Teorías y propiedades universales de una teoría de anillos real cerrados

(Informe Final Proyecto B9128)

Jorge I. Guier.

Centro de Investigación en Matemática Pura y Aplicada,
Escuela de Matemática,
Universidad de Costa Rica,
11501 San José, COSTA RICA.

14 de octubre de 2021

Resumen

Sea T^* la teoría de los subanillos reticulados que son convexos en los f-anillos von Neumann regulares real cerrados, y que además no tienen elementos idempotentes minimales (no-cero) y que son divisible-proyectables y sc-regulares. En este informe presentamos varias propiedades universales de la teoría T^* y damos la teoría universal de T^* en el lenguaje de anillos reticulados junto con la relación radical asociada al espectro primo minimal (cf. [17]), la divisibilidad y la divisibilidad local (introducida en [13]).

1. Introducción.

Sea T^* la teoría de los f-anillos reducidos, proyectables, divisible-proyectables, sc-regulares, con la primera propiedad de convexidad, sin elementos idempotentes minimales (no cero) y real cerrados. Es conocido que los modelos de T^* son los subanillos convexos de los f-anillos von Neumann regulares, que además no tiene idempotentes minimales no cero y que son divisible-proyectable y sc-regulares, cf. [12, Theorem 10].

Si A es un f-anillo reducido y proyectable, entonces [14] nos dice que:

$$A \in \Gamma^{a}_{\mathcal{L}}\big(\pi A, (A/p)_{p\in\pi A}\big),$$

en donde $\mathcal{L}$ es el lenguaje de anillos ordenados (ver notación anterior en [5]) y

$$\pi A = \{p \in \operatorname{Spec}(A) : p \text{ es un ideal primo minimal}\} = \operatorname{Specmin}(A).$$

Denotaremos esto de manera más simple como $A \cong \Gamma\big(X, (A_x)_{x\in X}\big)$, en donde $X = \pi A$. También tenemos:

$$\begin{aligned} b \in a^{\perp\perp} &\iff [\![\, b \neq 0 \,]\!] \subseteq [\![\, a \neq 0 \,]\!] \\ &\iff \operatorname{supp}(b) \subseteq \operatorname{supp}(a) \\ &\iff [\![\, a = 0 \,]\!] \subseteq [\![\, b = 0 \,]\!] \\ &\iff \forall p \in \pi A\, (a \in p \Rightarrow b \in p). \end{aligned}$$

En [17], se usan las relaciones radicales, introducidas en [16], para estudiar la teoría de modelos de los f-anillos von Neumann regulares real cerrados sin idempotentes minimales no cero. Las relaciones radicales están dadas por un subconjunto $X \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ por medio de:

$$a \preceq_X b \Longleftrightarrow \forall p \in X\,(a \notin p \Rightarrow b \notin p).$$

El caso $X = \pi A$ es un caso relevante estudiado en [17] y se tiene que:

$$\begin{aligned} a \preceq_{\pi A} b &\Longleftrightarrow \forall p \in \pi A\,(a \notin p \Rightarrow b \notin p)\\ &\Longleftrightarrow \forall p \in \pi A\,(b \in p \Rightarrow a \in p)\\ &\Longleftrightarrow a \in b^{\perp\perp}\\ &\Longleftrightarrow b^{\perp} \subseteq a^{\perp}\\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Ann}(b) \subseteq \mathrm{Ann}(a). \end{aligned}$$

Siguiendo [17], vamos a extender el lenguaje de anillos reticulados $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, \wedge\}$ agregando el símbolo de relación binaria $\preceq$ definidos por:

$$a \preceq b \Longleftrightarrow a \in b^{\perp\perp} \Longleftrightarrow \mathrm{Ann}(b) \subseteq \mathrm{Ann}(a).$$

De hecho, una relación radical $\preceq$ es una relación binaria que se define en [17] por medio de:

(1) $a \preceq a$, para todo $a \in A$;
(2) si $a \preceq b$ y $b \preceq c$ entonces $a \preceq c$, para todo $a, b, c \in A$;
(3) si $a \preceq c$ y $b \preceq c$ entonces $a + b \preceq c$, para todo $a, b, c \in A$;
(4) si $a \preceq b$ entonces $ac \preceq bc$, para todo $a, b, c \in A$;
(5) $a \preceq 1$, para todo $a \in A$ y $1 \not\preceq 0$;
(6) $b \preceq b^2$, para todo $b \in A$.

En [13] se introduce una relación binaria de divisibilidad local dada por:

$$y \mid_{\mathrm{loc}} w \longleftrightarrow \exists w'(w' \neq 0 \wedge w'(w - w') = 0 \wedge y \mid w') \vee w = 0,$$

y se demuestra que la teoría T^* es modelo completa en el lenguaje de anillos reticulados junto con la relación radical $\preceq_{\pi A}$ y la divisibilidad local, cf. [13, Theorem 3.2].

2. Propiedades universales.

En esta sección damos varias propiedades universales de T^*. Varias de ellas se asemejan a la primera propiedad de convexidad: $\forall a \forall b (0 < a < b \rightarrow b \mid a)$, pero se establecen con la divisibilidad local en lugar de la divisibilidad. Todas estas fórmulas son interesantes "per se". Todas ellas fueron buscadas con el propósito de ayudar en la consecusión de los resultados que se establecen en la siguiente sección. Sin embargo, otras ideas fueron las que permitieron encontrar los axiomas universales necesarios para establecer la teoría universal de T^*. Sin embargo, el autor considera que algunas de estas fórmulas universales podrían ayudar a probar el siguiente hecho: A/p la satisface la primera propiedad de convexidad, para ciertos ideales p primos. Antes damos un lema que permite otra manera de comprender la divisibilidad local.

Lema 2.1 *Sea B un f-anillo reducido y proyectable. Para $a, b \in B$, se tiene que $b \mid_{\text{loc}} a$ si y solo si $a = 0$ o existe $e \in B$ un idempotente tal que $ae \neq 0$ y $b \mid ae$.*

Demostración: Dado que B es un f-anillo reducido y proyectable, tenemos que $B \cong \Gamma\big(X, (B_x)_{x\in X}\big)$, en donde X es un espacio Booleano y $(B_x)_{x\in X}$ es una familia de anillos íntegros totalmente ordenados.

($\Rightarrow$): Si $a \neq 0$ entonces existe $w \in B$ tal que $w \neq 0$, $w(w-a) = 0$ y $b \mid w$. Consideremos $N = [\![\, w \neq 0 \,]\!]$ un abierto-cerrado de X con $N \neq \phi$. Pongamos $e = 1_{\restriction N} \cup 0_{\restriction X \smallsetminus N} \in B$. Entonces $e \neq 0$ y claramente $e^2 = e$. Veamos que $w = ae$. Si $x \in N$ entonces $w(x) \neq 0$ y entonces $w(x) = a(x) = a(x) \cdot 1 = a(x)e(x)$, pues $e(x) = 1$. Si $x \notin N$ entonces $w(x) = 0$ y $e(x) = 0$, y luego $0 = w(x) = a(x) \cdot 0 = a(x)e(x)$. Entonces $w = ae \neq 0$ y $b \mid ae$. Hemos visto que existe $e \in B$ un idempotente con $ae \neq 0$ tal que $b \mid ae$.

($\Leftarrow$): Si $a = 0$, claramente $b \mid_{\text{loc}} a$. Si $a \neq 0$, entoces existe $e \in B$ un idempotente tal que $ae \neq 0$ y $b \mid ae$. Pongamos $N = [\![\, ae \neq 0 \,]\!]$, que es un abierto-cerrado de X no vacío. Pongamos $w = a_{\restriction N} \cup 0_{\restriction X \smallsetminus N} \in B$. Si $x \in N$ entonces $w(x) = a(x) \neq 0$ y $e(x) = 1$, con $w(x) = a(x)e(x)$. Luego $w(x)\big(w(x) - a(x)\big) = 0$ y $w \neq 0$. Si $x \notin N$ entonces $w(x) = 0$ y $w(x)\big(w(x) - a(x)\big) = 0$; también $w(x) = 0 = (ae)(x)$. Por lo tanto $w = ae$. Entonces existe $w \in B$, $w \neq 0$ con $w(w-a) = 0$ y $b \mid w$. Es decir: $b \mid_{\text{loc}} a$. ∎

El lema siguiente nos va a ser de utilidad.

Lema 2.2 *Sea A un f-anillo proyectable. Sean $a, b \in A$, entonces b divide a si y solo si $|b|$ divide $|a|$.*

Demostración: ($\Rightarrow$): Sean $a, b \in A$ tales que $b \mid a$. Entonces existe $c \in A$ tal que $bc = a$. Luego se tiene que $|bc| = |a|$. Por [4, 9.1.10 (iii)] se tiene que $|b||c| = |a|$. Luego $|b|$ divide $|a|$.

($\Leftarrow$): Sean $a, b \in A$ tales que $|b|$ divide $|a|$. Entonces existe $c \in A$ tal que $|b|c = |a|$. Usando que $A \cong \Gamma\big(X, (A_x)_{x\in X}\big)$ en donde X es un espacio Booleano y $(A_x)_{x\in X}$ es una familia de anillos totalmente ordenados. Poniendo $N = [\![\, 0 \leqslant ab \,]\!]$ se tiene que N es un abierto-cerrado de X y luego definiendo $d = c_{\restriction N} \cup (-c)_{X \smallsetminus N} \in A$, se tiene que $bd = a$. Luego $b \mid a$. ∎

La fórmula que se establece en la siguiente proposición es similar a la primera propiedad de convexidad. Note que se expresa con la divisibilidad local, en lugar de la divisibilidad.

Proposición 2.3 *Sea B un f-anillo reducido y proyectable que satisface la primera propiedad de convexidad. Si $a, b \in B$ tales que $b \nmid_{\text{loc}} a$ y $b \preceq a$, entonces $|b| < |a|$. Es decir, B satisface la siguiente fórmula:*

$$\forall a \forall b \big(b \nmid_{\text{loc}} a \wedge b \preceq a \rightarrow |b| < |a|\big).$$

Demostración: Tenemos que $B \cong \Gamma\big(X, (B_x)_{x\in X}\big)$, en donde X es un espacio Booleano y $(B_x)_{x\in X}$ es una familia de anillos íntegros totalmente ordenados que satisfacen la primera propiedad de convexidad.

• Si existe $x \in X$ tal que $0 < a(x)$ y $0 < b(x)$ con $a(x) \leqslant b(x)$, entonces $b(x) \mid a(x)$ en B_x. Existe $c_x \in B_x$ tal que $b(x) = c_x a(x)$. Luego existe $c \in B$ tal que $c(x) = c_x$. Consideremos $N = [\![bc = a]\!]$ que es un abierto-cerrado de X que es no vacío pues $x \in N$. Pongamos $e = 1_{\restriction N} \cup 0_{\restriction X \smallsetminus N} \in B$ un idempotente con $e \neq 0$ pues $N \neq \phi$. Vea que $ae \neq 0$ pues $a(x) \neq 0$ y $x \in N$. Redefiniendo c como $c' = c_{\restriction N} \cup 0_{\restriction X \smallsetminus N} \in B$ se tiene que $bc' = ae$. Hemos encontrado $e \in B$ un idempotente tal que $ae \neq 0$ y $b \mid ae$. Por el lema 2.1 tenemos que $b \mid_{\text{loc}} a$. Esto contradice nuestra hipótesis, y por tanto tenemos que:

$$\forall x \in X \big(0 < a(x) \wedge 0 < b(x) \rightarrow b(x) < a(x)\big).$$

• Si existe $x \in X$ tal que $a(x) < 0$ y $b(x) > 0$ con $-a(x) \leqslant b(x)$, entonces $b(x)$ divide $-a(x)$ en B_x; y entonces $b(x)$ divide $a(x)$ en B_x. Similarmente al punto anterior, se podría concluir que $b \mid_{\text{loc}} a$, contradiciendo la hipótesis. Entonces tenemos en este caso que:

$$\forall x \in X \big(a(x) < 0 \wedge 0 < b(x) \rightarrow b(x) < -a(x)\big).$$

• Si existe $x \in X$ tal que $0 < a(x)$ y $b(x) < 0$ con $a(x) \leqslant -b(x)$, entonces $-b(x)$ divide a $a(x)$, y por tanto $b(x) \mid a(x)$ en B_x. Similarmente al primer punto, se logra probar en este caso que $b \mid_{\text{loc}} a$, contrario a la hipótesis. En este caso tenemos entonces que:

$$\forall x \in X \big(0 < a(x) \wedge b(x) < 0 \rightarrow -b(x) < a(x)\big).$$

• Si existe $x \in X$ tal que $a(x) < 0$ y $b(x) < 0$ con $b(x) \leqslant a(x)$, entonces $-a(x) \leqslant -b(x)$ con $-a(x) > 0$ y $-b(x) > 0$. Por la primera propiedad de convexidad de B_x, se tiene que $-b(x) \mid -a(x)$ en B_x. Es decir, $b(x) \mid a(x)$ en B_x. Similarmente al primer punto, podemos probar que $b \mid_{\text{loc}} a$, lo que contradice nuestra hipótesis. Luego tenemos en este caso que:

$$\forall x \in X \big(a(x) < 0 \wedge b(x) < 0 \rightarrow a(x) < b(x)\big),$$

o lo que es lo mismo:

$$\forall x \in X \big(a(x) < 0 \wedge b(x) < 0 \rightarrow -b(x) < -a(x)\big).$$

En estos cuatro casos anteriores, lo que hemos probado es que:

$$\forall x \in X \big(a(x) \neq 0 \wedge b(x) \neq 0 \rightarrow |b(x)| < |a(x)|\big). \qquad (*)$$

Como $b \preceq a$, entonces $\forall x \in X\big(a(x) = 0 \Rightarrow b(x) = 0\big)$, y por tanto la fórmula anterior marcada con $(*)$ se transforma en:

$$\forall x \in X \big(|b(x)| \leqslant |a(x)|\big).$$

Es decir: $|b| \leqslant |a|$. Observe que si $|b| = |a|$ entonces claramente $|b|$ divide $|a|$ y por el lema 2.2 se tendría que $b \mid a$, y por tanto $b \mid_{\text{loc}} a$. Esto contradice la hipótesis. Por tanto $|b| \neq |a|$ y luego se tiene que $|b| < |a|$. ■

Observemos que en la demostración anterior, no puede pasar que ninguno de los primeros cuatro casos no ocurra. Pues esto querría decir que solo ocurre el caso en que $b(x) = 0$ para todo $x \in X$ y por tanto $a(x) = 0$ para todo $x \in X$. Es decir que $b = 0$ y $a = 0$. Y esto contradice una vez más que $b \nmid_{\text{loc}} a$, pues cualquier cosa divide localmente a 0, hasta 0. Ahora tenemos:

Corolario 2.4 *Sea B un f-anillo reducido y proyectable que satisface la primera propiedad de convexidad. Sean $a, b \in B$ tales que $b \nmid_{\mathrm{loc}} a$ y $b \preceq a$, entonces $a \mid b$. Es decir que B satisface la siguiente fórmula:*

$$\forall a \forall b \big(b \nmid_{\mathrm{loc}} a \wedge b \preceq a \rightarrow a \mid b \big).$$

■

Demostración: Se deduce gracias a la primera propiedad de convexidad junto con la proposición 2.3 y el lema 2.2 . ■

Una fórmula similar se deduce si $1 \preceq a$ se reemplaza por $b \preceq a$.

Corolario 2.5 *Sea B un f-anillo reducido y proyectable que satisface la primera propiedad de convexidad. Entonces B satisface la siguiente fórmula:*

$$\forall a \forall b \big(b \nmid_{\mathrm{loc}} a \wedge 1 \preceq a \rightarrow a \mid b \big).$$

Demostración: Supongamos que $1 \preceq a$. Como $b \preceq 1$ se satisface (para cualquier $b \in B$), entonces se tiene que $b \preceq a$, pues $\preceq$ es transitiva. Luego estamos en las hipótesis del corolario 2.4. ■

Lo siguiente es un resultado bastante evidente.

Proposición 2.6 *Sea A un f-anillo reducido y proyectable. Si $a, b \in A$ son tales que $b \mid_{\mathrm{loc}} a$ y $a \neq 0$, entonces $ab \neq 0$. Es decir, A satisface la fórmula:*

$$\forall a \forall b \big(a \neq 0 \wedge b \mid_{\mathrm{loc}} a \rightarrow ab \neq 0 \big).$$

Demostración: Pongamos $A \cong \Gamma\big(X, (A_x)_{x \in X}\big)$ con X un espacio Booleano y $(A_x)_{x \in X}$ una familia de anillos íntegros totalmente ordenados. Como $a \neq 0$, entonces existe $w \in A$ tal que $w \neq 0$ con $w(w - a) = 0$ y $b \mid w$. Existe entonces $x_0 \in X$ tal que $w(x_0) \neq 0$. Luego $w(x_0) = a(x_0) \neq 0$. Como $b \mid w$ entonces existe $c \in A$ tal que $bc = w$ y en particular $b(x_0)c(x_0) = w(x_0) = a(x_0) \neq 0$. Por tanto $b(x_0) \neq 0$. Como A_{x_0} es un anillo íntegro entonces $(ab)(x_0) = a(x_0)b(x_0) \neq 0$. Luego $ab \neq 0$. ■

Pongamonos en el contexto de las hipótesis y de la demostración de la proposición 2.3, pero sin suponer (necesariamente) que $b \preceq a$. Y suponiendo que $ab \neq 0$. Entonces existe $x_0 \in X$ tal que $(ab)(x_0) \neq 0$. Entonces $a(x_0) \neq 0$ y $b(x_0) \neq 0$. Luego $x_0 \in X$ debe caer en algunos de los cuatro puntos considerados en esa demostración. Y como estamos suponiendo que $b \nmid_{\mathrm{loc}} a$ entonces necesariamente se debe tener que $a(x_0) \mid b(x_0)$ en B_{x_0}. Se puede mostrar fácilmente (similarmente a como se hizo en el primer punto) que $a \mid_{\mathrm{loc}} b$. De esta argumentación se deduce la siguiente proposición.

Proposición 2.7 *Sea B un f-anillo reducido y proyectable. Sean $a, b \in B$ tales que $ab \neq 0$ y $b \nmid_{\text{loc}} a$. Entonces se tiene que $a \mid_{\text{loc}} b$. Es decir, B satisface la siguiente fórmula:*

$$\forall a \forall b \big(ab \neq 0 \wedge b \nmid_{\text{loc}} a \rightarrow a \mid_{\text{loc}} b)\big),$$

o equivalentemente:

$$\forall a \forall b \big(ab \neq 0 \rightarrow (b \mid_{\text{loc}} a \vee a \mid_{\text{loc}} b)\big).$$

■

Observe que en el contexto de la proposición 2.6, la fórmula ahí estipulada conlleva que $b \neq 0$. Entonces la fórmula:

$$\forall a \forall b \big(b \neq 0 \wedge a \neq 0 \wedge b \mid_{\text{loc}} a \rightarrow ab \neq 0\big),$$

sigue siendo verdadera en A. Desde un punto de vista simétrico se tiene también que la fórmula:

$$\forall a \forall b \big(b \neq 0 \wedge a \neq 0 \wedge a \mid_{\text{loc}} b \rightarrow ab \neq 0\big),$$

es válida en A. Estas dos fórmulas se pueden amalgamar en:

$$\forall a \forall b \big(b \neq 0 \wedge a \neq 0 \wedge (b \mid_{\text{loc}} a \vee a \mid_{\text{loc}} b) \rightarrow ab \neq 0\big).$$

Por la proposición 2.7, el recíproco de la anterior es válido. Por tanto se tiene que la siguiente fórmula:

$$\forall a \forall b \big(ab \neq 0 \leftrightarrow b \neq 0 \wedge a \neq 0 \wedge (b \mid_{\text{loc}} a \vee a \mid_{\text{loc}} b)\big),$$

es válida en A. Esta discusión se recoge en el siguiente corolario.

Corolario 2.8 *Sea A un f-anillo reducido y proyectable. La siguiente fórmula:*

$$\forall a \forall b \big(ab \neq 0 \leftrightarrow b \neq 0 \wedge a \neq 0 \wedge (b \mid_{\text{loc}} a \vee a \mid_{\text{loc}} b)\big),$$

es válida en A.

■

Otra consecuencia interesante de la proposición 2.3 y que va en el sentido de la proposición 2.7 es el siguiente resultado.

Proposición 2.9 *Sea A un f-anillo reducido y proyectable que satisface la primera propiedad de convexidad. Entonces A satisface:*

$$\forall a \forall b \forall f \big(f^2 = f \wedge b \nmid_{\text{loc}} a \wedge bf \preceq a \rightarrow |bf| < |a|\big).$$

Demostración: Como $b \nmid_{\text{loc}} a$ entonces se tiene que $bf \nmid_{\text{loc}} a$, por [13, Proposition 2.5]. Luego el resultado se deduce de la proposición 2.3. ■

Esta proposición y la proposición 2.3 son, de hecho, equivalentes. Pues para el caso $f = 1$ la proposición 2.9 demuestra la proposición 2.3. Sin embargo la proposición 2.9

puede verse como una versión local de 2.3 pues $bf \preceq a$ quiere decir que se tiene "$b \preceq a$" restringido a f.

Más precisamente, sea A un f-anillo reducido y proyectable que satisface la primera propiedad de convexidad. Sean $a, b \in A$ tales que $b \not\preceq a$. Entonces $M = [\![b \neq 0]\!] \cap [\![a = 0]\!]$ es no vacío (en una representación de A). Si $ab \neq 0$ entonces $M \subsetneq X$. Si definimos $f = 1_{\restriction X \setminus M} \cup 0_{\restriction M} \in A$ entonces f es un idempotente con $f \neq 0$ y $f \neq 1$. Observe que $bf \preceq a$, y por tanto se va a tener que $|bf| < |a|$. Estamos mostrando que si existe f idempotente no cero tal que $bf \preceq a$. Tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.10 *Sea A un f-anillo proyectable y reducido que satisface la primera propiedad de convexidad. Entonces A satisface:*

$$\forall a \forall b \forall f \big(f^2 = f \wedge b \nmid_{\text{loc}} a \wedge bf \preceq a \rightarrow a \mid bf \big).$$

Demostración: Se deduce de la proposición 2.9 usando la propiedad primera propiedad de convexidad.

■

Observe que en el párrafo anterior a este corolario exhibimos un $f \in A$ idempotente tal que $bf \preceq a$ y $bf \neq 0$. Por el corolario se tiene que $a \mid bf$. Estamos viendo que $a \mid_{\text{loc}} b$ por medio del corolario 2.1. Si A es además divisible-proyectable, entonces se puede exhibir un $f \in A$ idempotente con las propiedades de que $bf \neq 0$ y que $a \mid bf$, y con la característica de ser *maximal* con estas propiedades.

Las fórmulas que se presentan en el corolario siguiente fueron obtenidas antes de obtener la fórmula en la proposición 2.3. Una fórmula equivalente a la que se enuncia en la proposición 2.3 es $\forall a \forall b \big(|b| \not< |a| \wedge b \preceq a \rightarrow b \mid_{\text{loc}} a \big)$.

Corolario 2.11 *Sea A un f-anillo proyectable y reducido que satisface la primera propiedad de la convexidad. Las siguientes fórmulas son todas satisfechas en A:*

$$\forall a \forall b \big(a > 0 \wedge b > 0 \wedge b \not< a \wedge b \preceq a \rightarrow b \mid_{\text{loc}} a \big),$$

$$\forall a \forall b \big(a < 0 \wedge b < 0 \wedge a \not< b \wedge b \preceq a \rightarrow b \mid_{\text{loc}} a \big),$$

$$\forall a \forall b \big(a < 0 \wedge b > 0 \wedge b \not< -a \wedge b \preceq a \rightarrow b \mid_{\text{loc}} a \big),$$

$$\forall a \forall b \big(a > 0 \wedge b < 0 \wedge -b \not< a \wedge b \preceq a \rightarrow b \mid_{\text{loc}} a \big).$$

■

El siguiente resultado es bien evidente y no requiere demostración pues la divisibilidad implica la divisibilidad local, ver proposición [13, Proposition 2.1].

Proposición 2.12 *Sea A un f-anillo que satisface la primera propiedad de convexidad, entonces se satisface la siguiente fórmula:*

$$\forall a \forall b (0 < a < b \rightarrow b \mid_{\text{loc}} a).$$

■

Los siguientes resultados estudian la divisibilidad local con respecto a la parte positiva y negativa de elementos en los anillos reticulados. Recordemos que $a_+ = a \vee 0$ es la parte positiva de a y $a_- = -(a \wedge 0)$ es la parte negativa de a. Se tiene también que $a = a_+ - a_-$ y $|a| = a_+ + a_-$; ver [4, sección 1.3] para más detalles.

Proposición 2.13 *Sea A un f-anillo reducido y proyectable. Entonces para todo $y, a \in A$, se tiene que $y \mid_{\mathrm{loc}} a$ solo si $y \mid_{\mathrm{loc}} a$ o $y \mid_{\mathrm{loc}} a_-$.*

Demostración: Ponemos $A \cong \Gamma\big(X, (A_x)_{x\in X}\big)$ con X un espacio Booleano y $(A_x)_{x\in X}$ una familia de anillos íntegros totalmente ordenados. Sean $y, a \in A$ tales que $y \mid_{\mathrm{loc}} a$. Si $a = 0$, entonces $a_+ = 0$ y $a_- = 0$ y las dos conclusiones son ciertas.

Si $a \neq 0$. En este caso existe $w \in A$ tal que $w \neq 0$, $w(w - a) = 0$ y $y \mid w$. Sea $x_0 \in X$ tal que $w(x_0) \neq 0$ y $w(x_0) = a(x_0)$. Si $a(x_0) > 0$ entonces $N = [\![\, w \neq 0 \,]\!] \cap [\![\, a > 0 \,]\!]$ es un abierto-cerrado de X distinto de vacío. Considere $w' = w_{\restriction N} \cup 0_{\restriction X \smallsetminus N} \in A$. Como $x_0 \in N$ entonces $w'(x_0) > 0$ y $w' \neq 0$. También $w'(w' - a_+) = 0$. Como $y \mid w$, existe $c \in A$ tal que $yc = w$. Pongamos $c' = c_{\restriction N} \cup 0_{\restriction X \smallsetminus N} \in A$. Entonces $yc' = w'$. Luego existe $w' \in B$ tal que $w' \neq 0$ con $w'(w' - a_+) = 0$ y $y \mid w'$. Esto quiere decir que $y \mid_{\mathrm{loc}} a_+$.

Si $a(x_0) < 0$ entonces sea $N = [\![\, w \neq 0 \,]\!] \cap [\![\, a < 0 \,]\!]$ un abierto-cerrado de X no vacío. Considere en este caso $w'' = (-w)_{\restriction N} \cup 0_{\restriction X \smallsetminus N} \in A$. Entonces $w'' \neq 0$ y $w''(w'' - a_-) = 0$. Como $y \mid w$ entonces sea $c \in A$ tal que $yc = w$. Consideremos $c'' = (-c)_{\restriction N} \cup 0_{\restriction X \smallsetminus N} \in A$. Se tiene que $yc'' = w''$. Hemos probado que existe $w'' \neq 0$ tal que $w''(w'' - a_-) = 0$ y $y \mid w''$. Esto quiere decir que $y \mid_{\mathrm{loc}} a_-$. ■

El corolario siguiente establece lo que hemos probado anteriormente en el caso $a \neq 0$.

Corolario 2.14 *Sea A un f-anillo reducido y proyectable. Entonces se satisface en A la siguiente fórmula:*

$$\forall y \forall a \big(a \neq 0 \wedge y \mid_{\mathrm{loc}} a \rightarrow (a_+ \neq 0 \wedge y \mid_{\mathrm{loc}} a_+) \vee (a_- \neq 0 \wedge y \mid_{\mathrm{loc}} a_-)\big).$$

■

El recíproco de esta propiedad se tiene y se establece en la siguiente proposición.

Proposición 2.15 *Sea A un f-anillo proyectable y reducido. Entonces en A se satisface la siguiente fórmula:*

$$\forall y \forall a \big((a_+ \neq 0 \wedge y \mid_{\mathrm{loc}} a_+) \vee (a_- \neq 0 \wedge y \mid_{\mathrm{loc}} a_-) \rightarrow y \mid_{\mathrm{loc}} a\big).$$

Demostración: Ponemos $A \cong \Gamma\big(X, (A_x)_{x\in X}\big)$ con X un espacio Booleano y $(A_x)_{x\in X}$ una familia de anillos íntegros totalmente ordenados.

Supongamos primero que $a_+ \neq 0 \wedge y \mid_{\mathrm{loc}} a_+$. Entonces existe $w \in A$ con $w \neq 0$, $w(w - a_+) = 0$ y $y \mid w$. Como $w \neq 0$ entonces $N = [\![\, w \neq 0 \,]\!]$ es un abierto-cerrado de X no vacío, y $w(x) = a_+(x) = a(x) \neq 0$ para todo $x \in N$. Luego $w(w - a) = 0$. Esto quiere decir que $y \mid_{\mathrm{loc}} a$.

Ahora supongamos que $a_- \neq 0 \wedge y \mid_{\text{loc}} a_-$. Entonces existe $w \in B$ con $w \neq 0$, $w(w-a_-)=0$ y $y \mid w$. Como $w \neq 0$ entonces $N = [\![w \neq 0]\!] \neq \phi$. Para $x \in N$ se tiene que $w(x) = a_-(x) = -a(x)$. Luego $-w(x) = a(x)$ para todo $x \in N$ y $(-w)(-w-a) = 0$ con $y \mid -w$. Entonces existe $w' = -w \neq 0$ tal que $w'(w'-a) = 0$ y $y \mid w'$. Esto quiere decir que $y \mid_{\text{loc}} a$.

■

Del corolario 2.14 y de la proposición 2.15 se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.16 *Sea A un f-anillo reducido y proyectable. Entonces se satisface en A la siguiente fórmula:*

$$\forall y \forall a \big((a \neq 0 \wedge y \mid_{\text{loc}} a) \leftrightarrow (a_+ \neq 0 \wedge y \mid_{\text{loc}} a_+) \vee (a_- \neq 0 \wedge y \mid_{\text{loc}} a_-) \big).$$

■

A continuación establecemos algunas propiedades universales y generales. Estas podrían ubicarse más bien en la segunda sección por su generalidad.

Proposición 2.17 *Sea A un anillo con unidad, entonces A satisface:*

$$\forall a (a \preceq 0 \rightarrow a = 0).$$

Demostración: Sea $a \in A$ tal que $a \preceq 0$. Entonces $\text{Ann}(0) \subseteq \text{Ann}(a)$. Es decir que $A \subseteq \text{Ann}(a)$ y luego $\text{Ann}(a) = A$. Como el anillo A es unitario entonces $1 \in \text{Ann}(a)$ y $a = a \cdot 1 = 0$.

■

Observemos que otra manera de enunciar esta propiedad es:

$$a = 0 \rightarrow \forall w (w \preceq a \rightarrow w = 0),$$

o

$$a = 0 \rightarrow \forall w (w = 0 \vee w \not\preceq a).$$

Por contrapositiva se tiene que:

$$\exists w (w \neq 0 \wedge w \preceq a) \rightarrow a \neq 0.$$

Cuantificando universalmente la variable a y sacando el *existsw* tenemos:

$$\forall a \forall w \big((w \neq 0 \wedge w \preceq a) \rightarrow a \neq 0 \big).$$

Proposición 2.18 *Sea A un anillo con unidad. Entonces A satisface:*

$$\forall a \forall w \big((w \neq 0 \wedge w \preceq a) \rightarrow a \neq 0 \big).$$

■

Proposición 2.19 *Sea A un anillo cualquiera, entonces A satisface:*

$$\forall b (0 \preceq b).$$

Demostración: Sea $b \in A$. Como $\mathrm{Ann}(b) \subseteq A = \mathrm{Ann}(0)$ entonces $0 \preceq b$. ■

Proposición 2.20 *Sea A un anillo cualquiera. Entonces A satisface:*

$$\forall a \forall b (b \mid a \to a \preceq b).$$

Demostración: Sean $a, b \in a$ tales que $b \mid a$. Entonces existe $c \in A$ tal que $bc = a$. Queremos ver que $\mathrm{Ann}(b) \subseteq \mathrm{Ann}(a)$. Sea $x \in \mathrm{Ann}(b)$, luego $bx = 0$. Entonces $ax = (bc)x = c(bx) = c0 = 0$ (todos nuestros anillos son commutativos). Luego $x \in \mathrm{Ann}(a)$. Hemos probado que $\mathrm{Ann}(b) \subseteq \mathrm{Ann}(a)$, y por tanto $a \preceq b$. ■

La proposición 2.6 se puede mostrar ahora en el siguiente contexto. Sea A un anillo con unidad y reducido. Veamos que A satisface:

$$\forall a \forall b \big(a \neq 0 \wedge b \mid_{\mathrm{loc}} a \to ab \neq 0\big).$$

Para esto sean $a, b \in A$ tales que $a \neq 0$ y $b \mid_{\mathrm{loc}} a$. Entonces $b \neq 0$ por la proposición **??**. Como $b \mid_{\mathrm{loc}} a$, existe $w \in A$ con $w \neq 0$, $w(w - a) = 0$ y $b \mid w$. Por la proposición 2.20 se tiene que $w \preceq b$. Veamos ahora que $\mathrm{Ann}(a) \subseteq \mathrm{Ann}(w^2)$. Sea $x \in \mathrm{Ann}(a)$, es decir que $ax = 0$. Como $w(w - a) = 0$ entones $w^2 = wa$. Multiplicando esta igualdad por x obtenemos que $w^2x = wax = w0 = 0$, luego $x \in \mathrm{Ann}(w^2)$. Esto muestra que $w^2 \preceq a$. Por la propiedad (4) de la definición de relaciones radicales, se tiene que $w^2b \preceq ab$. Usando esta misma propiedad una vez más de $w \preceq b$ se deduce que $w^3 \preceq w^2b$. Por transitividad de la relación radical – propiedad (2) de la definición – se tiene que $w^3 \preceq ab$. Como el anillo A es reducido entonces $w^3 \neq 0$ y por la proposición 2.18 se tiene que $ab \neq 0$.

El párrafo anterior muestra una propiedad en un contexto bastante general. Esto da la esperanza por un lado de que algunas propiedades anteriores se puedan demostrar de esta forma tan general y sin usar la representación de los f-anillos proyectables. Pero por el otro lado, al ser tan generales muestra que a pesar de ser propiedades universales no son propiamente consecuencias de T^*.

Hecho 2.21 La siguiente propiedad de la relación radical $\preceq$ que estamos considerando aquí proviene de de [17] y es válida en cualquier anillo reducido:

$$\forall a \forall b \big(ab = 0 \wedge a \neq 0 \to a \preceq b\big).$$

La siguiente forma equivalente en que se establece me parece más propicia:

$$\forall a \forall b \big(ab = 0 \wedge a \preceq b \to a = 0\big).$$

O también:

$$\forall a \forall b \big(a \neq 0 \wedge a \preceq b \to ab \neq 0\big).$$

La verificación de esta fórmula es bastante simple. Si $a \preceq b$ entonces $\mathrm{Ann}(b) \subseteq \mathrm{Ann}(a)$. Como $ab = 0$ entonces $a \in \mathrm{Ann}(b)$. Por lo tanto $a \in \mathrm{Ann}(a)$. Es decir que $a^2 = 0$. Como A es reducido entonces $a = 0$. ■

Proposición 2.22 *Sea B un f-anillo proyectable y reducido. Sean $a, b, d \in B$ tales que $b \mid_{\text{loc}} a$ y $a \preceq d$. Entonces $b \mid_{\text{loc}} ad$. Entonces B satisface la siguiente fórmula:*

$$\forall a \forall b \forall d \big(b \mid_{\text{loc}} a \wedge a \preceq d \rightarrow b \mid_{\text{loc}} ad \big).$$

Demostración: Si $a = 0$ entonces $ad = 0$ y claramente $b \mid_{\text{loc}} ad$. Si $a \neq 0$, como $a \preceq d$ entonces por el hecho 2.21 se tiene que $ad \neq 0$. Por el lema 2.1, existe $e \in B$ un idempotente tal que $ae \neq 0$ y tal que $b \mid ae$. Como $a \preceq d$ entonces $ae \preceq de$ (propiedad (4) de la definición de relaciones radicales). Entonces $aede = ade^2 = ade \neq 0$, por el mismo hecho 2.21. Como $b \mid ae$ entonces $b \mid ade$. Hemos probado que existe $e \in B$ un idempotente con $ade \neq 0$ y tal que $b \mid ade$. Esto es por la proposición 2.1 que $b \mid_{\text{loc}} ad$. ■

Las siguientes propiedades nos muestran las interacciones de estas relaciones con los idempotentes.

Proposición 2.23 *Sea A un f-anillo reducido y sean $a, b \in A$ tales que $0 \leqslant a \leqslant b$. Entonces $a \preceq b$.*

Demostración: Como A es un f-anillo reducido, tenemos que $A \subseteq \prod_{x \in X} A_x$ en donde X es el espacio de ideales primos minimales y A_x son anillos totalmente ordenados e íntegros. Note que $a \preceq b$ es $\forall x \in X \big(a(x) \neq 0 \Rightarrow b(x) \neq 0 \big)$. Como $0 \leqslant a \leqslant b$ entonces $0 \leqslant a(x) \leqslant b(x)$, para todo $x \in X$. Sea $x \in X$ tal que $a(x) \neq 0$, entonces $0 < a(x)$. Por tanto $0 < b(x)$ y luego $b(x) \neq 0$. Luego se tiene que $a \preceq b$. ■

Como corolario inmediato tenemos:

Corolario 2.24 *Sea A un f-anillo reducido. En A se satisface la siguiente fórmula:*

$$\forall e \forall f \big(e^2 = e \wedge f^2 = f \wedge e \leqslant f \rightarrow e \preceq f \big).$$

■

El recíproco del corolario anterior es cierto.

Proposición 2.25 *Sea A un f-anillo reducido. Entonces en A se satisface la siguiente fórmula:*

$$\forall e \forall f \big(e^2 = e \wedge f^2 = f \rightarrow (e \leqslant f \leftrightarrow e \preceq f) \big).$$

Demostración: Al igual que en la proposición 2.23 tenemos que $A \subseteq \prod_{x \in X} A_x$ en donde X es el espacio de ideales primos minimales y A_x son anillos totalmente ordenados e íntegros. Sean $e, f \in A$ idempotentes tales que $e \preceq f$. Entonces $\forall x \in X \big(e(x) \neq 0 \rightarrow f(x) \neq 0 \big)$. Como los A_x's son íntegros y e, f idempotentes entonces se tiene que $\forall x \in X \big(e(x) = 1 \rightarrow f(x) = 1 \big)$. Luego si $e(x) = 0$ entonces $e(x) \leqslant f(x)$ y si $e(x) = 1$ por lo anterior se tiene que $e(x) \leqslant f(x)$. Luego $e \leqslant f$. ■

Sea A un anillo cualquiera. Vea que por la proposición 2.20 se tiene en particular que en A se satisface la fórmula $\forall a \forall b \big(b^2 = b \rightarrow (b \mid a \rightarrow a \preceq b) \big)$. El recíproco también se tiene.

Proposición 2.26 *Sea A un f-anillo proyectable y reducido. Entonces en A se satisface la siguiente fórmula:*

$$\forall a \forall b \big(b^2 = b \rightarrow (b \mid a \leftrightarrow a \preceq b)\big).$$

Demostración: Como siempre sea $A \cong \Gamma\big(X, (A_x)_{x \in X}\big)$, en donde X es un espacio Booleano y $(A_x)_{x \in X}$ es una familia de anillos íntegros totalmente ordenados. Ya se tiene la implicación $\rightarrow$ por el comentario anterior. Sean $a, b \in A$ tales que $a \preceq b$. Entonces $\forall x \in X\big(b(x) = 0 \Rightarrow a(x) = 0\big)$. Sea $N = [\![\, b \neq 0 \,]\!]$ un abierto-cerrado de X. Pongamos $c = a_{\upharpoonright N} \cup 0_{\upharpoonright X \smallsetminus N} \in A$. Si $x \in X$ es tal que $b(x) = 0$ entonces $b(x)c(x) = 0 = a(x)$. Si $x \in X$ es tal que $b(x) \neq 0$ entonces $b(x) = 1$ y $b(x)c(x) = c(x) = a(x)$. Entonces $bc = a$ y por tanto $b \mid a$.

■

En particular tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.27 *Sea A un f-anillo reducido y proyectable. Entonces en A se satisface la siguiente fórmula:*

$$\forall e \forall f \big(e^2 = e \wedge f^2 = f \rightarrow (f \mid e \leftrightarrow e \preceq f)\big).$$

■

Por la proposición 2.25 y el corolario 2.27 se tiene que la siguiente fórmula es válida en cualquier f-anillo A reducido y proyectable:

$$\forall e \forall f \big(e^2 = e \wedge f^2 = f \rightarrow (e \leqslant f \leftrightarrow e \preceq f \leftrightarrow f \mid e)\big).$$

Ahora estudiaremos la divisibilidad local en los idempotentes.

Proposición 2.28 *Sea B un f-anillo proyectable y reducido. Sean $e, f \in B$ dos idempotentes distintos de cero. Entonces $e \mid_{\text{loc}} f$ si y solo si $ef \neq 0$.*

Demostración: El solo si es evidente por la proposición 2.7 pues $f \neq 0$. Para el si supongamos que $ef \neq 0$. Claramente existe $e \in B$ un idempotente tal que $ef \neq 0$ con $e \mid ef$. Por el lema 2.1 se tiene que $e \mid_{\text{loc}} f$.

■

Corolario 2.29 *Sea B un f-anillo proyectable y reducido. Entonces en B se satisface la siguiente fórmula:*

$$\forall e \forall f \big(e^2 = e \wedge f^2 = f \wedge ef \neq 0 \rightarrow (e \mid_{\text{loc}} f \wedge f \mid_{\text{loc}} e)\big).$$

Demostración: Esta fórmula se deduce por la simetría de lo establecido en la proposición 2.28.

■

Sea A un f-anillo proyectable y reducido en donde $A \cong \Gamma\big(X, (A_x)_{x \in X}\big)$ con X un espacio Booleano con más de 3 puntos y $(A_x)_{x \in X}$ es una familia de anillos íntegros totalmente ordenados. Entones existe $e \in A$ un idempotente con $e \neq 1$ y $e \neq 0$, y existe $f \in A$ otro idempotente de manera que $ef \neq 0$ pero $f \nleqslant e$. Luego $e \mid_{\text{loc}} f$ pero $e \nmid f$. Esto es un ejemplo de que se puede tener que $b \mid_{\text{loc}} a$ pero no forzosamente se tiente que $b \mid a$. Intuitivamente es bastante obvio pero no se tenían ejemplos.

La siguiente proposición permite introducir luego un ideal que resulta de "pegar" o "globalizar" los ideales maximales en las fibras.

Proposición 2.30 *Sea B un f-anillo reducido, proyectable, divisible-proyectable, sc-regular y con la primera propiedad de convexidad. Entonces se satisface en B la siguiente fórmula:*

$$\forall u_1 \forall u_2 \big(u_1 \nmid_{\text{loc}} 1 \wedge u_2 \nmid_{\text{loc}} 1 \to (u_1 + u_2) \nmid_{\text{loc}} 1 \big).$$

Demostración: Las hipótesis de B nos permiten decir que $B \cong \Gamma\big(X, (B_x)_{x\in X}\big)$, en donde X es un espacio Booleano y $(B_x)_{x\in X}$ es una familia de anillos de valuación que no son cuerpos.

Sean $u_1, u_2 \in B$ tales que $u_1 \nmid_{\text{loc}} 1$ y $u_2 \nmid_{\text{loc}} 1$. Queremos ver que $u_1 + u_2 \nmid_{\text{loc}} 1$. Observe que por el lema 2.1 se tiene que $u \nmid_{\text{loc}} 1$ si y solo si $\forall e \big(e^2 = e \wedge e \neq 0 \to u \nmid e \big)$.

Sea $e \in B$ tal que $e^2 = e$ y $e \neq 0$. Entonces $u_1 \nmid e$ y $u_2 \nmid e$. Como $e \neq 0$ entonces $N = [\![e \neq 0]\!] = [\![e = 1]\!] \neq \phi$. Veamos que $u_1 \nmid e$ quiere decir que $u_1(x) \nmid 1$, para todo $x \in N$. Pues si suponemos que existe $x_0 \in N$ tal que $u_1(x_0) \mid 1$, considere $N_1 = [\![e = 1]\!] \cap [\![u_1 \mid 1]\!]$ que es no vacío y abierto-cerrado de X pues B es divisible-proyectable. Para $x \in N_1$, se tiene que $u_1(x)$ divide $e(x) = 1$ en B_x. Existe $c_x \in B_x$ tal que $u_1(x) c_x = 1 = e(x)$. Luego existe $\tilde{c_x} \in B$ tal que $\tilde{c_x}(x) = c_x$. Considere $N_1^x = [\![u_1 \cdot \tilde{c_x} = e]\!]$, que es abierto-cerrado de X tal que:

$$N_1 \subseteq \bigcup_{x \in N_1} N_1^X.$$

Por compacidad y por la propiedad de pegue, existe $c \in B$ tal que $u_1(x) c(x) = e(x)$, para todo $x \in N_1$ (se puede tomar c igual a 0 en $X \smallsetminus N_1$). Si se define $e' = e_{\restriction N_1} \cup 0_{\restriction X \smallsetminus N_1} \in B$, se tiene que e' es un idempotente no cero pues $N_1 \neq \phi$ y $e' \leqslant e$. Luego $u_1 c = e'$. Entonces $u_1 \mid e'$ con e' un idempotente no cero. Esto contradice que $u_1 \nmid_{\text{loc}} 1$. Hemos llegado a probar que $u_1(x) \nmid 1$, para todo $x \in N$. Similarmente se tiene que $u_2(x) \nmid 1$, para todo $x \in N$.

Como B_x es un anillo de valuación y $M_{B_x} = \big\{ u \in B_x : u \nmid 1 \big\}$ es el ideal maximal de B_x entonces $u_1(x) + u_2(x) \nmid 1$, para todo $x \in N$. Esto quiere decir que $u_1 + u_2 \nmid e$, pues de lo contrario $u_1(x) + u_2(x) \mid 1$, para todo $x \in N$.

Hemos visto que para todo idempotente $e \in B$ distinto de 0, se tiene que $u_1 + u_2 \nmid e$. Esto quiere decir que $u_1 + u_2 \nmid_{\text{loc}} 1$. ■

Corolario 2.31 *Sea B un f-anillo reducido, proyectable, divisible-proyectable, sc-regular con la primera propiedad de convexidad. Entonces:*

$$M_B = \big\{ u \in B : u \nmid_{\text{loc}} 1 \big\}$$

es un ideal de B.

Demostración: Claramente $0 \in M_B$. Sea $u \in M_B$ y $c \in B$. Por la proposición **??** se tiene que $cu \in M_B$. Poniendo $c = -1$ en la propiedad anterior se tiene que si $u \in M_B$ entonces $-u \in M_B$. Usando la proposición 2.30 y lo anterior, se tiene que M_B es un grupo Abeliano. Por tanto M_B es un ideal de B. ■

En el contexto del corolario anterior, la hipótesis de sc-regularidad nos dice que $M_B \neq \{0\}$. Recuerde que sc-regularidad quiere decir que existe $u \in B$ tal que $1 \preceq u$ y $u \nmid_{\text{loc}} 1$.

Por la primera fórmula del corolario 2.11, poniendo $a = 1$ y $b = u$, tenemos que si $u \in B$ es tal que $u > 0$ y $u \not\preceq 1$ entonces $u \mid_{\text{loc}} 1$. Observe que trivialmente se tiene que $u \preceq 1$. Similarmente, por la segunda fórmula del mismo corolario, poniendo $a = -1$ y $b = u$ tenemos que si $u \in B$ es tal que $u < 0$ y $-1 \not\preceq u$ entonces $u \mid_{\text{loc}} 1$. Observe que también trivialmente se tiene que $u \preceq -1$. Esto lo que muestra es que si $u > 0$ y si $u \nmid_{\text{loc}} 1$ entonces $u < 1$; y si $u < 0$ y $u \nmid_{\text{loc}} 1$ entonces $u > -1$. Poniendo $C_B = \{u \in B : -1 < u < 1\}$, se tiene entonces que $M_B \subseteq C_B$.

Corolario 2.32 *Sea A un f-anillo reducido y sea B un f-anillo reducido, proyectable, divisible-proyectable, sc-regular con la primera propiedad de convexidad. Si $A \subseteq B$ en el lenguaje de anillos reticulados junto con la relación radical y la divisibilidad local entonces $M_A = \{u \in A : u \nmid_{\text{loc}} 1\}$ es un ideal de A contenido en $C_A = \{u \in A : -1 < u < 1\}$ y tal que $M_B \cap A = M_A$.* ■

Para concluir esta sección, vamos a examinar el caso de los f-anillos von Neumann regulares en este contexto. Sea A un f-anillo von Neumann regular. Se sabe que la relación radical $\preceq$ y la divisibilidad $\mid$ coinciden si el anillo es von Neumann regular (ver Introducción). Sean $a, b \in A$. Si $b \mid_{\text{loc}} a$ y $a \neq 0$ entonces sabemos que $ab \neq 0$. Ahora, si $ab \neq 0$, entonces $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Pongamos que $A \cong \Gamma\big(X, (A_x)_{x\in X}\big)$ con X un espacio Booleano y $(A_x)_{x\in X}$ es una familia de cuerpos. Sea $N = [\![\, a \neq 0 \,]\!] \neq \phi$. Pongamos $e = 1_{\restriction_N} \cup 0_{\restriction_{X \smallsetminus N}} \in A$. Se tiene que e es un idempotente no nulo. Poniendo $c = \left(\frac{b}{a}\right)_{\restriction_N} \cup 0_{\restriction_{X\smallsetminus N}} \in A$ se tiene que $bc = ae$. Luego existe $e \in A$ un idempotente tal que $ae \neq 0$ y con $b \mid ae$. Tenemos entonces que $b \mid_{\text{loc}} a$. Hemos probado que en A se satisface la siguiente fórmula:

$$\forall a \forall b \big(b \mid_{\text{loc}} a \leftrightarrow (a = 0 \vee ab \neq 0)\big). \tag{\dagger}$$

Sea $B \models T^*$ tal que $A \subseteq B$ en el lenguaje de anillos reticulados junto con la relación radical. Veamos que esta inclusión respeta la divisibilidad y la divisibilidad local.

(i) Sean $a, b \in A$ tales que $b \mid a$ en A. Claramente $b \mid a$ en B. Ahora, si $b \mid a$ en B entonces $a \preceq b$ en B. Luego $a \preceq b$ en A y dado que A es von Neumann regular, entonces $b \mid a$ en A.

(ii) Sean $a, b \in A$ tales que $b \mid_{\text{loc}} a$ en A. Claramente $b \mid_{\text{loc}} a$ en B. Recíprocamente, suponemos que $b \mid_{\text{loc}} a$ en B. Si $a = 0$ entonces claramente $b \mid_{\text{loc}} a$ en A. Si $a \neq 0$ entonces $b \mid_{\text{loc}} a$ en B tiene por consecuencia que $ab \neq 0$. En vista de la equivalencia (†) se tiene que $b \mid_{\text{loc}} a$ en A.

Se puede mostrar directamente que si A es un f-anillo von Neumann regular, existe $B \models T^*$ tal que $A \subseteq B$ en lenguaje de anillos reticulados junto con la relación radical, y por ende en el lenguaje $\{0, 1, +, \cdot, \wedge, \preceq, \mid, \mid_{\text{loc}}\}$. Vale la pena mencionar que A satisface la propiedad de pegue de la divisibilidad y la propiedad de divisibilidad. Estas dos fórmulas se comprueban fácilmente si se establecen en la siguiente forma (ver sección siguiente):

$$\forall a \forall b \forall c_1 \cdots \forall c_n \big((bc_1 - a) \cdots (bc_n - a) = 0 \rightarrow a \preceq b\big),$$

y

$$\forall a \forall b \forall c \big(b \nmid_{\text{loc}} a \rightarrow a \preceq bc - a\big).$$

Es fácil ver que si A es von Neumann regular entonces $M_A = \{0\}$. Teóricamente parece importante el siguiente hecho que no se tiene completamente demostrado: si $B \models T^*$ entonces B/M_B es un anillo von Neumann regular isomorfo a $\Gamma\big(X, (B_x/M_{B_x})_{x\in X}\big)$.

Por último, nos parece importante mencionar que con el fin de establecer la teoría universal de T^* en el lenguaje de anillos reticualdos junto con la relación radical y la divisibilidad local (sin la divisibilidad), sería interesante ver cúales de estas propiedades universales (además de f-anillo reducido) permiten demostrar que A/p satisfaga la primera propiedad de convexidad, para p ideales primos.

3. Teorías universales.

En esta sección damos algunas propiedades universales de la teoría T^* que permiten establecer las teorías universales de T^* en el lenguaje de anillos reticulados junto con la divisiblidad y luego agregando también la divisibilidad local.

Primero discutiremos la inclusión de un f-anillo reducido y *proyectable* que satisface la primera propiedad de convexidad en un modelo de T^* e iremos viendo que las inclusiones ahí consideradas respetan la divisibilidad, la relación radical y luego la divisibilidad local.

Para ver esto sea A un f-anillo reducido y *proyectable* que satisface la primera propiedad de convexidad. Como A es un f-anillo reducido, entonces $A \subseteq \prod_{p\in\pi A} A/p$, en donde πA es el espacio de ideales primos minimales de A y A/p es un anillo íntegro totalmente ordenado, para todo $p \in \pi A$. Claramente esta inclusión es en el lenguaje de anillos reticulados.

Vamos a ver que la proyectabilidad de A permite probar que la divisibilidad se respeta. Primero veamos que para $a, b \in A$ tales que $b \mid a$, se tiene que existe $c \in A$ tal que $bc = a$. Entonces $(b + p)(c + p) = bc + p = a + p$, para todo $p \in \pi A$. Es decir que $b + p \mid a + p$, para todo $p \in \pi A$. Es decir:

$$(b + p)_{p\in\pi A} \mid (a + p)_{p\in\pi A} \text{ en } \prod_{p\in\pi A} A/p.$$

Recíprocamente si tenemos $a, b \in A$ tales que $(b + p)_{p\in\pi A} \mid (a + p)_{p\in\pi A}$ entonces existe $(c_p + p)_{p\in\pi A} \in \prod_{p\in\pi A} A/p$ tal que $(b+p)_{p\in\pi A} \cdot (c_p + p)_{p\in\pi A} = (a + p)_{p\in\pi A}$. Luego se tiene que $bc_p + p = a + p$, para todo $p \in \pi A$. Como A es un producto subdirecto, existe $\tilde{c_p} \in A$ tal que $\tilde{c_p}(p) = c_p$, y esto para todo $p \in \pi A$. Considerando $X_p = [\![\, b \cdot \tilde{c_p} = a \,]\!]$ se tiene que $p \in X_p$, para cada $p \in \pi A$. Entonces

$$\pi A = \bigcup_{p\in\pi A} X_p$$

como recubrimientos de abiertos-cerrados. Usando la compacidad de πA y la propiedad de pegue de A, se ve que existe $c \in A$ tal que $\pi A = [\![\, b \cdot c = a \,]\!]$. Luego $(bc) + p = a + p$, para todo $p \in \pi A$. Es decir que $bc - a \in \bigcap_{p\in\pi A} p$. Como A es reducido entonces $\bigcap_{p\in\pi A} p = \{0\}$ y luego $bc = a$. Es decir que $b \mid a$ en A.

Entonces $A \subseteq \prod_{p\in\pi A} A/p$ en el lenguaje de anillos reticulados junto con la divisibilidad, en donde A/p es un anillo íntegro totalmente ordenado. Como A satisface la primera propiedad de convexidad entonces A/p también la satisface, para todo $p \in \pi A$; ver lema 2.3 en [11]. Entonces A/p es un anillo íntegro totalmente ordenado con la primera propiedad de convexidad, para todo $p \in \pi A$. Según la notación de [2], se tiene que A/p es un modelo de la teoría $\mathrm{COVD}_{\mathrm{D}}$ (para *Convexely ordered valuation rings*) o de OF_{D} (para *Ordered fields*); para todo $p \in \pi A$. Por el teorema 1(i) de [2], existe R_p un anillo de valuación real cerrado (que no es cuerpo) tal que $A/p \subseteq R_p$ en el lenguaje de anillos ordenados con divisibilidad, y esto para cada $p \in \pi A$. Luego:

$$\prod_{p \in \pi A} A/p \subseteq \prod_{p \in \pi A} R_p,$$

en el lenguaje de anillos reticulados, y la divisibilidad se respeta pues se respeta coordenada a coordenada. Ahora para cada $p \in \pi A$, considere C_p una copia del espacio de Cantor y observe que $R_p \subseteq {R_p}^{C_p}$, mediante $x \mapsto (x)^{C_p}$ la inclusión constante. Es claro que está inclusión es en el lenguaje de anillos ordenados y que respeta la divisibilidad. Entonces (cf. [15]), se tiene que:

$$A \subseteq \prod_{p \in \pi A} A/p \subseteq \prod_{p \in \pi A} R_p \subseteq \prod_{p \in \pi A} {R_p}^{C_p}, \tag{$*$}$$

en el lenguaje de anillos reticulados con la divisibilidad. Como la teoría de anillos de valuación real cerrados, que denotamos por AVRC, admite eliminación de cuantificadores en $\mathcal{L}' = \{0, 1, +, \cdot, \wedge, |\}$, entonces dicha teoría satisface la propiedad JEP (Joint Embedding Property) en $\mathcal{L}'$. Entonces existe R un anillo de valuación real cerrado (que no es cuerpo) tal que:

$$\prod_{p \in \pi A} {R_p}^{C_p} \subseteq R^C, \tag{$**$}$$

en donde $C = \prod_{p \in \pi A} C_p$ es un producto de espacios de Cantor. Esta inclusión se da en el lenguaje de anillos reticulados con divisbilidad. Por el teorema 2.1.(b) de [5], se tiene que $R^C \in \Gamma^e_{\mathcal{L}'}(\mathrm{AVRC})$. Es decir que $B = R^C$ es un modelo de T^* en donde $A \subseteq B$.

Las inclusiones en $(*)$ y en $(**)$ respetan la relación radical. Vamos a ir viendo que cada una de estas inclusiones respetan la relación radical. Como la relación radical está dada por una fórmula universal, es evidente entonces que esta relación radical baja en cada una de estas inclusiones. Por tanto solo hace falta ver que sube. Consideremos:

$$\iota \colon A \to \prod_{p \in \pi A} A/p, a \mapsto (a + p)_{p \in \pi A}.$$

Sean $a, b \in A$ y suponemos que $A \models a \preceq b$. Queremos ver que $\prod_{p \in \pi A} A/p \models \iota(a) \preceq \iota(b)$. Sea $\tilde{c} = (c_p + p)_{p \in \pi A} \in \prod_{p \in \pi A} A/p$ tal que $\iota(b)\tilde{c} = 0$. Entonces $bc_p + p = 0$, para todo $p \in \pi A$. Luego $bc_p \in p$, para todo $p \in \pi A$. Como $a \preceq b$ en A y $c_p \in A$ entonces $ac_p \preceq bc_p$ para todo $p \in \pi A$. Recordemos que $a \preceq b$ equivale a $\forall p \in \pi A (b \in p \Rightarrow a \in p)$. Por tanto $ac_p \in p$, para todo $p \in \pi A$. Luego $ac_p + p = 0$, para todo $p \in \pi A$. Es decir $a\tilde{c} = 0$. Tenemos que $\forall \tilde{c}\, (\iota(b)\tilde{c} = 0 \Rightarrow \iota(a)\tilde{c} = 0)$ en $\prod_{p \in \pi A} A/p$. Es decir que $\iota(b) \preceq \iota(a)$ se satisface en $\prod_{p \in \pi A} A/p$. Observe que en este párrafo solo se ha usado que A es un f-anillo reducido. No se ha necesitado la proyectabilidad de A para probar que la relación radical se preserva en esta primera inclusión, a diferencia de la divisibilidad.

Ahora veamos que la segunda inclusión en $(*)$ respeta la relación radical. Sean $\tilde{a} = (a_p+p)_{p\in\pi A}$ y $\tilde{b} = (b_p+p)_{p\in\pi A}$ en $\prod_{p\in\pi A} A/p$ tales que $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$, es decir: $\forall x(\tilde{b}x = 0 \to \tilde{a}x = 0)$. Queremos ver que $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$ se satisface en $\prod_{p\in\pi A} R_p$. Para esto, sea $\tilde{x} = (x_p)_{p\in\pi A}$ con $x_p \in R_p$ para todo $p \in \pi A$, tal que $\tilde{b}\tilde{x} = 0$. Es decir, $(b_p + p)x_p = 0$ para todo $p \in \pi A$. Fijando $p \in \pi A$, se tiene que $b_p + p = 0$ o $x_p = 0$ pues R_p es un anillo íntegro. Si $x_p = 0$ entonces claramente se tiene que $(a_p + p)x_p = 0$. Si $b_p + p = 0$ entonces $b_p \in p$. Tomando $x \in \prod_{p\in\pi A} A/p$ dado por $x(q) = \delta_{pq}$, tenemos que $\tilde{b}x = 0$ en $\prod_{p\in\pi A} A/p$ y por la hipótesis se tiene que $\tilde{a}x = 0$ en $\prod_{p\in\pi A} A/p$, es decir que $a_p + p = 0$ y por tanto $(a_p + p)x_p = 0$. Esto se satisface para todo $p \in \pi A$ y por tanto se tiene que $\tilde{a}\tilde{x} = 0$. Hemos visto que $\forall x(\tilde{b}x = 0 \Rightarrow \tilde{a}x = 0)$ se satisface en $\prod_{p\in\pi A} R_p$, es decir: $\prod_{p\in\pi A} R_p \models \tilde{a} \preceq \tilde{b}$.

Para la tercera inclusión en $(*)$ consideremos $r, s \in \prod_{p\in\pi A} R_p$ dados por $r = (r_p)_{p\in\pi A}$ y $s = (s_p)_{p\in\pi A}$ y tales que $r \preceq s$ en $\prod_{p\in\pi A} R_p$. Debemos tener en cuenta que para cada $p \in \pi A$, la inclusión $R_p \hookrightarrow R_p^{C_p}$ está dada por $r \mapsto (r)^{C_p}$ en donde $(r)^{C_p}$ es un C_p-uplo constante igual a r. Queremos ver que $\forall x(sx = 0 \to rx = 0)$ es cierta en $\prod_{p\in\pi A} {R_p}^{C_p}$. Tomemos $x \in \prod_{p\in\pi A} {R_p}^{C_p}$ tal que $sx = 0$ con $x = (x_p)_{p\in\pi A}$ y $x_p = (x_p^i)_{i\in C_p}$. Como $s \in \prod_{p\in\pi A} R_p$ entonces $s = (s_p)_{p\in\pi A}$ y $sx = 0$ quiere decir que $s_p x_p^i = 0$, para todo $p \in \pi A$ y para todo $i \in C_p$. Fijemos $p \in \pi A$, entonces tenemos $s_p x_p^i = 0$, para todo $i \in C_p$. Como $r \preceq s$ en $\prod_{p\in\pi A} R_p$ entonces tomando $x^p \in \prod_{p\in\pi A} R_p$ dado por $x^p(q) = \delta_{pq}$, se tiene que $(sx^p = 0 \Rightarrow rx^p = 0)$. Es decir, $(s_p = 0 \Rightarrow r_p = 0)$. Ahora tenemos dos casos:

- Si $s_p = 0$ entonces $r_p = 0$ y por tanto $r_p x_p^i = 0$, para todo $i \in C_p$.
- Si $s_p \neq 0$ entonces $x_p^i = 0$ para todo $i \in C_p$ y por tanto $r_p x_p^i = 0$, para todo $i \in C_p$.

Hemos probado que $(s_p x_p^i = 0 \Rightarrow r_p x_p^i = 0)$, para todo $i \in C_p$ y para todo $p \in \pi A$. Esto es justamente que $r \preceq s$ en $\prod_{p\in\pi A} {R_p}^{C_p}$. Observe que aquí lo único es la complicación de la notación pues todo se reduce a probar que, para cada $p \in \pi A$, se satisface que $R_p \hookrightarrow R_p^{C_p}$ preserva la relación radical; lo que es evidente pues la inclusión es la función constante.

Con respecto a la última inclusión en $(**)$, se tiene por la modelo completitud de la teoría de anillos real cerrados (cf. [7]) que $R_p \prec R$, para todo $p \in \pi A$. Por el teorema de Feferman-Vaught, [10], se tiene que:

$$\prod_{p\in\pi A} {R_p}^{C_p} \prec R^C.$$

Entonces claramente la relación radical (y también la divisibilidad local) es preservada por esta última inclusión.

Hasta aquí hemos visto que cualquier f-anillo reducido con la primera propiedad de convexidad se sumerje en un modelo de T^* en el lenguaje de anillos reticulados junto con la relación radical. Y si se pide que el f-anillo sea *proyectable*, entonces la inclusión respeta también la divisibilidad.

Ahora vamos a ver, bajo la suposición de que el f-anillo reducido sea proyectable, que la divisibilidad local es preservada por todas estas inclusiones. Sean $a, b \in A$ tales que $b \mid_{\mathrm{loc}} a$ en A. Como esta fórmula es existencial entonces claramente $b \mid_{\mathrm{loc}} a$ en cualquier estructura arriba, en particular $b \mid_{\mathrm{loc}} a$ en R^C. Claramente la fórmula si $b \mid_{\mathrm{loc}} a$ se satisface en R^C entonces se satisface en $\prod_{p\in\pi A} {R_p}^{C_p}$ pues es una subestructura elemental, ver párrafo trasanterior. Por tanto debemos ver que la fórmula $b\,|_{\mathrm{loc}}\,a$ baja en las inclusiones de $(*)$.

Veamos que si $b\,|_{\mathrm{loc}}\,a$ se satisface en $\prod_{p\in\pi A} A/p$ entonces se satisface en A. Esto es evidente si $a=0$. Supongamos entonces que $a\neq 0$. Entonces existe $w\in\prod_{p\in\pi A} A/p$ tal que $w\neq 0$, $w(w-a)=0$ y $b\mid w$ en $\prod_{p\in\pi A} A/p$. Como $w\neq 0$ existe $p_0\in\pi A$ tal que $w_{p_0}\neq 0$. Luego $a(p_0)=w_{p_0}\neq 0$ y $b(p_0)\mid w_{p_0}=a(p_0)$ en A/p_0. Por tanto existe $c_{p_0}\in A/p_0$ con $b(p_0)c_{p_0}=a(p_0)$. Sea $c\in A$ tal que $c(p_0)=c_{p_0}$ y entonces $b(p_0)c(p_0)=a(p_0)$. Luego $p_0\in[\![\,bc=a\,]\!]\cap[\![\,a\neq 0\,]\!]=N\neq\phi$ un abierto-cerrado de πA. Como A es proyectable, sea $\tilde{w}\in A$ definida por medio de $\tilde{w}=a_{\restriction_N}\cup 0_{\restriction_{\pi A\smallsetminus N}}$. Entonces $\tilde{w}\neq 0$ y claramente $\tilde{w}(\tilde{w}-a)=0$. Es fácil ver que $b\mid\tilde{w}$ en A pues se puede tomar $d\in A$ dado por $d=c_{\restriction_N}\cup 0_{\restriction_{\pi A\smallsetminus N}}\in A$ que cumple $bd=\tilde{w}$. Hemos probado que $A\models\exists w(w\neq 0\wedge w(w-a)=0\wedge b\mid w)$. Es decir, $A\models b\,|_{\mathrm{loc}}\,a$.

Ahora consideremos la segunda inclusión: $\prod_{p\in\pi A} A/p\subseteq\prod_{p\in\pi A} R_p$. Para simplificar la notación pongamos $X=\pi A$ con $A_x=A/p$ y $R_x=R_p$ para todo $x\in X$. Sean $a=(a_x)_{x\in X}$ y $b=(b_x)_{x\in X}$ en $\prod_{x\in X} A_x$ tales que $b\,|_{\mathrm{loc}}\,a$ en $\prod_{x\in X} R_x$. Si $a=0$ entonces claramente $b\,|_{\mathrm{loc}}\,a$ en $\prod_{x\in X} A_x$. Supongamos que $a\neq 0$. Entonces existe $w=(w_x)_{x\in X}\in\prod_{p\in\pi A} R_p$ con $w\neq 0$, $w(w-a)=0$ y $b\mid w$ en $\prod_{x\in X} R_x$. Para cada $x\in X$ se tiene que $w_x=0$ o $w_x=a_x\in A_x$. Luego $w=(w_x)_{x\in X}\in\prod_{x\in X} A_x$. Como $b,w\in\prod_{x\in X} A_x$, entonces $b\mid w$ en $\prod_{x\in X} R_x$ nos permite concluir que $b\mid w$ en $\prod_{x\in X} A_x$. Hemos encotrado $w\in\prod_{x\in X} A_x$ tal que $w\neq 0$, $w(w-a)=0$ con $b\mid w$ en $\prod_{x\in X} A_x$. Es decir, $b\,|_{\mathrm{loc}}\,a$ en $\prod_{x\in X} A_x$.

La última inclusión que debemos considerar es $\prod_{x\in X} R_x\subseteq\prod_{x\in X} {R_x}^{C_x}$. Sean $a=(a_x)_{x\in X}$ y $b=(b_x)_{x\in X}$ en $\prod_{x\in X} R_x$ tales que $b\,|_{\mathrm{loc}}\,a$ en $\prod_{x\in X} {R_x}^{C_x}$. Si $a=0$, como siempre $b\,|_{\mathrm{loc}}\,a$ en $\prod_{x\in X} R_x$. Supogamos que $a\neq 0$. Entonces existe $w=(w_x^c)_{x\in X,c\in C_x}$ tal que $w\neq 0$, $w(w-a)=0$ y $b\mid w$ en $\prod_{x\in X} {R_x}^{C_x}$. Para cada $x\in X$, si existe $c\in C_x$ con $w_x^c\neq 0$ entonces $w_x^c=a_x\neq 0$. En este caso se puede redefinir $w\in\prod_{x\in X} {R_x}^{C_x}$ de manera que $w_x^c\neq 0$ poniendo $w_x^c=a_x\neq 0$, para todo $c\in C_x$. Y si para algún $x\in X$ se tiene que $w_x^c=0$ para todo $c\in C_x$ pues entonces no hay que redefinir nada. Luego se ve que w proviene de $\prod_{x\in X} R_x$ y se tiene que $w\neq 0$, $w(w-a)=0$ y $b\mid w$ en $\prod_{x\in X} {R_x}^{C_x}$. Ya se ha visto que también $b\mid w$ en $\prod_{x\in X} R_x$. Hemos visto entonces que $b\,|_{\mathrm{loc}}\,a$ en $\prod_{x\in X} R_x$. Con esto hemos llegado a ver que todas las inclusiones de $(*)$ y $(**)$ respetan la divisibilidad local.

Toda estas argumentaciones se resumen en la siguiente proposición.

Proposición 3.1 *Sea A un f-anillo reducido que satisface la primera propiedad de convexidad. Entonces existe $B\models T^*$ tal que $A\subseteq B$ en el lenguaje de anillos reticulados junto con la relación radical. Si además pedimos que A sea proyectable, entonces esta inclusión preserva la divisibilidad y la divisibilidad local.* ■

La hipótesis de proyectabilidad en la proposición anterior no es deseable para nuestros propósitos pues esta propiedad no se expresa mediante un axioma universal. Lo que dara resultado será considerar propiedades (universales) que reemplazaran el argumento que permite probar que la divisibilidad y la divisibilidad local fueran preservadas en la proposición 3.1. El siguiente lema va en este sentido.

Lema 3.2 *Sea A un f-anillo reducido y proyectable, entonces A satisface:*

$$\forall a\forall b\forall c_1\cdots\forall c_n\big((bc_1-a)\cdots(bc_n-a)=0\rightarrow b\mid a\big),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sabemos que $A \cong \Gamma\big(X, (A_x)_{x\in X}\big)$, en donde X es un espacio Booleano y $(A_x)_{x\in X}$ es una familia de anillos íntegros totalmente ordenados. Sean $a, b, c_1, \dots, c_n \in A$ tales que $(bc_1 - a)\cdots(bc_n - a) = 0$. Entonces tenemos que:

$$\big(b(x)c_1(x) - a(x)\big)\cdots\big(b(x)c_n(x) - a(x)\big) = 0,$$

para todo $x \in X$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ ponemos:

$$N_i = [\![\, bc_i - a = 0 \,]\!] = \{x \in X : b(x)c_i(x) - a(x) = 0\},$$

que son abiertos-cerrados de X. Como los A_x's son anillos íntegros entonces:

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} N_i.$$

Podemos suponer sin perdida de generalidad que los N_i's son disjuntos dos a dos y no vacíos (en caso en que alguno de ellos sea vacío, elimine el c_i correspondiente). Podemos escribir que:

$$X = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} N_i.$$

Como A es proyectable, por la propiedad de pegue se tiene que:

$$c = c_1{\restriction_{N_1}} \cup \cdots \cup c_n{\restriction_{N_n}},$$

es un elemento de A. Claramente $b(x)c(x) - a(x) = 0$, para todo $x \in X$. Es decir que $bc = a$ con $c \in A$. Esto muestra que $b \mid a$ en A. ∎

Corolario 3.3 *Sea B un f-anillo reducido y proyectable, y sea A un subanillo de B en el lenguaje de anillos reticulados con la divisibilidad. Entonces A satisface:*

$$\forall a \forall b \forall c_1 \cdots \forall c_n \big((bc_1 - a)\cdots(bc_n - a) = 0 \to b \mid a\big),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Se deduce claramente del lema 3.2. ∎

En el mismo sentido tenemos:

Corolario 3.4 *Sea $B \models T^*$ y A un subanillo de B en el lenguaje de anillos reticulados junto con la divisibilidad. Entonces A satisface:*

$$\forall a \forall b \forall c_1 \cdots \forall c_n \big((bc_1 - a)\cdots(bc_n - a) = 0 \to b \mid a\big),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. ∎

En vista de los resultados anteriores establecemos la siguiente definición.

Definición 3.5 *Sea A un anillo cualquiera. Decimos que A tiene la* **propiedad de pegue para la divisibilidad** *si A satisface:*

$$\forall a \forall b \forall c_1 \cdots \forall c_n \big((bc_1 - a) \cdots (bc_n - a) = 0 \rightarrow b \mid a \big),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Este sistema de axiomas permite demostrar que la divisibilidad baja. Sin embargo, en ausencia de la hipótesis de proyectabilidad, el espacio πA no necesariamente es compacto. Por esta razón y por consideraciones en [17] pensamos que tomar la clausura de πA en la topología constructible de algún espacio espectral puede ser de utilidad. Por esta razón debemos realizar ciertas consideraciones sobre los espacios espectrales en nuestro contexto de f-anillos reducidos. Recordemos que un espacio topológico X es un espacio espectral (cf. [9]) si:

(i) X es cuasi-compacto y T_0,

(ii) X tiene una base de abiertos que son cuasi-compactos y que son cerrados por intersección finita,

(iii) todo cerrado no vacío irreducible (i.e.: que no es la unión de dos cerrados propios) es la clausura de un único punto.

En [4] se consideran los l-ideales irreducibles (8.4.1) y se muestra en (10.1.6) que si A es un f-anillo con unidad entonces $\mathrm{Spec}_l(A)$ el conjunto de los l-ideales irreducibles de A es un espacio cuasi-compacto. Es claro que $\mathrm{Spec}_l(A)$ es T_0 (pues si $p, q \in \mathrm{Spec}_l(A)$ con $p \neq q$ entonces existe $a \in A$ con $a \in q$ y $a \notin p$, o $a \notin q$ y $a \in p$; en el primer caso $p \in S(a)$ y $q \notin S(a)$ y en el segundo caso $q \in S(a)$ y $p \notin S(a)$). Por [4, 10.1.4] la base $\big\{S(a) : a \in A\big\}$ de abiertos de $\mathrm{Spec}_l(A)$ es una base de cuasi-compactos que son cerrados por intersección finita. O sea que la definición (i) y (ii) de espacio espectral son satisfechas por $\mathrm{Spec}_l(A)$. La condición (iii) es esencialmente el resultado [4, 10.1.7], salvor por la irreducibilidad. Veamos este detalle. Sea F un cerrado irreducible no vacío de $\mathrm{Spec}_l(A)$. Por (10.1.7) se tiene que $F = H(p)$ con p un l-ideal de A, en donde $H(p) = \mathrm{Spec}_l(A) \smallsetminus S(p)$ con $S(p) = \{q \in \mathrm{Spec}_l(A) : p \not\subseteq q\}$. Queremos ver si p es irreducible. Sean a y b dos l-ideales de A tales que $a \cap b = p$. Entonces $F = H(p) = H(a) \cup H(b)$, ver [4, 10.1.11(ii)]. Como F es irreducible entonces $H(a) = F$ o $H(b) = F$. Si $H(a) = F = H(p)$ entonces $S(a) = S(p)$ y por (10.1.3) se tiene que $a = p$. Similarmente si $H(b) = F = H(p)$ entonces $b = p$. Esto demuestra que $F = H(p) = \overline{\{p\}}$, con $p \in \mathrm{Spec}_l(A)$. En resumidas cuentas, la sección (10.1) de [4, capítulo 10] establece que $\mathrm{Spec}_l(A)$ es un espacio espectral si A es un f-anillo con unidad.

Se sabe por (9.1.5) que si A es un f-anillo y $p \in \mathrm{Spec}_l(A)$ entonces A/p es un anillo totalmente ordenado. Sin embargo, aunque A sea reducido no necesariamente A/p es íntegro. Con el fin de estos cocientes sean íntegros nos restringimos al subespacio:

$$Y = \big\{p \in \mathrm{Spec}_l(A) : p \text{ es primo}\big\},$$

ver la sección (9.2) y en particular (9.2.5). Por tanto, para cualquier $p \in Y$ se tiene que A/p es un anillo íntegro totalmente ordenado.

Es Y como subespacio topológico de $\mathrm{Spec}_l(A)$ un espacio espectral ? Por [9, 2.1.3], bastaría ver que Y sea proconstructible en $\mathrm{Spec}_l(A)$. O equivalentemente que $\mathrm{Spec}_l(A) \smallsetminus Y$

sea abierto en la topología constructible de $\mathrm{Spec}_l(A)$. Para ver esto, sea $p_0 \in \mathrm{Spec}_l(A) \setminus Y$. Entonces p_0 es un l-ideal irreducible que no es primo. Existen $a, b \in A$ tales que $ab \in p_0$ con $a \notin p_0$ y $b \notin p_0$. Sea $\mathcal{O} = V(ab) \cap D(a) \cap D(b)$ que es un abierto en la topología constructible de $\mathrm{Spec}_l(A)$, de manera que $p_0 \in \mathcal{O}$ y $\mathcal{O} \subseteq \mathrm{Spec}_l(A) \setminus Y$ (ningún $p \in \mathcal{O}$ va a ser primo). Por tanto $Y = \big\{p \in \mathrm{Spec}_l(A) : p \text{ es primo}\big\}$ es también un espacio espectral.

Resumiento tenemos que si A es un f-anillo (reducido), existe $Y \subseteq \mathrm{Spec}_l(A)$ un espacio espectral tal que A/p sea un anillo íntegro totalmente ordenado, para todo $p \in Y$. Observemos que por [11, Lemma 2.3] se tiene que si A un f-anillo que satisface la primera propiedad de convexidad entonces A/p satisface la primera propiedad de convexidad, para todo $p \in Y$.

Estamos en medida de enunciar y luego probar la siguiente proposición.

Proposición 3.6 *Sea A un f-anillo reducido que satisface la primera propiedad de convexidad y la propiedad de pegue para la divisibilidad. Entonces existe $B \models T^*$ tal que A es un subanillo reticulado de B en el lenguaje de anillos reticulados junto con la divisibilidad.*

Demostración: Sea A un f-anillo reducido que satisface la primera propiedad de convexidad y la propiedad de pegue para la divisibilidad. Consideremos Y un espacio espectral cualquiera de manera que A/p sea un anillo íntegro totalmente ordenado, para todo $p \in Y$ (existe por la discusión anterior a esta proposición). Sea X cualquier subespacio de Y que sea proconstructible y que contenga πA el espacio de ideales primos minimales de A (por [4, 9.3.2] se tiene que $\pi A \subseteq Y$). En particular X puede ser $\overline{\pi A}$ la clausura en la topología constructible de Y.

Consideremos $\iota\colon A \to \prod_{p\in X} A/p$, $a \mapsto (a+p)_{p\in X}$. Claramente ι es un homomorfismo de anillos reticulados. Como A es reducido y X contiene a πA entonces ι es una inyección. Por tanto $\iota\colon A \hookrightarrow \prod_{p\in X} A/p$ es un monomorfimos de anillos reticulados. Claramente si $a, b \in A$ tales $b \mid a$ en A entonces $\iota(b) \mid \iota(a)$ en $\prod_{p\in X} A/p$. Queremos ver el recíproco.

Sean $a, b \in A$ tales que $\iota(b) \mid \iota(a)$ en $\prod_{p\in X} A/p$. Denotemos $A_x = A/p$ para $x \in X$. Luego $b(x)$ divide $a(x)$ en A_x, para todo $x \in X$. Existe $c_x \in A_x$ tal que $b(x) = c_x = a(x)$, para todo $x \in X$. Como A es un f-anillo, existe $\tilde{c}_x \in A$ tal que $\tilde{c}_x(x) = c_x$, para todo $x \in X$. Entonces $b(x)\tilde{c}_x(x) = a(x)$, para todo $x \in X$. Luego $x \in \llbracket\, b\tilde{c}_x = a \,\rrbracket = N_x$ que es un abierto-cerrado de X (en la topología constructible). Entonces:

$$X = \bigcup_{x\in X} N_x,$$

y por compacidad de X existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que:

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} N_{x_i}.$$

Denotemos $c_i = \tilde{c}_{x_i}$ y $N_i = N_{x_i}$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Tenemos que $X = \cup_{i=1}^{n} N_i$ y entonces todo $x \in X$ satisface $b(x)c_i(x) = a(x)$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces $\big(b(x)c_1(x) - a(x)\big) \cdots \big(b(x)c_n(x) - a(x)\big) = 0$, para todo $x \in X$. Es decir que:

$$(bc_1 - a) \cdots (bc_n - a) = 0.$$

Por la propiedad de pegue para la divisibilidad en A se tiene que $b \mid a$. Hemos probado que:

$$A \models b \mid a \text{ si y solo si } \prod_{p \in X} A/p \models \iota(b) \mid \iota(a).$$

Es decir que ι es un monomorfimo de anillos reticulados que respeta la divisibilidad. Note que $\prod_{p \in X} A/p$ es un f-anillo reducido y proyectable, entoces por la proposición 3.1 existe $B \models T^*$ tal que $\prod_{p \in X} A/p \subseteq B$ en el lenguaje de anillos reticulados con la divisibilidad. Por tanto A se sumerje en B un modelo de T^* en el lenguaje $\{0, 1, +, \cdot, \wedge, |\}$. ■

En la demostración anterior, el espacio X puede haber sido todo $Y = \{p \in \mathrm{Spec}_l(A) : p \text{ es primo}\}$. También podría haber sido $X = \overline{\pi A}^{\mathrm{con}}$ en donde πA se ve como subespacio de $\mathrm{Sper}(A)$ el espectro real de A. O incluso en donde πA se ve como subespacio de RCVR-Spec(A), ver [18].

Podemos establecer la siguiente proposición.

Proposición 3.7 *La teoría universal de T^* en el lenguaje de anillos reticulados con divisibilidad es la teoría de f-anillos reducidos que satisfacen la primera propiedad de convexidad y el sistema de axiomas de pegue para la divisibilidad.*

Demostración: Se deduce del corolario 3.4 y de la proposición 3.6. ■

El problema de encontrar la teoría universal de T^* ha sido completamente resuelto en el lenguaje de anillos reticulados con la relación de divisibilidad, (cf. proposición 3.7). Ahora nos abocamos al mismo problema pero en agregando la divisibilidad local al lenguaje. En ese sentido tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.8 *Sea A un f-anillo proyectable y reducido. Entonces A satisface:*

$$\forall a \forall b \forall c (a \not\preceq bc - a \to b \mid_{\mathrm{loc}} a).$$

Demostración: Sea A un f-anillo proyectable y reducido. Entonces $A \cong \Gamma\big(X, (A_x)_{x \in X}\big)$, en donde $X = \pi A$ es el espacio de ideales primos minimales y $(A_x)_{x \in X}$ es una familia de anillos íntegros totalmente ordenados. Sean $a, b, c \in A$ tales que $a \not\preceq bc - a$. Por la relación radical se tiene que existe $x \in X$ tal que $a(x) \neq 0$ y $(bc - a)(x) = 0$. Pongamos $N = [\![\, a \neq 0 \,]\!] \cap [\![\, bc - a = 0 \,]\!]$. Entonces $x \in N$ y N es un abierto-cerrado no vacío. Por la propiedad de pegue en A, existe $w \in A$ tal que $w = a_{\restriction N} \cup 0_{\restriction X \smallsetminus N}$. Pongamos ahora $c' = c_{\restriction N} \cup 0_{\restriction X \smallsetminus N} \in A$. Por la definición de N se tiene que $w \neq 0$, $w(w - a) = 0$ y $bc' = w$. Se tiene que $\exists w (w \neq 0 \wedge w(w - a) = 0 \wedge b \mid w)$ en A. Esto es precisamente que $b \mid_{\mathrm{loc}} a$. ■

En la demostración anterior se ve que claramente que $a \neq 0$ para esa relación radical precisa y usando la proyectabilidad de A. En general se tiene que a no puede ser 0 pues si $a = 0$ entonces $0 \not\preceq bc$, lo que es falso pues para cualquier relación radical se tiene que $0 \preceq d$, para cualquier $d \in A$. Tenemos un par de corolarios.

Corolario 3.9 *Sea B un f-anillo proyectable y reducido con A un subanillo de B en el lenguaje de anillos reticulados junto con la relación radical y la divisibilidad local. Entonces A satisface:*

$$\forall a \forall b \forall c (a \not\preceq bc - a \rightarrow b \mid_{\text{loc}} a).$$

Demostración: Se deduce obviamente de 3.8. ∎

Corolario 3.10 *Sea $B \models T^*$ con A un subanillo de B en el lenguaje de anillos reticulados con la relación radical y la divisbilidad local. Entonces A satisface:*

$$\forall a \forall b \forall c (a \not\preceq bc - a \rightarrow b \mid_{\text{loc}} a).$$

∎

Observemos que la fórmula $\forall a \forall b \forall c (a \not\preceq bc - a \rightarrow b \mid_{\text{loc}} a)$ establece cierta compatibilidad entre la relación radical $\preceq$ y la divisibilidad local.

Definición 3.11 *Sea A un anillo cualquiera. Decimos que A tiene la* **propiedad de la divisibilidad local** *si A satisface $\forall a \forall b \forall c \big((a \not\preceq bc - a) \rightarrow b \mid_{\text{loc}} a \big)$.*

Ahora estamos en medida de probar la siguiente proposición.

Proposición 3.12 *Sea A un f-anillo reducido que satisface la primera propiedad de convexidad y que satisface la propiedad de la divisibilidad local. Entonces existe $B \models T^*$ tal que $A \subseteq B$ como subanillo en el lenguaje de anillos reticulados junto con la relación radical y la divisibilidad local.*

Demostración: Sea A un f-anillo reducido que satisface la primera propiedad de convexidad y la propiedad de la divisibilidad local. Consideremos, al igual que en la proposición 3.6, un espacio espectral Y de manera que A/p sea un anillo íntegro totalmente ordenado, para todo $p \in Y$. Consideremos también un subconjunto X de Y que sea proconstructible y que contenga a πA; en particular X puede ser $\overline{\pi A}^{\text{con}}$ la clausura de πA en la topología constructible de Y.

Similarmente a la demostración de la proposición 3.6, consideremos $\iota \colon A \to \prod_{p \in X} A_p$ el homomorfismo de anillos reticulados dado por $\iota(a) = (a + p)_{p \in X}$. Como X contiene a πA y A es reducido, entonces ι es un monomorfismo. También ι respeta la relación radical pues X contiene a πA. Queremos ver que ι respeta la divisibilidad local. Sean $a, b \in A$. Si $b \mid_{\text{loc}} a$ en A entonces claramente $\iota(b) \mid_{\text{loc}} \iota(a)$ en $\prod_{p \in X} A_p$. Supongamos ahora que $\iota(b) \mid_{\text{loc}} \iota(a)$ en $\prod_{p \in X} A_p$. Si $\iota(a) = 0$ entonces $a = 0$ y evidentemente $b \mid_{\text{loc}} a$ en A. Supongamos entonces que $\iota(a) \neq 0$. Denotemos $\prod_{p \in X} A_p = \prod_{x \in X} A_x$, en donde A_x es un anillo íntegro totalmente ordenado, para todo $x \in X$ y X es un espacio Booleano (pues es un cerrado en la topología constructible). Tenemos que $\iota(a) = \big(a(x)\big)_{x \in X} \neq 0$. Por tanto existe $w = (w_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} A_x$ tal que $w \neq 0$ y $w\big(w - \iota(a)\big) = 0$ con $\iota(b) \mid w$ en $\prod_{x \in X} A_x$. Luego existe $c = (c_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} A_x$ tal que $\iota(b)c = w$. Como $w \neq 0$, existe $x_0 \in X$ tal que $w_{x_0} \neq 0$. Entonces $w_{x_0} = a(x_0)$ pues $w\big(w - \iota(a)\big) = 0$. Existe $c \in A$ tal que $c(x_0) = c_{x_0}$ y luego tenemos que $b(x_0)c(x_0) = a(x_0)$ con $a(x_0) \neq 0$. Es decir que $a(x_0) \neq 0$ y $(bc-a)(x_0) = 0$. Como la relación radical está definida por πA o por cualquier proconstructible que lo contenga, se tiene que $a \not\preceq bc - a$ en A. Como A satisface la propiedad de la divisibilidad local, entoces $b \mid_{\mathrm{loc}} a$ en A. Hemos probado que $\iota\colon A \to \prod_{p\in X} A_p$ respeta la divisibilidad local.

Como A satisface la primera propiedad de convexidad local, entonces A_x la satisface, para todo $x \in X$. Claramente se tiene que $\prod_{p\in X} A_p$ también satisface la primera propiedad de convexidad. Entonces $\prod_{p\in X} A_p$ es un f-anillo reducido y proyectable que satisface la primera propiedad de convexidad. Por la proposición 3.1, existe $B \models T^*$ tal que $\prod_{x\in X} A_x \subseteq B$ en el lenguaje de anillos reticulados junto con la relación radical y la divisibilidad local. Finalmente se tiene que $A \subseteq B$ en el lenguaje $\{0, 1, +, \cdot, \wedge, \preceq, \mid_{\mathrm{loc}}\}$. ■

De la proposición 3.7, el corolario 3.10 y la proposición 3.12 se deduce la siguiente proposición.

Proposición 3.13 *La teoría universal de T^* en el lenguaje de anillos reticulados junto con la relación radical, la divisibilidad y la divisibilidad local es la teoría de f-anillos reducidos con la primera propiedad de convexidad y que satisfacen el sistema de axiomas de pegue para la divisibilidad y la propiedad de la divisibilidad local.* ■

Por el teorema **??** se tiene que T^* también es modelo completa en el lenguaje de anillos reticulados junto con la relación radical, la divisibilidad y la divisibilidad local. En vista de la proposición 3.13 tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.14 *La teoría T^* es la modelo compañera de la teoría de los f-anillos reducidos que satisfacen la primera propiedad de convexidad, el sistema de axiomas de pegue para la divisibilidad y la propiedad de la divisibilidad local en el lenguaje $\{0, 1, +, \cdot, \wedge, \preceq, \mid, \mid_{\mathrm{loc}}\}$.*

■

4. Eliminación de cuantificadores.

Ya se ha mostrado la modelo-completitud de la teoría T^* en el lenguajde de anillos reticulados junto con la relación radical y la divisibilidad local, cf. [13, Theorem 3.2]. Por tanto la teoría T^* sigue siendo modelo-completa en el lenguaje $\{0, 1, +, \cdot, \wedge, \preceq, \mid, \mid_{\mathrm{loc}}\}$. La teoría universal de T^* ya fue caracterizada en la proposición 3.13. Para determinar si T^* admite eliminación de cuantificadores en el lenguaje $\{0, 1, +, \cdot, \wedge, \preceq, \mid, \mid_{\mathrm{loc}}\}$, basta indagar por [6, Proposition 3.5.19], si la teoría $T^*_\forall$ tiene la propiedad de amalgamación.

Nos damos entonces A, B, C tres modelos de $T^*_\forall$ tales que existen $f\colon A \to B$ y $g\colon A \to C$ monomorfismos de anillos reticulados que preservan la relación radical, la divisibilidad y la divisibilidad local. Es decir:

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & \overset{f}{\nearrow} & \\ A & & \\ & \underset{g}{\searrow} & \\ & & C. \end{array}$$

La pregunta de saber si existe la suma amalgamada de B y C sobre A la intentamos dilucidar inicialmente por tres puntos de vista:

• Por [17, Proposition (a), página 22 y Theorem página 23], se tiene que existen $f^*\colon \overline{\pi B} \to \overline{\pi A}$ y $g^*\colon \overline{\pi C} \to \overline{\pi A}$ funciones continuas (en la topología constructible) y sobreyectivas. Tomemos X el pullback de $\overline{\pi B}$ y $\overline{\pi C}$ sobre $\overline{\pi A}$. Es decir:

$$X = \overline{\pi B} \times_{\overline{\pi A}} \overline{\pi C}.$$

Para cada $(q_1, q_2) \in X$ se tiene que $p = f^{-1}(q_1) = g^{-1}(q_2) \in \overline{\pi A}$. Se puede definir: $f_p\colon A/p \to B/q_1$ y $g_p\colon A/p \to C/q_2$ y mostrar que son monomorfismos de anillos ordenados. Por el momento no se ha podido mostrar que f_p y g_p respeten la divisibilidad, a pesar de que f y g respetan la divisibilidad local. Esto se debe a una falta de control sobre los idempotentes que realizan"la divisibilidad local. Por eso es que se han estudiado fórmulas (universales) en la sección 5 sobre idempotentes. La idea subyacente aquí es tomar:

$$D = \prod_{p \in X} D_p,$$

en donde D_p es la suma amalgamada de B/g_1 y C/g_2 sobre A/p. Dada la eliminación de cuantificadores mostrada en [7] y la teoría universal establecida en [2], se tiene la propiedad de amalgamación para la teoría $\mathrm{COVD_D} \cup \mathrm{OF_D}$.

• Es conocido que en la teoría de anillos conmutativos, existe el pushout. Precisamente, si $f\colon C \to A$ y $g\colon C \to B$ son dos morfimos, entonces pushout de A y B sobre C está dado por:

$$A \otimes_C B = \left\{ \sum_{i \in I} (a_i, b_i) \mid a_i \in A, b_i \in B \right\} / \Big\langle \big(f(c)a, b\big) - \big(a, g(c)b\big) \mid a \in A, b \in B, c \in C \Big\rangle.$$

Surgen entonces muchas preguntas al respecto. En el caso en que A, B y C son anillos ordenados, entonces $A \otimes_C B$ es ordenado ? Si son f-anillos, entonces también $A \otimes_C B$ es un f-anillo. Y las mismas preguntas valen para reducido, proyectable, primera propiedad de convexidad, propiedad de pegue para la divisibilidad y propiedad para la divisibilidad local ! En el álgebra conmutativa clásica, es usual salirse del contexto de la teoría de anillos para construir los productos tensoriales a través de la teoría de modulos. De ahí que será importante ver la referencia [22]. En [3], se demuestra que el producto tensorial de dos f-anillos arquimedianos es un f-anillo.

• Otra posibilidad es a través los anillos de los anillos de secciones constructibles sobre subespacios proconstructibles. Precisamente, sea A un anillo conmutativo. Por [18], existe el RCVR-Spec(A). Para X un subconjunto proconstructible de RCVR-Spec(A), considere:

$$\sigma(A, X) = \Big\{ s\colon X \to \bigcup_{\alpha \in X} k_\alpha : \text{ existe } \phi_s(x, a_1, \ldots, a_n)$$

$$\text{una fórmula tal que } k_\alpha \models \phi_s\big(s(\alpha), a_1(\alpha), \ldots, a_n(\alpha)\big) \Big\}.$$

El autor ya ha mostrado $\sigma(A, X)$ es un f-anillo reducido, proyectable, divisible-proyectable, sc-regular y real cerrado. No se tiene que $\sigma(A, X)$ sea sin idempotentes minimales no cero, para lograr esto, es recomendable ver [21]. En este sentido, se estaría avanzando más que todo en un teorema de subestructura completa.

Referencias

[1] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald, *Introducción al Álgebra Conmutativa*, Editorial Reverté, Barcelona, 1975.

[2] T. Becker, *Real Closed rings and ordered valuation rings*, Zeitsch. f. math. Logik und Grundlagen d. Math, Bd. 29 (1983), 417-425.

[3] M. A. Ben Amor, *Tensor product of f-rings*, arXiv, 2018.

[4] A. Bigard, K. Keimel, S. Wolfenstein, *Groupes et Anneaux réticulés*, Lecture Notes in Mathematics 608, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[5] S. Burris, H. Werner, *Sheaf Constructions and their elementary properties*, Transactions of the American Mathematical Society, Volume 248, Number 2 (1979), 269-309.

[6] C.C. Chang, H.J. Keisler, *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[7] G. Cherlin, M.A. Dickmann, *Real closed rings II. Model Theory.* Annals of Pure and Applied Logic 25 (1983), 213-231.

[8] S.D. Comer, *Elementary properties of structures of sections*, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana 19 (1974), 78-85.

[9] M. A. Dickmann, N. Schwartz, M. Tressl *Spectral Spaces*, New mathematical monographs: 35, Cambridge University Press, Cambridge, 2019.

[10] S. Feferman, R.L. Vaught, *The first order properties of products of algebraic systems*, Fundamenta Mathematicae 47 (1959), 57-103.

[11] J. I. Guier, *Boolean products of real closed valuations rings and fields*, Annals of Pure and Applied Logic 112 (2001), 119-150.

[12] J. I. Guier, *Convex Lattice-Ordered Subrings of von Neumann Regular f-Rings*, Revista Colombiana de Matemáticas, volumen 49, número 1 (2015), 161-170.

[13] J. I. Guier, *Local divisibility and model completeness of a theory of real closed rings*, Séminaire de Structures Algébriques Ordonnées (Delon-Dickmann-Gondard-Servi) 2018-2020, Prépublications Équipe de Logique Mathématique, Février 2021.

[14] K. Keimel, *The representation of lattice-ordered groups and rings by sections of sheaves.* Lectures Notes in Mathematics 248, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1971, 1-98.

[15] A. Macintyre, *Model Completeness for sheaves of structures*, Fund. Math. LXXXI (1973), 73-89.

[16] A. Prestel, J. Schmid, *Existencially closed domains with radical relations*, J. reine angew. Math. 407 (1990), 178-201.

[17] A. Prestel, N. Schwarz, *Model Theory of real closed rings*, In *Valuation theory and its applications*, vol. I (Saskatoon, SK, 1999), volume 32 of Fields Institute Communications, pp. 261-290, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[18] R.O. Robson, *Model theory and spectra*, Journal of Pure and Applied Algebra, volume 63 (1990), 301-327.

[19] N. Schwartz, *Real closed rings*, in Algebra and Order (S. Wolfenstein, ed.), Research and Exposition in Mathematics, vol. 14, Heldermann, Berlin, 1986.

[20] N. Schwartz, *Real closed rings. Examples and applications*, in Séminaire de Structures Algébriques Ordonnées 1995-96 (Delon, Dickmann, Gondard, eds), Paris VII-CNRS Logique, Prépublications, No. 61, Paris, 1997.

[21] N. Schwartz, J.J. Madden, *Semi-algebraic Function Rings and Reflectors of Partially Ordered Rings*, Lecture Notes in Mathematics 1712, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1999.

[22] S. A. Steinberg, *Lattice-ordered rings and modules*, Springer-Verlag, New York, 2010.

[23] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading Massachusets, 1970.