

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

SISTEMA DE ESTUDIOS DE POSGRADO

LEY DE GRANDES NÚMEROS EN MEDIO AMBIENTE ALEATORIO

Tesis sometida a la consideración de la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Matemática para optar al grado y título de Maestría Académica en Matemática con énfasis en Matemática Pura.

JENNIFER ACUÑA LARIOS

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio, Costa Rica

2020

AGRADECIMIENTO

Agradezco a Dios.

A mi familia por su apoyo incondicional.

*Al profesor José David Campos a quien admiro muchísimo, por su
paciencia y su dedicación.*

*A los profesores William Ugalde, Christian Fonseca y Pedro Méndez
por la inspiración que de ellos he recibido, por su motivación y apoyo.*

“Esta tesis fue aceptada por la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Matemática de la Universidad de Costa Rica, como requisito parcial para optar al grado y título de Maestría Académica en Matemáticas con énfasis en Matemática Pura.”

"Esta tesis fue aceptada por la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Matemática de la Universidad de Costa Rica, como requisito parcial para optar al grado y título de Maestría Académica en Matemáticas con énfasis en Matemática Pura."



Dr. Santiago Cambronero Villalobos

Representante del Decano del sistema de estudios de posgrado



José David Campos Fdez

Dr. José David Campos Fernández

Director de Tesis



Dr. Pedro Méndez Hernández

Asesor



Dr. José Alexander Ramírez González

Asesor



Jonathan

Dr. Jonathan Gutierrez Pavón

Representante del Director del programa de posgrado en Matemáticas



Jennifer Acuña Larios

Candidata

Resumen

LEY DE GRANDES NÚMEROS EN MEDIO AMBIENTE ALEATORIO

Las condiciones $(T)_\gamma, \gamma \in (0, 1)$ introducidas por Sznitman en 2002 tienen un significativo impacto en el estudio de caminatas aleatorias sobre medios aleatorios (RWRE). Este tipo de caminatas modelan, por ejemplo, el movimiento de una partícula en un ambiente altamente desordenado y no homogéneo que a su vez tiene probabilidad de salto aleatorio. Este tipo de caminatas en ambientes aleatorios presentan dos grandes complicaciones: una es la pérdida de la propiedad Markoviana bajo una medida promedio y la otra es que en dimensiones mayores que uno, la RWRE ya no es reversible.

En este trabajo, se desarrolla una generalización de ley de grandes números para dimensiones $d \geq 1$, sobre ambientes aleatorios. En el caso donde $d = 1$, se tiene un valor de convergencia descrito de forma explícita, conocida como la velocidad límite. Mientras que para dimensiones superiores, la expresión más común para la velocidad límite surge a partir del estudio de una sucesión de tiempos de regeneración, asumiendo alguna condición de balisticidad. Es en este punto, donde las condiciones $(T)_\gamma$ impusieron una línea de investigación por varios años en las caminatas aleatorias en medios aleatorios. Imponían un decaimiento exponencial que debía cumplir la caminata al salir de ciertas “franjas” en la red \mathbb{Z}^d . Posteriormente, se mostró que esta imposición de decaer en forma exponencial era equivalente a decaer en forma polinomial (condición $(P)_M$).

Toda esta perspectiva de trabajo se apoyó en ciertos requerimientos que debía cumplir el medio aleatorio (ambiente). Se asumió en la mayoría de los trabajos una condición denominada *elipticidad uniforme* que exigía, a grosso modo, que la caminata tiene una probabilidad de salto a los primeros vecinos mayor o igual que cierta constante fija $\kappa > 0$. Por otro lado, sitios diferentes de \mathbb{Z}^d originaban variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Otra perspectiva de abordar el problema del comportamiento balístico de la caminata, fue la introducción de un cierto proceso Markoviano llamado *desde el punto de vista de la partícula*. Analiza una evolución Markoviana del ambiente a partir de las trayectorias de la caminata. Acá se pueden relajar las condiciones impuestas sobre el ambiente (elipticidad en lugar de

elipticidad uniforme, ergodicidad en lugar de i.i.d), pero se asume la existencia de una medida invariante del proceso que sea absolutamente continua con respecto a la medida original \mathbb{P} sobre el espacio de ambientes. Se puede mostrar una *ley de grandes números* y analizar la naturaleza balística o sub-balística de la caminata.

Contenidos

Agradecimiento	ii
Hoja de aprobación (firmas)	iii
Resumen	v
Lista de abreviaciones	ix
Licencia de publicación	x
1 Introducción	1
1.1 Historia	1
1.2 Objetivos	1
1.2.1 Objetivo general	1
1.2.2 Objetivos específicos	2
2 Modelo	3
2.1 Definiciones	3
2.2 Ley 0-1 de Kalikow	7
2.3 La estructura de renovación	10
2.4 Ley de Grandes Números para $d = 1$	19
2.4.1 Velocidad asintótica en el caso annealed	20
2.4.2 Ejemplo de RWRE en $d = 1$	27

3	Ley de grandes números en general	29
3.1	Introducción	29
3.2	Notaciones y resultados previos	29
3.3	LGN para $d > 1$	41
3.3.1	La ley de grandes números para $d \geq 1$	41
4	Balisticidad	43
4.1	Condiciones $(T), (T')$ y $(T)_\gamma$ relativo a l	44
4.2	Caracterización de las condiciones de Balisticidad	44
4.3	Estimado D.Q.A Principal	49
4.4	Proceso de renormalización	54
4.5	Control de las colas del tiempo de regeneración	59
5	Condiciones efectivas de balisticidad Polinomial y el Criterio Efectivo para RWRE	63
5.1	Introducción	63
5.2	Notaciones	64
5.3	Definiciones Polinomiales	70
5.4	Condiciones Polinomiales	72
5.5	Criterio Efectivo	73
5.6	Condición polinomial implica T'	91
5.6.1	Cajas buenas	91
5.6.2	Resultados previos	95
5.6.3	Resultados Auxiliares	103
5.6.4	Prueba del decaimiento polinomial	110
6	Desde el punto de vista de la partícula	112
6.1	Teorema de Kozlov	114
6.2	Ley de grandes números desde el punto de vista de la partícula	118

Lista de Abreviaciones

- RWRE** Siglas en inglés que significa *Caminata Aleatoria sobre Medios Aleatorios*.
- IID** Independiente e idénticamente distribuido.
- EU** Elipticidad uniforme.
- ERG** Ergodicidad.



UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA

SEP Sistema de
Estudios de Posgrado

Autorización para digitalización y comunicación pública de Trabajos Finales de Graduación del Sistema de Estudios de Posgrado en el Repositorio Institucional de la Universidad de Costa Rica.

Yo, Jennifer Acuña Larios, con cédula de identidad 1-1267-0115, en mi condición de autor del TFG titulado Ley de Grandes Número en Medio Ambiente Aleatorio

Autorizo a la Universidad de Costa Rica para digitalizar y hacer divulgación pública de forma gratuita de dicho TFG a través del Repositorio Institucional u otro medio electrónico, para ser puesto a disposición del público según lo que establezca el Sistema de Estudios de Posgrado. SI NO *

*En caso de la negativa favor indicar el tiempo de restricción: _____ año (s).

Este Trabajo Final de Graduación será publicado en formato PDF, o en el formato que en el momento se establezca, de tal forma que el acceso al mismo sea libre, con el fin de permitir la consulta e impresión, pero no su modificación.

Manifiesto que mi Trabajo Final de Graduación fue debidamente subido al sistema digital Kerwá y su contenido corresponde al documento original que sirvió para la obtención de mi título, y que su información no infringe ni violenta ningún derecho a terceros. El TFG además cuenta con el visto bueno de mi Director (a) de Tesis o Tutor (a) y cumplió con lo establecido en la revisión del Formato por parte del Sistema de Estudios de Posgrado.

INFORMACIÓN DEL ESTUDIANTE:

Nombre Completo: Jennifer Acuña Larios

Número de Carné: A50047 Número de cédula: 112670115

Correo Electrónico: jennifer.acunalarios@ucr.ac.cr

Fecha: 15-10-20 Número de teléfono: 8403-7577

Nombre del Director (a) de Tesis o Tutor (a): José David Campos Fernández


FIRMA ESTUDIANTE

Nota: El presente documento constituye una declaración jurada, cuyos alcances aseguran a la Universidad, que su contenido sea tomado como cierto. Su importancia radica en que permite abreviar procedimientos administrativos, y al mismo tiempo genera una responsabilidad legal para que quien declare contrario a la verdad de lo que manifiesta, puede como consecuencia, enfrentar un proceso penal por delito de perjurio, tipificado en el artículo 318 de nuestro Código Penal. Lo anterior implica que el estudiante se vea forzado a realizar su mayor esfuerzo para que no sólo incluya información veraz en la Licencia de Publicación, sino que también realice diligentemente la gestión de subir el documento correcto en la plataforma digital Kerwá.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Historia

Las caminatas aleatorias en medios aleatorios (RWRE) son una generalización de las tradicionales caminatas aleatorias, se utilizan para modelar distintos tipos de transporte, tales como la propagación del calor o la difusión de materia a través de medios bastante irregulares y no homogéneos, debido a factores tales como defectos, impurezas, fluctuaciones, etc. Por lo que es natural modelar tales irregularidades como *Ambientes Aleatorios*.

Sus inicios datan el año 1967 cuando Chervov introduce los ambientes aleatorios para describir replicaciones de ADN. Temkin en 1972, fue quien introduce este concepto en el campo de la metalurgia. En 1982, Sinai muestra que los modelos de RWRE pueden obtenerse matemáticamente por medio de fenómenos de turbulencia en una versión más sencilla del conocido gas de Lorentz, el cual es una caminata aleatoria persistente, es decir, un proceso aleatorio en distintas direcciones.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Estudiar la ley de grandes números de caminatas aleatorias en medios aleatorios bajo distintas condiciones sobre el ambiente.

1.2.2 Objetivos específicos

1. Exponer la ley de grandes números de Solomon, en dimensión $d = 1$.
2. Exponer la balisticidad de las caminatas aleatorias en medios aleatorios a partir de las condiciones de balisticidad de Sznitman (T_γ) con $\gamma \in]0, 1]$ en ambientes uniformemente elípticos, independientes e idénticamente distribuidos.
3. Exponer la balisticidad de las caminatas aleatorias en medios aleatorios a partir de la condición polinomial $(P)_M$ en ambientes uniformemente elípticos, independientes e idénticamente distribuidos.
4. Unificar las pruebas que permiten la equivalencia entre las condiciones de balisticidad $(P)_M$ y (T_γ) con $\gamma \in]0, 1[$ en ambientes uniformemente elípticos, independientes e idénticamente distribuidos, a través del Criterio Efectivo establecido por Alain Sol Sznitman.
5. Exponer la balisticidad de la caminata aleatoria en un medio aleatorio, a partir de la existencia de una medida de probabilidad invariante del proceso desde el punto de vista de la partícula $(\bar{\omega}_n)$ que sea absolutamente continua con respecto a la medida del ambiente \mathbb{P} , en un ambiente elíptico y que satisface una cierta condición de ergodicidad.

Capítulo 2

Modelo

2.1 Definiciones

Para $x \in \mathbb{R}^d$, denotamos por $|x|_1$ y $|x|_2$ a las normas en l_1 y l_2 respectivamente.

Definición 2.1.1 (Ambiente aleatorio). Sea $V := \{e \in \mathbb{Z}^d : |e|_1 = 1\}$, el conjunto de vectores canónicos. Se denota por \mathcal{P} las probabilidades de transición sobre V ,

$$\mathcal{P} := \left\{ (p(e))_{e \in V} \in [0, 1]^V : \sum_{e \in V} p(e) = 1 \right\} \quad (2.1)$$

Un ambiente $\omega := \{\omega(x) : x \in \mathbb{Z}^d\}$ se define como un elemento del espacio ambiente $\Omega := \mathcal{P}^{\mathbb{Z}^d}$, es decir para cada $x \in \mathbb{Z}^d$ se tiene,

$$\omega(x) = \{\omega(x, e) : e \in V\} \in \mathcal{P}.$$

Definición 2.1.2 (IID). Sea \mathbb{P} una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$, donde \mathcal{B} denota la σ -álgebra de Borel. Si las coordenadas $(\omega(x, \cdot))_{x \in \mathbb{Z}^d}$ del ambiente ω son i.i.d bajo \mathbb{P} , entonces se dice que el ambiente es i.i.d.

Con el fin de definir una condición más débil que **(IID)**, se introduce la siguiente notación. Para cada $y \in \mathbb{Z}^d$, sea t_y la traslación definida sobre el espacio ambiente Ω definida por

$$(t_y \omega)(x, e) := \omega(x + y, e)$$

para cada $x \in \mathbb{Z}^d$ y $e \in V$.

Observación 2.1.1. Bajo el supuesto de (IID), si μ es una medida de probabilidad en \mathcal{P} , entonces el espacio Ω es dotado de la medida producto $\mathbb{P} = \mu^{\otimes \mathbb{Z}^d}$.

Definición 2.1.3. (Ley Quenched) Para un ambiente $\omega = (\omega(x, \cdot))_{x \in \mathbb{Z}^d}$ se define la caminata aleatoria $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como una cadena de Markov en \mathbb{Z}^d con ley $P_{x, \omega}$ definida por

$$P_{x, \omega}[X_0 = x] = 1, \quad P_{x, \omega}[X_{n+1} = y + e | X_n = y] = \begin{cases} \omega(y, e) & \text{si } e \in V, y \in \mathbb{Z}^d \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad (2.2)$$

La ley $P_{x, \omega}$ es llamada la Ley quenched de RWRE. Además se denota por

$$p^{(n)}(x, y, \omega) := P_{x, \omega}[X_n = y] \quad (2.3)$$

la n -ésima probabilidad de transición, pasar de x a y en n -pasos dado el ambiente ω .

Sea \mathcal{G} la σ -álgebra producto en $(\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$. Aplicando el teorema de Dynkin, se verifica que para cada $x \in \mathcal{G}$, el mapeo

$$\omega \longmapsto P_{x, \omega}[G]$$

es $\mathcal{B}(\Omega)$ -medible. Es posible definir sobre el espacio $(\Omega \times (\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\Omega) \otimes \mathcal{G})$ para cada $x \in \mathbb{Z}^d$ el semi-producto directo $P_{x, \mathbb{P}}$ de las medidas \mathbb{P} y $P_{x, \omega}$, por la fórmula

$$P_{x, \mathbb{P}}[F \times G] := \int_F P_{x, \omega}(G) \mathbb{P}(d\omega)$$

Definición 2.1.4. (Ley annealed) Se define la probabilidad annealed o promedio, P_x de la caminata aleatoria $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como el producto semi-directo en $\Omega \times (\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$, el cual es la ley marginal de $P_{x, \mathbb{P}}$ sobre $(\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$, es decir,

$$P_x := \mathbb{P} \times P_{x, \omega} = \int_{\Omega} P_{x, \omega} \mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}[P_{x, \omega}],$$

donde \mathbb{E} es la esperanza con respecto a \mathbb{P} .

Observación 2.1.2. Por definición, la ley quenched satisface

$$P_{x, \omega}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \omega(x_1, x_2) \cdots \omega(x_{n-1}, x_n), \quad \text{para } x_i \in V, i = 1, \dots, n.$$

Por otro lado,

$$P_x(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \int \omega(x_1, x_2) \cdots \omega(x_{n-1}, x_n) \mathbb{P}(d\omega) \quad (2.4)$$

Es importante señalar que bajo la ley annealed la caminata deja de ser Markoviana; ya que $\omega(x_i, x_j)$ y $\omega(x_j, x_k)$ no necesariamente son independientes, por esta razón en la ecuación (2.4) no se obtiene un producto de integrales. Dicho de otro modo: condicionando con respecto a X_0, \dots, X_n se tiene la información sobre el ambiente en los puntos X_0, \dots, X_{n-1} , entonces si $X_n \in \{X_0, \dots, X_{n-1}\}$, $X_{n+1} - X_n$ deja de ser independiente de X_0, \dots, X_n .

Definición 2.1.5 ((E) y (UE)). \mathbb{P} es llamado Elíptico, **(E)**, si

$$\mathbb{P}\left(\min_{e \in V} \omega(0, e) \geq 0\right) = 1$$

y es llamado Uniformemente Elíptico, **(UE)**, si existe una constante $\kappa > 0$ tal que

$$\mathbb{P}\left(\min_{e \in V} \omega(0, e) \geq \kappa\right) = 1$$

En algunos casos, nos referiremos a ésta condición como elipticidad uniforme, en cuyo caso se utiliza la abreviación es **(EU)**.

Definición 2.1.6. (l -Transitoriedad) Sea $l \in \mathbb{S}^{d-1}$. Se dice que la RWRE, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es transitoria en dirección a l si

$$P_0(A_l) = 1,$$

donde $A_l := \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \cdot l = +\infty \right\}$.

Definición 2.1.7. (Balisticidad) Sea $l \in \mathbb{S}^{d-1}$. Se dice que la RWRE, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es balística en dirección a l si

$$P_0\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n \cdot l}{n} > 0\right) = 1.$$

Observación 2.1.3. Dentro de todos los capítulos se hace uso de distintos tiempos de parada (entradas y salidas a distintos conjuntos) que realiza la caminata aleatoria, por esta razón acordamos utilizar la siguiente notación

- $H_U^X := \inf\{n \geq 0 : X_n \in U\}$
- $T_U^X := \inf\{n \geq 0 : X_n \notin U\}$

- $D := \inf\{n \geq 0 : l \cdot X_n < l \cdot X_0\}$

para $U \subseteq \mathbb{Z}^d$. En el caso particular donde $U = \{x \in \mathbb{Z}^d : x \cdot l \leq L\}$ denotamos por

$$T_U^X = T_L^l = \inf\{n \geq 0 : X_n \cdot l \geq L\} \quad y \quad H_U^X = H_L^l = \inf\{n \geq 0 : X_n \cdot l \leq L\} \quad (2.5)$$

A pesar de que la caminata $(X_n)_n$ deja de ser Markoviana bajo la ley *quenched*, ésta es, hasta cierto punto, más sencilla de manipular. Por este motivo, se construye una cadena de Markov sobre $U \cup \partial U$, donde $U \subseteq \mathbb{Z}$ es un subconjunto conexo que contiene al cero, cuyas probabilidades de transición son dadas por la fórmula

$$\widehat{P}_U(x, x+e) := \frac{\mathbb{E} \left[E_{0,\omega} \left(\sum_{n=0}^{T_U} \mathbf{1}_{\{X_n=x\}} \right) \omega(x, e) \right]}{\mathbb{E} \left[E_{0,\omega} \left(\sum_{n=0}^{T_U} \mathbf{1}_{\{X_n=x\}} \right) \right]}$$

para $x \in U$ y $e \in V$. Las esperanzas que definen la probabilidad de transición son finitas, gracias a la (EU) y al hecho de que U es conexo.

La ley canónica de esta cadena de Markov iniciando en $x \in U \cup \partial U$ es denotada por $\widehat{P}_{x,U}$. Éstas medidas son de interés ya que **kali** muestra que

$$\widehat{P}_{0,U}[T_U < \infty] = 1 \quad \implies \quad P_0[T_U < \infty] = 1$$

además X_{T_U} tiene la misma distribución bajo P_0 y bajo $\widehat{P}_{0,U}$.

Definición 2.1.8 (Condición de Kalikow). *Se dice que se satisface la condición de Kalikow relativo a la dirección $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ si existe un $\epsilon > 0$ tal que*

$$\inf_{U, x \in U} \sum_{e \in V} l \cdot e \widehat{P}_U(x, x+e) \geq \epsilon \quad (2.6)$$

para cualquier $U \subset \mathbb{Z}^d$ conexo que contiene al 0.

2.2 Ley 0-1 de Kalikow

El estudio de la convergencia de la caminata reposa esencialmente en la posibilidad de descomponer la trayectoria en secciones independientes y que tienen la misma ley, así destacando una “estructura de renovación” que a su vez permite referirse a una *Ley de grandes números*. En esta sección se exponen resultados previos al teorema de la *ley de grandes números* bajo la hipótesis de “transitoriedad” en dirección de un vector preestablecido $l \in \mathbb{S}^{d-1}$. Dicha hipótesis tiene sus propios antecedentes, que se resumen en resultados que se presentan a continuación.

Considere la filtración canónica $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$ y los tiempos de parada D y T_u^l como en (2.5) para $u > 0$, así como el operador de desplazamiento canónico θ sobre $(\mathbb{Z}^d)^\mathbb{N}$, definido por

$$\theta_p : \theta_p((X_n)_{n \geq 0}) = (X_{n+p})_{n \geq 0}, \quad p \in \mathbb{N},$$

que serán de gran importancia para la estructura de renovación.

Para la hipótesis de transitoriedad direccional, a partir de un vector $l \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ consideramos los eventos

$$B_l = A_l \cup A_{-l} = \left\{ \lim_n l \cdot X_n = +\infty \quad \text{ó} \quad \lim_n l \cdot X_n = -\infty \right\} \quad (2.7)$$

$$C_l = \{l \cdot X_n \text{ mantiene el mismo signo para } n \text{ grande}\}.$$

Lema 2.2.1. Para C_l como en (2.7), se tiene

$$P_0(C_l) \in \{0, 1\} \quad (2.8)$$

El lema (2.2.1)(cuya demostración se encuentra en **kali**) es la base de la prueba de la llamada **ley 0-1 de Kalikow**.

Lema 2.2.2. (Ley 0-1 de Kalikow) Asuma un ambiente **(IID)** y **(UE)**. Para $l \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ se tiene

$$P_0(B_l) \in \{0, 1\}$$

Prueba. Por el lema anterior C_l cumple la ley cero-uno y dado que $B_l \subseteq C_l$, si $P_0(C_l) = 0$, entonces $P_0(B_l) = 0$. El resultado, no trivial, es demostrar que $P_0(B_l) = 1$ cuando $P_0(C_l) = 1$. Para lograrlo, se muestra que si $M > 0$

$$P_0\left(\{X_n.l \in [0, M], \text{i.o}\} \subseteq \{X_n.l < 0, \text{i.o}\}\right) = 1, \quad (2.9)$$

ya que si (2.9) se cumple entonces

$$P_0[\{X_n.l > 0 \text{ para } n \text{ lo suficientemente grande}\} \cap \{X_n.l \in [-M, M], \text{i.o}\}] = 0.$$

Similarmente se obtiene que

$$P_0[\{X_n.l < 0 \text{ para } n \text{ lo suficientemente grande}\} \cap \{X_n.l \in [-M, M], \text{i.o}\}] = 0,$$

por lo que se obtiene

$$P_0[C_l \cap \{X_n.l \in [-M, M], \text{i.o}\}] = 0. \quad (2.10)$$

Como $M > 0$ es arbitrario, se concluye el resultado deseado $P_0(B_l) = 1$.

Para ver que la condición (2.9) en efecto se cumple, note que bajo la hipótesis **(UE)** se puede inferir que $P_0(H_{\{z: z.l < 0\}} < \infty) = 1$. Considere ahora N lo suficientemente grande y $c > 0$ de modo que

$$P_{x,\omega}[H_{\{z: z.l < 0\}} \leq N] \geq c, \quad \text{para } \omega \in \Omega \quad \text{y} \quad x \in \{z: z.l \in [0, M]\}. \quad (2.11)$$

Iniciando con $V_0 := 0$, defina el tiempo de retorno al conjunto $\{z: z.l \in [0, M]\}$ por

$$V_1 := H_{\{z: z.l \in [0, M]\}} \leq \infty.$$

y de forma recursiva tras $V_k + N$ -pasos, la caminata que parte de X_{V_k+N} y cuenta el tiempo que tarda en regresar al conjunto $\{z: z.l \in [0, M]\}$ es

$$V_{k+1} = V_k + N + V_1 \circ \theta_{V_k+N}, \quad \text{para } k \geq 1.$$

Ahora se introducen los eventos G_k y H_k como

$$\mathbf{1}_{G_k} := \mathbf{1}_{\{V_k < \infty\}}, \quad \text{y} \quad \mathbf{1}_{H_k} := \mathbf{1}_{\{H_{\{z: z.l < 0\}} \leq N\}} \circ \theta_{V_k}, \quad k \geq 1. \quad (2.12)$$

Nótese que en la última expresión, si $V_k = \infty$ entonces $1_{H_k} = 0$. Se tiene en particular que $G_k \in \mathcal{F}_{V_k}$, mientras que $H_k \in \mathcal{F}_{V_{k+1}}$. Luego,

$$\begin{aligned} P_0[H_k \mid \mathcal{F}_{V_k}] &= P_x[H_k \mid \mathcal{F}_{V_k}] \\ &= E_x[1_{H_k} \mid \mathcal{F}_{V_k}] \\ &= \mathbb{E}\left[E_{x,\omega}[1_{\{H_{\{z:l \cdot z < 0\}} \leq N\}} \circ \theta_{V_k}] \mid \mathcal{F}_{V_k}\right], \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad fuerte de Markov sobre los tiempos de parada V_k , con ayuda de (2.11), para cualquier $x \in \{z : z \cdot l \in [0, M]\}$ se cumple que

$$\begin{aligned} P_0[H_k \mid \mathcal{F}_{V_k}] &= \mathbb{E}\left[E_{x,\omega}[1_{\{H_{\{z:l \cdot z < 0\}} \leq N\}}]\right] \\ &\geq c. \end{aligned}$$

Es decir,

$$P_0[H_k \mid \mathcal{F}_{V_k}] \geq c \mathbf{1}_{G_k}, \quad k \geq 1. \quad (2.13)$$

Luego, sumando sobre k

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_0[H_k \mid \mathcal{F}_{V_k}] \geq c \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{G_k}. \quad (2.14)$$

Por lo tanto,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{G_k} = \infty\right) \implies \left(\sum_{k=1}^{\infty} P_0[H_k \mid \mathcal{F}_{V_k}] = \infty\right).$$

Finalmente, aplicando el segundo lema de Borel-Cantelli, se concluye que

$$P_0(\{H_k \text{ i.o}\} \supseteq \{G_k \text{ i.o}\}) = 1,$$

lo que implica inmediatamente (2.9). □

Un problema abierto es si el evento A_l satisface una ley 0-1 para dimensiones mayores o iguales a 2. Zerner y Merkl **ZernerMerkl** lo probaron en el caso de dimensión $d = 2$. El caso $d \geq 3$ permanece abierto.

Conjetura 2.2.1. Dado $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ y $d \geq 3$ entonces

$$P_0[A_l] \in \{0, 1\}$$

2.3 La estructura de renovación

Sea $a > 0$. Consideremos ahora los tiempos de parada $(S_n)_{n \geq 0}$, $(R_n)_{n \geq 1}$ con respecto a \mathcal{F}_n y la secuencia de máximos sucesivos $(M_n)_{n \geq 0}$ definidos por

$$\begin{aligned} S_0 &= 0, \\ M_0 &= X_0 \cdot l \\ S_1 &= T_{M_0+a}^l = \inf\{n \geq 0 \mid X_n \cdot l \geq M_0 + a\} \leq \infty, \\ R_1 &= D \circ \theta_{S_1} + S_1 = \inf\{n \geq S_1 \mid X_n \cdot l < X_{S_1} \cdot l\} \leq \infty, \\ M_1 &= \sup\{X_m \cdot l \mid 0 \leq m \leq R_1\} \leq \infty \end{aligned} \tag{2.15}$$

y luego para $n \geq 1$ definimos por recurrencia

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= T_{M_n+a}^l = \inf\{m \geq 0 \mid X_m \cdot l \geq M_n + a\} \leq \infty, \\ R_{n+1} &= D \circ \theta_{S_{n+1}} + S_{n+1} = \inf\{m \geq S_{n+1} \mid X_m \cdot l < X_{S_{n+1}} \cdot l\} \leq \infty, \\ M_{n+1} &= \sup\{X_m \cdot l \mid 0 \leq m \leq R_{n+1}\} \leq \infty. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Una ilustración de esta estructura se puede visualizar en la figura 2.1. Los tiempos S_1, S_2, \dots , son conocidos como "tiempos frescos" y sus localizaciones X_{S_1}, X_{S_2}, \dots como "puntos frescos": ya que al momento S_k , la caminata X_\bullet visita por primera vez, después de S_{k-1} , una parte nueva del ambiente y antes de llegar nuevamente al hiperplano $X_{S_{k-1}} \cdot l - 1$. A priori, se tiene que

$$0 = S_0 \leq S_1 \leq R_1 \leq S_2 \leq \dots \leq \infty, \tag{2.17}$$

donde las desigualdades son estrictas cuando éstas son finitas.

Definición 2.3.1. A partir de la estructura de renovación dada en (2.15) y (2.16), definimos

$$\begin{aligned} K &= \inf\{k \geq 1 : S_k < \infty, R_k = \infty\} \quad y \\ \tau_1 &= S_K \leq \infty \end{aligned} \tag{2.18}$$

con la convención que $S_\infty = \infty$. (Ver Figure 2.1).

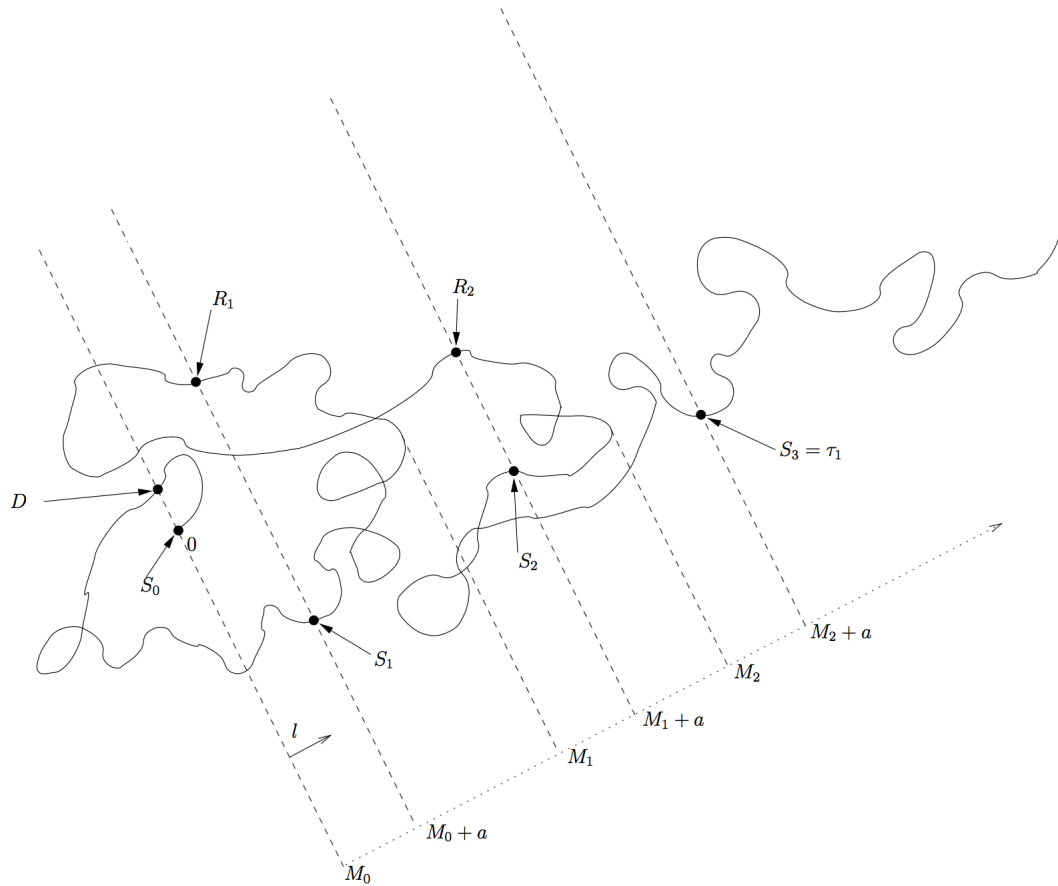


FIGURA. 2.1: Definición de la estructura de renovación

Observación 2.3.1. La variable τ_1 no es un tiempo de parada, ya que depende de toda la trayectoria (el evento $\{\tau_1 \leq n\}$ no está en \mathcal{F}_n). Específicamente, el momento $\tau_1 < \infty$, por un lado, es el primer instante en el cual $X_n \cdot l$ alcanza el nivel $X_{\tau_1} \cdot l$, pero por otro lado, una vez que alcanza dicho nivel, $X_n \cdot l$ nunca vuelve a ser menor que $X_{\tau_1} \cdot l$. Es decir,

$$\begin{aligned} n < \tau_1 &\implies X_n \cdot l < X_{\tau_1} \cdot l & \text{y} & \quad D \circ \tau_1 = \infty \\ n \geq \tau_1 &\implies X_n \cdot l \geq X_{\tau_1} \cdot l \end{aligned}$$

Ahora, se exhiben resultados preliminares importantes, iniciando con la igualdad módulo P_0 del evento $\{\tau_1 < \infty\}$ con la transitoriedad.

Lema 2.3.1 (Lema fundamental). *Para todo $k \geq 1$,*

$$P_0(R_k < \infty) \leq \left[P_0(D < \infty) \right]^k. \quad (2.19)$$

La igualdad se cumple si $P_0(A_l) = 1$.

Prueba del lema fundamental. Con la ventaja que bajo la ley *quenched* la caminata es Markoviana, es posible afirmar que para $k \geq 1$

$$\begin{aligned} P_0(R_k < \infty) &= P_0(S_k < \infty, D \circ \theta_{S_k} < \infty) \\ &= \mathbb{E} \left[E_{0,\omega} \left[S_k < \infty, P_{X_{S_k}, \omega} [D < \infty] \right] \right] \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E} \left[P_{0,\omega} (S_k < \infty, X_{S_k} = x) P_{x,\omega} (D < \infty) \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Note que $P_{0,\omega} (S_k < \infty, X_{S_k} = x)$ y $P_{x,\omega} (D < \infty)$ son respectivamente, $\sigma(\omega(y, \cdot); y.l < x.l)$ y $\sigma(\omega(y, \cdot); y.l \geq x.l)$ -medibles, por tanto \mathbb{P} -independientes, de esta forma

$$\begin{aligned} P_0(R_k < \infty) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} P_0 (S_k < \infty, X_{S_k} = x) P_x (D < \infty) \\ &= P_0(S_k < \infty) P_0(D < \infty) \\ &\leq P_0(R_{k-1} < \infty) P_0(D < \infty), \end{aligned}$$

el último paso se ha utilizado el hecho de que $S_{k-1} \leq R_{k-1} \leq S_k$. De forma inductiva se obtiene que

$$P_0(R_k < \infty) \leq \left[P_0(D < \infty) \right]^k, \quad k \geq 1, \quad (2.21)$$

la igualdad se da al tener $P_0(A_l) = 1$. □

Proposición 2.3.1. *Asuma las hipótesis de (UE) y (IID). Si $P_0(A_l) = 1$, entonces*

$$P_0[D = \infty] > 0 \quad (2.22)$$

y

$$P_0(\{K < \infty\} = \{\tau_1 < \infty\}) = 1 \quad (2.23)$$

Prueba. Para probar (2.22) suponga por contradicción que $P_0[D = \infty] = 0$.

Entonces $P_0[D < \infty] = 1$. Como el ambiente es (IID) se tiene que $P_x[D < \infty] = 1$ y así para

casi todo $\omega \in \Omega$ se cumple que

$$P_{x,\omega}[D < \infty] = 1.$$

A partir de esto, podemos aplicar la propiedad fuerte de Markov (bajo la ley *quenched*) y concluir que

$$P_0\left(\lim_n l.X_n \leq 0\right) = 1,$$

que obviamente es contradictorio con nuestra hipótesis l -transitoriedad.

Para mostrar (2.23) con ayuda de (2.22) y el *lema fundamental* podemos afirmar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_0[R_k = \infty] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - \left(P_0(D < \infty)\right)^k\right] = \infty.$$

Por la definición de los R_k y la condición **(IID)** podemos afirmar que los eventos $\{R_k = \infty\}_{k \geq 1}$ son independientes bajo P_0 . Por lo tanto, aplicando el segundo lema de Borel Cantelli

$$P_0\left(\inf\{k \geq 1, R_k = \infty\} < \infty\right) = 1. \quad (2.24)$$

Por otro lado, la hipótesis de l -transitoriedad implica que para cualquier $k \geq 1$

$$P_0\left(R_k < \infty \Rightarrow S_{k+1} < \infty\right) = 1. \quad (2.25)$$

Así, con la ayuda de (2.24) y (2.25), se sigue que

$$P_0\left(K = \inf\{k \geq 1, S_k < \infty, R_k = \infty\} < \infty\right) = 1.$$

Finalmente $\{K < \infty\} = \{\tau_1 < \infty\}$. □

Defina la siguiente σ -álgebra que contiene toda la información de la RWRE antes de τ_1 y parte del ambiente que podría visitar (con la convención de que $X_{\tau_1.l} = \infty$, en $\{\tau_1 = \infty\}$),

$$\mathcal{G}_1 = \sigma\left(\tau_1, X_0, \dots, X_{\tau_1}, (\omega(y, \cdot))_{y.l < X_{\tau_1}.l}\right) \quad (2.26)$$

Gracias a que la l -transitoriedad y (2.23), se cumple

$$P_0\left(\{D = \infty\} \subset A_l \subset \{\tau_1 < \infty\}\right) = 1 \quad (2.27)$$

y

$$\{D = \infty\} = \{D \geq \tau_1\} \in \mathcal{G}_1. \quad (2.28)$$

Luego, al elegir τ_1 , se espera que la caminata aleatoria $(X_{\tau_1+n} - X_{\tau_1})_{n \geq 0}$ sea independiente de \mathcal{G}_1 y posea la misma ley que $(X_n)_{n \geq 0}$, condicionada a no volver al conjunto $\{x.l < 0\}$. La siguiente proposición demuestra esta afirmación.

Proposición 2.3.2. *La caminata aleatoria $((X_{\tau_1+n} - X_{\tau_1})_{n \geq 0}, (\omega(X_{\tau_1} + y, \cdot))_{y.l \geq 0})$ es independiente de \mathcal{G}_1 bajo $P_0(\cdot | \tau_1 < \infty) = P_0(\cdot | A_l)$, donde la ley es la misma de $((X_n)_{n \geq 0}, (\omega(y, \cdot))_{y.l \geq 0})$ sobre $P_0(\cdot | D = \infty)$. Es decir, para A y B conjuntos medibles*

$$\begin{aligned} P_0[(X_{\tau_1+n} - X_{\tau_1})_{n \geq 0} \in A, (\omega(X_{\tau_1} + y, \cdot))_{y.l \geq 0} \in B | \mathcal{G}_1] \\ = P_0[(X_n)_{n \geq 0} \in A, (\omega(y, \cdot))_{y.l \geq 0} \in B | D = \infty] \end{aligned} \quad (2.29)$$

Prueba. Sea h una función \mathcal{G}_1 -medible y defina las indicadoras

$$1_A := \mathbf{1}_{(X_n - X_0)_{n \geq 0} \in A} \quad \text{y} \quad 1_B := \mathbf{1}_{(\omega(y, \cdot))_{y.l \geq 0}}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{Z}^d$, existe una variable aleatoria $h_{x,k}$ medible con respecto a

$$\sigma((\omega(y, \cdot))_{l.y < l.x}, (X_i)_{i \leq S_k}, S_k)$$

tal que sobre el evento $\{\tau_1 = S_k, X_{S_k} = x\}$, $h = h_{x,k}$ (esto se sigue por la \mathcal{G}_1 -medibilidad de h). Entonces, utilizando las traslaciones θ y t_x , se tiene

$$E_0[1_A \circ \theta_{\tau_1} \cdot 1_B \circ t_{X_{\tau_1}} \cdot h \cdot \mathbf{1}_{\tau < \infty}] \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E} [E_{0,\omega}(\mathbf{1}_{S_k < \infty} \mathbf{1}_{R_k = \infty} \mathbf{1}_{X_{S_k} = x} \cdot 1_A \circ \theta_{S_k} \cdot 1_B \circ t_x \cdot h_{x,k})] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E} [1_B \circ t_x \cdot E_{0,\omega}(\mathbf{1}_{S_k < \infty} \mathbf{1}_{D \circ \theta_{S_k} = \infty} \mathbf{1}_{X_{S_k} = x} \cdot 1_A \circ \theta_{S_k} \cdot h_{x,k})] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E} [1_B \circ t_x \cdot E_{x,\omega}(\mathbf{1}_{D = \infty} 1_A) E_{0,\omega}(h_{x,k} \mathbf{1}_{S_k < \infty} \mathbf{1}_{X_{S_k} = x})] \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$(2.32)$$

Note que

$$1_B \circ t_x \cdot E_{x,\omega}(\mathbf{1}_{D=\infty} \mathbf{1}_A) \quad \text{es} \quad \sigma(\omega(y, \cdot), l \cdot y \geq l \cdot x) - \text{medible y acotada,}$$

mientras que

$$E_{0,\omega}(h_{x,k} \mathbf{1}_{S_k < \infty} \mathbf{1}_{X_{S_k} = x}) \quad \text{es} \quad \sigma(\omega(y, \cdot), l \cdot y < l \cdot x) - \text{medible y acotada,}$$

por tanto, éstas dos variables aleatorias son \mathbb{P} -independientes y la última expresión de (2.31) es igual a

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} E_0(1_B \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{D=\infty}) \cdot E_0(h_{x,k} \mathbf{1}_{S_k < \infty} \mathbf{1}_{X_{S_k} = x}) \\ &= E_0(1_A \mathbf{1}_B \mid D = \infty) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} E_0(h_{x,k} \mathbf{1}_{S_k < \infty} \mathbf{1}_{X_{S_k} = x}) \cdot P_0(D = \infty) \end{aligned}$$

De esta manera,

$$E_0(1_A \circ \theta_{\tau_1} \cdot 1_B \circ \theta_{X_{\tau_1}} \cdot h) = E_0(h) E_0(1_A \mathbf{1}_B \mid D = \infty)$$

lo que permite el resultado deseado. □

La afirmación de arriba nos permite definir sobre $\{\tau_1 < \infty\}$ una secuencia no decreciente $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots$, de forma inductiva como

$$\tau_{k+1} = \tau_1(X) + \tau_k(X_{\tau_1+} - X_{\tau_1}), \quad (2.33)$$

donde $\tau_{k+1} = \infty$ sobre $\{\tau_k = \infty\}$, para $k \geq 1$. Estos tiempos se pueden apreciar en la Figura 2.2. Note que

$$P_0(\{\tau_k < \infty\} = \{\tau_1 < \infty\} = A_l) = 1, \quad \text{para } k \geq 1.$$

Se introduce la σ -álgebra,

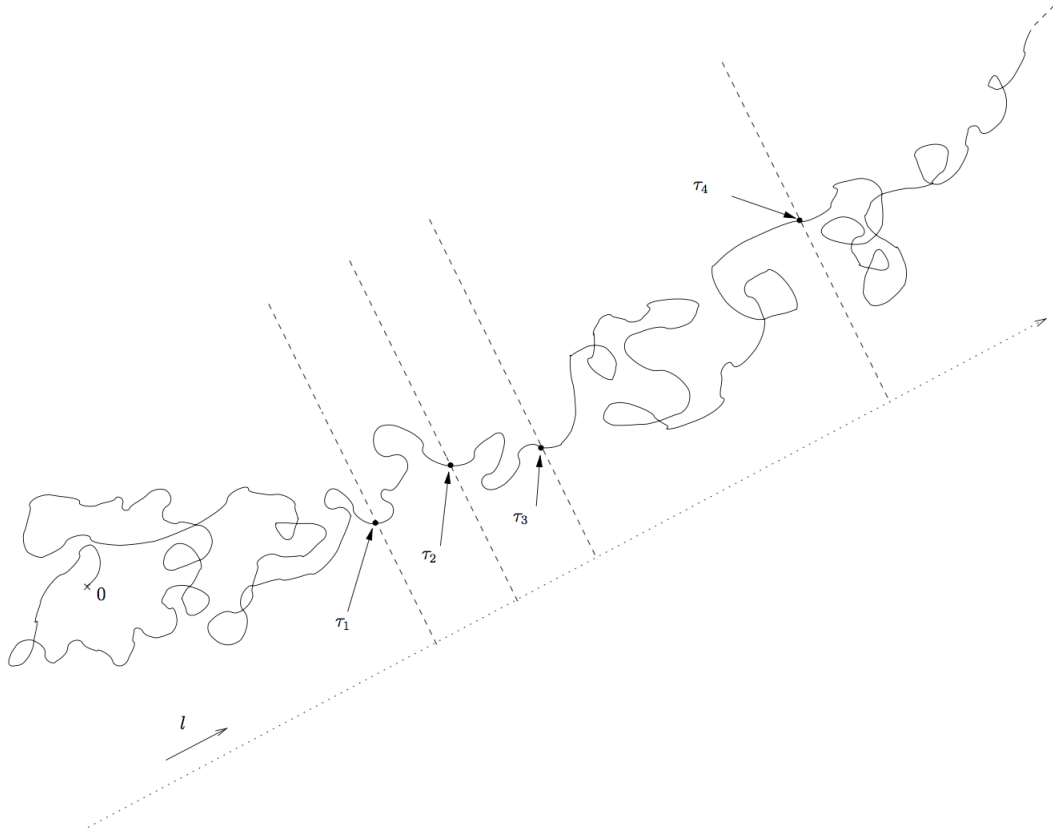


FIGURA. 2.2: Definición de los tiempos de parada recursivos

$$\mathcal{G}_k = \sigma(\tau_1, \dots, \tau_k, X_0, \dots, X_{\tau_k}, (\omega(y, \cdot))_{y, l < X_{\tau_k}, l}). \quad (2.34)$$

El principal resultado en la estructura de renovación bajo el supuesto de l -transitoriedad se presenta en el siguiente teorema el cual muestra la independencia entre las variables $(X_{\tau_{k+1}} - X_{\tau_k})$ y $(\omega(X_{\tau_k} + y, \cdot))_{y, l \geq 0}$ de \mathcal{G}_k bajo la probabilidad P_0 .

Teorema 2.3.1. Para $k \geq 1$, A y B conjuntos medibles,

$$\begin{aligned} P_0[(X_{\tau_{k+n}} - X_{\tau_k})_{n \geq 0} \in A, (\omega(X_{\tau_k} + y, \cdot))_{y, l \geq 0} \in B | \mathcal{G}_k] \\ = P_0[(X_n)_{n \geq 0} \in A, (\omega(y, \cdot))_{y, l \geq 0} \in B | D = \infty] \end{aligned} \quad (2.35)$$

Prueba. Defina el mapeo ψ por

$$\psi(X_\cdot, \omega) = (X_{\tau_1+} - X_{\tau_1}, t_{X_{\tau_1}} \omega),$$

note que hasta P_0 -conjuntos nulos, \mathcal{G}_{k+1} es generado por \mathcal{G}_1 y $\psi^{-1}(\mathcal{G}_k^+)$, donde \mathcal{G}_k^+ es definido de forma análoga a (2.34), con la condición adicional que $0 \leq y.l$. Note que $\{D = \infty\}$ es \mathcal{G}_1 -medible, de forma inductiva en el Teorema (2.3.1) y 2.33, se sigue la proposición 2.3.2. \square

Corolario 2.3.1. *Bajo la probabilidad P_0 ,*

$$(X_{\tau_1}, \tau_1), (X_{\tau_2} - X_{\tau_1}, \tau_2 - \tau_1), \dots, (X_{\tau_{k+1}} - X_{\tau_k}, \tau_{k+1} - \tau_k), \dots,$$

son variables independientes. Además, $(X_{\tau_2} - X_{\tau_1}, \tau_2 - \tau_1), \dots, (X_{\tau_{k+1}} - X_{\tau_k}, \tau_{k+1} - \tau_k), \dots$, se distribuyen igual que (X_{τ_1}, τ_1) bajo $P_0(\cdot | D = \infty)$.

Introduzca la variable aleatoria

$$M = \sup\{X_{m.l} - X_{0.l}, 0 \leq m \leq D\} \leq \infty \tag{2.36}$$

Proposición 2.3.3.

$$E_0[M | D < \infty] < \infty \quad \implies \quad E_0[l \cdot X_{\tau_1}, \tau_1 < \infty] < \infty \tag{2.37}$$

Prueba. Para $l = (l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{S}^{d-1}$, defina la constante $c > 0$ como

$$c = a + \sup_{i \in [1, d]} |l_i|, \quad \text{con } a \text{ como en (2.15)}. \tag{2.38}$$

Observe que P_0 -c.s sobre el evento $\{\tau_1 < \infty\}$, gracias a (2.15) y (2.18) se tiene que

$$\begin{aligned} l \cdot X_{\tau_1} &= l \cdot X_{S_K} \\ &= l \cdot X_{S_1} + \sum_{k'=1}^{K-1} l \cdot X_{S_{k'+1}} - l \cdot X_{S_{k'}} \\ &= l \cdot X_{S_1} + \sum_{k'=1}^{K-1} l \cdot X_{S_{k'+1}} - M_{k'} + M_{k'} - l \cdot X_{S_{k'}} \\ &\leq c + \sum_{k'=1}^{K-1} c + M_{k'} - l \cdot X_{S_{k'}} \end{aligned} \tag{2.39}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
& E_0[l \cdot X_{\tau_1}, \tau_1 < \infty] \\
& \leq E_0 \left[c + \sum_{k'=1}^K c + M_{k'} - l \cdot X_{S_{k'}}, S_K < \infty \right] \\
& \leq c P_0[\tau_1 < \infty] + \sum_{k'=1}^{\infty} E_0[c + M_{k'} - l \cdot X_{S_{k'}}, k' < K < \infty] \\
& = c P_0[\tau_1 < \infty] + \sum_{k'=1}^{k-1} E_0[c + M_{k'} - l \cdot X_{S_{k'}}, S_k < \infty, R_k = \infty]
\end{aligned} \tag{2.40}$$

y usando un argumento similar al *lema fundamental* (2.3.1)

$$\begin{aligned}
\sum_{k'=1}^{k-1} E_0[c + M_{k'} - l \cdot X_{S_{k'}}, S_k < \infty, R_k = \infty] &= \sum_{k'=1}^{k-1} E_0[c + M_{k'} - l \cdot X_{S_{k'}}, S_k < \infty, D = \infty] \\
&= \sum_{k'=1}^{k-1} E_0[c + M_{k'} - l \cdot X_{S_{k'}}, S_k < \infty] P_0[D = \infty].
\end{aligned}$$

Ahora, para $1 \leq k' < k$, como $P_0[S_k < \infty] = P_0[R_{k-1} < \infty]$

$$\begin{aligned}
& E_0[c + M_{k'} - l \cdot X_{S_{k'}}, S_k < \infty] \\
& = E_0[c + M_{k'} - l \cdot X_{S_{k'}}, R_{k-1} < \infty] \\
& \leq P_0[D < \infty] \cdot E_0[c + M_{k'} - l \cdot X_{S_{k'}}, S_{k-1} < \infty]
\end{aligned}$$

De forma inductiva se puede concluir que

$$E_0[c + M_{k'} - l \cdot X_{S_{k'}}, S_k < \infty] \leq E_0[c + M_{k'} - l \cdot X_{S_{k'}}, R_{k'} < \infty] P_0[D < \infty]^{k-1-k'}$$

luego por el corolario (2.3.1) y la definición (2.36) se tiene

$$\begin{aligned}
 & E_0[c + M_{k'} - l.X_{S_{k'}}, R_{k'} < \infty]P_0[D < \infty]^{k-1-k'} \\
 & = P_0[S_{k'} < \infty]E_0[c + M, D < \infty]P_0[D < \infty]^{k-1-k'} \\
 & \leq P_0[D < \infty]^{k'-1}E_0[c + M, D < \infty]P_0[D < \infty]^{k-1-k'}
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Volviendo a la (2.40) se encuentra que

$$\begin{aligned}
 E_0[l.X_{\tau_1}, \tau_1 < \infty] & \leq cP_0[\tau_1 < \infty] + (c + E_0[M|D < \infty]) \sum_{1 \leq k' < k} P_0[D = \infty]P_0[D < \infty]^{k-1} \\
 & = cP_0[\tau_1 < \infty] + (c + E_0[M|D < \infty]) \left(\frac{1}{P_0[D = \infty]} - 1 \right) < \infty
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

pues la serie $\sum_{k \geq 1} (k-1)P_0[D = \infty]P_0[D < \infty]^{k-1} = \frac{1}{P_0[D = \infty]} - 1$, completando de esta manera la demostración. \square

2.4 Ley de Grandes Números para $d = 1$

Esta sección estudia las RWRE en el caso unidimensional. Asumiremos las condiciones **(IID)** y **(UE)**, bajo la medida de probabilidad \mathbb{P} . Para $\omega \in \Omega$, denotaremos por $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la cadena de Markov en \mathbb{Z} con probabilidades de salto $\omega(x, -1)$ y $\omega(x, 1)$, tal como se muestra en la figura 2.3.

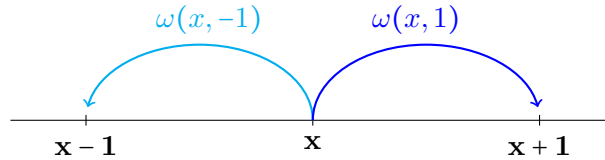


FIGURA. 2.3: Caminata Aleatoria uni-dimensional

Se sigue fácilmente que la caminata aleatoria (X_n) la podemos escribir como

$$X_n = \sum_{k=1}^n Z_k,$$

donde $(Z_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes; cada una con distribución determinada por

$$P(Z_i = 1) = \omega(0, 1), \quad P(Z_i = -1) = \omega(0, -1).$$

Con la ayuda de la *ley fuerte de los grandes números clásico*, se tiene que

$$P_0 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = \omega(0, 1) - \omega(0, -1) \right] = 1, \quad (2.43)$$

donde la expresión

$$v_\omega := \omega(0, 1) - \omega(0, -1) \quad (2.44)$$

la podemos interpretar como una *velocidad asintótica*. Si $v_\omega = 0$ todos los sitios en \mathbb{Z} son recurrentes para la caminata y se puede concluir que

$$P_0 \left[\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty \quad \text{y} \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty \right] = 1.$$

Por otro lado, si $v_\omega \neq 0$ la caminata presenta un comportamiento *transitorio*. Por ejemplo, si $v_\omega > 0$ la caminata se *escapa hacia* $+\infty$ con probabilidad 1; en detalle

$$P_0 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty \right] = 1.$$

En tanto, el comportamiento de la caminata bajo el régimen annealed es bastante diferente. Existe un *fenómeno de desaceleración* que se manifiesta en la posibilidad de que una caminata se escape $+\infty$ con una velocidad asintótica igual a cero (ver sección 2.4.2). Esto implica, en particular, que el signo de la velocidad asintótica no será el determinante para hacer el análisis ergódico correspondiente.

2.4.1 Velocidad asintótica en el caso annealed

Sea $\rho(x, \omega) := \frac{\omega(x, -1)}{\omega(x, 1)}$, con $\rho(\omega) := \rho(0, \omega)$. En el régimen annealed, Solomon (1975) hace patente que el comportamiento de la caminata no responde necesariamente a la velocidad asintótica.

Teorema 2.4.1. (Solomon (1975))

Sea $\eta := \mathbb{E}[\ln \rho(0)]$. Si **(IID)** y **(UE)** se cumplen entonces se tiene lo siguiente:

(i) Si $\eta \neq 0$ entonces X_n es transitorio bajo P_0 . Más aún,

$$\begin{aligned}\eta < 0 &\implies P_0\left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty\right] = 1. \\ \eta > 0 &\implies P_0\left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty\right] = 1.\end{aligned}$$

(ii) Si $\eta = 0$, entonces X_n es recurrente bajo P_0 . En particular,

$$P_0\left(\varliminf_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty \quad \text{y} \quad \overline{\varliminf}_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty\right) = 1.$$

Antes de iniciar con la prueba del teorema, considere el tiempo

$$T_x := \min\{n \geq 0 : X_n = x\} \tag{2.45}$$

y denote por $p_{xy} := P_{x,\omega}(1 \leq T_y < \infty)$, la probabilidad de pasar del estado x al y en tiempo finito dando al menos un paso, bajo la ley *quenched*. Iniciando la caminata en el origen, con ayuda de la propiedad Markoviana, la probabilidad de retorno se descompone de la siguiente manera

$$p_{00} = \omega(0, 1)p_{10} + \omega(0, -1)p_{-10}. \tag{2.46}$$

Si en la expresión anterior, al menos una de las probabilidades p_{10} o p_{-10} son estrictamente menores que uno, entonces $p_{00} < 1$, lo cual implica transiencia. Mientras que, si $p_{00} = 1$, se obtiene recurrencia. En esto va a consistir la demostración del teorema.

Prueba. Para determinar p_{10} y p_{-10} en la ecuación (2.46), definimos para $n \geq 1$, la probabilidad de llegar a 0 antes de llegar a x , partiendo del estado i , esto es

$$u_i \equiv u_i^{(x)} := P_{i,\omega}(T_0 < T_x), \quad 0 \leq i \leq x \tag{2.47}$$

Note que se cumplen las condiciones de continuidad por arriba y por abajo de la teoría de la medida, pues si $x > 0$, entonces, $\{T_0 < T_x\} \uparrow \{1 \leq T_0 < \infty\}$; mientras que para $x < 0$,

$$\{T_0 < T_x\} \downarrow \{1 \leq T_0 < \infty\}$$

por tanto se tiene

$$p_{10} = \lim_{x \rightarrow \infty} u_1^{(x)} \quad \text{y} \quad p_{-10} = \lim_{x \rightarrow -\infty} u_{-1}^{(x)} \quad (2.48)$$

Descomponiendo las probabilidades u_i , de forma análoga a (2.46), se tiene

$$u_i = \omega(i, 1)u_{i+1} + \omega(i, -1)u_{i-1}, \quad 0 < i < x \quad (2.49)$$

con las condiciones de frontera que

$$u_0 = 1, \quad u_x = 0 \quad (2.50)$$

Reescribiendo la ecuación (2.49) y tomando en cuenta que $\omega(i, 1) + \omega(i, -1) = 1$ se puede verificar fácilmente la siguiente expresión recurrente:

$$u_{i+1} - u_i = \rho(i, \omega) (u_i - u_{i-1}). \quad (2.51)$$

Iterando (2.51) y usando las condiciones frontera (2.50), es fácil concluir que

$$\frac{1}{1 - u_1} = \sum_{i=0}^{x-1} \prod_{j=1}^i \rho(j, \omega), \quad (2.52)$$

donde $\prod_{j=1}^0 \rho(j, \omega) := 1$. Nótese entonces que con base en (2.48) y (2.52), se concluye que $p_{10} = 1$ si y solamente si $\lim_{x \rightarrow \infty} u_1 = 1$ y esto ocurre si y solamente si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{x-1} \left(\prod_{j=1}^i \rho(j, \omega) \right) = \infty$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \exp \left(\sum_{j=1}^i \ln \rho(j, \omega) \right) = \infty. \quad (2.53)$$

Note que las variables $\ln \rho(j, \omega)$ son i.i.d, entonces por la Ley Fuerte de los Grandes Números se puede concluir que

$$\mathbb{P} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^x \ln \rho(j, \omega)}{x} = \eta \right) = 1.$$

Se concluye que $\exp \left(\sum_{j=1}^x \ln \rho(j, \omega) \right)$ se comporta como $\exp(x\eta)$ para valores grandes de x con probabilidad uno. Así para $\eta < 0$, la condición (2.53) no se cumple pues

$$\sum_{x=1}^{\infty} \exp \left(\sum_{j=1}^x \ln \rho(j, \omega) \right) \sim \sum_{x=1}^{\infty} e^{x\eta} < \infty$$

y por lo tanto $p_{10} < 1$.

Para determinar el valor de p_{-10} se procede como en (2.51) donde se obtiene para $x < 0$,

$$u_{-i-1} - u_{-i} = \rho^{-1}(-i, \omega) (u_{-i} - u_{-i+1}) \quad (2.54)$$

Iterando (2.54) y usando las condiciones frontera (2.50) se concluye que

$$\frac{1}{1 - u_{-1}} = \sum_{i=0}^{-(x+1)} \prod_{j=1}^i \rho^{-1}(-j, \omega), \quad (2.55)$$

donde $\prod_{j=1}^0 \rho^{-1}(j, \omega) := 1$. De forma similar, se obtiene que $p_{-10} = 1$ si y solamente si $\lim_{x \rightarrow -\infty} u_{-1}^{(x)} = 1$

y a su vez, esto ocurre si y solamente si $\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^i \rho^{-1}(-j, \omega) = \infty$. Ahora usando de nuevo la Ley de Grandes Números se puede inferir que

$$\mathbb{P} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sum_{j=1}^x \ln \rho^{-1}(j, \omega)}{x} = -\eta \right) = 1.$$

Seguendo una misma línea de inferencia como antes, si $\eta > 0$ se tiene que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^i \rho^{-1}(-j, \omega) < \infty$$

y con base en ello $p_{-10} < 1$. Así juntando ambos casos podemos inferir que $p_{00} < 1$ cuando $\eta \neq 0$, lo cual implica que la caminata es transitoria.

Por otro lado, si $\eta = 0$ entonces

$$\mathbb{P} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sum_{j=1}^x \ln \rho^{-1}(j, \omega)}{x} = 0 \right) = 1 \quad \wedge \quad \mathbb{P} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^x \ln \rho(j, \omega)}{x} = 0 \right) = 1. \quad (2.56)$$

Luego, se puede inferir que

$$\mathbb{P} \left(\sum_{j=1}^x \ln \rho^{-1}(j, \omega) \leq 0, \text{ i.o.} \right) = 1 \quad \wedge \quad \mathbb{P} \left(\sum_{j=1}^x \ln \rho(j, \omega) \geq 0, \text{ i.o.} \right) = 1. \quad (2.57)$$

Usando ambas igualdades de (2.57) se sigue que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \exp \left(\sum_{j=1}^i \ln \rho(j, \omega) \right) = \infty \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{\infty} \exp \left(\sum_{j=1}^i \ln \rho^{-1}(-j, \omega) \right) = \infty.$$

Con base en la divergencia de estas dos series se puede concluir que $p_{10} = 1 = p_{-10}$. Luego $p_{00} = 1$ y se sigue entonces la recurrencia de la caminata.

□

Teorema 2.4.2. (Solomon (1975)) *Asuma (EU) y (IID). Entonces se puede concluir que*

$$P_0 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = v \right) = 1,$$

donde

$$v := \begin{cases} \frac{1 - \mathbb{E}[\rho(\omega)]}{1 + \mathbb{E}[\rho(\omega)]} & \text{si } \mathbb{E}[\rho(\omega)] < 1, \\ -\frac{1 - \mathbb{E}[\rho(\omega)^{-1}]}{1 + \mathbb{E}[\rho(\omega)^{-1}]} & \text{si } \mathbb{E}[\rho(\omega)^{-1}] < 1, \\ 0 & \text{si } (\mathbb{E}[\rho(\omega)])^{-1} \leq 1 \leq \mathbb{E}[\rho(\omega)^{-1}]. \end{cases} \quad (2.58)$$

Observación 2.4.1. De esta manera se puede ver que la RWRE posee una velocidad no nula, asintótica bien definida, excepto cuando $(\mathbb{E}[\rho(\omega)])^{-1} \leq 1 \leq \mathbb{E}[\rho(\omega)^{-1}]$. Por la desigualdad de Jensen $(\mathbb{E}[\rho(\omega)])^{-1} \leq \mathbb{E}[\rho(\omega)^{-1}]$ y así los tres casos son mutuamente exclusivos y exhaustivos.

Para la demostración de este teorema se va utilizar el lema dado a continuación, que se puede justificar a partir de que el ambiente es i.i.d.

Lema 2.4.1. Para ambientes **(IID)** la secuencia de tiempos de parada $\{\nu_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ es ergódica, donde

$$\nu_i = T_i - T_{i-1}.$$

Proof. La secuencia $\{\nu_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ satisface

$$P_0 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n} = E_0[\nu_1] \right) = 1 \quad (2.59)$$

por el teorema ergódico de **Birkhoff** y el Lema 2.4.1 . Luego, P_0 -c.s

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_{T_n}}{T_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_{T_n}}{n} \cdot \frac{n}{T_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T_n} \\ &= \frac{1}{E_0[\nu_1]}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

donde en el último paso se ha usado (2.59). Para calcular $E_0[\nu_1]$, defina ν'_0 como el tiempo que tarda en pasar de -1 a 0 y ν'_1 del 0 al 1 y así podemos ver que

$$\nu_1 = \mathbf{1}_{\{X_1=1\}} + \mathbf{1}_{\{X_1=-1\}}(1 + \nu'_0 + \nu'_1). \quad (2.61)$$

A partir de esto, para cualquier $\omega \in \Omega$ se cumple que

$$\begin{aligned} E_{0,\omega}[\nu_1] &= \omega(0, 1) + \omega(0, -1)(1 + E_{0,\omega}[\nu'_0] + E_{0,\omega}[\nu'_1]) \\ &= 1 + \omega(0, -1)E_{0,\omega}[\nu'_0] + \omega(0, -1)E_{0,\omega}[\nu_1]. \end{aligned} \quad (2.62)$$

A partir de esto, se puede inferir que

$$E_{0,\omega}[\nu_1] = 1 + \rho(\omega) + \rho(\omega)E_{0,\omega}[\nu'_0]. \quad (2.63)$$

Dado que el ambiente es **(IID)**, usando (2.63) y considerando que $E_0[\nu'_0] = E_0[\nu_1]$, obtenemos que

$$E_0\nu_1 = \begin{cases} \frac{1 + \mathbb{E}\rho(\omega)}{1 - \mathbb{E}\rho(\omega)} & \text{si } \mathbb{E}\rho(\omega) < 1, \\ \infty & \text{si } \mathbb{E}\rho(\omega) \geq 1, \end{cases} \quad (2.64)$$

lo cual nos brinda la mitad del resultado en el Teorema 2.4.2.

Por otro lado, siempre con la ayuda de (2.63) se puede inferir que

$$\rho(\omega)^{-1}E_{0,\omega}[\nu_1] = \rho(\omega)^{-1} + 1 + E_{0,\omega}[\nu'_0],$$

y de esto concluir que

$$E_0[\nu_1] = -\frac{1 - \mathbb{E}[\rho(\omega)^{-1}]}{1 + \mathbb{E}[\rho(\omega)^{-1}]},$$

que es válido siempre que $\mathbb{E}[\rho(\omega)^{-1}] < 1$. En caso contrario, $E_0[\nu_1] = \infty$. □

Observación 2.4.2. Gracias a la desigualdad de Jensen, se tiene que

$$\mathbb{E}[\rho(\omega)] = \mathbb{E}[\omega(0, 1)^{-1}] - 1 \geq (\mathbb{E}[\omega(0, 1)])^{-1} - 1.$$

Luego en el caso en que $\mathbb{E}[\rho(\omega)] < 1$, v satisface

$$0 < v \leq 2\mathbb{E}[\omega(0, 1)] - 1 = \mathbb{E}[\omega(0, 1)] - \mathbb{E}[\omega(0, -1)].$$

La desigualdad es estricta si $\omega(0, 1)$ no se reduce a una constante. Al ser v menor que la esperanza del desvío de la caminata se evidencia una disminución de la velocidad.

Se puede hacer una interpretación similar en el caso en que $\mathbb{E}[\rho^{-1}(\omega)] < 1$.

2.4.2 Ejemplo de RWRE en $d = 1$.

Este ejemplo se conoce como *modelo canónico de RWRE* y muestra que la caminata aleatoria, en el caso transitorio, puede tener o no velocidad nula, lo que sólo ocurre en *ambientes aleatorios*. Este fenómeno se conoce como una “*desaceleración*”, tal como se afirmó en la observación anterior. Se asume que la variable aleatoria $\omega(x, 1)$ solo toma dos valores β y $1 - \beta$ con las siguientes habilidades:

$$\mathbb{P}[\omega(x, 1) = \beta] = \alpha, \quad \mathbb{P}[\omega(x, 1) = 1 - \beta] = 1 - \alpha \quad (2.65)$$

donde $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$.

El valor de η se calcula de forma explícita, dado por

$$\begin{aligned} \eta &= \mathbb{E} \ln \left(\frac{\omega(0, -1)}{\omega(0, 1)} \right) \\ &= \alpha \ln \left(\frac{1 - \beta}{\beta} \right) + (1 - \alpha) \ln \left(\frac{\beta}{1 - \beta} \right) \\ &= (2\alpha - 1) \ln(1 - \beta) + (1 - 2\alpha) \ln(\beta) \\ &= (2\alpha - 1) \ln \left(\frac{1 - \beta}{\beta} \right) \\ &= (2\alpha - 1) \ln \left(1 + \frac{1 - 2\beta}{\beta} \right). \end{aligned}$$

La transitoriedad de la caminata está en función de α y β pues,

$$\alpha < \frac{1}{2}, \quad \beta < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\alpha - 1 < 0 \quad \text{y} \quad \ln \left(1 + \frac{1 - 2\beta}{\beta} \right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \eta < 0$$

$$\alpha > \frac{1}{2}, \quad \beta > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\alpha - 1 > 0 \quad \text{y} \quad \ln \left(1 + \frac{1 - 2\beta}{\beta} \right) < 0 \quad \Rightarrow \quad \eta < 0$$

Para ver que este caso transitorio puede tener velocidad nula, se determinan las condiciones sobre α y β para que se cumpla $(\mathbb{E}[\rho(\omega)])^{-1} \leq 1 \leq \mathbb{E}[\rho(\omega)^{-1}]$ expresado en el Teorema 2.4.2. En la Figura 2.4 se presenta un "diagrama de fases" para este modelo, que muestra las variaciones de los parámetros. Específicamente note que

$$(E[\rho(\omega)])^{-1} = \frac{\beta(1-\beta)}{\alpha(1-\beta) + \beta(1-\alpha)} \leq 1 \iff 0 \leq (1-\beta)(\alpha-\beta) + \beta(1-\alpha)$$

$$E[\rho(\omega)^{-1}] = \frac{2\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1}{\beta(1-\beta)} \geq 1 \iff 0 \leq (1-\beta)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta\alpha$$

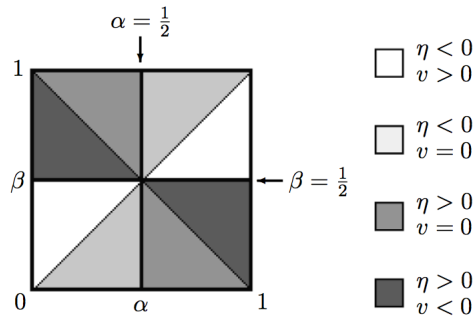


FIGURA. 2.4: Modelo Canónico

Es decir, las condiciones obtenidas son: $\alpha \geq \beta$ y $\alpha + \beta \leq 1$, o bien $\alpha \leq \beta$ y $\alpha + \beta \geq 1$. En particular, la Figura 3.3 presenta las regiones con velocidad asintótica nula y comportamiento transitorio, es decir donde se enmarca el fenómeno de desaceleración.

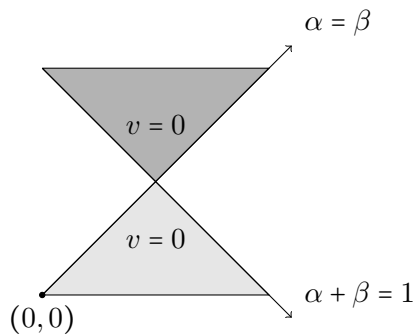


FIGURA. 2.5: Velocidad nula en caso transitorio

Capítulo 3

Ley de grandes números en general

3.1 Introducción

La ley de grandes números es uno de los resultados más importantes en teoría de probabilidad. Por lo que en el contexto de ambientes aleatorios una de las interrogantes que surgen es si este resultado se mantiene o bajo cuáles requisitos se cumple esta ley. En el caso de dimensión uno, gracias a resultados asintóticos obtenidos por Solomon en 1975, se obtuvo un resultado en el cual se especifica explícitamente el valor al cual converge la media muestral. Sin embargo, la generalización a dimensiones mayores, no fue sino hasta el 1999 cuando Sznitman mediante un proceso de renormalización obtiene la ley de grandes números.

Como primer acercamiento a la ley de grandes números sobre medios aleatorios, se detalla una versión general, que posteriormente se simplifica a $d = 1$ se detalla como Solomon obtiene una fórmula determinista del valor de convergencia. En dimensiones $d > 1$, esta ley general de grandes números, bajo ciertas condiciones, también adopta una forma para su valor de convergencia, intentando acercarse al que se tiene para el caso unidimensional.

3.2 Notaciones y resultados previos

Antes de iniciar con los resultados utilizados para mostrar la ley de grandes números, es necesario introducir una notación para ciertos tiempos y conjuntos.

- Las veces que invierte la caminata en el hiperplano a distancia m antes de llegar al hiperplano a distancia $m + L$ en dirección del vector canónico $e \in \mathbb{S}^{d-1}$:

$$\mathcal{T}_{m,L} := \{n \geq 0 : T_m \leq n < T_{m+L}, X_n \cdot e = m\}$$

Note que en $T_m \in \mathcal{T}_{m,L}$ si $\mathcal{T}_{m,L} \neq \emptyset$.

- El diámetro de $\mathcal{T}_{m,L}$ es denotado por $h_{m,L}$ y su función de distribución empírica es

$$F_{M,L}(c) := \frac{\#\{0 \leq m \leq M \mid h_{m,L} \leq c\}}{M+1} \in [0, 1], \quad (M, L \in \mathbb{N}; c \geq 0)$$

- Los instantes de la primera y r -ésima ($r \geq 2$) visita que la caminata hace a un sitio se denotan por

$$H_1(x) = \inf\{n \geq 0 : X_n = x\} \quad \text{y} \quad H_r(x) = \inf\{n \geq H_{r-1}(x) : X_n = x\}.$$

Lema 3.2.1. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$ la caminata aleatoria a sus primeros vecinos, con $X_0 = 0$. Entonces

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n \cdot e}{n} > 0 \quad \implies \quad \sup_{c \geq 0} \inf_{L \geq 1} \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} F_{M,L}(c) > 0 \quad (3.1)$$

Prueba lema (3.2.1). Existe una secuencia estrictamente creciente $(n_k)_k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que, para algún $\delta > 0$,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n \cdot e}{n} := \delta > 0 \quad \implies \quad X_{n_k} \cdot e > n_k \delta, \quad \forall k \geq 0.$$

Suponga por contradicción que

$$\sup_{c \geq 0} \inf_{L \geq 1} \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} F_{M,L}(c) = 0$$

entonces existen secuencias estrictamente creciente $(c_i)_i$ y $(L_i)_i$ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tales que

- $L_0 := 0$, $c_i = \frac{9L_i}{\delta}$ para todo i y
- recursivamente para $L_{i+1} > L_i$,

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} F_{M_k, L_{i+1}}(c_i) < \frac{1}{3} \quad (3.2)$$

donde $(M_k)_k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Por otro lado, considere el intervalo de longitud $\frac{n_k \delta}{2}$,

$$I_k = \left[\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) n_k, n_k \right].$$

Si $\alpha \in I_k$, entonces

$$X_{\lceil \alpha \rceil} \cdot e \geq X_{n_k} \cdot e - \frac{n_k \delta}{2} \geq \frac{n_k \delta}{2} \geq \frac{\alpha \delta}{2},$$

dado que X_\bullet es la caminata a los primeros vecinos. De esta manera, $T_{\frac{\alpha \delta}{2}} \leq \lceil \alpha \rceil$.

Elija M_k de tal forma que $\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) n_k \leq \frac{\delta}{2} (M_k + L) \leq n_k$. Se tiene que para k lo suficientemente grande

$$T_{M_k+L} \leq \left\lceil \frac{2}{\delta} M_k + \frac{2L}{\delta} \right\rceil \leq \frac{2}{\delta} (M_k + L) \leq \frac{3}{\delta} (M_k + 1)$$

pues L es fijo.

Además, note que

$$\# \left(\bigcup_{m=0}^{M_k} \mathcal{T}_{m,L} \right) \leq T_{M_k+L} \leq \frac{3}{\delta} (M_k + 1) \quad (3.3)$$

ya que cada elemento de la unión es estrictamente menor a T_{M_k+L} . También se tiene que

$$\sum_{m=0}^{M_k} h_{m,L} \leq \frac{3L}{\delta} (M_k + 1). \quad (3.4)$$

En efecto, como $h_{m,L} \leq T_{m+L} - T_m$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M_k} h_{m,L} &\leq \sum_{m=0}^{M_k} T_{m+L} - T_m \\ &\leq \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{m \bmod L=i}^{M_k} T_{m+L} - T_m \\ &\leq \sum_{i=0}^{L-1} T_{M_k+L} - T_i \\ &\leq LT_{M_k+L} \leq \frac{3L}{\delta} (M_k + 1) \end{aligned}$$

Ahora, para cada i , utilizando los resultados (3.2) y (3.4)

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{M_k} \mathbf{1}_{\{h_{m,L_i} \geq c_i\}} &= \sum_{m=0}^{M_k} \mathbf{1}_{\{\frac{1}{c_i} h_{m,L_i} \geq 1\}} \\
 &\leq \frac{1}{c_i} \sum_{m=0}^{M_k} h_{m,L_i} \\
 &\leq \frac{M_k + 1}{3} \\
 \sum_{m=0}^{M_k} \mathbf{1}_{\{h_{m,L_i} \geq c_i\}} &= (M_k + 1) F_{M_k, L_{i+1}} \\
 &\leq \frac{M_k + 1}{3}.
 \end{aligned}$$

Además,

$$\frac{1}{M_k + 1} \sum_{m=0}^{M_k} \mathbf{1}_{\{h_{m,L_i} \geq c_i\}} + \mathbf{1}_{\{h_{m,L_i} \geq c_i\}} + \mathbf{1}_{\{h_{m,L_i} < h_{m,L_{i+1}}\}} \geq 1$$

luego, aplicando las desigualdades anteriores se tiene

$$\frac{1}{M_k + 1} \sum_{m=0}^{M_k} \mathbf{1}_{\{h_{m,L_i} < h_{m,L_{i+1}}\}} \geq \frac{1}{3} \tag{3.5}$$

Por otro lado, sea $i_0 := \left\lceil \frac{12}{\delta} \right\rceil$. Note que si $h_{m,L_i} < h_{m,L_{i+1}}$ entonces $\#\mathcal{T}_{m,L_i} < \#\mathcal{T}_{m,L_{i+1}}$, por tanto

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{\delta} &\leq \frac{i_0}{3} \\
 &\leq \sum_{i=0}^{i_0-1} \frac{1}{M_k + 1} \sum_{m=0}^{M_k} \mathbf{1}_{\{h_{m,L_i} < h_{m,L_{i+1}}\}} \\
 &\leq \frac{1}{M_k + 1} \sum_{m=0}^{M_k} \sum_{i=0}^{i_0-1} \#\mathcal{T}_{m,L_{i+1}} - \#\mathcal{T}_{m,L_i} \\
 &= \frac{1}{M_k + 1} \sum_{m=0}^{M_k} \#\mathcal{T}_{m,L_{i_0}} \\
 &\leq \frac{3}{\delta}
 \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. □

Teorema 3.2.1. *Asuma (UE) y sea e un vector canónico tal que $P_0(A_e \cup A_{-e}) = 0$, entonces*

$$P_0\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n \cdot e}{n} = 0\right) = 1 \quad (3.6)$$

Prueba. Basta con probar que el límite existe, ya que si $P_0(A_e \cup A_{-e}) = 0$, entonces por definición

$$P_0\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \cdot \pm e = \pm \infty\right) = 0$$

lo que concluye el resultado (3.6). Para ello, suponga sin pérdida de generalidad que

$$P_0\left[\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n \cdot e}{n} > 0\right] > 0 \quad (3.7)$$

Por el lema anterior, se sigue de (3.7)

$$P_0\left(\sup_{c \geq 0} \inf_{L \geq 1} \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} F_{M,L}(c) > 0\right) > 0$$

Aplicando el teorema de convergencia monótona a $\overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} F_{M,L}(c)$ la cual es medible, creciente en c y decreciente en L , para un valor c finito y fijo, lo anterior implica que

$$P_0\left[\lim_{L \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} F_{M,L}(c) > 0\right] > 0. \quad (3.8)$$

Ahora considere el último punto que la caminata visita al hiperplano a distancia m antes de que alcance el que se encuentra a distancia $m + L$. Sobre el evento $\{h_{m,L} \leq c\}$, este punto se encuentra a distancia (con $|\cdot|_1$) c de X_{T_m} y ha sido visitado a lo sumo c veces antes de T_{m+L} , es decir, que sobre el evento $\{h_{m,L} \leq c\}$ existe $z \in \mathbb{Z}^d$ tal que

$$|z|_1 \leq c, \quad z \perp e \quad \text{y} \quad r \in \mathbb{N},$$

con $1 \leq r \leq c$. Ahora considere

$$D^* := \inf\{n \geq 1 \mid X_n \cdot e \leq X_0 \cdot e\}.$$

Entonces, el evento indicando que la última visita de la caminata al hiperplano a distancia m antes de T_{m+L} es también la r -ésima visita al punto $X_{T_m} + z$ es

$$B_{m,L}^1(z,r) := \{H_r(X_{T_m} + z) < T_{m+L}, D^* \circ \theta_{H_r(X_{T_m} + z)} + H_r(X_{T_m} + z) \geq T_{m+L}\}.$$

Consecuentemente, si $z \cdot l = 0$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} F_{M,L}(c) \leq \sum_{|z| \leq c} \sum_{r=1}^c \overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M+1} \sum_{m=0}^M \mathbf{1}_{B_{m,L}^1(z,r)}. \quad (3.9)$$

Como solo hay una cantidad finita de z y r se sigue de (3.8) que para alguno de ellos

$$P_0 \left[\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M+1} \sum_{m=0}^M \mathbf{1}_{B_{m,L}^1(z,r)} > 0 \right] > 0 \quad (3.10)$$

Para un par (z,r) que satisface (3.10) y para L fijo, la secuencia $(\mathbf{1}_{B_{m,L}^1(z,r)})_m$ no es independiente bajo la ley annealed, P_0 . Sin embargo, es posible dominar esta secuencia por una auxiliar que sea i.i.d. Llegado a este punto, para un ambiente dado $\omega \in \Omega$ y un punto $y \in \mathbb{Z}^d$ de partida considere la caminata aleatoria $(Y_n^y)_n$ independiente de $(X_n)_n$, cuya ley es

$$\tilde{P}_{0,\omega} := P_{0,\omega} \otimes \bigotimes_{y \in \mathbb{Z}^d} P_{y,\omega} \quad \text{sobre} \quad (\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}} \times ((\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}})^{\mathbb{Z}^d} \quad (3.11)$$

dotado de su σ -álgebra canónica. Para la construcción de la nueva caminata $(Y_n^y)_n$ considere las proyecciones de las realizaciones de $(X_n)_n$. Nuevamente, $\tilde{P}_0 := \mathbb{E} \times \tilde{P}_{0,\omega}$. Ahora defina

$$\begin{aligned} B_{m,L}^2 &:= \left\{ \sigma_m \geq T_{m+L}, D^* \left(Y_{\cdot}^{X_{T_m} + z} \right) \geq T_{m+L} \left(Y_{\cdot}^{X_{T_m} + z} \right) \right\} \\ B_{m,L} &:= B_{m,L}^1 \cup B_{m,L}^2, \end{aligned}$$

ver la imagen figura 3.1.

Si se interpreta $B_{m,L}^1$ y $B_{m,L}^2$ como un evento en el gran espacio muestral (3.11), se tiene que $B_{m,L}^1 \subseteq B_{m,L}$ y por (3.10)

$$\begin{aligned} 0 &< \tilde{P}_0 \left[\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M+1} \sum_{m=0}^M \mathbf{1}_{B_{m,L}} > 0 \right] \\ &< \tilde{P}_0 \left[\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} \frac{L}{M+1} \sum_{m=0; m \bmod L = i}^M \mathbf{1}_{B_{m,L}} > 0 \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

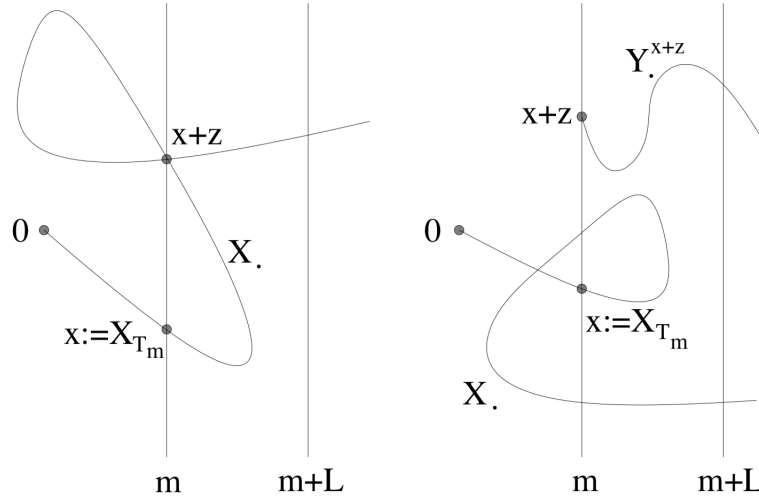


FIGURA. 3.1: En la imagen de la izquierda es la última visita en el hiperplano a distancia m antes de llegar al hiperplano a distancia $m + L$, esto es cuando ocurre $B_{m,L}^1(z, r = 2)$. La figura de la derecha: El hiperplano a distancia $m + L$ se alcanza antes de visitar a $x + z$ dos veces, por tanto $B_{m,L}^1(z, r = 2)$ no ocurre. Sin embargo, la caminata auxiliar Y^{x+z} hace que $B_{m,L}^2$ ocurra, entrando al hiperplano a distancia $m + L$ antes de visitar el que se encuentra a distancia m por segunda vez.

Se debe mostrar al final de la prueba que para cualquier $0 \leq i < L$, los eventos

$$B_{m,L}(m \bmod L = i) \text{ son independientes bajo } \tilde{P}_0 \text{ con} \tag{3.13}$$

$$\tilde{P}_0[B_{m,L}] = P_0[D^* \geq T_L]$$

Asumiendo esto, tenemos de la ley fuerte de los grandes números y (3.12) que

$$0 < \overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} P_0[D^* \geq T_L] \leq \overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} P_0[D^* \geq L] = P_0[D^* = \infty] \leq P_0[A_l]$$

lo cual es contradictorio con la hipótesis $P_0[A_l \cup A_{-l}]$. Esto significa que es P_0 imposible que la caminata visite $\{y \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq y \cdot e \leq u\}$ ($u \geq 0$) infinitas veces sin dejar el semiespacio $\{y \mid y \cdot e < 0\}$. Por tanto, (3.7) es falso. Repitiendo lo anterior para $-l$ se prueba (3.6).

Para concluir la prueba, basta justificar (3.13). Sea $k \geq 0$ y $0 \leq m_0 < \dots < m_k$ con $m_j \bmod L = i$ para todo $j = 0, \dots, k$. Como $P_0[A_l] = 0$ entonces se sigue que T_{m_k} es P_0 - casi siempre finito por que de lo contrario la caminata visitaría la banda de ancho finito infinitas veces sin dejar

el semiespacio a la derecha de la banda. Por tanto, como $B_{m,L}^1 \cap B_{m,L}^2 = \emptyset$, entonces

$$\begin{aligned} & \tilde{P}[B_{m_0,L} \cap \dots \cap B_{m_k,L}] \\ &= \sum_{x: x \cdot e = m_k} \mathbb{E}[\tilde{P}_{0,\omega}[B_{m_0,L} \cap \dots \cap B_{m_k,L} \cap B_{m_k,L}^1, X_{T_{m_k}} = x]] \\ &+ \tilde{P}_{0,\omega}[B_{m_0,L} \cap \dots \cap B_{m_k,L} \cap B_{m_k,L}^2, X_{T_{m_k}} = x]] \\ &= \sum_{x: x \cdot e = m_k} \mathbb{E}[\tilde{P}_{0,\omega}[B_{m_0,L} \cap \dots \cap B_{m_k,L} \cap B_{m_k,L}^1, X_{T_{m_k}} = x, \sigma_{m_k} < T_{m_k+L}] \times P_{x+z,\omega}[D^* \geq T_{m_k+L}]] \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$+ \tilde{P}_{0,\omega}[B_{m_0,L} \cap \dots \cap B_{m_{k-1},L}, X_{T_{m_k}} = x, \sigma_{m_k} \geq T_{m_k+L}] \times \tilde{P}_{0,\omega}[D^*(Y_{\cdot}^{x+z}) \geq T_{m_k+L}(Y_{\cdot}^{x+z})]. \quad (3.15)$$

En la identidad (3.14) se ha utilizado la propiedad fuerte de Markov con respecto a σ_{m_k} y en (3.14) y (3.15) el hecho que $\tilde{P}_{0,\omega}$ es una medida producto. Sin embargo,

$$P_{x+z,\omega}[D^* \geq T_{m_k+L}] = \tilde{P}_{0,\omega}[D^*(Y_{\cdot}^{x+z}) \geq T_{m_k+L}(Y_{\cdot}^{x+z})].$$

Consecuentemente, la suma completa (3.14) y (3.15) puede reescribirse como

$$\sum_x \mathbb{E}[\tilde{P}_{0,\omega}[B_{m_0,L} \cap \dots \cap B_{m_{k-1},L}, X_{T_{m_k}} = x] P_{x+z}[D^* \geq T_{m_k+L}]]. \quad (3.16)$$

El hecho de introducir la caminata Y_{\cdot}^y se debe a que es necesario deshacerse del evento $\{\sigma_{m_k} < T_{m_k+L}\}$, la cual mezcla en ambiente a la izquierda de m_k con el ambiente de la banda a longitud L de m_k . Ahora el término en (3.16) de $\tilde{P}_{0,\omega}$ es $\sigma(\omega(y, \cdot) | y \cdot l < m_k)$ -medible ya que $m_j + L \leq m_k$ para todo $j < k$ mientras que el término en $P_{x+z,\omega}$ es $\sigma(\omega(y, \cdot) | y \cdot e \geq m_k)$ -medible. Entonces, por independencia e invarianza de traslaciones (3.16) es igual a

$$\begin{aligned} & \sum_x \tilde{P}_0[B_{m_0,L} \cap \dots \cap B_{m_{k-1},L}, X_{T_{m_k}} = x] P_{x+z}[D^* \geq T_{m_k+L}] \\ &= \tilde{P}_0[B_{m_0,L} \cap \dots \cap B_{m_{k-1},L}] P_0[D^* \geq T_L]. \end{aligned}$$

El resultado (3.13) sigue por inducción sobre k . □

El resultado del teorema 3.2.2 es necesario en la prueba de ley de grandes números direccional, la cual dio paso a la demostración del teorema de la ley General de Grandes Números, así como el lema 3.2.2.

Lema 3.2.2. *Asuma que el ambiente es (IID) y (E). Entonces para $l \in \mathbb{S}^{d-1}$, se cumple*

$$E_0[X_{\tau_1} \cdot l \mid D = \infty] = \frac{1}{P_0[D = \infty]} < \infty \quad (3.17)$$

Prueba. Considere la dirección canónica $l = e_1$. Entonces,

$$\begin{aligned} P_0(\{\exists k : X_{\tau_k} \cdot l = i\} \mid A_l) &= \frac{\sum_{y \in \mathbb{Z}^{d-1}} \mathbb{E}(P_{0,\omega}(\{\exists k : X_{\tau_k} = (i, y)\}, A_l))}{P_0(A_l)} \\ &= \frac{\sum_{y \in \mathbb{Z}^{d-1}} \mathbb{E}(P_{0,\omega}(T_i < \infty, X_{T_i} = (i, y), D \circ \theta_{T_i} = \infty))}{P_0(A_l)} \\ &= \frac{\sum_{y \in \mathbb{Z}^{d-1}} \mathbb{E}(P_{0,\omega}(T_i < \infty, X_{T_i} = (i, y)) P_{(i,y),\omega}(D = \infty))}{P_0(A_l)} \\ &= \frac{P_0(D = \infty) P_0(T_i < \infty)}{P_0(A_l)} \end{aligned}$$

Como $P_0(A_l \cup A_{-l}) = 1$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} P_0(\{T_i < \infty\} \cap A_{-l}) = 0$, entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{P_0(D = \infty) P_0(T_i < \infty)}{P_0(A_l)} = P_0(D = \infty). \quad (3.18)$$

Por otro lado, dado que $\lim_{i \rightarrow \infty} P_0(\tau_k > i \mid A_l) = 0$, entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P_0(\{\exists k : X_{\tau_k} \cdot l = i\} \mid A_l) = \lim_{i \rightarrow \infty} P_0(\{\exists k \geq 2 : X_{\tau_k} \cdot l = i\} \mid A_l)$$

entonces

$$\begin{aligned} P_0(\{\exists k \geq 2 : X_{\tau_k} \cdot l = i\} \mid A_l) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_0(\{\exists k \geq 2 : X_{\tau_k} \cdot l = i, X_{\tau_1} \cdot l = n\} \mid A_l) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_0(\{\exists k \geq 2 : (X_{\tau_k} - X_{\tau_1}) \cdot l = i - n, X_{\tau_1} \cdot l = n\} \mid A_l) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_0(\{\exists k \geq 2 : (X_{\tau_k} - X_{\tau_1}) \cdot l = i - n \mid A_l\}) P_0(X_{\tau_1} \cdot l = n \mid A_l) \end{aligned}$$

Por la estructura de renovación, se obtiene

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P_0 \left(\{ \exists k \geq 2 : (X_{\tau_k} - X_{\tau_1}) \cdot l = i - n \mid A_l \} \right) = \frac{1}{E_0 \left((X_{\tau_2} - X_{\tau_1}) \cdot l \mid A_l \right)}$$

y por tanto, el teorema de convergencia dominada permite

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P_0 \left(\{ \exists k \geq 2 : X_{\tau_k} \cdot l = i \} \mid A_l \right) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P_0(X_{\tau_1} \cdot l = n \mid A_l)}{E_0 \left((X_{\tau_2} - X_{\tau_1}) \cdot l \mid A_l \right)} = \frac{1}{E_0 \left((X_{\tau_2} - X_{\tau_1}) \cdot l \mid A_l \right)} \quad (3.19)$$

Comparando los resultados (3.18) con (3.19), se concluye que

$$E_0 \left((X_{\tau_2} - X_{\tau_1}) \cdot l \mid A_l \right) = \frac{1}{P_0(D = \infty)} < \infty$$

□

Teorema 3.2.2 (Ley de grandes números direccional). Sea $l \in \mathbb{S}^{d-1}$. Existen valores determinadas $v_l, v_{-l} \in [0, 1]$ tales que

$$P_0 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n \cdot l}{n} = v_l \mathbf{1}_{A_l} + v_{-l} \mathbf{1}_{A_{-l}} \right) = 1 \quad (3.20)$$

Zerner en el 2002 muestra este teorema, como una versión mejorada de la que realizó Ofer Zeitouni en el año 2001. En la que originalmente se utilizaba la hipótesis de un ambiente (UE), sin embargo Zerner se percató que en la demostración no es necesario tal supuesto.

Por otro lado, como $P_0(A_l \cup A_{-l}) \in \{0, 1\}$, si $P_0(A_l \cup A_{-l}) = 0$, entonces

$$v_l \mathbf{1}_{A_l} + v_{-l} \mathbf{1}_{A_{-l}} = 0$$

Así, el teorema 3.2.2 se reduce al teorema 3.2.1, por lo que basta con analizar qué sucede si $P_0(A_l \cup A_{-l}) = 1$.

Prueba de 3.2.2. Por simplicidad considere el vector $l = e_1$. Sin pérdida de generalidad, asuma que $P_0(A_l) > 0$.

Note que si $\tau_0 := 0$, entonces

$$\tau_k = \sum_{i=0}^{k-1} (\tau_{i+1} - \tau_i).$$

Aplicando la ley de grandes números estándar, el resultado 2.3.1 reemplazando P_0 por $P_0[\cdot | A_l]$ (el cual sigue siendo válido de acuerdo a **ZernerLLN**), se tiene que

$$P_0 \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tau_k}{k} = E_0(\tau_1 | \{D = \infty\}) \mid A_l \right] = 1$$

y

$$P_0 \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{X_{\tau_k} \cdot l}{k} = E_0(X_{\tau_1} \cdot l | \{D = \infty\}) \mid A_l \right] = 1$$

De lo cual se concluye que,

$$P_0 \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{X_{\tau_k} \cdot l}{k} = \frac{E_0(X_{\tau_1} \cdot l | \{D = \infty\})}{E_0(\tau_1 | \{D = \infty\})} =: v_l \mid A_l \right) = 1 \quad (3.21)$$

Usando el hecho que τ_k y $X_{\tau_k} \cdot l$ son crecientes en k , uno obtiene por intercalación

$$\frac{X_{\tau_k} \cdot l}{\tau_{k+1}} \leq \frac{X_n \cdot l}{n} \leq \frac{X_{\tau_{k+1}} \cdot l}{\tau_k}$$

para $\tau_k \leq n < \tau_{k+1}$. Combinando este resultado con (3.21) se infiere que

$$P_0 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n \cdot l}{n} = v_l \mid A_l \right) = 1$$

Finalmente, intercambiando l por $-l$ en lo anterior se obtiene el resultado deseado. \square

Ahora estamos listos para enunciar y mostrar la prueba realizada por Sznitman.

Teorema 3.2.3. *Asuma (IID) y (EU). Entonces para dimensiones $d \geq 2$, existe una dirección $\nu \in \mathbb{S}^{d-1}$ y $\nu_1, \nu_2 \in [0, 1]$ (deterministas) tales que*

$$P_0 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = \nu_1 \nu \mathbf{1}_{A_\nu} - \nu_2 \nu \mathbf{1}_{A_{-\nu}} \right) = 1 \quad (3.22)$$

Prueba. Por la ley de grandes números direccional (3.2.2) aplicada a una base de \mathbb{R}^d , se obtiene que

$$P_0 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = v \right) = 1 \quad (3.23)$$

donde v es un vector aleatorio que toma 2^d posibles valores con probabilidad P_0 . De hecho, v toma a lo sumo dos valores paralelos y opuesto. En efecto, asuma que existen dos vectores v_1, v_2 no colineales, no nulos con $P_0[v = v_i], i = 1, 2$. Defina $e_i = \frac{v_i}{|v_i|}$, para $i = 1, 2$ y

$$l_\alpha := \alpha e_1 + (1 - \alpha)e_2, \quad \text{para } \alpha \in (0, 1)$$

Utilizando el teorema de la ley de grandes números general direccional y $P_0\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = v\right) = 1$ se tiene que

$$P_0(v \cdot l_\alpha = v_{l_\alpha} \mathbf{1}_{A_{l_\alpha}} - v_{-l_\alpha} \mathbf{1}_{A_{-l_\alpha}}) = 1, \quad \text{para } \alpha \in (0, 1)$$

Por tanto, si para algún $\alpha \in (0, 1)$, $l_\alpha \cdot v_i > 0$ para $i = 1, 2$, entonces como $P_0[v = v_i] > 0$ se obtiene que

$$l_\alpha \cdot v_1 = l_\alpha \cdot v_2 \tag{3.24}$$

Si α se toma de un intervalo abierto no vacío se tiene que $l_\alpha \cdot v_i > 0, i = 1, 2$. En efecto,

$$\begin{aligned} l_\alpha \cdot v_1 > 0 &\iff l_\alpha \cdot e_1 > 0 &\iff \alpha > \frac{-e_1 \cdot e_2}{1 - e_1 \cdot e_2} \\ l_\alpha \cdot v_2 > 0 &\iff l_\alpha \cdot e_2 > 0 &\iff \alpha < \frac{1}{1 - e_1 \cdot e_2} \end{aligned}$$

Ambas cotas, definen un intervalo abierto no vacío de tal modo que $|e_1 \cdot e_2| < 1$. Ahora, si se deriva, respecto a α , en (3.24) se llega a

$$\begin{aligned} 0 &= (e_1 - e_2)(v_1 - v_2) \\ &= (e_1 - e_2)(|v_1|e_1 - |v_2|e_2) \\ &= (1 - e_1 e_2)(|v_1| + |v_2|) \end{aligned}$$

Por hipótesis, $|e_1 \cdot e_2| < 1$, lo que es una contradicción.

Como resultado, existe un $l_* \in \mathbb{S}^{d-1}$ tal que $P_0[v \in_* \mathbb{R}] = 1$. Por tanto, la aplicación de la ley de grandes números direccional con l_* junto con (3.23) completa la prueba. \square

Con en el fin de encontrar de forma explícita el valor de v_i , para $i = 1, 2$, Berger descubre, en 2008, que al menos uno de esos valores se anula para dimensiones $d \geq 5$.

3.3 LGN para $d > 1$.

En dimensión $d > 1$ no se ha establecido una Ley de Grandes Números con una velocidad descrita en una forma explícita. En esta sección, se mostrará que

$$P_0\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = v\right) = 1,$$

donde v es determinista y está descrita a partir de un cierto tiempo de regeneración, que se definirá a partir de una cierta estructura formada por tiempos de parada convenientes. Además se asumirá algún criterio de balisticidad direccional.

3.3.1 La ley de grandes números para $d \geq 1$

El principal objetivo de la sección es presentar que bajo la condición de Kalikow (2.6), se tiene una ley fuerte de los grandes números para (X_n) bajo P_0 .

Proposición 3.3.1. *Asuma que se cumple transciencia para algún $l \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ y que*

$$E_0[\tau_1 | D = \infty] < \infty, \tag{3.25}$$

entonces se cumple

$$E_0[|X_{\tau_1}| | D = \infty] < \infty, \tag{3.26}$$

$$P_0\left(\frac{X_n}{n} \rightarrow v = \frac{E_0[X_{\tau_1} | D = \infty]}{E_0[\tau_1 | D = \infty]}\right) = 1 \tag{3.27}$$

y

$$v \cdot l > 0 \tag{3.28}$$

Prueba. Como $|X_{\tau_1}| < \infty$, P_0 -c.s. Note que (3.26) sigue de (3.25), por lo que basta probar (3.27). Como consecuencia del resultado (2.3.2) y la ley fuerte de los grandes números con

$$\sum_{i=0}^{k-1} \tau_{i+1} - \tau_i = \tau_k \text{ se tiene}$$

$$P_0 - c.s., \quad \frac{\tau_k}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} E[\tau_1 | D = \infty], \quad \frac{X_{\tau_k}}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} E_0[X_{\tau_1} | D = \infty], \quad (3.29)$$

Permítanos ahora definir una secuencia no decreciente $k_n, n \geq 0$, P_0 -c.s, tendiendo a $+\infty$ tal que

$$\tau_{k_n} \leq n < \tau_{k_{n+1}} \quad (\text{con la convención que } \tau_0 = 0) \quad (3.30)$$

Dividiendo las desigualdades anteriores por k_n y usando (3.29), encontramos que

$$P_0 - c.s., \quad \frac{k_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{E_0[\tau_1 | D = \infty]}. \quad (3.31)$$

Como resultado se tiene

$$\frac{X_n}{n} = \frac{X_{\tau_{k_n}}}{n} + \frac{X_n - X_{\tau_{k_n}}}{n}, \quad (3.32)$$

donde en vista de (3.29) y (3.31),

$$\frac{X_{\tau_{k_n}}}{n} = \frac{X_{\tau_{k_n}}}{k_n} \frac{k_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{E_0[X_{\tau_1} | D = \infty]}{E_0[\tau_1 | D = \infty]}, \quad P_0 - c.s.$$

y por (3.29), P_0 -c.s.,

$$\frac{|X_n - X_{\tau_{k_n}}|}{n} \leq \frac{\tau_{k_{n+1}} - \tau_{k_n}}{n} = \frac{\tau_{k_{n+1}}}{k_{n+1}} \cdot \frac{k_{n+1}}{n} - \frac{\tau_{k_n}}{k_n} \cdot \frac{k_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

regresando a (3.32), esto prueba (?). Para (?), es suficiente observa que $E_0[X_{\tau_1} | D = \infty] > 0$, por construcción. \square

Capítulo 4

Balisticidad

La clave en la demostración de la ley de grandes números para $d > 1$ es (3.25), por esta razón Sznitman introduce las condiciones de balisticidad. La idea es extender ese punto, lo cual se hace mediante la introducción de varias condiciones: (T) , (T') y $(T)_\gamma$, para $\gamma \in (0, 1)$, las cuales se definen con respecto a una dirección fija $l \in \mathbb{S}^{d-1}$. Se espera que éstas condiciones sean equivalentes entre sí.

Antes de iniciar con las definiciones correspondientes de las condiciones de balisticidad así como ciertos resultados que a partir de estos se obtienen, es necesario definir las herramientas de trabajo.

Definición 4.0.1. • *Franja:* $U_{\beta,L} = \{x \in \mathbb{Z} : x \cdot \in (-L^\beta, L)\}$, para $\beta \in (0, 1]$ y $L > 0$.

• *Enrejado:* $\mathcal{L}_{\beta,L} = L\mathbb{Z} \times (2d+1)L^\beta\mathbb{Z}^{d-1}$.

• *Bloques:* Sea $\omega \in \mathbb{R}^d$ y \hat{R} una rotación tal que $\hat{R}(e_1) = \hat{v}$, entonces

$$\begin{aligned} B_{1,\beta,L}(\omega) &= \hat{R}(\omega + [0, L] \times [0, L^\beta]) \cap \mathbb{Z}^d \\ B_{2,\beta,L}(\omega) &= \hat{R}(\omega + (-dL^\beta, L] \times (-dL^\beta, (d+1)L^\beta)) \cap \mathbb{Z}^d \\ \partial_+ B_{2,\beta,L}(\omega) &= \partial B_{2,\beta,L}(\omega) \cap B_{1,\beta,L}(\omega + Le_1) \end{aligned}$$

• *Variable aleatoria*

$$X_{\beta,L}(\omega) = -\log \inf_{x \in B_{1,\beta,L}(\omega)} P_{x,\omega} \left[X_{T_{B_{2,\beta,L}(\omega)}} \in \partial_+ B_{2,\beta,L}(\omega) \right] \quad (4.1)$$

4.1 Condiciones (T) , (T') y $(T)_\gamma$ relativo a l .

Usando técnicas como en la estructura de renovación, es posible mostrar que la condición de balisticidad es equivalente a la ley de grandes números. En dimensión $d = 1$ se sabe que la transitoriedad no necesariamente implica balisticidad. En dimensiones $d \geq 2$ se mantiene como un problema abierto.

Conjetura 4.1.1. *Sea $d \geq 2$, asuma (IID) y (EU). Entonces si la RWRE es transitoria con respecto a todas las direcciones en un conjunto abierto de \mathbb{S}^{d-1} es necesariamente balística.*

Definición 4.1.1. (*Condición $(T)_\gamma|l$*) *Sea $\gamma \in (0, 1]$ y $l \in \mathbb{S}^{d-1}$. Decimos que se cumple la condición $(T)_\gamma$ relativo a l si para cada l' en un vecindario de l*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} L^{-\gamma} \log P_0(H_L^{l'} > H_{bL}^{-l'}) < 0$$

para todo $b > 0$. Se denota por

$$(T)_\gamma|l$$

Definición 4.1.2. (*Condición $(T')|l$*) *Si la condición $(T)_\gamma|l$ se cumple para todo $\gamma \in (0, 1)$, decimos que T' se satisface relativo a l y se denota por*

$$(T')|l$$

y cuando $\gamma = 1$, decimos que se cumple la condición (T) relativo a l (denotada por $(T)|l$)

Conjetura 4.1.2. *Sea $d \geq 2$. Para cada $\gamma \in (0, 1)$ y $l \in \mathbb{S}^{d-1}$, $(T)_\gamma|l$ es equivalente a $(T')|l$*

4.2 Caracterización de las condiciones de Balisticidad

Una forma alternativa de definir la condición de balisticidad $(T)_\gamma$ con respecto a una dirección $l \in \mathbb{S}^{d-1}$, es mediante el cumplimiento de las siguientes dos condiciones

- (i) Transitoriedad en dirección l ,
- (ii) Para algún $c > 0$, la función generadora de momentos $M_{X_{\tau_1}^*}(c) < \infty$, donde la variable $X_n^* = \sup_{0 \leq k \leq n} |X_k|$ y τ_1 es el primer tiempo de regeneración para algún $a > 0$.

Definición 4.2.1. Considere los vectores unitarios $(l_i)_{i=0}^N$, $(a_i)_{j=1}^N$ y $(b_i)_{j=0}^N$ constantes positivas que cumplen

- (i) $\langle l_0, \dots, l_N \rangle = \mathbb{R}^d$
- (ii) $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^d : (x \cdot l_0, \dots, x \cdot l_N) \in [-b_0, 1] \times \dots \times [-b_N, \infty)\}$, de modo que $\mathcal{D} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : (x \cdot l_0, \dots, x \cdot l_N) \in \mathbb{R} \times \dots \times (-\infty, a_N)\}$
- (iii) $\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} L^{-\gamma} \log P_0 \left[T_{-b_i L}^{l_i} < H_{a_i L}^{l_i} \right] < 0$, para $i = 0, 1, \dots, N$

entonces decimos que existe una l_0 -caja de referencia de orden $\gamma \in (0, 1]$.

Teorema 4.2.1 ($d \geq 1$). Para un ambiente (UE), $\gamma \in (0, 1]$, $l_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ y $a > 0$, las siguientes son equivalentes

- (i) Existe una l_0 -caja de referencia de orden γ .
- (ii) $\exists \Delta_L \subseteq \mathbb{Z}^d$ finito, tal que
 - (a) $0 \in \Delta_L \subseteq \{x \in \mathbb{Z}^d : x \cdot l_0 \geq -bL\} \cap [-rL, rL]^{d-1}$
 - (b) $\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} L^{-\gamma} \log P_0[X_{T_{\Delta_L}} \notin \partial_+ \Delta_L] < 0$

para algún $b, r > 0$.

- (iii) $(T_\gamma)|_{l_0, a}$ se cumple.

Prueba. • (i) \Rightarrow (ii). Para los vectores $l_i \in \mathbb{S}^{d-1}$ con $i = 0, \dots, N$, de la l_0 -caja de referencia, defina

$$\Delta_L := L\mathcal{D} \cap \mathbb{Z}^d \subseteq \{x \in \mathbb{Z}^d : x \cdot l_i < a_i L, i = 1, \dots, N\}, \quad (4.2)$$

Note en particular que $0 \in \Delta_L$ y que es un conjunto finito. Además, $\Delta_L \subseteq \{x \in \mathbb{Z}^d : x \cdot l_0 \geq -b_0 L\} \cap [-rL, rL]^{d-1}$, para algún $r > 0$ y $L > 1$.

Para mostrar la segunda condición sobre Δ_L , note que

$$\mathcal{D} \subset \bigcap_{i \geq 1} \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot l_i \leq a_i - \delta\} \quad (4.3)$$

para algún $\delta > 0$ y defina

$$T = \min_{i \in [0, N]} T_{-b_i L}^{l_i}. \quad (4.4)$$

Como el conjunto \mathcal{D} es cerrado por su construcción, entonces se tiene que

$$P_0(T \wedge H_L^{l_0} \leq T_{\Delta_L} < \infty) = 1$$

Por otro lado,

$$P_0[T \leq H_L^{l_0}] \leq \sum_{i=1}^N P_0 \left[T_{-b_i L}^{l_i} < H_{(a_i - \delta)L+1}^{l_i} \right] + P_0[T_{-b_0 L}^{l_0} < H_L^{l_0}]$$

por la tercera condición de la l_0 -caja de referencia y la desigualdad anterior se tiene que

$$\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} L^{-\gamma} \log P_0[T \leq H_L^{l_0}] < 0$$

Finalmente, dado que $T_{\Delta_L} = T \wedge H_L^{l_0}$, entonces $\{X_{T_{\Delta_L}} \notin \partial_+ \Delta_L\} \subseteq \{T \leq H_L^{l_0}\}$, de este modo se concluye que

$$\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} L^{-\gamma} \log P_0[X_{T_{\Delta_L}} \notin \partial_+ \Delta_L] \leq \overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} L^{-\gamma} \log P_0[T \leq H_L^{l_0}] < 0.$$

- (ii) \Rightarrow (iii). Sin pérdida de generalidad asuma que el conjunto finito $\Delta_L \subset \{x \cdot l_0 < L\}$. Para obtener la transitoriedad en dirección l_0 , defina la secuencia creciente $(L_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}$ de umbrales que tiende al infinito por

$$L_{k+1} := \left\lceil \left(1 + \frac{1}{3b}\right) L_k \right\rceil \quad k \geq 0$$

tal que $L_0 := L$. En particular para L , se tiene que

Note que la secuencia (L_k) satisface

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} L_k^{-\gamma} \log P_0 \left[T_{\frac{L_k}{2}} \circ \theta_{H_{L_k}^{l_0}} < H_{L_{k+1}} \circ \theta_{H_{L_k}^{l_0}} \right] < 0 \quad (4.5)$$

En efecto, note que para $k \geq 1$ y L grande

$$\begin{aligned} & P_0 \left[T_{\frac{L_k}{2}}^{l_0} \circ \theta_{H_L^{l_0}} < H_{L_{k+1}}^{l_0} \circ \theta_{H_{L_k}^{l_0}} \right] \\ & \leq P_0 \left[X_{T_{\Delta_{L_k}}} \notin \partial_+ \Delta_{L_k} \right] + P_0 \left[X_{T_{\Delta_{L_k}}} \in \partial_+ \Delta_{L_k}, T_{\frac{L_k}{2}}^{l_0} \circ \theta_{H_{L_k}^{l_0}} < H_{L_{k+1}}^{l_0} \circ \theta_{H_{L_k}^{l_0}} \right] \\ & = P_0 \left[X_{T_{\Delta_{L_k}}} \notin \partial_+ \Delta_{L_k} \right] + P_0 \left[T_{\Delta_{L_k}} = H_{L_k}^{l_0}, T_{\frac{L_k}{2}}^{l_0} \circ \theta_{H_L^{l_0}} < H_{L_{k+1}}^{l_0} \circ \theta_{H_{L_k}^{l_0}} \right] \end{aligned}$$

utilizando la propiedad fuerte de Markov y la invarianza bajo traslaciones

$$\begin{aligned} & P_0 \left[X_{T_{\Delta_{L_k}}} \notin \partial_+ \Delta_{L_k} \right] + P_0 \left[T_{\Delta_{L_k}} = H_{L_k}^{l_0}, T_{\frac{L_k}{2}}^{l_0} \circ \theta_{H_{L_k}^{l_0}} < H_{L_{k+1}}^{l_0} \circ \theta_{H_{L_k}^{l_0}} \right] \\ & \leq P_0 \left[X_{T_{\Delta_{L_k}}} \notin \partial_+ \Delta_{L_k} \right] + |\partial_+ \Delta_{L_k}| P_0 \left[T_{-\frac{L_k}{2}}^{l_0} < H_{\frac{L_k}{3b}}^{l_0} \right] \\ & \leq P_0 \left[X_{T_{\Delta_{L_k}}} \notin \partial_+ \Delta_{L_k} \right] + |\partial_+ \Delta_{L_k}| P_0 \left[X_{T_{\Delta_{\frac{L_k}{3b}}}} \notin \partial_+ \Delta_{\frac{L_k}{3b}} \right] \end{aligned}$$

Por la segunda condición de (ii), se obtiene el resultado deseado. Además note que por el lema de Borel Cantelli,

$$P_0 \left(H_{L_{k+1}}^{l_0} < H_{L_k}^{l_0} + T_{\frac{L_k}{2}}^{l_0} \circ \theta_{H_{L_k}^{l_0}} \right) = 1, \quad k \geq 0.$$

Como consecuencia de (4.5) se obtiene que

$$P_0(A_l) = 1$$

Para mostrar que la función generadora de momentos de la variable aleatoria $\sup_{0 \leq n \leq \tau_1} |X_n|$ es finita note que, aplicando la desigualdad de Markov

$$\begin{aligned}
 & P_0 \left[\sup_{0 \leq n \leq \tau_1} |X_n| \geq u \right] \\
 & \leq P_0 \left[T_{\Delta \frac{u}{2r}} < \tau_1 \right] \\
 & \leq P_0 \left[X_{\tau_1} \cdot l_0 \geq \frac{u}{2r} \right] + P_0 \left[X_{\tau_1} \cdot l_0 < \frac{u}{2r}, T_{\Delta \frac{u}{2r}} < \tau_1 \right] \\
 & \leq e^{-c(\frac{u}{2r})^\gamma} E_0 \left[e^{c|X_{\tau_1} \cdot l_0|^\gamma} \right] + P_0 \left[X_{T_{\Delta \frac{u}{2r}}} \notin \partial_+ \Delta \frac{u}{2r} \right]
 \end{aligned}$$

donde se ha utilizado el hecho de que $P_0(X_n \cdot l_0 < X_{\tau_1} \cdot l_0) = 1$ para $n \leq \tau_1$. La expresión de la derecha en la desigualdad anterior está acotada, en el caso de la probabilidad por una expresión de la forma $e^{-e L^\gamma}$ donde e es una constante positiva, por hipótesis. La esperanza, por el apéndice (??) es finita. Por tanto,

$$P_0 \left[\sup_{0 \leq n \leq \tau_1} |X_n| \geq u \right] \rightarrow 0, \quad \text{cuando } u \rightarrow \infty. \quad (4.6)$$

así se concluye que la función generadora de momentos es finita.

- (iii) \Rightarrow (i). Elija una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_d\}$ de \mathbb{R}^d con $e_1 = l_0$ y en cualquier vecindario pequeño de $l_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ elija l_i con $1 \leq i \leq 2(d-1)$ tal que para $i = 1, 2, \dots, d-1$

$$l_{2i-1} \cdot e_{i+1} > 0 \quad \text{y} \quad l_{2i} \cdot e_{i+1} < 0 \quad (4.7)$$

además l_{2i}, l_{2i-1} se encuentran en el plano (e_1, e_{i+1}) . Luego, defina

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^d : (l_0 \cdot x, \dots, l_{2(d-1)}) \in [-1, 1] \times [-1, \infty)^{d-1}\}$$

elija constantes $a_1, \dots, a_{2(d-1)}$ lo suficientemente grandes de modo que

$$\mathcal{D} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : (l_0 \cdot x, \dots, l_{2(d-1)}) \in \mathbb{R} \times (-\infty, a_1) \times \dots \times (-\infty, a_{2(d-1)})\}$$

Finalmente, dado que $P_0(\{T_{-u}^l < \infty\} = \{T_{-u}^l < \tau_1\}) = 1$, para todo $u > 0$, entonces

$$\begin{aligned} P_0[T_{-u}^l < \infty] &= P_0[T_{-u}^l < \tau_1] \\ &= P_0\left[e^{c|X_{T_{-u}^l}|^\gamma} \geq e^{cu^\gamma}, T_{-u}^l < \tau_1\right] \\ &\leq e^{-cu^\gamma} E_0\left[e^{c|X_{T_{-u}^l}|^\gamma}, T_{-u}^l < \tau_1\right] \\ &\leq e^{-cu^\gamma} M_{X_{\tau_1}^*}(c) \end{aligned}$$

como la función generadora de momentos es finita entonces de lo anterior se concluye que

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} u^{-\gamma} \log P_0[T_{-u}^l < \infty] < 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} u^{-\gamma} \log P_0[T_{-u}^{l_i} < H_{a_i u}^{l_i}] < 0 \quad (4.8)$$

para todo $i = 0, 1, \dots, 2(d-1)$.

□

Corolario 4.2.1 ($d \geq 1$). *Asuma que el ambiente es (UE), $l_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ y $\gamma \in (0, 1]$, son equivalentes*

- (i) $(T_\gamma)|l, a$, para $a > 0$
- (ii) Para todo $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ en un vecindario de l_0 y L grande

$$P_0[T_{-bL}^l < H_L^l] < e^{-cL^\gamma}, \quad \text{con } c, b > 0 \quad (4.9)$$

4.3 Estimado D.Q.A Principal

Una de las claves en la demostración de la ley de grandes números es el hecho de que la cola del primer tiempo de regeneración τ_1 está controlado de alguna forma. Este control se obtiene gracias a una distribución *Quenched atípica*, a saber

$$\mathbb{P}\left[P_{0,\omega}\left[X_{T_{U_{\beta,L}}} \cdot l > 0\right] \leq \exp\{-cL^\beta\}\right]$$

la idea es acotar esta probabilidad. Se le da el nombre de atípico, ya que lo que se espera de una caminata transiente en dirección l es que se dirija de tal modo que en efecto se cumpla que $X_{T_{U_{\beta,L}}} \cdot l > 0$. Para lograr el control del comportamiento del tiempo de regeneración se hace uso de la condición de balisticidad $(T)|l$ y este es el principal resultado de este capítulo.

Denote por $\pi(\cdot)$ el complemento ortogonal sobre el vector determinista unitario \widehat{v} ,

$$\pi(w) = w - Proj_{\widehat{v}}(w) \quad (4.10)$$

Lema 4.3.1. Para $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, $u \geq 0$ y $\rho > 0$,

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} u^{1-2\gamma} \log P_0 \left[\sup_{0 \leq n \leq T_u^l} \pi(X_n) \geq \rho u^\gamma \right] < 0 \quad (4.11)$$

Solución. Sin pérdida de generalidad se puede reemplazar $\pi(X_n)$ por $X_n \cdot w$, donde $w \in \mathbb{R}^d$ es tal que $w \cdot v = 0$. Ahora, defina para $n \geq 1$,

$$K_n = \sup\{k \geq 0 : \tau_k < n\} \quad (4.12)$$

Como para $k \geq 1$ se tiene que

$$P_0(\{m \geq \tau_k : X_m \cdot l \geq X_{\tau_k} \geq ka\}) = 1$$

vemos que P_0 -c.s para $u > 0$

$$0 \leq n \leq L_u^l \quad \Rightarrow \quad K_n \leq \frac{u}{a} \quad (4.13)$$

Así para w , se tiene que para $n \geq 1$,

$$X_n \cdot w = X_{\tau_{K_n}} \cdot w + (X_n - X_{\tau_{K_n}}) \cdot w \leq X_{\tau_{K_n}} \cdot w + X_* \circ \theta_{\tau_{K_n}}$$

Como resultado, para $\rho > 0$, $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ y $u > 0$:

$$\begin{aligned} P_0 \left[\sup_{0 \leq n \leq L_u} X_n \cdot w > \rho u^\gamma \right] &\leq \sum_{0 \leq k \leq \frac{u}{a}} P_0 [X_{\tau_k} \cdot w + X_* \circ \theta_{\tau_k} > \rho u^\gamma] \\ &\leq \sum_{0 \leq k \leq \frac{u}{a}} P_0 \left[X_* \circ \theta_{\tau_k} > \frac{\rho}{3} u^\gamma \right] + \sum_{1 \leq k \leq \frac{u}{a}} \left(P_0 \left[X_{\tau_1} \cdot w > \frac{\rho}{3} u^\gamma \right] \right. \\ &\quad \left. + P_0 \left[(X_{\tau_k} - X_{\tau_1}) \cdot w > \frac{\rho}{3} u^\gamma \right] \right) \end{aligned}$$

Usando ahora el hecho que las variables $((X_{(\tau_k+\cdot)\wedge\tau_{k+1}} - X_{\tau_k}), \tau_{k+1} - \tau_k)_{k \geq 1}$ son i.i.d y se distribuyen igual que $((X_{\tau_1 \wedge \cdot}, \tau_1)$ bajo la distribución condicional $P_0[\cdot | D = \infty]$, junto con la desigualdad de Chebyshev, vemos que para $\lambda > 0$, la desigualdad anterior se puede acotar superiormente por

$$e^{-\frac{\lambda \rho}{3} u^\gamma} \left(\left(\frac{2u}{a} + 1 \right) \frac{E_0[e^{\lambda X_*}]}{P_0[D = \infty]} + \sum_{1 \leq k \leq \frac{u}{a}} E_0[e^{\lambda X_{\tau_1 \cdot w} | D = \infty}]^{k-1} \right)$$

Introducimos ahora para $|\lambda| < c_6$, la función convexa

$$H(\lambda) = \log E_0[\lambda X_{\tau_1} \cdot w | D = \infty]. \quad (4.14)$$

Como $E_0[X_{\tau_1} \cdot u | D = \infty] = 0$, vemos que el desarrollo limitado de orden dos para la función es $H(\lambda) = O(\lambda^2)$ alrededor de cero. Además, lo anterior muestra que para $\lambda \in (0, c_6)$ y $u > 0$

$$P_0 \left[\sup_{0 \leq n \leq L_u} X_n \cdot w > \rho u^\gamma \right] \leq \left(\frac{2u}{a} + 1 \right) e^{-\frac{\lambda}{3} \rho u^\gamma} \left(\frac{E_0[e^{\lambda X_*}]}{P_0[D = \infty]} + e^{\frac{u}{a} H(\lambda)} \right) \quad (4.15)$$

Cuando $\gamma = 1$, se elige $\lambda \in (0, c_6)$ lo suficientemente pequeño de modo que $H(\lambda) < \frac{\lambda}{3} \rho a$ y de este modo se obtiene (4.11). Ahora si $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, entonces se elige para un $\nu > 0$ lo suficientemente pequeño, $\lambda = (\nu u^{\gamma-1}) \wedge c_6$ y de esta forma se concluye el resultado. \square

De acuerdo a las franjas y bloques definidos al inicio de este capítulo, el evento de salir por el costado positivo de la franja $U_{\beta,L}$, i.e $\{X_{T_{U_{\beta,L}}} \cdot l > 0\}$ contiene al evento

$$\{X_{T_{B_{2,\beta,L}(\omega)}} \in \partial_+ B_{2,\beta,L}(\omega)\}$$

Lema 4.3.2 (Estimado principal) $d \geq 2$, bajo la condición (T). Asuma que $\beta_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Entonces, para $\rho > 0$ y $\beta \in [\beta_0, 1)$,

$$\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} L^{-(\beta+\beta_0-1)} \sup_{\omega \in \mathbb{R}^d} \log \mathbb{P} \left[\inf_{x \in B_{1,\beta,L}(\omega)} P_{x,\omega} \left[X_{T_{B_{2,\beta,L}(\omega)}} \in \partial_+ B_{2,\beta,L}(\omega) \right] \leq \exp\{-\rho L^\beta\} \right] < 0 \quad (4.16)$$

Prueba. Elija $\eta \in (0, 1)$ pequeño y defina

$$\lambda = \beta_0 + 1 - \beta \in (\beta_0, 1] \quad (4.17)$$

y para L grande, $w \in \mathbb{R}^d$ las cajas $\tilde{B}_1(w) \subseteq \tilde{B}_2(w)$, de dimensiones

$$[0, L_0] \times [0, L^{\beta_0}]^{d-1} \quad \text{y} \quad (-dL^{\beta_0}, L_0] \times [-\eta L^{\beta_0}, (1 + \eta)L^{\beta_0}]^{d-1}$$

respectivamente, con la notación

$$L_0 = \frac{L - \eta L^{\beta_0}}{[L^{1-\lambda}]} \quad (4.18)$$

Considere la parte de la caja $\tilde{B}_2(w)$ definida como

$$\widehat{B}_2(w) = \partial \tilde{B}_2(w) \cap \{x : (x - w) \cdot \widehat{v} > L_0\}. \quad (4.19)$$

Cada vez que

$$P_{x,\omega} \left[X_{T_{\tilde{B}_2(w)}} \in \widehat{B}_2(w) \right] \geq \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \tilde{B}_1(w) \quad (4.20)$$

se dice que w es un buen punto y malo en caso contrario.

Se quiere mostrar que se cumple

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}^d} \log \mathbb{P}[w \text{ es malo}] \leq -\delta \cdot L^{2\beta_0 - \lambda} < 0, \quad \text{cuando } L \rightarrow \infty \quad (4.21)$$

En efecto, cuando L tiende al infinito y dado cualquier $w \in \mathbb{R}^d$,

Observe que para L grande y cualquier w

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[w \text{ sea malo}] &= \mathbb{P} \left[P_{x,\omega} \left[X_{T_{\tilde{B}_2(w)}} \in \widehat{B}_2(w) \right] < \frac{1}{2} \right] \\ &\leq 2^d L_0 L^{(d-1)\beta_0} \left(P_0 \left[\sup_{0 \leq n \leq T_{L_0}^{\widehat{v}}} |\pi(X_n)| \geq \eta L^{\beta_0} \right] + P_0 \left[H_{-dL_0^{\beta_0}}^{\widehat{v}} < \infty \right] \right) \end{aligned}$$

Por el lema 2.3 se tiene que

$$\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} L^{-(2\beta_0 - \lambda)} \log P_0 \left[\sup_{0 \leq n \leq T_{L_0}^{\widehat{v}}} |\pi(X_n)| \geq \eta L^{\beta_0} \right] < 0$$

Luego, dado que la generadora de momentos de la variable $\sup_{0 \leq n \leq \tau_1} |X_n|$ es finita relativo a la dirección asintótica \widehat{v} y algún $\widehat{a} > 0$, se tiene

$$P_0[-T_{-dL_0}^{\widehat{v}} < \infty] \leq P_0 \left[\sup_{0 \leq n \leq \tau_1} |X_n| > dL^{\beta_0} \right] \leq \exp\{-c_0 d L^{\beta_0}\} \cdot M(c_0) < \infty$$

para un c_0 adecuado, de este modo se concluye que

$$\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} L^{-(2\beta_0 - \lambda)} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \log \mathbb{P}[w \text{ es malo}] < 0$$

Considere ahora para $w \in \mathbb{R}^d$ las cajas $\widetilde{B}(w + jL_0e_1), 0 \leq j \leq [L^{1-\lambda}]$. Note que para $w, w' \in \mathbb{R}^d$, la colección $\mathcal{V}(w, w')$ de cubos unitarios cerrados de la forma $z + [0, 1]^d$ con $z \in \mathbb{Z}^d$ que intersecan segmentos que unen a w con w' ; es un subconjunto conexo de \mathbb{Z}^d . Esto permite ver que por medio de una constante apropiada que depende de la dimensión $c(d)$, cualesquiera puntos $x, x' \in \mathcal{V}(w, w')$ puede ser ahí unidos por medio de un camino (el más corto) de a lo sumo $c(d)(|x - x'| \vee 1)$ pasos.

Por lo señalado anteriormente, se observa que para cualquier punto $w + jL_0e_1 \in \mathbb{R}^d$ con $0 \leq j < [L^{1-\lambda}]$ existen constantes adecuadas $c_{13}(d)$ y $c_{14}(d)$ positivas de modo que cuando L es grande, es posible construir un camino que una un punto $x \in \widetilde{B}_2(w + jL_0e_1)$ con un punto en $\widetilde{B}_1(w + jL_0e_1)$, dentro de la caja en la caja $B_{2,\beta_0,L}(w)$, de longitud a lo sumo $c_{13}(d)\eta L^{\beta_0}$.

Más aún, para cualquier punto $y \in \widetilde{B}_2(w + [L^{1-\lambda}]L_0e_1)$ o en $\widetilde{B}_1(w + [L^{1-\lambda}]L_0e_1) \cap B_{1,\beta_0,L}(w)$, se puede encontrar un camino que una el punto y con el punto y' , donde y' es el primero al cual salió la caminata de la caja $B_{2,\beta_0,L}(w)$ por su frontera positiva, i.e $\partial_+ B_{2,\beta_0,L}(w)$; este camino es de longitud a lo sumo $c_{14}\eta L^{\beta_0}$

La existencia de los caminos anteriormente indicados son de importancia ya que si se inicia en algún punto de

$$B_{1,\beta_0,L}(w) \cap \widetilde{B}_1(w + j_0L_0e_1), \quad 1 \leq j_0 \leq [L^{1-\lambda}]$$

una forma de salir de la caja $B_{2,\beta_0,L}$ por $\partial_+ B_{2,\beta_0,L}(w)$ es tomando caminos sucesivos que abandonen las cajas $\widetilde{B}_2(w + jL_0e_1)$ por $\widehat{\widetilde{B}}_2(w + jL_0e_1)$ con $j_0 \leq j < [L^{1-\lambda}]$. Una vez que sale por $\widehat{\widetilde{B}}_2(w + jL_0e_1)$, se toma uno de los caminos antes mencionados a un punto de $\widetilde{B}_1(w + (j+1)L_0e_1)$, así hasta llegar a

$$\widehat{\widetilde{B}}_2(w + [L^{1-\lambda}]L_0e_1) \cup \left(\widetilde{B}_1(w + [L^{1-\lambda}]L_0e_1) \cap B_{1,\beta_0,L}(w) \right)$$

finalmente, por medio de alguno de los caminos especificados, la caminata aleatoria sale de la caja $B_{2,\beta_0,L}(w)$ por su frontera positiva.

Como resultado de la propiedad fuerte de Markov, se tiene que para L grande, $w \in \mathbb{R}^d$ y todos los puntos buenos de la forma $w + jL_0e_1$, $0 \leq j < [L^{1-\lambda}]$, todo punto $x \in B_{1,\beta_0,L}(w)$ satisface

$$P_{x,\omega} \left[X_{T_{B_{2,\beta_0,L}(w)}} \in \partial_+ B_{2,\beta_0,L}(w) \right] \geq \left(\frac{1}{2} \kappa^{c_{13}\eta L^{\beta_0}} \right)^{L^{1-\lambda}} \kappa^{c_{14}\eta L^{\beta_0}} > e^{-\rho L^\beta}$$

ya que $\eta > 0$ es elegido tan pequeño que se cumple $\eta(c_{13} + c_{14}) \log \frac{1}{\kappa} < \frac{\rho}{2}$ y $\rho > 0$. Por tanto, para L grande

$$\sup_{w \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P} \left[\inf_{x \in B_{1,\beta_0,L}(w)} P_{x,\omega} \left[X_{T_{B_{2,\beta_0,L}(w)}} \in \partial_+ B_{2,\beta_0,L}(w) \right] \leq \exp\{-\rho L^\beta\} \right] \leq L^{1-\lambda} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}[w \text{ sea malo}]$$

el resultado del estimado principal se sigue al unir la cota anterior con la estimación hecha en (4.21) junto la identidad $2\beta_0 - \lambda = \beta_0 + \beta - 1$.

□

4.4 Proceso de renormalización

Ya hemos visto que es posible obtener una D.Q.A principal, ahora vamos a generalizar tal estimado mediante un proceso de renormalización, cuyo objetivo es mejorar la cota.

Lema 4.4.1 (Proceso de renormalización, bajo (EU)). Sea $\beta_0 \in (0, 1)$ y $f_0 : [\beta_0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ tal que para $\beta \in [\beta_0, 1)$

$$\frac{f_0(\beta) - f_0(\beta_0)}{\beta - \beta_0} \geq 1, \quad \zeta < f_0(\beta) \quad \text{y} \quad \lim_{\beta' \uparrow \beta} \overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} L^{-\zeta} \sup_{\omega \in \mathbb{R}^d} \log \mathbb{P}[X_{\beta_0, L}(\omega) \geq L^{\beta'}] < 0. \quad (4.22)$$

Entonces, para $\beta \in [\beta_0, 1)$, $\zeta < f(\beta)$ con $f(\cdot)$ la interpolación lineal en $[\beta_0, 1]$ del punto $(\beta_0, f_0(\beta_0))$ con $(1, d)$, se cumple

$$\lim_{\beta' \uparrow \beta} \overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} L^{-\zeta} \sup_{\omega \in \mathbb{R}^d} \log \mathbb{P}[X_{\beta, L}(\omega) \geq L^{\beta'}] < 0 \quad (4.23)$$

Prueba. Considere $\beta \in (\beta_0, 1)$ y defina λ como

$$\lambda := \frac{\beta - 1}{\beta_0 - 1} \iff \beta = \lambda\beta_0 + 1 - \lambda \quad (4.24)$$

Construya una columna de $[L^{1-\lambda}]$ bloques de la forma $B_{1, \beta_0, L^\lambda}(\omega')$, uno sobre otro. Cada una de estas columnas proveen una línea de escape de la caja $B_{2, \beta, L}(\omega)$ por su frontera positiva. Esto es

$$Col = \left\{ z \in \mathcal{L}_{\beta_0, L^\lambda} : z \cdot e_1 = 0, \quad z \cdot e_i \in \left[\frac{1}{4}L^\beta, \frac{3}{4}L^\beta \right] \quad \text{para } i = 2, \dots, d \right\} \quad (4.25)$$

donde $[L^{1-\lambda}] + 1$ es el número de cajas por columna. Elija $w \in \mathbb{R}^d$ y considere las cajas

$$B_{1, \beta_0, L^\lambda}(w + z + jL^\lambda e_1) \subseteq B_{2, \beta, L}(w + z + jL^\lambda e_1), \quad z \in Col, \quad j \in [0, [L^\lambda]]$$

Para L grande, cuando la caminata inicia en $B_{1, \beta, L}(w)$, una forma de salir de la caja grande, $B_{2, \beta, L}(w)$ por su frontera positiva bajo $P_{x, \omega}$, consiste en primero moverse sin salirse de $B_{2, \beta, L}(w)$ a algún punto de $B_{1, \beta_0, L^\lambda}(w + z + jL^\lambda e_1)$, $z \in Col$, $0 \leq j \leq [L^\lambda]$, posteriormente moverse de forma ascendente y salir de las cajas $B_{2, \beta_0, L^\lambda}(w + z + j'L^\lambda e_1)$ por la frontera positiva para cada $j' \in [j, [L^\lambda]]$.

Observe que, cuando L es grande, para cualquier $w \in \mathbb{R}^d$, $x \in B_{1, \beta, L}(w)$, $z \in Col$, es posible conectar x al camino más cercano en $B_{2, \beta, L}(w)$ de longitud a lo sumo dL^β a un punto de la caja $B_{1, \beta_0, L^\lambda}(w + z + jL^\lambda e_1)$, donde $0 \leq j \leq [L^\lambda]$. Para L grande, $w \in \mathbb{R}^d$, $x \in B_{1, \beta, L}(w)$, utilizando (EU) y la propiedad fuerte de Markov, se tiene

$$P_{x,\omega} \left[X_{T_{B_{2,\beta,L}(w)}} \in \partial_+ B_{2,\beta,L}(w) \right] \geq \kappa^{dL^\beta} \exp \left\{ - \sum_{j=0}^{[L^\lambda]} X_{\beta_0,L^\lambda}(w + z + jL^\lambda e_1) \right\}, \quad \forall z \in Col \quad (4.26)$$

Si definimos

$$c_9(d, \mu) = d \log \frac{1}{\kappa}, \quad (4.27)$$

entonces, para L grande y cualquier $w \in \mathbb{R}^d$,

$$\{X_{\beta,L}(w) \geq 3c_9 L^\beta\} \subseteq \min_{z \in Col} \left\{ \sum_{j=0}^{[L^\lambda]} X_{\beta_0,L^\lambda}(w + z + jL^\lambda e_1) \geq 2c_9 L^\lambda \right\}.$$

Observe que las variables $\sum_{j=0}^{[L^\lambda]} X_{\beta_0,L^\lambda}(w + z + jL^\lambda e_1)$ son independientes conforme z varía sobre la *columna de bloques*, Col . Más aún, para L grande, $w \in \mathbb{R}^d$, $z \in Col$, las variables $X_{\beta_0,L^\lambda}(w + z + jL^\lambda e_1)$ son independientes cuando se restringe a números enteros pares o bien a los impares. Además, para dado w y z como se describen, si Y y Y' son las sumas (no negativas) sobre los j pares e impares respectivamente, en $[0, [L^\lambda]]$, se sigue de la desigualdad de Cauchy que, para $k > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \frac{k}{2} (Y + Y') \right\} \right] &\leq \left(\mathbb{E} [\exp\{kY\}] \mathbb{E} [\exp\{kY'\}] \right)^{1/2} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \mathbb{E} [\exp\{kY\}] \mathbb{E} [\exp\{kY'\}] \end{aligned}$$

Luego, para L grande y $w \in \mathbb{R}^d$, escoja $k > 0$ y usando la desigualdad de Chebyshev en $(*)$ se tiene,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[X_{\beta,L}(w) \geq 3c_9 L^\beta] &\leq \prod_{z \in Col} \mathbb{P} \left[\sum_{j=0}^{\lfloor L^\lambda \rfloor} X_{\beta_0, L^\lambda}(w + z + jL^\lambda e_1) \geq 2c_9 L^\beta \right] \\
 &\leq \prod_{z \in Col} \left\{ \exp\{-kc_9 L^\beta\} \prod_{j=0}^{\lfloor L^\lambda \rfloor} \mathbb{E} \left[\exp\{kX_{\beta_0, L^\lambda}(w + z + jL^\lambda e_1)\} \right] \right\} \quad (4.28) \\
 &\leq \prod_{z \in Col} \left\{ \exp\{-kc_9 L^\beta\} \times \left(\exp\left\{ \frac{kc_9}{2} L^{\lambda\beta_0} \right\} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \int_{L^{\lambda\beta_0 c_9/2}}^{\infty} k e^{ku} \sup_{\omega' \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}[X_{\beta_0, L^\lambda}(w') \geq u] du \right)^{\lfloor L^\lambda \rfloor + 1} \right\}
 \end{aligned}$$

A continuación se procede analizar el comportamiento de la integral que aparece en la ecuación anterior cuando se especifica k por

$$k = L^\alpha, \quad \text{con } \alpha = \lambda f_0(\beta_0) - \lambda\beta_0 - \epsilon \quad \text{y } 0 < \epsilon < \lambda f_0(\beta_0). \quad (4.29)$$

Elija un entero N tal que

$$N > \frac{1}{\epsilon} \quad (4.30)$$

y defina, para $i \geq 0$,

$$\beta_i = \beta_0 + i \cdot \frac{1 - \beta_0}{N} \quad (4.31)$$

Note que para cualquier $w, w' \in \mathbb{R}^d$, la colección $\mathcal{V}(w, w')$ de cubos unitarios cerrados $z + [0, 1]^d$, $z \in \mathbb{Z}^d$ que intersecan el segmento $[w, w'] = \{uw + (1-u)w', 0 \leq u \leq 1\}$ es un subconjunto conexo de \mathbb{Z}^d . Así para una constante $c_{10}(d) > 0$, cualesquiera $x, x' \in \mathcal{V}(w, w')$ pueden ser unidos por el camino más cercano contenido en $\mathcal{V}(w, w')$ con a lo sumo $c_{10}(d)(|x - x'| \vee 1)$ pasos. Así se tiene que para L grande y por **(EU)**,

$$\sup_w \mathbb{P}[X_{\beta_0, L^\lambda}(w) > c_{11}(d, \mu)L^\lambda] = 0 \quad (4.32)$$

con $c_{11}(d, \mu) = 2\sqrt{d} \left(\log \left(\frac{1}{\kappa} \right) \right) c_{10}$. Definiendo la constante c_{12} como

$$c_{12} = \frac{c_9}{9} \vee c_{11} \quad (4.33)$$

encontramos que para L grande y discretizando la integral en los puntos $(c_9/2)L^{\lambda\beta_i}$, con $0 \leq i < N$,

$$\int_{L^{\lambda\beta_0}c_9/2}^{\infty} ke^{ku} \sup_{\omega' \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}[X_{\beta_0, L^\lambda}(w') > u] du \leq c_{11}kL^\lambda \sup \left\{ \exp\{c_{12}kL^{\lambda\beta_{i+1}}\} \right. \quad (4.34)$$

$$\left. \times \sup_{\omega' \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}\left[X_{\beta_0, L^\lambda}(w') > \frac{c_9}{2}L^{\lambda\beta_i}\right], i < N \right\}$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned} \alpha + \lambda\beta_{i+1} &= \lambda f_0(\beta_0) - \lambda\beta_0 - \epsilon + \lambda \left(\beta_0 + \frac{i+1}{N} \cdot (1 - \beta_0) \right) \\ &< \lambda(f_0(\beta_0) + \beta_i - \beta_0) && \text{(pues } N > 1/\epsilon) \\ &\leq \lambda f_0(\beta_i) && \text{(Por 4.22)} \end{aligned}$$

y como resultado de (4.22), vemos que el lado izquierdo de (4.34) tiende a cero cuando L tiende a infinito. Regresando a (4.28), usando el hecho que $kL^{\lambda\beta_0}$ tiende a infinito con L , se tiene que para L grande

$$\begin{aligned} \sup_{\omega \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}[X_{\beta, L}(w) \geq 3c_9L^\beta] &\leq \exp \left\{ |Col| \left(-kc_9L^\beta + (1 + [L^\lambda]) \frac{2}{3}c_9kL^{\lambda\beta_0} \right) \right\} \\ &\leq \exp \left\{ \frac{-k}{6}c_9L^\beta |Col| \right\} \end{aligned}$$

Como $|Col| = O(L^{(d-1)(\beta-\lambda\beta_0)})$ cuando $L \rightarrow \infty$, se tiene que para $\epsilon > 0$ pequeño,

$$\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} L^{-(\lambda f_0(\beta_0) + d(1-\lambda) - \epsilon)} \sup_{\omega \in \mathbb{R}^d} \log \mathbb{P}[X_{\beta, L}(w) \geq 3c_9L^\beta] < 0 \quad (4.35)$$

Finalmente, observamos que, cuando $\beta_1 \in (\beta_0, \beta)$, para L grande, $[0, L] \times [0, L^{\beta_1}]^{d-1}$ puede ser cubierto por a lo sumo L^{d-1} cajas de la forma $w + [0, L] \times [0, L^{\beta_1}]^{d-1}$, incluidos en $[0, L] \times [0, L^\beta]^{d-1}$ de lo que se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[X_{\beta,L}(w) \geq L^{(\beta+\beta_1)/2}] &\leq \mathbb{P}[X_{\beta,L}(w) \geq 3c_9L^{\beta_1}] \\
 &\leq L^{d-1} \sup_{\omega \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}[X_{\beta_1,L}(w) \geq 3c_9L^{\beta_1}] \\
 &\stackrel{4.35}{\leq} \exp\{-L^{f(\beta_1)-\epsilon}\} \quad (\text{para cualquier } \epsilon > 0, L \text{ grande})
 \end{aligned}$$

Así se concluye la prueba. □

4.5 Control de las colas del tiempo de regeneración

Proposición 4.5.1 ($d \geq 2$). *Asuma que se cumple (T) con respecto a una dirección $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ y $a > 0$. Si $\beta \in (0, 1)$ es tal que para cada $c > 0$,*

$$\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \log \mathbb{P} \left[P_{0,\omega} [X_{T_{U_{\beta,L}}} \cdot l] \leq e^{-cL^\beta} \right] < 0 \tag{4.36}$$

entonces

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} (\log u)^{1/\beta} \log P_0[\tau_1 > u] < 0 \tag{4.37}$$

Prueba. Considere la rotación R de \mathbb{R}^d tal que $R(e_1) = l$. Además considere el cubo d dimensional C_L de dimensión $L/2$, es decir,

$$C_L = R \left(\left(\frac{-L}{2}, \frac{L}{2} \right)^d \right) \cap \mathbb{Z}^d \tag{4.38}$$

y para $u \in \mathbb{N}$, las cantidades

$$\Delta(u) = \frac{1}{7\sqrt{d}} \frac{\log u}{\log\left(\frac{1}{\kappa}\right)}, \quad L(u) = \Delta u^{\frac{1}{\beta}} \tag{4.39}$$

Se sigue de la condición (T) que para una constante adecuada c_0 y un valor u grande

$$\begin{aligned}
 P_0[\tau_1 > u] &= P_0[\tau_1 > u, T_{C_{L(u)}} < \tau_1] + P_0[\tau_1 > u, T_{C_{L(u)}} \geq \tau_1] \\
 &\leq P_0[\tau_1 > u, T_{C_{L(u)}} < \tau_1] + P_0[T_{C_{L(u)}} \geq \tau_1] \\
 &\leq \exp\{-c_0L(u)\} + P_0[T_{C_{L(u)}} \geq \tau_1]
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

El resultado deseado se obtendrá a partir de la demostración de

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} (\log u)^{\frac{1}{\beta}} \log P_0[T_{C_{L(u)}} > u] < 0 \quad (4.41)$$

Denote por \mathcal{T} el evento dado por

$$\mathcal{T} = \left\{ w \in \Omega : \inf \left\{ n \geq 0 : \|R_{n,\omega}^{C_{L(u)}}\|_{\infty,\infty} \leq \frac{1}{2} \right\} > \frac{u}{(\log u)^{1/\beta}} \right\} \quad (4.42)$$

donde $R_{n,\omega}^{C_{L(u)}}$ denota el operador que actúa sobre funciones acotadas f en $C_{L(u)}$:

$$R_{n,\omega}^{C_{L(u)}} f(x) = E_{x,\omega}[f(X_n), T_U > n] \quad \wedge \quad \|R_{n,\omega}^{C_{L(u)}}\|_{\infty,\infty} \in \{1, \dots, \infty\}$$

Por la propiedad fuerte de Markov y dado que se cumple

$$P_{x_0,\omega}[\tilde{H}_{x_0} > T_U] \leq \frac{2|U|}{\inf \left\{ n \geq 0 : \|R_{n,\omega}^U\|_{\infty,\infty} \leq \frac{1}{2} \right\}}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} P_0[T_{C_{L(u)}} > u] &\leq \mathbb{E} \left[\mathcal{T}^c, P_{0,\omega}[T_{C_{L(u)}} > u] \right] + \mathbb{P}[\mathcal{T}] \\ &\leq \left(\frac{1}{2} \right)^{(\log u)^{1/\beta}} + \mathbb{P}[\exists x_2 \in C_{L(u)}, P_{x_2,\omega}[\tilde{H}_{x_2} > T_{C_{L(u)}}] \leq \frac{2(\log u)^{1/\beta}}{u} |C_{L(u)}|] \end{aligned} \quad (4.43)$$

Sobre el evento que aparece en la parte de la derecha de la desigualdad anterior, para todo los $x \neq x_2$ con

$$\|x - x_2\| \leq \frac{1}{3} \frac{\log u}{\log(1/\kappa)}$$

utilizando el camino más cercano que une los puntos x_2 con x , nos encontramos que

$$\begin{aligned} u^{-1/3} P_{x,\omega}[T_{C_{L(u)}} < H_{x_2}] &\leq P_{x_2,\omega}[T_{C_{L(u)}} < \tilde{H}_{x_2}] \\ &\leq \frac{2(\log u)^{1/\beta}}{u} |C_{L(u)}| \end{aligned} \quad (4.44)$$

De esta forma, cuando u es grande, elegimos el punto x en \mathbb{Z}^d de tal forma que se encuentre cerca del valor $|x_2 + 2\Delta(u)l$, tal que

$$0 < \|x - x_2\| \leq \overbrace{\leq}^{|w| \leq \|w\| \leq \sqrt{d}|w|} \sqrt{d}(2\Delta(u) + \sqrt{d}) \leq \frac{1}{3} \frac{\log u}{\log 1/\kappa}$$

y en vista de (4.44), $x \in C_{L(u)}$. Entonces, se sigue que

$$\begin{aligned} P_{x,\omega}[X_{T_{x+U_{\beta,L(u)}}} > x \cdot l] &\leq P_{x,\omega}[H_{x_2} > T_{C_{L(u)}}] \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{u}} \\ &\leq \exp\{-c_8(d, \mu)L(u)^\beta\} \end{aligned}$$

Como la medida es invariante bajo traslaciones y por el resultado obtenido en (4.43), encontramos que

$$P_0[T_{C_{L(u)}} > u] \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{(\log u)^{1/\beta}} + |C_{L(u)}| \mathbb{P}\left[P_{0,\omega}[X_{T_{U_{\beta,L}}} \cdot l > 0] \leq \exp\{-c_8 L(u)^\beta\}\right]$$

y de (4.41), (4.36) se sigue. Concluyendo de esta forma la prueba. \square

Teorema 4.5.1 (Colas del tiempo de regeneración, $d \geq 2$). *Asuma que se cumple (T)|l, a. Entonces para $\beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$,*

$$\mathbb{P}\left[P_{0,\omega}\left[X_{T_{U_{\beta,L}}} \cdot l > 0\right] \leq \exp\{-L^\beta\}\right] < \exp\{-\delta L^\zeta\} \quad (4.45)$$

para $\delta > 0$ y $\zeta < d(2\beta - 1)$, cuando L tiende a ∞ . Además, cuando u tiende a ∞ se cumple

$$P_0 [\tau_1 > u] = \exp\{-\lambda \cdot \log^\alpha(u)\} o(1) \quad (4.46)$$

para $\lambda > 0$ y $\alpha < 1 + \frac{d-1}{d+1}$.

Prueba. • **Prueba de (4.45).** Considere el valor $\beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\zeta \in (0, d(2\beta - 1))$, y elijamos un β_0 cercano a $1/2$ así como un $\beta' \in (\beta_0, \beta)$, cerca de β , de modo que en la notación del lema 3.2 $f(\beta') > \zeta$. Podemos ahora considerar cajas de la forma $B_{1,\beta',L}(jLe_1)$ y $B_{2,\beta',L}(jLe_1)$, con $0 \leq j \leq N$, donde N es elegido como el menor entero posible que satisface

$$Nl \cdot \widehat{v} > 1 \quad (4.47)$$

Por la propiedad fuerte de Markov y L grande, vemos que se cumple

$$\begin{aligned} P_{0,\omega} \left[X_{T_{U_{\beta,L}}} \cdot l > 0 \right] &\geq \exp \left\{ - \sum_{j=0}^N X_{\beta',L}(jLe_1) \right\} \quad (\text{tal que}) \\ \mathbb{P} \left[P_{0,\omega} \left[X_{T_{U_{\beta,L}}} \cdot l > 0 \right] \leq e^{-L^\beta} \right] &\leq (N+1) \sup_w \mathbb{P} \left[X_{\beta',L}(w) \geq \frac{L^\beta}{N} \right] \end{aligned} \quad (4.48)$$

y por tanto se tiene el resultado deseado aplicado con $f_0(\cdot) = \beta_0 + \cdot -$ en vista del lema 3.3.

- Ahora para mostrar el resultado (4.46). Sea $\alpha \in (1, 2d/(d+1))$, defina $\beta = \alpha^{-1}$. Entonces para cualquier $c > 0$

$$\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \log \mathbb{P} \left[P_{0,\omega} \left[X_{T_{U_{\beta,L}}} \cdot l > 0 \right] \leq \exp\{-cL^\beta\} \right] < 0$$

como se sigue de (4.45) aplicado a $\beta' \in \left(\frac{1}{2}, \beta\right)$, tal que $d(2\beta' - 1) > 1$. Lo que permite obtener el resultado deseado por la proposición anterior.

□

Capítulo 5

Condiciones efectivas de balisticidad Polinomial y el Criterio Efectivo para RWRE

5.1 Introducción

El objetivo de esta sección es el resultado que muestra una condición más débil para obtener las condiciones de balisticidad de Sznitman, llamadas condiciones polinomiales, las cuales serán posteriormente utilizadas para asegurar la existencia de una Ley de Grandes Números. Para ello se hace uso de dos ingredientes fundamentales, los cuales son:

- Criterio Efectivo.
- Estimaciones *Quenched* atípicas.

donde el primero es el puente que permite obtener las condiciones de balisticidad T_γ a partir de un simple decaimiento polinomial de las probabilidades de salida de la caminata aleatoria en el medio aleatorio, bajo un supuesto de transitoriedad en cierta dirección fija $l \in \mathbb{S}^{d-1}$.

El principal resulta que se desea exhibir postula lo siguiente:

Teorema 5.1.1 (Decaimiento exponencial es suficiente). *Asuma (IID) y (EU). Sea $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ y asuma $(\mathcal{P}^*)_M|l$ o $(\mathcal{P})_M|l$ se cumple para algún $M > 15d + 5$. Entonces $(T^l)|l$ se cumple.*

Para poder hacer la prueba de tal resultado, es necesario entender notaciones y definiciones.

5.2 Notaciones

Dado un proceso estocástico, $(Y)_{n \in \mathbb{N}}$, se definen los tiempos de entrada y salida a un conjunto $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ por

$$H_A^Y = H_A(Y) := \inf\{n \in \mathbb{N} : Y_n \in A\} \quad \text{y} \quad T_A^Y = T_A(Y) = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : Y_n \notin A\}$$

El primer instante en que el proceso entra en el semi-espacio se denota por

$$H_L^l(Y) := H_{\{x: x \cdot l > L\}}(Y)$$

Para cualquier subconjunto $A \subseteq \mathbb{Z}^d$, se define su frontera como

$$\partial A = \{x \in \mathbb{Z}^d - A : \exists y \in A \text{ tal que } \|x - y\|_1 = 1\}$$

Dado $l \in \mathbb{S}$, defina $\mathcal{B} = \{l_1 = l, l_2, \dots, l_d\}$ una base ortonormal de \mathbb{R}^d , a partir de ella defina la caja

$$\mathcal{D}_L^l := \left\{ x \in \mathbb{Z}^d : (x \cdot l_1, \dots, x \cdot l_d) \in [-L, 10L] \times \left[-\frac{L^3 \ln \ln L}{\ln L}, \frac{L^3 \ln \ln L}{\ln L} \right]^{d-1} \right\}$$

para $L > e^e$; así como su parte frontal

$$\partial_+ \mathcal{D}_L^l := \left\{ x \in \mathbb{Z}^d : (x \cdot l_1, \dots, x \cdot l_d) \in (10L, \infty) \times \left[-\frac{L^3 \ln \ln L}{\ln L}, \frac{L^3 \ln \ln L}{\ln L} \right]^{d-1} \right\}$$

Para un conjunto $A \subset \mathbb{Z}^d$ y $x \in \mathbb{Z}^d$ se introduce la notación

$$\bigvee_{l^\perp}(x, A) := \max_{2 \leq j \leq d} \inf_{y \in A} |(x - y) \cdot l_j|;$$

para indicar la distancia ortogonal a l .

Definición 5.2.1 (Condición $(T)_{\gamma_L} | l$). Defina $\gamma_L := \frac{\ln 2}{\ln \ln L}$. Decimos que se satisface la condición $(T)_{\gamma_L}$ con respecto a $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ si

$$P_0(H_{\partial D_L^i} < H_{\partial_+ D_L^i}) \leq e^{-L^{(1+o(1))\gamma_L}} \quad \text{cuando } L \rightarrow \infty \quad (5.1)$$

El valor γ_L denota el valor efectivo. La fórmula es válida bajo $(\mathcal{P})_M \mid l$ o bien $(\mathcal{P}^*)_M \mid l$,

Definición 5.2.2 (Constante fijas). Las siguientes cantidades son valores fijos que son clave en las afirmaciones que más adelante se muestran.

i. Sea

$$c_0 := \exp\{100 + 4d(\ln \kappa)^2\} < \infty. \quad (5.2)$$

ii. Dados $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^d$, la colección $\mathcal{V}(w_1, w_2)$ de vértices del cubo unitario cerrado $z + [0, 1]^d$, $z \in \mathbb{R}^d$, que interseca el segmento de recta que une los puntos w_1 con w_2 , es decir

$$[w_1, w_2] = \{\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2 : \lambda \in [0, 1]\}$$

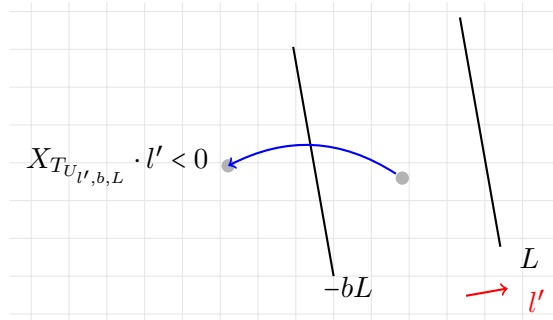
es un subconjunto conexo de \mathbb{Z}^d . Para una constante adecuada $c_1(d) \geq 1$, se cumple que para cualquier $x, x' \in \mathcal{V}(w_1, w_2)$ existe un camino que los une dentro de $\mathcal{V}(w_1, w_2)$ con a lo sumo la siguiente cantidad de pasos

$$c_1(|x - x'| \vee 1) \quad (5.3)$$

Antes de iniciar con la definición de cajas cuyas dimensiones tenderán al infinito, iniciamos definiendo las *losas* transversales a las cuales las cajas tenderán a parecer.

Definición 5.2.3 (Bandas transversales). Considere el siguiente conjunto

$$U_{l', b, L} = \{x \in \mathbb{Z}^d, -bL < x \cdot l' < L\}$$



Definición 5.2.4 (Bandas múltiplos de L_0). Para $i \in \mathbb{Z}$ defina las bandas

$$\mathcal{H}_i = \{x \in \mathbb{Z}^d : \exists x' \in \mathbb{Z}^d, |x - x'| = 1 \text{ y } (x \cdot l - iL_0) \cdot (x' \cdot l - iL_0) \leq 0\} \quad (5.4)$$

Además, defina el índice

$$I(x) = i \quad \text{si} \quad x \in \mathcal{J}_i = \left\{x \in \mathbb{Z}^d, x \cdot l \in \left[iL_0 - \frac{L_0}{2}, iL_0 + \frac{L_0}{2} \right] \right\}. \quad (5.5)$$

Note que $\mathcal{H}_i \subset \mathcal{J}_i$, por tanto si $x \in \mathcal{H}_i$, entonces $I(x) = i$, pues $L_0 > 2$. Ver figura 5.1.

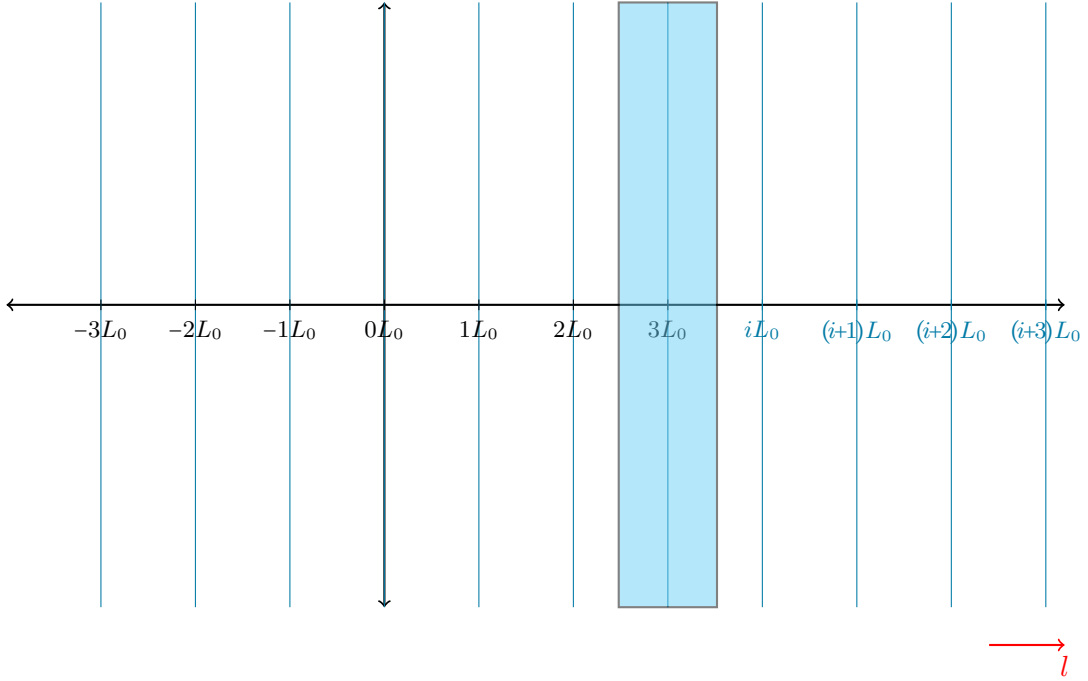


FIGURA. 5.1: Bandas y conjunto índice.
La región sombreada corresponde a la banda \mathcal{H}_3 .

Además, defina los tiempos de visita por primera vez a una de las bandas derecha o izquierda de alguno de los \mathcal{H}_i por

$$\begin{aligned} V_0 &= 0, \\ V_1 &= \inf\{n \geq 0 : X_n \in \mathcal{H}_{I(X_0)-1} \cup \mathcal{H}_{I(X_0)+1}\} \\ V_{k+1} &= V_k + V_1 \circ \theta_{V_k} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Denote la probabilidad de visitar primero la banda izquierda por $\widehat{q}(x, \omega)$, i.e

$$\tilde{q}(x, \omega) = P_{x, \omega}[X_{V_1} \in \mathcal{H}_{I(x)-1}] = 1 - \tilde{p}(x, \omega) \quad (5.7)$$

y para $l_j := R(e_j), j \geq 2$

$$\tilde{\rho}(i, \omega) = \sup \left\{ \frac{\tilde{q}(x, \omega)}{\tilde{p}(x, \omega)} : x \in \mathcal{H}_i, |l_j \cdot x| < \tilde{L}_1, \quad j \geq 2 \right\} \quad (5.8)$$

además, considere el primer instante en que la caminata $(X_n)_{n \geq 0}$ los laterales de la caja B_1 , es decir

$$\tilde{T} = \inf \{n \geq 0 : |X_n \cdot l_j| \geq \tilde{L}_1, \quad j \geq 2\}. \quad (5.9)$$

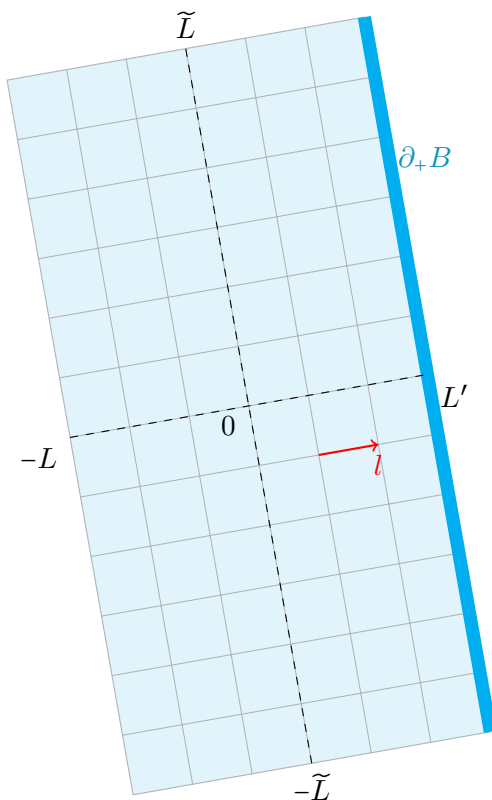
Definimos ahora una especificación de cajas en \mathbb{Z}^d transversales.

Definición 5.2.5 (Cajas transversales). *Sea R una rotación de \mathbb{Z}^d , de tal modo que $R(e_1) = l$, donde $l \in \mathbb{S}^{d-1}$, definimos las cajas transversales como*

$$B = R(\{x \in \mathbb{Z}^d : -L < x \cdot l < L', |x \cdot l_j| < \tilde{L}, \quad i \geq 2\}) = R((-L, L') \times (-\tilde{L}, \tilde{L})^{d-1}) \cap \mathbb{Z}^d \quad (5.10)$$

Además, definimos su frontera positiva como

$$\partial_+ B = \partial B \cap \{x \in \mathbb{Z}^d : x \cdot l \geq L', |x \cdot l_j| < \tilde{L}, \quad i \geq 2\} \quad (5.11)$$



A la familia de éstas cajas se denotará por $\mathcal{B}(R, L, L', \tilde{L})$

Definición 5.2.6 (Variables aleatorias). Sea $\omega \in \Omega$, defina la probabilidad de que una caminata aleatoria salga por primera vez de la caja B por su frontera positiva o no como

$$p_{\mathcal{B}}(\omega) = P_{0,\omega}(X_{T_B} \in \partial_+ B) \quad \text{y} \quad q_{\mathcal{B}}(\omega) = P_{0,\omega}(X_{T_B} \notin \partial_+ B) \quad (5.12)$$

Además considere la variable aleatoria

$$\rho_{\mathcal{B}}(\omega) = \frac{q_{\mathcal{B}}(\omega)}{p_{\mathcal{B}}(\omega)} \in [0, \infty] \quad (5.13)$$

Sea $(L_k)_{k \geq 0}$ y $(\tilde{L}_k)_{k \geq 0}$ sucesiones que permiten obtener una secuencia creciente de cajas, las cuales tienden a parecer *bandas* infinitas transversales en la dirección $l \in \mathbb{S}^{d-1}$. Éstas cajas tienen las siguientes especificaciones

$$B_k = \mathcal{B}(L_k - 1, L_k + 1, \tilde{L}_k), \quad R(e_1) = l \quad k \geq 0$$

donde inicialmente se considera que

$$3\sqrt{d} < L_0 < L_1 \quad \text{y} \quad 3\sqrt{d} < \tilde{L}_0 < \tilde{L}_1. \quad (5.14)$$

Así como,

$$N_0 := \frac{L_1}{L_0}, \quad n_0 := [N_0] \quad \text{y} \quad \tilde{N}_0 := \frac{\tilde{L}_1}{\tilde{L}_0}$$

Recursivamente, para $u_0 \in (0, 1)$ y c_1 como en (5.3)

$$L_{k+1} = N_k L_k \quad \text{y} \quad \tilde{L}_{k+1} = N_k^3 \tilde{L}_k, \quad \text{con} \quad N_k = \frac{30 \cdot c_1}{u_0} 2^{3(k+1)} \quad (5.15)$$

como resultado de iteración se tiene la siguiente fórmula $k \geq 0$

$$L_k = \left(\frac{30 c_1}{u_0} \right)^k \cdot 2^{\frac{3k(k-1)}{2}} L_0 \quad (5.16)$$

en efecto,

$$\begin{aligned} L_k &= \left(\frac{30 c_1}{u_0} \right) 2^{3(k-1)} L_{k-1} \\ &= \left(\frac{30 c_1}{u_0} \right)^2 2^{3(k-1)+3(k-2)} L_{k-2} \\ &\vdots \\ &= \left(\frac{30 c_1}{u_0} \right)^k 2^{3(k-1)+3(k-2)+\dots+3(2)+3} L_0 \\ &= \left(\frac{30 c_1}{u_0} \right)^k 2^{\frac{3k(k-1)}{2}} L_0 \end{aligned} \quad (\text{Fórmula de Gauss})$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}_k &= \left(\frac{L_k}{L_{k-1}} \right)^3 \tilde{L}_{k-1} \\
 &= \left(\frac{L_k}{L_{k-1}} \right)^3 \left(\frac{L_{k-1}}{L_{k-2}} \right)^3 \tilde{L}_{k-2} \\
 &= \left(\frac{L_k}{L_{k-2}} \right)^3 \tilde{L}_{k-2} \\
 &\vdots \\
 &= \left(\frac{L_k}{L_0} \right)^3 \tilde{L}_0
 \end{aligned}$$

así se obtiene la fórmula

$$\tilde{L}_k = \left(\frac{L_k}{L_0} \right)^3 \tilde{L}_0 \quad (5.17)$$

Para cada una de las cajas formadas con las dimensiones especificadas se consideraran las variables asociadas a cada una de las cajas, esto es

$$\rho_k = \rho_{B_k}, \quad p_k = p_{B_k} \quad k \geq 0 \quad (5.18)$$

5.3 Definiciones Polinomiales

A continuación se definen las condiciones polinomiales.

Definición 5.3.1 (Condición $(\mathcal{P}^*)_M|l$). Sea $M > 0$ y $l \in \mathbb{S}^{d-1}$. Decimos que se cumple la condición $(\mathcal{P}^*)_M|l$ con respecto al vector l si para cualquier $b > 0$ y $l' \in V(l) \cap \mathbb{S}^{d-1}$ ¹ se tiene

$$\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} L^M P_0 \left(H_{bL}^{-l'} < H_L^{l'} \right) = 0 \quad (5.19)$$

Sea

$$c_0 := \exp\{100 + 4d(\ln \kappa)^2\} < \infty. \quad (5.20)$$

¹Donde $V(l)$ es un vecindario de l .

Para definir la otra condición polinomial, es preciso hablar de cajas con especificaciones particulares definidas por la cantidad $N, k \in \mathbb{N}_0$, definida por $N_0 := 2N > c_0$ y recursivamente

$$N_{k+1} = 3(N_0 + k)^2 N_k \quad (5.21)$$

Observación 5.3.1. Note que la cantidad anterior equivale a

$$N_{k+1} := 3^{k+1} N_0 \left(\frac{(N_0 + k)!}{(N_0 - 1)!} \right)^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Definición 5.3.2 (Cajas con centro $x \in \mathbb{Z}^d$). Para $x \in \mathbb{Z}^d$ se introducen, las cajas centradas en x , a las cajas con especificaciones que se detallan a continuación:

$$B(x, k) := \left\{ y \in \mathbb{Z}^d : \left((y-x).l, \dots, (y-x).l_d \right) \in \left(-\frac{N_k}{2}, N_k \right) \times \left(-25N_k^3, 25N_k^3 \right)^{d-1} \right\} \quad (5.22)$$

defina la parte delantera media de la caja anterior por

$$\tilde{B}(x, k) := \left\{ y \in \mathbb{Z}^d : \left((y-x).l, \dots, (y-x).l_d \right) \in [N_k - N_{k-1}, N_k] \times \left(-N_k^3, N_k^3 \right)^{d-1} \right\} \quad (5.23)$$

con la convención de que $N_{-1} := \frac{2N_0}{3}$. Además, se definen las caras de dicha caja de la siguiente forma

$$\partial_+ B(x, k) := \left\{ y \in \partial B(x, k) : \left((y-x).l, \dots, (y-x).l_d \right) \in [N_k, \infty) \times \left(-25N_k^3, 25N_k^3 \right)^{d-1} \right\} \quad (5.24)$$

$$\partial_- B(x, k) := \left\{ y \in \partial B(x, k) : \left((y-x).l, \dots, (y-x).l_d \right) \in \left(-\infty, -\frac{N_k}{2} \right] \times \left(-25N_k^3, 25N_k^3 \right)^{d-1} \right\} \quad (5.25)$$

$$\partial_S B(x, k) := \partial B(x, k) \setminus (\partial_+ B(x, k) \cup \partial_- B(x, k)). \quad (5.26)$$

A los elementos de

$$\mathfrak{B}_k := \{B(x, k) : x \in \mathcal{L}_{n,m} \wedge n = N_{k-1} - 2, m = 2N_k^3 - 2\}$$

se les llamará cajas de escala k .

Definición 5.3.3 (Sub-red). Una sub-red de \mathbb{Z}^d , se define, para $n, m \in \mathbb{N}$, como el conjunto

$$\mathcal{L}_{n,m} := \{x \in \mathbb{Z}^d : [x \cdot l] \in n\mathbb{Z}, [x \cdot l_j] \in m\mathbb{Z} \text{ para } j \in \{2, \dots, d\}\} \quad (5.27)$$

Definición 5.3.4 (Cilindros). Para $z \in \mathbb{R}^d$, denote por

$$|z|_{\perp} = \sup_{j \geq 2} |z \cdot l_j|. \quad (5.28)$$

Defina los cilindros transversales de dimensiones \tilde{L}_0 y \tilde{L}_1 , con $\bar{L}_0 := 2(n_0 + 1)\tilde{L}_0$, como

$$c_{\perp}(k) = \{w \in \mathbb{R}^d : w \cdot l_2 \in \bar{L}_0 [k, k+1) \text{ y } |w \cdot l_j| < \tilde{L}_1, j \geq 3\} \quad (5.29)$$

también se define el cilindro truncado discreto como

$$\bar{c}(k) = \left\{ x \in \mathbb{Z}^d : \inf_{w \in c_{\perp}(k)} |x - w|_{\perp} \leq \bar{L}_0 \text{ y } x \cdot l \in (-L_1 + 1, L_1 + 1) \right\} \quad (5.30)$$

5.4 Condiciones Polinomiales

Definición 5.4.1 (Condición $(\mathcal{P}^*)_M|l$). Sea $M > 0$ y $l \in \mathbb{S}^{d-1}$. Decimos que se cumple la condición $(\mathcal{P}^*)_M|l$ con respecto al vector l si para cualquier $b > 0$ y $l' \in V(l) \cap \mathbb{S}^{d-1}$ ² se tiene

$$\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} L^M P_0 \left(H_{bL}^{-l'} < H_L^{l'} \right) = 0 \quad (5.31)$$

Definición 5.4.2 (Condición $(\mathcal{P})_M|l$). Sea $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ y $M > 0$. Decimos que se cumple $(\mathcal{P})_M|l$ se cumple si

$$\sup_{x \in \tilde{B}_0} P_x (H_{\partial B_0} \neq H_{\partial_+ B_0}) < N_0^{-M} \quad (5.32)$$

²Donde $V(l)$ es un vecindario de l .

Lema 5.4.1. Para $M \in (0, +\infty)$, $l \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$(\mathcal{P}^*)_M \mid l \quad \implies \quad (\mathcal{P})_M \mid l$$

Prueba. Como se cumple $(\mathcal{P}^*)_M \mid l$, entonces es posible elegir $l'_1, \dots, l'_d \in V(l)$ y $b > 0$ lo suficientemente pequeño para que se cumpla

1. $\bigcap_{j=1}^d \left\{ H_{N_0}^{l'_j} < H_{bN_0}^{-l'_j} \right\} \cap \{X_0 \in \tilde{B}_0\} \subseteq \{H_{\partial B_0} = H_{\partial_+ B_0}\}$
2. $\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} L^M P_0 \left(H_{bL}^{-l'_j} < H_L^{l'_j} \right) = 0$ para todo $j \in \{1, \dots, d\}$. por (5.31)

Para un $x \in \tilde{B}_0$ arbitrario, tomando complementos en (1) y utilizando (5.31)

$$P_x(H_{\partial B_0} \neq H_{\partial_+ B_0}) \leq \sum_{j=1}^d P_x \left(H_{bN_0}^{-l'_j} < H_{N_0}^{l'_j} \right) < N_0^{-M}$$

por tanto se tiene la condición polinomial (5.4.2). □

5.5 Criterio Efectivo

Note que la definición dada en (5.13) equivale a

$$\rho_{\mathcal{B}}(\omega) := \frac{P_{0,\omega}(H_{\partial B} \neq H_{\partial_+ B})}{P_{0,\omega}(H_{\partial B} = H_{\partial_+ B})}$$

de esta manera se introduce la definición clave de este trabajo de investigación.

Definición 5.5.1 (Criterio Efectivo: $CE \mid l$). Decimos que se cumple el criterio efectivo con respecto a $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ si para $L > C_2$ y $\tilde{L} \in [3\sqrt{d}, L^3]$ se satisface

$$\inf_{\mathcal{B}, a} \left\{ C_3 \left(\log \frac{1}{\kappa} \right)^{3d-3} \tilde{L}^{d-1} L^{3d-2} \mathbb{E} \rho_{\mathcal{B}}^a \right\} < 1 \quad (5.33)$$

donde $a \in [0, 1]$ y la familia de especificaciones $\mathcal{B} = R(L-2, L+2, \tilde{L}^3)$, donde $R(e_1) = l$.

En esta sección se muestra el resultado puente para obtener a partir de condiciones polinomiales, las condiciones de balisticidad, mostrado por Sznitman en 2002, cuya parte esencial

es

$$CE | l \iff (T') | l$$

Teorema 5.5.1 (Sznitman, , $d \geq 2$, bajo **(EU)**). Existe una constante $c_{12}(d) > 1$, tal que para $l \in \mathbb{S}^{d-1}$, $\gamma \in (0, 1)$, las siguientes condiciones son equivalentes

(i) Criterio Efectivo con respecto a l y $a \in [0, 1]$.

(ii) La condición $(T')|l$.

(iii) La condición $T_\gamma|l$

donde $\mathcal{B} = (R, L - 2, L + 2, \tilde{L})$ con $R(e_1) = l$, $L \geq c_{10}(d)$, $3\sqrt{d} \leq \tilde{L} < L^3$.

Para mostrar este importante resultado, será necesario postular y mostrar los resultados que permitieron obtener dicho resultado.

Proposición 5.5.1 (Cota para la función generadora de momento de ρ_1 , asumiendo **(EU)**). Sea $d \geq 2$. Existen constantes $c_2(d) > 3\sqrt{d}$, $c_3(d) > 1$ y $c_4(d) > 1$ de modo que cuando

$$N_0 \geq 3, \quad L_0 \geq c_2 \quad \tilde{L}_1 \geq 48N_0\tilde{L}_0 \tag{5.34}$$

y para cualquier $a \in [0, 1]$ se cumple

$$\mathbb{M}_{\rho_1}(a/2) \leq c_3 \left\{ \kappa^{-10c_1L_1} \left(c_4 \tilde{L}_1^{d-2} \frac{L_1^3}{L_0^2} \tilde{L}_0 \mathbb{M}_{q_0}(1) \right)^{\frac{\tilde{L}_1}{12N_0\tilde{L}_0}} + \sum_{m=0}^{N_0+1} \left(c_4 \tilde{L}_1^{d-1} \mathbb{M}_{\rho_0}(a) \right)^{\frac{n_0+m-1}{2}} \right\} \tag{5.35}$$

Prueba. Considere la función

$$f : \{n_0 + 2, n_0 + 1, n_0, n_0 - 1, \dots\} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida como

$$f(n_0 + 2, \omega) = 0 \quad \text{y} \quad f(i, \omega) = \sum_{m=i}^{n_0+1} \prod_{j=m+1}^{n_0+1} \frac{1}{\tilde{\rho}(j, \omega)}, \quad \text{para } i \leq n_0 + 1 \tag{5.36}$$

la dependencia del ambiente se omitirá en caso de no haber confusión en el contexto. Note que $f(n_0 + 1) = 1$.

El primer paso consiste en acotar la probabilidad de que la caminata salga por $\partial_- B_1$ antes de salir por $\partial_+ B_1 \cup \partial_s B_1$, para $\omega \in \Omega$, donde la cota está en función de f , a saber

$$P_{0,\omega}[T_{-(L_1-1)}^l < \tilde{T} \wedge H_{L_1+1}^l] \leq \frac{f(0)}{f(1-n_0)} \quad (5.37)$$

Es conveniente introducir un nuevo tiempo de parada, este se basa en los saltos que hace la caminata de banda en banda y desea capturar el primer instante en que llega a una de las bandas que quedan fuera de la caja B_1 , éstas son: \mathcal{H}_{1-n_0} y \mathcal{H}_{n_0+2} , la primera por el lado izquierdo y la segunda por el lado derecho, respectivamente. Sea $\mathcal{F}_{V_m} = \sigma(X_{V_1}, \dots, X_{V_m})$, la información hasta el momento V_m y defina la variable aleatoria

$$\tau = \inf\{m \geq 0 : X_{V_m} \in \mathcal{H}_{n_0+2} \cup \mathcal{H}_{1-n_0}\} \quad (5.38)$$

observe que cuando $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned} P_{0,\omega}(X_{V_\tau} \in \mathcal{H}_{1-n_0} \quad , \quad T_{-(L_1-1)}^l < \tilde{T} \wedge H_{L_1+1}^l) &= 1 \\ P_{0,\omega}(V_\tau < \tilde{T} \quad , \quad T_{-(L_1-1)}^l < \tilde{T} \wedge H_{L_1+1}^l) &= 1 \end{aligned} \quad (5.39)$$

Adicionalmente se tiene,

$$\begin{aligned} E_{0,\omega} \left[f \left(I(X_{V_{(m+1) \wedge \tau}}) \right) , V_{(m+1) \wedge \tau} < \tilde{T} \right] &= E_{0,\omega} \left[f \left(I(X_{V_{(m+1) \wedge \tau}}) \right) , V_{(m+1) \wedge \tau} < \tilde{T}, \tau \leq m \right] \\ &\quad + E_{0,\omega} \left[f \left(I(X_{V_{(m+1) \wedge \tau}}) \right) , V_{(m+1) \wedge \tau} < \tilde{T}, \tau > m \right] \\ &\leq E_{0,\omega} \left[f \left(I(X_{V_{m \wedge \tau}}) \right) , V_{m \wedge \tau} < \tilde{T}, \tau \leq m \right] \\ &\quad + E_{0,\omega} \left[f \left(I(X_{V_{(m+1) \wedge \tau}}) \right) , V_m < \tilde{T}, \tau \geq m+1 \right] \\ &= E_{0,\omega} \left[f \left(I(X_{V_{m \wedge \tau}}) \right) , V_{m \wedge \tau} < \tilde{T}, \tau \leq m \right] \\ &\quad + E_{0,\omega} \left[E_{X_{V_m}, \omega} [f \left(I(X_{V_1}) \right)] , V_m < \tilde{T}, \tau \geq m+1 \right] \end{aligned} \quad (5.40)$$

en la última igualdad se utiliza la propiedad fuerte de Markov. Por otro lado, sobre el evento $\{\tau > m, V_m < V_m < \tilde{T}\}$, se tiene

$$\begin{aligned}
 E_{X_{V_m}, \omega} [f(I(X_{V_1}))] &= f(I(X_{V_m}) + 1) \widehat{p}(X_{V_m}) + f(I(X_{V_m}) - 1) \widehat{q}(X_{V_m}) \\
 &= f(I(X_{V_m}) + 1) \widehat{p}(X_{V_m}) + f(I(X_{V_m}) - 1) \widehat{q}(X_{V_m}) + f(I(X_{V_m})) \\
 &\quad - (\widehat{p}(X_{V_m}) + \widehat{q}(X_{V_m})) f(I(X_{V_m})) \\
 &= f(I(X_{V_m})) + \widehat{p}(X_{V_m}) [f(I(X_{V_m}) + 1) - f(I(X_{V_m}))] \\
 &\quad + \widehat{q}(X_{V_m}) [f(I(X_{V_m}) - 1) - f(I(X_{V_m}))] \\
 &= f(I(X_{V_m})) - \widehat{p}(X_{V_m}) \cdot \prod_{j=I(X_{V_m})+1}^{n_0+1} \frac{1}{\widehat{\rho}(j)} + \widehat{q}(X_{V_m}) \cdot \prod_{j=I(X_{V_m})}^{n_0+1} \frac{1}{\widehat{\rho}(j)} \\
 &\hspace{15em} \text{(Utilizando la definición 5.36)}
 \end{aligned}$$

utilizando propiedades de la productoria se llega al resultado

$$E_{X_{V_m}, \omega} [f(I(X_{V_1}))] = f(I(X_{V_m})) + \prod_{j=I(X_{V_m})+1}^{n_0+1} \frac{1}{\widehat{\rho}(j)} \left[-\widehat{p}(X_{V_m}) + \widehat{q}(X_{V_m}) \cdot \frac{1}{\widehat{\rho}(I(X_{V_m}))} \right]$$

Ahora, note que $P_{0, \omega}(X_{V_m} \in \mathcal{H}_{I(X_{V_m})}) = 1$ para todo $m \geq 0$. Luego, la expresión dentro de los paréntesis cuadrados es no negativo pues de (5.8) se tiene

$$\begin{aligned}
 \widehat{\rho}(I(X_{V_m})) \geq \frac{\widehat{q}(X_{V_m})}{\widehat{p}(X_{V_m})} &\implies -1 + \frac{\widehat{q}(X_{V_m})}{\widehat{p}(X_{V_m})} \cdot \frac{1}{\widehat{\rho}(I(X_{V_m}))} \leq 0 \\
 &\implies E_{X_{V_m}, \omega} [f(I(X_{V_1}))] \leq f(I(X_{V_m}))
 \end{aligned}$$

Regresando a (5.40)

$$\begin{aligned}
 E_{0,\omega} \left[f \left(I(X_{V_{(m+1)\wedge\tau})} \right), V_{(m+1)\wedge\tau} < \tilde{T} \right] &\leq E_{0,\omega} \left[f \left(I(X_{V_{m\wedge\tau})} \right), V_{m\wedge\tau} < \tilde{T}, \tau \leq m \right] \\
 &+ E_{0,\omega} \left[E_{X_{V_m},\omega} \left[f \left(I(X_{V_1}) \right) \right], V_m < \tilde{T}, \tau \geq m+1 \right] \\
 &\leq E_{0,\omega} \left[f \left(I(X_{V_{m\wedge\tau})} \right), V_{m\wedge\tau} < \tilde{T}, \tau \leq m \right] \\
 &+ E_{0,\omega} \left[f \left(I(X_{V_m}) \right), V_m < \tilde{T}, \tau \geq m+1 \right] \\
 &\hspace{15em} \text{(Observación anterior.)} \\
 &= E_{0,\omega} \left[f \left(I(X_{V_{m\wedge\tau})} \right), V_{m\wedge\tau} < \tilde{T} \right]
 \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que $E_{0,\omega} \left[f \left(I(X_{V_{m\wedge\tau})} \right), V_{m\wedge\tau} < \tilde{T} \right]$ es decreciente con respecto a m , así aplicando el lema de Fatou se obtiene

$$\begin{aligned}
 E_{0,\omega} \left[f \left(I(X_{V_\tau}) \right), V_\tau < \tilde{T} \right] &= E_{0,\omega} \liminf_{m \rightarrow \infty} \left[f \left(I(X_{V_{m\wedge\tau})} \right), V_{m\wedge\tau} < \tilde{T} \right] \\
 &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} E_{0,\omega} \left[f \left(I(X_{V_{m\wedge\tau})} \right), V_{m\wedge\tau} < \tilde{T} \right] \\
 &= f(0)
 \end{aligned}$$

Luego, por la observación en (5.39) se tiene que $f \left(I(X_{V_\tau}) \right) = f(1 - n_0)$ sobre el evento $\{T_{-(L_1-1)}^l < \tilde{T} \wedge H_{L_1+1}^l\}$, así la esperanza en la desigualdad anterior permite obtener

$$\begin{aligned}
 &E_{0,\omega} \left[E_{0,\omega} \left[f \left(I(X_{V_\tau}) \right), V_\tau < \tilde{T} \right] \mid T_{-(L_1-1)}^l < \tilde{T} \wedge H_{L_1+1}^l \right] \\
 &= f(1 - n_0) P_{0,\omega} \left[V_\tau < \tilde{T} \mid T_{-(L_1-1)}^l < \tilde{T} \wedge H_{L_1+1}^l \right]
 \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene lo que se deseaba mostrar,

$$f(1 - n_0) P_{0,\omega} (T_{-(L_1-1)}^l < \tilde{T} \wedge H_{L_1+1}^l) \leq f(0)$$

La segunda parte de la prueba, consiste en acotar la probabilidad de que la caminata salga por los laterales antes que por su frontera positiva o negativa; es decir, se va a mostrar

$$P_0 \left[\tilde{T} < T_{-(L_1-1)}^l \wedge H_{L_1+1}^l \right] \leq 2(d-1) \left[c_5 \tilde{L}_1^{(d-2)} \frac{L_1^3}{L_0^2} \tilde{L}_0 \mathbb{M}_{q_0}(1) \right]^{\frac{\tilde{L}_1}{12N_0 \tilde{L}_0}} \quad (5.41)$$

Se inicia definiendo la cantidad

$$J = \left\lceil \frac{\tilde{N}_0}{2(n_0 + 1)} \right\rceil \quad (5.42)$$

Note que como $\tilde{N}_0 \geq 48N_0$, entonces $J \geq \left\lceil \frac{24N_0}{n_0 + 1} \right\rceil$; por otro lado, dado que $N_0 \geq 3$ por hipótesis, entonces

$$\left\lceil \frac{24N_0}{n_0 + 1} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{3 \cdot 24}{n_0 + 1} \right\rceil \geq \frac{3 \cdot 24}{4} = 18.$$

Ahora, note que

$$P_0 \left[|X_n \cdot l_j| \geq J\bar{L}_0 \quad \text{para algún } j \geq 2, n < T_{B_1} \mid \tilde{T} < T_{-(L_1-1)}^l \wedge H_{L_1+1}^l \right] = 1$$

pues $J\bar{L}_0 = \left\lceil \frac{\tilde{N}_0}{2(n_0 + 1)} \right\rceil 2(n_0 + 1)\tilde{L}_0 \approx \tilde{N}_0\tilde{L}_0 = \tilde{L}_1$. Por tanto,

$$P_0 \left[\tilde{T} < T_{-(L_1-1)}^l \wedge H_{L_1+1}^l \right] \leq \sum_{j=2}^d \left\{ P_0 \left(H_{J\bar{L}_0}^{l_j} \leq T_{B_1} \right) + P_0 \left(T_{-J\bar{L}_0}^{l_j} \leq T_{B_1} \right) \right\} \quad (5.43)$$

para lograr obtener la desigualdad de (5.41), se acota el lado derecho de (5.43) inductivamente, iniciando con $j = 2$, por medio de los cilindros definidos anteriormente.

Note que

$$P_0 \left[H_{J\bar{L}_0}^{l_2} \leq T_{B_1} \right] \leq E_0 \left[P_{X_{H_{(J-2)\bar{L}_0}^{l_2}}, \omega} \left(H_{J\bar{L}_0}^{l_2} < T_{B_1} \right), H_{(J-2)\bar{L}_0}^{l_2} \leq T_{B_1} \right]. \quad (5.44)$$

y

$$P_0 \left[X_{H_{(J-2)\bar{L}_0}^{l_2}} \in c_{\perp}(J-2) \mid H_{(J-2)\bar{L}_0}^{l_2} \leq T_{B_1} \right] = 1.$$

Ahora, se definen los tiempos de parada H^i de salidas iterativas de cajas de la forma de B_0 centradas en distintos saltos de la caminata, es decir, para $i \geq 0$

$$H^0 = 0, \quad H^1 = T_{B_1} \wedge T_{B_0+X_0} \quad \text{y} \quad H^{i+1} = H^1 \circ \theta_{H^i} + H^i \quad (5.45)$$

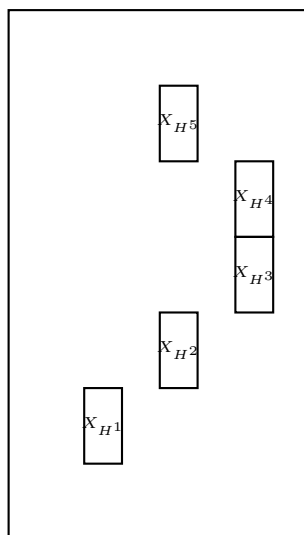


FIGURA. 5.2: Salida de cajas B_0 .

Ahora, considere el siguiente tiempo, de salida ya sea por sus lados laterales o bien por la frontera negativa de las cajas B_0 , i.e

$$S = \inf \{k \geq 0 : (X_k - X_0) \cdot l_1 \leq -(L_0 - 1) \quad \text{o} \quad |(X_k - X_0) \cdot l_j| \geq \tilde{L}_0, \text{ para } j \geq 2\}$$

Luego, dado $y \in c_\perp(J-2) \cap B_1$ y $\omega \in \Omega$ se cumple

$$P_{y,\omega} \left[T_{B_1} < H_{J\tilde{L}_0}^{l_2} \mid \bigcap_{i=0}^{2(n_0+1)} \theta_{H^i}^{-1}(H^1 < S) \right] = 1$$

en otras palabras, para $i \in [0, 2(n_0 + 1)]$

$$P_{X_{H^i}, \omega} [H^1 < S] \geq \inf_{x \in \bar{c}(J-2)} P_{x,\omega} (X_{T_{B_0}} \in \partial_+ B_0)$$

Defina $\varphi(J-2, \omega) := \left(\inf_{x \in \bar{c}(J-2)} P_{x, \omega} (X_{T_{B_0}} \in \partial_+ B_0) \right)^{2(n_0+1)}$, como resultado de la propiedad fuerte de Markov,

$$P_{X_{H_{(J-2)\bar{L}_0}^{l_2}}, \omega} [T_{B_1} < H_{J\bar{L}_0}^{l_2}] \geq \varphi(J-2, \omega) \implies P_{X_{H_{(J-2)\bar{L}_0}^{l_2}}, \omega} [H_{J\bar{L}_0}^{l_2} < T_{B_1}] \leq 1 - \varphi(J-2, \omega) \quad (5.46)$$

ahora bien,

$$\begin{aligned} P_0 [H_{J\bar{L}_0}^{l_2} \leq T_{B_1}] &\stackrel{5.44}{\leq} E_0 \left[P_{X_{H_{(J-2)\bar{L}_0}^{l_2}}, \omega} (H_{J\bar{L}_0}^{l_2} < T_{B_1}), H_{(J-2)\bar{L}_0}^{l_2} \leq T_{B_1} \right] \\ &\leq E_0 \left[H_{(J-2)\bar{L}_0}^{l_2} \leq T_{B_1}, 1 - \varphi(J-2, \omega) \right] \\ &= \mathbb{E} \left(P_{0, \omega} \left[H_{(J-2)\bar{L}_0}^{l_2} \leq T_{B_1}, 1 - \varphi(J-2, \omega) \right] \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left(P_{0, \omega} \left[H_{(J-3)\bar{L}_0}^{l_2} \leq T_{B_1}, 1 - \varphi(J-2, \omega) \right] \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left(P_{0, \omega} \left[H_{(J-3)\bar{L}_0}^{l_2} \leq T_{B_1} \right] \cdot (1 - \varphi(J-2, \omega)) \right) \\ &= P_0 \left[H_{(J-3)\bar{L}_0}^{l_2} \leq T_{B_1} \right] \cdot \mathbb{E} (1 - \varphi(J-2, \omega)) \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es por la independendencia entre las variables, ya que $P_{0, \omega} \left[H_{(J-3)\bar{L}_0}^{l_2} \leq T_{B_1} \right]$ es $\sigma(\omega(y, \cdot), y.l_2 < (J-3)\bar{L}_0)$ -medible; mientras que $1 - \varphi(J-2, \omega)$ es $\sigma(\omega(y, \cdot), y.l_2 \geq (J-3)\bar{L}_0)$ -medible. Por otro lado, dado que para $x \in [0, 1]$, $1 - x^p \leq p(1 - x)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (1 - \varphi(J-2, \omega)) &\leq 2(n_0 + 1) \mathbb{E} \left(1 - \inf_{x \in \bar{c}(J-2)} P_{x, \omega} (X_{T_{B_0}} \in \partial_+ B_0) \right) \\ &= 2(n_0 + 1) \mathbb{E} \left(\sup_{x \in \bar{c}(J-2)} P_{x, \omega} (X_{T_{B_0}} \notin \partial_+ B_0) \right) \\ &\leq 2(n_0 + 1) |\bar{c}(J-2)| \mathbb{E} (P_{0, \omega} (X_{T_{B_0}} \notin \partial_+ B_0)) \\ &\leq 2(n_0 + 1) |\bar{c}(J-2)| \mathbb{M}_{q_0}(1) \end{aligned}$$

para obtener la cardinalidad del cilindro, recuerde sus dimensiones en la definición (5.29)

$$|\bar{c}(J-2)| = 2L_1 \cdot \bar{L}_0 \cdot \tilde{L}_1^{d-2} = 4L_1 \cdot (n_0 + 1) \cdot \tilde{L}_1^{d-2} \cdot \tilde{L}_0$$

sustituyendo en la desigualdad anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(1 - \varphi(J-2, \omega)) &\leq 8L_1 \cdot (n_0 + 1)^2 \cdot \tilde{L}_1^{d-2} \cdot \tilde{L}_0 \mathbb{M}_{q_0}(1) \\ &= c_5(d) L_1 \cdot \frac{L_1^2}{L_0^2} \cdot \tilde{L}_1^{d-2} \cdot \tilde{L}_0 \mathbb{M}_{q_0}(1) \\ &= c_5(d) \frac{L_1^3}{L_0^2} \tilde{L}_1^{d-2} \tilde{L}_0 \mathbb{M}_{q_0}(1) \end{aligned}$$

Como resultado,

$$\begin{aligned} P_0 \left[H_{J\bar{L}_0}^{l_2} \leq T_{B_1} \right] &\leq P_0 \left[H_{(J-3)\bar{L}_0}^{l_2} \leq T_{B_1} \right] \cdot c_5(d) \frac{L_1^3}{L_0^2} \tilde{L}_1^{d-2} \tilde{L}_0 \mathbb{M}_{q_0}(1) \\ &\leq P_0 \left[H_{(J-6)\bar{L}_0}^{l_2} \leq T_{B_1} \right] \cdot \left(c_5(d) \frac{L_1^3}{L_0^2} \tilde{L}_1^{d-2} \tilde{L}_0 \mathbb{M}_{q_0}(1) \right)^2 \\ &\vdots \quad \text{(por inducción)} \\ &\leq \left(c_5(d) \frac{L_1^3}{L_0^2} \tilde{L}_1^{d-2} \tilde{L}_0 \mathbb{M}_{q_0}(1) \right)^m \quad \text{(para todo } 0 \leq m \leq \left\lfloor \frac{J}{3} \right\rfloor) \end{aligned}$$

cotas similares se obtienen para cada término del lado derecho de la desigualdad (5.43), por tanto

$$P_0 \left[\tilde{T} < T_{-(L_1-1)}^l \wedge H_{L_1+1}^l \right] \leq 2(d-1) \left(c_5(d) \frac{L_1^3}{L_0^2} \tilde{L}_1^{d-2} \tilde{L}_0 \mathbb{M}_{q_0}(1) \right)^{\frac{\tilde{L}_1}{12\tilde{L}_0 N_0}} \quad (5.47)$$

ya que la suma contiene $2(d-1)$ términos, además se utiliza el hecho que $3 \leq n_0$ y que $\tilde{N}_0 \geq 48n_0$, entonces

$$\left\lfloor \frac{J}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\tilde{N}_0}{6(n_0 + 1)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\tilde{L}_1}{6(n_0 + 1)\tilde{L}_0} \right\rfloor \geq \frac{\tilde{L}_1}{12N_0\tilde{L}_0}$$

La tercera parte de la prueba consiste en obtener una cota para la función generadora de

momentos de la variable aleatoria ρ_1 evaluada en $a/2$. Para lograrlo, se introduce el evento del espacio muestral Ω ,

$$\mathcal{G} := \left\{ \omega ; P_{0,\omega} \left[\tilde{T} < T_{-(L_1-1)}^l \wedge H_{L_1+1}^l \right] \leq \kappa^{9c_1 L_1} \right\} \quad (5.48)$$

nótese que

$$\rho_1 = \frac{q_{B_1}}{p_{B_1}} \leq \frac{1}{p_{B_1}} \stackrel{\text{(EU)}}{\leq} \frac{1}{\kappa^{c_1(\sqrt{d}+1+L_1)}} \leq \frac{1}{\kappa^{2c_1 L_1}} \quad (5.49)$$

donde $c_1(1 + L_1 + \sqrt{d})$ es la cantidad de pasos particular que se puede tomar para salir de la caja B_1 , con c_1 como en (5.3); además $1 + \sqrt{d} < L_1$ (medio "ancho" de la caja B_1).

Más aún, note que la probabilidad de no salir por la frontera positiva de la caja B_1 se puede descomponer en los eventos que se muestran en la figura 5.3; por ende, ρ_1 se puede estimar de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \rho_1 &\leq \frac{P_{0,\omega} (T_{-L_1+1}^l < \tilde{T} \wedge H_{L_1+1}^l) + P_{0,\omega} (\tilde{T} < T_{-L_1+1}^l \wedge H_{L_1+1}^l)}{1 - \{P_{0,\omega} (T_{-L_1+1}^l < \tilde{T} \wedge H_{L_1+1}^l) + P_{0,\omega} (\tilde{T} < T_{-L_1+1}^l \wedge H_{L_1+1}^l)\}} \quad (5.50) \\ &\leq \frac{\frac{f(0)}{f(1-n_0)} + \kappa^{9c_1 L_1}}{1 - \left(\frac{f(0)}{f(1-n_0)} + \kappa^{9c_1 L_1} \right)} \quad (\text{sobre el evento } \mathcal{G}) \\ &= \frac{f(0) + f(1-n_0)\kappa^{9c_1 L_1}}{f(1-n_0) - f(0) - f(1-n_0)\kappa^{9c_1 L_1}} \end{aligned}$$

Ahora bien, como $n_0 \geq 3$ y por la construcción de la función f se tiene que

$$\begin{aligned} f(1-n_0) - f(0) - f(1-n_0)\kappa^{9c_1 L_1} &= \sum_{m=1-n_0}^{n_0+1} \prod_{j=m+1}^{n_0+1} \frac{1}{\tilde{\rho}(j,\omega)} - \sum_{m=0}^{n_0+1} \prod_{j=m+1}^{n_0+1} \frac{1}{\tilde{\rho}(j,\omega)} - f(1-n_0)\kappa^{9c_1 L_1} \\ &= \sum_{m=1-n_0}^{-1} \prod_{j=m+1}^{n_0+1} \frac{1}{\tilde{\rho}(j,\omega)} - f(1-n_0)\kappa^{9c_1 L_1} \\ &= \sum_{m=2-n_0}^{-2} \prod_{j=m+1}^{n_0+1} \frac{1}{\tilde{\rho}(j,\omega)} + \prod_{j=1-n_0+1}^{n_0+1} \frac{1}{\tilde{\rho}(j,\omega)} + \prod_{j=-1+1}^{n_0+1} \frac{1}{\tilde{\rho}(j,\omega)} - f(1-n_0)\kappa^{9c_1 L_1} \\ &\geq \prod_{j=1-n_0+1}^{n_0+1} \frac{1}{\tilde{\rho}(j,\omega)} + \prod_{j=-1+1}^{n_0+1} \frac{1}{\tilde{\rho}(j,\omega)} - f(1-n_0)\kappa^{9c_1 L_1} \end{aligned}$$

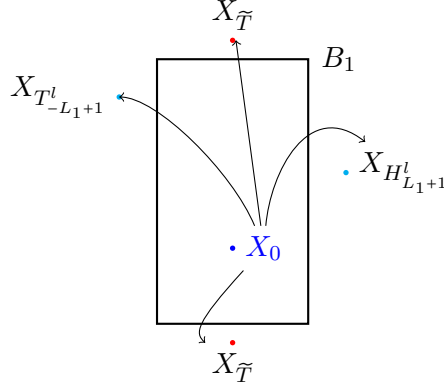


FIGURA. 5.3: Salida de la caja B_1 por su frontera no positiva, $\partial_+ B_1$

para mejorar un poco más la cota inferior anterior se debe justicar que la última diferencia es positiva, para ello considere un procedimiento similar al de (5.49) para $\widehat{\rho}(x, \omega)$, donde las dimensiones son múltiplos de L_0 , entonces $\frac{1}{\widehat{\rho}(x, \omega)} \geq \kappa^{2c_1 L_0}$; por otro lado se tiene que

$$f(1-n_0) = \sum_{m=1-n_0}^{n_0+1} \prod_{j=m+1}^{n_0+1} \frac{1}{\widehat{\rho}(j, \omega)} \leq \sum_{m=1-n_0}^{n_0+1} \prod_{j=-n_0+2}^{n_0+1} \frac{1}{\widehat{\rho}(j, \omega)} \leq \sum_{m=1-n_0}^{n_0+1} \prod_{j=-n_0+2}^{n_0+1} \kappa^{-2c_1 L_0} = (2n_0+1)\kappa^{-2c_1 L_0 \cdot 2n_0}$$

por tanto utilizando estos resultado podemos obtener

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{n_0+1} \frac{1}{\widehat{\rho}(j, \omega)} - f(1-n_0)\kappa^{9c_1 L_1} &\geq (\kappa^{2c_1 L_0})^{n_0+2} - f(1-n_0)\kappa^{9c_1 L_1} \\ &\geq (\kappa^{2c_1 L_0})^{n_0+2} - (2n_0+1)\kappa^{-2c_1 L_0 \cdot 2n_0} \kappa^{9c_1 L_1} \\ &\geq (\kappa^{2c_1 L_0})^{2n_0} - (2n_0+1)\kappa^{-2c_1 L_0 \cdot 2n_0} \kappa^{9c_1 L_1} \quad (\text{pues } n_0+2 \leq 2n_0) \\ &\geq \kappa^{4c_1 L_1} (1 - (2n_0+1)\kappa^{c_1 L_1}) \quad (\text{pues } L_0 n_0 < L_1) \\ &\geq \kappa^{4c_1 L_1} \left(1 - \frac{3L_1}{L_0} \kappa^{c_1 L_1}\right) \quad (\text{pues } 2n_0+1 < \frac{3L_1}{L_0}) \end{aligned}$$

finalmente, al ser $\kappa < \frac{1}{2}$ y asumiendo que $L_0 \geq c_2(d)$ se tiene

$$\prod_{j=0}^{n_0+1} \frac{1}{\widehat{\rho}(j, \omega)} - f(1-n_0)\kappa^{9c_1 L_1} \geq \kappa^{4c_1 L_1} \left(1 - \frac{3L_1}{L_0} \left(\frac{1}{2}\right)^{c_1 L_1}\right) \geq 0.$$

volviendo a la cota de ρ_1 ,

$$\begin{aligned} f(1-n_0) - f(0) - f(1-n_0)\kappa^{9c_1L_1} &\geq \prod_{j=1-n_0+1}^{n_0+1} \frac{1}{\widehat{\rho}(j,\omega)} + \prod_{j=-1+1}^{n_0+1} \frac{1}{\widehat{\rho}(j,\omega)} - f(1-n_0)\kappa^{9c_1L_1} \\ &\geq \prod_{j=1-n_0+1}^{n_0+1} \frac{1}{\widehat{\rho}(j,\omega)} \end{aligned} \quad (5.51)$$

entonces

$$\begin{aligned} \rho_1(\omega) &\leq \frac{f(0) + f(1-n_0)\kappa^{9c_1L_1}}{f(1-n_0) - f(0) - f(1-n_0)\kappa^{9c_1L_1}} \\ &\leq \frac{f(0) + f(1-n_0)\kappa^{9c_1L_1}}{\prod_{j=1-n_0+1}^{n_0+1} \frac{1}{\widehat{\rho}(j,\omega)}} \\ &\leq \prod_{j=1-n_0+1}^{n_0+1} \widehat{\rho}(j,\omega) \cdot (f(0) + f(1-n_0)\kappa^{9c_1L_1}) \\ &\leq 2 \prod_{j=1-n_0+1}^{n_0+1} \widehat{\rho}(j,\omega) f(0) \quad (\text{pues } f(1-n_0)\kappa^{9c_1L_1} \leq 1 \leq f(0)) \\ &= 2 \sum_{m=0}^{n_0+1} \prod_{j=m+1}^{n_0+1} \frac{1}{\widehat{\rho}(j,\omega)} \prod_{j=1-n_0+1}^{n_0+1} \widehat{\rho}(j,\omega) \\ &= 2 \sum_{m=0}^{n_0+1} \prod_{j=1-n_0+1}^m \widehat{\rho}(j,\omega) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Observe que, $\{\widehat{\rho}(j,\omega) : j \text{ par}\}$ es independiente de $\{\widehat{\rho}(j,\omega) : j \text{ impar}\}$. Utilizando el resultado de (5.49) y (5.52), para $a \in (0, 1]$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{M}_{\rho_1}(a/2) &\leq \mathbb{E}\left[\rho_1^{a/2}, \mathcal{G}\right] + \mathbb{E}\left[\rho_1^{a/2}, \mathcal{G}^c\right] \\
 &\leq \left(2 \sum_{m=0}^{n_0+1} \prod_{j=1-n_0+1}^m \mathbb{E}(\widehat{\rho}(j, \omega))\right)^{a/2} + \mathbb{E}\left[(\kappa^{-2c_1 L_1})^{a/2}, \mathcal{G}^c\right] \\
 &\quad \text{(aplique desigualdad de Cauchy-Shwartz y } (u+v)^{1/2} \leq u^{1/2} + v^{1/2}\text{)} \\
 &\leq 2 \sum_{m=0}^{n_0+1} \prod_{j=1-n_0+1}^m \mathbb{E}(\widehat{\rho}(j, \omega)^a)^{1/2} + \kappa^{-ac_1 L_1} \mathbb{P}(\mathcal{G}^c) \\
 &\leq 2 \sum_{m=0}^{n_0+1} \prod_{j=1-n_0+1}^m \mathbb{E}(\widehat{\rho}(j, \omega)^a)^{1/2} + \kappa^{-ac_1 L_1} \mathbb{P}(P_{0,\omega}(\widetilde{T} \leq T_{-L_1+1}^l \wedge H_{L_1+1}^l) > \kappa^{9c_1 L_1}) \\
 &\leq 2 \sum_{m=0}^{n_0+1} \prod_{j=1-n_0+1}^m \mathbb{E}(\widehat{\rho}(j, \omega)^a)^{1/2} + \kappa^{-ac_1 L_1 - 9c_1 L_1} P_0(\widetilde{T} \leq T_{-L_1+1}^l \wedge H_{L_1+1}^l) \\
 &\leq 2 \sum_{m=0}^{n_0+1} \prod_{j=1-n_0+1}^m \mathbb{E}(\widehat{\rho}(j, \omega)^a)^{1/2} + \kappa^{-10c_1 L_1} 2(d-1) \left(c_5(d) \frac{L_1^3}{L_0^2} \widetilde{L}_1^{d-2} \widetilde{L}_0 \mathbb{M}_{q_0}(1) \right)^{\frac{\widetilde{L}_1}{12\widetilde{L}_0 N_0}}
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

Observe que cuando $x \in \mathcal{H}^i$ entonces $\widehat{\rho}(x, \omega) \geq p_0 \circ t_x(\omega)$ y por ende para $i \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\widehat{q}(x)}{\widehat{\rho}(x)} \leq \rho_0 \circ t_x \tag{5.54}$$

Como resultado se tiene que para $a \in (0, 1]$

$$\mathbb{M}_{\rho_1}(a/2) \leq 2 \sum_{m=0}^{n_0+1} \prod_{j=1-n_0+1}^m \mathbb{E}(\widehat{\rho}(j, \omega)^a)^{1/2} + \kappa^{-10c_1 L_1} 2(d-1) \left(c_5(d) \frac{L_1^3}{L_0^2} \widetilde{L}_1^{d-2} \widetilde{L}_0 \mathbb{M}_{q_0}(1) \right)^{\frac{\widetilde{L}_1}{12\widetilde{L}_0 N_0}} \tag{5.55}$$

□

Lema 5.5.1. Existe una constante $c_6(d) \geq c_2$ tal que si se cumple

- $L_0 \geq c_6$, $3\sqrt{d} \leq \widetilde{L}_0 \leq L_0^3$, $a_0 \in (0, 1]$, $u_0 \in [\kappa^{L_0/d}, 1]$, además
- $\varphi_0 := c_4 \widetilde{L}_1^{(d-1)} L_0 \mathbb{M}_{\rho_0}(a_0) \leq \kappa^{u_0 L_0}$

entonces, para todo $k \geq 0$ con $a_k = a_0 2^{-k}$ y $u_k = u_0 2^{-3k}$

$$\varphi_k = c_4 \widetilde{L}_{k+1}^{(d-1)} L_k \mathbb{M}_{\rho_k}(a_k) \leq \kappa^{u_k L_k} \tag{5.56}$$

Prueba. La prueba de (5.56) es por medio En la proposición (5.5.1), se generalizan las cajas de \mathcal{B}_0 a \mathcal{B}_k y \mathcal{B}_1 a \mathcal{B}_{k+1} . Primero debe notarse que se cumplen las hipótesis de tal proposición

- $\widetilde{L}_0 \leq L_0^3$

note que para $k \geq 0$,

$$\begin{aligned}
 \varphi_{k+1} &= c_4 \widetilde{L}_{k+2}^{(d-1)} L_{k+1} \mathbb{M}_{\rho_{k+1}}(a^{k+1}) \\
 &\leq c_3 c_4 \widetilde{L}_{k+2}^{(d-1)} L_{k+1} \left\{ \kappa^{-10c_1 L_{k+1}} \left(c_4 \widetilde{L}_{k+1}^{(d-2)} \frac{L_{k+1}^3}{L_k^2} \widetilde{L}_k \mathbb{M}_{q_k}(1) \right)^{\frac{\widetilde{L}_{k+1}}{12N_k \widetilde{L}_k}} + \sum_{m=0}^{N_k+1} \left(c_4 \widetilde{L}_{k+1}^{(d-1)} \mathbb{M}_{\rho_k}(2a_{k+1}) \right)^{\frac{[N_k]+m-1}{2}} \right\} \\
 &\leq c_3 c_4 \widetilde{L}_{k+2}^{(d-1)} L_{k+1} \left\{ \kappa^{-10c_1 L_{k+1}} \left(c_4 \widetilde{L}_{k+1}^{(d-2)} \frac{L_{k+1}^3}{L_k^2} \widetilde{L}_k \mathbb{M}_{q_k}(1) \right)^{\frac{N_k^2}{12}} + \sum_{m=0}^{N_k+1} \left(c_4 \widetilde{L}_{k+1}^{(d-1)} \mathbb{M}_{\rho_k}(2a_{k+1}) \right)^{\frac{[N_k]+m-1}{2}} \right\} \\
 &\leq c_3 c_4 \widetilde{L}_{k+2}^{(d-1)} L_{k+1} \left\{ \kappa^{-10c_1 L_{k+1}} \varphi_k^{\frac{N_k^2}{12}} + \sum_{m=0}^{N_k+1} \varphi_k^{\frac{[N_k]+m-1}{2}} \right\}
 \end{aligned}$$

en la inducción el primer paso, $k = 0$, está en dentro de las hipótesis del lema, luego asuma que se cumple la afirmación para un k , es decir

$$\varphi_k \leq \kappa^{u_k L_k}$$

de lo cual se puede deducir lo siguiente

- $\varphi_k^{\frac{N_k^2}{24}} \leq \kappa^{\frac{u_k L_k N_k^2}{24}} \Rightarrow \varphi_k^{\frac{N_k^2}{12}} \leq \varphi_k^{\frac{N_k^2}{24}} \kappa^{\frac{u_k L_k N_k^2}{24}}$
- $\frac{[N_k] - 1}{2} \geq \frac{N_k}{4} \Rightarrow \sum_{m=0}^{N_k+1} \varphi_k^{\frac{[N_k]+m-1}{2}} \leq L_{k+1} \varphi_k^{\frac{N_k}{4}}$
- $\varphi_k^{\frac{N_k^2}{4}} \leq L_{k+1} \varphi_k^{\frac{N_k}{4}}$
- $\varphi_k^{\frac{N_k}{8}} \leq \kappa^{\frac{u_k L_k N_k}{8}} \Rightarrow \varphi_k^{\frac{N_k}{4}} \leq \varphi_k^{\frac{N_k}{8}} \kappa^{\frac{u_k L_k N_k}{8}}$

Por otro lado, note que

$$\begin{aligned}
 u_k L_k N_k^2 &= u_0 2^{-3k} \left(\frac{30c_1}{u_0} \right)^k 2^{\frac{3k(k-1)}{2}} L_0 \left(\frac{30c_1}{u_0} \right)^2 2^{6(k+1)} \\
 &= (30c_1) 2^{-3k + \frac{3k(k-1)}{2} + 6k + 6} \left(\frac{30c_1}{u_0} \right)^{k+1} L_0 \\
 &= (240c_1) 2^{3k + \frac{3k(k-1)}{2} + 3} \left(\frac{30c_1}{u_0} \right)^{k+1} L_0 \\
 &= (240c_1) 2^{\frac{3k(k+1)}{2} + 3} \left(\frac{30c_1}{u_0} \right)^{k+1} L_0 \\
 &= 240c_1 L_{k+1}
 \end{aligned}$$

por tanto, se tiene

$$-10c_1 L_{k+1} + \frac{u_k L_k N_k^2}{24} = 0 \quad (5.57)$$

Ahora bien, procediendo con la inducción, utilizando los resultados anteriores, tenemos que volviendo a la desigualdad anterior y utilizando las observaciones anteriores tenemos

$$\begin{aligned}
 \varphi_{k+1} &\leq c_3 c_4 \tilde{L}_{k+2}^{(d-1)} L_{k+1} \left\{ \kappa^{-10c_1 L_{k+1}} \varphi_k^{\frac{N_k^2}{12}} + \sum_{m=0}^{N_k+1} \varphi_k^{\frac{[N_k]+m-1}{2}} \right\} \\
 &\leq c_3 c_4 \tilde{L}_{k+2}^{(d-1)} L_{k+1} \left\{ \varphi_k^{\frac{N_k^2}{24}} + L_{k+1} \varphi_k^{\frac{N_k}{4}} \right\} \quad (\text{por 5.57}) \\
 &\leq 2c_3 c_4 \tilde{L}_{k+2}^{(d-1)} L_{k+1}^2 \varphi_k^{\frac{N_k}{4}} \quad (\text{segundo punto anterior}) \\
 &\leq c_7 \tilde{L}_{k+2}^{(d-1)} L_{k+1}^2 \varphi_k^{\frac{N_k}{8}} \kappa^{\frac{u_k L_k N_k}{8}} \quad (\text{cuarto punto anterior}) \\
 &= c_7 \tilde{L}_{k+2}^{(d-1)} L_{k+1}^2 \varphi_k^{\frac{N_k}{8}} \kappa^{u_{k+1} L_{k+1}} \quad (\text{pues } u_k/8 = u_{k+1} \text{ y } L_k N_k = L_{k+1})
 \end{aligned}$$

Ahora bien, para concluir la prueba, basta con mostrar que

$$c_7 \tilde{L}_{k+2}^{(d-1)} L_{k+1}^2 \varphi_k^{\frac{N_k}{8}} \leq 1$$

para ello, procedemos con una cadena de cotas superiores que permiten visualizar la desigualdad anterior,

$$\begin{aligned}
 c_7 \tilde{L}_{k+2}^{(d-1)} L_{k+1}^2 \varphi_k^{\frac{N_k}{8}} &\leq c_7 \tilde{L}_{k+2}^{(d-1)} L_{k+1}^2 \kappa^{u_{k+1} L_{k+1}} \\
 &= c_7 \left(\frac{L_{k+2}}{L_0} \right)^{3(d-1)} \tilde{L}_0^{(d-1)} L_{k+1}^2 \kappa^{30c_1 L_k} \\
 &\quad \text{(ya que } u_{k+1} L_{k+1} = u_0 2^{-3(k+1)} \frac{30c_1}{u_0} 2^{3(k+1)} L_k) \\
 &\leq c_7 \left(\frac{L_{k+2}}{L_0} \right)^{3(d-1)} L_0^{3(d-1)} L_{k+1}^2 \kappa^{30c_1 L_k} \quad \text{(ya que } \tilde{L}_0 \leq L_0^3) \\
 &= c_7 L_k^{3(d-1)} (N_{k+1} \cdot N_k)^{3(d-1)} L_k^2 N_k^2 \kappa^{30c_1 L_k} \\
 &\leq c_7 L_k^{3d} (N_{k+1} \cdot N_k)^{3(d-1)} N_k^2 \kappa^{30c_1 L_k} \quad (L_k^{-1} \leq 1) \\
 &= c_7 L_k^{3d} (2^3 \cdot N_k^2)^{3(d-1)} N_k^2 \kappa^{30c_1 L_k} \\
 &\leq c_7 L_k^{3d} 2^{9(d-1)} N_k^{6d} \kappa^{30c_1 L_k} \quad \text{(usando que } N_k^{-4} \leq 1)
 \end{aligned}$$

finalmente, como $\kappa \leq 1/2$, entonces si se eligen constantes de modo que $L_0 \geq c_8(d) \geq c_4(d)$, se tiene

$$c_7 L_k^{3d} 2^{9(d-1)} \kappa^{c_1 L_k} \leq 1$$

por otro lado, falta ver que $N_k^{6d} \kappa^{29c_1 L_k}$ también está acotado superiormente por 1. Para ello, se procede de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
 N_k^{6d} \kappa^{29c_1 L_k} &= \left(\frac{30c_1}{u_0} \right)^{6d} 2^{18d(k+1)} \kappa^{29c_1} \left(\frac{30c_1}{u_0} \right)^k 2^{\frac{3k(k-1)}{2}} L_0 \\
 &\leq \left(\frac{30c_1}{u_0} \right)^{6d} 2^{18d(k+1)-29c_1} \left(\frac{30c_1}{u_0} \right)^k 2^{\frac{3k(k-1)}{2}} L_0
 \end{aligned}$$

donde esta última desigualdad es acotada superiormente por 1, si el exponente del 2 es negativo, para que eso ocurra escoja $L_0 \geq c_9(d) \geq c_8(d)$, de modo que se cumpla. \square

Proposición 5.5.2 (Criterio Efectivo, $d \geq 2$, bajo (EU)). *Existe una constante $c_{10} > 3\sqrt{d}$, $c_{11}(d) > 1$ tal que cuando $L_0 \geq c_{10}$ y $3\sqrt{d} < \tilde{L}_0 \leq L_0^3$, y las especificaciones de las cajas \mathcal{B}_0 ,*

$$c_{11} \left(\log \frac{1}{\kappa} \right)^{3(d-1)} \tilde{L}_0^{(d-1)} L_0^{3(d-1)+1} \inf_{a \in (0,1]} \mathbb{M}_{\rho_0}(a) < 1 \quad (5.58)$$

donde ρ_0 como en (5.18), entonces para algún $c > 0$

$$\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \exp \left\{ c (\log L)^{1/2} \right\} \log P_0 \left[\tilde{T}_{-bL}^l < T_{bL}^l \right] < 0 \quad (5.59)$$

Solución. Considere para un tiempo $u_0 \in [\kappa^{L_0/d}, 1]$ y defina L_k, \tilde{L}_k , para $k \geq 0$, por medio de definiciones dadas en (5.15). Observe que en las notaciones anteriores

$$\tilde{L}_1^{(d-1)} L_0 = \left(\frac{\alpha c_1}{u_0} \right)^{3(d-1)} \tilde{L}_0^{(d-1)} L_0$$

y el máximo de la función $u_0 \in [\kappa^{L_0/d}, 1] \rightarrow u_0^{3(d-1)} \kappa^{u_0 L_0}$ es $c(d) \left(L_0 \log \frac{1}{\kappa} \right)^{-3(d-1)}$, dado que $L_0 \geq c_{10}(d) (\geq c_6)$. Como consecuencia, escogiendo $c_{11}(d)$ lo suficientemente grande, se puede garantizar que se cumple (5.58) para algún $L_0 \geq c_{10}$, $3\sqrt{d} < \tilde{L}_0 \leq L_0^3$, entonces (5.5.1) se cumple para algún $a_0 \in (0, 1]$, $u_0 \in [\kappa^{L_0/d}, 1]$. Por tanto, en vista del lema (5.5.1), (5.56) se cumple para todo $k \geq 0$.

Entonces considere $b, \tilde{b} > 0$. Para L grande, se puede encontrar un único k con

$$L_k \leq \tilde{b}L < L_{k+1} \quad (5.60)$$

Denotando por C el cilindro truncado discreto:

$$C = \left\{ x \in \mathbb{Z}^d; : |x|_{\perp} \leq \frac{bL}{L_k} \tilde{L}_k, \quad x \cdot l \in (-\tilde{b}L, bL) \right\}. \quad (5.61)$$

Como resultado de (5.56) y que $\mathbb{E}[q_k] \leq \mathbb{E}[\rho_k^{a_k}]$, para L grande

$$\mathcal{H} = \left\{ \text{para algún } x \in C, q_k \circ t_x \geq \kappa^{\frac{1}{2}u_k L_k} \right\} \quad (5.62)$$

$$\mathbb{P}[\mathcal{H}] \leq |C| \kappa^{\frac{1}{2}u_k L_k} \quad (\text{con notaciones utilizadas})$$

Una aplicación de la propiedad fuerte de Markov muestra que sobre \mathcal{H}^c :

$$P_{0,\omega} \left[T_{bL}^l < \tilde{T}_{-bL}^l \right] \geq \left(1 - \kappa^{\frac{1}{2}u_k L_k} \right) \left(\left\lceil \frac{bL}{L_k} \right\rceil + 1 \right), \quad (5.63)$$

para algún $c > 0$, y L lo suficientemente grande,

$$\begin{aligned} P_0[\tilde{T}_{-bL}^l < T_{bL}^l] &\leq \left(|C| + \frac{bL}{L_k} + 1 \right) \kappa^{\frac{1}{2}u_k L_k} \\ &\leq \exp \left\{ -\tilde{b}L \exp \left\{ -c(\log \tilde{b}L)^{1/2} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (5.64)$$

usando los resultados (5.17), así como (5.60) en el último paso. Se obtiene el resultado deseado. \square

Solución 5.5.1. Defina $c_{12} = 2^{(d-1)}c_{11}$ y primero se muestra que (i) implica (ii). Como consecuencia de (i) se tiene que para algún $L \geq c_{10}$, $\tilde{L} \in [3\sqrt{d}, L^3]$ y $a \in (0, 1]$

$$c_{11} \left(\log \frac{1}{\kappa} \right)^{3(d-1)} \tilde{L}'^{(d-1)} L^{3(d-1)+1} \mathbb{E}[\rho_{\mathcal{B}}^a] < 1 \quad (5.65)$$

con $\tilde{L}' = (\tilde{L} + 1) \wedge L^3 > \tilde{L}$.

Si \mathcal{B}' denotado por las especificaciones $(R', L-1, L+1, \tilde{L}')$, entonces cuando la rotación R' es cercana a la rotación R ,

$$p_{\mathcal{B}} \leq p_{\mathcal{B}'} \implies \rho_{\mathcal{B}'} \leq \rho_{\mathcal{B}}$$

Como resultado, siempre que R' esté lo suficientemente cerca de R , la caja con especificación \mathcal{B}' cumple que

$$\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} L^{-\rho} \log P_0 \left[\tilde{T}_{-bL}^{l'} < T_L^{l'} \right], \quad \forall \rho \in (0, 1), b > 0 \text{ con } l' = R'(e_1) \quad (5.66)$$

En vista del corolario anterior se deduce (ii).

Para mostrar (iii) implica (i), proceda a elegir la rotación R tal que $R(e_1) = l$ y elija $A > 0$ grande, $\epsilon > 0$, pequeño, de modo que se pueda asegurar que para L grande y $\omega \in \Omega$, se cumple

$$P_{0,\omega} \left[T_{L/\epsilon}^{\tilde{\nu}} = T_{C^{\epsilon,L}} \right] \leq p_{\mathcal{B}(\omega)}, \quad \text{si } \mathcal{B} = (R, L-2, L+2, \tilde{L} = AL) \quad (5.67)$$

Para L grande, $a \in (0, 1]$ y $c > 0$:

$$\mathbb{E}[\rho_{\mathcal{B}}^a] \leq \mathbb{E}[\rho_{\mathcal{B}}^a, p_{\mathcal{B}} \geq e^{-cL^\gamma}] + \mathbb{E}[\rho_{\mathcal{B}}^a, p_{\mathcal{B}} < e^{-cL^\gamma}] \quad (5.68)$$

usando la definición de ρ y la desigualdad de Jensen, es posible acotar el primer término. Para controlar el segundo término, se tiene que para L grande, a y c como antes

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\rho_{\mathcal{B}}^a] &\leq e^{acL^\gamma} \mathbb{E}[q_{\mathcal{B}}]^a + \kappa^{-2c_1aL} \mathbb{P}[q_{\mathcal{B}} \geq 1 - e^{-cL^\gamma}] \\ &\leq e^{acL^\gamma} P_0 \left[T_{L/\epsilon}^{\widehat{v}} > T_{C^{\epsilon,L}} \right]^a + (1 - e^{-cL^\gamma})^{-1} \kappa^{-2c_1aL} P_0 \left[T_{L/\epsilon}^{\widehat{v}} > T_{C^{\epsilon,L}} \right] \end{aligned} \quad ((5.67))$$

Por el lema anterior, tomando $a = L^{-1/2}$ y $c > 0$ suficientemente pequeño, se obtiene

$$\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} L^{-(\gamma - \frac{1}{2})} \log \mathbb{E} \left[\rho_{\mathcal{B}}^{L^{-\frac{1}{2}}} \right] < 0$$

esto implica (i). □

5.6 Condición polinomial implica T'

5.6.1 Cajas buenas

Definición 5.6.1 (Cajas buenas). *Decimos que una caja $B_0 := B(x, 0) \in \mathfrak{B}_0$ es buena (bajo un ambiente fijo $\omega \in \Omega$) si*

$$\inf_{x \in \widetilde{B}_0} P_{x, \omega} (H_{\partial B_0} = H_{\partial_+ B_0}) \geq 1 - N_0^{-5} \quad (5.69)$$

De lo contrario, se dice que la caja es mala. Para cajas de escalas $k \geq 1$, se dice que es buena si existe una caja $Q_{k-1} \in \mathfrak{B}_{k-1}$ tal que para cada caja $B_{k-1} \in \mathfrak{B}_{k-1}$ que satisface

$$B_{k-1} \cap B_k \neq \emptyset \quad \wedge \quad B_{k-1} \cap Q_{k-1} = \emptyset$$

es buena.

Lema 5.6.1. *Sea $l \in \mathbb{S}^{d-1}$. Asumiendo que se cumple $(\mathcal{P})_M | l$, entonces para todo $B_0 \in \mathfrak{B}_0$ y $N_0 \geq c_0$ se tiene*

$$\mathbb{P}(B_0 \text{ es buena}) \geq 1 - 2^{d-1} N_0^{3d+4-M}$$

Prueba. Note que

$$\mathbb{P}(B_0 \text{ es mala}) \leq \sum_{x \in \tilde{B}_0} \mathbb{P}\left(P_{x,\omega}(H_{\partial B_0} \neq H_{\partial_+ B_0}) \geq N_0^{-5}\right) \quad (5.70)$$

pero por la desigualdad de Markov se tiene que

$$\mathbb{P}\left(P_{x,\omega}(H_{\partial B_0} \neq H_{\partial_+ B_0}) \geq N_0^{-5}\right) \leq N_0^5 \sup_{x \in \tilde{B}_0} P_x(H_{\partial B_0} \neq H_{\partial_+ B_0}). \quad (5.71)$$

Luego uniendo los resultados (5.70), 5.71 y la definición 5.4.2 se obtiene

$$\mathbb{P}(B_0 \text{ es mala}) \leq N_0^5 N_0^{-M} \cdot \text{Vol}(\tilde{B}_0) = N_0^5 N_0^{-M} \cdot \frac{2^d}{3} N_0^{3d+3-M}$$

como N_0 es un número par que cumple $N_0 > c_0$, entonces se tiene que

$$\frac{2^d}{3} N_0^{3d+3-M} \leq 2^{d-1} N_0^{3d+4-M}$$

obteniendo de esta forma el resultado deseado. □

Lema 5.6.2. Sea $M > 15d + 5$ y $N_0 \geq c_0$. Defina para $k \in \mathbb{N}$

$$c'_k = \left(12d + \frac{2}{3}\right) \ln N_0 - \sum_{j=1}^k \frac{12 \ln 90(j + N_0)}{2^j}$$

donde $c'_0 = (M - 3d - 4 - 1/3) \ln N_0$. Entonces

$$\inf_{k \in \mathbb{N}_0} c'_k \geq 1. \quad (5.72)$$

Prueba. Note que $c'_k - c'_{k-1} = -\frac{12d \ln 90(k + N_0)}{2^k}$, entonces

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^k c'_j - c'_{j-1} &= - \sum_{j=1}^k \frac{12d \ln 90(j + N_0)}{2^j} \\
 c'_k - c'_0 &= - \sum_{j=1}^k \frac{12d \ln 90(j + N_0)}{2^j} \\
 c'_k &= c'_0 - \sum_{j=1}^k \frac{12d \ln 90(j + N_0)}{2^j} \\
 c'_k &\geq c'_0 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{12d \ln 90(j + N_0)}{2^j} \tag{5.73}
 \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es válida ya que $\frac{12d \ln 90(j + N_0)}{2^j} \geq 0$ y por tanto se tiene

$$\sum_{j=1}^k \frac{12d \ln 90(j + N_0)}{2^j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{12d \ln 90(j + N_0)}{2^j}$$

A partir de la desigualdad (5.73) se desea comparar $c'_0 := (12d + 2/3) \ln N_0$ con la suma, pero basta notar que

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{12d \ln 90(j + N_0)}{2^j} &= 12d \left(\ln 90 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\ln(j + N_0)}{2^j} \right) \\
 &\leq (12d + 1/2) \ln N_0 \tag{5.74}
 \end{aligned}$$

De esta forma, se tiene que

$$c'_k \geq (12d + 2/3) \ln N_0 - (12d + 1/2) \ln N_0 = \frac{1}{6} \ln N_0 > 1$$

De esta forma se obtiene que $\inf_{k \in \mathbb{N}_0} c'_k \geq 1$. □

Proposición 5.6.1. Para $l \in \mathbb{S}^{d-1}$, $M > 15d + 5$ y asumiendo la condición polinomial $(\mathcal{P})_M | l$; se tiene que para $N_0 \geq c_0$ y $\forall k \in \mathbb{N}_0$, $B_k \in \mathfrak{B}_k$ que

$$\mathbb{P}(B_k \text{ es buena}) \geq 1 - e^{-2^k} \tag{5.75}$$

Prueba. Por simplicidad, se va a denotar

$$p_k = \mathbb{P}(B_k \text{ es buena}) \quad \text{y} \quad q_k = 1 - p_k = \mathbb{P}(B_k \text{ es mala})$$

La prueba consiste en demostrar por inducción que

$$p_k \geq 1 - e^{-c'_k 2^k} \tag{5.76}$$

para todo $k \in \mathbb{N}_0$, donde c'_k como en (5.6.2).

Paso inicial: Como $N_0 \geq c_0 \geq 2^{3d-3}$, se tiene que $2^{d-1} \leq N_0^{1/3}$, entonces por el lema (??) obtenemos las desigualdades

$$\begin{aligned} p_0 &\geq 1 - 2^{d-1} N_0^{3d+4-M} \\ &\geq 1 - N_0^{3d+4-M+1/3} \\ &= 1 - e^{-(M-3d-4-1/3) \ln N_0}, \end{aligned}$$

finalmente, dado que $M > 15d + 5$

$$p_0 \geq 1 - e^{-(12d+2/3) \ln N_0} = 1 - e^{-c'_0 2^0}$$

lo que permite concluir el primer paso.

Paso inductivo: Asuma que $p_{k-1} \geq 1 - e^{-c'_{k-1} 2^{k-1}}$ y sean $B_{k-1,1}, B_{k-1,2}, \dots, B_{k-1,m_k}$ todas las m_k cajas de escala $k-1$ que intersecan a B_k . La caja B_k es mala si cada dos cajas malas de las m_k tienen intersección no vacía. Entonces, para probar $p_k \geq 1 - e^{-c'_k 2^k}$, procedemos a estimar por arriba a q_k . Iniciamos por ver que

$$q_k \leq \binom{m_k}{2} q_{k-1}^2$$

Note que para $k \geq 1$, la cantidad de cajas que intersecan a B_k se estima por

$$m_k \leq (30 \cdot 3(k + N_0))^{6d}$$

por la hipótesis de inducción se tiene que

$$\begin{aligned}
 q_k &\leq (90(k + N_0))^{12d} \cdot (\exp\{-c'_{k-1}2^{k-1}\})^2 \\
 &\leq \exp\{\ln(90(k + N_0))^{12d} - c'_{k-1}2^k\}^2 \\
 &= \exp\{-(c'_{k-1} - 12d \ln 90(k + N_0))2^k\} \\
 &= e^{-c'_k 2^k}
 \end{aligned}$$

como $-c'_k \leq -1$ para todo $k \geq 1$, se concluye

$$q_k \leq e^{-2^k}$$

lo que finaliza la prueba. □

5.6.2 Resultados previos

Proposición 5.6.2. *Sea $N_0 \geq c_0$. Entonces existe una constante $c_4 > 0$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}_0$ y $B_k \in \mathfrak{B}_k$ que es buena con respecto a ω , se cumple*

$$\sup_{x \in \tilde{B}_k} P_{x,\omega}(H_{\partial B_k} \neq H_{\partial_+ B_k}) \leq \exp\{-c_4 N_k\}$$

Solución. Note que

$$P_{x,\omega}(H_{\partial B_k} \neq H_{\partial_+ B_k}) \leq P_{x,\omega}(H_{\partial B_k} = H_{\partial_- B_k}) + P_{x,\omega}(H_{\partial B_k} = H_{\partial_S B_k})$$

La prueba consiste en utilizar inducción matemática para mostrar que

$$\sup_{x \in \tilde{B}_k} P_{x,\omega}(H_{\partial B_k} = H_{\partial_S B_k}) \leq \exp\{-c''_k N_k\} \tag{5.77}$$

$$\sup_{x \in \tilde{B}_k} P_{x,\omega}(H_{\partial B_k} = H_{\partial_- B_k}) \leq \exp\{-c'_k N_k\} \tag{5.78}$$

donde se define

$$c'_k = \frac{5 \ln N_0}{N_0} - \sum_{j=1}^k \frac{\ln 30(N_0 + j)^4}{N_{j-1}}$$

$$c''_k = \frac{5 \ln N_0}{N_0} - \sum_{j=1}^k \left(\frac{4 \ln 3}{N_{j-1}} + \frac{2N_{j-1} + 3N_{j-1} \ln 3 + 2 \ln 6 - 3c_1 N_{j-1} \ln \kappa}{N_j} \right)$$

donde definiendo $c_4 := \inf_{k \in \mathbb{N}_0} (c'_k) \wedge \inf_{k \in \mathbb{N}_0} (c''_k) > 0$ se obtiene el resultado deseado. Iniciamos la prueba de (5.77) y (5.78).

Para $k = 0$: Como B_0 es una caja buena, entonces por definición

$$\sup_{x \in \tilde{B}_0} P_{x, \omega}(H_{\partial B_0} \neq H_{\partial_+ B_0}) \leq N_0^{-5} = \exp \left\{ - \left(\frac{5 \ln N_0}{N_0} \right) N_0 \right\}$$

por tanto se cumple.

Paso inductivo: Asuma que se cumple (5.77) y (5.78) para $k - 1$. Defina recursivamente los tiempos de parada $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ por: ϕ_1 el primer instante en que la caminata deja una caja B_{k-1} cuya parte frontal contiene al punto $x \in \tilde{B}_k$. Para $n \geq 1$, ϕ_{n+1} es el primer instante en que la caminata deja la caja cuya parte frontal contiene al punto X_{ϕ_n} , es decir,

$$\phi_1 = \inf \{ n \in \mathbb{N}_0 : X_n \notin B_{k-1} \wedge x \in \tilde{B}_k \cap \tilde{B}_{k-1} \text{ para alguna } B_{k-1} \in \mathfrak{B}_{k-1} \text{ que interseca a } B_k \}$$

o bien

$$\phi_1 := \{ T_{B_{k-1}}(X) : \exists B_{k-1} \cap B_k \neq \emptyset \text{ con } x \in \tilde{B}_{k-1} \cap \tilde{B}_k \}$$

y para $n > 1$,

$$\phi_{n+1} = \inf \{ n \in \mathbb{N}_0 : X_n \notin B_{k-1} \wedge X_{\phi_n} \in \tilde{B}_{k-1} \text{ para alguna } B_{k-1} \in \mathfrak{B}_{k-1} \text{ que interseca a } B_k \}$$

o bien esta alternativa es para hacer uso de la notación de tiempos de salida de un conjunto.

$$\phi_{n-1} := \{ T_{B_{k-1}}(X) : \exists B_{k-1} \cap B_k \neq \emptyset \text{ con } X_{\phi_n} \in \tilde{B}_{k-1} \}$$

Si existe más de una caja que cumple lo anterior se elige una. Considere la caminata reescalada definida por

$$Y_0 := x \quad \text{y} \quad Y_n := X_{\phi_n} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Como la caja B_k es buena, existe una caja buena $Q_{k-1} \in \mathfrak{B}_{k-1}$ que no interseca a ninguna caja de escala $k-1$ que interseque a B_k . Con esta idea, se define

$$\mathfrak{B}_{Q_{k-1}} := \left\{ B_{k-1} \in \mathfrak{B}_{k-1} : B_{k-1} \cap B_k \neq \emptyset \text{ y existe } z \in B_{k-1} \text{ tal que } \bigvee_{l^\perp} (z, Q_{k-1}) < 1 \right\};$$

Es decir, $\mathfrak{B}_{Q_{k-1}}$ es la colección de cajas de escala $k-1$ que, ortogonalmente a l , están cerca de la caja Q_{k-1} . Luego, defina la zona

$$\mathcal{Q}_{k-1} := \bigcup_{B_{k-1} \in \mathfrak{B}_{Q_{k-1}}} B_{k-1};$$

Sean m_1, m_2 y m_3 tres momentos de la caminata reescalada (Y_n) , dados por

$$\begin{aligned} m_1 &:= \inf \left\{ n \in \mathbb{N}_0 : \bigvee_{l^\perp} (Y_n, \mathcal{Q}_{k-1}) \geq 7N_k^3 \quad \text{y} \quad \bigvee_{l^\perp} (Y_n, \partial_s B_k) \geq 7N_k^3 \right\}. \\ m_2 &:= \inf \{ n \in \mathbb{N}_0 : Y_n \notin B_k \}. \\ m_3 &:= \inf \{ n > m_1 : Y_n \in \mathcal{Q}_{k-1} \} \leq \infty \end{aligned}$$

Note que se cumple

$$P_{x,\omega}(m_1 < m_2 < \infty \mid H_{\partial B_k} = H_{\partial_s B_k}) = 1$$

Entonces, el valor $m' := (m_2 \wedge m_3) \circ \theta_{m_1}$ está bien definido sobre $\{H_{\partial B_k} = H_{\partial_s B_k}\}$. Sea

$$J_k := 2 \frac{3N_k/2}{N_{k-2} + 1}$$

se cumple que

$$P_{x,\omega} \left(m' \geq \frac{7N_k^3}{30N_{k-1}^3} \geq J_k \frac{N_k}{20N_{k-1}} \mid H_{\partial B_k} = H_{\partial_s B_k} \right) = 1 \quad (5.79)$$

Si la secuencia (Y_n) parte de algún $y \in B_k$ tal que

$$\min \left\{ \bigvee_{l^\perp} (y, \partial_s B_k), \bigvee_{l^\perp} (y, \mathcal{Q}_{k-1}) \right\}$$

y continuamente deja J_k cajas de escala $k-1$, entonces al menos 20 de tales cajas debieron haberse abandonado por la parte no frontal de su frontera. Por tanto, se tiene

$$P_{y,\omega}(Y_j \in B_k \quad \forall j \in \{1, \dots, J_k\}) \leq J_k^{20} (\exp\{-c'_{k-1} N_{k-1}\})^{20}.$$

Este resultado en combinación con (5.79) y la propiedad de Markov aplicada a los tiempos de parada que son múltiplos de J_k , concluye que

$$\begin{aligned} P_{x,\omega}(H_{\partial B_k} = H_{\partial_s B_k}) &= P_{x,\omega} \left(m' \geq J_k \frac{N_k}{20N_{k-1}}, H_{\partial B_k} = H_{\partial_s B_k} \right) \\ &\leq \left(\exp\{-20c'_{k-1} N_{k-1} + 20 \ln J_k\} \right)^{\frac{N_k}{20N_{k-1}}} \\ &\leq \exp\{-c'_k N_k\}. \end{aligned}$$

Esto completa la prueba de la afirmación (5.77) para k .

Prueba de (5.78): Asuma que (5.78) se cumple para $k-1$ y (5.77) se cumple para para todo k . La prueba se basa en la comparación de la l - coordenada de la caminata reescalada (Y_n) con una caminata uno dimensional con un drift.

Sea $B_k \in \mathfrak{B}_k$ una caja buena de escala k , la cual sin pérdida de generalidad es de la forma $B_k = B(0, k)$. Entonces, existe una caja $Q_{k-1} \in \mathfrak{B}_{k-1}$ tal que para cada caja B_{k-1} que interseca a la caja buena pero no a Q_{k-1} , es buena. Defina,

$$\begin{aligned}
 L_{Q_{k-1}} &:= \min_{z \in Q_{k-1}} \{l \cdot z - N_{k-2} - 1\} \\
 R_{Q_{k-1}} &:= \max_{z \in Q_{k-1}} \{l \cdot z + N_{k-1}/2 + 1\} \\
 H^{(Q_{k-1})} &:= \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \{X_n \cdot l \in [L_{Q_{k-1}}, R_{Q_{k-1}}]\}
 \end{aligned}$$

Considere la siguiente caminata aleatoria (Z_n) uni-dimensional que posee un drift, donde la probabilidad de transición para $x \in [[L_{Q_{k-1}}, R_{Q_{k-1}}]] := [L_{Q_{k-1}}, R_{Q_{k-1}}] \cap \mathbb{Z}$ es,

$$P_x(y) = \begin{cases} \kappa^{c_1 N_{k-2}} & \text{si } y = x + N_{k-2}, \\ 1 - \kappa^{c_1 N_{k-2}} & \text{si } y = x - N_{k-1}. \end{cases}$$

donde P_x es la probabilidad condicional sobre $\{Z_0 = x\}$. Si se demuestra que

$$\sup_{x \in \tilde{B}_k} P_{x,\omega} \left(H^{(Q_{k-1})} < H_{\partial_+ B_k} \wedge H_{\partial_s B_k} \right) \leq \exp\{-c'_k N_k\} + 3 \exp \left\{ - \left(c''_{k-1} - \frac{\ln 2}{N_{k-1}} \right) \times (N_k - 2N_{k-1} - R_{Q_{k-1}}) \right\} \quad (5.80)$$

y que

$$\sup_{y \in [[L_{Q_{k-1}}, R_{Q_{k-1}}]]} P_y \left(H_{N_k/2}^{-e_1}(Z) < H_{N_k}^{e_1}(Z) \right) \leq 6\kappa^{-3c_1 N_{k-1}} \left(\exp\{-c''_k N_{k-1}\} \right)^{\frac{L_{Q_{k-1}} + N_k/2}{N_{k-1}}} \quad (5.81)$$

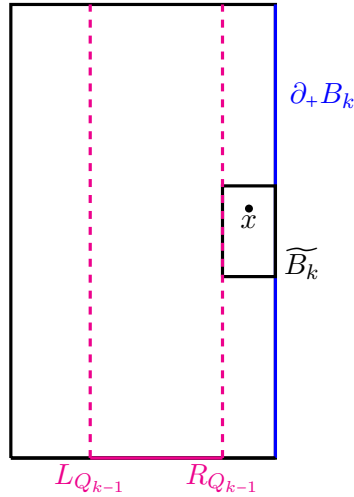
entonces esta combinación demuestra (5.78) tal como se mostrará. Para ver la desigualdad (5.80), observe que el lado izquierdo se puede estimar de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
 & \sup_{x \in \widetilde{B}_k} P_{x,\omega} \left(H^{(Q_{k-1})} < H_{\partial_+ B_k} \wedge H_{\partial_s B_k} \right) \\
 & \leq \sup_{x \in \widetilde{B}_k} P_{x,\omega} \left(H^{(Q_{k-1})} < H_{\partial_+ B_k} \wedge H_{\partial_s B_k}, H_{\partial B_k} = H_{\partial_s B_k} \right) \\
 & + \sup_{x \in \widetilde{B}_k} P_{x,\omega} \left(H^{(Q_{k-1})} < H_{\partial_+ B_k} \wedge H_{\partial_s B_k}, H_{\partial B_k} \neq H_{\partial_s B_k} \right) \\
 & \leq \sup_{x \in \widetilde{B}_k} P_{x,\omega} \left(H_{\partial B_k} = H_{\partial_s B_k} \right) + \sup_{x \in \widetilde{B}_k} P_{x,\omega} \left(H^{(Q_{k-1})} < H_{\partial_+ B_k}, H_{\partial B_k} \neq H_{\partial_s B_k} \right) \\
 & \leq \exp\{-c' N_k\} + \sup_{x \in \widetilde{B}_k} P_{x,\omega} \left(H^{(Q_{k-1})} < H_{\partial_+ B_k}, H_{\partial B_k} \neq H_{\partial_s B_k} \right) \tag{5.82}
 \end{aligned}$$

En la última desigualdad se ha hecho uso de la prueba por inducción de (5.77). Ahora para estimar el término

$$P_{x,\omega} \left(H^{(Q_{k-1})} < H_{\partial_+ B_k}, H_{\partial B_k} \neq H_{\partial_s B_k} \right)$$

se compara probabilidades de salida para $Y \cdot l$ con aquellas para Z .



Note que

$$P_{x,\omega} \left(H^{(Q_{k-1})} < H_{\partial_+ B_k}, H_{\partial B_k} \neq H_{\partial_s B_k} \right) = P_{[x \cdot l]} \left(H_{R_{Q_{k-1}}}^{-e_1}(Z) < H_{N_k}^{e_1}(Z) \right)$$

Por otro lado,

$$P_{\lfloor x \cdot l \rfloor} \left(H_{R_{Q_{k-1}}}^{-e_1}(Z) < H_{N_k}^{e_1}(Z) \right) \leq 3 \left(\exp \left\{ -c''_{k-1} N_{k-1} + \log 2 \right\} \right)^{\frac{\lfloor x \cdot l \rfloor - R_{Q_{k-1}} - N_{k-1}}{N_{k-1}}}$$

Como se toma el supremo sobre los $x \in \tilde{B}_k = \{y \in \mathbb{Z}^d : N_k - N_{k-1} \leq y \cdot l < N_k, |y \cdot l_j| \leq N_k^3, \forall 2 \leq j \leq d\}$ y por la definición de $\lfloor \bullet \rfloor$ podemos concluir que

$$\lfloor x \cdot l \rfloor - R_{Q_{k-1}} - N_{k-1} \geq N_k - N_{k-1} - R_{Q_{k-1}} - N_{k-1} = N_k - 2N_{k-1} - R_{Q_{k-1}}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \left(-c''_{k-1} N_{k-1} + \log 2 \right) \frac{\lfloor x \cdot l \rfloor - R_{Q_{k-1}} - N_{k-1}}{N_{k-1}} &= - \left(c''_{k-1} - \frac{\log 2}{N_{k-1}} \right) \left(\lfloor x \cdot l \rfloor - R_{Q_{k-1}} - N_{k-1} \right) \\ &\leq - \left(c''_{k-1} - \frac{\log 2}{N_{k-1}} \right) \left(N_k - 2N_{k-1} - R_{Q_{k-1}} \right) \end{aligned}$$

Así la ecuación (5.82) se puede expresar de la forma,

$$\begin{aligned} &\exp \{ -c' N_k \} + \sup_{x \in \tilde{B}_k} P_{x, \omega} \left(H^{(Q_{k-1})} < H_{\partial_+ B_k}, H_{\partial B_k} \neq H_{\partial_s B_k} \right) \\ &\leq \exp \{ -c' N_k \} + 3 \exp \left\{ - \left(c''_{k-1} - \frac{\log 2}{N_{k-1}} \right) \left(N_k - 2N_{k-1} - R_{Q_{k-1}} \right) \right\} \end{aligned}$$

De esta manera se concluye (5.80). Para obtener la desigualdad (5.81) para $y \in [[L_{Q_{k-1}}, R_{Q_{k-1}}]]$ defina los eventos D^+ y D^- de la siguiente manera,

$$D^+ := \{ H_{N_k}(Z) < H_y \circ \theta_1(Z) \} \quad \text{y} \quad D^- := \{ H_{-N_k/2}(Z) < H_y \circ \theta_1(Z) \}$$

Donde $H_z(Y) = \inf \{ n \in \mathbb{N}_0 : Y_n \in \{z\} \}$. Observe que

$$\begin{aligned}
 & \sup_{y \in [[L_{Q_{k-1}}, R_{Q_{k-1}}]]} P_y(H_{N_k/2}^{-e_1}(Z) < H_{N_k}^{e_1}(Z)) \\
 & \leq \sup_{y \in [[L_{Q_{k-1}}, R_{Q_{k-1}}]]} \frac{P_y(D^-)}{P_y(D^+) + P_y(D^-)} \\
 & \leq \sup_{y \in [[L_{Q_{k-1}}, R_{Q_{k-1}}]]} \frac{P_y(D^-)}{P_y(D^+)}
 \end{aligned} \tag{5.83}$$

Considerando que

$$R_{Q_{k-1}} \leq L_{Q_{k-1}} + 3N_{k-1}$$

y la hipótesis **(EU)** permiten obtener la siguiente desigualdad,

$$P_y(D^+) \geq (1 - \exp\{-c''_{k-1}N_{k-1}\})^{\frac{3N_k}{2N_{k-2}\kappa^{3c_1N_{k-1}}}} \geq \frac{1}{2}\kappa^{3c_1N_{k-1}} \tag{5.84}$$

mientras que por la propiedad fuerte de Markov en combinación con los cálculos de la caminata aleatoria uni-dimensional se obtiene

$$P_y(D^-) \leq 3(1 - \exp\{-c''_{k-1}N_{k-1}\})^{\frac{L_{Q_{k-1}} + N_k/2}{N_{k-1}}} \tag{5.85}$$

Con los resultados (5.83) y los obtenidos en (5.84) y (5.85) se sigue (5.81).

Note que para $x \in \tilde{B}_k$ sobre el evento $\{H_{\partial B_k} = H_{\partial_- B_k}\}$ se tiene que

$$P_{x,\omega}(H^{(Q_{k-1})} < H_{\partial_+ B_k} \wedge H_{\partial_S B_k}) = 1$$

ahora es posible aplicar la propiedad fuerte de Markov y (5.81) así como (5.80) para obtener que

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in \widehat{B}_k} P_{x,\omega}(H_{\partial B_k} = H_{\partial_- B_k}) &\leq \sup_{x \in \widehat{B}_k} P_{x,\omega}(H^{(Q_{k-1})} < H_{\partial_+ B_k} \wedge H_{\partial_S B_k}) \\
&\times \sup_{y \in [[L_{Q_{k-1}}, R_{Q_{k-1}}]]} P_y(H_{-N_k/2}(Z) < H_{N_k}(Z)) \\
&\leq \left(e^{-c_k N_k} + 3 \exp \left\{ - \left(c''_{k-1} - \frac{\ln 2}{N_{k-1}} \right) (N_k - 2N_{k-1} - R_{Q_{k-1}}) \right\} \right) \\
&\times 6\kappa^{-3c_1 N_{k-1}} \left(3 \exp \{ -c''_{k-1} N_{k-1} \} \right)^{\frac{L_{Q_{k-1}} + N_k/2}{N_{k-1}}} \\
&\leq \exp \left\{ -N_k \left(c''_{k-1} - 4 \frac{\ln 3}{N_{k-1}} - \frac{2N_{k-1} + 3N_{k-1} \ln 3 + 2 \ln 6 - 3c_1 N_{k-1} \ln \kappa}{N_k} \right) \right\}
\end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de que $c''_{k-1} \leq 1$. □

5.6.3 Resultados Auxiliares

Proposición 5.6.3 (*Sharpened average exit estimates*). *Asuma (IID) y (EU). Sea $M > 15d + 5$ y $l \in \mathbb{S}^{d-1}$, entonces*

$$(\mathcal{P}_M) \mid lo(\mathcal{P}^*)_M \mid l \quad \Longrightarrow \quad (T)_{\gamma_L} \mid l \text{ se cumple.}$$

Prueba. Para aplicar los resultados previos, para $L > N_0$ definimos de forma implícita K_L , que cumple $N_{K_L+1} + 1 \geq L > N_{K_L} + 1$, lo cual nos permite obtener

$$K_L \sim \gamma_L \cdot \frac{\ln L}{\ln 2}, \quad L \rightarrow \infty \tag{5.86}$$

Ahora defina los conjuntos

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_L^l &:= [-N_{K_L}, 11N_{K_L+1}] \\
&\times [-3(10N_{K_L})^3(N_0 + K_L - 1)^2(N_0 + K_L)^2, (10N_{K_L})^3(N_0 + K_L - 1)^2(N_0 + K_L)^2]^{d-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_+ \mathcal{S}_L^l &:= (11N_{K_L+1}, \infty) \\
&\times [-3(10N_{K_L})^3(N_0 + K_L - 1)^2(N_0 + K_L)^2, (10N_{K_L})^3(N_0 + K_L - 1)^2(N_0 + K_L)^2]^{d-1}
\end{aligned}$$

Para L grande, uno tiene

$$\begin{aligned}
 P_0(H_{\partial\mathcal{D}_L^l} \neq H_{\partial_+\mathcal{D}_L^l}) &\leq P_0(H_{\partial S_L^l} \neq H_{\partial_+ S_L^l}) \\
 &\leq P_0(\text{ Toda } B_{K_L} \in \mathfrak{B}_{K_L} : B_{K_L} \cap S_L^l \neq \emptyset \text{ es buena, } H_{\partial S_L^l} \neq H_{\partial_+ S_L^l}) \quad (5.87) \\
 &\quad + P_0(\text{ Existe } B_{K_L} \in \mathfrak{B}_{K_L} \text{ que interseca } S_L^l \text{ que es mala}).
 \end{aligned}$$

Para $L > N_0$ y usando la proposición (5.6.1) se estima el segundo término de la suma por arriba de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 &P_0(\text{ Existe } B_{K_L} \in \mathfrak{B}_{K_L} \text{ que interseca } S_L^l \text{ que es mala}) \\
 &\leq 2|\mathcal{L}_{N_{K_L-1}, N_{K_L}^3} \cap S_L^l| \exp\{-2^{K_L}\} \\
 &\leq 2 \cdot 3000^d (N_0 + K_L - 1)^{3d} (N_0 + K_L)^{3d} \exp\{-2^{K_L}\} \\
 &\leq \exp\{-L^{(1+o(1))\gamma_L}\}
 \end{aligned}$$

utilizando (5.86) en la última desigualdad.

Ahora falta acotar la primera parte de (5.87). Para ello, note que si la caminata deja

$$100(N_0 + K_L - 1)^2 (N_0 + K_L)^2 \quad (5.88)$$

cajas de \mathfrak{B}_{K_L} consecutivamente por sus partes frontales, entonces ocurre el evento $\{H_{\partial S_L^l} = H_{\partial_+ S_L^l}\}$. Por tanto, es posible acotar el evento $\{H_{\partial S_L^l} \neq H_{\partial_+ S_L^l}\}$ por arriba con el evento de que una de las cajas B_{K_L} de escala K_L que la caminata se encuentre la abandona no por su parte frontal, $\partial_+ B_{K_L}$.

Para formalizar lo anterior, para cada $k \in \mathbb{N}$ asocie a $x \in \mathbb{Z}^d$ un elemento $\pi_k(x) \in \mathcal{L}_{N_{k-1}, N_k^3}$ tal que $x \in \tilde{B}(\pi_k(x), k)$. Defina los tiempos de parada de X_n por

$$\begin{aligned}
 D_0^{K_L} &:= 0, \\
 D_j^{K_L} &:= \begin{cases} \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ X_{k+D_{j-1}^{K_L}} \notin B(\pi_k(X_{D_{j-1}^{K_L}}), k) \right\} + D_{j-1}^{K_L} & \text{para } j \geq 1 \text{ si } D_{j-1}^{K_L} < \infty \\ \infty & \text{caso contrario.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Usando esta terminología y la propiedad fuerte de Markov en los tiempos $D_j^{K_L}$ $j \in \mathbb{N}$ es posible acotar por arriba el primer sumando de (5.87)

$$\begin{aligned}
 & P_0(\text{Toda } B_{K_L} \in \mathfrak{B}_{K_L} : B_{K_L} \cap \mathcal{S}_L^l \neq \emptyset \text{ es buena, } H_{\partial \mathcal{S}_L^l} \neq H_{\partial_+ \mathcal{S}_L^l}) \\
 & \leq \mathbb{E} \left(P_{x, \omega}(H_{\partial \mathcal{S}_L^l} \neq H_{\partial_+ \mathcal{S}_L^l}), \text{ todo } B_{K_L} \in \mathfrak{B}_{K_L} \text{ que interseca a } \mathcal{S}_L^l \text{ es buena} \right) \\
 & \leq \mathbb{E} \left(P_{0, \omega}(\exists 1 \leq j \leq 100(N_0 + K_L - 1)^2(N_0 + K_L)^2 : X_{D_j^{K_L}} \notin \partial_+ B(\pi_k(X_{D_{j-1}^{K_L}}), K_L), \right. \\
 & \quad \left. \text{ toda } B_{K_L} \in \mathfrak{B}_{K_L} \text{ que interseca a } \mathcal{S}_L^l \text{ es buena} \right) \\
 & \leq 100(N_0 + K_L - 1)^2(N_0 + K_L)^2 e^{-cN_{K_L}} \times \mathbb{P}(\text{toda } B_{K_L} \in \mathfrak{B}_{K_L} \text{ que interseca a } \mathcal{S}_L^l \text{ es buena}) \\
 & \leq 100(N_0 + K_L - 1)^2(N_0 + K_L)^2 e^{-cN_{K_L}} \\
 & \leq \exp\{-L^{(1+o(1))\gamma_L}\}
 \end{aligned}$$

la segunda desigualdad hace uso de la proposición (5.6.2). Así finaliza la prueba. \square

Proposición 5.6.4 (Estimado atípico de salida bajo la ley Quenched). *Asuma que se cumple (IID) y (EU), además $T_{\gamma_L} | l$. Entonces, para $\epsilon(L) := \frac{1}{(\ln \ln L)^2}$ y para cada función $\beta : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, se tiene*

$$\mathbb{P} \left(P_{o, \omega}(H_{\partial B} = H_{\partial_+ B}) \leq \frac{e^{-c_1 L^\beta}}{2} \right) \leq 5^d \cdot \frac{e}{\lceil L^{\beta(L) - \epsilon(L)} / 5^d \rceil!} \quad (5.89)$$

La prueba se construye sobre las cajas en dirección del vector l , esto es para $R(e_1) = l$, defina

$$\begin{aligned}
 B &= R((-L + 2, L + 2) \times (-L^3 + 1, L^3 + 1)^{d-1}) \\
 D_L^l &= R \left((-L, 10L) \times \left(-\frac{L^3 \ln \ln L}{\ln L}, \frac{L^3 \ln \ln L}{\ln L} \right)^{d-1} \right) \\
 \mathcal{R}_n(x) &= R \left((-2n, 2n) \times \left(-2 \frac{n^3 \ln \ln n}{\ln n}, 2 \frac{n^3 \ln \ln n}{\ln n} \right)^{d-1} \right)
 \end{aligned}$$

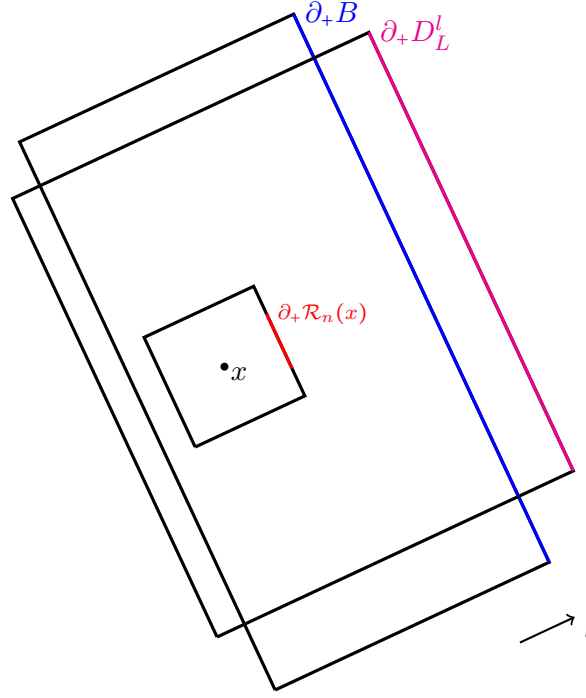


FIGURA. 5.4: Cajas alrededor de x .

Definición 5.6.2. Se dice que el paralelogramo $\mathcal{R}_n(x)$ es malo si

$$\sup_{y \in \tilde{\mathcal{R}}_n(x)} P_{y,\omega} (H_{\partial \mathcal{R}_n(x)} \neq H_{\partial_+ \mathcal{R}_n(x)}) > L^{-1/\ln^2(\ln L)}$$

A partir de la definición de paralelogramos malos de la forma, $\mathcal{R}_n(x)$, la demostración consiste en dividir el espacio ambiente ω en dos partes: la primera es considerar los ambientes ω donde el número de paralelogramos malos que intersecan a la caja B es menor que L^β ; la otra parte corresponde al complemento. Donde en la primera parte, veremos que se cumple

$$\mathbb{P} \left(P_{0,\omega} (H_{\partial B} = H_{\partial_+ B}) > \frac{e^{-c_1 L^{\beta+\epsilon}}}{2} \right) \geq 1 - 5^d \frac{e}{\lfloor L^\beta / 5^d \rfloor!}$$

Ahora estamos listos para realizar la demostración del *estimado atípico quenched*.

Prueba del estimado Quenched atípico. Defina las cantidades

$$\begin{aligned}
 n &:= \lfloor L^{\epsilon(L)} \rfloor \\
 \mathbb{I}_n &:= \mathcal{L}_{n, \frac{n^3 \ln \ln L}{\ln L}} \\
 \mathfrak{P}_n &:= \{\mathcal{R}_n(x) : x \in \mathbb{I}_n\} \\
 J_{L,n} &:= |\{\mathcal{R}_n(x) \in \mathfrak{P}_n : \mathcal{R}_n(x) \cap B \neq \emptyset\}| \\
 N_L &:= |\{\mathcal{R}_n(x) \in \mathfrak{P}_n : \mathcal{R}_n(x) \cap B \neq \emptyset \wedge \mathcal{R}_n(x) \text{ mala}\}| \\
 G_{\beta(L),L} &:= \{N_L < L^{\beta(L)}\} \subset \Omega
 \end{aligned}$$

Como se cumple la condición $T_{\gamma_L} |l$, entonces se tiene

$$\sup_{y \in \tilde{\mathcal{R}}_n(0)} P_y(H_{\partial \mathcal{R}_n(0)} \neq H_{\partial_+ \mathcal{R}_n(0)}) \leq e^{-n^{(1+o(1)) \frac{\ln 2}{\ln \ln n}}}, \quad n \longrightarrow \infty \quad (5.90)$$

Por otro lado, por la desigualdad de Markov, la invariancia bajo traslaciones (bajo \mathbb{P}) de \mathbb{Z}^d , así como la comparación (5.90); es posible estimar la probabilidad de que un paralelogramo $\mathcal{R}_n(x)$ sea mala, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{R}_n(x) \text{ sea malo}) &= \mathbb{P}\left(\sup_{y \in \tilde{\mathcal{R}}_n(x)} P_{y,\omega}(H_{\partial\mathcal{R}_n(x)} \neq H_{\partial_+\mathcal{R}_n(x)}) > L^{-1/\epsilon(L)}\right) \\
&\leq L^{\epsilon(L)^{-1}} \mathbb{E}\left[\sup_{y \in \tilde{\mathcal{R}}_n(x)} P_{y,\omega}(H_{\partial\mathcal{R}(x)} \neq H_{\partial_+\mathcal{R}(x)})\right] \\
&\hspace{15em} \text{(Desigualdad de Markov.)} \\
&= L^{\epsilon(L)^{-1}} \mathbb{E}\left[\sup_{y \in \tilde{\mathcal{R}}_n(0)} P_{y,\omega}(H_{\partial\mathcal{R}(0)} \neq H_{\partial_+\mathcal{R}(0)})\right] \\
&\hspace{15em} \text{(Invarianza bajo traslaciones.)} \\
&\leq L^{3d\epsilon(L)+\epsilon(L)^{-1}} \sup_{y \in \tilde{\mathcal{R}}_n(0)} P_y(H_{\partial\mathcal{R}(0)} \neq H_{\partial_+\mathcal{R}(0)}) \\
&\leq L^{3d\epsilon(L)+\epsilon(L)^{-1}} \exp\left\{-L \frac{(1+o(1))\epsilon(L)\ln(2)}{\ln \ln L^{\epsilon(L)}}\right\} \tag{5.91} \\
&\leq \exp\left\{(3d\epsilon(L) + \epsilon(L)^{-1}) \ln L - L \frac{(1+o(1))\epsilon(L)\ln(2)}{\ln \ln L^{\epsilon(L)}}\right\}
\end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ asocie a $x \in \mathbb{Z}^d$ un elemento $y \in \mathbb{L}_n$ tal que $x \in \tilde{\mathcal{R}}_n(y)$, denotado por $\pi_n(x)$. Defínase la siguiente secuencia de tiempos de parada para $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dado por

$$\begin{aligned}
D_0^n &:= 0, \\
D_j^n &:= \begin{cases} \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ X_{k+D_{j-1}^n} \notin \mathcal{R}\left(\pi_k\left(X_{D_{j-1}^n}\right)\right) \right\} + D_{j-1}^n & \text{para } j \geq 1 \text{ si } D_{j-1}^n < \infty \\ \infty & \text{caso contrario.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Dado $\omega \in G_{\beta(L),L}$, usando la propiedad fuerte de Markov y **(EU)**, observamos

$$\begin{aligned}
 P_{0,\omega}(H_{\partial B} = H_{\partial_+ B}) &\geq P_{0,\omega}\left(X_{D_j^n} \in \partial_+ \mathcal{R}_n\left(\pi_n\left(X_{D_{j-1}^n}\right)\right) \quad \forall \quad 1 \leq j \leq \left\lceil \frac{L}{n} \right\rceil\right) \\
 &\geq \left(\exp\{-c_1 L^{\epsilon(L)}\}\right)^{L^{\beta(L)}} \cdot (1 - L^{-\epsilon(L)^{-1}})^L \tag{5.92}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\geq \left(\exp\{-c_1 L^{\epsilon(L)}\}\right)^{L^{\beta(L)}} (1 - L^{-\epsilon(L)^{-1}})^L \\
 &> \frac{1}{2} \exp\{-c_1 L^{\epsilon(L)+\beta(L)}\} \tag{5.93}
 \end{aligned}$$

para L lo suficientemente grande y $c_1 = -2d \ln \kappa > 1$.

Por otro lado, sea N_L el número de paralelogramos malos en \mathfrak{B}_n que intersecan a B , entonces $G_{\beta(L),L}^c = \{N_L \geq L^{\beta(L)}\}$. Se hace la siguiente afirmación

Lema 5.6.3 (Afirmación). *Existen subconjuntos $\mathbb{L}_1^n, \dots, \mathbb{L}_n^{5^d}$ de \mathbb{L}_n tal que*

- $\bigcup_{j=1}^{5^d} \mathbb{L}_n^j = \mathbb{L}_n$ y
- para todo $j \in \{1, \dots, 5^d\}$ y todo $x, y \in \mathbb{L}_n^j$, uno tiene que

$$\mathcal{R}_n(x) \cap \mathcal{R}_n(y) = \emptyset$$

Esta afirmación en combinación con la hipótesis **(IID)** permiten concluir que N_L es estocásticamente dominada por $\sum_{j=1}^{5^d} N_L^j$, donde donde $(N_L^j)_{j \in \{1, \dots, 5^d\}}$ son variables aleatorias binomiales iid (definidas en algún espacio de probabilidad) con parámetros $J_{L,n}$ y $\mathbb{P}(\mathcal{R}_n(0)$ es malo) donde en particular

$$J_{L,n} \leq CL^d \tag{5.94}$$

para alguna constante C y todo L . Cualquier variable aleatoria binomial con esperanza uno, es decir, $Y_n \sim \text{Bin}(n, n^{-1})$, cumple

$$P(Y_n \geq k) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} n^{-j} (1 - n^{-1})^{n-j} \leq \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} n^{-j} \leq \sum_{j=k}^n \frac{1}{j!} \leq \frac{e}{k!}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad y \quad 0 \leq k \leq n$$

Ahora debido (5.91) y (5.94), para L lo suficientemente grande N_L^j es estocásticamente dominada por variables aleatorias de binomiales como Y_n , así obtenemos

$$\mathbb{P}\left(N_L \geq L^{\beta(L)}\right) \leq P\left(\sum_{j=1}^{5^d} N_L^j \geq L^{\beta(L)}\right) \leq 5^d \cdot \frac{e}{\lfloor L^{\beta(L)}/5^d \rfloor!} \quad (5.95)$$

Es decir, se tiene que

$$\mathbb{P}\left(G_{\beta(L),L}^c\right) \leq 5^d \frac{e}{\lfloor L^{\beta(L)}/5^d \rfloor!} \quad (5.96)$$

con lo cual se muestra la prueba. □

5.6.4 Prueba del decaimiento polinomial

Listo ahora es posible dar la demostración que obtuvieron Berger-Drewitz-Ramírez

Prueba. La prueba consiste en establecer el $CE | l$ asumiendo **(IID)** y **(EU)**. Para ello defina

$$\beta_1(L) := \frac{\gamma L}{2} \quad (5.97)$$

$$\alpha(L) := \frac{\gamma L}{3} \quad (5.98)$$

$$a := L^{-\alpha(L)} \quad (5.99)$$

$$\beta_j(L) := \beta_1(L) + (j-1) \frac{\gamma L}{4} \quad (5.100)$$

$$n := \left\lceil \frac{4}{\gamma L} - 2 \right\rceil + 1$$

$$\mathcal{E}_0 := \mathbb{E}\left(\rho^a, P_{0,\omega}(H_{\partial B} = H_{\partial_+ B}) > \frac{1}{2} \exp\{-c_1 L^{\beta_1}\}\right)$$

$$\mathcal{E}_j := \mathbb{E}\left(\rho^a, P_{0,\omega}(H_{\partial B} = H_{\partial_+ B}) \in \left(\frac{1}{2} \exp\{-c_1 L^{\beta_{j+1}}\}, \frac{1}{2} \exp\{-c_1 L^{\beta_j}\}\right)\right)$$

$$\mathcal{E}_n := \mathbb{E}\left(\rho^a, P_{0,\omega}(H_{\partial B} = H_{\partial_+ B}) \leq \frac{1}{2} \exp\{-c_1 L^{\beta_n}\}\right)$$

La esencia en el criterio efectivo es la estimación de $\mathbb{E}\rho_B^a$, el cual se puede descomponer de la siguiente forma

$$\mathbb{E}\rho_{\mathcal{B}}^a = \mathcal{E}_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \mathcal{E}_j + \mathcal{E}_n \quad (5.101)$$

Note que

- Si $(T)_{\gamma_L}|l$ se cumple entonces por la desigualdad de Jensen

$$\mathcal{E}_0 \leq 2 \exp\{c_1 L^{\beta_1 - \alpha}\} P_0(H_{\partial B} \neq H_{\partial_+ B})^a \quad (5.102)$$

Por los resultados (5.98) y (5.97), además de la condición $(T)_{\gamma_L}|l$, se concluye que

$$\mathcal{E}_0 \leq \exp\{c_1 L^{\gamma_L/6} - L^{(1+o(1))\gamma_L/2}\} \quad (5.103)$$

- Asumiendo (IID) y (EU) además de la condición $(T)_{\gamma_L}|l$, se obtiene que para $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

$$\mathcal{E}_j \leq 2 \exp\{c_1 L^{\beta_{j+1} - \alpha}\} \mathbb{P}\left(P_{0,\omega}(H_{\partial B} = H_{\partial_+ B}) \leq \frac{1}{2} \exp\{-c_1 L^{\beta_j}\}\right)$$

Por la proposición (5.6.4) la probabilidad de la derecha puede ser estimada por

$$5^d \cdot \frac{e}{\lceil L^{\beta_j - \epsilon(L)}/5^d \rceil!}$$

concluyendo que

$$\mathcal{E}_j \leq 2 \cdot 5^d \exp\{c_1 L^{\beta_{j+1} - \alpha}\} \frac{e}{\lceil L^{\beta_j - \epsilon(L)}/5^d \rceil!} \quad (5.104)$$

Con las cotas anteriores se estima

$$\mathbb{E}\rho_{\mathcal{B}}^a \leq \exp\{c_1 L^{\gamma_L/6} - L^{(1+o(1))\gamma_L/2}\} + 2 \cdot 5^d \cdot n \cdot \max_{1 \leq j \leq n-1} \left(\exp\{c_1 L^{\beta_{j+1} - \gamma_L/3}\} \cdot \frac{e}{\lceil L^{\beta_j - \epsilon(L)}/5^d \rceil!} \right) \quad (5.105)$$

y por la escogencia de los parámetros (5.101) tiende más rápido a cero que cualquier polinomio en L .

Por tanto, (5.33) se cumple para L lo suficientemente grande y el criterio efectivo se cumple, lo cual junto con el teorema (5.5.1) se obtiene el resultado deseado.

□

Capítulo 6

Desde el punto de vista de la partícula

Ésta técnica ha sido de gran utilidad en el estudio de distintos tipos de movimiento en medios aleatorios. Se centra en el ambiente visto como la ubicación actual de la caminata. Además permite relajar la hipótesis **(IID)**. Para definir el proceso ambiente, se inicia con unas definiciones de teoría de la medida.

Definición 6.0.1. (Preservar-medida) Suponga que $(\Omega_1, \mathcal{B}_1, m_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{B}_2, m_2)$ son espacios de probabilidad. Sea $T : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una transformación medible, decimos que T preserva-medida si

$$m_1(T^{-1}(B_2)) = m_2(B_2)$$

Definición 6.0.2. (Transformación ergódica) Sea (Ω, \mathcal{B}, m) un espacio de probabilidad. Una transformación que preserva la medida T de (Ω, \mathcal{B}, m) es llamada Ergódica si cuando se cumple

$$T^{-1}B = B, \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

entonces $m(B) = 0$ ó 1 .

Definición 6.0.3 ((ERG)). Se dirá que la familia de transformaciones $(t_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ sobre $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P})$, es ergódica, si para cada $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ tal que $A = t_x^{-1}(A)$, $\forall x \in \mathbb{Z}^d$, entonces

$$\mathbb{P}(A) = 0 \quad \text{ó} \quad 1$$

Esta condición es también conocida como *ergodicidad total*. En particular, note que **(IID)** implica **(ERG)**.

Definición 6.0.4. (Ambiente visto desde la partícula) Sea (X_n) una RWRE. Definimos el el proceso ambiente (también conocido como ambiente visto desde la partícula) como el proceso de tiempo

discreto

$$\bar{\omega}_n := t_{X_n}\omega, = \omega(X_n + \cdot) \quad n \geq 0 \quad (6.1)$$

con espacio de estados Ω .

Observación 6.0.1. Una ventaja del proceso ambiente es que toma valores sobre un espacio compacto; además, bajo la medida annealed, P_0 , el proceso $\bar{\omega}_n$ es Markoviano con espacio muestral Ω y distribución inicial \mathbb{P} . Sin embargo, el costo es que ahora se tiene que lidiar con un espacio de estado infinito dimensional.

Para ver que en efecto, se trata de un proceso Markoviano, sea $Rf(\omega)$ el kernel de transición

$$Rf(\omega) := \sum_{e \in V} \omega(0, e) f(t_e \omega)$$

definida para $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Note que

$$\begin{aligned} E_{x,\omega}[f(\bar{\omega}_1)] &= E_{x,\omega}[f(t_{X_1}\omega)] = \sum_{e \in V} \omega(x, e) f(t_{x+e}\omega) \\ &= \sum_{e \in V} t_x \omega(0, e) f(t_e(t_x \omega)) \\ &= Rf(t_x \omega) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Considere las funciones, f_i , medibles y acotadas con $i = 0, \dots, n+1$. Aplicando (6.2) se tiene

$$\begin{aligned} E_{0,\omega}[f_{n+1}(\bar{\omega}_{n+1})f_n(\bar{\omega}_n)\cdots f_0(\bar{\omega}_0)] &= E_{0,\omega}[f_{n+1}(t_{X_{n+1}}\omega)f_n(\bar{\omega}_n)\cdots f_0(\bar{\omega}_0)] \\ &= E_{0,\omega}[E_{X_n,\omega}[f_{n+1}(t_{X_1}\omega)]f_n(\bar{\omega}_n)\cdots f_0(\bar{\omega}_0)] \\ &= E_{0,\omega}[Rf_{n+1}(\bar{\omega}_n)f_n(\bar{\omega}_n)\cdots f_0(\bar{\omega}_0)], \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se aplica la propiedad Markoviana de X_n bajo $P_{0,\omega}$ y en el último paso se usa la identidad (6.2). Como $Rf_{n+1}(\bar{\omega}_n)$ es \mathcal{F}_n -medible, donde \mathcal{F}_n es la filtración natural de $(\bar{\omega}_n)$, se sigue

$$E_{0,\omega}[f_{n+1}(\bar{\omega}_{n+1}) | \bar{\omega}_0, \dots, \bar{\omega}_n] = Rf_{n+1}(\bar{\omega}_n), \quad (6.3)$$

lo cual muestra la propiedad Markoviana de la cadena $\bar{\omega}_n$ bajo la medida de probabilidad $P_{0,\omega}$. Finalmente se integra con respecto a \mathbb{P} para obtener el resultado deseado.

El espacio de estado de la cadena de Markov de ambientes vistos desde el punto de vista de la partícula es amplio, por lo que es posible que la cadena de Markov no sea de utilidad. Es interesante cuestionarse si existe una medida de probabilidad R -invariante la cual sea absolutamente continua con respecto a \mathbb{P} . Se sabe que bajo el supuesto **(UE)** existe a lo sumo un probabilidad con tales características, además que es necesariamente equivalente a \mathbb{P}

Hipótesis Clave: Dada una medida de probabilidad arbitraria \mathbb{P} sobre Ω , existe una probabilidad $\mathbb{P}R$, definida para una función acotada y medible h , por medio de la ecuación

$$\int Rh \, d\mathbb{P} = \int h \, d(\mathbb{P}R). \quad (6.4)$$

Se dice que una medida \mathbb{Q} es invariante para el proceso ambiente si para cada función acotada y continua f

$$\int f \, d\mathbb{Q} = \int Rf \, d\mathbb{Q} \quad (6.5)$$

en el caso de una medida de probabilidad \mathbb{P} que satisface $\mathbb{P} = \mathbb{P}R$, se dice que es una medida de probabilidad invariante para el proceso ambiente. Intuitivamente esto corresponde a la idea de que es posible comparar el punto de vista estático con el dinámico.

6.1 Teorema de Kozlov

La existencia de medidas de probabilidad invariantes, las cuales son absolutamente continuas con respecto a la distribución inicial del ambiente, resulta ser crucial en el estudio del modelo. Recordamos que el proceso ambiente considerado como una trayectoria tiene espacio de estados $\Gamma := \Omega^{\mathbb{N}}$. Además, definimos la ley \mathbb{P}_ω sobre su σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}(\Gamma)$ por medio de la identidad

$$P_\omega[A] := P_{0,\omega}[(\bar{\omega}_n) \in A]$$

para cualquier subconjunto de Borel $A \in \Gamma$ dotado con la topología producto. Más aún, para cualquier medida de probabilidad ν definida sobre Ω , definimos

$$P_\nu := \int P_\omega \nu(d\omega)$$

Denote por $\theta : \Gamma \rightarrow \Gamma$ el corremiento canónico en Γ definido por

$$\theta(\omega_0, \omega_1, \dots) := (\omega_1, \omega_2, \dots) \tag{6.6}$$

Un evento A se dice invariante si $\varphi^{-1}A = A$, bajo una transformación φ que preserva medida. Sea \mathcal{I} la σ -álgebra de todos los eventos invariantes bajo la transformación φ .

Teorema 6.1.1 (Teorema ergódico de Birkhoff). *Sea φ una transformación que preserva medida sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y $X \in L^1$ cualquiera, entonces*

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} X(\varphi^m \omega) \rightarrow E[X|\mathcal{I}], \quad \text{c.s}$$

y la convergencia es en L^1 .

La prueba del teorema 6.1.1 se puede consultar en **Durrett**. El siguiente teorema fue probado por Kozlov en **Kozlov** y sigue un razonamiento dado por Sznitman en **Bolthausen**.

Teorema 6.1.2 (Kozlov). *Considere una RWRE en un ambiente con ley inicial \mathbb{P} que es (E) y (ERG). Asuma que \mathbb{Q} es una medida de probabilidad invariante absolutamente continua con respecto a \mathbb{P} . Entonces*

- (i) $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$.
- (ii) La cadena de Markov con ley inicial \mathbb{Q} y kernel de transición R es ergódica.
- (iii) Existe a lo sumo una probabilidad invariante \mathbb{Q} que es absolutamente continua con respecto a \mathbb{P} .

Prueba.

- (i) Sea $\mathbb{Q} = f\mathbb{P}$ la medida invariante para R , es decir, f es la derivada de Radon-Nikodym de \mathbb{Q} con respecto a \mathbb{P} . Considere el evento $E = \{f = 0\}$, basta probar que \mathbb{P} es absolutamente continua con respecto a \mathbb{Q} , es decir que $\mathbb{P}(E) = 0$. Como $\mathbb{Q}R = \mathbb{Q}$, al ser invariante, entonces se cumple que

$$\mathbb{Q}R1_E = \mathbb{Q}1_E = \int_E f d\mathbb{P} = 0$$

Como resultado $\mathbb{P}(R1_E = 0) = 1$ sobre el evento E^c , de modo

$$\mathbb{P}\left(1_E \geq \kappa \sum_{e \in V} 1_E \circ t_e\right) = 1 \quad (6.7)$$

ya que sobre el evento E

$$1_E \geq R1_E = \sum_{e \in V} \omega(0, e) 1_E \circ t_e$$

y si se aplica **(UE)** se obtiene el resultado (6.7). Ahora dado que la indicadora sólo toma dos posibles valores, se debe cumplir que

$$\mathbb{P}(1_E \geq 1_E \circ t_e) = 1 \quad \text{para } e \in V.$$

Como la transformación t_e preserva medida, se concluye que para cada $e \in V$

$$\mathbb{P}(1_E = 1_{t_e^{-1}(E)}) = 1$$

Para cada $x \in \mathbb{Z}$ si se compone a ambos lados con la transformación t_x , para $e \in V$

$$\mathbb{P}(1_{t_x^{-1}(E)} = 1_{t_{x+e}^{-1}(E)}) = 1,$$

de lo cual se sigue que para todo $x \in \mathbb{Z}^d$

$$\mathbb{P}(1_E = 1_{t_x^{-1}(E)}) = 1. \quad (6.8)$$

Ahora, defina

$$\tilde{E} := \bigcap_{x \in \mathbb{Z}^d} t_x^{-1}(E)$$

note que es invariante bajo la familia de transformaciones $(t_y)_{y \in \mathbb{Z}^d}$ y $\mathbb{P}(\tilde{E} \neq E) = 0$. Al ser \mathbb{P} es una medida ergódica con respecto a $(t_y)_{y \in \mathbb{Z}^d}$ necesariamente se debe tener que

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\tilde{E}) = 0 \quad \text{ó} \quad 1.$$

Sin embargo, como $\int_{E^c} f \, d\mathbb{P} = \int f \, d\mathbb{P} = 1$, entonces, $\mathbb{P}(E) = 0$.

- (ii) Considere $\Omega^{\mathbb{N}}$, el espacio canónico de trayectorias Ω -evaluadas y sea $\tilde{\theta}$ el *shift* canónico en $\Omega^{\mathbb{N}}$. Se desea probar que para cualquier evento invariante, $A \in \mathcal{B}(\Omega^{\mathbb{N}})$, $\phi(\omega) := P_\omega(A) \in \{0, 1\}$.

Se afirma que

$(\phi(\bar{\omega}_n))_{n \geq 0}$, $n \geq 0$, es una $P_{\mathbb{Q}}$ -martingala, con la filtración canónica sobre $\Omega^{\mathbb{N}}$

En efecto, note que como A es invariante, con probabilidad, $P_{\mathbb{Q}}$ -c.s se tiene

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}}[1_A | \bar{\omega}_0, \dots, \bar{\omega}_n] &= E_{\mathbb{Q}}[1_A \circ \theta_n | \bar{\omega}_0, \dots, \bar{\omega}_n] \\ &= P_{\bar{\omega}_n}(A) \\ &= \phi(\bar{\omega}_n) \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se aplicó la propiedad de Markov. Aplicando el teorema de convergencia de martingala y lo anterior se tiene que

$$P_{\mathbb{Q}}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\bar{\omega}_n) = 1_A((\bar{\omega}_n)_{n \in \mathbb{N}})\right) = 1 \quad (6.9)$$

Llegado a este punto, se afirma lo siguiente

(a) Existe un conjunto $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ tal que $\mathbb{Q}(\phi = 1_B) = 1$.

En efecto, si no fuera cierto, entonces para ciertos valores $a < b$ con $[a, b] \in \mathbb{R}^+ - \{0, 1\}$,

$$\mathbb{Q}(\phi \in [a, b]) > 0$$

El teorema ergódico de Birkhoff implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_{\phi^{-1}([a, b])}(\bar{\omega}_k) = E_{\mathbb{Q}}[1_{\phi^{-1}([a, b])}(\bar{\omega}_0) | \mathcal{I}] =: \Phi \quad (6.10)$$

donde \mathcal{I} corresponde a la σ -álgebra de eventos invariantes. Ahora bien, note que

$$E_{\mathbb{Q}}[\Phi] = P_{\mathbb{Q}}[\phi(\omega_0) \in [a, b]] > 0$$

sin embargo, esto contradice (6.9).

(b) $\mathbb{Q}(R1_B = 1_B) = 1$.

Para mostrar dicha afirmación note que

$$1_B(\omega_0) = E_{\mathbb{Q}}[1_B(\omega_1) | \omega_0] = R1_B(\omega_0).$$

donde en la última igualdad, se ha aplicado nuevamente la propiedad de Markov. Para demostrar la afirmación basta con justificar

$$\mathbb{Q}(B) \in \{0, 1\}. \tag{6.11}$$

En efecto, se tiene que $P_{\mathbb{Q}}(A) = \mathbb{Q}(B)$, para probar (6.11), note que

$$1_B(\omega) = R1_B(\omega) = \sum_{e \in V} \omega(0, e) 1_B(t_e \omega)$$

Aplicando (UE) y siguiendo un razonamiento similar al que se hizo en el inciso anterior se obtiene el resultado deseado.

- (iii) Para probar la unicidad de \mathbb{Q} , considere g una función medible y acotada en Ω , se sigue del teorema ergódico de Birkhoff y el hecho que \mathbb{Q} es invariante y ergódico para el kernel de transición R que

$$P_{\mathbb{Q}} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(\omega_k) = \int g d\mathbb{Q} \right) = 1$$

por la primera parte de este teorema, la convergencia anterior también ocurre con la medida $P_{\mathbb{P}}$. Como resultado de la proposición que establece la propiedad Markoviana de $(\bar{\omega}_n)$,

$$E_0 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(\bar{\omega}_k) = \int g d\mathbb{Q} \right]$$

demostrándose de esta forma la unicidad.

□

6.2 Ley de grandes números desde el punto de vista de la partícula

Para efectos de aplicar el teorema de Kozlov, es necesario visualizar la RWRE desde un proceso ambiente.

Con el propósito de aplicar el teorema de Kozlov, es de suma importancia entender como se reconstruye la caminata aleatoria a partir de proceso ambiente canónico. Ahora permítanos denotar por Ω_{per} a los ambientes que son periódicos, es decir

$$\Omega_{per} := \{\omega \in \Omega : \omega = t_x \omega \text{ para algún } x \in \mathbb{Z}^d, x \neq 0\}$$

siempre que $\omega \in \Omega_{per}$ y ω' es una traslación de ω , esta traslación se define de manera única. Esta observación nos permitiría expresar los incrementos de la caminata aleatoria en función del proceso ambiente siempre que la condición inicial no sea periódica. Suponiendo que la ley inicial \mathbb{P} del entorno es ergódica, y observando que el conjunto de ambientes periódicos es invariante bajo las traslaciones, podemos ver que $\mathbb{P}(\Omega_{per})$ es igual a 0 ó 1. Sin embargo, suponiendo **(ERG)**, puede suceder que $\mathbb{P}(\Omega_{per})$, una situación en la que a priori no podemos realizar esta reconstrucción (y que es imposible si asumimos incluso **(IID)**). Por lo tanto, demostraremos directamente la ergodicidad de los incrementos de la caminata aleatoria.

Permítanos considerar para cada $x \in \mathbb{Z}^d$ el desvío local en el sitio x definido como

$$d(x, \omega) = \sum_{e \in U} \omega(x, e)e = E_{x, \omega}[X_1 - X_0]$$

Luego tenemos el siguiente corolario del teorema de Kozlov.

Corolario 6.2.1. *Considere una RWRE en un ambiente con cuya ley \mathbb{P} satisfice **(E)** y **(ERG)**. Además, suponga que existe una medida de probabilidad invariante para el medio ambiente visto desde la partícula, denotada por ν , que es absolutamente continua con respecto a \mathbb{P} . Entonces se cumple una ley de gran números*

$$P_{0, \mathbb{P}} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = \int d(0, \omega) \nu(d\omega) =: \nu \right) = 1$$

Además, si la caminata es transitoria en una dirección dada l , es necesariamente balística en esa dirección, de modo que $v \cdot l \neq 0$.

Prueba. Seguiremos a **Sabot**. Defina para $n \geq 1$,

$$\Delta X_n := X_n - X_{n-1}$$

Este es un proceso con espacio de estado $\mathcal{U} := U^{\mathbb{N}}$. En un ligero abuso de notación a (6.6), se aplica en el caso de $\Gamma = \mathcal{U}$, de la siguiente forma

$$\theta(\Delta X_1, \Delta X_2, \dots) = (\Delta X_2, \Delta X_3, \dots) \tag{6.12}$$

Note que el proceso $(\Delta X_n)_{n \geq 1}$ es estacionario bajo la ley $P_{0,\nu}$. Vamos a mostrar que la transformación θ es ergódica con respecto al espacio $(\mathcal{U}, \mathcal{B}(\mathcal{U}), P_{0,\nu})$, donde $\mathcal{B}(\mathcal{U})$ es la σ -álgebra del Borel de \mathcal{U} . Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{U})$ invariante de modo que $\theta^{-1}(A) = A$ y defina

$$\psi(x, \omega) := P_{x,\omega}((\Delta X_n) \in A)$$

Afirmamos que $(\psi(X_n, \omega))_{n \geq 0}$ es una martingala con respecto a la filtración canónica en \mathcal{U} generada por (X_n) . En efecto,

$$P_{0,\omega}[(\Delta X_m) \in A | X_0, \dots, X_n] = P_{X_n,\omega}[(\Delta X_m) \in A] = \psi(X_n, \omega)$$

Por tanto, tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$, y para cualquier ω , el teorema de convergencia de martingalas produce

$$P_{0,\omega} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(0, \bar{\omega}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(X_n, \omega) = 1_A((\Delta X_n)) \right) = 1 \quad (6.13)$$

Ahora tenemos por ergodicidad y el teorema de Kozlov que

$$P_{0,\nu} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \psi(0, \bar{\omega}_n) = \int \psi(0, \omega) \nu(d\omega) \right) = 1$$

El límite (6.13) implica que

$$P_{0,\nu}[(\Delta X_n) \in A] \in \{0, 1\}$$

lo cual nos permite obtener la ergodicidad. Por tanto, tenemos que

$$\mathbb{P}_{0,\nu} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta X_k = \int d(0, \omega) \nu(d\omega) \right) = 1$$

Por el teorema de Kozlov, podemos concluir que la convergencia de arriba ocurre $P_{0,\mathbb{P}}$ -c.s. La segunda afirmación del corolario, se siguen inmediatamente por el teorema de Kozlov. \square

Rossul-Agha in [32], obtiene una versión del corolario 1 donde la transitoriedad es reemplada por la conocida condición de Kalikow [22], una condición más fuerte que la ergodicidad se requiere, pero es necesario solo asumir la existencia de una medida de probabilidad

invariante la cual sea absolutamente continua con respecto a la ley inicial sobre semi espacios apropiados.

Bibliografía

- [1] BOGACHEV, L.V. (2006). *Random Walks in Random Enviroments*. Encyclopedia of Mathematical Physics, Oxford **4** 353-371.
- [2] DREWITZ, A.; RAMÍREZ, A. F. *Ballisticity conditions for random walk in random environment*. Probab. Theory Related Fields 150 (2011), no. 1-2, 61-75. doi:10.1007/s00440-010-0268-9
- [3] DURRET, R. (2010). *Probability: Theory and Examples*. Cambridge University Press.
- [4] KALIKOW, S.A. (1981). *Generalized random walk in random environment*. Ann. Probab. **9** 753-768.
- [5] SOLOMON, F. (1975). *Random Walks in Random Enviroments*. Ann. Probab. **3** 1-31.
- [6] SZNITMAN, ALAIN-SOL. *On a class of transient random walks in random environment*. (2001) Ann.Probab.,29(2):724-765.
- [7] SZNITMAN, ALAIN-SOL . *An effective criterion for ballistic behavior of random walks in random environment*. (2002) Probab. Theory Related Fields, 122(4):509-544.
- [8] SZNITMAN, A.-S. *Topics in random walks in random environment. School and Conference on Probability Theory*, 203–266 (electronic). (2004) ICTP Lecture Notes, XVII. Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste.
- [9] SZNITMAN, A. , ZERNER, M. (1999). *A Law of Large Numbers for Random Walks in Random Enviroments*. Ann. Probab. **27** 1851-1869.
- [10] ZERNER, MARTIN P. W. (2002). *A non-ballistic law of large numbers for random walks in i.i.d. random environment*. Electron. Comm. Probab., 7:191-197 (electronic).