto del momento de masa cuadrupolar va disminuyendo entonces no aparece caos cerca de tales islas.

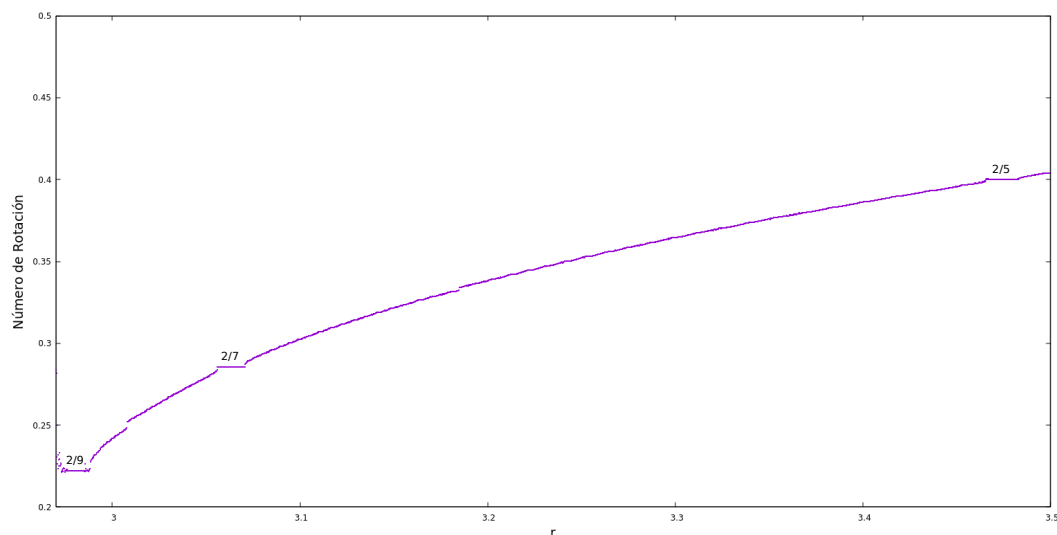


Figura 3.23: Variación del número de rotación para $q = 0,3$ respecto a la posición radial inicial sobre la línea $p_r = 0$. Se señalan tres regiones de resonancia $2/9$, $2/7$ y $2/5$.

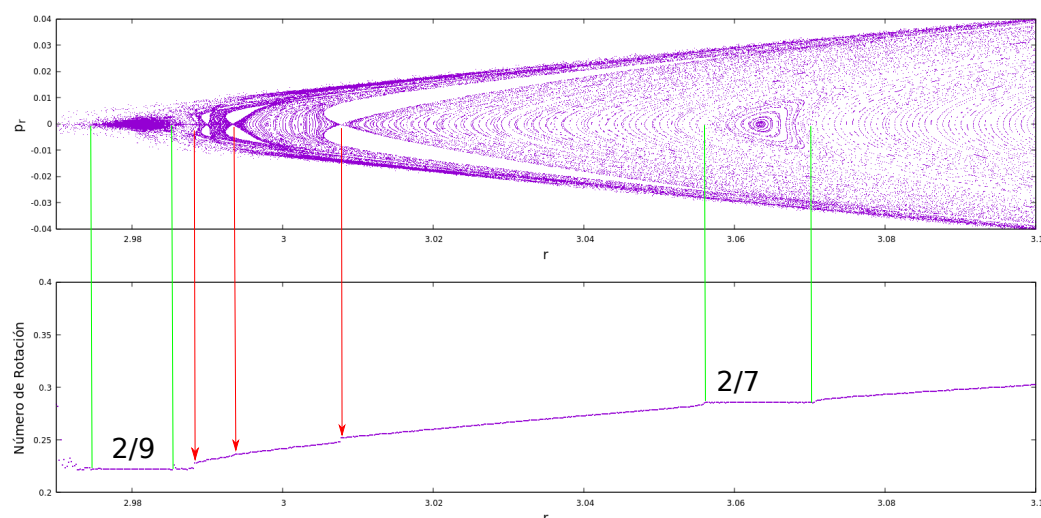


Figura 3.24: Comparación del número de rotación sobre la línea $p_r = 0$ de $q = 0,3$ con la sección de Poincaré correspondiente. Las líneas en color rojo muestran la relación entre los puntos hiperbólicos con los saltos, las líneas verdes la extensión de las islas con las zonas constantes del número de rotación.

Al aumentar el parámetro del momento de masa cuadrupolar a $q = 0,3$, es fácil ver que aún existen las resonancias de $2/9$, $2/7$ y $2/5$ como se muestra en la figura (3.23). Sin embargo, como se había mencionado anteriormente, las islas del espacio de fases se mueven hacia afuera al destruirse los toros. También, aparecen nuevas estructuras que pasan por el eje $p_r = 0$.

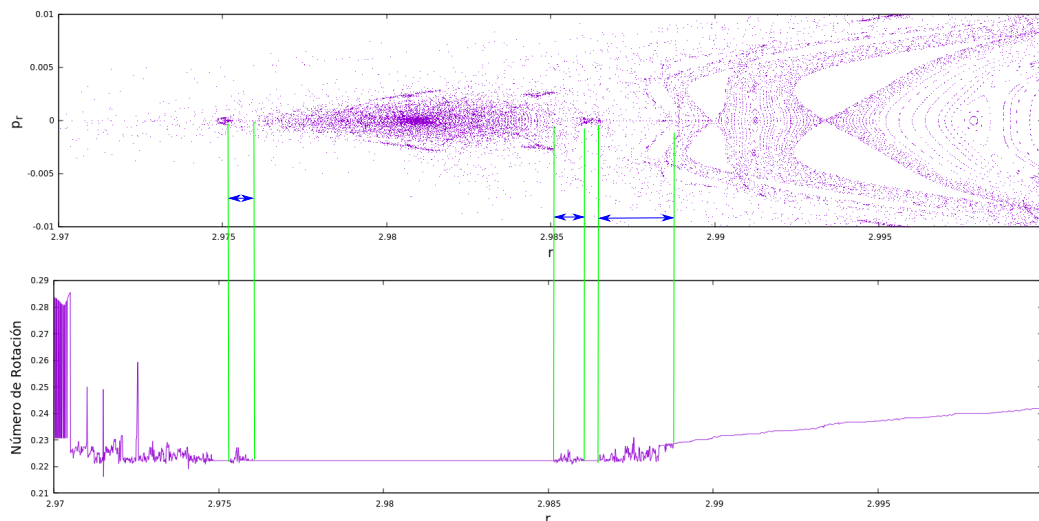


Figura 3.25: Comparación del número de rotación sobre la línea $p_r = 0$ de $q = 0,3$ con la sección de Poincaré correspondiente, se marcan en verde las zonas caóticas.

Un acercamiento a las zonas caóticas como se muestra en la figura (3.25) muestra cuatro zonas caóticas. La primera región es la que se extiende desde el horizonte de eventos hasta el borde de la isla centrada en $r = 2,975$. Se caracteriza por tener una alta variación en el número de rotación y ser la región más extensa. La siguiente zona está justo después de esta misma isla y se extiende hasta la siguiente centrada en $r = 2,9809$. Las variaciones en el número de rotación son menores y es una región bastante delgada. La tercer zona caótica comienza justo después de $r = 2,985$ y se extiende hasta la isla satélite. La última región caótica comienza después de esta isla satélite y es más extensa. Esta región termina con la isla cercana al punto hiperbólico. Adicionalmente, la figura (3.25) revela otras resonancias que cruzan $p_r = 0$. La alternancia entre regiones caóticas y zonas de estabilidad es característico de los sistemas dinámicos caóticos, en este caso las regiones caóticas solo aparecen rodeando la isla con centro en $r = 2,9809$. Por último, la cuarta zona caótica tiene cerca del borde varias planicies pequeñas lo que representa resonancias o estabilidades muy delgadas del sistema. Cabe señalar que la resolución de los datos de la distancia radial en la figura (3.25) es del orden de $1,0 \times 10^{-5}$.

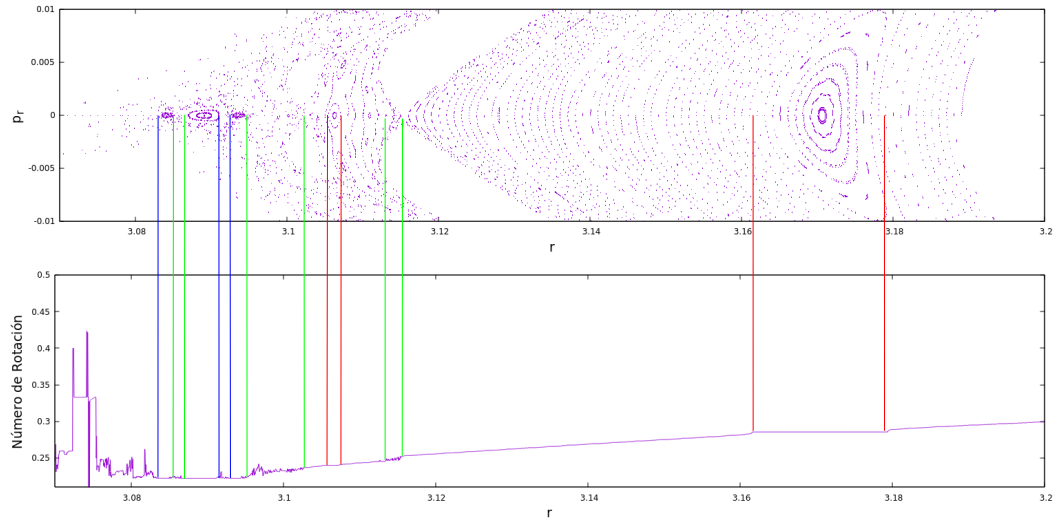


Figura 3.26: Comparación del número de rotación sobre la línea $p_r = 0$ de $q = 0,5$ con la sección de Poincaré correspondiente, se señalan en pares de líneas verde y azul las zonas caóticas y en rojo la extensión de dos islas que cruzan $p_r = 0$.

En la figura (3.26) se presenta el comportamiento del número de rotación para $q = 0,5$, como se aprecia que aparecen diversas estructuras a la izquierda del punto hiperbólico de $r = 3,116$. En este mismo punto acaba la última zona caótica que se extiende desde $r = 3,114$ hasta $r = 3,116$. Si se compara con el comportamiento para $q = 0,3$, indica que al aumentar la cantidad de cadenas de islas provoca variaciones muy rápidas del número de rotación dando una nueva zona caótica que termina en el punto hiperbólico. En esta misma figura se señala en rojo una resonancia de $6/25$ a la izquierda del punto hiperbólico y otra de $2/7$ también en rojo a la derecha. Como se ve este mismo punto marca la frontera entre el comportamiento caótico del regular. Por último, la línea azul en $r = 3,0834$ marca la frontera donde debe aparecer la última órbita estable y la región caótica que llega hasta el horizonte de eventos.

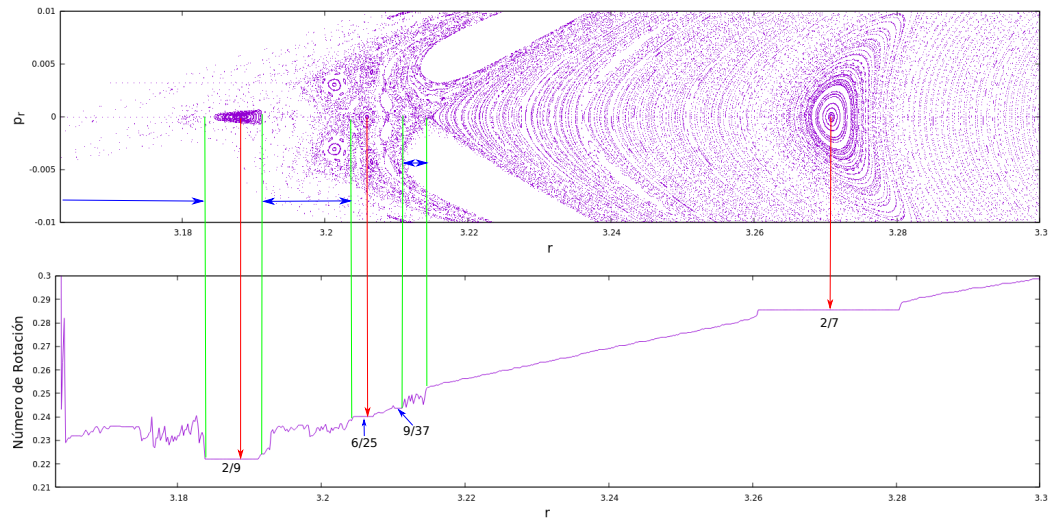


Figura 3.27: Comparación del número de rotación sobre la línea $p_r = 0$ de $q = 0,7$ con la sección de Poincaré correspondiente, se señalan en verde las zonas caóticas y en rojo los centros de las resonancias $2/9$, $6/25$, $9/37$ y $2/7$ que cruzan $p_r = 0$.

En la figura (3.27) se observa que al aumentar a $q = 0,7$ el sistema presenta tres zonas caóticas visibles por el número de rotación. La isla prominente centrada en $r = 3,1882$ corresponde a la resonancia de $2/9$ y aunque tiene islas satélite, se encuentran muy cercanas por lo cual no tiene una zona de estabilidad grande entre el horizonte de eventos y el borde de la isla. Un estudio detallado a escalas radiales muy pequeñas puede determinar la existencia de islas cruzando $p_r = 0$ en esa zona antes del borde de la isla anterior que son indistinguibles entre los picos y valles. Se observan múltiples estructuras cercanas a $r = 3,2$ por fuera del eje $p_r = 0$ y entre ellas el número de rotación oscila dando paso a zonas caóticas. De manera similar la última zona caótica termina con el punto hiperbólico cerca de $r = 3,215$. Por último, se puede observar que entre las resonancias de $6/25$ y $9/37$ el comportamiento del número de rotación es relativamente monótono creciente sin presentar caos en este intervalo y justo después de la resonancia de $9/37$ empieza la última región caótica.

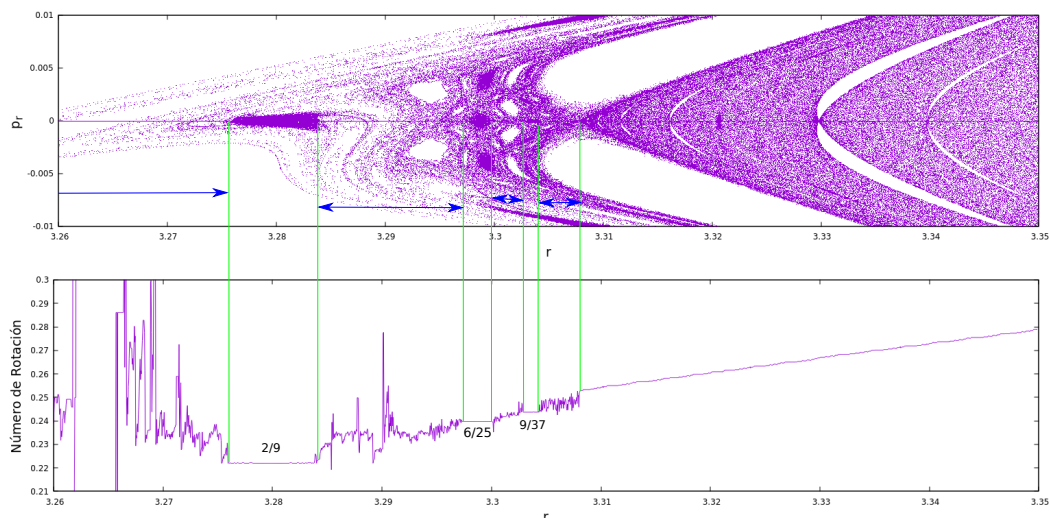


Figura 3.28: Comparación del número de rotación sobre la línea $p_r = 0$ de $q = 0,9$ con la sección de Poincaré correspondiente, se señalan en verde las zonas caóticas que cruzan $p_r = 0$. Se señalan las resonancias $2/9$, $6/25$ y $9/37$ que cruzan el eje $p_r = 0$.

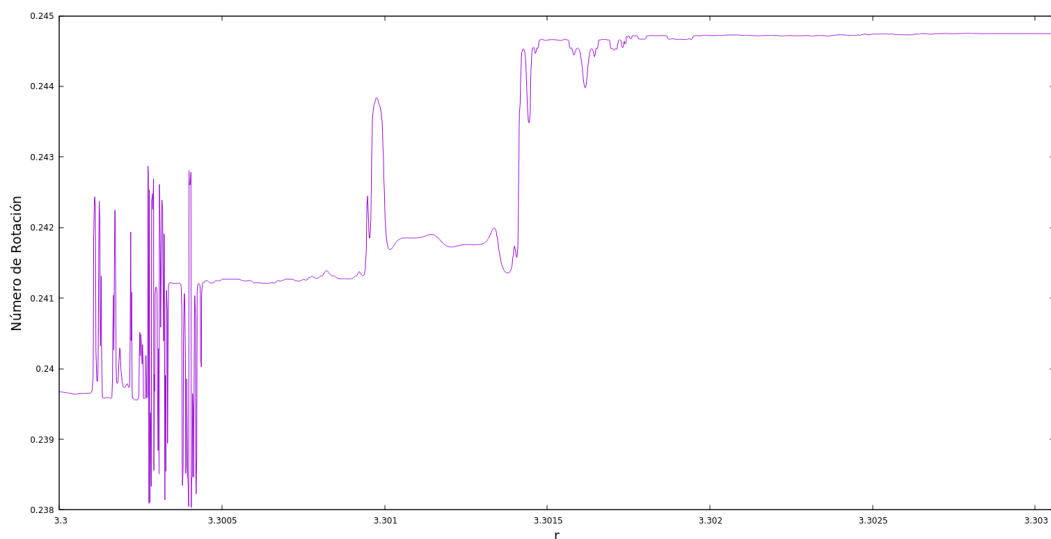


Figura 3.29: Detalle del número de rotación la figura (3.28) en el intervalo caótico entre las resonancias $6/25$ y $9/37$.

En la figura (3.28) se muestra la distribución de las zonas caóticas y resonancias que aparecen al aumentar el parámetro del momento de masa cuadrupolar a $q = 0,9$. Respecto a la distribución de $q = 0,7$ que aparece en la figura (3.27), hay una zona caótica adicional localizada entre las dos resonancias prominentes de $6/25$ y $9/37$ con centros en $r = 3,299$ y $r = 3,3035$ respectivamente. La figura (3.29), muestra la evolución de las inestabilidades ya que en $q = 0,7$ esta zona no es caótica y el número de rotación

tiene un comportamiento monótono creciente. Adicionalmente, se observa que la zona caótica es bastante delgada, en el intervalo $3,3000 \leq r \leq 3,3005$ la variabilidad del número de rotación es muy alta pero al aumentar r existen zonas estables rodeadas de pequeñas zonas caóticas.

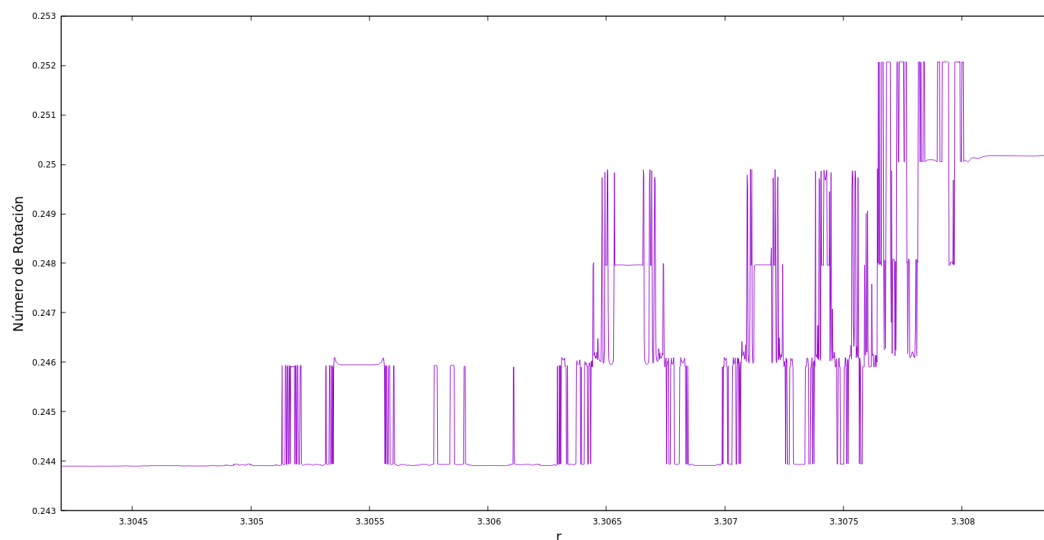


Figura 3.30: Detalle del número de rotación la figura (3.28) en el intervalo caótico entre la resonancia de $9/37$ y el punto hiperbólico ubicado en $r = 3,30812$.

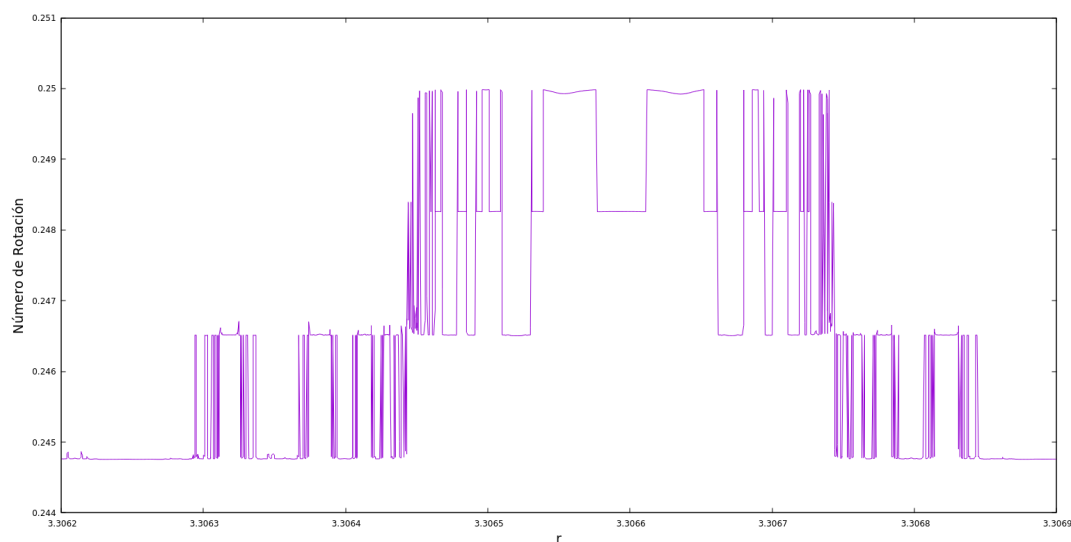


Figura 3.31: Detalle del número de rotación la figura (3.30), se muestra las diferentes planicies que aparecen en la zona caótica.

En la figuras (3.30) y (3.31) se puede comprobar la autosimilitud característica de la geometría fractal, ya que al detallar las regiones de alta variabilidad del número de

rotación se ve que repite la misma estructura de pequeñas regiones estables rodeadas por saltos. La misma estructura se espera que se observe al seleccionar un intervalo caótico en particular. Cabe señalar que para realizar las figuras (3.30) y (3.31) se realizaron con resoluciones de orden del orden de 10^{-5} y 10^{-7} respectivamente.

Como se vio el número de rotación es una herramienta utilizada para identificar las regiones caóticas en la sección de Poincaré. Aunque al realizar un análisis a estas órbitas se encuentra un fenómeno ligado al caos y propio de estos sistemas dinámicos llamado *adhesión (stickiness)* [3, 4, 13, 19, 20, 25]. Este fenómeno se caracteriza por mantener durante mucho tiempo una órbita caótica *adherida* a una estable. Como menciona Lukes-Gerakopoulos [19] las órbitas caóticas permanecen unidas a las islas de orden superior antes ser arrastradas al horizonte de eventos. El efecto de la separación de la isla para dirigirse al horizonte de eventos es una característica común de diversas métricas como lo es la métrica de Manko-Novikov [4] y la de Zipoy-Voorhees [19]. Como consecuencia de esto la identificación visual de órbitas caóticas puede ser complicada utilizando únicamente la sección de Poincaré, para ello se debe utilizar en conjunto con el número de rotación. Adicionalmente, una órbita caótica que se encuentre adherida a una estable puede producir que sean indistinguibles entre sí durante mucho tiempo.

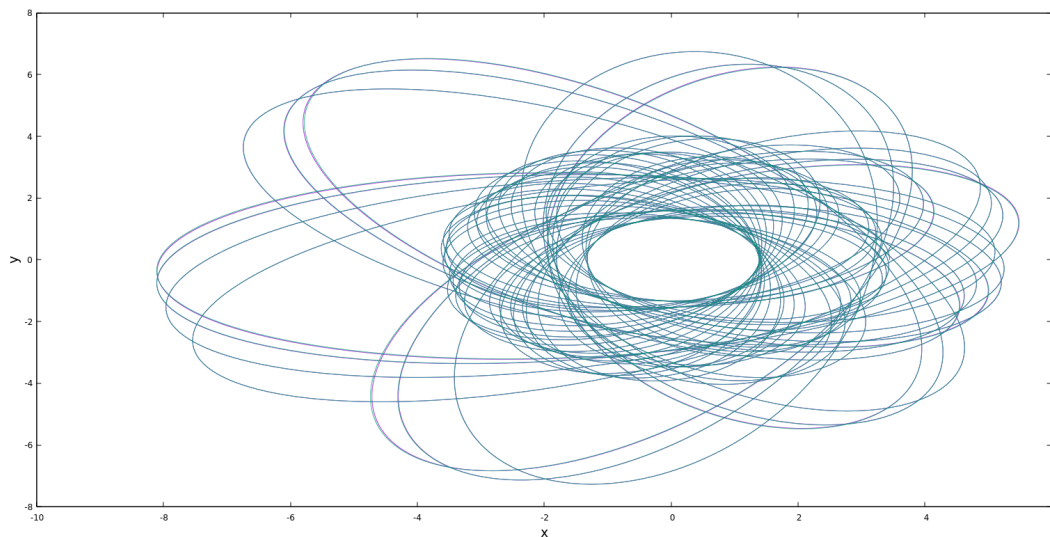


Figura 3.32: Proyección sobre el plano ecuatorial de dos órbitas de $q = 0,9$ con un tiempo de simulación moderado y ubicadas en la región caótica entre las resonancias de $6/25$ y $9/37$ de la figura (3.29) con condiciones iniciales idénticas excepto $r_1 = 3,30011$ y $r_2 = 3,30012$. Ambas órbitas permanecen *adheridas* durante este trayecto, donde son prácticamente indistinguibles.

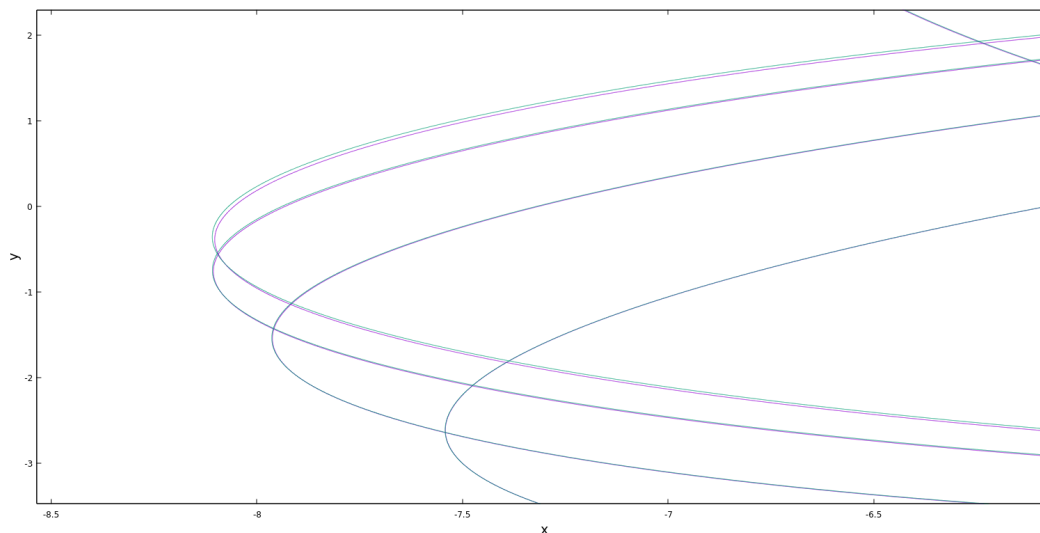


Figura 3.33: Detalle de la figura (3.32). Durante el trayecto las órbitas se mantienen unidas entre sí.

En la figura (3.32) se presentan dos geodésicas proyectadas sobre el ecuador ubicadas en la región caótica entre las resonancias $6/25$ y $9/37$ de la figura (3.31), con una separación inicial muy pequeña. Se observa que durante este trayecto ambas trayectorias se mantienen unidas incluso en la figura (3.34) donde se muestra un detalle de una región del plano. Adicionalmente, en la región exterior se puede apreciar que inicia la divergencia de ambas órbitas de manera lenta.

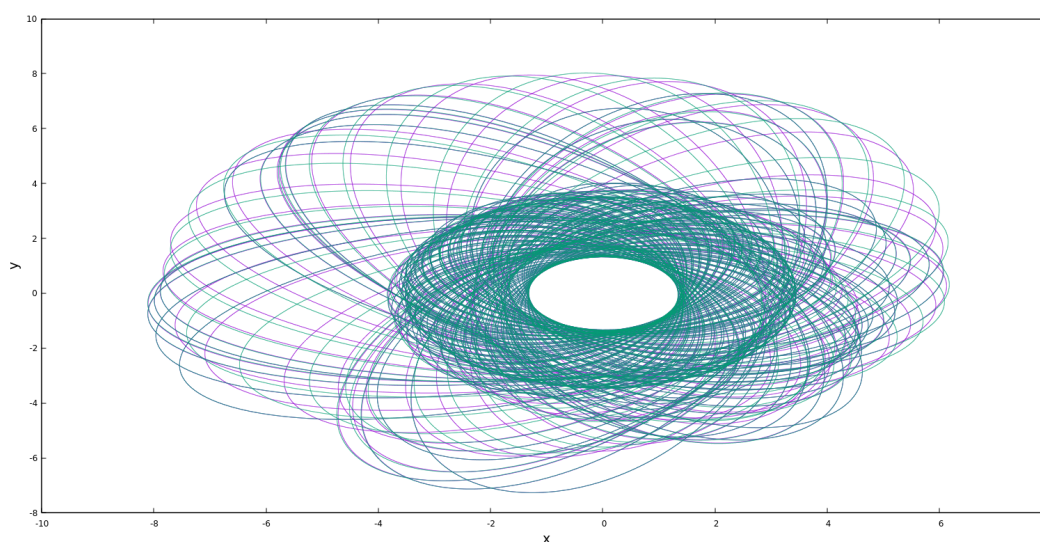


Figura 3.34: Prolongación de la trayectoria de la figura (3.32), donde al aumentar el tiempo de simulación el efecto de permanecer en una región caótica se visualiza cuando divergen ambas órbitas.

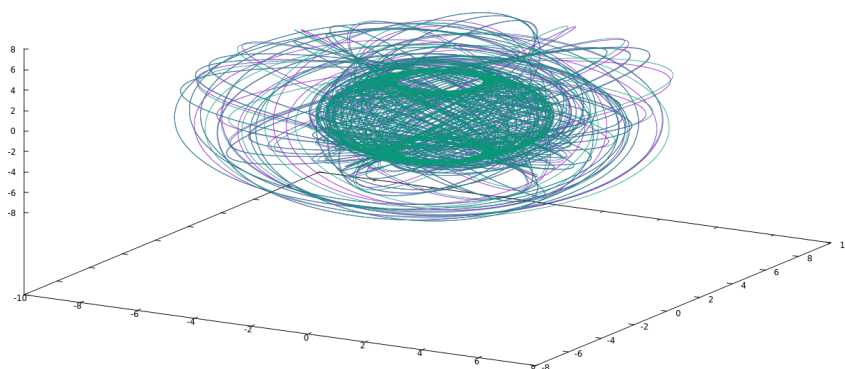


Figura 3.35: Espacio de configuraciones de la figura (3.34). Ambas geodésicas divergen cuando el tiempo de simulación es lo suficientemente grande.

Al aumentar el tiempo de simulación, las pequeñas diferencias en ambas geodésicas aumentan debido a las no linealidades del sistema. En la figura (3.34) se aprecia que el comportamiento de las trayectorias es divergente, aunque ambas trayectorias permanecen en los mismos toros como se ve en el espacio de configuraciones de la figura (3.35). La evolución de estas trayectorias no termina en el horizonte de eventos o en escape del campo gravitacional del objeto compacto, en su lugar van a rellenar la región entre toros sin coincidir nuevamente en su camino.

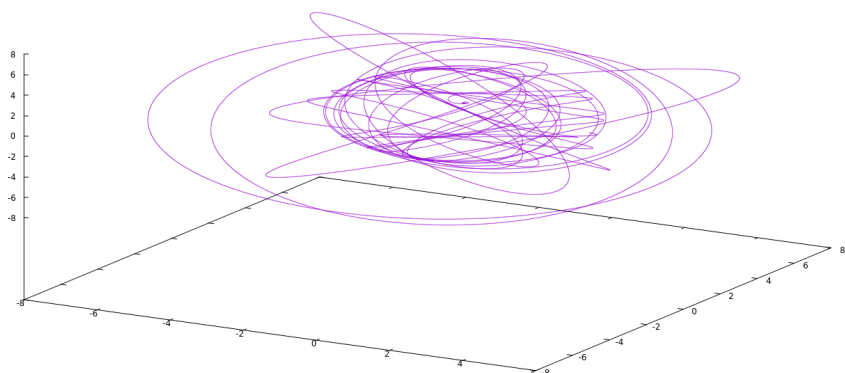


Figura 3.36: Trayectoria de una geodésica caótica de $q = 0,9$ ubicada entre las resonancias de $2/9$ y $6/25$ con condición inicial $r = 3,29$. Está órbita evoluciona para dirigirse al horizonte de eventos.

Finalmente, el otro posible comportamiento de una órbita caótica, como se muestra en la figura (3.36), es de caer al horizonte de eventos. Inicialmente, el sistema dinámico oscila en un toro siendo indistinguible de una órbita estable. Eventualmente, la partícula de prueba se dirige en espiral hacia el objeto compacto que genera el campo gravitacional.

Capítulo 4

Conclusiones

Como se expuso anteriormente, la teoría de sistemas dinámicos junto con la mecánica hamiltoniana permite analizar la estructura del espacio-tiempo alrededor de objetos compactos deformados. Tomando la métrica tipo-Kerr con momento de masa cuadrupolar y las ecuaciones canónicas de Hamilton, se obtienen las geodésicas en el espacio de fases que representan el movimiento de partículas masivas de prueba alrededor de la fuente de campo gravitacional. Para ello se utiliza la integración numérica debido a que en general esta métrica no es integrable de manera analítica. Las trayectorias del espacio de configuraciones en la isla principal de estabilidad se caracterizan por llenar la superficie de un toroide. De acuerdo al teorema de KAM, cuando se perturba el sistema por medio del momento de masa cuadrupolar se dan dos posibilidades, algunos de los toros se rompen dando nuevas estructuras de islas, mientras que la mayoría de toros solamente se deforman.

La sección de Poincaré es una herramienta que permite visualizar las diversas estructuras que aparecen en el espacio de fases. Debido a que las geodésicas de la métrica de Kerr son trayectorias integrables por la presencia de cuatro constantes de movimiento (la energía E , la componente z del momento angular L_z , la masa de reposo de la partícula μ y la constante de Carter \mathfrak{C}), no aparecen islas adicionales a la isla principal de estabilidad. Por otro lado, la métrica tipo Kerr con momento de masa cuadrupolar no presenta, en general, la constante de Carter, por lo tanto el sistema no es integrable como ya se mencionó. Al romper la simetría esférica al aumentar el parámetro del momento de masa cuadrupolar q y manteniendo los demás parámetros constantes, se puede observar la evolución de las órbitas por medio de las secciones de Poincaré.

En la región más cercana al horizonte de eventos se forman diversas estructuras en el espacio de fases debido a la intensa gravedad y la presencia del momento cuadrupolar. Estas estructuras pueden ser identificadas utilizando el número de rotación que cruza

el eje $p_r = 0$ ya que la extensión de la isla corresponde a un intervalo constante en el número de rotación. El comportamiento del número de rotación en una región regular tiende a ser monótono, mientras que en un intervalo caótico el número de rotación oscila rápidamente. Como se observó para $q = 0,1$ la aparición de estructuras indica el rompimiento de los toros pero sin identificar una región caótica apreciable en la isla principal de estabilidad, cerca de la última órbita estable sí se observa una oscilación del número de rotación. Al aumentar gradualmente q se observa que las diversas resonancias de $2/9$, $2/7$ y $2/5$ se mantienen y van apareciendo nuevas resonancias y puntos hiperbólicos. Adicionalmente, la estructura de $2/9$ comienza a rodearse de islas satélite y de caos incipiente como se ve para $q = 0,3$. Cuando se tiene $q = 0,7$ y $q = 0,9$ se puede observar la aparición de nuevos intervalos caóticos terminando con el punto hiperbólico que delimita la zona donde aparecen más estructuras de la región más estable. Se observa en las secciones de Poincaré que al romperse los toros cercanos a la última órbita estable, aparecen estructuras y regiones caóticas.

El fenómeno de adhesión (stickiness) es una característica fundamental para comprender la evolución de las órbitas caóticas. Las órbitas caóticas permanecen unidas a órbitas estables durante un tiempo grande antes de divergir e irse al horizonte de eventos, i. e. se mantienen alrededor de islas de alta multiplicidad antes de caer al horizonte. La región caótica para $q = 0,9$ ubicada entre las resonancias de $6/25$ y $9/37$ demuestra que las geodésicas pueden permanecer unidas, siendo prácticamente indistinguibles entre sí en la primera parte del trayecto. Posteriormente las no linealidades separan ambas trayectorias, oscilando entre los toros que las delimitan sin caer al horizonte de eventos. Finalmente, el comportamiento caótico puede llevar a una trayectoria, que permanece aparentemente estable durante un lapso de tiempo, hasta el horizonte de eventos.

Los recientes avances tanto en observación directa del disco de acreción de agujeros negros, de estrellas orbitando a su alrededor y la detección de ondas gravitacionales producidas por sistemas que involucran objetos compactos permitirán contrastar los diferentes modelos de espacio-tiempo. Se podrá concluir cuando un objeto compacto presenta un achatamiento por medio del espectro detectado en las ondas gravitacionales el cual contendrá la información de la presencia de caos en el sistema.

Anexos

Apéndice A

Diagramas de Flujo

Para realizar las simulaciones requeridas durante el trabajo de investigación se elaboró un programa escrito en lenguaje C, con la finalidad de obtener las trayectorias de las geodésicas, sus representaciones gráficas en el espacio de configuraciones y la construcción de las secciones de Poincaré. Dado que se están resolviendo las ecuaciones de movimiento (2.66) utilizando la métrica de tipo-Kerr, se debe utilizar un método numérico para ecuaciones diferenciales ordinarias, para lo cual se utilizó el método de Runge-Kutta-Fehlberg, el cual es aplicable a sistemas de la forma

$$\dot{x}^i = f^i(x^j) \tag{A.1}$$

Al igual que otros métodos de tipo Runge-Kutta arbitrarios, este método se basa en evaluaciones de las funciones $f^i(x^j)$, sin embargo solo requiere el 40 % de las evaluaciones necesarias en los métodos arbitrarios. Adicionalmente, está provisto de un sistema de control de error para cambiar del paso de integración según sea necesario en un intervalo seleccionado [21].

A continuación se presentan los diagramas de flujo simplificados de las principales funciones del código fuente utilizado para realizar las simulaciones.

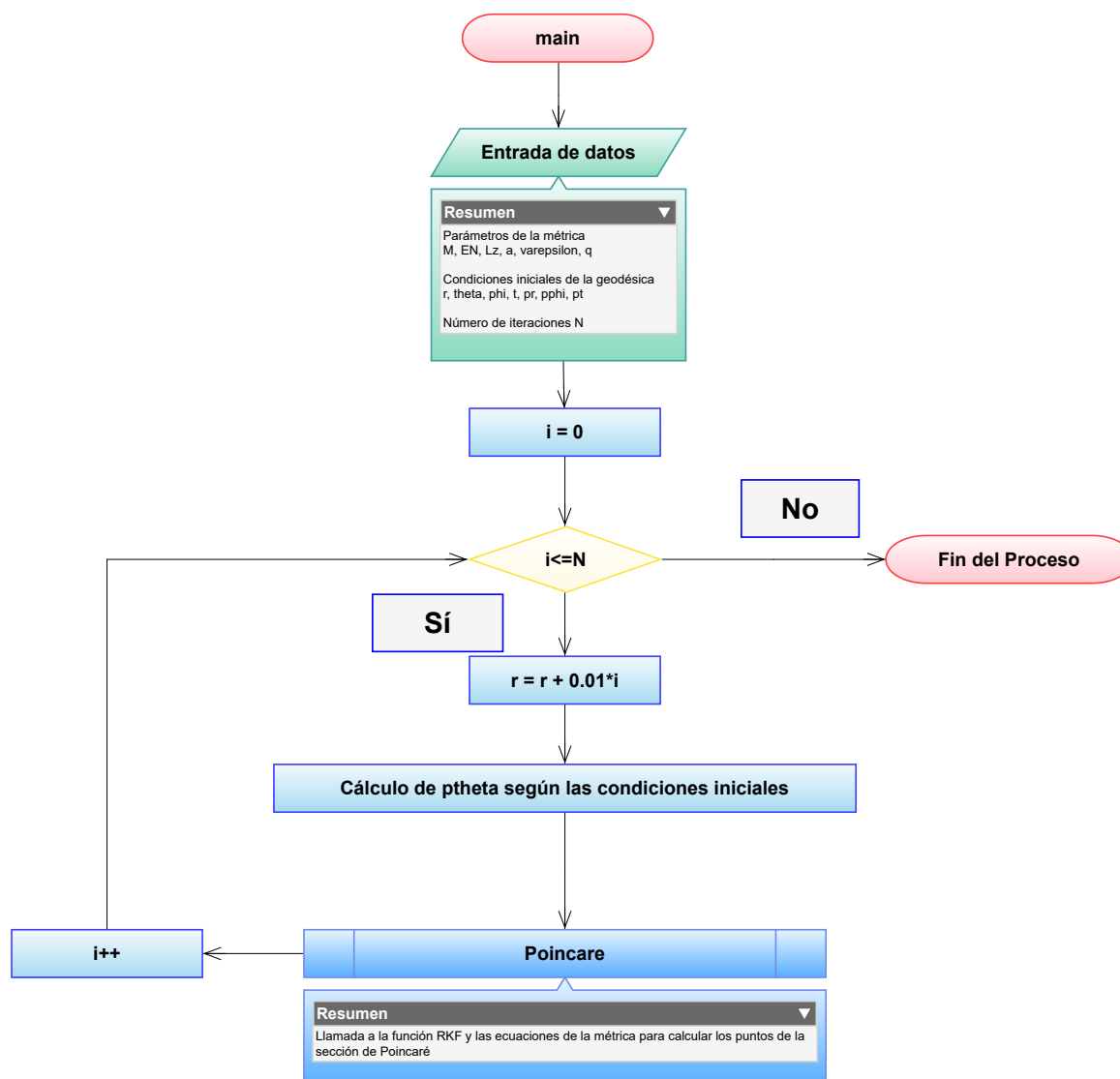


Figura A.1: Función principal (main) la cuál controla los datos y realiza las llamadas correspondientes a las subrutinas.

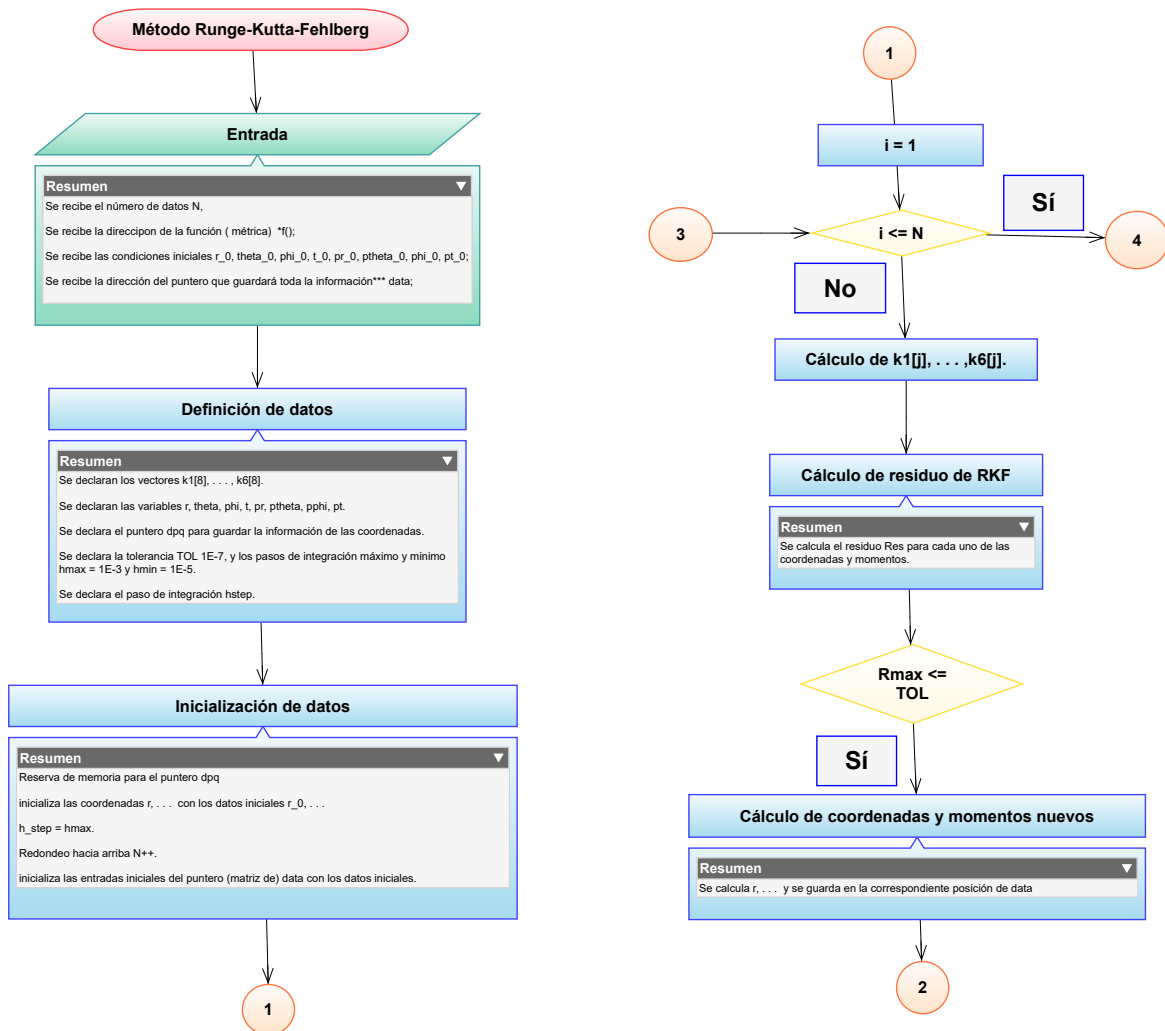


Figura A.2: Primera parte del diagrama de flujo para la función del método de Runge-Kutta-Fehlberg.

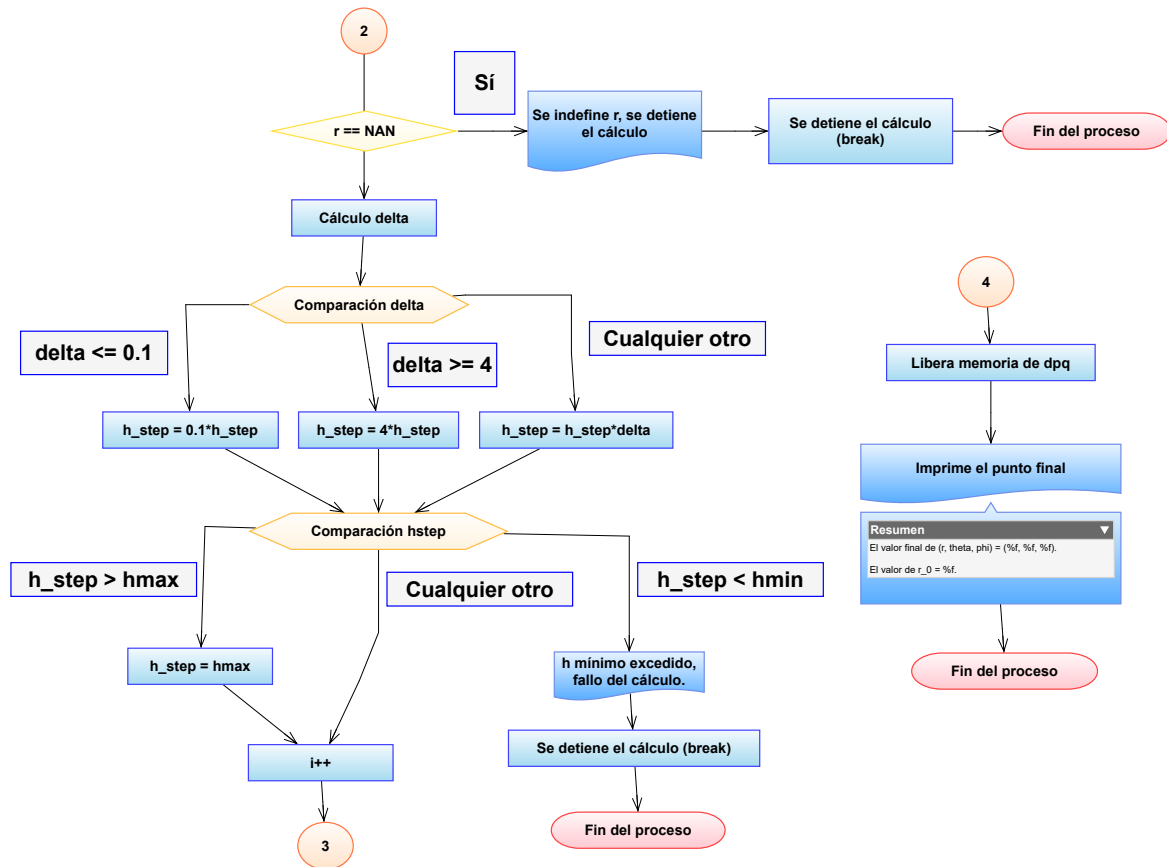


Figura A.3: Segunda parte del diagrama de flujo para la función del método de Runge-Kutta-Fehlberg.

Finalmente, el programa calcula la trayectoria de una geodésica utilizando las ecuaciones de movimiento (2.66), construye las secciones de Poincaré y calcula el número de rotación para las condiciones iniciales seleccionadas. Cada una de las partes anteriores tiene como salida un archivo con la información correspondiente que puede ser visualizada con la herramienta GNUPLOT.

Apéndice B

Soluciones de las Ecuaciones de Campo de Einstein para el Exterior de Objetos Compactos

B.1. Métrica de Hartle-Thorne.

La métrica de Hartle-Thorne representa una solución aproximada de las ecuaciones de campo de Einstein para modelar el espacio-tiempo en el exterior de un objeto rígido de simetría axial, rotando lentamente y estacionario. Dado que se obtuvo al hacer expansiones multipolares la métrica de Hartle-Thorne tiene precisión de segundo orden en su momento angular y primer orden en momento cuadrupolar. Para describir el objeto requiere tres parámetros: la masa M , el momento angular J y el momento cuadrupolar q . Utilizando la ecuación (2.63) la métrica viene representada por [6, 11]

$$\begin{aligned}
 V &= (1 - 2U) [1 + 2K_1 P_2(\cos \theta)] + 2 \frac{J^2}{r^4} (2 \cos^2(\theta) - 1) \\
 W &= -2 \frac{J}{r} \sin^2 \theta \\
 X &= \frac{1}{1 - 2U} \left[1 - 2K_2 P_2(\cos \theta) - \frac{2}{1 - 2U} \frac{J^2}{r^4} \right] \\
 Y &= r^2 [1 - 2K_3 P_2(\cos \theta)] \\
 Z &= Y \sin^2 \theta
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

donde las funciones auxiliares están definidas por

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{J^2}{mr^3}(1+U) + \frac{5}{8} \left(\frac{q}{m^3} - \frac{J^2}{m^4} \right) Q_2^2 \left(\frac{r}{m} - 1 \right) \\
K_2 &= K_1 - \frac{6J^2}{r^4} \\
K_3 &= \left(K_1 + \frac{J^2}{r^4} \right) + \frac{5}{4} \left(\frac{q}{m^3} - \frac{J^2}{m^4} \right) \frac{U}{\sqrt{1-2U}} Q_2^1 \left(\frac{r}{m} - 1 \right)
\end{aligned} \tag{B.2}$$

con

$$U = \frac{m}{r} \tag{B.3}$$

Las funciones Q_2^1 y Q_2^2 son los polinomios asociados de Legendre de segunda especie

$$Q_2^1(x) = \sqrt{x^2 - 1} \left[\frac{3}{2}x \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 1} \right] \tag{B.4}$$

$$Q_2^2(x) = (x^2 - 1) \left[\frac{3}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - \frac{3x^2 - 5x}{(x^2 - 1)^2} \right] \tag{B.5}$$

B.2. Métrica de Quevedo-Mashhoon.

La métrica de Quevedo-Mashhoon representa el espacio-tiempo circundante de un objeto, como solución exacta con simetría axial en el vacío de las ecuaciones de campo de Einstein. Esta métrica posee cuatro parámetros de entrada la masa M , el parámetro de rotación a , el momento cuadrupolar del objeto q y el parámetro de Zipoy-Vorhees δ el cual para efectos de simplificar en la implementación se toma como $\delta = 1$ [6,7,14].

$$\begin{aligned}
V &= f, \\
W &= -f\omega \\
X &= \left[\frac{(r-M)^2 - \sigma^2 \cos^2 \theta}{(r-M)^2 - \sigma^2} \right] \frac{e^{2\gamma}}{f} \\
Y &= [(r-M)^2 - \sigma^2 \cos^2 \theta] \frac{e^{2\gamma}}{f} \\
Z &= \frac{(r-M)^2}{f} \sin^2 \theta - f\omega^2
\end{aligned} \tag{B.6}$$

donde sus funciones auxiliares son

$$\begin{aligned}
f &= \frac{\tilde{R}}{\tilde{L}} e^{-2\gamma} \\
\omega &= -2 \left(a + \sigma \frac{\tilde{M}}{\tilde{R}} e^{2\gamma} \right) \\
e^{2\gamma} &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{M}{\sigma} \right)^2 \frac{\tilde{R}}{(x^2 - 1)^\delta} e^{2\delta^2 \chi}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

con

$$\psi = qP_2Q_2 \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{R} &= a_+ a_- + b_+ b_- \\
\tilde{L} &= a_+^2 + b_+^2 \\
\tilde{M} &= (x+1)^{\delta-1} [x(1-y^2)(\lambda+\eta)a_+ + y(x^2-1)(1-\lambda\eta)b_+] \\
\chi &= \frac{1}{2}(1+q)^2 \ln \left(\frac{x^2-1}{x^2-y^2} \right) + 2q(1-P_2)Q_1 \\
&+ \frac{1}{2}q^2(1-P_2)[2(1+P_2)((Q_1)^2 - (Q_2)^2) \\
&+ (x^2-1)(2(Q_2)^2 - 3xQ_1Q_2 + 3Q_0Q_2 - Q_2')]
\end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
a_\pm &= (x \pm 1)^{\delta-1} [x(1-\lambda\eta) \pm (1+\lambda\eta)] \\
b_\pm &= (x \pm 1)^{\delta-1} [y(\lambda+\eta) \mp (\lambda-\eta)]
\end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned}
\lambda &= \alpha(x^2-1)^{1-\delta}(x+y)^{2\delta-2}e^{2\delta\delta_+} \\
\eta &= \alpha(x^2-1)^{1-\delta}(x-y)^{2\delta-2}e^{2\delta\delta_-} \\
\delta_\pm &= \frac{q}{2} \ln \left[\frac{(x \pm y)^2}{x^2-1} \right] + \frac{3q}{2}(1-y^2 \mp xy) \\
&+ \frac{3q}{4} [x(1-y^2) \mp y(x^2-1)] \ln \left[\frac{x-1}{x+1} \right]
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Las funciones P_n y Q_n son los polinomios de Legendre de primera y segunda especie respectivamente

$$\begin{aligned}
 P_0 &= 1 \\
 P_1 &= y \\
 P_2 &= \frac{1}{2}(3y^2 - 1) \\
 Q_0 &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \\
 Q_1 &= xQ_0 - 1 \\
 Q_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1)Q_0 - \frac{3x}{2}
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

Las coordenadas x y y son coordenadas prolatas por lo que es necesario usar la transformación a coordenadas de Boyer-Lyndquist

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{r - M}{\sigma} \\
 y &= \cos \theta
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

Los parámetros α , σ son dados por

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \sqrt{M^2 - a^2} \\
 \alpha &= \frac{\sigma - M}{a}
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

En caso de que el parámetro de rotación sea $a = 0$, se toma $\alpha = 0$.

B.3. Métrica de Manko-Novikov.

Esta métrica también representa una generalización del espacio-tiempo exterior a un objeto compacto que gira sobre un eje, como tal es una generalización no lineal de la métrica de Kerr con una expansión de multipolos de masa de orden arbitrario. Aquí se presenta sólo hasta el orden cuadrupolar de masa así que los parámetros son la masa del objeto que produce el campo gravitacional M , el parámetro de giro a y el momento de masa cuadrupolar q . Los potenciales de la métrica en coordenadas de Boyer-Lindquist no es isométrica con la métrica de Quevedo-Mashhoon de la ecuación (B.6), al igual

que la transformación de las coordenadas prolatas de la ecuación (B.13) y los mismos parámetros σ y α de la ecuación (B.14) [7, 14].

Las funciones auxiliares toman la forma

$$\begin{aligned} f &= \frac{A}{B} e^{2\psi} \\ \omega &= -2\sigma \left(\frac{2\alpha}{1-\alpha^2} - \frac{C}{A} e^{-2\psi} \right) \\ e^{2\gamma} &= \frac{Ae^{2x}}{(1-\alpha^2)^2(x^2-1)} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

donde

$$\begin{aligned} A &= (x^2-1)(1+ab)^2 - (1-y^2)(b-a)^2 \\ B &= [x+1+(x-1)ab]^2 + [(1+y)a+(1-y)b]^2 \\ C &= (x^2-1)(1+ab)[b-a-y(a+b)] \\ &\quad + (1-y^2)(b-a)[1+ab+x(1-ab)] \\ \psi &= q \frac{P_2}{R^3} \\ \chi &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{x^2-1}{x^2-y^2} \right] + \frac{9}{6} \frac{q^2}{R^6} (P_3 P_3 - P_2 P_2) \\ &\quad + 2q \left[x \frac{P_0}{R} - y \frac{P_1}{R^2} + x \frac{P_2}{R^3} - 1 \right] \\ a &= a(x, y) = -\alpha e^{-2q\chi_1} \\ b &= b(x, y) = \alpha e^{2q\chi_2} \\ \chi_1 &= -1 + \frac{(x-y)}{R} \left(P_0 + \frac{P_1}{R} + \frac{P_2}{R^2} \right) \\ \chi_2 &= 1 - \frac{(x+y)}{R} \left(P_0 - \frac{P_1}{R} + \frac{P_2}{R^2} \right) \\ R &= \sqrt{x^2+y^2-1} \\ P_n &= P_n \left(\frac{xy}{R} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Las funciones P_n son los polinomios de Legendre.

Bibliografía

- [1] Atwater, H. A. Introduction to General Relativity, Pergamon Press International Series of Monographs in Natural Philosophy, Oxford and New York, 1974.
- [2] Carroll, B. W., Ostlie, D. A. An Introduction to Modern Astrophysics, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [3] Contopoulos, G. Order and Chaos in Dynamical Astronomy, Springer, 2004,
- [4] Contopoulos, G., Lukes-Gerakopoulos, G., Apostolatos, T. A. Orbits in a Non-Kerr Dynamical System, International Journal of Bifurcation and Chaos, 21(08), 2261–2277, 2011.
<https://doi.org/10.1142/S0218127411029768>
- [5] Dokuchaev, V. I., Nazarova, N. O. Event Horizon Image within Black Hole Shadow, Journal of Experimental and Theoretical Physics, 128(4), 578–585, 2019.
<https://doi.org/10.1134/S1063776119030026>
- [6] Frutos-Alfaro, F. Approximate Kerr-Like Metric with Quadrupole, International Journal of Astronomy and Astrophysics, 6, 334–345, 2016.
<https://doi.org/10.4236/ijaa.2016.63028>
- [7] Frutos-Alfaro, F., Soffel, M. On Relativistic Multipole Moments of Stationary Space-Times, Royal Society Open Science, 5, 2018.
<https://doi.org/10.1098/rsos.180640>
- [8] Frutos-Alfaro, F. Approximate Spacetime for Neutron Stars General Relativity and Gravitation, 51, 46, 2019.
<https://doi.org/10.1007/s10714-019-2530-5>
- [9] Goldstein, H., Poole, C., Safko, J. Classical Mechanics, Addison Wesley, San Francisco, 2000.

-
- [10] Grossman, R., Levin, J., Perez-Giz, G. Harmonic Structure of Generic Kerr Orbits, *Physical Review. D*, 85(2), 023012, 2012.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.023012>
- [11] Hartle, J. B., Thorne, K. S. Slowly Rotating Relativistic Stars. II. Models for Neutron Stars and Supermassive Stars, *Astrophysical Journal*, 153, 807–834, 1968.
<https://doi.org/10.1086/149707>
- [12] Landau, L. D., Lifshitz, E. M. *Course of Theoretical Physics. vol. 1: Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 1960.
- [13] Lukes-Gerakopoulos, G., Contopoulos, G., Apostolatos, T. A. Non-Linear Effects in Non-Kerr Spacetimes, Bičák J., Ledvinka T. (eds) *Relativity and Gravitation, Springer Proceedings in Physics*, 157, 2014.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-06761-2_16
- [14] Manko, V. S., Novikov, I. D. Generalizations of the Kerr and Kerr-Newman Metrics Possessing an Arbitrary Set of Mass-Multipole Moments, *Classical and Quantum Gravity*, 9(11), 2477–2487, 1992.
<https://doi.org/10.1088/0264-9381/9/11/013>
- [15] McMahon, D. *Relativity Demystified*, McGraw-Hill, New York, 2006.
- [16] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A. *Gravitation*, Freeman, New York, 1973.
- [17] Strogatz, S. *Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering (Studies in Nonlinearity)*, Addison-Wesley, San Francisco, 1994.
- [18] Weinberg, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1972.
- [19] Lukes-Gerakopoulos, Georgios. Nonintegrability of the Zipoy-Voorhees metric, *Phys. Rev. D*, 86, 2012.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.044013>
- [20] Apostolatos T. A., Lukes-Gerakopoulos G., Contopoulos G., How to observe a non-Kerr spacetime using gravitational waves, *Phys Rev Lett*, 103(11):111101, 2009.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.111101>

-
- [21] Burden, R. L., Faires, J. D. Numerical Analysis. Ninth Edition, Brooks/Cole, Cengage Learning., Boston, 2011.
- [22] Voglis, N., Efthymiopoulos, C., Angular dynamical spectra. A new method for determining frequencies, weak chaos and cantori, Journal of Physics A: Mathematical and General, 31, 1998.
<https://doi.org/10.1088/0305-4470/31/12/015>
- [23] Laskar, J., Frequency Analysis of a Dynamical System, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 56, 1993.
<https://doi.org/10.1007/BF00699731>
- [24] Papaphilippou, Y., Laskar, J., Frequency map analysis and global dynamics in a galactic potential with two degrees of freedom, Astronomy and Astrophysic., 307, 1996.
<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1996A&A...307..427P>
- [25] Santos , M., Mugnaine, M., Szezech, J., Batista, A., Caldas, I., Viana, R., Using rotation number to detect sticky orbits in Hamiltonian systems, AIP Publishing, Chaos 29, 043125, 2019.
<https://doi.org/10.1063/1.5078533>
- [26] Brink, J., Geyer, M., Hinderer, T., The Astrophysics of Resonant Orbits in the Kerr Metric, Phys. Rev. D., 91, 083001, 2015.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.083001>
- [27] Wang, M., Chen, S., Jing, J., Chaotic shadow of a non-Kerr rotating compact object with quadrupole mass moment, Phys. Rev. D, 98, 104040, 2018.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.104040>
- [28] Zelenka, O., Lukes-Gerakopoulos, G., Witzany, V., Kopáček, O., Growth of resonances and chaos for a spinning test particle in the Schwarzschild background, Phys. Rev. D, American Physical Society, 101, 024037, 2020.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.024037>
- [29] Destounis, K., Suvorov, A. G., Kokkotas, K. D., Testing spacetime symmetry through gravitational waves from extreme-mass-ratio inspirals, Phys. Rev. D, 102, 064041, 2020.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.064041>

- [30] Calkin, M. G. Lagrangian and Hamiltonian Mechanics, World Scientific Publishing Co, Singapore, New Jersey, London and Hong Kong, 1996.
- [31] Valluri, M., Merrit, D., Torus Construction, Astronomical Society of the Pacific Conference Series, 182, 1999.
<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1999ASPC..182..178V>