UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

SISTEMA DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ESQUEMAS EN GRUPOS Y TORSORES

Tesis sometida a la consideración de la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Matemática para optar al grado y título de Maestría Académica en Matemática con énfasis en Matemática Pura Pura

JORGE ARTURO ESQUIVEL ARAYA

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio, Costa Rica

2019

Dedicado a la Cucha

Agradecimientos

Primeramente, quiero agradecer a mi familia. En especial a mis padres Jose Antonio Esquivel Rodríguez, Vilma Araya Herrera por todo su apoyo y amor, nunca podré pagar todo lo que han hecho por mí. Y a mi hermano Luis Mariano Esquivel Araya y su esposa Scarleth Morales Peña por siempre haber estado ahí.

Seguidamente quiero agradecer todas las personas que en los últimos años se han acercado y brindado su amistad. En especial a mis compañeros de generación de la universidad y colegio, mis amigos de la infancia de la giralda y mis colegas de mejenga.

Quiero agradecer a Marco Antei por su apoyo, por haber creído en mí y su compromiso. No soy digno que tener tan buena persona como supervisor y colega. Aunque todavía no sé por qué accedió ayudarme, pero cualquier cosa podrá contar conmigo.

Por último, quiero agradecer a todos los profesores que influyeron en mi crecimiento como estudiante de matemáticas. A los profesores que me han ayudado durante la maestría y mi comité asesor Pedro Mendez Hernandez, Joseph Varilly Boyle, Hector Figueroa, Jorge Guier Acosta y Ronald Zúñiga Rojas.

"Esta tesis fue aceptada por la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Matemática de la Universidad de Costa Rica, como requisito parcial para optar al grado y título de Maestría Académica en Matemática con énfasis en Matemática Pura Pura"

Dr. Pedro Méndez Hernández

Representante del Decano Sistema de Estudios de Posgrado

Dr. Marco Antei

Director de Tesis

Dr. Jorge Guier Acosta

Asesor

Dr. Ronald A. Zúñiga Rojas

Asesor

Dr. Joseph Varilly Boyle

Representante Posgrados en Matemáticas

Jorge Arturo Esquivel Araya

Candidato

Contenidos

Resumen

El principal objetivo es analizar la extensión de un G-torsor dado sobre la fibra genérica de X, donde $X = \mathbb{A}^n_R$ es el espacio afín n-dimensional sobre un anillo de valuación discreta R. Para ello primero se estudiará un caso más general. Se pedirá que X sea un esquema de tipo finito y fielmente plano sobre $Spec(R)$ con una sección $x \in X(R)$, G un K-esquema afín en grupos de tipo finito y $f : Y \to X$ un G-torsor punteado sobre x de manera que al considerar una inmersión en $GL_{n,K}$ el producto contraído sea trivial. Bajo estas hipótesis se usará la relación con las álgebras de Hopf para realizar los cálculos, dando como fruto una posible extensión. Sin embargo, esta opción de extensión puede no ser fielmente plana, como consecuencia habría que realizar un número finito de brotes de Nerón sobre el origen de X. Por lo tanto, por la biyección con los $GL_{n,\mathbb{A}^n_R}$-torsores se puede afirmar, salvo por un número finito de brotes de Néron, que siempre existe dicha extensión cuando X es el espacio afín n-dimensional sobre R ya que todo $GL_{n,\mathbb{A}^n_R}$-torsor sería trivial por el teorema de Quillen-Suslin. Finalmente, usando el isomorfismo entre el espacio afín n-dimensional sobre R y el espacio resultante al realizar m-veces el brote de Néron sobre la fibra especial del origen, se verifica que dicha extensión.

Notación

R	Anillo de Valuación Discreta
K	Cuerpo de Fracciones de R
π	Uniformizante de R
id	Identidad
d	Mapeo Diagonal
m	Multiplicación del Grupo
p_i	Proyección Entrada i
$\mathcal{O}_X$	Haz estructural de X
X_η	Fibra Genérica de X
X_s	Fibra Especial de X
$\mathbb{A}^n_k$	Espacio Afín de dimensión n sobre k
(Sch/S)	Categoría de S-Esquemas
Set	Categoría de Conjuntos
h_X	Funtor Hom(X,-)

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

SEP Sistema de Estudios de Posgrado

Autorización para digitalización y comunicación pública de Trabajos Finales de Graduación del Sistema de Estudios de Posgrado en el Repositorio Institucional de la Universidad de Costa Rica.

Yo, Jorge A. Esquivel A, con cédula de identidad 4-0225-0846 en mi condición de autor del TFG titulado Esquemas en grupos y torsores

Autorizo a la Universidad de Costa Rica para digitalizar y hacer divulgación pública de forma gratuita de dicho TFG a través del Repositorio Institucional u otro medio electrónico, para ser puesto a disposición del público según lo que establezca el Sistema de Estudios de Posgrado. **SI** ☒ **NO** * ☐

***En caso de la negativa favor indicar el tiempo de restricción:** _______________ **año (s).**

Este Trabajo Final de Graduación será publicado en formato PDF, o en el formato que en el momento se establezca, de tal forma que el acceso al mismo sea libre, con el fin de permitir la consulta e impresión, pero no su modificación.

Manifiesto que mi Trabajo Final de Graduación fue debidamente subido al sistema digital Kerwá y su contenido corresponde al documento original que sirvió para la obtención de mi título, y que su información no infringe ni violenta ningún derecho a terceros. El TFG además cuenta con el visto bueno de mi Director (a) de Tesis o Tutor (a) y cumplió con lo establecido en la revisión del Formato por parte del Sistema de Estudios de Posgrado.

INFORMACIÓN DEL ESTUDIANTE:

Nombre Completo: Jorge Arturo Esquivel Araya

Número de Carné: B22394 Número de cédula: 4-0225-0846

Correo Electrónico: jorge.esquivelaraya@ucr.ac.cr

Fecha: 20/01/2020 Número de teléfono: 85792102

Nombre del Director (a) de Tesis o Tutor (a): Marco Antei

Jorge Esquivel

FIRMA ESTUDIANTE

Nota: El presente documento constituye una declaración jurada, cuyos alcances aseguran a la Universidad, que su contenido sea tomado como cierto. Su importancia radica en que permite abreviar procedimientos administrativos, y al mismo tiempo genera una responsabilidad legal para que quien declare contrario a la verdad de lo que manifiesta, puede como consecuencia, enfrentar un proceso penal por delito de perjurio, tipificado en el artículo 318 de nuestro Código Penal. Lo anterior implica que el estudiante se vea forzado a realizar su mayor esfuerzo para que no sólo incluya información veraz en la Licencia de Publicación, sino que también realice diligentemente la gestión de subir el documento correcto en la plataforma digital Kerwá.

Introducción

Al fijar S como un esquema de Dedekind de dimensión 1 y $\eta = Spec(K)$ su punto genérico, se tomará X un esquema y un morfismo fielmente plano $X \to S$ de tipo finito con $X_\eta \to \eta$ su fibra genérica. Por lo cual al asumir la existencia de un K-esquema afín en grupos G y $f\colon Y \to X_\eta$ un G-torsor, el problema de extender el G-torsor consiste en encontrar un S-esquema en grupos plano y de tipo finito G' cuya fibra genérica sea isomorfa G y un G'-torsor $f'\colon Y' \to X$ que genéricamente sea isomorfo al torsor dado. Este tipo de problema tiene origen en la "teoría de la especialización" del matemático Grothendieck [9], medalla Fields en 1966. Se han presentado soluciones a casos particulares. Grothendieck probó que este problema tiene solución cuando G es un esquema en grupos étale y cuyo orden del grupo es finito y no es divisible por la característica del cuerpo residual, esto realizando una extensión finita de los escalares. En particular si la característica residual es 0 y G es finito entonces el problema tiene siempre respuesta positiva: es suficiente en este caso considerar la normalización de Y en X. M. Raynaud [18] planteó una solución cuando S es el espectro de un anillo de valuación discreta con característica residual p, X es una curva suave y propia y $|G| = p$. El caso cuando S es el espectro de un anillo de valuación discreta R con caractrística mixta $(0, p)$, G conmutativo y X un esquema regular fielmente plano sobre S lo trabajó D. Tossici[19], en el corolario 4.2.8 logró probar la posible extensión con algunas suposiciones extras. Similarmente, M. Antei en las secciones 3.2 y 3.3 de [2] da una solución cuando G es conmutativo, S es un esquema de Dedekind conexo y $f\colon X \to S$ es un morfismo fielmente plano que cumple propiedades extras y en [1] M. Antei el caso donde G es soluble. El resultado más reciente se encuentra en [3] donde M. Antei y M. Emsalem estudian el caso en el que G es de tipo finito y no necesariamente finito. Sin embargo no existe una solución general al problema. Más aún existen grupos que no permiten un modelo finito y plano, como lo menciona Milne [14].

En el presente trabajo se examinará el caso en el cual $S = Spec(R)$ donde R es un anillo de valuación discreta con cuerpo de fracciones K, X es el espacio afín n-dimensional sobre R y G es un esquema afín en grupos sobre K. Bajo estos supuestos la solución que se presenta es efectiva. Además, durante la construcción de la extensión, se realizará un número finito de brotes de Néron sobre un cerrado de la fibra especial de X; el cerrado sobre el cual se hará los brotes de Néron siempre será el origen, es decir sin importar la dimensión el cerrado siempre será un punto. Ello presenta un avance en la solución el problema, ya que el cerrado se sabe que es solamente el punto origen, sin importar la dimensión del espacio afín.
Para la resolución del problema, se repasará temas básicos de geometría algebraica, conceptos como morfismos fielmente planos, $\mathcal{O}_X$-módulos, equivalencia de A-módulos y haces cuasicoherentes de $\mathcal{O}_X$-módulos. Seguidamente, se presentará conceptos primarios de los esquemas afines en grupos. Se presentará una definición funtorial de dichos esquemas, la cual llevará a una antiequivalencia categórica con las álgebras de Hopf. El álgebra de Hopf asociada permitirá realizar los cálculos requeridos. Seguidamente, se estudiará sus representaciones y su vínculo con grupos de matrices y cerrados del espacio de matrices. A continuación, se realizará una presentación de los torsores los cuales en otras áreas de la matemática son llamados fibrados principales. Se exhibirá una definición de torsor y torsor trivial. Dicha disposición va en sentido opuesto al orden propuesto por Vistoli en [20], en el cual define primero un torsor trivial y define un torsor como un objeto que bajo un cubrimiento particular es localmente un torsor trivial. Ambos caminos son equivalentes. Se presentará primordialmente el producto contraído de torsores y la biyección entre las clases de equivalencias de los $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_R}$-módulos y las clases de isomorfismos de $GL_{n,\mathbb{A}^n_R}$-torsores.

Para terminar, los prerrequisitos para la solución del problema se aludirá a los brotes de Néron, los cuales fueron presentados por A. Néron en los años 1961 y 1963. Originalmente A.Néron en [16] y [17] logró relajar las condiciones en las cuales una variedad abeliana A_K puede extenderse a un esquema A' sobre una parte abierta S' de S, con K un cuerpo de números y S el espectro del anillo de los enteros, esto concentrándose en la estructura de grupo y la suavidad. Se orientaá los esfuerzos en las definiciones de un modelo de Néron y brotes de Néron, y la posible construcción de nuevos torsores a partir de torsores dados usando un número finito de brotes de Néron.

1. Preliminares

1.1 Esquemas

En esta sección se presentarán definiciones y proposiciones de geometría algebraica que serán de utilidad más adelante. El lector puede consultar las siguientes referencias para mayores detalles [13], [11], [10], [7].
Se empezará con algunas definiciones básicas sobre morfismo de esquemas.

Definición 1.1. Un morfismo $f\colon Y \to X$ de esquemas es *localmente de tipo finito* si existe un cubrimiento de X por abiertos afines $V_i = Spec(B_i)$ tal que $f^{-1}(V_i)$ puede ser cubierto por abiertos afines $U_{ij} = Spec(A_{ij})$ donde A_{ij} es una B_i-álgebra finitamente generada. Se dice que $f\colon Y \to X$ es de *tipo finito* si cada $f^{-1}(V_i)$ tiene un cubrimiento finito.

Definición 1.2. Un morfismo $f\colon Y \to X$ de esquemas es *finito* si existe un cubrimiento de Y por abiertos afines $V_i = Spec(B_i)$ tal que $f^{-1}(V_i) = Spec(A_i)$ donde A_i es una B_i-álgebra, finitamente generada como B_i-módulo.

Definición 1.3. Un morfismo $f\colon Y \to X$ de esquemas es *localmente de representación finita* si existe un cubrimiento de Y por abiertos afines $V_i = Spec(B_i)$ tal que $f^{-1}(V_i)$ puede ser cubierto por abiertos afines $U_{ij} = Spec(A_{ij})$ donde A_{ij} es una B_i-álgebra finitamente representada.

Definición 1.4. Un morfismo $f\colon Y \to X$ de esquemas es *cuasicompacto* si para todo abierto $V \in X$, tal que $f^{-1}(V)$ es cuasicompacto[1].

Definición 1.5. Un *subesquema abierto* de X es un esquema U, donde U es un abierto de X y $\mathcal{O}_U$ es isomorfo a $\mathcal{O}_{X|U}$.

Definición 1.6. Una *inmersión cerrada* es un morfismo $f\colon Y \to X$ de esquemas tal que f induce un homeomorfismo de Y a un cerrado de X y el mapeo inducido $f^{\#}\colon \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ es sobreyectivo.

La Definición 1.6 da la posibilidad de brindar una relación de equivalencia de inmersiones cerradas bajo isomorfismo. Dos inmersiones cerradas $f\colon Y \to X$ y $f'\colon Y' \to X$ se relacionan si existe un isomorfismo de esquemas $i\colon Y \to Y'$ tal que $f = f' \circ i$.

Definición 1.7. Un *subesquema cerrado* es una clase de equivalencia de la relación de inmersiones cerradas bajo isomorfismo.

Dado un morfismo de esquemas $f\colon Y \to X$, se puede construir el mapeo diagonal usando el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, dotted, "\mathrm{d}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}"'] & & \\
& Y \times_X Y \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "pr_2"] & Y \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

Definición 1.8. El morfismo $f\colon Y \to X$ es *separado* si el morfismo diagonal $d\colon Y \to Y \times_X Y$ es una inmersión cerrada.

Las siguientes dos definiones serán requeridas al trabajar con brotes de Néron.

Definición 1.9. Sea X un esquema localmente Noetheriano[2]. Un punto $x \in X$ se dice *regular* si $\mathcal{O}_{X.x}$ es regular[3]. Se dice que X es *regular* si todo punto es regular.

[1] Cuasicompacto significa que todo cubrimiento por abiertos tiene un subcubrimiento finito.
[2] Esquema que tiene una cubierta afín de anillos Noetherianos.
[3] Un anillo local A con cuerpo residual k se dice regular si $dimA = dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

Definición 1.10. Sea k un cuerpo. Sea X un k-esquema localmente de tipo finito. Entonces X es un *esquema suave* sobre k si existe una extensión algebraicamente cerrada L de k tal que $X \otimes_k L\colon = X \times_k L$ es regular.

Ahora se concidererán los $\mathcal{O}_X$-módulos en aras de estudiar los $\mathcal{O}_X$-módulos cuasi-coherentes.

Definición 1.11. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Un *haz de $\mathcal{O}_X$-módulos* (un $\mathcal{O}_X$-módulo) es un haz $\mathcal{F}$ sobre X, tal que para todo abierto $U \subset X$, $\mathcal{F}(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo y para todo $V \subset U$, el morfismo restricción $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ es compatible con la estructura de modulo vía el morfismo $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$.

Definición 1.12. Un morfismo $f\colon Y \to X$ de esquemas es un *morfismo plano* si $\mathcal{O}_{Y,y}$ es un $\mathcal{O}_{X,f(y)}$-módulo plano para todo punto $y \in Y$.

Definición 1.13. Un morfismo $f\colon Y \to X$ es un *morfismo fielmente plano* si es plano y sobreyectivo.

Definición 1.14. Un $\mathcal{O}_X$ módulo es *localmente libre* si X se puede cubrir por abiertos U tales que $\mathcal{F}(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo libre.

Definición 1.15. Un *haz de ideales* sobre X es un haz de módulos $\mathcal{I}$ que es un subhaz de $\mathcal{O}_X$.

Ahora considere A un anillo y M un A-módulo. Entonces para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A denote $M_\mathfrak{p} := M \otimes_A A_\mathfrak{p}$.

Definición 1.16. Sea A un anillo y M un A-módulo. Defina el *haz asociado* a M en $Spec(A)$, denotado por $\widetilde{M}$, como el haz que para todo abierto U, $\widetilde{M}(U)$ es el conjunto de funciones $s : U \to \coprod_\mathfrak{p} M_\mathfrak{p}$ tal que $s(\mathfrak{p}) \in M_\mathfrak{p}$.

Las Proposiciones 1.17, 1.19 y 1.20 se usarán el la prueba del Teorema 2.2.

Proposición 1.17. Sea A un anillo, M un A-módulo y $\widetilde{M}$ el haz asociado a M en $X = Spec(A)$. Entonces

- $\widetilde{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo,
- Para todo $f \in A$, $\widetilde{M}(D(f)) \simeq M_f$,
- $\widetilde{M}(X) = M$,
- $M \to \widetilde{M}$ es un funtor exacto y totalmente fiel de la categoría de A-módulos a la de $\mathcal{O}_X$-módulos,
- Si $f : Spec(B) \to Spec(A)$, entonces $f^*(\widetilde{M}) \simeq (\widetilde{M \otimes_A B})$.

La prueba se puede encontrar en el Capítulo 2 de [10].

Definición 1.18. Un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{F}$ se dice *cuasicoherente* si existe un cubrimiento por abiertos afines $U_i = Spec(A_i)$, tal que para todo U_i existe un A_i-módulo tal que $\mathcal{F}(U_i) \simeq \widetilde{M_i}$.

Proposición 1.19. Sea A un anillo y $X = Spec(A)$. Entonces $M \to \widetilde{M}$ es una equivalencia entre la categoría de A-módulos y la categoría de los haces cuasicoherentes de $\mathcal{O}_X$-módulos.

La prueba se puede encontrar en el Capítulo 2 de [10].

Proposición 1.20. Sea $X = Spec(A)$ un esquema afín y M un A-módulo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. M es un A-módulo plano finitamente presentado,
2. $\widetilde{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre de tipo finito,
3. M es un A-módulo proyectivo finitamente generado.

La prueba se puede encontrar en el Capítulo 7 de [7].

Los siguientes conceptos se ocuparán al estudiar los brotes de Néron.

Definición 1.21. Sea Y un subesquema cerrado de X e $i\colon Y \to X$ el morfismo inclusión. Defina el *haz de ideales* de Y, denotado por $\mathcal{I}_Y$, como el nucleo del morfismo $i^{\#}\colon \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$.

Sea $f\colon Y \to X$ un morfismo de esquemas. Entonces existe un único subesquema cerrado $Im(f)$ de Y que satisface las siguientes condiciones:

1. f se factoriza a través de la inclusión $i\colon Im(f) \hookrightarrow Y$,

2. Si f se factoriza a través de la inclusión $Z \hookrightarrow Y$ de un subesquema cerrado Z, entonces $i\colon Im(f) \hookrightarrow Y$ se factoriza a través de $Z \hookrightarrow Y$.

Definición 1.22. Llame $Im(f)$ la *imagen esquemática* de f y denote el correspondiente haz cuasicoherente de ideales de $\mathcal{O}_Y$ por $\mathcal{I}_f$.
Cuando f es una inmersión cerrada cuasicompacta entonces $Im(f)$ se llamará la *clausura esquemática* de X en Y.

Los siguientes conceptos serán fundamentales para elaborar una biyección de los $\mathcal{O}_X$-módulos cuasicoherentes y los $GL_{n,K}$-torsores:

Definición 1.23. Sea S un esquema, defina la *categoría de S-esquemas* o esquemas sobre S, denotada por (Sch/S), la categoría cuyos objetos son morfismos de esquemas $(h\colon X \to S)$ y las flechas dos objetos $(h\colon X \to S)$, $(j\colon Y \to S)$ son morfismos de esquemas $v\colon X \to Y$ que satisfacen $h = j \circ v$.

Sea $(h\colon X \to S)$ un S-esquema. Entonces un punto v de h corresponde a un morfismo $v\colon S \to X$. Ahora si Y es un X-esquema, defina Y_v como el objeto que hace al siguiente diagrama cartesiano:

$$\begin{tikzcd} Y_v \arrow[r, dashed] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ Spec(S) \arrow[r, "v"] & Spec(X) \end{tikzcd}$$

Si $u\colon Y \to Y'$ es un morfismo de X-esquemas, defina $u_v\colon Y_v \to Y'_v$ como el morfismo canónico resultante al considerar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Y_v \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "u_v"] \arrow[ddr, bend right] & & Y \arrow[dr, "u"] \arrow[ddr, bend right] & \\
& Y'_v \arrow[rr] \arrow[d] & & Y' \arrow[d] \\
& Spec(S) \arrow[rr, "v"] & & Spec(X)
\end{tikzcd}$$

El siguiente resultado será de utilidad en la prueba del Lema 2.1.

Lema 1.24 (Critère de platitude par fibres)**.** Sean S un esquema, $g\colon X \to S$, $h\colon Y \to S$ dos morfismos localmente de representación finita, y $f\colon X \to Y$ un S-morfismo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. g es plano y $f_s\colon X_s \to Y_s$ es plano para todo punto $s \in S$.

2. h es plano para todos los puntos de $F(X)$ y f es plano.

La prueba se puede encontrar en el Capítulo 11 de [8].

Ahora bien si $f\colon (Y, \mathcal{G}) \to (X, \mathcal{F})$ es un morfismo de espacios anillados, se puede construir $f^{-1}\mathcal{F}$ como el haz asociado al prehaz $f^{+}\mathcal{F}$, donde $f^{+}\mathcal{F}(U) := \varinjlim\limits_{f(U)\subset V} \mathcal{F}(V)$ para todo abierto U de Y.

Entonces si $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo y $f\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ un morfismo de espacios anillados, entonces se denotará $f^{*}\mathcal{G} := \mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{G}$.

Entonces si $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ son dos $\mathcal{O}_S$-módulos cuasicoeherentes, defina el funtor

$$\mathcal{I}som(\mathcal{G}, \mathcal{H})\colon (Sch/S)^{op} \to Set$$

que toma un objeto $(h\colon T \to S)$ y lo envía a $\mathcal{I}som_{\mathcal{O}_T}(h^{*}\mathcal{G}, h^{*}\mathcal{H})$ y para todo morfismo $u\colon (h\colon T \to S) \to (j\colon T' \to S)$, $\mathcal{I}som_{\mathcal{O}_T}(h^{*}\mathcal{G}, h^{*}\mathcal{H})(u)(\tau)$ se define con los siguientes isomorfismos:

$$h^*\mathcal{G} \simeq u^*(j^*\mathcal{G}) \xrightarrow{u^*\tau} u^*(j^*\mathcal{H}) \simeq h^*\mathcal{H}$$

Proposición 1.25. Existe una transformación natural invertible entre el funtor $\mathcal{I}som(\mathcal{G},\mathcal{H})\colon (Sch/S)^{op} \to Set$ y el funtor $Hom_S(-,X)\colon (Sch/S)^{op} \to Set$ para algún objeto X, es decir $\mathcal{I}som(\mathcal{G},\mathcal{H})$ es funtor representable.

La prueba se puede encontrar en el Capítulo 16 de [7].

1.2 Esquemas Afines en Grupos

En esta sección se estudiarán conceptos básicos de los esquemas afines en grupos sobre un anillo k. Se enfocará principalmente en su antiequivalencia con las k-álgebras de Hopf y la estructura de A-comódulo de un k-módulo.

Definición 1.26. Se define un *esquema afín en grupos* sobre k como un funtor representable de la categoría de k-álgebras a la categoría de grupos.

Otra opción es definir un esquema afín en grupos sobre k como un objeto tipo grupo en la categoría de los esquemas afines sobre k.

Definición 1.27. Considere una categoría A con productos finitos; es decir con un objeto final 1 y cualesquiera dos objetos tienen producto en A. Un objeto G es *tipo grupo en la categoría* A si existen morfismos $m\colon G\times G \to G$, $e\colon 1 \to G$ y $inv\colon G \to G$ que hacen los siguientes diagramas conmutar:

$$\begin{tikzcd} G\times G\times G \arrow[r, "\mathrm{m}\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times\mathrm{m}"] & G\times G \arrow[d, "\mathrm{m}"] \\ G\times G \arrow[r, "\mathrm{m}"] & G \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G\times 1 \arrow[r, "\mathrm{id}\times e"] \arrow[dr, "p_1"] & G\times G \arrow[d, "\mathrm{m}"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1\times G \arrow[r, "e\times\mathrm{id}"] \arrow[dr, "p_2"] & G\times G \arrow[d, "\mathrm{m}"] \\ & G \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\mathrm{d}"] & G \times G \arrow[r, "\mathrm{id}\times inv"] & G \times G \arrow[d, "\mathrm{m}"] \\ 1 \arrow[u] \arrow[rr] & & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\mathrm{d}"] & G \times G \arrow[r, "inv\times\mathrm{id}"] & G \times G \arrow[d, "\mathrm{m}"] \\ 1 \arrow[u] \arrow[rr] & & G \end{tikzcd}$$

En este trabajo una k*-álgebra de Hopf* será una k-álgebra A con tres mapeos $\epsilon\colon A \to k$, $\Delta\colon A \to A \otimes A$ y $S\colon A \to A$ que hacen los siguientes diagramas conmutar:

$$\begin{tikzcd} A \otimes k & A \otimes A \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\epsilon"'] \\ & A \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ul, "\simeq"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A & A \otimes A \arrow[l, "\Delta\otimes\mathrm{id}"'] \\ A \otimes A \arrow[u, "id\otimes\Delta"] & A \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] & A \otimes A \arrow[l, "m"] & A \otimes A \arrow[l, "S\otimes\mathrm{id}"'] \\ k & & A \arrow[ll, "\epsilon"] \arrow[u, "\Delta"] \end{tikzcd}$$

Si F y G son esquemas afines en grupos representados por B y C respectivamente, entonces $F \times G$ es representado por $B \otimes_k C$. Ahora si G es un esquema afín en grupos representado por A, entonces satisface los diagramas de un objeto tipo grupo:

$$\begin{tikzcd} A \otimes k & A \otimes A \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\epsilon"'] \\ & A \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ul, "\simeq"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A & A \otimes A \arrow[l, "\Delta\otimes\mathrm{id}"'] \\ A \otimes A \arrow[u, "id\otimes\Delta"] & A \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] & A \otimes A \arrow[l, "m"] & A \otimes A \arrow[l, "S\otimes\mathrm{id}"'] \\ k & & A \arrow[ll, "\epsilon"] \arrow[u, "\Delta"] \end{tikzcd}$$

es decir A es un k-álgebra de Hopf.

Ahora si A es un k-álgebra de Hopf, defina el funtor $F(X) := Hom(A, X) = h_A(X)$ para toda k-álgebra X. Note que F es un esquema afín en grupos. Si $f\colon A \to B$ un morfismo de k-álgebras de Hopf, se tiene la transformación natural $\tau_f\colon Hom(B, X) \to Hom(A, X)$ dada por $\varphi \to \varphi \circ f$ para toda k-álgebra X. De manera similar toda transformación natural $\gamma\colon Hom(B, X) \to Hom(A, X)$ está determinada por la imagen de $\mathrm{id} \in h_B(B)$.

Teorema 1.28. Existe una antiequivalencia entre la categoría de k-álgebras de Hopf y la categoría de los esquemas afines en grupos sobre k.

La prueba se puede encontrar en el Capítulo 1 de [21].

Definición 1.29. Un esquema afín en grupos G se dice *algebraico* si es representado por un álgebra finitamente generada.

Teorema 1.30. Todo esquema afín en grupos algebraico sobre un cuerpo k es isomorfo a algún subgrupo cerrado de $GL_{n,k}$.

La prueba se puede encontrar en el Capítulo 3 de [21].

Ahora sea V un k-módulo. Se puede definir el funtor X de la categoría de las k-álgebras de Hopf a la categoría de conjuntos, dado por $X(R) = V \otimes R$ para toda k-álgebra R. Si G es un esquema afín en grupos que actúa sobre X, la acción de $G(R)$ se dice R-lineal si es compatible con la suma y multiplicación escalar del R-módulo $X(R)$. Si la acción de $G(R)$ es R-lineal se dirá que es una representación lineal de G en V.

Teorema 1.31. Sea G un esquema afín en grupos representado por A. Una representación lineal de G en V corresponde a un mapeo k-lineal $\rho : V \to V \otimes A$ que hace conmutar siguientes diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"] & V \otimes A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] \\
V \otimes A \arrow[r, "\rho\otimes\mathrm{id}"'] & V \otimes A \otimes A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "s"] & V \otimes A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\epsilon"] \\
 & V \otimes k
\end{tikzcd}
$$

La prueba se puede encontrar en el capítulo 3 de [21].

El k-módulo V se le llama A-comódulo y al mapeo k-lineal se llama coacción.

1.3 Torsores

Para esta parte se enfocará en los torsores, principalmente su producto contraído, su trivialidad y prestaremos atención a los $GL_{n,\mathbb{A}^n_R}$-torsores. Así que se tomará un esquema S, un S-esquema X, un S-esquema afín en grupos fielmente plano G y un S-esquema Y con una acción $\sigma\colon Y \times G \to Y$. En esta sección los productos serán sobre S a no ser que se denote lo contrario.

Definición 1.32. Un S-morfismo $f\colon Y \to X$ es un G-*torsor* si es afín, fielmente plano, G-invariante[4] y el morfismo canónico $(pr_1, \sigma)\colon Y \times G \to Y \times_X Y$ es un isomorfismo.

Dicho en otras palabras, el siguiente diagrama conmuta y el morfismo canónico $(pr_1, \sigma)\colon Y \times G \to Y \times_X Y$ que aparece punteado es un isomorfismo:

$$\begin{tikzcd}
Y \times G \arrow[drr, bend left, "\sigma"] \arrow[dr, dotted, "(pr_1,\sigma)"] \arrow[ddr, bend right, "pr_1"'] & & \\
& Y \times_X Y \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"] & Y \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

Sea $f\colon Y \to X$ es un G-torsor. Del hecho que el morfismo canónico (pr_1, σ) es un isomorfismo, G actúa de manera simplemente transitiva en cada fibra para todo S-esquema $T \to S$, es decir para todo $x, y \in Y$ existe un único $g \in G$ tal que $y = xg$.

Definición 1.33. Un G-torsor $f\colon Y \to X$ se dice *trivial* si existe un isomorfismo $\varphi\colon X \times G \to Y$ que es G-equivariante[5].

Es decir, que hace el siguiente diagrama conmutar

[4] f es G-invariante si $f(xg) = f(x)$ para todo $g \in G$ y $x \in Y$.
[5] f es G-equivariante si $f(x)g = f(xg)$ para todo $g \in G$ y $x \in Y$.

$$\begin{tikzcd} X \times G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "pr_1"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Definición 1.34. Sea $f\colon Y \to X$ un G-torsor, H un S-esquema en grupos fielmente plano y $g\colon Z \to X$ un H-torsor. Un *morfismo entre torsores* es un par $(\beta, \alpha)\colon (Z, H) \to (Y, G)$ donde $\alpha\colon H \to G$ es un S-morfismo de esquemas afines en grupos, y $\beta\colon Z \to Y$ es un X-morfismo de esquemas tales que hacen al siguiente diagrama conmutar:

$$\begin{tikzcd} Z \times H \arrow[r, "\beta\times\alpha"] \arrow[d, "H-action"'] & Y \times G \arrow[d, "G-action"] \\ Z \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

Nota 1.35. Del diagrama de la definición 1.34 se tiene que el morfismo β conmuta con la acción.

Entonces se puede definir una acción de H en $Z \times G$, dada por $h(z, g) = (zh, h^{-1}g)$. Con dicha acción se puede cocientar $Z \times G$ por sus órbitas.

Denote el producto contraído como $Z \times^H G := Z \times G/\sim$ donde $(z, g) \sim (z', g')$ si y solo si existe $h \in H$ tal que $h(z, g) = (z', g')$.

Lema 1.36. Sea $f\colon Y \to X$ un G-torsor, H un S-esquema en grupos fielmente plano, $g\colon Z \to X$ un H-torsor, y $(\beta, \alpha)\colon (Z, H) \to (Y, G)$ un morfismo de torsores. Entonces Y is isomorfo a $Z \times^H G$.

Prueba

Tome $\psi\colon Z \times^H G \to Y$ con $\psi(z, g) \mapsto \beta(z)g$.
Se verificará que ψ esta bien definido. Sea $(z', g') = (z, g)$ en $Z \times^H G$. Entonces existe $h \in H$ tal que $z' = zh$ y $g' = h^{-1}g$. Por lo cual $\psi(z', g') = \beta(z')g' = \beta(zh)h^{-1}g = \beta(z)hh^{-1}g = \beta(z)g$. Por tanto esta bien definida.
Ahora como G actúa de manera simplemente transitiva en cada fibra para todo

S-esquema $T \to S$ entonces es un isomorfismo.

Finalmente es fácil verificar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
(Z \times^H G) \times G \arrow[r, "\psi \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "G-action"'] & Y \times G \arrow[d, "G-action"] \\
Z \times^H G \arrow[r, "\psi"'] & Y
\end{tikzcd}$$

□

Lema 1.37. Sea $f\colon Y \to X$ un G-torsor. Existe $u\colon X \to Y$ tal que $f \circ u = \mathrm{id}_X$ si y solo si $f\colon Y \to X$ es un torsor trivial.

Prueba

Suponga que existe $u\colon X \to Y$ tal que $f \circ u = \mathrm{id}_X$. Tome el torsor trivial $X \times G$ y el morfismo de torsores (γ, id) con $\gamma := \sigma(u, \mathrm{id})$ donde σ es la G-acción sobre Y. Dicho morfismo hace el siguiente diagrama conmutar:

$$\begin{tikzcd}
(X \times G) \times G \arrow[r, "\gamma \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "G-action"'] & Y \times G \arrow[d, "G-action"] \\
X \times G \arrow[r, "\gamma"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Por el Lema 1.36, se tiene que $f\colon Y \to X$ es isomorfo a $(X \times G) \times^G G$. Ahora considere $\psi\colon (X \times G) \times^G G \to X \times G$ dada por $\psi((x, g), g') \mapsto (x, gg')$. Note que $\psi((x, gh^{-1}), hg') = (x, gg')$, es decir está bien definida. Además G actúa de manera simplemente transitiva en cada fibra para todo S-esquema $T \to S$. Por lo cual ψ es un isomorfismo. Es fácil ver que conmuta con la acción.

Ahora suponga que $f\colon Y \to X$ es un G-torsor trivial. Es decir existe $\gamma\colon X \times G \to Y$ un isomorfismo de torsores. Considere el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dashed, "\theta"] \arrow[d] & X \times G \arrow[r, "pr_X"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
S \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & G \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

donde el θ es dado al considerar el pullback y el isomorfismo $(X \times G) \times_G S \simeq X$. Defina $\zeta := \gamma \circ \theta$. Finalmente observe $f \circ \zeta = f \circ \gamma \circ \theta = pr_X \circ \theta = \mathrm{id}_X$. $\square$

Nota 1.38. Esta es una versión con mayor detalle de la prueba que se puede encontrar en el Capítulo 3 de [15].

Nota 1.39. Si se considera el pullback

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\mathrm{id}"] & X \end{tikzcd}$$

Entonces $\mathrm{id} = \varphi$.

Proposición 1.40. La aplicación $\mathcal{I} \to \mathcal{I}som_{\mathbb{A}^n_R}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_R}, \mathcal{I})$ es una biyección entre las clases de isomorfismos de $\mathbb{A}^n_R$-modulos localmente libres de rango n y las clases de isomorfismos de los $GL_{n,\mathbb{A}^n_R}$-torsores.

La prueba se puede encontrar en la Sección III, 4, nº 3 de [6].

1.4 Brotes de Néron

Para esta sección, R es un anillo de valuación discreta, K es el cuerpo de fracciones. Si T, T' son R-esquemas[6]. Como R es un anillo de valuación discreta, entonces tiene un punto genérico que denotaremos η.

Se dirá que u es un mapeo modelo si u_η es un isomorfismo. Se examinarán conceptos de los brotes de Néron, primordialmente la forma de construir nuevos torsores a partir de un torsor original y el caso cuando se trabaja sobre $X = \mathbb{A}^n_R$.

Definición 1.41. Sea X_K un K-esquema suave, separado y de tipo finito. Un *modelo Néron* de X_K es un S-esquema X que es separado, suave y de tipo finito y que cumple la siguiente propiedad universal:

[6]Un R-esquema es un esquema sobre $Spec(R)$.

- Para S-esquema suave Y y todo K-morfismo $u_K : Y_K \to X_K$ existe un único S-morfismo $u : Y \to X$ extendiendo u_K.

En otras palabras se puede ver de la siguiente manera, dado el diagrama con las fechas sólidas existe el morfismo u que hace el diagrama conmutar:

$$\begin{tikzcd}
X_K \arrow[rr] \arrow[dr, "u_K"] \arrow[ddr] & & X \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[ddr] & \\
& Y_K \arrow[rr] \arrow[d] & & Y \arrow[d] \\
& K \arrow[rr] & & X
\end{tikzcd}$$

En particular el modelo de Néron X de la fibra genérica X_K es único salvo por isomorfismo. Esto es una consecuencia sencilla de la propiedad universal.

Proposición 1.42. Sea X un S-esquema suave y separable el cual es el modelo de Néron de la fibra genérica X_K. Si además X_K es un K-esquema en grupos, entonces la estructura de esquema en grupos de X_K se extiende de manera única a una estructura de S-esquema en grupo en X.

La prueba se puede encontrar en el Capítulo 1.2 de [5].

Proposición 1.43. Sea X un R-esquema de tipo finito y C un subesquema cerrado de la fibra especial X_s de X y sea $\mathcal{I}$ el haz de ideales de $\mathcal{O}_X$ que definen C. Sea $X' \to X$ el brote de X en C y $u \colon X^C \to X$ denote su restricción al subesquema abierto X' donde $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_X$ es generado por π. Entonces:

1. X^C es un S-esquema plano, y u es un mapeo modelo afín,

2. Para todo S-esquema Z y para todo S-morfismo $v \colon Z \to X$ tal que v_k se factoriza a través de C, existe un único S-morfismo $v' \colon Z \to X^C$ tal que $v = u \circ v'$.

La prueba se puede encontrar en el Capítulo 3.2 de [5].

Definición 1.44. Al morfismo $u\colon X^C \to X$ de la Proposición 1.43 se le llamará el *brote de Néron* de X en C y nos referiremos a la propiedad 2 como la propiedad universal del brote de Néron.

En particular la propiedad 1 y 2 de la proposición 1.43 se puede observar con el siguiente diagrama conmutativo con flechas sólidas, entonces existe v' que hace el diagrama conmutar:

$$
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dr, dashed, "v'"] \arrow[dddr, bend right, "v"'] & & Z_s \arrow[ll, bend right] \arrow[dr, "v'_s"] \arrow[ddr] \arrow[dddr, bend right, "v_s"'] & \\
(X^C)_\eta \arrow[rr, bend left] \arrow[ddd, equal, "u_\eta"] & & X^C \arrow[ddd, "u"] & & (X^C)_s \arrow[ll, bend right] \arrow[d] \\
 & & & & C \arrow[dd] \\
 & & & & \\
X_\eta \arrow[rr, bend left] & & X & & X_s \arrow[ll, bend right]
\end{tikzcd}
$$

La siguiente proposición da la posibilidad de construir un nuevo torsor dado un torsor original.

Proposición 1.45. Sea G un S-esquema afín en grupos plano y algebraico, y H un subesquema en grupos cerrado de G_s. Sea $f\colon Y \to X$ un G-torsor y $Z \to X_s$ un H-torsor, subtorsor de $Y_s \to X_s$. Entonces existe un S-esquema fielmente plano de tipo finito X', y un mapeo modelo $\lambda\colon X' \to X$ tal que $Y^Z \to X'$ es un G^H-torsor genéricamente isomorfo a $Y_\eta \to X_\eta$. Más aún, si G es cuasifinito, entonces λ puede obtenerse después de un número finito de brotes de Néron.

La prueba se puede encontrar en [3].

Lema 1.46. Sea $X = \mathbb{A}^n_R$ el espacio n-dimensional afín y x=(0,...,0) el origen. Sea X' el R-esquema resultante al realizar m-veces el brote de Néron en el punto x_s. Entonces existe un R-isomorfismo $X \to X'$

Prueba

Para cualquier entero m se tiene que

$$\text{X'=Spec}\Big(\frac{R[x_1,...,x_n,y_1,...,y_n]}{x_1-\pi^m y_1,...,x_n-\pi^m y_m} \Big)$$

Defina el morfismo

$$\mathbb{A}^n_R := Spec(R[t_1,...,t_n]) \to X' \qquad t_i \mapsto y_i$$

el cual es el isomorfismo deseado. $\square$

2. Extensión de un Torsor

Sea X un esquema afín de tipo finito y fielmente plano sobre $Spec(R)$ donde R es un anillo de valuación discreta y X_η su fibra genérica definida sobre $Spec(K)$ con K el cuerpo de fracciones de R. Además sea G un esquema afín en grupos y $f\colon Y \to X_\eta$ un G-torsor.

En este capítulo se enfocará en examinar la posible existencia de un R-esquema afín en grupos plano G' y un G'-torsor $Y' \to X$ de modo que el pullback sobre X_η sea isomorfo al torsor $f\colon Y \to X_\eta$. Es decir, el siguiente diagrama sea cartesiano:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed] \arrow[d, "f"] & Y' \arrow[d, dashed] \\ X_\eta \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Spec(K) \arrow[r] & Spec(R) \end{tikzcd}$$

Para ello, se supondrá la existencia de una inmersión de $Y \hookrightarrow Y \times^G GL_{n,K}$ tal que $Y \times^G GL_{n,K}$ es un $GL_{n,K}$-torsor trivial para poder construir un candidato a extensión pero, este candidato podría no ser fielmente plano. En tal caso se realizará una cantidad finita brotes de Néron X sobre el origen, esto ya que la fiel planitud se podrá verificar con el criterio de planitud por fibras [8]. Por lo tanto, se encontrá un G'-torsor $f'\colon Y' \to X'$ que extiende al torsor dado si existe dicha inmersión.

Lema 2.1. Sea $X = Spec(A)$ un esquema afín de tipo finito y fielmente plano sobre $Spec(R)$ con una sección $x \in X(R)$[1]. Sea G K-esquema afín en grupos de tipo finito, $Y = Spec(B)$[2] un K-esquema $f\colon Y \to X_\eta$, un G-torsor puntuado en $y \in Y(K)$ sobre x_η. Además si se fija $G \hookrightarrow GL_{n,K}$ asumiendo que el producto contraído $Z := Y \times^G GL_{n,K}$ es un $GL_{n,K}$-torsor trivial.
Entonces existe un G'-torsor $f'\colon Y' \to X'$ que extiende el G-torsor dado, donde G' es la clausura de G en $GL_{n,R}$ y X' es obtenido a través de un numero finito de brotes de Néron de $x_s \in X$.

Prueba

Se sabe que $X = Spec(A)$ y que $S = Spec(R)$ y denotemos $X_\eta = Spec(A_K)$. El punto x corresponde a un R-morfismo de $\alpha\colon A \to R$, al considerar el producto tensorial con K se obtiene un K-morfismo $\alpha_K\colon A_K \to K$, dicho punto es el correspondiente x_η. Además se ha asumido que se tiene un punto K-racional $y\colon Spec(K) \to Y$ sobre x_η. Observe que se tiene lo siguiente:

$$\begin{tikzcd}
Spec(K) \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "y"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}"'] & & \\
& Y_{x_\eta} \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "f"] \\
& Spec(K) \arrow[r, "x_\eta"] & X_\eta
\end{tikzcd} .$$

Por el Lema 1.37 se obtiene $Y_{x_\eta} \simeq Spec(K) \times_{Spec(K)} G \simeq G$. Como $Y_{x_\eta} = Spec(B \otimes_{A_K} K)$. Si fije $C := B \otimes_{A_K} K$, entonces

$$G = Spec(C).$$

En particular C es un cociente de B, por lo cual se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

[1] $X(R) = Hom(R, X)$.
[2] A y B son anillos cualesquiera.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, two heads, "q"] & C \\ A_K \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\alpha_K"] & K \arrow[u, hook] \end{tikzcd}.$$

Por hipótesis se tiene $v{:=}G \hookrightarrow GL_{n,K}$ con el cual $Z{:=}\ Y \times^G GL_{n,K}$ es un $GL_{n,K}$-torsor trivial, entonces fije $Z := Spec(D)$ con $D{:=}A_K\left[y_{11}, ..., y_{nn}, 1/\det[y_{ij}]\right]$. Ahora considere el morfismo sobreyectivo de A_K-álgebras inducido por la inmersión cerrada de Y en el $GL_{n,K}$-torsor trivial Z:

$$u\colon A_K\left[y_{11}, ..., y_{nn}, 1/\det[y_{ij}]\right] \to B$$

Por lo tanto se puede identificar B como el cociente $A_K\left[y_{11}, ..., y_{nn}, 1/det[y_{ij}]\right]$ por $ker(u)$. Entonces obtenemos:

$$B{:=}\frac{A_K\left[y_{11}, ..., y_{nn}, 1/\det[y_{ij}]\right]}{f_1, ..., f_m}$$

y

$$C{:=}\frac{K\left[x_{11}, ..., x_{nn}, 1/\det[x_{ij}]\right]}{\alpha_K(f_1), ..., \alpha_K(f_m)} \qquad \text{con } q(y_{ij}) = x_{ij}$$

Considere el morfismo de torsores (u, v), con el cual el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Y \times G \arrow[r, "u\times v"] \arrow[d, "G-acción"'] & Z \times_{X_\eta} GL_{n,K} \arrow[r] \arrow[d] & Z \times_{X_\eta} Z \arrow[dl, "m"] \\ Y \arrow[r, "u"] & Z & \end{tikzcd}.$$

De la coproducto de D, es decir $\Delta_D(y_{ij}) = \sum_{r=1}^{n} y_{ir} \otimes y_{rj}$ el diagrma se traduce en el siguiente diagrma:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\Delta_D"] & B \arrow[d, "\rho_B"] \\ D \otimes D \arrow[r, "u\otimes v"] & B \otimes C \end{tikzcd}.$$

Se deduce:

$$\rho_B(y_{ij}) = \sum_{r=1}^{n} x_{ir} \otimes y_{rj} \ .$$

Además como tenemos la acción $\sigma\colon Y \times G \to Y$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Y \times G \times G \arrow[r, "\mathrm{id}\times m"] \arrow[d, "\sigma\times\mathrm{id}"] & Y \times G \arrow[d, "\sigma"] \\ Y \times G \arrow[r, "\sigma"] & Y \end{tikzcd} \quad .$$

Por el Teorema 1.31 , B tiene estructura de comódulo de C con la coacción ρ_B. Dando como resultado el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\rho_B"] \arrow[d, two heads, "q"] & C \otimes B \arrow[d, two heads, "\mathrm{id}_C \otimes q"] \\ C \arrow[r, "\Delta_C"] & C \otimes_K C \end{tikzcd} \quad .$$

Por lo cual:

$$\Delta_C(x_{ij}) = \sum_{r=1}^{n} x_{ir} \otimes x_{rj} \, .$$

Además $\Delta_C(1/\det[x_{ij}]) = 1/\det[x_{ij}] \otimes 1/\det[x_{ij}]$, ya que de manera similar se obtiene que $\Delta_C(\det[x_{ij}]) = \det[x_{ij}] \otimes \det[x_{ij}]$.
Aplicando esto a las siguientes igualdades $(\epsilon_C \otimes \mathrm{id})\Delta_C = \mathrm{id}$ y $(S_C \otimes \mathrm{id}))\Delta_C = \epsilon_C$ se obtiene

$$\epsilon_C(x_{ij}) = \delta_{ij} \, ,$$

$$\delta_{ij} = \sum_{r=1}^{n} S(x_{ir}) \otimes x_{rj} \, .$$

Entonces $S_C(x_{ir})$ es la entrada i, r de la matriz $[x_{ij}]^{-1}$.

Ahora bien, el isomorfismo $Y \times G \to Y \times_{X_\eta} Y$, $(y, g) \to (y, yg)$ da como resultado el siguiente isomorfismo:

$$\Psi\colon B \otimes_{A_K} B \to C \otimes B \quad , \quad y_{ij} \otimes y_{rs} \to \rho_B(y_{ij})(1 \otimes y_{rs})$$

Se describirá Ψ^{-1}:

Como $\Psi(1 \otimes y_{ij}) = (1 \otimes y_{ij})$ se obtiene $\Psi^{-1}(1 \otimes y_{ij})$. Ahora sea

$$\Psi^{-1}(x_{ij} \otimes 1) = \sum_{r=1}^{n} y_{ir} \otimes H(y_{rj}),$$

donde $H(y_{ij})$ es la entrada ij de la matriz $[x_{ij}]$. Esto ya que:

$$\Psi(\sum_{r=1}^{n} y_{ir} \otimes H(y_{rj})) = \sum_{r=1}^{n} \rho_B(y_{ir})(1 \otimes H(y_{rj})) =$$

$$\sum_{s=1}^{n}(\sum_{r=1}^{n} x_{ir} \otimes y_{rs}H(y_{sj})) = \sum_{r=1}^{n}(x_{ir} \otimes \sum_{s=1}^{n}(y_{rs}H(y_{sj}))) =$$

$$\sum_{r=1}^{n} x_{ir} \otimes \delta_{rj} = x_{ij} \otimes 1$$

Es de destacar que $H(y_{ij}) \in \mathbb{Z}\left(y_{11}, .., y_{nn}, \frac{1}{\det[y_{ij}]}\right)$.

Se puede observar que el coproducto, la counidad de B y $H(y_{ij})$ por construcción pertenecen a $\mathbb{Z}[y_{11}, .., y_{dd}, \frac{1}{\det[y_{ij}]}]$ y $\Delta_C, \epsilon_C \in \mathbb{Z}\left(y_{11}, .., y_{dd}, \frac{1}{\det[y_{ij}]}\right)$, por lo cual se define:

$$B' := \frac{A\left[y_{11},...,y_{nn},1/\det[y_{ij}]\right]}{f_1,...,f_m},$$

y

$$C' := B' \otimes_A R.$$

Pero para que $Spec(B')$ sea un torsor sobre $Spec(A)$ necesitamos que B' sea fielmente plano. Se estudiará el caso donde 1. B' es A-fielmente plano y 2. B' no es A-fielmente plano.

Caso B' es A-fielmente plano

Definimos $C' = B' \otimes R$, entonces

$$C' = \frac{R\left[x_{11},...,x_{nn},1/\det[x_{ij}]\right]}{\alpha(f_1),...,\alpha(f_m)}$$

Es R-plano y se tiene estructura de R-álgebra de Hopf con:

$$\Delta_{C'}: C' \to C' \otimes C' \quad , \quad x_{ij} \mapsto \sum_{r=1}^{n} x_{ir} \otimes x_{rj},$$

$$\epsilon_{C'}: C' \to R \quad , \quad \epsilon_{C'}(x_{ij}) \mapsto \delta_{ij},$$

$$S_{C'}: C' \to C' \quad , \quad x_{ij} \mapsto S_{C'}(x_{ij}),$$

donde $S_{C'}(x_{ij})$ denota la entrada ij de la matriz $[x_{ij}]^{-1}$. De manera análoga B' tiene estructura de comódulo sobre C' dada por:

$$\rho_{B'}: B' \to C' \otimes B' \quad , \quad y_{ij} \to \sum_{r=1}^{n} x_{ir} \otimes y_{rj}.$$

Semejantemente se obtiene que:

$$\Psi: B' \otimes B' \to C' \otimes B' \quad , \quad y_{ij} \otimes y_{rs} \mapsto \rho_{B'}(y_{ij})(1 \otimes y_{rs}),$$

$$\Psi^{-1}: C' \otimes B' \to B' \otimes B' \quad , \quad x_{ij} \otimes y_{rs} \mapsto \sum_{v=1}^{n} y_{iv} \otimes H(y_{vj})y_{rs}.$$

Por lo tanto fije $G' := Spec(C')$ y $Y' = Spec(B')$. Entonces G' es un R-esquema plano de tipo finito actuando en Y' tal que $Y' \to X$ es G'-invariante. Además la flecha $Y' \times G' \to Y' \times Y'$ sea un isomorfismo. Por lo tanto $Y' \to X$ es un G'-torsor.

Caso B' no es fielmente plano

Como A es de tipo finito sobre R, se puede escribir A de la siguiente manera:

$$A = \frac{R[t_1,...,t_r]}{u_1,...,u_w}$$

donde $u_1, ..., u_w \in R[t_1, ..., t_r]$. Por lo tanto:

$$B = \frac{K\left[t_1,...,t_r,y_{11},...,y_{nn},1/\det[y_{ij}]\right]}{u_1,...,u_w,f_1,...,f_m}$$

donde se puede tomar $f_1, ..., f_m$ en $K\left[[t_1, ..., t_r, y_{11}, ..., y_{nn}, 1/\det[y_{ij}]\right]$. Más aún reduciendo denominadores se puede asumir que sus coeficientes pertenecen a R con por lo menos un elemento de valuación 0. Además podemos reescribir f_i de la siguiente manera

$$\alpha^*(f_i)(y_{11}, ..., y_{nn}, 1/\det[y_{ij}]) + \sum_{l=1}^{L_i} v_{il}(y_{11}, ..., y_{nn}, 1/\det[y_{ij}])g_{il}(t_1, ..., t_r)$$

para algún $L_i \in \mathbb{N}$ donde v_{il} y g_{il} son polinomios con coeficientes en R. Como X es afín, sin perdida de generalidad se puede asumir que el punto dado $x \in X(R)$ es el origen. Caso contrario se realizaría una traslación. Por lo cual:

$$C = \frac{K\left[x_{11},...,x_{nn},1/\det[x_{ij}]\right]}{\alpha^*(f_1),...,\alpha^*(f_m)}$$

Ya que $g_{il}(0, ..., 0) = 0$ por ser x el origen. Ahora escriba:

$$B' = \frac{R\left[t_1,...,t_r,y_{11},...,y_{nn},1/\det[y_{ij}]\right]}{u_1,...,u_w,f_1,...,f_m}$$

Sin perdida de generalidad se puede asumir que es R-plano. Si hubiese R-torsión, bastaría con quitarle la R-torsión, esto agregando una cantidad finita de polinomios $f'_1, ..., f'_q \in R[t_1, ..., t_r, y_{11}, ..., y_{nn}, 1/\det[y_{ij}]]$.
Similarmente:

$$C' = \frac{R\left[x_{11},...,x_{nn},1/\det[x_{ij}]\right]}{\alpha^*(f_1),...,\alpha^*(f_m)}$$

De manera análoga se puede asumir que la fibra especial del punto $x \in X(R)$ es el origen. Ahora sea $e \in \mathbb{N}$, se realizará el brote de Néron de X e-veces sobre x_s.
Se puede construir de la siguiente manera: fije

$$t'_i := \pi^{-e} t_i \quad i = 1, ..., r, \qquad \text{y} \qquad A' = \frac{R[t'_1, ..., t'_r]}{u'_1, ..., u'_n}$$

donde u_i' es el resultado de remplazar t_i por $\pi^e t_i'$ y dividir el polinomio por una potencia de π de manera que el polinomio tenga coeficientes en R y al menos un de ellos tenga valuación 0. Llame $X' = Spec(A')$, entonces X' es el brote de Néron de X e-veces sobre x_s deseado.
Recordar que se puede escribir f_i como:

$$f_i = \alpha^*(f_i)(y_{11}, ..., y_{nn}, 1/\det[y_{ij}]) + \sum_{l=1}^{L_i} v_{il}(y_{11}, ..., y_{nn}, 1/\det[y_{ij}])g_{il}(t_1, ..., t_r),$$

por lo cual defina:

$$f_i' = \alpha^*(f_i)'(y_{11}, ..., y_{nn}, 1/\det[y_{ij}]) + \sum_{l=1}^{L_i} v_{il}'(y_{11}, ..., y_{nn}, 1/\det[y_{ij}])g_{il}'(t_1, ..., t_r),$$

el cual es el polinomio proveniente de remplazar t_j con $\pi^e t_j'$ en todos los g_{jl} y dividiendo el polinomio por una potencia adecuada de π de manera que tenga coeficientes en R y por lo menos uno con valuación 0. Ahora a partir de B' podemos definir la R-álgebra plana B''

$$B'' = \frac{R\left[t_1',...,t_r',y_{11},...,y_{nn},1/\det[y_{ij}]\right]}{u_1',...,u_w',f_1',...,f_m'}$$

Fije $Y'' := Spec(B'')$ y $G'' := Y_x'' = Spec(C'')$ donde:

$$C''=\frac{R\left[x_{11},...,x_{nn},1/\det[x_{ij}]\right]}{\alpha^*(f_1)',...,\alpha^*(f_m)'}.$$

Observe que

$$Y_s''=\mathrm{Spec}\Big(\frac{k\left[t_1',...,t_r',y_{11},...,y_{nn},1/\det[y_{ij}]\right]}{u_1',...,u_w',\alpha^*(f_1)',...,\alpha^*(f_m)'}\Big),$$

es isomorfo a $G_s'' \times_k X_s'$. Por tanto, es un torsor trivial. Por el Lema 1.37 se tiene una sección $u\colon X_s' \to Y_S''$ tal que $f \circ U = \mathrm{id}_{X_s'}$. Por lo tanto es fielmente plano sobre X_s'.

Por el *Critère de platitude par fibres* [Lema 1.24] se concluye que $Y'' \to X'$ es fielmente plano. $\square$

Ahora por el teorema de Quillen-Suslin [12] se tiene que todo $\mathbb{A}^n_Q$-módulo proyectivo finitamente generado es libre para Q un cuerpo cualquiera. Esto asegura la existencia de la inmersión del lema 2.1.

Teorema 2.2. Sea $X = \mathbb{A}^n_R = Spec(R[t_1, ..., t_n])$ el espacio n-dimensional afín y $x = (0, ..., 0)$ el origen. Sea G un K-esquema en grupos plano de tipo finito y $f\colon Y \to X_\eta$ un G-torsor puntuado en $y \in Y_{x_\eta}(K)$. Entonces existe un R-esquema afín en grupos G' y un G'-torsor $f'\colon Y' \to X'$, puntuado en $y' \in Y_X(R)$, que extiende al G-torsor Y dado, donde X' se obtiene al realizar el brote de Néron una finita cantidad de veces sobre $x_s \in X_s$

Prueba

Por la Proposición 1.40 sabemos que existe una biyección entre los K-módulos localmente libres de rango n y los $GL_{n,\mathbb{A}^n_K}$-torsores. Por Proposición 1.20 todo $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_K}$-módulo localmente libre se le puede asociar un $\mathbb{A}^n_K$-módulo proyectivo finitamente generado. Por Teorema Quillen-Suslin (Capítulo XXI de [12]) todo módulo proyectivo sobre $\mathbb{A}^n_K$ es libre. Por lo cual todo $GL_{n,\mathbb{A}^n_K}$-torsor es trivial. Por tanto, basta aplicar el Lema 2.1 $\square$

Corolario 2.3. Sea $X = \mathbb{A}^n_R$ el espacio afín n-dimensional y x=(0,...,0) punto origen. Sea G un K-esquema afín en grupos de tipo finito y $f\colon Y \to X$ un G-torsor puntuado en $y \in Y_{x_\eta}(K)$. Entonces posiblemente después de realizar un automorfismo de $\mathbb{A}^n_K$, existe un G'-torsor $f'\colon Y' \to \mathbb{A}^n_R$ puntuado en $y' \in Y_X(R)$ que extiende al G-torsor Y.

Prueba

El resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 2.2 y el Lema 1.46 $\square$

En particular el Corolario 2.3 se puede visualizar con el siguiente diagrama conmutativo con flechas sólidas

$$\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[d, "f'"] \\
Y \arrow[ur] \arrow[d, "f"] & \mathbb{A}^n_R \arrow[d] \\
\mathbb{A}^n_K \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^n_R \arrow[d] \\
Spec(K) \arrow[r] & Spec(R)
\end{tikzcd}$$

3. Conclusiones

Tome R un anillo de valuación discreta, K su cuerpo de fracciones y un esquema afín $X = Spec(A)$ con una sección $x \in X(R)$. Dado G un K-esquema afín en grupos de tipo finito, $f\colon Y = Spec(B) \to X_\eta$ un G-torsor puntuado en $y \in Y(K)$ sobre x_η, se ha probado que fijando una inmersión $G \hookrightarrow GL_{n,K}$ con el cual el producto contraído $Y \times^G GL_{n,K}$ sea un $GL_{n,K}$-torsor trivial el G-torsor $f\colon Y \to X_\eta$ se puede extender a un G'-torsor $f'\colon Y' \to X'$ realizando el brote de Néron un número finito de veces siempre sobre el origen.

Si $X = \mathbb{A}^n_R = Spec(R[t_1, ..., t_n])$ el espacio n-dimensional y el punto $x = (0, ..., 0)$ el origen, cualquier G-torsor finito $f\colon Y \to X_\eta$ puntuado en $y \in Y(K)$ sobre x_η se puede extender a un G'-torsor $f'\colon Y' \to X'$ al realizar un número finito de brotes de Néron sobre el origen.

Además, por el Lema 1.46 se puede extender todo G-torsor $f\colon Y \to \mathbb{A}^n_K$ puntuado en $y \in Y(K)$ sobre x_η a un G'-torsor $f\colon Y' \to \mathbb{A}^n_R$ después de realizar un automorfismo de A^n_K.

Es posible obtener un resultado similar al Teorema 2.2 al considerar el caso donde $X = Spec(R[X]/x^n)$ ya que el Lema 2.1 se puede aplicar al espectro de anillos locales. En tal caso, se obtiene un resultado análogo para $X = \alpha_{p,R}$, que sería el caso donde $n = p = char(R)$.

A partir del Teorema 2.2, al fijar R un anillo de valuación discreta y K su cuerpo de fracciones. Usando las definiciones de [4], se puede considerar el triplete (Y, G, x)

donde $Y \to X$ es un G-torsor punteado en X. Denote $(\hat{X}, \pi(X,x), x)$ $[(\hat{X}, \pi^{qf}(X,x), x)$ respectivamente] como el límite proyectivo de torsores finitos [cuasi-finito respetivamente] y cuasi-galoisianos [cuasi-qf-galoisiano]. Se puede formular la siguiente conjetura la cual se sale del enfoque central de este trabajo:

Conjetura 3.1. Sea $\pi^{qf}(\mathbb{A}^n_K, 0)$ el grupo fundamental cuasifinito del esquema $\mathbb{A}^n_K$ en el origen. Entonces el siguiente morfismo fielmente plano

$$\pi(\mathbb{A}^n_K, 0) \to \pi^{qf}(\mathbb{A}^n_K, 0) \times_R K \ ,$$

es un isomorfismo.

Bibliografía

[1] Antei, Marco *Extension of finite solvable torsors over a curve.* Manuscripta Math. 140 (2013), no. 1-2, 179–194.

[2] Antei, Marco, *On the abelian fundamental group scheme of a family of varieties.* Israel J. Math. 186 (2011), 427–446.

[3] Antei, Marco; Emsalem, Michel *Models of torsors and the fundamental group scheme.* Nagoya Math. J. 230 (2018), 18-34

[4] Antei, Marco, Emsalem; Michel and Gasbarri, Carlo *Sur léxistence du schéma en groupes fondamental*. Preprint, 2015, arXiv:1504.05082

[5] Bosch, Siegfried; Lütkebohmert, Werner; Raynaud, Michel *Néron models.* Springer-Verlag, Berlin, 1990. x+325 pp. ISBN: 3-540-50587-3

[6] Demazure, Michel; Gabriel, Peter *Groupes algébriques. Tome I: Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1970. xxvi+700 pp.

[7] Görtz, Ulrich; Wedhorn, Torsten *Algebraic geometry I. Schemes with examples and exercises.* Advanced Lectures in Mathematics. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010. viii+615 pp. ISBN: 978-3-8348-0676-5

[8] Grothendieck; Alexander *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 28 1966 255 pp.

[9] GROTHENDIECK; ALEXANDER *Revêtements étales et groupe fondamental. Fasc. II: Exposés 6, 8 á 11.* Séminaire de Géométrie Algébrique, 1960/61. Troisième édition, corrigée Institut des Hautes Études Scientifiques, Paris 1963 i+163 pp.

[10] HARTSHORNE, ROBIN *Algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. xvi+496 pp. ISBN: 0-387-90244-9

[11] IITAKA, SHIGERU, *Algebraic geometry. An introduction to birational geometry of algebraic varieties.* Graduate Texts in Mathematics, 76. North-Holland Mathematical Library, 24. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. x+357 pp. ISBN: 0-387-90546-4

[12] LANG, SERGE *Algebra.* Revised third edition. Graduate Texts in Mathematics, 211. Springer-Verlag, New York, 2002. xvi+914 pp. ISBN: 0-387-95385-X

[13] LIU, QING, *Algebraic geometry and arithmetic curves.* Translated from the French by Reinie Erné. Oxford Graduate Texts in Mathematics, 6. Oxford Science Publications. Oxford University Press, Oxford, 2002. xvi+576 pp. ISBN: 0-19-850284-2

[14] MILNE, JAMES STUART *Arithmetic duality theorems.* Perspectives in Mathematics, 1. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1986. x+421 pp. ISBN: 0-12-498040-6

[15] MILNE, JAMES STUART *Étale cohomology.* Princeton Mathematical Series, 33. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980. xiii+323 pp. ISBN: 0-691-08238-3

[16] NÉRON, ANDRÉ *Modéles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux.* (French) Inst. Hautes Études Sci. Publ.Math. No. 21 1964 128 pp.

[17] Néron, André *Modéles $\mathfrak{p}$-minimaux des variét';es abéliennes.* Séminaire Bourbaki, Vol. 7, Exp. No. 227, 65–80, Soc. Math. France, Paris, 1995.

[18] Raynaud, Michel *p-groupes et réduction semi-stable des courbes.* The Grothendieck Festschrift, Vol. III, 179–197, Progr. Math., 88, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[19] Tossici, Dajano *Effective models and extension of torsors over a discrete valuation ring of unequal characteristic.* Int. Math. Res. Not. IMRN 2008, Art. ID rnn111, 68 pp.

[20] Vistoli, Angelo, *Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory*, arXiv:0412512.

[21] Waterhouse, William C. *Introduction to affine group schemes.* Graduate Texts in Mathematics, 66. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1979. xi+164 pp. ISBN: 0-387-90421-2