SP–1311: ANÁLISIS FUNCIONAL

Joseph C. Várilly

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

II Ciclo Lectivo de 2018

Introducción

Hace unas décadas, surgió la costumbre de usar el término *análisis funcional* para denotar la parte del análisis matemático que maneja propiedades algebraicas o topológicas generales de espacios de funciones u operadores. El texto de Rudin (1973) lo expresa así: "el análisis funcional se propone estudiar ciertas estructuras topológico-algebraicas y los métodos que el conocimiento de estas estructuras permite aplicar a los problemas analíticos".

Las estructuras algebraicas relevantes son espacios vectoriales o álgebras cuyos miembros son funciones u operadores lineales. Dichos operadores o funciones se consideran como elementos o "puntos" de un espacio vectorial, el cual típicamente tiene dimensión infinita. La topología de ese espacio vectorial está determinada por una norma o por una familia de seminormas. En muchas aplicaciones, el objeto de interés es un *funcional*, que lleva funciones en números reales o complejos. Esto conduce al estudio de los espacios normados y sus funcionales lineales, abordado por Stefan Banach y sus colegas a partir de 1920.

Inicialmente se estudiaba espacios de funciones – continuas, diferenciables, holomorfas, integrables, etc. – y los funcionales sobre funciones: diferenciación, integración, evaluación en un punto, etcétera. La introducción axiomática de un *espacio de Hilbert* se debe a John von Neumann en 1930, como parte de sus trabajos sobre los fundamentos de la mecánica cuántica (en colaboración con David Hilbert). Un tema fundamental desde entonces ha sido la estructura de operadores sobre espacios de Hilbert. Otros temas importantes han sido las representaciones unitarias de grupos, impulsados por Hermann Weyl (1925–27); las álgebras de Banach y las C^*-álgebras introducidos por Israil Guelfand y otros (1941–43); y la teoría de las distribuciones de Sergei Sobolev (1936) y Laurent Schwartz (1949).

En este curso, se comienza con espacios vectoriales topológicos: de Hilbert, de Banach y localmente convexos, constituidos por sucesiones o funciones. Siguen varios teoremas fundamentales sobre funcionales y operadores lineales. El tema de dualidad entre espacios de Banach o localmente convexos conduce a las distribuciones de Schwartz y la transformación de Fourier. Por último, a través de las C^*-álgebras, se llega a la teoría espectral de los operadores lineales sobre espacios de Hilbert.

Bibliografía

Los siguientes libros amplifican y profundizan los temas del curso.

[1] G. R. Allan & H. G. Dales, *Introduction to Banach Spaces and Algebras*, Oxford University Press, Oxford, 2010.

[2] Ph. Blanchard & E. Brüning, *Mathematical Methods in Physics: Distributions, Hilbert Space Operators, and Variational Methods*, Birkhäuser, Boston, 2003.

[3] J. A. Dieudonné, *Éléments d'Analyse*, tomos 1–2, Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[4] Y. Eidelman, V. Milman & A. Tsolomitis, *Functional Analysis: An Introduction*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[5] R. Estrada & R. P. Kanwal, *A Distributional Approach to Asymptotics: Theory and Applications*, Birkhäuser, Boston, 2002.

[6] A. N. Kolmogorov & S. V. Fomin, *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, 3ª edición, Mir, Moscú, 1978.

[7] P. D. Lax, *Functional Analysis*, Wiley, New York, 2002.

[8] E. H. Lieb & M. Loss, *Analysis*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[9] G. J. Murphy, *C^*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, Orlando, FL, 1990.

[10] M. S. Osborne, *Locally Convex Spaces*, Springer, Cham (Suiza), 2014.

[11] G. K. Pedersen, *Analysis Now*, Springer, Berlin, 1989.

[12] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Functional Analysis*, Dover Books, Mineola, NY, 1990.

[13] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[14] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[15] B. Simon, *Real Analysis*, A Comprehensive Course in Analysis, tomo 1, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[16] B. Simon, *Operator Theory*, A Comprehensive Course in Analysis, tomo 4, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[17] E. M. Stein & R. Shakarchi, *Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011.

[18] N. Young, *An Introduction to Hilbert Space*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

Indíce General

Introducción 1

1 Los Espacios del Análisis Lineal **1-1**

1.1 Espacios de sucesiones y de funciones 1-1

1.2 La estructura de los espacios de Hilbert 1-12

1.3 Espacios localmente convexos 1-23

1.4 Ejercicios sobre espacios del análisis lineal 1-27

2 Los Teoremas Fundamentales y la Dualidad **2-1**

2.1 Aplicaciones lineales continuas 2-1

2.2 El teorema de extensión de Hahn y Banach 2-3

2.3 El teorema de Banach y Steinhaus 2-8

2.4 El teorema de la aplicación abierta 2-11

2.5 El teorema de Banach y Alaoglu 2-15

2.6 Dualidad en espacios de Banach 2-19

2.7 Dualidad y reflexividad 2-28

2.8 Ejercicios sobre aplicaciones lineales y dualidad 2-34

3 Operadores y Teoría Espectral **3-1**

3.1 Álgebras de Banach 3-1

3.2 Operadores sobre un espacio de Hilbert 3-11

3.3 Operadores compactos 3-19

3.4 El teorema espectral 3-32

3.5 Ejercicios sobre operadores y teoría espectral 3-37

4 Introducción a la Teoría de Distribuciones **4-1**

4.1 Funciones de prueba y distribuciones 4-2

4.2 La convolución de funciones y distribuciones 4-11

4.3 Distribuciones temperadas y transformadas de Fourier 4-19

4.4 Distribuciones homogéneas 4-28

4.5 Ejercicios sobre distribuciones 4-34

1 Los Espacios del Análisis Lineal

Gentlemen: there's lots of room left in Hilbert space!
— Saunders MacLane

En este curso, los objetos principales de interés son ciertos *espacios vectoriales infinitodimensionales* y sus *transformaciones lineales*. Muchos de esos espacios poseen topologías compatibles con las operaciones algebraicas, obtenidas de una o varias normas o seminormas.

1.1 Espacios de sucesiones y de funciones

El cuerpo de base para todos los espacios vectoriales en este curso es $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, el cuerpo de los *números reales* o *números complejos*, respectivamente. Habrá una preferencia para escalares complejos; para unificar los casos, se escribirá $\bar{\alpha} := \alpha$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ sin mayor detalle.[1]

En los sucesivo, E denotará un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$.

Definición 1.1. Un **producto escalar** (o *producto interno*) en E es una *forma hermítica definida positiva* sobre E, es decir, una función $E \times E \to \mathbb{F} : (x, y) \mapsto \langle x \mid y \rangle$ tal que:

(a) $\langle z \mid \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle z \mid x \rangle + \beta \langle z \mid y \rangle$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$; $x, y, z \in E$;

(b) $\langle x \mid y \rangle = \overline{\langle y \mid x \rangle}$ para todo $x, y \in E$;

(c) $\langle x \mid x \rangle \geqslant 0$, con igualdad solo si $x = 0$ en E.

Un espacio $\mathbb{F}$-vectorial dotado de un producto escalar se llama un **espacio prehilbertiano**. ◊

Cuando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, el producto escalar es bilineal y simétrico, por las propiedades (a) y (b). Cuando $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, el producto escalar es lineal en la *segunda* variable, pero solo semilineal (antilineal) en la *primera* variable: dícese que las propiedades (a) y (b) definen una *forma sesquilineal*.[2] Este es el **convenio de Dirac**, de uso universal en textos de física. Sin embargo, muchos libros de matemática piden linealidad en la primera variable y semilinealidad en la segunda; el lector debe estar alerta contra ese mal hábito.

Definición 1.2. Una **norma** sobre E es una función $E \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \|x\|$ tal que:

(a) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{F}$, $x \in E$;

(b) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in E$;

(c) $\|x\| \geqslant 0$ con igualdad solo si $x = 0$ en E.

[1] El cuerpo $\mathbb{C}$ admite dos automorfismos, la identidad y la conjugación compleja $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$. El único automorfismo de $\mathbb{R}$ es la identidad; desde luego, $\mathbb{R} = \{\, \alpha \in \mathbb{C} : \bar{\alpha} = \alpha \,\}$.

[2] El prefijo *sesqui-*, del latín, significa $3/2$.

Si E posee un producto escalar, entonces $\|x\| := \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ define una norma en E (debido a la desigualdad de Schwarz).

Una **seminorma** en E es una función $p \colon E \to \mathbb{R}^+$ que cumple al menos (a) y (b):

$$\begin{Bmatrix} p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x) \\ p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \end{Bmatrix} \quad \text{para todo} \quad \alpha \in \mathbb{F},\ x, y \in E.$$

Una familia de seminormas $\{ p_\alpha : \alpha \in J \}$ es **separante** para E si "$p_\alpha(x) = 0$ para todo $\alpha \in J$" implica $x = 0$ en E. (Este es el caso si algún p_β es una norma.) ◊

Definición 1.3. La *métrica usual* sobre un espacio normado E es

$$d(x, y) := \|x - y\|. \tag{1.1a}$$

Otra métrica equivalente es

$$d'(x, y) := \frac{\|x - y\|}{1 + \|x - y\|}, \tag{1.1b}$$

que además cumple $0 \leqslant d'(x, y) \leqslant 1$. Las dos métricas son *invariantes bajo traslaciones*, es decir, $d(x - z, y - z) = d(x, y)$ para $z \in E$. Si (x_n) es una sucesión de elementos de E, entonces

$$x_n \to x \iff d(x_n, x) \to 0 \iff d'(x_n, x) \to 0 \iff \|x_n - x\| \to 0.$$

Vale la pena observar que la norma de un espacio normado E es una *función continua* sobre E. De hecho, si $x_n \to x$ en E, la desigualdad triangular implica que

$$\big| \|x_n\| - \|x\| \big| \leqslant \|x_n - x\|,$$

así que $x_n \to x$ en E implica $\|x_n\| \to \|x\|$ en $[0, \infty)$.

Si E no es un espacio normado, pero posee una *familia numerable y separante* de seminormas $\{ p_k : k \in \mathbb{N} \}$, entonces se define la siguiente métrica sobre E:

$$d(x, y) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \, \frac{p_k(x - y)}{1 + p_k(x - y)}\,. \tag{1.2}$$

En ese caso $x_n \to x$, es decir, $d(x_n, x) \to 0$, si y solo si $p_k(x_n - x) \to 0$ para cada k. ◊

Definición 1.4. Sea E un espacio $\mathbb{F}$-vectorial con una familia numerable y separante de seminormas. Si E es *completo* con respecto a la métrica (1.2), dícese que E es un **espacio de Fréchet**.

En particular, si E es normado y completo respecto de la métrica (1.1a), E se llama un **espacio de Banach**.

Si además la norma de E es inducida por un producto escalar y si E es completo, dícese que E es un **espacio de Hilbert** (real o complejo, según sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). ◊

Ejemplo 1.5. Si $n \in \mathbb{N}^*$, el espacio $\mathbb{F}^n$ es un espacio de Hilbert,[3] dotado del producto escalar usual $\langle y \mid x \rangle := \bar{y}_1 x_1 + \bar{y}_2 x_2 + \cdots + \bar{y}_n x_n$. ◊

► A continuación, se ofrece un catálogo de espacios vectoriales complejos de dimensión infinita, algunos normados y otros dotados con familias numerables de seminormas.

Ejemplo 1.6. Denótese por $\underline{\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}}$ el espacio de *sucesiones* en $\mathbb{C}$ con *un número finito de términos no nulos*.[4] (Los paréntesis en el exponente señalan que este es una *suma directa algebraica* de $\mathbb{N}$ copias de $\mathbb{C}$.) Escríbase $\boldsymbol{x} := (x_k)$ para denotar la sucesión $(x_0, x_1, x_2, \dots)$. Entonces $p_n(\boldsymbol{x}) := |x_n|$, para $n \in \mathbb{N}$, es una familia separante de seminormas sobre $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$. ◊

Es posible definir varias *normas* directamente sobre $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$. Si $1 < p < \infty$, colóquese:

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 := \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|; \qquad \|\boldsymbol{x}\|_p := \biggl(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \biggr)^{1/p}; \qquad \|\boldsymbol{x}\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|. \tag{1.3}$$

El espacio $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ es incompleto respecto de cada una de estas normas. (Si $1 < p < \infty$, la desigualdad triangular para $\|\cdot\|_p$ es una consecuencia de la *desigualdad de Minkowski*: véase la Proposición 1.26, más abajo.)

Ejemplo 1.7. Denótese por $\underline{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}$ el espacio de *todas las sucesiones* en $\mathbb{C}$. (La ausencia de paréntesis en el exponente señala que este es un *producto cartesiano* de $\mathbb{N}$ copias de $\mathbb{C}$.) Las seminormas $p_n(\boldsymbol{x}) := |x_n|$ constituyen una familia numerable y separante, y $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sí es completo en la métrica correspondiente. Luego $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ es un espacio de Fréchet. El espacio vectorial $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ es un subespacio denso de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. ◊

Ejemplo 1.8. Hay otras espacios de sucesiones intermedios entre $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ y $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Al formar la compleción de $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ en cualquiera de las normas (1.3), se obtiene un espacio de Banach. Estos espacios de Banach se denotan por:

$$\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{\ell}}^1 &:= \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \|\boldsymbol{x}\|_1 < +\infty \,\}; \\
\underline{\boldsymbol{\ell}}^p &:= \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \|\boldsymbol{x}\|_p < +\infty \,\} \quad \text{para cada} \quad 1 < p < \infty; \\
\underline{\boldsymbol{c}}_0 &:= \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : x_k \to 0 \text{ cuando } k \to +\infty \,\}.
\end{aligned}$$

En el caso $p = 2$, $\underline{\boldsymbol{\ell}}^2$ es además un *espacio de Hilbert*, con producto escalar

$$\langle \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \rangle := \sum_{k=0}^{\infty} \bar{y}_k x_k. \tag{1.4}$$

Es inmediato que $\langle \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \rangle = \|\boldsymbol{x}\|_2^2$.

De igual manera se definen $\underline{\boldsymbol{\ell}}^1(\mathbb{Z})$, $\underline{\boldsymbol{\ell}}^p(\mathbb{Z})$, $\underline{\boldsymbol{c}}_0(\mathbb{Z})$, como subespacios normados de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. ◊

[3] Aquí se usa el *convenio francés*: se escribe $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ pero $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$.

[4] Evidentemente, se definen espacios $\mathbb{R}$-vectoriales de sucesiones reales de la misma manera.

Ejemplo 1.9. El espacio vectorial de las *sucesiones acotadas* es

$$\underline{\boldsymbol{\ell}}^\infty := \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \|\boldsymbol{x}\|_\infty < +\infty \,\},$$

Este espacio es completo en la norma $\|\cdot\|_\infty$; es un espacio de Banach que incluye $\underline{\boldsymbol{c}}_0$ como subespacio cerrado. ◊

Ejemplo 1.10. Un elemento $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ es una **sucesión rápidamente decreciente** si la sucesión asociada $(n^k x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Esto da lugar a una familia de seminormas

$$q_k(\boldsymbol{x}) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |n^k x_n|, \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{N}^*. \tag{1.5}$$

Está claro que $q_k(\boldsymbol{x}) \leqslant q_{k+1}(\boldsymbol{x})$ en cada caso; que la condición $q_{k+1}(\boldsymbol{x}) < \infty$ implica que $n^k x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$; y que la condición $q_{k+2}(\boldsymbol{x}) < \infty$ implica que la serie $\sum_{n=0}^\infty n^k x_n$ es absolutamente convergente.

El espacio vectorial $\underline{\boldsymbol{s}}$ de sucesiones rápidamente decrecientes, dotado con las seminormas $\{\, q_k : k \in \mathbb{N} \,\}$, es un espacio de Fréchet. ◊

► A continuación se introduce una segunda clase de espacios $\mathbb{C}$-vectoriales, con topologías determinadas por una norma o varias seminormas, cuyos elementos son *funciones continuas*.

Ejemplo 1.11. Sea K un espacio topológico *compacto* (y de Hausdorff).[5] Denótese por $C(K)$ el espacio vectorial de funciones *continuas* $f : K \to \mathbb{C}$. Se define una norma sobre $C(K)$ por

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in K} |f(x)|.$$

Si una sucesión (f_n) en $C(K)$ es de Cauchy en esta norma, entonces $(f_n(x))$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$ para todo $x \in K$. Si se define $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, es fácil mostrar con un "argumento de $\varepsilon/3$" que f es continua y que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. El espacio normado $C(K)$ entonces es completo en la norma $\|\cdot\|_\infty$, es decir, es un espacio de Banach. ◊

Ejemplo 1.12. Si X es un espacio topológico *localmente compacto* pero no necesariamente compacto, dícese que una función continua $f : X \to \mathbb{C}$ **se anula en el infinito** si, dado $\varepsilon > 0$, hay un compacto $K_\varepsilon \subset X$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para $x \notin K_\varepsilon$. Denótese por $C_0(X)$ el espacio vectorial de todas estas funciones. Cada $f \in C_0(X)$ está acotada y la asignación $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$ determina una norma sobre $C_0(X)$. No es difícil comprobar que $C_0(X)$ es completo en esta norma.

[5] En este curso, cada espacio topológico **compacto** es también de Hausdorff. (Algunos autores usan el término *cuasicompacto* para espacios topológicos donde cada cubrimiento abierto admite un subcubrimiento finito, aunque no cumplen la propiedad T_2 de separación: tales espacios son ubicuos en la geometría algebraica.

La **compactificación de un punto** del espacio localmente compacto X es el espacio compacto $\underline{X^+} := X \uplus \{\infty\}$, obtenido al agregar el punto suplementario ∞ a X, declarando que los vecindarios abiertos de ∞ son todas las partes $(X \setminus K) \uplus \{\infty\}$ con $K \subseteq X$ compacto. Fíjese que ∞ es un punto aislado en X^+ si y solo si X es compacto. Es fácil verificar que $C_0(X) \simeq \{\, f \in C(X^+) : f(\infty) = 0 \,\}$, donde $\simeq$ denota una *isometría*, es decir, un isomorfismo algebraico que preserva las normas. ◊

Ejemplo 1.13. Si X es un espacio topológico localmente compacto y además **σ-compacto**, es decir, si $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ donde cada K_n es compacto y $K_n \subseteq K_{n+1}^\circ$ para todo n, la familia numerable de seminormas[6]

$$p_n(f) := \sup\{\, |f(x)| : x \in K_n \,\} \tag{1.6}$$

define una topología sobre $C(X)$. Resulta que $f : X \to \mathbb{C}$ es continua si y solo si cada restricción $f|_{K_n} : K_n \to \mathbb{C}$ es continua. Entonces el espacio vectorial $C(X)$, dotado con la métrica (1.2), es completa, así que $C(X)$ es un espacio de Fréchet.

La topología de $C(X)$ definido por las seminormas (1.6), a través de la métrica (1.2), se llama **la topología de convergencia uniforme sobre compactos**. ◊

Ejemplo 1.14. En particular, si U es una región de $\mathbb{C}$ (una parte abierta y conexa), se puede tomar

$$K_n := \{\, z \in U : |z| \leqslant n;\ d(z, \mathbb{C} \setminus U) \geqslant 1/n \,\}. \tag{1.7}$$

Si se denota por $H(U)$ el espacio de *funciones holomorfas* $f : U \to \mathbb{C}$, esta es un subespacio de $C(U)$ con la topología de convergencia uniforme sobre compactos. Un teorema de Weierstraß garantiza que el límite, en esa topología, de una sucesión de funciones holomorfas es también holomorfa; en consecuencia, $H(U)$ es un *subespacio cerrado* de $C(U)$, y por ende $H(U)$ es también un espacio de Fréchet. ◊

Ejemplo 1.15. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto, no vacío. La fórmula (1.7), con $\mathbb{C} \setminus U$ reemplazado por $\mathbb{R}^m \setminus U$, sirve para definir una familia de compactos K_n, con $K_n \subseteq K_{n+1}^\circ$ para cada n, tales que $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Si $\alpha \in \mathbb{N}^m$ es un *multiíndice*, escríbase

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j, \qquad \partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}\,.$$

El espacio vectorial $C^\infty(U)$ de funciones suaves $f : U \to \mathbb{C}$ admite una familia numerable de seminormas

$$r_n(f) := \sup\{\, |\partial^\alpha f(x)| : |\alpha| \leqslant n,\ x \in K_n \,\}. \tag{1.8}$$

[6] Si $A \subseteq X$, la notación A° denota el **interior** topológico de A.

Obsérvese que $r_n(f) \leqslant r_{n+1}(f)$ para cada n, y que la familia (r_n) es separante (de hecho, cada r_n es una norma). Cualquier sucesión de Cauchy $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en la métrica correspondiente es una sucesión de Cauchy en $C(U)$; y para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ la sucesión $\{\partial^\alpha f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ también es de Cauchy en $C(U)$. Luego hay funciones $f^\alpha \in C(U)$ para cada α, tales que $\partial^\alpha f_k \to f^\alpha$ en $C(U)$ cuando $k \to +\infty$. Al colocar $f := f^0$, se comprueba que $\partial^\alpha f = f^\alpha$ para todo α, así que $f_k \to f$ en $C^\infty(U)$ con respecto a la métrica determinada por (1.8). Por lo tanto, $C^\infty(U)$ es un espacio de Fréchet. ◊

Ejemplo 1.16. Dícese que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es una **función rápidamente decreciente** si

$$\lim_{|x|\to\infty} p(x)f(x) = 0 \quad \text{para todo polinomio } p \text{ sobre } \mathbb{R}^n.$$

Se dice que f es una **función declinante**[7] si (a) f es suave; y (b) f y todas sus derivadas parciales $\partial^\alpha f$ son rápidamente decrecientes. Sea $\underline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$ el espacio vectorial de las funciones declinantes sobre $\mathbb{R}^n$, comúnmente llamado el **espacio de Schwartz**.[8] La función gaussiana $x \mapsto \exp(-\frac{1}{2}\|x\|^2)$ es un ejemplo de una función declinante. Si p es un polinomio, hay constantes $C > 0$, $R > 0$ y $N \in \mathbb{N}$, dependientes de p, tales que

$$p(x) \leqslant C(1 + \|x\|^2)^N \quad \text{para} \quad \|x\| \geqslant R. \tag{1.9}$$

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces, para cada $N \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$, las funciones $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N \partial^\alpha f(x)$ están acotadas. Las siguientes seminormas $\{\, s_m : m \in \mathbb{N} \,\}$ definen la topología de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$s_m(f) := \sup\{\, \big|(1 + \|x\|^2)^m \partial^\alpha f(x)\big| : |\alpha| \leqslant m,\ x \in \mathbb{R}^n \,\}. \tag{1.10}$$

Resulta que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es completa en la métrica inducida por estas seminormas, así que es otro espacio de Fréchet. ◊

► Es hora de examinar una tercera clase de espacios $\mathbb{C}$-vectoriales infinitodimensionales, cuyos elementos son *funciones medibles o integrables*.[9]

Ejemplo 1.17. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un **espacio de medida σ-finita**: $\mathcal{F}$ denota la σ-álgebra de las partes medibles del conjunto X, y $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ es una medida σ-finita. Sea $\underline{\mathcal{L}^1(X, \mu)}$ el espacio $\mathbb{C}$-vectorial de las *funciones integrables* con respecto a μ, dotado con la seminorma

$$\|f\|_1 := \int_X |f(x)|\, d\mu(x). \tag{1.11}$$

[7] El término *declinante* se debe a Bourbaki; no es muy ilustrativo, pero responde al requisito bourbachique de caracterizar una propiedad matemática con una sola palabra.

[8] En honor al matemático francés Laurent Schwartz (1915–2002), uno de los inventores de la teoría de distribuciones.

[9] Para evitar algunos casos esotéricos, todas las medidas consideradas en este curso serán σ-finitas.

Obsérvese que $\|f\|_1 = 0$ si y solo si $f \in \mathcal{N}$, donde $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}^1(X,\mu)$ es el subespacio de funciones *nulas casi por doquier*. Al identificar funciones que coinciden casi por doquier (con respecto a μ), se obtiene el espacio vectorial cociente

$$\underline{L^1(X,\mu)} := \mathcal{L}^1(X,\mu)/\mathcal{N}.$$

La fórmula (1.11) induce una *norma* sobre este espacio, que también se denota por $\|\cdot\|_1$. Por un abuso de lenguaje, es común referirse a los elementos de $L^1(X,\mu)$ como "funciones integrables". El teorema de Riesz y Fischer dice que $L^1(X,\mu)$ es *completo* en esta norma, así que es un espacio de Banach. ◊

Ejemplo 1.18. Si $1 < p < +\infty$, defínase

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} \tag{1.12}$$

y denótese por $\underline{\mathcal{L}^p(X,\mu)}$ el espacio $\mathbb{C}$-vectorial de las funciones μ-medibles $f : X \to \mathbb{C}$ tales que $\|f\|_p < \infty$. En breve se comprobará que $\|\cdot\|_p$ es una seminorma sobre este espacio. Además, es evidente que $\|f\|_p = 0$ si y solo si $f \in \mathcal{N}$, así que $\|\cdot\|_p$ induce una norma sobre el espacio vectorial cociente $\underline{L^p(X,\mu)} := \mathcal{L}^p(X,\mu)/\mathcal{N}$. Hay una versión del teorema de Riesz y Fischer que garantiza que $L^p(X,\mu)$ es un espacio de Banach. ◊

Ejemplo 1.19. En el subcaso $p = 2$, $L^2(X,\mu)$ es un *espacio de Hilbert*: su producto escalar está dado por

$$\langle g \mid f \rangle := \int_X \overline{g(x)} f(x) \, d\mu(x).$$

Se ve inmediatamente que $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f \mid f \rangle}$. ◊

Ejemplo 1.20. Si $f : X \to \mathbb{C}$ es una función μ-medible, su *supremo esencial*,

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{es\,sup}_{x \in X} |f(x)|,$$

denota el ínfimo de las constantes $M > 0$ tales que $\mu\big(\{ x \in X : |f(x)| > M \}\big) = 0$. Sea $\underline{\mathcal{L}^\infty(X,\mu)}$ el espacio $\mathbb{C}$-vectorial de las **funciones esencialmente acotadas** (con respecto a μ), es decir, las funciones medibles f con $\|f\|_\infty < \infty$. Al notar que $\|f\|_\infty = 0$ si y solo si $f \in \mathcal{N}$, se ve que $\|\cdot\|_\infty$ induce una *norma* sobre el espacio vectorial cociente $\underline{L^\infty(X,\mu)} := \mathcal{L}^\infty(X,\mu)/\mathcal{N}$. Resulta que $L^\infty(X,\mu)$ es completo en esta norma. ◊

Ejemplo 1.21. Denótese por $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ el espacio de *funciones holomorfas enteras* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|^2 := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \, e^{-|z|^2} \, dy \, dx < \infty.$$

Con esta norma, $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ es un espacio de Hilbert, cuyo producto escalar está dado por

$$\langle g \mid f \rangle := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \overline{g(z)} f(z)\, e^{-|z|^2}\, dy\, dx.$$

En efecto, $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{C}, \mu)$, donde μ denota la **medida gaussiana** sobre $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$:

$$d\mu(z) := \frac{1}{\pi}\, e^{-x^2-y^2}\, dy\, dx = \frac{1}{\pi}\, re^{-r^2}\, dr\, d\theta.$$

Este espacio $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ se llama el **espacio de Bargmann y Segal**.[10] ◊

Ejemplo 1.22. Sea Ω una parte abierta de $\mathbb{R}^n$. Si λ denota la medida de Lebesgue sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, se escribe $\mathcal{L}^p(\Omega) \equiv \mathcal{L}^p(\Omega, \lambda)$ y $L^p(\Omega) \equiv L^p(\Omega, \lambda)$. Si $f \in \mathcal{L}^p(\Omega) \cap C^k(\Omega)$ es k veces diferenciable, la condición de que $\partial^\alpha f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ para $|\alpha| \leqslant k$ permite considerar la norma

$$\|f\|_{k,p} := \biggl(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|\partial^\alpha f\|_p^p \biggr)^{1/p}. \tag{1.13}$$

La compleción en esta norma del espacio $\mathbb{C}$-vectorial

$$C^{[k,p]}(\Omega) := \{\, f \in C^k(\Omega) : \partial^\alpha f \in \mathcal{L}^p(\Omega) \text{ para } |\alpha| \leqslant k \,\}$$

es un espacio de Banach denotado $\underline{W^{k,p}(\Omega)}$. Esta se llama un **espacio de Sobolev** con parámetros k, p. Cuando $p = 2$, $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

⟦ Un teorema de Sobolev garantiza que hay una inclusión continua $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^r(\Omega)$ cuando $r < k - (n/p)$. ⟧ ◊

► Para completar este catálogo de espacios vectoriales normados o seminormados, es necesario verificar algunas afirmaciones en los ejemplos. En primer lugar, hace falta comprobar que la notación $\|\cdot\|_p$ introducida en (1.3) y generalizada en (1.12) es efectivamente una norma, porque su desigualdad triangular no es obvia.

Fíjese que $\underline{\boldsymbol{\ell}}^p$ es un caso particular de la familia de espacio vectoriales $L^p(X, \mu)$. En efecto, al tomar $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\nu(A) := \#(A)$, la cardinalidad de $A \subset \mathbb{N}$, se ve que el espacio $\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \nu)$ correspondiente es $\underline{\boldsymbol{\ell}}^p$. Esta “medida del conteo” es puramente atómica: el único elemento de $\mathcal{N}$ es el vacío $\emptyset$, así que $L^p(\mathbb{N}, \nu) = \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \nu) = \underline{\boldsymbol{\ell}}^p$. La integral con respecto a esta medida es simplemente la sumatoria de series.

[10] El espacio $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ fue introducido por Bargmann en el artículo: Valentin Bargmann, *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform*, Communications in Pure and Applied Mathematics **14** (1961), 187–214. Sin embargo, este enfoque, basado en la mecánica cuántica, fue anticipado por Irving Segal en una conferencia en Boulder, en 1960. Segal planteó un reclamo y obligó a Bargmann a disculparse por no haber reconocido su prioridad. Algunos autores llaman $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ el *espacio de Segal y Bargmann*.

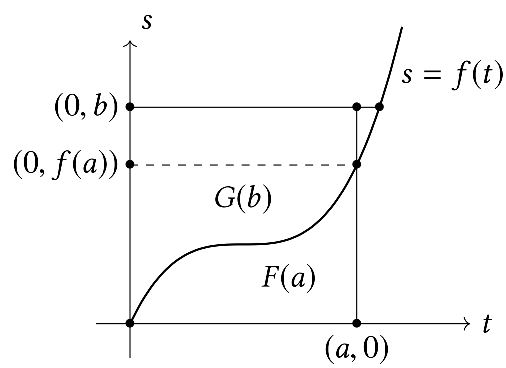

Figura 1.1: La desigualdad de Young

Proposición 1.23 (Desigualdad de Young)**.** *Sea $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función diferenciable y estrictamente creciente con $f(0) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} f(t) = +\infty$; sea $g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ su función inversa. Sean F y G las primitivas respectivas de f y g, determinadas por la condición $F(0) = G(0) = 0$. Entonces, para todo $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$, se cumple la desigualdad:*

$$ab \leqslant F(a) + G(b),$$

con igualdad si y solo si $b = f(a)$.

Demostración. Las dos primitivas del enunciado son

$$F(x) := \int_0^x f(t)\,dt, \qquad G(y) := \int_0^y g(s)\,ds.$$

Las condiciones $f(0) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} f(t) = +\infty$ implican que $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ es sobreyectiva; y es inyectiva por ser estrictamente creciente. Entonces, para cada $s > 0$, hay un único $t > 0$ con $s = f(t)$; luego $t = g(s)$. La función inversa g también es estrictamente creciente, con $g(0) = 0$ y $\lim_{s\to\infty} g(s) = +\infty$.

Considérese la función

$$h(x) := \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} g(s)\,ds = F(x) + G(f(x)).$$

Entonces $h'(x) = f(x) + g(f(x))f'(x) = f(x) + xf'(x)$; y $h(0) = 0$, así que

$$F(x) + G(f(x)) = h(x) = \int_0^x h'(t)\,dt = xf(x), \quad \text{para todo} \quad x > 0.$$

Este es el área del rectángulo con vértices opuestos $(0,0)$ y $(x, f(x))$.

Ahora, si $b > f(a)$ – véase la Figura 1.1 – entonces

$$\begin{aligned} F(a) + G(b) - ab &= G(b) - ab + af(a) - G(f(a)) \\ &= G(b) - G(f(a)) - a(b - f(a)) = \int_{f(a)}^{b} (g(s) - a)\, ds > 0, \end{aligned}$$

porque $g(s) > a$ para $s > f(a)$.

Si $b < f(a)$, entonces $a > g(b)$; al intercambiar los papeles de f y g, se obtiene también $G(b) + F(a) - ba > 0$.

Finalmente, si $b = f(a)$, entonces $F(a) + G(b) = h(a) = af(a) = ab$. $\square$

Corolario 1.24. *Si $1 < p < \infty$ y si $q := \dfrac{p}{p-1}$, entonces para $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, vale*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \qquad \textit{con igualdad si y solo si} \quad b^q = a^p. \tag{1.14}$$

Demostración. En primer lugar, nótese que

$$q = \frac{p}{p-1} \iff \frac{1}{q} = \frac{p-1}{p} \iff \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff \frac{1}{p} = \frac{q-1}{q} \iff p = \frac{q}{q-1}\,,$$

y por ende $1/(p-1) = q/p = q - 1$.

Tómese $f(t) := t^{p-1}$, una función diferenciable estrictamente creciente, cuya función inversa es $g(s) = s^{1/(p-1)} = s^{q/p}$. Entonces:

$$F(a) = \int_0^a t^{p-1}\, dt = \frac{a^p}{p}, \qquad G(b) = \int_0^b s^{q/p}\, ds = \frac{b^{(q+p)/p}}{(q+p)/p} = \frac{b^q}{q},$$

En este caso $b = f(a) \iff g(b) = a \iff b^{q/p} = a \iff b^q = a^p$. $\square$

En vista de la simetría $p \leftrightarrow q$ en la relación $q = p/(p-1) \iff p = q/(q-1)$, dícese que p y q son **exponentes conjugados**. En el caso $p = q = 2$, la fórmula (1.14) se reduce a $2ab \leqslant a^2 + b^2$, la clásica *desigualdad de Cauchy*. Además, vale $1 < p < 2$ si y solo si $2 < q < \infty$ y viceversa.

Proposición 1.25 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita. Para $p \in (1,\infty)$ y $q := p/(p-1)$, tómese $f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$ y $h \in \mathcal{L}^q(X,\mu)$. Entonces vale*

$$\int_X |f(x)\, h(x)|\, d\mu(x) \leqslant \|f\|_p\, \|h\|_q\,, \tag{1.15}$$

con igualdad solo si las funciones $x \mapsto |f(x)|^p$, $x \mapsto |h(x)|^q$ son proporcionales casi por doquier.

Demostración. Si una de las funciones f, h se anula casi por doquier, los dos lados de (1.15) son iguales a cero. Supóngase, entonces, que $\|f\|_p \neq 0$, $\|h\|_q \neq 0$. Esto permite considerar las funciones normalizadas $f_1(x) := f(x)/\|f\|_p$ y $h_1(x) := h(x)/\|h\|_q$.

Para cada $x \in X$, aplíquese el Corolario 1.24 con $a := |f_1(x)|$, $b := |h_1(x)|$; se obtiene

$$|f_1(x)h_1(x)| \leqslant \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|h_1(x)|^q}{q} = \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|h(x)|^q}{q\|h\|_q^q} \tag{1.16a}$$

y al integrar sobre X, se obtiene

$$\int_X |f_1(x)h_1(x)|\,d\mu(x) \leqslant \frac{\int_X |f(x)|^p\,d\mu(x)}{p\|f\|_p^p} + \frac{\int_X |h(x)|^q\,d\mu(x)}{q\|h\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.16b}$$

Entonces, al multiplicar los dos lados por $\|f\|_p\|h\|_q$, sale la desigualdad (1.15).

Hay igualdad en (1.16a) solo si $|f_1(x)|^p = |h_1(x)|^q$. Después de integrar con respecto a x, hay igualdad en (1.16b) solo si $|f_1|^p = |h_1|^q$ casi por doquier; solo si $|f|^p$ y $|h|^q$ son proporcionales casi por doquier. □

En particular, si $X = \mathbb{N}$ y si μ es la medida de conteo, se obtiene la desigualdad de Hölder para series de números complejos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\bar{y}_k x_k| \leqslant \biggl(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\biggr)^{1/p} \biggl(\sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^q\biggr)^{1/q}$$

así que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \bar{y}_k x_k$ converge absolutamente, toda vez que $\boldsymbol{x} \in \underline{\ell}^p$, $\boldsymbol{y} \in \ell^q$ cuando $1 < p < \infty$ y $q = p/(p-1)$.

En el caso $p = 2$, en vista del producto escalar (1.4), esta desigualdad se reduce a la **desigualdad de Schwarz**: $|\langle \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}\rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2\,\|\boldsymbol{y}\|_2$.

Proposición 1.26 (Minkowski)**.** *Sean $f, g \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$ con $1 < p < \infty$. Entonces vale*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p\,, \tag{1.17}$$

con igualdad solo si f ó g es nula, o si existe $C > 0$ tal que $f(x) = C\,g(x)$ para casi todo x.

Demostración. La desigualdad de Hölder con $q := p/(p-1)$ implica lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_X |f(x)+g(x)|^p\,d\mu(x) \\
&\leqslant \int_X |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|\,d\mu(x) + \int_X |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|\,d\mu(x) \qquad (1.18a)\\
&\leqslant \biggl(\int_X |f(x)+g(x)|^{q(p-1)}\,d\mu(x)\biggr)^{1/q} \bigl(\|f\|_p + \|g\|_p\bigr) \qquad (1.18b)\\
&= \biggl(\int_X |f(x)+g(x)|^p\,d\mu(x)\biggr)^{1/q} \bigl(\|f\|_p + \|g\|_p\bigr) = \|f+g\|_p^{p/q}\bigl(\|f\|_p + \|g\|_p\bigr).
\end{aligned}$$

La expresión (1.18a) sigue de la desigualdad triangular en $\mathbb{C}$ para cada $x \in X$. Luego se obtiene (1.18b) con dos instancias de la desigualdad de Hölder. Para que haya igualdad en estas expresiones, se requiere (i) que los números complejos $f(x)$ y $g(x)$ tengan el mismo argumento $e^{i\theta(x)}$ para casi todo x; (ii) que $|f+g|^p$, $|f|^p$ y $|g|^p$ sean proporcionales casi por doquier. Esto ocurre si y solo si f y g son proporcionales casi por doquier, con una constante de proporcionalidad no negativa.

Ahora, como $p - (p/q) = 1$, se concluye que $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$, con igualdad solo en los casos enunciados. □

La **desigualdad de Minkowski** (1.17), junto con la observación de que $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\,\|f\|_p$ para $\alpha \in \mathbb{C}$, dice que $f \mapsto \|f\|_p$ es una seminorma sobre $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ e induce una *norma* sobre $L^p(X,\mu)$, cuando $1 < p < \infty$.

1.2 La estructura de los espacios de Hilbert

Proposición 1.27 (Desigualdad de Schwarz)**.** *Sea E un espacio prehilbertiano. Cada par de vectores $x, y \in E$ cumple la desigualdad:*

$$\big|\langle x \mid y\rangle\big| \leqslant \|x\|\,\|y\|, \tag{1.19}$$

con igualdad solo si x, y son proporcionales.

Demostración. Para todo número *real* $t \in \mathbb{R}$, la cantidad siguiente es no negativa:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \big\|x + t\langle y \mid x\rangle y\big\|^2 &= \big\langle x + t\langle y \mid x\rangle y \bigm| x + t\langle y \mid x\rangle y\big\rangle \\ &= \langle x \mid x\rangle + 2t\,|\langle x \mid y\rangle|^2 + t^2\,|\langle x \mid y\rangle|^2\,\langle y \mid y\rangle\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la forma cuadrática real $t \mapsto \big\|x + t\langle y \mid x\rangle y\big\|^2 = At^2 + Bt + C$ toma valores no negativos solamente, así que $B^2 - 4AC \leqslant 0$, esto es,

$$4|\langle x \mid y\rangle|^4 \leqslant 4|\langle x \mid y\rangle|^2\,\langle x \mid x\rangle\,\langle y \mid y\rangle\,.$$

Por lo tanto —en el caso de que $\langle y \mid x\rangle = 0$ también— se concluye que

$$\big|\langle x \mid y\rangle\big|^2 \leqslant \langle x \mid x\rangle\,\langle y \mid y\rangle\,,$$

lo cual es equivalente a (1.19).

El caso de igualdad ocurre si y solo si $x = -t_0\langle y \mid x\rangle y$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$, si y solo si los vectores x, y son proporcionales. (El factor de proporcionalidad $-t_0\langle y \mid x\rangle \in \mathbb{C}$ no es necesariamente real.) □

La función $x \mapsto \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ cumple la desigualdad triangular, y por ende define una norma en E, en virtud de la desigualdad de Schwarz. Es cuestión de notar que

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\Re\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2 &\leqslant \|x\|^2 + 2\bigl|\langle x \mid y \rangle\bigr| + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = \bigl(\|x\| + \|y\|\bigr)^2. \end{aligned}$$

La desigualdad de Schwarz[11] implica que el producto escalar sobre E es una *función continua* $E \times E \to \mathbb{C}$. En efecto, si $x_n \to x$ en E, $y_n \to y$ en E, entonces

$$\bigl|\langle y \mid x_n - x \rangle\bigr| \leqslant \|y\|\,\|x_n - x\| \to 0 \quad \text{cuando } \ n \to \infty,$$

así que $\langle y \mid x_n \rangle \to \langle y \mid x \rangle$. De modo similar, se obtiene y también $\langle x_n \mid y \rangle \to \langle x \mid y \rangle$. Luego,

$$\bigl|\langle y_n - y \mid x_n - x \rangle\bigr| \leqslant \|y_n - y\|\,\|x_n - x\| \to 0 \quad \text{cuando } \ n \to \infty,$$

así que

$$\lim_{n\to\infty} \langle y_n \mid x_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle y_n \mid x \rangle + \lim_{n\to\infty} \langle y \mid x_n \rangle - \langle y \mid x \rangle = \langle y \mid x \rangle.$$

Ejemplo 1.28. En el caso $E = \underline{\boldsymbol{\ell}}^2$, la desigualdad de Schwarz dice que

$$\biggl|\sum_{k=0}^{\infty} \bar{x}_k y_k\biggr|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 \sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^2,$$

cuando las dos sumatorias a la derecha convergen; es decir, cuando $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \underline{\boldsymbol{\ell}}^2$.

Más generalmente, cuando $E = L^2(X,\mu)$, la desigualdad de Schwarz tiene la forma concreta:

$$\biggl|\int_X \overline{f(x)} g(x)\,d\mu(x)\biggr|^2 \leqslant \int_X |f(x)|^2\,d\mu(x) \int_X |g(x)|^2\,d\mu(x). \qquad \Diamond$$

Proposición 1.29 (Ley del Paralelogramo)**.** *La norma de un espacio prehilbertiano cumple la siguiente igualdad:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{1.20}$$

Demostración. Esta “ley” es una consecuencia directa del cálculo:

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm \langle x \mid y \rangle \pm \langle y \mid x \rangle + \|y\|^2. \qquad \square$$

[11] Esta desigualdad es una generalización de la desigualdad de Cauchy (1821) para vectores en $\mathbb{C}^n$. Para $E = C([0,1])$, fue observado por Viktor Buniakovsky (1859) y Hermann Schwarz notó lo mismo en 1885. Para algunos autores, esta es la “desigualdad de Cauchy, Buniakovsky y Schwarz”.

Resulta que la ley del paralelogramo *caracteriza* los espacios normados que admiten algún producto escalar; este fenómeno fue observado por Pascual Jordan y John von Neumann en 1935. Si una norma sobre un espacio vectorial E cumple (1.20), entonces hay un producto escalar en E tal que $\langle x \mid x \rangle = \|x\|^2$ para todo $x \in E$. Cuando se cumple esta condición necesaria, el producto escalar está dada por la siguiente *fórmula de polarización*.

Lema 1.30 (Fórmula de Polarización)**.** *El producto escalar en un espacio prehilbertiano queda determinado por la norma, como sigue:*

$$4\,\langle y \mid x \rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2. \tag{1.21}$$

Demostración. La sesquilinealidad del producto implica que

$$\|x \pm y\|^2 = \langle x \pm y \mid x \pm y \rangle = \|x\|^2 \pm \langle x \mid y \rangle \pm \langle y \mid x \rangle + \|y\|^2.$$

Por lo tanto,

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2\langle x \mid y \rangle + 2\langle y \mid x \rangle.$$

De manera similar,

$$\|x \pm iy\|^2 = \langle x \pm iy \mid x \pm iy \rangle = \|x\|^2 \pm i\langle x \mid y \rangle \mp i\langle y \mid x \rangle + \|y\|^2,$$

así que

$$i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 = -2\langle x \mid y \rangle + 2\langle y \mid x \rangle.$$

La fórmula (1.21) sigue directamente. □

Bases ortonormales

Definición 1.31. Sea E un espacio prehilbertiano. Dos vectores $x, y \in E$ son **ortogonales** si $\langle x \mid y \rangle = 0$, o equivalentemente $\langle y \mid x \rangle = 0$, en cuyo caso se escribe $\underline{x \perp y}$.

Sea H un **espacio de Hilbert**, es decir, un espacio prehilbertiano que es *completo* en la norma. Si $M \subseteq H$, su **complemento ortogonal** es el subespacio cerrado

$$\underline{M^\perp} := \{\, y \in H : \langle y \mid x \rangle = 0 \text{ para todo } x \in M \,\}. \tag{1.22}$$

Obsérvese que $H^\perp = \{0\}$ y que $\{0\}^\perp = H$.

Un juego de vectores $\{\, u_j : j \in A \,\} \subset E$ es una **familia ortonormal** si[12]

$$\langle u_j \mid u_k \rangle = [\![j{=}k]\!] := \begin{cases} 1 & \text{si } j = k; \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

[12]La *delta de Kronecker* δ_{jk} se escribe $[\![j = k]\!]$ en la **notación de Iverson**. En general, si $R(x)$ es alguna proposición lógica, que depende de una variable x, la función booleana $[\![R(x)]\!]$ vale 1 cuando $R(x)$ es cierta, y vale 0 cuando $R(x)$ es falsa. Véase el artículo expositivo: Donald E. Knuth, *Two notes on notation*, American Mathematical Monthly **99** (1992), 403–422.

En otras palabras, los vectores u_j son ortogonales entre sí y además normalizados: $\|u_j\| = 1$ para cada $j \in A$.

Una familia de vectores $\{\, v_j : j \in A \,\}$ (no necesariamente ortonormal) se dice **total** en E si

$$\langle v_j \mid x \rangle = 0 \text{ para todo } j \in A \implies x = 0, \tag{1.23}$$

es decir, si $\{\, v_j : j \in A \,\}^\perp = \{0\}$. ◊

Si los vectores $x_1, \dots, x_r$ son ortogonales entre sí, un cálculo directo muestra que

$$\|x_1 + \cdots + x_r\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_r\|^2.$$

Lema 1.32 (Fórmula de Pitágoras)**.** *Dada una familia ortonormal finita $\{u_1, \dots, u_r\}$ en un espacio prehilbertiano E, cada vector $x \in E$ satisface:*

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{r} |\langle u_j \mid x \rangle|^2 + \left\| x - \sum_{j=1}^{r} \langle u_j \mid x \rangle \, u_j \right\|^2. \tag{1.24}$$

Demostración. Colóquese $y := \sum_{j=1}^{r} \langle u_j \mid x \rangle \, u_j$ y también $z := x - y$. Por la sesquilinealidad del producto escalar, se obtiene

$$\|y\|^2 = \sum_{j,k=1}^{r} \overline{\langle u_j \mid x \rangle} \, \langle u_k \mid x \rangle \, \langle u_j \mid u_k \rangle = \sum_{j=1}^{r} |\langle u_j \mid x \rangle|^2.$$

Entonces para cada $k = 1, \dots, n$, se ve que

$$\langle u_k \mid z \rangle = \langle u_k \mid x \rangle - \sum_{j=1}^{r} \langle u_j \mid x \rangle \, \langle u_k \mid u_j \rangle = \langle u_k \mid x \rangle - \sum_{j=1}^{r} \langle u_j \mid x \rangle \, [\![k = j]\!] = 0.$$

En consecuencia,

$$\langle y \mid z \rangle = \sum_{j=1}^{r} \overline{\langle u_j \mid x \rangle} \, \langle u_j \mid z \rangle = \sum_{j=1}^{r} \langle x \mid u_j \rangle \, \langle u_j \mid z \rangle = 0.$$

Por lo tanto,

$$\|x\|^2 = \|y + z\|^2 = \langle y \mid y \rangle + \langle y \mid z \rangle + \langle z \mid y \rangle + \langle z \mid z \rangle = \|y\|^2 + \|z\|^2,$$

la cual es una forma abreviada de (1.24). □

Una consecuencia inmediata de esta fórmula de Pitágoras es la *desigualdad* siguiente.

Proposición 1.33 (Desigualdad de Bessel)**.** *Si* $\{ u_k : k \in A \}$ *es una familia ortonormal en un espacio prehilbertiano E, entonces, para todo* $x \in E$*, vale*

$$\sum_{k \in A} |\langle u_k \mid x \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{1.25}$$

Demostración. Sea $\{ j_1, \dots, j_r \}$ un juego finito de índices en A, así que $\{u_{j_1}, \dots, u_{j_r}\}$ es una familia ortonormal finita en E. Entonces de la fórmula (1.24) se deduce que

$$\sum_{k=1}^{r} |\langle u_{j_k} \mid x \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

En consecuencia, el conjunto $A_n := \{ j \in A : |\langle u_j | x \rangle|^2 \geqslant \frac{1}{n} \|x\|^2 \}$ tiene a lo sumo n elementos; por ende, el juego de índices $\{ j \in A : \langle u_j \mid x \rangle \neq 0 \} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es numerable, y la sumatoria en (1.25) bien es finita o bien es una serie ordinaria con términos no negativos.

Dado un vector $x \neq 0$, entonces, es posible ordenar el conjunto $\{ j \in A : \langle u_j \mid x \rangle \neq 0 \}$ como $\{ j_0, j_1, j_2, \dots \}$. Por lo tanto,

$$\sum_{j \in A} |\langle u_j \mid x \rangle|^2 = \sum_{k \geqslant 0} |\langle u_{j_k} \mid x \rangle|^2 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} |\langle u_{j_k} \mid x \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2. \qquad \square$$

Para obtener igualdad en la desigualdad de Bessel, es necesario suponer que la familia ortonormal es *total* y que el espacio E es *completo*, es decir, es un espacio de Hilbert.

Teorema 1.34. *Sea H un espacio de Hilbert y sea* $\{ u_j : j \in A \}$ *una familia ortonormal en H. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) *La familia ortonormal* $\{ u_j : j \in A \}$ *es* maximal.

(b) *La familia ortonormal* $\{ u_j : j \in A \}$ *es* total.

(c) *Cada vector* $x \in H$ *admite un* ***desarrollo de Fourier*** *convergente en H,*

$$x = \sum_{j \in A} \langle u_j \mid x \rangle \, u_j \,. \tag{1.26}$$

(d) *Cada par de vectores* $x, y \in H$ *satisface la* ***relación de completitud****:*

$$\langle y \mid x \rangle = \sum_{j \in A} \langle y \mid u_j \rangle \, \langle u_j \mid x \rangle. \tag{1.27}$$

(e) *Cada vector* $x \in H$ *satisface la* ***igualdad de Parseval****:*

$$\|x\|^2 = \sum_{j \in A} |\langle u_j \mid x \rangle|^2. \tag{1.28}$$

Demostración. En vista de la demostración de la Proposición 1.33, se puede suponer que el conjunto índice A es finito o numerable;[13] se escribe $\{\, u_j : j \in A \,\} = \{u_0, u_1, u_2, \dots\}$.

Ad (a) $\implies$ (b): Si hubiera $z \neq 0$ en H con $\langle z \mid u_j \rangle = 0$ para todo j, sea $v := z/\|z\|$. Este v sería un vector de norma 1 ortogonal a cada u_j, así que $\{v, u_0, u_1, u_2, \dots\}$ sería una familia ortonormal que incluye $\{\, u_j : j \in A \,\}$ estrictamente, contradiciendo su maximalidad.

Ad (b) $\implies$ (c): Dado $x \in H$ y $r \in \mathbb{N}$, sea $x_r := \sum_{j=0}^{r} \langle u_j \mid x \rangle\, u_j$. La desigualdad de Bessel muestra que $\|x_r\|^2 = \sum_{j=0}^{r} |\langle u_j \mid x \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$ para todo r. Si $r < s$, entonces

$$\|x_s - x_r\|^2 = \sum_{j=r+1}^{s} |\langle u_j \mid x \rangle|^2,$$

y la convergencia de la serie $\sum_{j \geqslant 0} |\langle u_j \mid x \rangle|^2$, con suma $\leqslant \|x\|^2$, muestra que $\{x_r\}$ es una *sucesión de Cauchy* en H. Luego existe un (único) límite $y := \lim_r x_r$ en H. Entonces vale $y = \sum_{j \geqslant 0} \langle u_j \mid x \rangle\, u_j$ como suma de una serie convergente en H.

La continuidad del producto escalar muestra que $\langle u_k \mid y \rangle = \lim_r \langle u_k \mid x_r \rangle = \langle u_k \mid x \rangle$ para todo k. Luego $\langle u_k \mid x - y \rangle = 0$ para todo k. Como la familia $\{\, u_k : k \in A \,\}$ es total, se concluye que $y = x$.

Ad (c) $\implies$ (d): Dados $x, y \in H$, hay dos desarrollos de Fourier convergentes:

$$x = \sum_{j \geqslant 0} \langle u_j \mid x \rangle\, u_j, \qquad y = \sum_{k \geqslant 0} \langle u_k \mid y \rangle\, u_k.$$

De la continuidad del producto escalar, se obtiene la siguiente suma convergente en $\mathbb{C}$:

$$\langle y \mid x \rangle = \sum_{j,k \geqslant 0} \overline{\langle u_k \mid y \rangle}\, \langle u_j \mid x \rangle\, \langle u_k \mid u_j \rangle = \sum_{j \geqslant 0} \langle y \mid u_j \rangle\, \langle u_j \mid x \rangle\,.$$

Ad (d) $\implies$ (e): Es cuestión de tomar $y = x$ en (1.27).

Ad (e) $\implies$ (a): Si $\{\, u_j : j \in A \,\}$ no fuera maximal, habría un vector $v \in H$ de norma 1 con $\{v, u_0, u_1, u_2, \dots\}$ ortonormal. La igualdad de Parseval (1.28) entonces implicaría que $1 = \|v\|^2 = \sum_{j \geqslant 0} |\langle u_j \mid v \rangle|^2 = 0$, absurdo! Luego $\{\, u_j : j \in A \,\}$ sí es maximal. □

Si se cumple una (luego, todas) de las condiciones (a)–(e) del Teorema 1.34, dícese que la familia $\{\, u_j : j \in A \,\}$ es una **base ortonormal** de H.

[13] En principio, el conjunto A en (1.25) podría ser no numerable; en cuyo caso, una suma de términos no negativos se define como el supremo de todas las posibles sumas parciales finitas. El argumento de esta demostración muestra que una *serie convergente* de esta clase solo posee un número contable de términos no nulos, luego se puede reordenarla (por convergencia absoluta) como una serie ordinaria. Como corolario, se ve que una serie incontable de números positivos diverge a $+\infty$.

Los coeficientes en una expansión de tipo (1.26) son *únicos*: si $x = \sum_{j\in A} \alpha_j\, u_j$ con $\{\alpha_j\}$ una familia en $\mathbb{C}$ tal que $\sum_{j\in A} |\alpha_j|^2 < \infty$, entonces

$$\langle u_k \mid x\rangle = \sum_{j\in A} \alpha_j \,\langle u_k \mid u_j\rangle = \alpha_k \quad \text{para todo} \quad k \in A.$$

Definición 1.35. Una **isometría** entre dos espacios de Hilbert H y K es una aplicación lineal $V : H \to K$ que satisface $\langle Vx \mid Vy\rangle = \langle x \mid y\rangle$ para todo $x, y \in H$.

Al poner $y = x$, se ve que $\|Vx\| = \|x\|$ para todo $x \in H$, así que V preserva normas; de hecho, la fórmula de polarización (1.21) muestra que cada aplicación lineal que preserva normas es una isometría.[14]

Un **isomorfismo** entre H y K es una *isometría biyectiva* $U : H \to K$, si existe. Una isometría biyectiva también se llama una **aplicación unitaria** de H en K. ◊

Proposición 1.36. *Dos espacios de Hilbert H y K, con bases ortonormales respectivos $\{\, u_j : j \in A \,\}$ y $\{\, v_k : k \in B \,\}$, son isomorfos si y solo si los conjuntos índice A y B tienen igual cardinalidad.*

Demostración. Ad $(\Rightarrow)$: Supóngase que A y B tienen la misma cardinalidad, es decir, que hay una biyección $\sigma : A \to B$. Defínase una aplicación lineal $U : H \to K$ por la receta:

$$U\biggl(\sum_{j\in A} \alpha_j\, u_j\biggr) := \sum_{j\in A} \alpha_j\, v_{\sigma(j)} \quad \text{toda vez que} \quad \sum_{j\in A} |\alpha_j|^2 < \infty.$$

En efecto, por (1.26) y (1.28), cada $x \in \mathcal{H}$ tiene una expansión única $x = \sum_{j\in A} \alpha_j\, u_j$ con $\sum_{j\in A} |\alpha_j|^2 = \|x\|^2 < \infty$. El Teorema 1.34 también muestra que cada serie $\sum_{j\in A} \alpha_j\, v_{\sigma(j)}$ con $\sum_{j\in A} |\alpha_j|^2 < \infty$ define un vector en $\mathcal{K}$; en particular, U es sobreyectiva.

Es evidente por la igualdad de Parseval (1.28) que U es una isometría. Entonces H y K son isomorfos mediante la isometría sobreyectiva U.

Ad $(\Leftarrow)$: Supóngase que existe una isometría biyectiva $V : H \to K$. Sea $w_k := Vu_k \in K$ para cada $k \in A$. Entonces $\{\, w_k : k \in A \,\}$ es una familia ortonormal en K, porque

$$\langle w_j \mid w_k\rangle = \langle Vu_j \mid Vu_k\rangle = \langle u_j \mid u_k\rangle = [\![j = k]\!].$$

Además, si $y \in K$, hay un único $x \in H$ con $y = Vx$. Por lo tanto, vale

$$\langle w_k \mid y\rangle = \langle Vu_k \mid Vx\rangle = \langle u_k \mid x\rangle \quad \text{para todo} \quad k \in A.$$

Si $\langle w_k \mid y\rangle = 0$ para todo k, entonces $\langle u_k \mid x\rangle = 0$ para todo k, así que $x = 0$ y luego $y = 0$. La familia ortonormal $\{\, w_k : k \in A \,\}$ es *total* en K y como tal es una base ortonormal de K.

[14]Una aplicación *semilineal* $W : H \to K$ cumple $\|Wx\| = \|x\|$ para todo $x \in H$ si y solo si $\langle Wx \mid Wy\rangle = \langle y \mid x\rangle$ para todo $x, y \in H$. De vez en cuando, estas "isometrías semilineales" resultan útiles también.

Si A es finito con $\#(A) = n$, la expansión (1.26) dice que $\{ u_k : k \in A \}$ es una base ordinaria del espacio vectorial H, luego $\dim H = n$; por ser $V \colon H \to K$ lineal y biyectiva, se obtiene $\#(B) = \dim K = n$ también.

Si $\#(A)$ es una cardinalidad infinita, sea $B_j := \{ k \in B : \langle w_j \mid v_k \rangle \neq 0 \}$; este B_j es numerable, para todo $j \in A$, así que $\#\bigl(\bigcup_{j\in A} B_j\bigr) = \aleph_0 \, \#(A) = \#(A)$.

Si fuera $\#(B) > \#(A)$, existiría $k \in B$ con $v_k \neq 0$ en K pero cada $\langle w_j \mid v_k \rangle = 0$, lo cual es inadmisible ya que $\{ w_j : j \in A \}$ es total en K. Se concluye que $\#(B) \leqslant \#(A)$. Al reemplazar V por la biyección $V^{-1} \colon K \to H$, se prueba de igual modo que $\#(A) \leqslant \#(B)$. El teorema de Schröder y Bernstein, de la teoría de conjuntos, ahora garantiza que $\#(A) = \#(B)$, es decir, que existe una biyección $\sigma \colon A \to B$. ◻

El Teorema 1.34 también demuestra que todo espacio de Hilbert de dimensión finita n es isomorfo al espacio euclidiano $\mathbb{C}^n$ (con la base ortonormal estándar).

► Un espacio de Hilbert H es **separable**, como espacio topológico – es decir, posee un conjunto numerable denso en H – si y solo si posee una base ortonormal numerable. La numerabilidad de la base es necesaria, como $\|u_j - u_k\| = \sqrt{2}$ para $j \neq k$ y por eso las bolas abiertas $B(u_j; \sqrt{2})$ son disjuntos. Los desarrollos de Fourier (1.26) con coeficientes racionales forman una parte densa en H, así que la numerabilidad de la base ortonormal es también suficiente.

Algunos autores, en particular Barry Simon en su reciente *opus magnum* sobre análisis, abogan por *incluir la separabilidad como parte de la definición de un espacio de Hilbert*. En las raras ocasiones en donde se requiere usar una base ortonormal no numerable, se puede hablar de un "espacio de Hilbert no separable". (En aplicaciones, todos los espacios de Hilbert que se encuentran son separables; en cambio, aparecen muchas espacios de Banach no separables.) *En lo sucesivo, se asumirá que todo espacio de Hilbert es separable*, salvo si se indica expresamente lo contrario.

► Muchos ejemplos concretos de bases ortonormales se construyen mediante el **algoritmo de Gram y Schmidt**. Dado un espacio de Hilbert separable H, se obtiene primero – por cualquier procedimiento – un conjunto de vectores $\{ x_0, x_1, x_2, \dots \}$ *linealmente independientes* que forman un *conjunto total* en H: si $\langle x_n \mid y \rangle = 0$ para todo n, entonces $y = 0$. Defínase $u_0 := x_0/\|x_0\|$ (para que $\|u_0\| = 1$); defínase $y_1, u_1, y_2, u_2, \dots$ inductivamente por:

$$y_n := x_n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle u_k \mid x_n \rangle u_k, \qquad u_n := \frac{y_n}{\|y_n\|} \,.$$

En cada paso, se resta de x_n sus componentes en las direcciones de los u_k previamente construidos, y luego se normaliza el residuo y_n para obtener un vector u_n de norma 1.

La independencia lineal de los x_n garantiza que cada $y_n \neq 0$. Como $\{ x_0, x_1, x_2, \dots \}$ es total, se obtiene la condición de totalidad (1.23) para los u_n, es decir, que la familia ortonormal de los u_n es también total.

Ejemplo 1.37. En $\mathbb{C}^n$ o en $\boldsymbol{\ell}^2$, sea $\boldsymbol{e}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ la sucesión con 1 en el k-ésimo lugar y 0 en los demás lugares. Estas forman una familia ortonormal. Como $\langle \boldsymbol{e}_k \mid \boldsymbol{x} \rangle = x_k$ es el k-ésimo componente de la sucesión $\boldsymbol{x}$, se verifica (1.23). Entonces $\{ \boldsymbol{e}_k : k = 1, \dots, n \}$ es una base ortonormal para $\mathbb{C}^n$; y $\{ \boldsymbol{e}_k : k \in \mathbb{N} \}$ es una base ortonormal para $\boldsymbol{\ell}^2$. ◊

Ejemplo 1.38. Si $H = L^2[-1, 1]$, el conjunto de "monomios" $\{ 1, t, t^2, t^3, \dots \}$ es linealmente independiente y total: si $\int_{-1}^{1} \overline{p(t)} f(t)\, dt = 0$ para todo polinomio p, entonces $f = 0$. El algoritmo de Gram y Schmidt entonces produce un juego de polinomios ortonormales, los **polinomios de Legendre**. ◊

Ejemplo 1.39. Si $H = L^2[-\pi, \pi]$, las funciones $u_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$, para $n \in \mathbb{Z}$, forman una familia ortonormal, porque

$$\langle u_m \mid u_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}\, dt = [\![m=n]\!].$$

Es menos evidente, pero cierto, que esta familia es total en $L^2[-\pi, \pi]$. En general, la demostración de totalidad de una familia ortonormal requiere un ejercicio no trivial de análisis. El desarrollo (1.26) en este caso es la **serie de Fourier** de una función en $L^2[-\pi, \pi]$. (Los elementos de $L^2[-\pi, \pi]$ pueden considerarse como funciones periódicas sobre $\mathbb{R}$, de período 2π.)

Para reducir el mínimo las instancias de la constante 2π, se puede optar por la "notación francesa": en el espacio de Hilbert $H = L^2[0, 1]$, las funciones $v_n(t) := e^{2\pi int}$, con $n \in \mathbb{Z}$, forman una familia ortonormal total. El desarrollo (1.26) da la serie de Fourier de una función periódica con período 1. ◊

Ejemplo 1.40. Si $H = \mathcal{F}(\mathbb{C})$ es el espacio de Segal y Bargmann, hay una familia ortonormal de monomios, dados por $u_n(z) := z^n / \sqrt{n!}$ para $n \in \mathbb{N}$. Un elemento de $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ es una función holomorfa entera y posee una serie de Taylor centrada en 0. Al ajustar sus coeficientes por factores de $\sqrt{n!}$, esta serie de Taylor se convierte en el desarrollo de Fourier (1.26) para este espacio de Hilbert. El Teorema 1.34 entonces garantiza que $\{ u_n : n \in \mathbb{N} \}$ es una base ortonormal de $\mathcal{F}(\mathbb{C})$. ◊

La geometría de los espacios de Hilbert

En un espacio normado de dimensión finita, la *distancia* hacia un subespacio M desde un punto externo $x \notin M$ se define como $\inf\{ \|x - y\| : y \in M \}$. Este ínfimo es de hecho un *mínimo*: la distancia está dada por $\|x - z\|$ para algún $z \in M$. Como M es cerrado, por su dimensionalidad finita, es fácil comprobar la *existencia* de un punto z más cercano a M. Por otro lado, para algunas normas la *unicidad* de z no está garantizada.

En un espacio de Hilbert, de dimensión cualquiera, esta *propiedad de distancia mínima* sigue válida, con unicidad, en un contexto levemente más general. Recuérdese que en un espacio vectorial E (real o complejo), una parte $C \subseteq E$ es **convexa** si

$$x, y \in C,\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \implies (1-t)x + ty \in C.$$

Proposición 1.41. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $C \subseteq H$ una parte* convexa y cerrada. *Si $x \in H$, hay un único punto $z \in C$ tal que*

$$\|x - z\| = d(x, C) \equiv \inf_{y \in C} \|x - y\|. \tag{1.29}$$

Demostración. Si $x \in C$, entonces $d(x, C) = 0$; en ese caso se toma $z = x$, la cual es obviamente la única posibilidad para z.

Supóngase, entonces, que $x \notin C$. Sea $d = d(x, C) := \inf\{\, \|x - y\| : y \in C \,\}$ la *distancia* de x a C. Nótese que $d > 0$ porque C es cerrado con $x \notin C$.

Tómese una sucesión $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C$ tal que

$$\|x - y_k\|^2 < d^2 + \frac{1}{k+1} \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.30}$$

Esta es una sucesión de Cauchy en H. En efecto, la ley del paralelogramo implica que

$$\begin{aligned}
\|y_j - y_k\|^2 &= \|(y_j - x) - (y_k - x)\|^2 \\
&= 2\|y_j - x\|^2 + 2\|y_k - x\|^2 - \|(y_j - x) + (y_k - x)\|^2 \\
&= 2\|y_j - x\|^2 + 2\|y_k - x\|^2 - 4\|x - \tfrac{1}{2}(y_j + y_k)\|^2 \\
&\leqslant 2\|y_j - x\|^2 + 2\|y_k - x\|^2 - 4d^2 < 2\biggl(\frac{1}{j+1} + \frac{1}{k+1}\biggr),
\end{aligned}$$

porque $\frac{1}{2}(y_j + y_k) \in C$ por convexidad. Como H es completo, hay un (único) punto $z \in H$ tal que $y_k \to z$. Nótese que $z \in C$ ya que C es cerrado en H. Esto implica que $\|x - z\| \geqslant d$; y de (1.30) se ve que $\|x - z\| = \lim_{k \to \infty} \|x - y_k\| \leqslant d$. Por lo tanto, vale $\|x - z\| = d$.

Para obtener la unicidad del punto z que cumple (1.29), sea $w \in C$ cualquier punto tal que $\|x - w\| = d$. Entonces $\frac{1}{2}(z + w) \in C$ por convexidad, y la ley del paralelogramo muestra que

$$\begin{aligned}
\|z - w\|^2 &= 2\,\|x - z\|^2 + 2\,\|x - w\|^2 - 4\,\|x - \tfrac{1}{2}(z + w)\|^2 \\
&= 4d^2 - 4\,\|x - \tfrac{1}{2}(z + w)\|^2 \leqslant 4d^2 - 4d^2 = 0,
\end{aligned}$$

así que $\|z - w\| = 0$ y por ende $w = z$. □

La relación $\|x - z\| = d(x, C)$ de (1.29) dice que la distancia del punto x al conjunto C no solo es un ínfimo sino que es un *mínimo*: el punto especial $z \in C$ es *el punto de C más cercano a x*. Esta propiedad de tener un punto más cercano aprovechó la ley del paralelogramo, lo que limita la validez de la demostración a los espacios de Hilbert. De hecho, hay muchos espacios de Banach en los cuales la Proposición 1.41 no es válida.

Definición 1.42. Sean H, K dos espacios de Hilbert. Su **suma directa** $H \oplus K$ de los espacios vectoriales H y K incluye H y K como subespacios vectoriales[15] de manera que $H \cap K = \{0\}$. Al dotarla del producto escalar

$$\langle x_1 + y_1 \mid x_2 + y_2 \rangle := \langle x_1 \mid x_2 \rangle + \langle y_1 \mid y_2 \rangle, \quad \text{para} \quad x_1, x_2 \in H;\ y_1, y_2 \in K,$$

$H \oplus K$ resulta ser otro espacio de Hilbert, en donde $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si $x \in H$, $y \in K$.

Si H y K tienen respectivas bases ortonormales $\{ u_k : k \in A \}$ y $\{ v_r : r \in B \}$, su unión disjunta $\{ u_k : k \in A \} \uplus \{ v_r : r \in B \}$ es una base ortonormal para $H \oplus K$. ◊

Proposición 1.43. *Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H. Su complemento ortogonal $M^\perp$ es otro subespacio cerrado tal que $(M^\perp)^\perp = M$. Hay un isomorfismo de espacios de Hilbert $H \simeq M \oplus M^\perp$.*

Demostración. De la definición (1.22) de complemento ortogonal, se ve que $y \in M^\perp$ si y solo si $\langle y \mid x \rangle = 0$ para todo $x \in M$. Está claro que $M \subseteq (M^\perp)^\perp$ y que $M \cap M^\perp = \{0\}$.

Dado $x \in H$, la Proposición 1.41 muestra que hay un único $z \in M$ tal que $\|x - z\| = d(x, M)$. Sea $w := x - z$. Para $y \in M$, $t \in \mathbb{R}$, vale

$$d(x, M)^2 \leqslant \|x - (z + ty)\|^2 = \|w - ty\|^2 = d(x, M)^2 - 2t\, \Re\langle w \mid y \rangle + t^2 \|y\|^2,$$

así que $t^2\|y\|^2 - 2t\, \Re\langle w \mid y \rangle \geqslant 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, lo cual implica $\Re\langle w \mid y \rangle = 0$. Como $y \in M$ es arbitrario, se concluye que $w \in M^\perp$. Entonces cada $x \in H$ es una suma

$$x = z + w, \quad \text{con} \quad z \in M,\ w \in M^\perp.$$

La unicidad de $z \in M$ conlleva la unicidad de $w = x - z \in M^\perp$, así que esta descomposición es única.

Esto dice que $H = M \oplus M^\perp$ como espacios vectoriales. Además, sus productos escalares coinciden, porque

$$\|x\|^2 = \langle z + w \mid z + w \rangle = \langle z \mid z \rangle + 2\Re\langle w \mid z \rangle + \langle w \mid w \rangle = \|z\|^2 + \|w\|^2.$$

[15]Se puede definir $H \oplus K$ como el producto cartesiano $H \times K$ con las operaciones vectoriales obvias. Las identificaciones $x \mapsto (x, 0)$ y $y \mapsto (0, y)$ definen las inclusiones respectivas $H \hookrightarrow H \oplus K$ y $K \hookrightarrow H \oplus K$.

Si $\{ u_j : j \in A \}$ y $\{ v_k : k \in B \}$ son bases ortonormales respectivas para M y $M^\perp$, hay un desarrollo de Fourier de x, dado por (1.26):

$$x = \sum_{j\in A} \langle u_j \mid x \rangle \, u_j + \sum_{k\in B} \langle v_k \mid x \rangle \, v_k = \sum_{j\in A} \langle u_j \mid z \rangle \, u_j + \sum_{k\in B} \langle v_k \mid w \rangle \, v_k \,.$$

Cada $y \in (M^\perp)^\perp$ cumple $\langle v_k \mid y \rangle = 0$ para todo k, luego obedece $y = \sum_{j\in A} \langle u_j \mid z \rangle \, u_j$. Como M es cerrado en H y por ende es un espacio de Hilbert bajo la restricción a M del producto escalar en H, se concluye que $(M^\perp)^\perp = M$. $\square$

1.3 Espacios localmente convexos

Los espacios de Hilbert forman una generalización natural de los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, en donde las bases ortonormales permiten imitar los procesos del álgebra lineal finitodimensional. En espacios normados cuya norma no proviene de un producto escalar, esos procedimientos no son aplicables y es necesario adoptar otros métodos. De hecho, los espacios normados resultan insuficientes para muchas aplicaciones del análisis matemático. Conviene, entonces, empezar de nuevo con un enfoque más abstracto.

Definición 1.44. Un **espacio vectorial topológico** es un espacio $\mathbb{C}$-vectorial E dotado con una topología con la propiedad T_2 de Hausdorff[16] para la cual las operaciones de suma $(x, y) \mapsto x + y : E \times E \to E$ y multiplicación por escalares $(\lambda, x) \mapsto \lambda x : \mathbb{C} \times E \to E$ son continuas.[17] En un espacio vectorial topológico, las *traslaciones* $\tau_x \colon E \to E : y \mapsto y - x$ y las *homotecias* $h_\lambda \colon E \to E : y \mapsto \lambda y$ (con $\lambda \neq 0$) son homeomorfismos de E, con inversos respectivos τ_{-x} y $h_{1/\lambda}$. $\lozenge$

Definición 1.45. Un **espacio localmente convexo** es un espacio $\mathbb{C}$-vectorial E, dotado con una familia separante[18] de *seminormas* $\{ p_\alpha : \alpha \in A \}$, no necesariamente numerable. Dado $x \in E$, $\varepsilon > 0$ y una parte finita $F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \subset A$, defínase

$$V_{x,F,\varepsilon} := \{ y \in E : p_{\alpha_k}(y - x) < \varepsilon \text{ para } k = 1, \dots, r \}. \tag{1.31}$$

Estos conjuntos forman una base de vecindarios abiertos en cada x para la topología de E. $\lozenge$

[16] Un espacio topológico es *de Hausdorff* (o T_2) si cada dos puntos distintos poseen vecindarios disjuntos. Esto excluye los espacios vectoriales $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ donde $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida no atómico, que incluyen "funciones nulas" que no pueden ser separadas de 0 de este modo. En su lugar, se estudian los "espacios de clases" $L^p(X, \mu)$.

[17] De nuevo, se tomará $\mathbb{C}$ como el cuerpo de escalares, aunque las definiciones y los resultados de esta sección son aplicables, *mutatis mutandis*, a espacios vectoriales reales.

[18] Una familia separante de seminormas genera una topología de Hausdorff, así que E es automáticamente T_2. En los libros de Osborne y Rudin, se demuestra que una topología vectorial que tiene la propiedad T_1 (cada singulete es un conjunto cerrado) también cumple la propiedad T_2.

Escolio 1.46. *Comprobar que los conjuntos* $V_{x,F,\varepsilon}$ *de* (1.31)*, para todo* $\varepsilon > 0$ *y* $F \subset A$ *finita, forman una base de vecindarios para una topología sobre E, para la cual las operaciones algebraicas son continuas. (Así, un espacio localmente convexo es, en particular, un espacio vectorial topológico.)*[19] ⊟

Para demostrar este escolio, es necesario comprobar las propiedades de una base de vecindarios: (i) $x \in V_{x,F,\varepsilon}$; (ii) cada intersección $V_{x,F',\varepsilon'} \cap V_{x,F'',\varepsilon''}$ incluye algún otro $V_{x,F,\varepsilon}$; y (iii) dado $V_{x,F,\varepsilon}$, existe $V_{x,G,\delta}$ tal que cada $y \in V_{x,G,\delta}$ tiene un vecindario $V_{y,H,\eta} \subseteq V_{x,F,\varepsilon}$.

Una parte $W \subseteq E$ es un vecindario de x si W incluye algún $V_{x,F,\varepsilon}$; una parte $U \subseteq E$ es un abierto de E si U es una unión de varios $V_{x,F,\varepsilon}$.

Si $x \neq y$ en un espacio localmente convexo E, entonces $p_\alpha(x - y) = r > 0$ para algún $\alpha \in A$, así que $V_{x,\{\alpha\},r/2} \cap V_{y,\{\alpha\},r/2} = \emptyset$: de ahí se ve que la topología de E es T_2.

Obsérvese que $\tau_x(V_{x,F,\varepsilon}) = V_{0,F,\varepsilon}$ para cada $x \in E$; e inversamente, $\tau_{-x}(V_{0,F,\varepsilon}) = V_{x,F,\varepsilon}$. Para estudiar la topología de E, basta considerar los vecindarios básicos del origen.

Definición 1.47. Si A, B, C son partes de un espacio localmente convexo E, dícese que:

(a) A es **equilibrado** si $\lambda A \subseteq A$ para $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \leqslant 1$.

(b) B es **absorbente** si $x \in E \implies rx \in B$ para algún $r > 0$.

(c) C es **convexo** si $x, y \in C \implies (1 - t)x + ty \in C$ para $0 \leqslant t \leqslant 1$. ◊

Proposición 1.48. *Un espacio vectorial topológico es localmente convexo si y solo si posee una base de vecindarios de* 0 *que son convexos, equilibrados y absorbentes.*

Demostración. Ad $\Longrightarrow$: Si E es un espacio localmente convexo, sea $\{ p_\alpha : \alpha \in A \}$ una familia de seminormas que define su topología. Para $\varepsilon > 0$ y $F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \subset A$ finito, sea $V = V_{0,F,\varepsilon}$ definido por (1.31). Cada seminorma p_α cumple

$$\begin{aligned} p_\alpha(\lambda x) &= |\lambda|\, p_\alpha(x) \leqslant p_\alpha(x) && \text{para} \quad |\lambda| \leqslant 1, \\ p_\alpha((1-t)x + ty) &\leqslant (1-t)p_\alpha(x) + t p_\alpha(y) && \text{para} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{aligned}$$

así que V es equilibrado y convexo. Si $z \in E$, tómese $r > 0$ tal que $r < \varepsilon / p_{\alpha_k}(z)$ para cada k tal que $p_{\alpha_k}(z) \neq 0$. Entonces $p_{\alpha_j}(rz) = r\, p_{\alpha_j}(z) < \varepsilon$ para $j = 1, \dots, n$; así que $rz \in V$. Por lo tanto, V es absorbente.

Ad $\Longleftarrow$: Por otro lado, si E es un espacio vectorial topológico y si U es un abierto convexo, equilibrado y absorbente en E, entonces el **funcional de Minkowski**:

$$q_U(x) := \inf\{ r > 0 : r^{-1}x \in U \} = \inf\{ r > 0 : x \in rU \}$$

[19] Algunos autores usan el término redundante *espacio vectorial topológico localmente convexo*.

es una *seminorma continua* en E. En efecto, es evidente que $q_U(x) < \infty$ para cada $x \in E$, porque U es absorbente; además, $q_U(\lambda x) = q_U(|\lambda| x) = |\lambda|\, q_U(x)$ porque U es equilibrado. Para comprobar la desigualdad triangular para q_U, es cuestión de notar que

$$(r+s)^{-1}(x+y) = \frac{r}{r+s}(r^{-1}x) + \frac{s}{r+s}(s^{-1}y) \quad \text{si} \quad r,s > 0,$$

así que las condiciones $q_U(x) < r$, $q_U(y) < s$ implican $q_U(x+y) < r+s$ por la convexidad de U; en consecuencia, vale $q_U(x+y) \leqslant q_U(x) + q_U(y)$. La continuidad de q_U sigue de

$$q_U^{-1}\big([0,\varepsilon)\big) = \{\, x \in E : q_U(x) < \varepsilon \,\} = \varepsilon U \equiv h_\varepsilon(U),$$

porque $h_\varepsilon(U)$ es abierto en E para todo $\varepsilon > 0$. En vista de que $U = \{\, x \in E : q_U(x) < 1 \,\}$, se concluye que la topología de E está determinada por las seminormas q_U, donde U recorre una base de vecindarios abiertos de 0 que son equilibrados, absorbentes y convexos. □

Definición 1.49. Sea E un espacio localmente convexo, cuya topología está determinada por la familia de seminormas $\{\, p_\alpha : \alpha \in A \,\}$. Un conjunto $A \subset E$ es **acotado** si $p_\alpha(A)$ es acotado en $[0,\infty)$ para todo $\alpha \in A$.

En particular, una parte *compacta* $K \subset E$ está acotada, porque cada conjunto imagen $p_\alpha(K) \subset [0,\infty)$ es acotado, por la continuidad de la seminorma p_α. ◊

En un espacio *normado* E, la norma $\|\cdot\|$ por sí sola constituye una familia de seminormas que determina la topología. Entonces $A \subset E$ es una parte acotada si y solo si hay $R > 0$ tal que $\|x\| \leqslant R$ para todo $x \in A$.

Proposición 1.50. *Un espacio localmente convexo es* normable *si y solo si posee un vecindario acotado de* 0.

Demostración. Si E es un espacio normado, entonces la bola abierta $V = \{\, x \in E : \|x\| < 1 \,\}$ es un vecindario acotado de 0.

Por otro lado, si E es un espacio localmente convexo cuya topología está determinada por una familia separante de seminormas $\{\, p_\alpha : \alpha \in A \,\}$, sea $V = V_{0,F,\varepsilon}$ un vecindario básico cualquiera de 0, dado por (1.31). Defínase $q(x) := \max\{p_{\alpha_1}(x), \dots, p_{\alpha_r}(x)\}/\varepsilon$. Entonces q es una seminorma continua sobre E tal que $V = \{\, x \in E : q(x) < 1 \,\}$.

Ahora bien, si V es acotado, colóquese $m_\alpha := 1 + \sup_{x \in V} p_\alpha(x)$ para $\alpha \in A$. El vecindario básico $V_{0,G,\delta}$ incluye rV, donde $r := \min\{\, \delta/m_\beta : \beta \in G \,\}$. De esta manera, se ve que $\{\, (1/n)V : n \in \mathbb{N}^* \,\}$ es una base de vecindarios de 0. Esto significa que la sola seminorma q genera la topología de E. Como esta topología es T_2, este q debe ser una norma. En resumen: E es normable con la norma q. □

En consecuencia, un espacio localmente convexo que no es normable necesita una infinitud de seminormas para definir su topología.

Ejemplo 1.51. Un espacio de Hilbert H, con la norma $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$, es un espacio normado. Para cada $y \in H$, la forma lineal $x \mapsto \langle y \mid x \rangle$ es continua, como ya se ha observado:

$$\|x_n - x\| \to 0 \implies \bigl|\langle y \mid x_n - x \rangle\bigr| \leqslant \|y\| \, \|x_n - x\| \to 0.$$

La topología *más débil* sobre H tal que todas estas formas lineales son continuas está dada por la familia de seminormas $\{ p_y : y \in \mathcal{H} \}$, donde $p_y(x) := \bigl|\langle y \mid x \rangle\bigr|$.

La seminorma p_0 es trivial y se puede omitir. De hecho, si $y = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n$ es una combinación lineal en H, entonces

$$p_y(x) = \bigl|\langle y \mid x \rangle\bigr| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \, \bigl|\langle y_j \mid x \rangle\bigr| = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \, p_{y_j}(x),$$

así que esta topología está determinada por una subfamilia $\{ p_y : y \in B \}$, donde B es una *base* de H como espacio $\mathbb{C}$-vectorial.[20]

El espacio $\mathbb{C}$-vectorial H, con esta **topología débil**, es un espacio localmente convexo. La topología débil es equivalente a la topología de la norma si y solo si $\dim_{\mathbb{C}} H$ es finita. Después se verá que un espacio de Hilbert infinitodimensional tiene una base $\mathbb{C}$-vectorial no numerable. En consecuencia, si $\dim_{\mathbb{C}} H = \infty$, *este espacio localmente convexo no es metrizable*. ◊

La necesidad de considerar espacios no metrizables obliga a considerar convergencia de *redes* (o filtros, si se prefiere) en vez de *sucesiones*.[21] Se debe recordar (de la topología general) que una **red** en X es una parte $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq X$ donde el conjunto índice A es un *conjunto dirigido*; esto es, A tiene un orden parcial tal que todo par $\alpha, \beta \in A$ posee un mayorizante $\gamma \in A$ tal que $\alpha \leqslant \gamma$, $\beta \leqslant \gamma$. Si X es un espacio topológico y si $x \in X$, dícese que $x_\alpha \to x$ si para cada vecindario V_x de x, existe $\alpha \in A$ tal que $\beta \geqslant \alpha \implies x_\beta \in V_x$.

En espacios de Banach o de Fréchet infinitodimensionales, también se puede definir topologías débiles (no metrizables), donde el papel de los $y \in H$ queda reemplazado por el de las formas lineales continuas. Esto conduce al tema de *dualidad* entre espacios normados o localmente convexos, que se abordará en el próximo capítulo.

[20] Este B es una *base de Hamel* para H, en el lenguaje del álgebra lineal.

[21] Un espacio topológico metrizable cumple el primer axioma de numerabilidad; en consecuencia, basta emplear convergencia de sucesiones en espacios normados o de Fréchet.

1.4 Ejercicios sobre espacios del análisis lineal

Ejercicio 1.1. Demostrar que las métricas d y d' dadas por (1.1a) y (1.1b) de la Definición 1.3 son *equivalentes*, es decir, que cada bola abierta $B_d(x; r) := \{\, y : d(x, y) < r \,\}$ incluye una bola abierta $B_{d'}(x; s)$, y viceversa.

Ejercicio 1.2. Sea E un espacio vectorial dotado con una familia numerable y separante de seminormas $\{\, p_n : n \in \mathbb{N} \,\}$. Si d denota la métrica (1.2), comprobar que $d(x_n, x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ si y solo si $p_k(x_n - x) \to 0$ cuando $n \to \infty$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Verificar, además, que una sucesión $\{y_n\}$ es de Cauchy en la métrica d si y sólo si es de Cauchy en cada seminorma p_k por aparte.[22]

Ejercicio 1.3. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, demostrar que $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Ejercicio 1.4. (a) Demostrar que $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ es denso en $\underline{\boldsymbol{c}}_0$ y en $\underline{\boldsymbol{\ell}}^p$ si $1 \leqslant p < +\infty$.

(b) Si $1 \leqslant p < r < +\infty$, demostrar que $\|\boldsymbol{x}\|_r \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p$ para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$. Concluir que $\underline{\boldsymbol{\ell}}^p \subsetneq \underline{\boldsymbol{\ell}}^r$.
⟦ Indicación: Para ver que $\underline{\boldsymbol{\ell}}^p \neq \underline{\boldsymbol{\ell}}^r$, considerar la serie armónica $\sum_{k\geqslant 0} 1/(k+1)$. ⟧

(c) Mostrar que $\underline{\boldsymbol{\ell}}^p$ es denso en $\underline{\boldsymbol{\ell}}^r$ si $1 \leqslant p < r < +\infty$.

(d) Demostrar, además, que $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ *no es* denso en $\underline{\boldsymbol{\ell}}^\infty$.

Ejercicio 1.5. (a) Verificar la completitud del espacio normado de funciones continuas $C(K)$, donde K es un espacio topológico compacto (y T_2).

(b) Si X es un espacio topológico localmente compacto (y T_2) pero no compacto, demostrar que $C_0(X)$ es también completo.

Ejercicio 1.6. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Verificar la completitud del espacio $C^\infty(U)$ en la topología dada por las seminormas (1.8). ⟦ Indicación: Usar el Ejercicio 1.2. ⟧

Ejercicio 1.7. Si $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es un polinomio, demostrar que hay constantes $C > 0$, $R > 0$ y $N \in \mathbb{N}$, dependientes de p, tales que la desigualdad (1.9) sea válida para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 1.8. (a) Sea $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ el espacio de Schwartz del Ejemplo 1.16 dotado con las seminormas s_m dadas por (1.10). Para $m, n \in \mathbb{N}$ y $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, defínase

$$p_{mn}(f) := \sup_{t\in\mathbb{R}} |t^m\, \partial^n f(t)|, \quad \text{con} \quad \partial \equiv \frac{d}{dt}\,.$$

[22] En consecuencia, para verificar la completitud de un espacio con una familia numerable de seminormas, basta hallar límites (que deben coincidir) para sucesiones de Cauchy respecto de cada seminorma individual.

Demostrar que $p_{mn}(f) \leqslant s_M(f)$ si $M = \max\{m, n\}$; y que $s_m(f) \leqslant C \sum_{k=0}^{2m} p_{km}(f)$ para alguna constante C. Concluir que el sistema de seminormas $\{\, p_{mn} : m, n \in \mathbb{N} \,\}$ define la misma topología sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ que $\{\, s_m : m \in \mathbb{N} \,\}$.

(b) Defínase otra familia de seminormas q_{mn} sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ por

$$q_{mn}(f) := \left(\int_{\mathbb{R}} t^{2m} |\partial^n f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

Verificar que la función $t \mapsto (1 + t^2)^{-1/2}$ está en $L^2(\mathbb{R})$. Usar la desigualdad de Schwarz para mostrar que

$$q_{mn}(f) \leqslant C' \big(p_{mn}(f) + p_{m+2,n}(f) \big)$$

para alguna constante C', independiente de $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(c) Demostrar que hay otra constante $C'' \geqslant 0$ tal que

$$p_{mn}(f) \leqslant C'' \big(m q_{m-1,n}(f) + m q_{m+1,n}(f) + q_{m,n+1}(f) + q_{m+2,n+1}(f) \big)$$

para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Concluir que las seminormas q_{mn} también definen la topología de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Ejercicio 1.9. ¿Para cuáles $a \in \mathbb{R}$ y $p \in [1, \infty]$ es la función $f_a(t) := t^a e^{-t}$ un elemento de $L^p([0, \infty))$? Calcular las normas $\|f_a\|_p$ cuando éstas son finitas.

Ejercicio 1.10. Este ejercicio proporciona una demostración alternativa de la desigualdad de Young: si $1 < p < \infty$ y $q - 1 = 1/(p - 1)$, entonces $st \leqslant s^p/p + t^q/q$ para todo $s, t > 0$.

(a) Para $t > 0$ fijo, sea $f(s) := st - s^p/p$. Demostrar que hay $\delta > 0$ tal que $f(s) > 0$ para $s \in (0, \delta)$ mientras $\lim_{s\to\infty} f(s) = -\infty$. Concluir que hay $s_0 > 0$ tal que $f'(s_0) = 0$ y $f(s_0) = \sup\{\, f(s) : s > 0 \,\}$.

(b) Evaluar s_0 y expresar $f(s_0)$ como función de t. Concluir que $f(s) \leqslant t^q/q$.

Ejercicio 1.11. Mostrar las siguientes variantes sobre la desigualdades de Young y Hölder:

(a) Si $a, b > 0$ y si $0 < \theta < 1$ entonces

$$a^{1-\theta} b^\theta \leqslant (1 - \theta)a + \theta b.$$

(b) Si $p, q, r \in [1, \infty)$ tales que $1/p + 1/q = 1/r$ y si $f \in L^p(X, \mu)$, $g \in L^q(X, \mu)$, entonces $fg \in L^r(X, \mu)$ y se verifica

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q \,.$$

(c) Si $p, p_0, p_1 \in [1, \infty)$ y $0 < \theta < 1$ cumplen la relación $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$, entonces $f \in L^{p_0}(X, \mu) \cap L^{p_1}(X, \mu)$ implica $f \in L^p(X, \mu)$ y se verifica

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \, \|f\|_{p_1}^{\theta} \leqslant (1 - \theta)\|f\|_{p_0} + \theta \|f\|_{p_1} \,.$$

Ejercicio 1.12. En el espacio de Banach $C([0,1])$, encontrar dos funciones f, g tales que $f(t)\,g(t) \equiv 0$ mientras $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = \|f+g\|_\infty = \|f-g\|_\infty = 1$. Concluir que este espacio de Banach no es un espacio de Hilbert.

Ejercicio 1.13. Este ejercicio pide demostrar el teorema de Jordan y von Neumann: *si E es un espacio normado cuya norma cumple la ley del paralelogramo, las siguientes fórmulas definen un producto escalar compatible con esa norma*:

$$\Re\langle x \mid y\rangle := \tfrac{1}{2}\big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big), \quad \Im\langle x \mid y\rangle := \tfrac{1}{2}\big(\|x-iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big).$$

(a) Comprobar primero la relación siguiente, para $x, y, z \in E$:

$$\|x+y+z\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x+y\|^2 + \|y+z\|^2 + \|z+x\|^2.$$

⟦ Indicación: considerar un paralelepípedo con vértices $0, x, y, z$. ⟧
Concluir que $\Re\langle x \mid y+z\rangle = \Re\langle x \mid y\rangle + \Re\langle x \mid z\rangle$.

(b) Deducir que $\Re\langle x \mid \alpha y\rangle = \alpha\,\Re\langle x \mid y\rangle$ para $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ sucesivamente.

(c) Mostrar que $\Re\langle x \mid ix\rangle = 0$. Concluir que $\langle x \mid y\rangle := \Re\langle x \mid y\rangle - i\,\Re\langle x \mid iy\rangle$ cumple todas las propiedades de un producto escalar en E, y que $\langle x \mid x\rangle = \|x\|^2$.

Ejercicio 1.14. Las **funciones de Rademacher** $r_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, para $n \in \mathbb{N}$, se definen como sigue. La función r_0 es constante: $r_0(t) \equiv 1$. Si $0 \leqslant t \leqslant 1$, sea $k := \lfloor 2^n t\rfloor \in \{0,1,2,\dots,2^n\}$ el mayor entero que no excede $2^n t$. Para $n \geqslant 1$, defínase

$$r_n(t) := \begin{cases} 0, & \text{si } 2^n t \in \mathbb{N}, \\ (-1)^k, & \text{si } k < 2^n t < k+1. \end{cases}$$

Demostrar que $\{\, r_n : n \in \mathbb{N} \,\}$ es una familia ortonormal en $L^2([0,1])$, pero que la función $g(t) := \cos(2\pi t)$ es ortogonal a cada r_n. ⟦ Este es un ejemplo de una familia ortonormal que no es total. ⟧

Ejercicio 1.15. Un resultado del análisis clásico dice que los monomios $f_n \colon t \mapsto t^n$, para $n \in \mathbb{N}$, forman un conjunto total en el espacio de Hilbert $H = L^2([-1,1])$. El algoritmo de Gram y Schmidt produce una base ortonormal $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de polinomios sobre $[-1,1]$. Al escribir $P_n := \sqrt{2/(2n+1)}\,p_n$, se obtiene los **polinomios de Legendre** P_n. Una definición directa de esos polinomios está dada por la *fórmula de Rodrigues*:

$$P_n(t) := \frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n.$$

Demostrar que las funciones P_n son mutuamente ortogonales en $L^2([-1,1])$, y calcular sus normas: $\|P_n\|_2^2 = 2/(2n+1)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1.16. Las funciones $f_n : t \mapsto t^n e^{-t/2}$, para $n \in \mathbb{N}$, forman un conjunto total en $H = L^2([0,\infty))$. Con el algoritmo de Gram y Schmidt se produce una base ortonormal $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones $l_n(t) =: e^{-t/2}L_n(t)$, donde los L_n son los **polinomios de Laguerre**. Estos se definen directamente por su fórmula de Rodrigues:

$$L_n(t) := \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}) \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demostrar que las funciones $t \mapsto e^{-t/2}L_n(t)$ forman una familia ortonormal en $L^2[0,\infty)$.

Ejercicio 1.17. Las funciones $f_n : t \mapsto t^n e^{-t^2/2}$, para $n \in \mathbb{N}$, forman un conjunto total[23] en $H = L^2(\mathbb{R})$. Con el algoritmo de Gram y Schmidt se produce una base ortonormal $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la forma $h_n(t) = (2^n\, n!\sqrt{\pi}\,)^{-1/2}e^{-t^2/2}H_n(t)$, donde los H_n son los **polinomios de Hermite**. Estos se definen directamente por su fórmula de Rodrigues:

$$H_n(t) := (-1)^n e^{t^2}\frac{d^n}{dt^n}\,e^{-t^2} \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demostrar que las funciones $g_n(t) := e^{-t^2/2}H_n(t)$ son mutuamente ortogonales en $L^2(\mathbb{R})$, con $\|g_n\|_2^2 = 2^n\, n!\sqrt{\pi}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1.18. Sea $d\lambda(z) = dx\,dy$ la medida de Lebesgue sobre un abierto $U \subseteq \mathbb{C}$, y sea $A^2(U) := H(U)\cap L^2(U,\lambda)$ el espacio $\mathbb{C}$-vectorial de funciones holomorfas en U y de cuadrado integrable. Dado un disco cerrado $\overline{D}(z_0;r) \subset U$, verificar que

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{|z-z_0|\leqslant r} f(z)\,d\lambda(z) \quad \text{para} \quad f \in A^2(U),$$

a partir del desarrollo de Taylor de f. Mostrar también que

$$|f(z_0)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi r^2}\int_{|z-z_0|\leqslant r} |f(z)|^2\,d\lambda(z).$$

Comprobar que la convergencia en la norma $\|\cdot\|_2$ de $L^2(U,\lambda)$ implica la convergencia uniforme sobre compactos en U (Ejemplo 1.13) para elementos de $A^2(U)$, y concluir[24] que $A^2(U)$ es un subespacio *cerrado* de $L^2(U,\lambda)$.

Ejercicio 1.19. Sea $\mathbb{D} := \{\, z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \,\}$ el disco unitario complejo. Sea $A^2(\mathbb{D})$ el espacio de Hilbert del Ejercicio 1.18. Demostrar que una base ortonormal para $A^2(\mathbb{D})$ está formada por los *monomios* $q_n(z) := \sqrt{(n+1)/\pi}\,z^n$, para $n \in \mathbb{N}$. ⟦ Indicación: usar la serie de Taylor de un elemento de $A^2(\mathbb{D})$ para comprobar la igualdad de Parseval. ⟧

[23] Véase, por ejemplo, el Teorema 6.4.1 del libro *Real Analysis* de Simon.

[24] Un teorema de Weierstraß dice que si una sucesión de funciones holomorfas converge uniformemente sobre compactos en U, entonces la función límite es holomorfa en U.

2 Los Teoremas Fundamentales y la Dualidad

There are two ways to generalize a stew: to add more water, or to add more meat.

— Gérard G. Emch

El análisis funcional es la teoría general de la categoría de los espacios localmente convexos, con atención a las subcategorías de espacios de Hilbert, de Banach, o de Fréchet. En este capítulo se abordará los morfismos de estas categorías, que son las aplicaciones lineales continuas entre dichos espacios. Su estudio combina los aspectos algebraicos de estas aplicaciones lineales con sus propiedades topológicas, en dimensión infinita.

2.1 Aplicaciones lineales continuas

La continuidad de una aplicación lineal se refleja en unas desigualdades entre normas o seminormas de vectores. Esto reduce muchas cuestiones de continuidad a unos cálculos algebraicos sencillos.

Definición 2.1. Sean E, F dos espacios localmente convexos y sea $T\colon E \to F$ una **aplicación lineal y continua**. En el caso $E = F$, dícese que T es un **operador** sobre E. En el caso $F = \mathbb{C}$, T se llama un **funcional lineal** o una **forma lineal** sobre E.

El el espacio vectorial de todas las aplicaciones lineales continuas $T\colon E \to F$ se denota por $\underline{\mathcal{L}(E,F)}$. Cuando $E = F$, se suele abreviar $\underline{\mathcal{L}(E)} \equiv \mathcal{L}(E,E)$. En el caso $F = \mathbb{C}$, el **espacio dual** de E es el espacio vectorial $\underline{E^*} := \mathcal{L}(E,\mathbb{C})$ de todas las formas lineales continuas sobre E. ◊

Proposición 2.2. *Sean E y F espacios localmente convexos, y sea $T\colon E \to F$ una aplicación lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *T es continua en todo punto $x \in E$.*

(b) *T es continua en el origen $0 \in E$.*

(c) *Para cada seminorma continua q sobre F, hay una seminorma continua p sobre E y una constante $M > 0$ tales que*

$$q(Tx) \leqslant M\,p(x) \quad \textit{para todo} \quad x \in E.$$

Demostración. Ad (a) $\Longleftrightarrow$ (b): Si τ_x es la traslación $y \mapsto y - x$, está claro que[1]

$$(\tau_{-Tx} \circ T \circ \tau_x)(y) = (\tau_{-Tx} \circ T)(y - x) = \tau_{-Tx}(Ty - Tx) = Ty \quad \text{si} \quad y \in E,$$

así que $\tau_{-Tx} \circ T \circ \tau_x = T$ para cada $x \in E$. Como estas traslaciones son homeomorfismos de F y de E, respectivamente, se ve que T es continua en x si y solo si T es continua en 0.

[1] Aquí se adopta la costumbre, común en álgebra lineal, de escribir $\underline{Tx} \equiv T(x)$ cuando T es lineal.

Ad (b) $\Longrightarrow$ (c): Dado q y $\varepsilon > 0$, el conjunto $V_{q,\varepsilon} := \{ y \in F : q(y) < \varepsilon \}$ es un vecindario de 0 en F. Por lo tanto, $T^{-1}(V_{q,\varepsilon})$ es un vecindario de 0 en E, luego incluye un vecindario básico de 0 de la forma $U_{p,\delta} := \{ x \in E : p(x) < \delta \}$, para alguna[2] seminorma continua p sobre E y algún $\delta > 0$. Luego $p(x) < \delta \implies q(Tx) < \varepsilon$.

En consecuencia, para cada $z \in E$, vale

$$p(z) < r \implies p\Big(\frac{\delta}{r} z\Big) < \delta \implies q\Big(T\Big(\frac{\delta}{r} z\Big)\Big) < \varepsilon \implies q(Tz) < \frac{r\varepsilon}{\delta},$$

así que $q(Tz) \leqslant M\, p(z)$, al tomar $M := \varepsilon/\delta$.

Ad (c) $\Longrightarrow$ (b): Cada vecindario V de 0 en F incluye un vecindario básico de 0 de la forma $V_{q,\varepsilon} := \{ y \in F : q(y) < \varepsilon \}$ donde q es una seminorma continua sobre F y $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, se obtiene $\{ x \in E : p(x) < \varepsilon/M \} \subseteq T^{-1}(V)$, así que $T^{-1}(V)$ es un vecindario de 0 en E. Por tanto, T es continua en 0. □

Corolario 2.3. *Si E, F son espacios* normados*, una aplicación lineal $T : E \to F$ es continua si y solo si hay una constante $M > 0$ tal que*

$$\|Tx\|_F \leqslant M\|x\|_E \quad \textit{para todo} \quad x \in E. \qquad ⊟$$

Definición 2.4. Si E, F son espacios normados, se define una norma en $\mathcal{L}(E, F)$ por cualquiera de estas tres expresiones equivalentes:

$$\begin{aligned} \|T\| &:= \inf\{ M > 0 : \|Tx\|_F \leqslant M\|x\|_E \text{ para todo } x \in E \}, && (2.1a) \\ &= \sup\{ \|Tx\|_F/\|x\|_E : x \in E,\ x \neq 0 \} \\ &= \sup\{ \|Tx\|_F : \|x\|_E \leqslant 1 \}. && (2.1b) \end{aligned}$$

En particular, en el lado derecho de (2.1a) se puede tomar $M = \|T\|$, para concluir que

$$\|Tx\|_F \leqslant \|T\|\, \|x\|_E, \quad \text{para todo} \quad x \in E. \tag{2.1c}$$

De ahora en adelante, se omitirá el subíndice de la norma, porque el contexto indicará si se trata de la norma de un vector o de una aplicación lineal continua. ◊

Proposición 2.5. *Si E, F son espacios normados y si F es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{L}(E, F)$ es un espacio de Banach.*

[2] Dado el vecindario básico $V_{x,F,\varepsilon}$ de la fórmula (1.31), con $F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$, sea $p(x) := \sum_{k=1}^{n} p_{\alpha_k}(x)$; entonces p es una seminorma continua sobre E y vale $U_{p,\varepsilon/n} \subseteq V_{x,F,\varepsilon} \subseteq U_{p,\varepsilon}$. De esta manera, la familia finita de seminormas de la Definición 1.45 puede ser sustituida por una sola seminorma p, que podría tomarse como una suma finita de las seminormas de una familia dada que define la topología de E.

Demostración. Si F es de Banach, sea $\{T_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(E,F)$ – esto es, dado $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geqslant N \implies \|T_m - T_n\| \leqslant \varepsilon$. La desigualdad (2.1c) implica que

$$\|T_m x - T_n x\| = \|(T_m - T_n)x\| \leqslant \|T_m - T_n\| \, \|x\| \quad \text{para} \quad x \in E.$$

Luego, cada sucesión de vectores $\{T_n x\}$ es de Cauchy en F. Sea $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ en F. Es fácil comprobar que la aplicación $x \mapsto Tx : E \to F$ es lineal. Además,

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \, \|x\|.$$

La desigualdad triangular $\big|\|T_m\| - \|T_n\|\big| \leqslant \|T_m - T_n\|$ muestra que la sucesión numérica $\{\|T_n\|\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$; y como tal está acotada, así que $\sup_n \|T_n\| < \infty$. Por el Corolario 2.3, la aplicación lineal T es continua, con $\|T\| \leqslant \sup_n \|T_n\|$.

Dado $\varepsilon > 0$, hay $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > N(\varepsilon) \implies \|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Entonces

$$\begin{aligned} n > N(\varepsilon) \implies \|T_n - T\| &= \sup\{\, \|T_n x - Tx\| : \|x\| \leqslant 1 \,\} \\ &\leqslant \sup\{\, \|T_n x - T_m x\| : \|x\| \leqslant 1,\ m > N(\varepsilon) \,\} \\ &\leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\, \varepsilon \|x\| : \|x\| \leqslant 1 \,\} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Se concluye que $T_n \to T$ en el espacio normado $\mathcal{L}(E,F)$. □

Corolario 2.6. *Si E es un espacio normado, entonces E^* es un espacio de Banach.* ⊟

2.2 El teorema de extensión de Hahn y Banach

Si M es un subespacio de un espacio vectorial E y si $T\colon M \to F$ es una aplicación lineal, se puede extender T a una aplicación lineal $\widetilde{T}\colon E \to F$ de muchas maneras; es cuestión de rellenar una base vectorial de M para obtener una base de E y de asignar las imágenes bajo $\widetilde{T}$ de los nuevos vectores básicas de modo arbitrario. Sin embargo, cuando $T\colon M \to F$ es una aplicación lineal *continua*, no es evidente cómo elegir esos vectores en F para garantizar la continuidad de la aplicación lineal extendida. Un teorema de Hahn y Banach (anticipado por Helly) muestra que una extensión lineal continua siempre existe.[3]

Si E es un espacio vectorial *real*, una aplicación $p\colon E \to \mathbb{R}$ es una **función convexa** si

$$p((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)\,p(x) + t\,p(y) \quad \text{cuando} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{2.2}$$

[3]El teorema fue demostrado independientemente, en el caso real, en: Hans Hahn, "Über linearer Gleichungssysteme in linearer Räumen", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **157** (1927), 214–229; y en: Stefan Banach, "Sur les fonctionelles linéaires", *Studia Mathematica* **1** (1929), 211–216 & 223–239. El caso de $E = C([a,b];\mathbb{R})$ y el Lema 2.x aparecen en: Eduard Helly, "Über linearer Funktionaloperationen", *Wiener Sitzungsberichte* **121** (1912), 265–297.

Una *seminorma* es evidentemente convexa. La condición (2.2) dice que el “hipergrafo” $\{ (x, s) \in E \oplus \mathbb{R} : s \geqslant p(x) \}$ es un conjunto convexo en el espacio $\mathbb{R}$-vectorial $E \oplus \mathbb{R}$.

Lema 2.7 (Helly)**.** *Sea E un espacio $\mathbb{R}$-vectorial y $F \leqslant E$ un subespacio real. Sea $p\colon E \to \mathbb{R}$ una función convexa y $h\colon F \to \mathbb{R}$ una forma* lineal*, tales que $h(y) \leqslant p(y)$ para todo $y \in F$. Entonces, si $y_1, y_2 \in F$; $x \in E \setminus F$; y $a, b > 0$, la desigualdad siguiente es válida:*

$$\frac{h(y_1) - p(y_1 - bx)}{b} \leqslant \frac{p(y_2 + ax) - h(y_2)}{a}\,. \tag{2.3}$$

Demostración. Tómese $t := b/(a + b)$, de modo que $(1 - t)b = ta$. Entonces

$$\begin{aligned} h((1-t)y_1 + ty_2) &\leqslant p((1-t)y_1 + ty_2) = p((1-t)(y_1 - bx) + t(y_2 + ax)) \\ &\leqslant (1-t)\,p(y_1 - bx) + t\,p(y_2 + ax) \end{aligned}$$

por la hipótesis $h(y) \leqslant p(y)$ y la convexidad de p. Al multiplicar ambos lados por $(a + b)$ y usar la linealidad de h, se obtiene

$$a\,h(y_1) + b\,h(y_2) \leqslant a\,p(y_1 - bx) + b\,p(y_2 + ax),$$

esto es,

$$a\big(h(y_1) - p(y_1 - bx)\big) \leqslant b\big(p(y_2 + ax) - h(y_2)\big). \qquad \square$$

Teorema 2.8 (Hahn y Banach, caso real)**.** *Sea E un espacio $\mathbb{R}$-vectorial y sea $F \leqslant E$ un subespacio real. Si $p\colon E \to \mathbb{R}$ es una función convexa y si $h\colon F \to \mathbb{R}$ es una forma $\mathbb{R}$-lineal, tales que*

$$h(y) \leqslant p(y) \quad \text{para todo} \quad y \in F,$$

entonces existe una forma $\mathbb{R}$-lineal $\tilde{h}\colon E \to \mathbb{R}$ que extiende *h (esto es, $\tilde{h}|_F = h$) y también cumple*

$$\tilde{h}(x) \leqslant p(x) \quad \text{para todo} \quad x \in E.$$

Demostración. Para extender h a todo E, se procede en dos fases. Primero, se usa el lema anterior par obtener la extensión a un subespacio intermedio G tal que $\dim_{\mathbb{R}}(G/F) = 1$. Si $\dim_{\mathbb{R}}(E/F)$ es finito, lo que sigue es una inducción sencilla; pero si esta codimensión es infinita, habrá que hacer una *inducción transfinita*, empleando el Lema de Zorn.

Tómese $x \in E \setminus F$ arbitrario pero fijo, y considérese el subespacio

$$G := F + \mathbb{R}x = \{ y + cx : y \in F,\ c \in \mathbb{R} \}.$$

Para obtener una extensión $\hat{h}$ de h a G tal que $\hat{h}(z) \leqslant p(z)$ para todo $z \in G$, basta encontrar $s := \hat{h}(x) \in \mathbb{R}$. Los elementos de $G \setminus F$ son de la forma $y_2 + ax$ con $y_2 \in F$, $a > 0$; o bien $y_1 - bx$ con $y_1 \in F$, $b > 0$. Entonces la forma lineal $\hat{h}\colon G \to \mathbb{R}$ debe cumplir

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{h}(y_2 + ax) = h(y_2) + as \leqslant p(y_2 + ax), \\ \hat{h}(y_1 - bx) = h(y_1) - bs \leqslant p(y_1 - bx), \end{aligned} \right\} \quad \text{para todo} \quad y_1, y_2 \in F;\ a, b > 0.$$

Dicho de otro modo: el número $s \in \mathbb{R}$ debe satisfacer las desigualdades:

$$\sup_{y_1 \in F,\ b>0} \frac{h(y_1) - p(y_1 - bx)}{b} \leqslant s \leqslant \inf_{y_2 \in F,\ a>0} \frac{p(y_2 + ax) - h(y_2)}{a}.$$

Al comparar esto con la estimación (2.3), el Lema 2.7 muestra que esta desigualdad tiene al menos una solución s (y posiblemente un intervalo cerrado de soluciones). El teorema queda demostrado si $F + \mathbb{R}x = E$.

En el caso general, sea $\mathcal{S}$ el conjunto de pares $(G, \hat{h})$ donde $F \leqslant G \leqslant E$ y $\hat{h} \colon G \to \mathbb{R}$ es una forma lineal con $\hat{h}|_F = h$ y $\hat{h}(z) \leqslant p(z)$ para $z \in G$. Nótese que $(F, h) \in \mathcal{S}$ así que $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

Se define un orden parcial en $\mathcal{S}$ por $(G_1, \hat{h}_1) \lhd (G_2, \hat{h}_2)$ si $G_1 \leqslant G_2$ y $\hat{h}_2|_{G_1} = h_1$. Si $\{(G_\alpha, \hat{h}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ es una *cadena* en $\mathcal{S}$, sea $G := \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, el cual es un subespacio de E porque los espacios G_α de la cadena están encajados. Defínase $\hat{h} \colon G \to \mathbb{R}$ por $\hat{h}(x) := \hat{h}_\alpha(x)$ toda vez que $x \in G_\alpha$. Entonces $(G, \hat{h})$ es una cota superior para la cadena.

El Lema de Zorn[4] muestra que $\mathcal{S}$ posee un elemento maximal $(\widetilde{G}, \tilde{h})$. Si fuera $\widetilde{G} \neq E$, habría un vector $x \in E \setminus \widetilde{G}$, y la construcción anterior extendería $\tilde{h}$ a $\widetilde{G} + \mathbb{R}x$, siempre dominada por p. Eso sería contrario a la maximalidad de $(\widetilde{G}, \tilde{h})$; por lo tanto, vale $\widetilde{G} = E$, y $\tilde{h}$ es la extensión buscada. □

El caso complejo del teorema de Hahn y Banach requiere una hipótesis levemente distinta de la del caso real. Si E es un espacio $\mathbb{C}$-vectorial, una *función convexa* $p \colon E \to \mathbb{R}$ se llama **simétrica** si cumple la siguiente condición:

$$p(\lambda x) = p(x) \quad \text{para todo} \quad x \in E \quad \text{y} \quad \lambda \in \mathbb{C} \text{ con } |\lambda| = 1.$$

Obsérvese que una *seminorma* es una función convexa simétrica.

Nótese también que una *forma* $\mathbb{C}$*-lineal* $f \colon E \to \mathbb{C}$ está determinada por su *parte real* $\Re f \colon E \to \mathbb{R}$, la cual es una forma $\mathbb{R}$-lineal que además verifica $f(x) = \Re f(x) - i\,\Re f(ix)$ para $x \in E$. ⟦ La $\mathbb{C}$-linealidad de f impone la relación $\Re f(ix) = \Re[i\,f(x)] = -\Im f(x)$. ⟧

Teorema 2.9 (Hahn y Banach, caso complejo)**.** *Sea E un espacio $\mathbb{C}$-vectorial y $F \leqslant E$ un subespacio complejo. Si $p \colon E \to \mathbb{R}$ es una función convexa simétrica y si $h \colon F \to \mathbb{C}$ una forma $\mathbb{C}$-lineal, tales que*

$$|h(y)| \leqslant p(y) \quad \textit{para todo} \quad y \in F,$$

entonces existe una forma $\mathbb{C}$-lineal $\tilde{h} \colon E \to \mathbb{C}$ que extiende h y también cumple

$$|\tilde{h}(x)| \leqslant p(x) \quad \textit{para todo} \quad x \in E.$$

[4] El *Lema de Zorn* de la teoría de conjuntos dice lo siguiente: si $\mathcal{S}$ es un conjunto parcialmente ordenado en el cual cada cadena (totalmente ordenada) posee una cota superior, entonces $\mathcal{S}$ posee un elemento maximal.

Demostración. Sea $g(y) := \Re h(y)$ para $y \in F$. Entonces $g\colon F \to \mathbb{R}$ es una forma $\mathbb{R}$-lineal. La $\mathbb{C}$-linealidad de h muestra que $\Im h(y) = \Re[-i\,h(y)] = \Re h(-iy) = g(-iy)$, y por lo tanto

$$h(y) = g(y) + i\,g(-iy) \quad \text{para} \quad y \in F.$$

Fíjese que $g(y) = \Re h(y) \leqslant |h(y)| \leqslant p(y)$ para $y \in F$. Entonces el Teorema 2.8 produce una extensión $\mathbb{R}$-lineal $\tilde{g}\colon E \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{g}|_F = g$ y $\tilde{g}(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in E$.

Además, vale $-\tilde{g}(x) = \tilde{g}(-x) \leqslant p(-x) = p(x)$ por la simetría de p. Luego

$$|\tilde{g}(x)| \leqslant p(x) \quad \text{para todo} \quad x \in E.$$

Defínase $\tilde{h}(x) := \tilde{g}(x) + i\,\tilde{g}(-ix)$ para $x \in E$. Entonces $\tilde{h}\colon E \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{R}$-lineal y cumple

$$\tilde{h}(ix) = \tilde{g}(ix) + i\,\tilde{g}(x) = -\tilde{g}(-ix) + i\,\tilde{g}(x) = i\,\tilde{h}(x),$$

lo cual muestra que $\tilde{h}$ es $\mathbb{C}$-lineal.

Si $x \in E$, tómese $\theta = \theta(x) \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{h}(x) = e^{i\theta}\,|\tilde{h}(x)|$. Entonces se verifica

$$|\tilde{h}(x)| = e^{-i\theta}\tilde{h}(x) = \tilde{h}(e^{-i\theta}x) = \tilde{g}(e^{-i\theta}x) \leqslant p(e^{-i\theta}x) = p(x).$$

⟦ La igualdad $\tilde{h}(e^{-i\theta}x) = \tilde{g}(e^{-i\theta}x)$ es válida porque $\tilde{h}(e^{-i\theta}x) = |\tilde{h}(x)|$ es real. ⟧ Se ha mostrado que $|\tilde{h}(x)| \leqslant p(x)$ para todo $x \in E$. □

Corolario 2.10. *Sea E es un espacio localmente convexo (complejo).*[5] *Si M es un subespacio de E, cada forma lineal continua $f \in M^*$ puede extenderse a una forma lineal continua $\tilde{f} \in E^*$.*

Demostración. La topología (relativa) de M, como subespacio de E, se define por las restricciones a M de las seminormas continuas sobre E. Si $f \in M^*$, la Proposición 2.2 dice que hay una seminorma continua p sobre E tal que $|f(m)| \leqslant p(m)$ para $m \in M$. El Teorema 2.9 muestra que f posee una extensión $\tilde{f}\colon E \to \mathbb{C}$, tal que $|f(x)| \leqslant p(x)$ para todo $x \in E$. La continuidad de $\tilde{f}$ también sigue de la Proposición 2.2. □

Corolario 2.11. *Sea E un espacio normado. Si $M \leqslant E$, cada forma lineal continua $f \in M^*$ se extiende a una forma lineal continua $\tilde{f} \in E^*$ tal que $\underline{\|\tilde{f}\| = \|f\|}$.*

Demostración. La norma de f en M^* está dada por la fórmula (2.1b):

$$\|f\| = \sup\{\, |f(y)| : y \in M,\ \|y\| \leqslant 1 \,\}.$$

Tómese $p(x) := \|f\|\,\|x\|$ para $x \in E$. Esta es una seminorma sobre E (una norma, de hecho, si $f \neq 0$ en M^*).

Entonces hay una extensión $\tilde{f}\colon E \to \mathbb{C}$ de f tal que $|\tilde{f}(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\|$ para todo $x \in E$. Esto dice que $f \in E^*$, con $\|\tilde{f}\| \leqslant \|f\|$.

La desigualdad contraria sigue de $\|\tilde{f}\| \geqslant \sup\{\, |\tilde{f}(y)| : y \in M, \|y\| \leqslant 1 \,\} = \|f\|$. □

[5] Desde luego, el resultado análogo en el caso real es también válido, con una prueba similar.

Hay dos consecuencias notables del teorema de Hahn y Banach, obtenidas al extender ciertos formas lineales desde subespacios unidimensionales. El primero dice que E^* *separa puntos* de E (y por lo tanto hay una abundancia de formas lineales continuas), si E es localmente convexo. El segundo resultado es la base de una *dualidad* entre E y E^*, en el caso de espacios normados.

Proposición 2.12. *Si E es un espacio localmente convexo, el espacio dual E^* es una colección de funciones continuas que separa puntos de E: es decir, si $x \neq y$ en E, existe $f \in E^*$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

Demostración. Si $x, y \in E$ con $x \neq y$, sea $M := \mathbb{C}(x - y)$, un subespacio con $\dim M = 1$. Defínase una forma lineal sobre M, obviamente continua, por $f_{x,y}(\lambda(x - y)) := \lambda$. Por el Corolario 2.10, hay $\tilde{f}_{x,y} \in E^*$ con $\tilde{f}_{x,y}(x - y) = f_{x,y}(x - y) = 1$, así que $\tilde{f}_{x,y}(x) \neq \tilde{f}_{x,y}(y)$. □

Proposición 2.13. *Si E es un espacio normado, entonces la norma de cualquier vector $x \in E$ está dada por*

$$\|x\| = \sup\{\, |f(x)| : f \in E^*,\ \|f\| \leqslant 1 \,\}. \tag{2.4}$$

Demostración. Tómese $x \in E$ con $x \neq 0$. (En el caso $x = 0$, los dos lados de la ecuación (2.4) valen 0.) Si $f \in E^*$ cumple $\|f\| \leqslant 1$, la desigualdad (2.1c) proporciona la estimación $|f(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\| \leqslant \|x\|$.

Por otro lado, la aplicación lineal $h_x \colon \mathbb{C}x \to \mathbb{C} : \alpha x \mapsto \alpha\|x\|$ es continua: su homogeneidad $|h_x(\alpha x)| = |\alpha\, h_x(x)| = |\alpha|\,\|x\| = \|\alpha x\|$ dice que $\|h_x\| = 1$. Del Corolario 2.11, h_x se extiende a $\tilde{h}_x \in E^*$ con $\|\tilde{h}_x\| = 1$. Entonces

$$\sup\{\, |f(x)| : f \in E^*,\ \|f\| \leqslant 1 \,\} \geqslant |\tilde{h}_x(x)| = |h_x(x)| = \|x\|. \qquad \square$$

Las propiedades de la forma lineal continua $\tilde{h}_x$ en la demostración anterior pueden resumirse en el corolario siguiente.

Corolario 2.14. *Sea E es un espacio normado, $x \in E$. Entonces existe $g \in E^*$ tal que $g(x) = \|x\|$ y $\|g\| = 1$. En particular, si $x \neq 0$, hay un elemento $g \in E^*$ tal que $g(x) \neq 0$.* ⊟

Notación. Sea E un espacio localmente convexo. Vale la pena introducir la notación[6]

$$\underline{\langle f, x\rangle} \equiv f(x) \quad \text{toda vez que} \quad x \in E,\ f \in E^*.$$

Este apareamiento es una forma *bilineal* $\langle -, - \rangle : E^* \times E \to \mathbb{C}$. Cuando E es un espacio normado, las fórmulas (2.1b) para $T = f$ y (2.4) se escriben como sigue:

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup\{\, |\langle f, x\rangle| : x \in E,\ \|x\| \leqslant 1 \,\} && \text{si } f \in E^*, \\ \|x\| &= \sup\{\, |\langle f, x\rangle| : f \in E^*,\ \|f\| \leqslant 1 \,\} && \text{si } x \in E. \end{aligned}$$

[6]Esta notación debe distinguirse del producto escalar $\langle y \mid x\rangle$ de dos vectores en un espacio de Hilbert. La barra vertical señala una forma *sesquilineal*, la coma indica una forma *bilineal*.

En vista de estas fórmulas (el primero es una definición, el segundo es un corolario al teorema de Hahn y Banach), el apareamiento $\langle -, - \rangle$ se llama la **dualidad** entre E y E^*.

Corolario 2.15. *Sea E un espacio normado, M un subespacio cerrado de E. Si $z \in E \setminus M$, entonces hay una forma lineal continua $h \in E^*$ tal que $h(y) = 0$ para $y \in M$ pero $h(z) \neq 0$.*

Demostración. Sea $d := \inf\{\, \|z - y\| : y \in M \,\}$ la distancia de z al subespacio M (para la métrica de la norma de E). Fíjese que $d > 0$ porque M es cerrado pero $z \notin M$.

La forma lineal $f : M + \mathbb{C}z \to \mathbb{C}$ dada por $f(y + \lambda z) := \lambda d$ obedece

$$|f(y + \lambda z)| = |\lambda d| = |\lambda|\, d \leqslant \|y + \lambda z\| \quad \text{para todo} \quad y \in M,$$

así que f es continua con $\|f\| \leqslant 1$. Por el Corolario 2.11, f se extiende a $h \in E^*$ tal que $\|h\| = \|f\| \leqslant 1$. En particular, $h(z) = f(z) = d > 0$ mientras $h(y) = f(y) = 0$ para $y \in M$. □

2.3 El teorema de Banach y Steinhaus

Los espacios de Banach y Fréchet son espacios métricos completos. Esta completitud juega un papel importante en la estructura de sus aplicaciones lineales continuas, debido al teorema de Baire, que dice que *un espacio métrico completo no es magro* (es decir, no es "de primera categoría" en la clasificación de Baire).[7]

Definición 2.16. Si X es un espacio topológico, una parte $A \subseteq X$ es un conjunto **nunca denso** en X si su clausura tiene interior vacío: $(\overline{A})^\circ = \emptyset$. Una parte $B \subseteq X$ es un conjunto **magro** en X si es una unión numerable $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ de conjuntos nunca densos.[8] ◊

Proposición 2.17 (Baire)**.** *Si un espacio métrico completo no vacío (X, ρ) es una unión numerable de cerrados, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$, entonces al menos uno los C_n tiene interior no vacío.*

Demostración. Supóngase, por el contrario, que cada C_n tiene interior vacío (luego, cada cerrado C_n es nunca denso y X es magro). Se construirá una sucesión de Cauchy cuyo punto límite no pertenece a C_n alguna.

[7] El artículo original es: René-Louis Baire, "Sur les fonctions de variables réeles", *Annali di Matematica* **3** (1899), 1–123. En este trabajo (su tesis doctoral), Baire clasificó las partes de la recta real $\mathbb{R}$ es dos "categorías": en la primera, las uniones numerables de conjuntos nunca densos; en la segunda, todas las demás. Mostró que $\mathbb{R}^n$ es de la segunda categoría. En 1914, Felix Hausdorff observó que los argumentos de Baire son válidos en cualquier espacio métrico completo.

[8] La escuela de Bourbaki propuso el término *magro* para denotar un conjunto de la "primera categoría" en el lenguaje de Baire. El nombre sugiere que tales conjuntos serían diminutos, en un sentido topológico. Otra noción de conjunto pequeño en $\mathbb{R}$ es la del conjunto *nulo*, cuya medida de Lebesgue es 0. Sin embargo, es posible expresar la recta real como unión disjunta de dos conjuntos, $\mathbb{R} = A \uplus B$, donde A es magro y B es nulo. Véase el primer capítulo del libro: John C. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer, Berlin, 1971. (Véase también el Ejemplo 5.4.4 del tratado de Simon.)

En primer lugar $(C_0)^\circ \neq \emptyset$ implica $C_0 \neq X$; tómese $x_0 \notin C_0$. Entonces hay una bola abierta $B_0 := B_\rho(x_0; r_0) := \{\, x \in X : \rho(x, x_0) < r_0 \,\}$ de radio $r_0 < \frac{1}{2}$ tal que $B_0 \cap C_0 = \emptyset$.

Como C_1 tiene interior vacío, hay un punto $x_1 \in B_0 \setminus C_1$. Luego, hay una bola abierta $B_1 := B_\rho(x_1; r_1)$ de radio $r_1 < \frac{1}{4}$ con $\overline{B}_1 \subset B_0$ y $B_1 \cap C_1 = \emptyset$.

Por inducción, se construye una sucesión (x_n) y un juego de bolas abiertas $B_n := B(x_n; r_n)$ de radios $r_n < 2^{-n-1}$ tales que $\overline{B}_n \subset B_{n-1}$ y $B_n \cap C_n = \emptyset$. La sucesión (x_n) es de Cauchy en X, porque

$$k, m \geqslant n \implies x_k, x_m \in B_n \implies \rho(x_k, x_m) < 2r_n < 2^{-n}.$$

Como (X, ρ) es completo, esta sucesión posee un límite $x := \lim_{n\to\infty} x_n \in X$. Para $n \geqslant 1$, se ve que $x_m \in B_n$ para $m \geqslant n$, así que $x \in \overline{B}_n \subset B_{n-1}$ y por ende $x \notin C_{n-1}$. Pero esto contradice la hipótesis de que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. □

Corolario 2.18. *Si (X, ρ) es un espacio métrico completo y si $\{\, U_n : n \in \mathbb{N} \,\}$ es una familia numerable de abiertos densos en X, su intersección $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es denso en X.*

Demostración. Sea $C_n := X \setminus U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces C_n es cerrado en X con interior vacío – porque si fuera $(C_n)^\circ \neq \emptyset$, sería $(C_n)^\circ \cap U_n \neq \emptyset$ (absurdo) por ser U_n denso en X.

Cada bola cerrada de radio positivo $\overline{B} = \overline{B}_\rho(x; r) \equiv \{\, y \in X : \rho(y, x) \leqslant r \,\}$ es también un espacio métrico completo (con la métrica $\rho|_{\overline{B}}$). Si $A_n = \overline{B} \cap C_n$, entonces A_n es cerrado con interior vacío en $\overline{B}$. Por la Proposición 2.17, hay un punto $y \in \overline{B} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Luego $y \in \overline{B}$ pero $y \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$, así que $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Se concluye que cada bola cerrada $\overline{B}$ tiene un punto en esta intersección, así que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es denso en X.[9] □

La primera aplicación de este teorema topológico es un teorema de Banach y Steinhaus que se conoce como el **principio de acotación uniforme**.[10]

Teorema 2.19 (Banach y Steinhaus)**.** *Sea $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(E, F)$ una familia de aplicaciones lineales continuas de un espacio de Banach E en un espacio normado F. Si para cada $x \in E$, hay un número $M_x > 0$ tal que $\|Tx\| \leqslant M_x$ para todo $T \in \mathcal{T}$, entonces hay $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$ para todo $T \in \mathcal{T}$, $x \in E$ – esto es, $\|T\| \leqslant M$ para todo $T \in \mathcal{T}$.*

Demostración. Defínase $C_n := \{\, x \in E : \|Tx\| \leqslant n$ para todo $T \in \mathcal{T} \,\}$. Entonces $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ por hipótesis. Cada $C_n = \bigcap_{T\in\mathcal{T}} T^{-1}\big(\overline{B}(0; n)\big)$ es cerrado de E. Luego, por la Proposición 2.17, hay algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $(C_m)^\circ \neq \emptyset$.

[9] Una intersección numerable de abiertos en un espacio topológico se llama un "conjunto G_δ". El Corolario 2.18 dice que una intersección numerable de *abiertos densos* en un espacio métrico completo es un *G_δ denso*.

[10] En 1922, Hahn mostró un caso particular de este teorema usando un argumento por inducción llamado "método de deslizar la joroba" para negar la existencia de un contraejemplo. La innovación de Banach y de Steinhaus (siguiendo una sugerencia de Stanisław Saks) fue el empleo del teorema de Baire. El artículo original es: Stefan Banach y Hugo Steinhaus, "Sur le principe de condensation des singularités", *Fundamenta Mathematica* **9** (1927), 50–61.

Por lo tanto, existen $x_0 \in C_m$ y $\delta > 0$ tales que $x \in C_m$ cuando $\|x - x_0\| < \delta$. Entonces, para todo $T \in \mathcal{T}$, se obtiene

$$\|y\| < \delta \implies \|Ty\| \leqslant \|T(y + x_0)\| + \|T(-x_0)\| \leqslant m + \|Tx_0\| \leqslant m + M_{x_0}\,.$$

Colóquese $M := (m + M_{x_0})/\delta$, una constante independiente de $T \in \mathcal{T}$. Por la linealidad de T, se concluye que $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$ para todo $x \in E$. □

En el teorema anterior, la completitud del dominio E es esencial para poder invocar el teorema de Baire; pero no es indispensable que E sea un espacio normado. Si E y F son espacios localmente convexos, una familia de operadores $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(E, F)$ se llama **equicontinua** si, para cada vecindario del origen $V \subset F$, hay un vecindario del origen $U \subset E$ tal que $T(U) \subseteq V$ para todo $T \in \mathcal{T}$. Una versión más general del Teorema 2.19 es la siguiente.

Escolio 2.20. *Sea $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(E, F)$ una familia de aplicaciones lineales continuas de un espacio de Fréchet E en un espacio localmente convexo F. Si para cada $x \in E$, el conjunto $\{\,Tx : T \in \mathcal{T}\,\}$ es una parte acotada de F, entonces $\mathcal{T}$ es equicontinua en $\mathcal{L}(E, F)$.* ⊟

► El resultado siguiente indica el alcance del principio de acotación uniforme.

Proposición 2.21. *Si E es un espacio de Banach y si F es un espacio normado, y si $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una* sucesión *en $\mathcal{L}(E, F)$ tal que el **límite puntual** $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ existe para todo $x \in E$, entonces* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$. *Además, la aplicación lineal T es continua, así que $T \in \mathcal{L}(E, F)$.*

Demostración. Para cada $x \in E$, la sucesión convergente $\{T_n x\} \subset F$ es acotada: hay constantes $M_x > 0$ tales que $\|T_n x\| \leqslant M_x$ para $n \in \mathbb{N}$. Al aplicar el Teorema 2.19 a la familia de aplicaciones lineales $\{\,T_n : n \in \mathbb{N}\,\}$, se obtiene una constante $M > 0$ tal que $\|T_n\| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Está claro que T es lineal, como límite puntual de aplicaciones lineales. Entonces vale $\|Tx\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| \leqslant M\|x\|$ para cada $x \in E$. La Proposición 2.2 ahora muestra que T es continua, con $\|T\| \leqslant M$. □

► Otra aplicación del principio de acotación uniforme concierne la continuidad de aplicaciones bilineales. Si E, F, G son tres espacios localmente convexos, una *aplicación bilineal* $B\colon E \times F \to G$ es **separadamente continua** si todas las aplicaciones lineales $E \to G : x \mapsto B(x, y)$ son continuas para cada $y \in F$; y todas las aplicaciones lineales $F \to G : y \mapsto B(x, y)$ son continuas para cada $x \in E$.

Ahora bien, $E \times F$ con la topología del producto (cartesiano) es un espacio localmente convexo; si las topologías de E y F están determinadas por las respectivas familias de seminormas $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ y $\{q_\beta\}_{\beta\in B}$, entonces las seminormas $(x, y) \mapsto p_\alpha(x) + q_\beta(y)$ determinan la topología del producto.[11] Si la aplicación bilineal $B\colon E \times F \to G$ es continua cuando $E \times F$ tiene la topología del producto, se dice que B es **conjuntamente continua**.

Escolio 2.22. *Si E, F y G son tres espacios normados, una aplicación bilineal $B\colon E \times F \to G$ es conjuntamente continua en cada $(x, y) \in E \times F$ si y solo si es conjuntamente continua en $(0, 0)$; si y solo si hay una constante $M \geqslant 0$ tal que*

$$\|B(x, y)\| \leqslant M\,\|x\|\,\|y\| \quad \textit{para todo} \quad x \in E,\ y \in F. \qquad \boxminus$$

Proposición 2.23. *Si E y F son espacios de Banach y si $B\colon E \times F \to \mathbb{C}$ es una forma bilineal separadamente continua, entonces B es conjuntamente continua.*

Demostración. La continuidad separada de B significa que $x \mapsto B(x, y)$ queda en E^* para todo $y \in F$ y que $y \mapsto B(x, y)$ queda en F^* para todo $x \in E$. La continuidad conjunta afirma que $x_n \to x$, $y_n \to y$ implican $B(x_n, y_n) \to B(x, y)$.

Tómese dos sucesiones $\{x_n\} \subset E$, $\{y_n\} \subset F$, tales que $x_n \to 0$, $y_n \to 0$. Defínase $T_n \in F^*$ por $T_n(y) := B(x_n, y)$. Para cada $y \in F$ fijo, $x_n \to 0$ en E implica $B(x_n, y) \to 0$. Por lo tanto, hay constantes $M_y > 0$ tales que $|T_n y| \leqslant M_y$ para $n \in \mathbb{N}$, $y \in F$. El Teorema 2.19 muestra que hay $M > 0$ tal que $|T_n y| \leqslant M\|y\|$ para todo $y \in F$. En consecuencia, $|B(x_n, y_n)| \leqslant M\|y_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Se concluye que B es conjuntamente continua en $(0, 0)$. □

2.4 El teorema de la aplicación abierta

Otra consecuencia de la completitud de los espacios de Banach y Fréchet es un teorema sorprendente, debido a Banach,[12] que muestra que una aplicación lineal continua *sobreyectiva* entre dos espacios de Banach (o, más generalmente, de Fréchet) es una *aplicación abierta*. En este caso, tanto el codominio como el dominio deben ser completos.

Teorema 2.24. *Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ es una aplicación lineal continua* sobreyectiva *entre dos espacios de Banach E y F, la imagen $T(U)$ de cualquier abierto $U \subseteq E$ es un abierto en F.*

Demostración. Se debe recordar que una parte de un espacio topológico es abierta si y solo si es un vecindario de cada uno de sus puntos. Entonces, si U es un vecindario de $x \in E$, hay

[11] Para espacios normados E y F, se puede tomar $\|(x, y)\| := \|x\| + \|y\|$. Para espacios prehilbertianos, una mejor opción es $\|(x, y)\|^2 := \|x\|^2 + \|y\|^2$.

[12] Este es el Teorema III.3 del libro: Stefan Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, Monografie Matematyczne, Fundusza Kultury Narodowe, Warszawa, 1931. Es notable que la versión original del teorema antecede la definición de espacio normado (en su capítulo IV): si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, la hipótesis es que E es un espacio de Fréchet y la conclusión es que $T(E)$ es magro en F o bien $T(E) = F$; si $T(E)$ no es magro, la demostración establece que T es una aplicación abierta. En lugar de una norma, Banach usó la cantidad $|x| := d(0, x)$ donde d es la métrica que define la topología de E. Para una exposición más moderna del teorema para espacios de Fréchet, véase el Teorema 2.11 del libro de Rudin.

que comprobar que $T(U)$ es un vecindario de $Tx \in F$. Como τ_x y τ_{Tx} son homeomorfismos de E y F respectivamente, basta considerar el caso de $x = 0$.

Sea $B_r \equiv B(0; r) := \{ x \in E : \|x\| < r \}$ la bola abierta en E centrado en 0 y de radio r. Ahora, $U \supseteq B_r$ para algún $r > 0$; como $T(B_r) = r\, T(B_1)$ por la linealidad de T, basta tomar $U = B_r$ y luego mostrar que $T(B_r)$ es un vecindario de 0 en F; es decir, que hay una bola abierta $B'_s := \{ y \in F : \|y\| < s \}$ en F con $s > 0$ tal que $T(B_r) \supseteq B'_s$.

La sobreyectividad de T implica que

$$F = T(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_n)}.$$

Como F es un espacio de Banach, la Proposición 2.17 dice que $\big(\overline{T(B_m)}\big)^\circ \neq \emptyset$ para algún $m \geqslant 1$. Entonces $\big(\overline{T(B_{r/4})}\big)^\circ = (r/4m)\big(\overline{T(B_m)}\big)^\circ \neq \emptyset$. Hay un punto $z \in F$ y un radio $s > 0$ tales que $\{ w \in F : \|w - z\| < \frac{1}{2}s \} \subseteq \overline{T(B_{r/4})}$. Ahora si $v \in F$ con $\|v\| < s$, entonces

$$v = (z + \tfrac{1}{2}v) - (z - \tfrac{1}{2}v) \in \overline{T(B_{r/4})} + \overline{T(B_{r/4})} \subseteq \overline{T(B_{r/2})}.$$

En consecuencia, hay $s > 0$ tal que $B'_s \subseteq \overline{T(B_{r/2})}$.

Si $y \in \overline{T(B_{r/2})}$, elíjase $x_1 \in B_{r/2}$ tal que $\|y - Tx_1\| < s/2$. Entonces $y - Tx_1 \in \overline{T(B_{r/4})}$. Elíjase $x_2 \in B_{r/4}$ tal que $\|(y - Tx_1) - Tx_2\| < s/4$; y así sucesivamente. Por inducción, es posible elegir $x_n \in B_{r/2^n}$ tal que

$$\left\| y - \sum_{j=1}^{n-1} Tx_j - Tx_n \right\| < \frac{s}{2^n}\,.$$

Los elementos $u_n := \sum_{j=1}^{n} x_j$ forma una sucesión de Cauchy en E, porque

$$m > n \implies \|u_m - u_n\| \leqslant \sum_{j=n+1}^{m} \|x_j\| < \frac{r}{2^n}\,.$$

Como E es completo, esta sucesión tiene un límite $x := \lim_{n\to\infty} u_n \equiv \sum_{j=1}^{\infty} x_j$ en E. Además,

$$\|y - Tx\| = \lim_{n\to\infty} \left\| y - \sum_{j=1}^{n} Tx_j \right\| \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{s}{2^n} = 0,$$

así que $y = Tx$. Nótese que

$$\|x\| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r}{2^j} = r,$$

de manera que $x \in B_r$. Entonces $\overline{T(B_{r/2})} \subset T(B_r)$ y por lo tanto $T(B_r) \supseteq B'_s$, como se quiso demostrar. □

Corolario 2.25. *Una biyección lineal y continua entre dos espacios de Banach es un homeomorfismo.*

Demostración. El inverso de una aplicación abierta biyectiva es continuo. □

Corolario 2.26. *Si E y F son espacios de Banach y si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ es biyectivo, hay dos constantes $m > 0$, $M > 0$ tales que $m \|x\|_E \leqslant \|T(x)\|_F \leqslant M \|x\|_E$ para todo $x \in E$.*

Demostración. Tómese $M := \|T\|$ y $m := 1/\|T^{-1}\|$. □

Escolio 2.27. *Sea E un espacio vectorial real o complejo que posee dos normas $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ para las cuales E es un espacio de Banach. Si hay una constante $M > 0$ tal que $|||x||| \leqslant M \|x\|$ para todo $x \in E$, también hay una constante $m > 0$ tal que $\|x\| \leqslant m\, |||x|||$ para todo $x \in E$.* ⊟

► Una consecuencia muy importante del teorema de la aplicación abierta es la posibilidad de determinar la continuidad de una aplicación lineal entre dos espacios de Banach en términos de su *grafo*.

Definición 2.28. Si E y F son dos espacios normados, su **suma directa** $\underline{E \oplus F}$ es el espacio vectorial $E \times F$ (producto cartesiano) dotado con la norma

$$\|(x, y)\| := \|x\|_E + \|y\|_F \quad \text{para} \quad x \in E,\ y \in F. \tag{2.5}$$

Fíjese que las proyecciones $E \oplus F \to E : (x, y) \mapsto x$, y $E \oplus F \to F : (x, y) \mapsto y$, son lineales y continuas, de norma 1.

Una sucesión $\{(x_n, y_n)\}$ en $E \oplus F$ es de Cauchy si y solo si $\{x_n\}$ es de Cauchy en E y $\{y_n\}$ es de Cauchy en F. $E \oplus F$ es un espacio de Banach si y solo si E y F son espacios de Banach. ◊

Definición 2.29. Sea $T : E \to F$ una aplicación lineal entre dos espacios $\mathbb{C}$-vectoriales. El **grafo** de T es el subespacio vectorial del producto cartesiano,

$$\underline{\mathcal{G}(T)} := \{\, (x, y) \in E \times F : y = Tx \,\} = \{\, (x, Tx) \in E \times F : x \in E \,\}.$$

Si E y F son espacios normados, $\mathcal{G}(T)$ es un subespacio de $E \oplus F$ con la **norma del grafo**:

$$\|(x, Tx)\| := \|x\|_E + \|Tx\|_F \tag{2.6}$$

la cual es simplemente la restricción a $\mathcal{G}(T)$ de la norma en $E \oplus F$. ◊

Teorema 2.30 (Teorema del grafo cerrado)**.** *Sea $T : E \to F$ una aplicación lineal entre dos espacios de Banach E y F. Entonces T es continua si y solo si $\mathcal{G}(T)$ es cerrado en $E \oplus F$.*

Demostración. Si T es *continua*, entonces $\|x_n - x\|_E \to 0$ implica $\|Tx_n - Tx\|_F \to 0$ y en consecuencia $(x_n, Tx_n) - (x, Tx) \to (0, 0)$ en $E \oplus F$. Por lo tanto, el grafo $\mathcal{G}(T)$ es cerrado.

Por otro lado, si $\mathcal{G}(T)$ es un subespacio *cerrado* del espacio de Banach $E \oplus F$, entonces $\mathcal{G}(T)$, con la norma del grafo, es también de Banach. Está claro que la proyección $(x, Tx) \mapsto x$ es una biyección lineal y continua de $\mathcal{G}(T)$ en E. Por el Corolario 2.25, la aplicación inversa $x \mapsto (x, Tx)$ es también continuo. Luego T, la cual es la composición de este inverso con la otra proyección $(x, Tx) \mapsto Tx : \mathcal{G}(T) \to F$, es también continua. □

En la práctica, para averiguar si $\mathcal{G}(T)$ está cerrado, se ejecuta el procedimiento siguiente: *dada una sucesión* $\{x_n\} \subset E$ *tal que* $x_n \to x$ *en* E *&* $Tx_n \to y$ *en* F*, se debe determinar si* $y = Tx$. Nótese que una prueba directa de la continuidad de T exigiría mostrar (a) que $x_n \to x$ implica que la sucesión $\{Tx_n\}$ es convergente; y además, (b) que su límite coincide con Tx. La ventaja del teorema del grafo cerrado es que la convergencia de $\{Tx_n\}$ en F puede tomarse como hipótesis.

► Un corolario sencillo pero importante del teorema del grafo cerrado es el siguiente.

Lema 2.31 (Hellinger y Toeplitz)**.** *Si* $T : H \to H$ *es una aplicación lineal de un espacio de Hilbert* H *en sí mismo tal que* $\langle y \mid Tx\rangle = \langle Ty \mid x\rangle$ *para todo* $x, y \in H$*, entonces* T *es continua.*

Demostración. Basta mostrar que $\mathcal{G}(T)$ es cerrado en $H \oplus H$.[13] Tómese una sucesión $\{x_n\}$ en H tal que $x_n \to x$ y $Tx_n \to y$ en H. Para cada $z \in H$, se verifica

$$\langle z \mid y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle z \mid Tx_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tz \mid x_n\rangle = \langle Tz \mid x\rangle = \langle z \mid Tx\rangle,$$

así que $(y - Tx) \in H^\perp = \{0\}$. Por lo tanto $y = Tx$, así que $(x, y) = (x, Tx) \in \mathcal{G}(T)$. Esto muestra que $\mathcal{G}(T)$ es cerrado; y por el Teorema 2.30, T es continua. □

Este lema posee implicaciones importantes para los fundamentos de la mecánica cuántica. Un *observable* de un sistema cuántico es un operador T sobre un determinado espacio de Hilbert que cumple la condición $\langle y \mid Tx\rangle = \langle Ty \mid x\rangle$ en su dominio. El Lema de Hellinger y Toeplitz dice que este operador sería necesariamente acotado (por ser continuo), si su dominio fuera todo H. Sin embargo, muchas observables de la teoría cuántica son autoadjuntos pero no acotados! En consecuencia, los dominios de tales operadores son meramente subespacios densos de H. Un subespacio *propio* que es denso en H es un espacio prehilbertiano *incompleto*, de modo que el Teorema 2.30 no es directamente aplicable al caso.

[13]Nótese que la norma (2.5) sobre $H \oplus H$ no coincide con la norma de la Definición 1.42 para la cual $|||(x, y)|||^2 = |||x|||^2 + |||y|||^2$. Sin embargo, es inmediato del Escolio 2.27 que estas dos normas sobre $H \oplus H$ son equivalentes.

2.5 El teorema de Banach y Alaoglu

Si E es un espacio normado de dimensión finita, el teorema de Heine y Borel garantiza que *la bola unitaria cerrada* $\overline{B}_1(E) := \{\, x \in E : \|x\| \leqslant 1 \,\}$ es compacta. Pero si E es un espacio normado de dimensión infinita, sucede lo contrario: la bola unitaria cerrada $\overline{B}_1(E)$ *no es* compacta. Sin embargo, cuando E coincide con el espacio dual F^* de otro espacio normado F, resulta que hay una topología localmente convexa sobre E, más débil que la topología de la norma, en la cual $\overline{B}_1(E)$ sí es compacta.

Proposición 2.32. *Sea E un espacio $\mathbb{C}$-vectorial de dimensión finita n. Entonces todas las normas sobre E son equivalentes.*

Demostración. Elíjase una base $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ del espacio normado $(E, \|\cdot\|)$. Un vector en $\mathbb{C}^n$ se escribe como $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^n) = \alpha^1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha^n \boldsymbol{e}_n$, donde $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ denota base estándar de $\mathbb{C}^n$. Hay una aplicación lineal biyectiva $T\colon \mathbb{C}^n \to E$ determinada por $T(\boldsymbol{e}_j) := u_j$; concretamente, $T(\alpha) = \alpha^1 u_1 + \cdots + \alpha^n u_n$.

Tómese la norma de referencia $\|\alpha\|_1 := \sum_{j=1}^n |\alpha^j|$ sobre $\mathbb{C}^n$. Obsérvese que

$$\|T(\alpha)\| = \Bigl\| \sum_{j=1}^n \alpha^j u_j \Bigr\| \leqslant \sum_{j=1}^n \|\alpha^j u_j\| = \sum_{j=1}^n |\alpha^j|\, \|u_j\| \leqslant M\, \|\alpha\|_1$$

al tomar $M := \max\{\, \|u_1\|, \dots, \|u_n\| \,\}$. Luego la aplicación lineal $T\colon (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|)$ es continua.

La esfera unitaria $S := \{\, \alpha \in \mathbb{C}^n : \|\alpha\|_1 = 1 \,\}$ es acotada y cerrada en $\mathbb{C}^n$ y por lo tanto es compacta (por el teorema de Heine y Borel). Sea $m := \inf\{\, \|T(\alpha)\| : \|\alpha\|_1 = 1 \,\}$. Como la función $\alpha \mapsto \|T(\alpha)\|$ es continua[14] sobre S, alcanza su mínimo $m = \|T(\beta)\|$ en algún $\beta \in S$. Luego $m > 0$ porque $T(\beta) \neq 0$ ya que $\beta \neq 0$ en S.

Como T es lineal, la relación $\|T(\alpha)\| \geqslant m$ cuando $\|\alpha\|_1 = 1$ implica $\|T(\alpha)\| \geqslant m\, \|\alpha\|_1$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}^n$. En resumen:

$$m\, \|\alpha\|_1 \leqslant \|T(\alpha)\| \leqslant M\, \|\alpha\|_1 \quad \text{para} \quad \alpha \in \mathbb{C}^n.$$

Entonces $\|T^{-1}(x)\|_1 \leqslant m^{-1} \|x\|$ para $x \in E$ así que la aplicación lineal $T^{-1}\colon E \to \mathbb{C}^n$ es también continua.

Ahora bien, si $|||\cdot|||$ es otra norma sobre E, el mismo argumento muestra que hay constantes k, K con $0 < k \leqslant K$ tales que $k\, \|\alpha\|_1 \leqslant |||T(\alpha)||| \leqslant K\, \|\alpha\|_1$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}^n$. Luego

$$(k/M)\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant (K/m)\|x\| \quad \text{para} \quad x \in E,$$

así que las normas $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ son equivalentes. □

[14] La desigualdad triangular $\bigl| \|x_n\| - \|x\| \bigr| \leqslant \|x_n - x\|$ establece la continuidad de la norma $x \mapsto \|x\|$.

Nótese que un *subespacio n-dimensional* E de cualquier espacio normado F es automáticamente *completo*, porque $\mathbb{C}^n$ es completo y las sucesiones de Cauchy en E y en $\mathbb{C}^n$ corresponden bajo $T\colon \alpha \to x : \mathbb{C}^n \to E$, así:

$$m\,\|\alpha_j - \alpha_k\|_1 \leqslant \|x_j - x_k\| \leqslant M\,\|\alpha_j - \alpha_k\|_1$$

de modo que $\lim_k x_k := T(\lim_{k\to\infty} T^{-1}(x_k)) \in E$. En particular, E es cerrado en F.

► Como parte de la demostración anterior, cuando $\dim E = n < \infty$ se estableció que $\overline{B}_1(E)$ es homeomorfa a una parte acotada y cerrada de $\mathbb{C}^n$, y por ende es compacta.

En cambio, si H es un espacio de Hilbert infinitodimensional, con una base ortonormal $\{\, u_n : n \in \mathbb{N} \,\}$, entonces los u_n forman una sucesión en $\overline{B}_1(H)$ que no puede tener una subsucesión de Cauchy, porque $\|u_m - u_n\| = \sqrt{2}$ para $m \neq n$; *ipso facto*, no puede tener una subsucesión convergente.[15] Por lo tanto, la bola unitaria no es compacta (en la topología de la norma). Sucede lo mismo en espacios de Banach infinitodimensionales, en vista del siguiente resultado elemental.

Lema 2.33 (Riesz)**.** *Sea M un subespacio cerrado propio del espacio normado E. Para cada $\varepsilon \in (0,1)$, hay un vector $x_\varepsilon \in E$ tal que $\|x_\varepsilon\| = 1$ y $d(x_\varepsilon, M) \geqslant 1 - \varepsilon$.*

Demostración. Como $M \neq E$, existe $x \in E \setminus M$ tal que $d(x, M) \equiv \inf\{\, \|x - y\| : y \in M \,\} > 0$.

Elíjase $y_\varepsilon \in M$ con $\|x - y_\varepsilon\| = d(x, M)/(1-\varepsilon)$. Sea $x_\varepsilon := (x - y_\varepsilon)/\|x - y_\varepsilon\|$, de modo que $\|x_\varepsilon\| = 1$. Si $z \in M$, entonces $y_\varepsilon + \|x - y_\varepsilon\|\, z \in M$ también; por lo tanto, vale

$$\|x_\varepsilon - z\| = \frac{\big\|x - y_\varepsilon - \|x - y_\varepsilon\|\, z\big\|}{\|x - y_\varepsilon\|} \geqslant \frac{d(x, M)}{\|x - y_\varepsilon\|} = 1 - \varepsilon.$$

Como $z \in M$ es arbitrario, se concluye que $d(x_\varepsilon, M) \geqslant 1 - \varepsilon$. □

Este *lema geométrico de Riesz* reemplaza la propiedad del punto más cercano de los espacios de Hilbert (la Proposición 1.41 anterior). En un espacio de Banach general E (de dimensión infinita), no siempre es posible hallar un elemento x_0 de la esfera unitaria de E con $d(x_0, M) = 1$; mientras en un espacio de Hilbert, basta encontrar un elemento de norma 1 en el complemento ortogonal $M^\perp$. El Lema 2.33 ofrece, como sustituto parcial, un juego de elementos x_ε en la esfera unitaria que son casi ortogonales a M cuando $\varepsilon \downarrow 0$.

Corolario 2.34. *Si E es un espacio normado infinitodimensional, la bola unitaria cerrada de E no es compacta.*

[15] Se debe recordar que en un espacio topológico X *metrizable* (que satisface el primer axioma de contabilidad), una parte $C \subseteq X$ es compacta si y solo si cualquier sucesión en C posee una subsucesión convergente en C.

Demostración. Tómese $x_0 \in E$ con $\|x_0\| = 1$ y luego $x_1 \in E$ con $\|x_1\| = 1$, $\|x_1 - x_0\| \geqslant \frac{1}{2}$.

En seguida, se construye una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ por inducción, como sigue. Habiendo ya elegido $x_0, x_1, \dots, x_n$, sea $M_n := \operatorname{lin}\langle x_0, x_1, \dots, x_n\rangle \subset E$ el subespacio generado por ellos. Como $\dim E = \infty$, el subespacio propio M_n es cerrado (por ser finitodimensional). Por el Lema 2.33, existe $x_{n+1} \in E$ con $\|x_{n+1}\| = 1$ y $d(x_{n+1}, M_n) \geqslant \frac{1}{2}$.

Esta sucesión $\{x_n\} \subset \overline{B}_1(E)$ cumple $\|x_m - x_n\| \geqslant \frac{1}{2}$ si $m \neq n$, así que no puede tener una subsucesión convergente (ni de Cauchy). Luego $\overline{B}_1(E)$ no es compacto. □

El Corolario 2.34 pone de manifiesto la dificultad esencial del análisis en dimensión infinita: un espacio normado infinitodimensional *no es localmente compacto*. (Un vecindario compacto de un punto $x \in E$ contendría una bola cerrada $\overline{B}(x;\delta)$ que sería también compacta; por traslación y dilatación, la bola unitaria de E sería compacta.) De hecho, ningún espacio vectorial topológico infinitodimensional es localmente compacto: véase el Teorema 1.22 del libro de Rudin.[16]

► No obstante, en muchos casos es posible rescatar la compacidad de la bola unitaria de E, al cambiar la topología para que esta bola no sea un vecindario de 0 en la nueva topología. Esto exige que la nueva topología tenga menos vecindarios de 0 que la topología original, y también menos conjuntos abiertos: se trata de una topología *más débil* que la original.

Definición 2.35. Sean F y G dos espacios $\mathbb{C}$-vectoriales. Una **dualidad** entre F y G (si existe) es una *forma bilineal* $F \times G \to \mathbb{C} : (y,z) \mapsto \langle y,z\rangle$ que es *no degenerada*:

- ⋆ si $\langle y,z\rangle = 0$ para todo $z \in G$, entonces $y = 0$ en F,
- ⋆ si $\langle y,z\rangle = 0$ para todo $y \in F$, entonces $z = 0$ en G.

Denótese por $F' := \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(F,\mathbb{C})$ y $G' := \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(G,\mathbb{C})$ los *espacios duales algebraicos* de F y G, respectivamente (las formas $\mathbb{C}$-lineales no necesariamente continuas). Entonces las fórmulas $g_z \colon y \mapsto \langle y,z\rangle$; $f_y \colon z \mapsto \langle y,z\rangle$ definen inclusiones $y \mapsto f_y : F \hookrightarrow G'$ y $z \mapsto g_z : G \hookrightarrow F'$ con las siguientes propiedades: $F \subseteq G'$ separa puntos de G; $G \subseteq F'$ separa puntos de F.

Sea E un espacio localmente convexo, con espacio dual $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{C})$. La Proposición 2.12 muestra que la forma bilineal $\langle x,f\rangle := f(x)$ es una dualidad entre E y E^*; y simétricamente, la forma bilineal $\langle f,x\rangle := f(x)$ es una dualidad entre E^* y E.

La **topología débil** $\underline{\sigma(E,E^*)}$ es la topología más débil sobre E tal que cada elemento $f \in E^*$ sea continuo. Esta topología está dada por la familia separante de seminormas $p_f(x) := |f(x)|$,

[16] Esto no implica que el teorema de Heine y Borel esté limitado a espacios finitodimensionales. Si U es un abierto en $\mathbb{C}$, un teorema de Montel dice que en el espacio de Fréchet $H(U)$ de funciones holomorfas en U, cualquier parte cerrada y acotada es compacta. Pero tales *espacios de Montel* no pueden ser normables: no hay *bolas* acotadas en $H(U)$.

para toda $f \in E^*$. Denótese por $\underline{E_\sigma}$ el espacio $\mathbb{C}$-vectorial E dotado con la topología $\sigma(E, E^*)$; este es un espacio localmente convexo y la aplicación identidad $1_E \colon E \to E_\sigma$ es continua.[17]

Sobre el espacio dual E^* se puede definir la **topología débil estelar** $\underline{\sigma(E^*, E)}$ como la topología más débil tal que cada *evaluación* $f \mapsto f(x)$ sea continua. Una familia (obviamente separante) de seminormas que define esta topología es $q_x(f) := |f(x)|$, para todo $x \in E$. Denótese por $\underline{E^*_\sigma}$ el espacio vectorial E^* dotado con la topología $\sigma(E^*, E)$; este es un espacio localmente convexo y la aplicación identidad $1_{E^*} \colon E^* \to E^*_\sigma$ es continua.[18] ◊

Teorema 2.36 (Banach y Alaoglu)**.** *Si E es un espacio normado, la bola unitaria cerrada $\overline{B}_1(E^*) := \{\, f \in E^* : \|f\| \leqslant 1 \,\}$ del espacio dual E^* es* compacta *en la topología $\sigma(E^*, E)$.*

Demostración. Sea $\overline{D}(0; r) := \{\, \alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| \leqslant r \,\}$ el disco cerrado en $\mathbb{C}$ centrado en el origen, de radio r. Entonces

$$f \in \overline{B}_1(E^*) \implies |f(x)| \leqslant \|x\| \implies f(x) \in \overline{D}(0; \|x\|) \quad \text{para todo} \quad x \in E.$$

Si $K := \prod_{x \in E} \overline{D}(0; \|x\|)$ es el producto cartesiano de todos estos discos cerrados, entonces hay una inclusión $\iota : \overline{B}_1(E^*) \hookrightarrow K$ definida por $\iota(f) := (f(x))_{x \in E}$.

El *teorema de Tijonov* de la topología general dice que un producto cartesiano de compactos es compacto. En particular, K es compacto en la topología del producto cartesiano. Esta es la topología más débil tal que todas las proyecciones coordenadas $g \mapsto g(x) : K \to \overline{D}(0; \|x\|)$ sean continuas. Luego $\iota \colon \overline{B}_1(E^*) \to K$ es un homeomorfismo[19] si $\overline{B}_1(E^*)$ tiene la topología $\sigma(E^*, E)$. Basta mostrar, entonces, que $\iota(\overline{B}_1(E^*))$ es *cerrado* en K.

Si $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una *red* en $\overline{B}_1(E^*)$ con $\iota(f_\lambda) \to g \in K$, entonces $f_\lambda(x) \to g(x)$ para todo $x \in E$. La función $x \mapsto g(x)$ es lineal: en efecto, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, vale

$$g(\alpha x + \beta y) = \lim_\lambda f_\lambda(\alpha x + \beta y) = \lim_\lambda \alpha\, f_\lambda(x) + \beta\, f_\lambda(y) = \alpha\, g(x) + \beta\, g(y).$$

Además, $x \mapsto g(x)$ es continua, de norma $\leqslant 1$, porque

$$|g(x)| = \lim_\lambda |f_\lambda(x)| \leqslant \sup_{\lambda \in \Lambda} |f_\lambda(x)| \leqslant \|x\|.$$

Esto dice que $g \in \iota(\overline{B}_1(E^*))$. Se concluye que $\iota(\overline{B}_1(E^*))$ es cerrado en K.

En resumen: $\iota(\overline{B}_1(E^*))$ es compacto en K; en consecuencia, $\overline{B}_1(E^*)$ es compacto en E^*_σ. □

[17] Una familia de funciones $f_\alpha \colon X \to X_\alpha$ cuyo dominio común es un conjunto X y cuyos codominios son espacios topológicos X_α define una *topología débil* sobre X. Una base para esta topología es la totalidad de intersecciones finitas de preimágenes $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, donde cada U_α es un abierto en X_α. Si X ya posee una topología para la cual las funciones f_α son continuas, la nueva topología es más débil que la original.

[18] Si E^{**} denota el espacio dual de E^*, la notación E^*_σ podría referirse a la topología $\sigma(E^*, E)$ o bien a $\sigma(E^*, E^{**})$. Estas topologías sobre E^* no siempre coinciden, por lo que la notación E^*_σ es levemente ambiguo.

[19] La aplicación ι es inyectiva pero no sobreyectiva; es un homeomorfismo entre su dominio y su imagen.

La demostración del teorema de Banach y Alaoglu es sencilla, una vez que se dispone del teorema topológico de Tijonov. La compacidad de un producto cartesiano finito o numerable de compactos se demuestra usando argumentos ordinarios de inducción. Lo novedoso del teorema de Tijonov es el uso de productos cartesianos con un conjunto índice cualquiera (cuya existencia depende del axioma de elección), lo cual obliga el uso de redes en vez de sucesiones.[20]

Ejemplo 2.37. Considérese el espacio de Banach no separable $E = \underline{\ell}^\infty$ y su espacio dual $E^* = (\underline{\ell}^\infty)^*$. Cualquier sucesión $\{g_n\}$ en $\overline{B}_1((\underline{\ell}^\infty)^*)$ tiene un punto de acumulación g, con respecto a la topología débil estelar. ⟦ Si no fuera así, cada $g \in \overline{B}_1((\underline{\ell}^\infty)^*)$ tendría un vecindario V_g y habría $m_g \in \mathbb{N}$ tales que $g_n \notin U_g$ para $n > m_g$. Estos vecindarios formarían un cubrimiento abierto de este compacto en E^*_σ, con un subcubrimiento finito $U_{g_1} \cup \cdots \cup U_{g_k}$. Pero entonces ocurriría que $g_n \notin \overline{B}_1((\underline{\ell}^\infty)^*)$ para $n > \max\{m_{g_1}, \dots, m_{g_k}\}$, absurdo. ⟧

Tómese la sucesión $\{g_n\} \subset (\underline{\ell}^\infty)^*$ definido por $g_n(\boldsymbol{x}) := x_n$ para $\boldsymbol{x} \in \underline{\ell}^\infty$. Es obvio que $|g_n(\boldsymbol{x})| = |x_n| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_\infty$, así que $\|g_n\| \leqslant 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En otras palabras, $\{g_n\} \subset \overline{B}_1((\underline{\ell}^\infty)^*)$. Resulta que *esta sucesión no posee subsucesión convergente alguna*. En efecto, cualquier subsucesión $\{g_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ da lugar al siguiente elemento $\boldsymbol{y} \in \underline{\ell}^\infty$:

$$y_m := \begin{cases} +1 & \text{si } m = n_k \text{ con } k \text{ par}, \\ -1 & \text{si } m = n_k \text{ con } k \text{ impar}, \\ 0 & \text{si } m \neq n_k \text{ para todo } k. \end{cases}$$

La sucesión $\{g_{n_k}\}$ convergiría en E^*_σ si y solo si las sucesiones numéricas $\{g_{n_k}(\boldsymbol{x})\}$ convergen en $\mathbb{C}$, para todo $\boldsymbol{x} \in E = \underline{\ell}^\infty$. Pero por su definición, $\{g_{n_k}(\boldsymbol{y})\} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$ diverge.

Entonces el punto de acumulación g es necesariamente el límite de una *subred* $\{g_{n(\lambda)}\}$ de $\{g_n\}$. Como resultado, el espacio localmente convexo $E^*_\sigma = (\underline{\ell}^\infty)^*_\sigma$ *no es metrizable*. ◊

2.6 Dualidad en espacios de Banach

Si E es un espacio de Banach, su espacio dual E^* es otro espacio de Banach. Las normas de estos espacios tienen una relación recíproca, en vista de la Definición 2.4 y la Proposición 2.13:

$$\|f\| = \sup\{\, |\langle f, x\rangle| : x \in E,\ \|x\| \leqslant 1 \,\} \quad \text{para} \quad f \in E^*,$$
$$\|x\| = \sup\{\, |\langle f, x\rangle| : f \in E^*,\ \|f\| \leqslant 1 \,\} \quad \text{para} \quad x \in E.$$

[20] En 1929, Banach demostró el Teorema 2.36 para el caso en donde E es un espacio de Banach *separable* (véase el Teorema XI.13 del libro de Banach, *op. cit.*) El caso general, usando el teorema de Tijonov, fue enunciado por Alaoglu en 1938 (seguido de cerca por el matemático apócrifo Nicholas Bourbaki) y la demostración aparece en su tesis doctoral: Leonidas Alaoglu, "Weak topologies of normed linear spaces", *Annals of Mathematics* **41** (1940), 252–267.

Conviene, entonces, estudiar los espacios de Banach en pares (E, E^*). El teorema siguiente dice que un espacio de Hilbert es isomorfo a su propio espacio dual. En consecuencia, la topología débil del Ejemplo 1.51 coincide con $\sigma(H, H^*)$. (Un detalle notable es que este isomorfismo no es $\mathbb{C}$-lineal, sino *semilineal* solamente.)

Teorema 2.38 (Riesz)**.** *Si H es un espacio de Hilbert, su espacio dual H^* es isomorfo a H como espacio de Banach, mediante la aplicación semilineal biyectiva que lleva $y \in H$ en la forma lineal $f_y \colon x \mapsto \langle y \mid x \rangle$.*

Demostración. Defínase $V \colon H \to H^*$ por $Vy := f_y$. Nótese que la forma lineal f_y es continua, porque $|f_y(x)| = |\langle y \mid x \rangle| \leqslant \|y\| \, \|x\|$ para $x \in H$. Está claro que V es semilineal: $V(\alpha y_1 + \beta y_2) = \bar{\alpha}\, Vy_1 + \bar{\beta}\, Vy_2$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $y_1, y_2 \in H$. En vista del Corolario 2.3 – la cual también es válido para aplicaciones semilineales – la continuidad de V sigue de la desigualdad de Schwarz:

$$\begin{aligned} \|V\| &= \sup\{\, \|Vy\| : \|y\| \leqslant 1 \,\} \\ &= \sup\{\, \bigl|\langle y \mid x \rangle\bigr| : \|y\| \leqslant 1, \|x\| \leqslant 1 \,\} \\ &\leqslant \sup\{\, \|y\| \, \|x\| : \|y\| \leqslant 1, \|x\| \leqslant 1 \,\} = 1. \end{aligned}$$

Fíjese que $V(0) = 0 \in H^*$. Además, si $y \neq 0$, entonces

$$\|Vy\| = \sup\{\, \bigl|\langle y \mid x \rangle\bigr| : \|x\| \leqslant 1 \,\} \geqslant \left| \left\langle y \;\middle|\; \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \right| = \frac{\|y\|^2}{\|y\|} = \|y\|,$$

así que $\|Vy\| = \|y\|$ para todo $y \in H$. Entonces V es isométrica; y en particular, es inyectiva.

Falta mostrar que V es *sobreyectiva*. Si $f \in H^*$, el subespacio $M := \ker f = f^{-1}(\{0\})$ es cerrado en H. Si $f \neq 0$, entonces $M \neq H$ y existe $z \in M^\perp$ con $\|z\| = 1$ [y $f(z) \neq 0$]. Dado un vector $w \in M^\perp$, colóquese $\alpha := f(w)/f(z)$; entonces:

$$w - \alpha z \in M^\perp \quad \text{porque} \quad f(w - \alpha z) = f(w) - \alpha f(z) = 0,$$

así que $w - \alpha z \in M \cap M^\perp = \{0\}$ y por ende $w = \alpha z$. Se ve entonces que $M^\perp = \mathbb{C}z$. Luego, cada $x \in H$ es de la forma $x = v + \beta z$ con $v \in M$, $\beta \in \mathbb{C}$. Colóquese $y := \overline{f(z)}\, z$. Entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= f(v + \beta z) = \beta f(z) = \beta f(z) \langle z \mid z \rangle \\ &= \langle \overline{f(z)}\, z \mid \beta z \rangle = \langle \overline{f(z)}\, z \mid v + \beta z \rangle = \langle y \mid x \rangle = f_y(x). \end{aligned}$$

Luego $f = f_y = Vy$, así que V es sobreyectivo; por ende, V es una biyección isométrica. □

El espacio normado H^* admite un producto escalar, definido por la fórmula

$$\langle Vy \mid Vz \rangle_{H^*} := \langle z \mid y \rangle_H \quad \text{para todo} \quad y, z \in H. \tag{2.7}$$

La aplicación V entrelaza los productos escalares de H y H^*. El cambio de orden de los dos vectores y, z en (2.7) se debe a la semilinealidad de V.

Una biyección semilineal entre dos espacios de Hilbert cualesquiera que cumple una ecuación de la forma (2.7), se llama **antiunitaria**.

► Para un espacio de Banach E cuya norma no cumple la ley del paralelogramo, se debe distinguir E y E^*. El papel del producto escalar *sesquilineal* en H queda reemplazada por el apareamiento *bilineal* entre E y E^* introducido en la sección 2.2.

Definición 2.39. Sea E un espacio de Banach y sea E^* su espacio dual. El espacio dual de E^* se llama el **dual doble** de E, denotado por E^{**}. Si $x \in E$, $y \in E^*$, $z \in E^{**}$, se suele escribir

$$\langle y, x\rangle := y(x); \quad \text{pero también} \quad \langle y, z\rangle := z(y). \tag{2.8}$$

En los dos casos, los corchetes angulares $\langle -, -\rangle$ denotan una forma *bilineal* sobre el producto cartesiano de un espacio de Banach con su dual. Dícese que $\langle -, -\rangle$ es un **apareamiento de dualidad**, o simplemente una **dualidad**, entre los dos espacios de marras. ◊

► A continuación, se exhiben diversos ejemplos de dualidades entre pares de espacios de Banach no necesariamente isomorfos. Los primeros ejemplos son espacios de sucesiones.

Definición 2.40. Sean E y F dos espacios de Banach de sucesiones, es decir, subespacios algebraicos de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. En el caso de que

$$\text{Si} \quad \underline{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle} := \sum_{k=0}^{\infty} y_k x_k \quad \textit{converge absolutamente}, \ \text{para todo} \quad \boldsymbol{x} \in E,\ \boldsymbol{y} \in F, \tag{2.9}$$

se puede afirmar que $F \subseteq E^*$, al identificar $\boldsymbol{y} \in F$ con la forma lineal $\boldsymbol{x} \mapsto \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle$; igualmente, se afirma que $E \subseteq F^*$, al identificar $\boldsymbol{x} \in E$ con la forma lineal $\boldsymbol{y} \mapsto \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle$. ◊

Estas identificaciones *a veces* dan lugar a isomorfismos isométricos $F \simeq E^*$ y $E \simeq F^*$. Sin embargo, hace falta hacer *un análisis caso por caso* para determinar si cada elemento de E^* pertenece al subespacio F, o bien si cada elemento de F^* pertenece al subespacio E; y en seguida, se debe comprobar la coincidencia de las normas.

Proposición 2.41. *El espacio dual de $\underline{\mathbf{c}}_0$ es isométricamente isomorfa a $\underline{\boldsymbol{\ell}}^1$.*

Demostración. Para $\boldsymbol{x} \in \underline{\mathbf{c}}_0$, $\boldsymbol{y} \in \underline{\boldsymbol{\ell}}^1$, se verifica

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k||y_k| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_\infty \sum_{k=0}^{\infty} |y_k| = \|\boldsymbol{x}\|_\infty \|\boldsymbol{y}\|_1, \tag{2.10}$$

así que la forma lineal $\boldsymbol{x} \mapsto \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle$ es continua, con norma (en $\underline{\mathbf{c}}_0^*$) menor o igual a $\|\boldsymbol{y}\|_1$.

Los vectores básicos $\boldsymbol{e}_k \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ introducidos en el Ejemplo 1.37 permiten simplificar los cálculos. En primer lugar, fíjese que los desarrollos $\boldsymbol{x} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \boldsymbol{e}_k$; $\boldsymbol{y} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \boldsymbol{e}_k$ son convergentes en $\underline{\boldsymbol{c}}_0$ y en $\underline{\boldsymbol{\ell}}^1$ respectivamente:

$$\Big\| \boldsymbol{x} - \sum_{k=0}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k \Big\|_\infty = \Big\| \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \boldsymbol{e}_k \Big\|_\infty \leqslant \sup_{k \geqslant n+1} |x_k| \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty,$$
$$\Big\| \boldsymbol{y} - \sum_{k=0}^{n} y_k \boldsymbol{e}_k \Big\|_1 = \Big\| \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \boldsymbol{e}_k \Big\|_1 \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k| \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Tómese $f \in \underline{\boldsymbol{c}}_0^*$ y defínase $y_k := f(\boldsymbol{e}_k)$ para $k \in \mathbb{N}$. La continuidad de f garantiza que

$$f(\boldsymbol{x}) = f\Big(\sum_{k=0}^{\infty} x_k \boldsymbol{e}_k \Big) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k f(\boldsymbol{e}_k) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle. \tag{2.11}$$

Como $|f(\boldsymbol{x})| = |\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{y}\|_1 \|\boldsymbol{x}\|_\infty$ por (2.10) para cada $\boldsymbol{x}$, se concluye que $\|f\| \leqslant \|\boldsymbol{y}\|_1$.

Para comprobar la igualdad $\|f\| = \|\boldsymbol{y}\|_1$, basta hallar una sucesión $\{\boldsymbol{z}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de vectores de norma 1 en $\underline{\boldsymbol{c}}_0$ tal que $\lim_{n\to\infty} |f(\boldsymbol{z}^{(n)})| = \|\boldsymbol{y}\|_1$. Se puede suponer que $f \neq 0$, así que $\boldsymbol{y} \neq 0$ en $\underline{\boldsymbol{\ell}}_1$. Defínase[21]

$$z_k^{(n)} := \operatorname{signo} y_k \, [\![k \leqslant n]\!].$$

Fíjese que $|z_k^{(n)}| = 1$ cuando $y_k \neq 0$ para $k \leqslant n$, así que $\|\boldsymbol{z}^{(n)}\|_\infty = 1$ para n suficientemente grande. Además, está claro que $|f(\boldsymbol{z}^{(n)})| = f(\boldsymbol{z}^{(n)}) = \sum_{k=0}^{n} |y_k| \to \|\boldsymbol{y}\|_1$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto,

$$\|\boldsymbol{y}\|_1 = \lim_{n\to\infty} |f(\boldsymbol{z}^{(n)})| \leqslant \limsup_{n\to\infty} \|f\| \, \|\boldsymbol{z}^{(n)}\|_\infty = \|f\|.$$

Esto muestra que $\boldsymbol{y} \in \underline{\boldsymbol{\ell}}^1$ y además que $\|f\| = \|\boldsymbol{y}\|_1$. Se concluye que la correspondencia $f \leftrightarrow \boldsymbol{y}$ es una *isometría lineal biyectiva* entre $\underline{\boldsymbol{c}}_0^*$ y $\underline{\boldsymbol{\ell}}^1$. □

Proposición 2.42. *El espacio dual de $\underline{\boldsymbol{\ell}}^1$ es isométricamente isomorfa a $\underline{\boldsymbol{\ell}}^\infty$.*

Demostración. Si $\boldsymbol{y} \in \underline{\boldsymbol{\ell}}^1$, $\boldsymbol{z} \in \underline{\boldsymbol{\ell}}^\infty$, el estimado (2.10) garantiza que $|\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{y}\|_1 \|\boldsymbol{z}\|_\infty$. La forma lineal $\boldsymbol{y} \mapsto \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$ es continua sobre $\underline{\boldsymbol{\ell}}^1$, con norma $\leqslant \|\boldsymbol{z}\|_\infty$.

Dada $g \in (\underline{\boldsymbol{\ell}}^1)^*$, defínase $z_k := g(\boldsymbol{e}_k)$ para $k \in \mathbb{N}$. Luego $|z_k| = |g(\boldsymbol{e}_k)| \leqslant \|g\| \, \|\boldsymbol{e}_k\|_1 = \|g\|$ para todo $k \in \mathbb{N}$, así que $\boldsymbol{z} \in \underline{\boldsymbol{\ell}}^\infty$ con $\|\boldsymbol{z}\|_\infty \leqslant \|g\|$.

La continuidad de g muestra que

$$g(\boldsymbol{y}) = g\Big(\sum_{k=0}^{\infty} y_k \boldsymbol{e}_k \Big) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \, g(\boldsymbol{e}_k) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z_k = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle.$$

[21] Conviene recordar que $\operatorname{signo} 0 := 0$ y que $\operatorname{signo} \lambda := |\lambda|/\lambda$ para $\lambda \neq 0$ en $\mathbb{C}$, de modo que $\underline{\lambda \operatorname{signo} \lambda = |\lambda|}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Como $|g(\boldsymbol{y})| = |\langle \boldsymbol{y}, z\rangle| \leqslant \|\boldsymbol{y}\|_1 \|z\|_\infty$ por (2.10), se deduce que $\|g\| \leqslant \|z\|_\infty$. Resulta entonces que $\|g\| = \|z\|_\infty$, así que la correspondencia $g \leftrightarrow \boldsymbol{z}$ es una isometría lineal biyectiva entre $(\underline{\boldsymbol{\ell}}^1)^*$ y $\underline{\boldsymbol{\ell}}^\infty$. □

En la demostración anterior, no se aprovechó el desarrollo $\boldsymbol{z} = \sum_{k=0}^\infty z_k \boldsymbol{e}_k$, por la buena razón de que *este desarrollo no es convergente en* $\underline{\boldsymbol{\ell}}^\infty$ cuando $\boldsymbol{z} \notin \underline{\boldsymbol{c}}_0$. (Al restar una suma parcial $\sum_{k=0}^n z_k \boldsymbol{e}_k$ de z, la "cola" así obtenida es una sucesión con norma $\sup_{k\geqslant n+1} |z_k|$, que no siempre desvanece cuando $n \to \infty$.) *Moraleja*: los desarrollos formales deben tratarse con cautela; una prueba de convergencia nunca está demás.

Corolario 2.43. *El dual doble de* $\underline{\boldsymbol{c}}_0$ *es isométricamente isomorfa a* $\underline{\boldsymbol{\ell}}^\infty$. ⊟

Proposición 2.44. *Si* $1 < p < \infty$ *y* $q = p/(p-1)$*, el espacio dual de* $\underline{\boldsymbol{\ell}}^p$ *es isométricamente isomorfa a* $\underline{\boldsymbol{\ell}}^q$.

Demostración. Si $\boldsymbol{x} \in \underline{\boldsymbol{\ell}}^p$, $\boldsymbol{y} \in \underline{\boldsymbol{\ell}}^q$, la desigualdad de Hölder (1.15) implica que

$$\left|\sum_{k=0}^\infty x_k y_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^\infty |x_k y_k| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q, \tag{2.12}$$

así que el funcional lineal $\boldsymbol{x} \mapsto \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle$ es continuo, con norma en $(\underline{\boldsymbol{\ell}}^p)^*$ no mayor que $\|\boldsymbol{y}\|_q$.

Tómese $f \in (\underline{\boldsymbol{\ell}}^p)^*$ y defínase $y_k := f(\boldsymbol{e}_k)$ para $k \in \mathbb{N}$. El desarrollo $\boldsymbol{x} = \sum_{k=0}^\infty x_k \boldsymbol{e}_k$ converge en la norma de $\underline{\boldsymbol{\ell}}^p$. El cálculo (2.11) demuestra que $f(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle$ y por ende $|f(\boldsymbol{x})| = |\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q$ en vista de (2.12), así que $\|f\| \leqslant \|\boldsymbol{y}\|_q$.

Ahora defínase $\boldsymbol{z}^{(n)} \in \underline{\boldsymbol{\ell}}^p$ por

$$z_k^{(n)} := |y_k|^{q-1} \operatorname{signo} y_k \, [\![k \leqslant n]\!].$$

En este caso, puesto que $y_k \operatorname{signo} y_k = |y_k|$, se obtiene

$$\|\boldsymbol{z}^{(n)}\|_p^p = \sum_{k=0}^n |y_k|^{(q-1)p} = \sum_{k=0}^n |y_k|^q = f(\boldsymbol{z}^{(n)}).$$

En consecuencia, vale

$$f\left(\frac{\boldsymbol{z}^{(n)}}{\|\boldsymbol{z}^{(n)}\|_p}\right) = \left(\sum_{k=0}^n |y_k|^q\right)^{1-1/p} = \left(\sum_{k=0}^n |y_k|^q\right)^{1/q}.$$

Entonces

$$\|\boldsymbol{y}\|_q = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^n |y_k|^q\right)^{1/q} \leqslant \sup\{\, |f(\boldsymbol{x})| : \|\boldsymbol{x}\|_p \leqslant 1 \,\} = \|f\|.$$

Esto muestra que $\boldsymbol{y} \in \underline{\boldsymbol{\ell}}^q$ y también $\|f\| = \|\boldsymbol{y}\|_q$. Se concluye que la correspondencia $f \leftrightarrow \boldsymbol{y}$ es una isometría lineal biyectiva entre $(\underline{\boldsymbol{\ell}}^p)^*$ y $\underline{\boldsymbol{\ell}}^q$. □

Corolario 2.45. *Si $1 < p < \infty$, el dual doble de $\underline{\ell}^p$ coincide con el propio $\underline{\ell}^p$.*

Demostración. La Proposición anterior muestra que $(\underline{\ell}^p)^*$ es la totalidad de funcionales lineales $\boldsymbol{x} \mapsto \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$ con $\boldsymbol{y} \in \underline{\ell}^q$. Como $q = p/(p-1)$ es equivalente a $p = q/(q-1)$, al cambiar los índices $p \leftrightarrow q$, la misma proposición muestra que $(\underline{\ell}^q)^*$ es la totalidad de funcionales lineales $\boldsymbol{y} \mapsto \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$ con $\boldsymbol{z} \in \underline{\ell}^p$.

A la luz de (2.8), esto dice que cada elemento de $(\underline{\ell}^p)^{**} \simeq (\underline{\ell}^q)^*$ es una evaluación de funcionales $f \mapsto f(\boldsymbol{z})$, para $f \in (\underline{\ell}^p)^*$, en algún vector $\boldsymbol{z} \in \underline{\ell}^p$. Dicho de otra manera, la identificación $\underline{\ell}^p \hookrightarrow (\underline{\ell}^p)^{**}$ de $\underline{\ell}^p$ con un subespacio de su bidual es sobreyectiva. □

► En espacios de funciones integrables, la correspondencia de dualidad es, desde luego, la integral del producto de dos funciones. Es necesario averiguar, en cada caso particular, si la identificación de un espacio concreto con el dual de otro espacio es una isometría biyectiva.

Definición 2.46. Sean E y F dos espacios de Banach de funciones medibles sobre un espacio de medida σ-finita $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Si, para cada $f \in E$ y $h \in F$, la integral

$$\langle h, f \rangle := \int_X h(x) f(x) \, d\mu(x) \tag{2.13}$$

converge absolutamente,[22] entonces $F \subseteq E^*$ al identificar $h \in F$ con la forma lineal $f \mapsto \langle h, f \rangle$ en E^*; de igual manera, $E \subseteq F^*$, al identificar $f \in E$ con la forma lineal $h \mapsto \langle h, f \rangle$ en F^*. ◊

Proposición 2.47. *Si $1 < p < \infty$ y si $q = p/(p-1)$, el espacio dual de $L^p(X, \mu)$ es isométricamente isomorfa a $L^q(X, \mu)$.*

Demostración. Considérese primero el caso en que $\mu(X)$ *es finito*.

Si $f \in L^p(X, \mu)$ y $h \in L^q(X, \mu)$, la desigualdad de Hölder (1.15) implica que

$$\left| \int_X h(x) f(x) \, d\mu(x) \right| \leqslant \int_X |h(x) f(x)| \, d\mu(x) \leqslant \|f\|_p \, \|h\|_q, \tag{2.14}$$

así que la forma lineal $f \mapsto \langle h, f \rangle$ es continua, con norma no mayor que $\|h\|_q$.

Ahora sea $T \in L^p(X, \mu)^*$ una forma lineal continua. Si $\mathbb{1}_A$ denota la **función indicatriz** de $A \in \mathcal{F}$, definida como $\mathbb{1}_A(x) := [\![x \in A]\!]$, la fórmula $\nu_T(A) := T(\mathbb{1}_A)$ define, por la linealidad de T, una medida *finitamente aditiva* sobre $\mathcal{F}$.

Si $A = \biguplus_k A_k$ es una unión disjunta numerable de conjuntos en $\mathcal{F}$, entonces la serie positiva $\sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) = \mu(A) \leqslant \mu(X)$ es convergente, así que

$$\left\| \mathbb{1}_A - \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{A_k} \right\|_p = \left(\sum_{k>n} \mu(A_k) \right)^{1/p} \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

[22] La integral de Lebesgue es una *integral absoluta*: es decir, el lado derecho de (2.13) existe si y solo si la integral no negativa $\int_X |h(x) f(x)| \, d\mu(x)$ es finita.

La continuidad de T entonces implica que $\nu_T(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_T(A_k)$. Luego, ν_T es una medida *σ-aditiva* sobre $\mathcal{F}$.

Si $\mu(A) = 0$, entonces $\mathbb{1}_A = 0$ en $L^p(X,\mu)$, así que $\nu_T(A) = T(\mathbb{1}_A) = 0$. Esto dice que la medida ν_T es *absolutamente continua* con respecto a μ. Entonces, por el teorema de Radon y Nikodym, hay un único elemento $h \in L^1(X,\mu)$ tal que

$$T(\mathbb{1}_A) = \nu_T(A) = \int_A h(x)\,d\mu(x) = \int_X h(x)\mathbb{1}_A(x)\,d\mu(x) = \langle h, \mathbb{1}_A \rangle.$$

Por linealidad, se obtiene $T(f) = \langle h, f \rangle$ cuando f es una *función simple* (una combinación lineal de funciones indicatrices). Las funciones simples forman un subespacio denso de $L^p(X,\mu)$; por lo tanto, la continuidad de T implica $T(f) = \langle h, f \rangle$ para todo $f \in L^p(X,\mu)$.

Defínase una sucesión $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $L^p(X,\mu)$ por

$$k_n(x) := |h(x)|^{q-1}\,\mathrm{signo}(h(x))\,[\![|h(x)| \leqslant n]\!].$$

El cálculo

$$\|k_n\|_p^p = \int_{|h(x)|\leqslant n} |h(x)|^{(q-1)p}\,d\mu(x) = \int_{|h(x)|\leqslant n} |h(x)|^q\,d\mu(x) \leqslant n^q \mu(X) < \infty$$

comprueba que $k_n \in L^p(X,\mu)$ para cada n. Luego

$$T\biggl(\frac{k_n}{\|k_n\|_p}\biggr) = \frac{\langle h, k_n\rangle}{\|k_n\|_p} = \biggl(\int_{|h(x)|\leqslant n} |h(x)|^q\,d\mu(x)\biggr)^{1/q},$$

así que

$$\|h\|_q = \lim_{n\to\infty} \biggl(\int_{|h(x)|\leqslant n} |h(x)|^q\,d\mu(x)\biggr)^{1/q} \leqslant \sup\{\, |T(f)| : \|f\|_p \leqslant 1 \,\} = \|T\|.$$

Esto muestra que $h \in L^q(X,\mu)$ y también $\|T\| \geqslant \|h\|_q$. Por otro lado, el estimado (2.14) implica que $|T(f)| = |\langle h, f\rangle| \leqslant \|f\|_p \|h\|_q$, así que $\|T\| = \|h\|_q$. Se concluye que la correspondencia $T \leftrightarrow h$ es una isometría biyectiva entre $L^p(X,\mu)^*$ y $L^q(X,\mu)$, en el caso $\mu(X) < \infty$.

Si $(X,\mathcal{F},\mu)$ es σ-finita pero no finita, se puede escribir X como una unión creciente $X = \uparrow\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con cada $\mu(X_n) < \infty$. Si $f \in L^p(X,\mu)$, el teorema de convergencia dominada muestra que $f = \lim_{n\to\infty}(f\mathbb{1}_{X_n})$ en la norma de $L^p(X,\mu)$. Si $T \in L^p(X,\mu)^*$, se concluye que $T(f) = \lim_{n\to\infty} T(f\mathbb{1}_{X_n})$.

Los argumentos del caso finito muestran que $f|_{X_n} \mapsto T(f\mathbb{1}_{X_n})$ es una forma lineal continua sobre $L^p(X_n,\mu)$. Del teorema de Radon y Nikodym, se obtiene

$$T(f\mathbb{1}_{X_n}) = \int_{X_n} h_n(x) f(x)\,d\mu(x) \quad \text{para algún} \quad h_n \in L^q(X_n,\mu).$$

La inclusion $X_n \subseteq X_{n+1}$ implica que $(f \mathbb{1}_{X_n})\mathbb{1}_{X_{n+1}} = f \mathbb{1}_{X_n}$. La unicidad de la derivada de Radon y Nikodym en $L^1(X_{n+1}, \mu)$ entonces implica que $h_{n+1} \mathbb{1}_{X_n} = h_n$ casi por doquier. Sin perder generalidad, se puede suponer que $h_{n+1}(x) = h_n(x)$ para todo $x \in X_n$. Entonces hay una función medible $h \colon X \to \mathbb{C}$ definida bien por $h(x) := h_n(x)$ si $x \in X_n$.

El teorema de convergencia dominada muestra que

$$\|h\|_q = \lim_{n\to\infty} \|h_n\|_q \leqslant \|T\|,$$

así que $h \in L^q(X, \mu)$ y además $h_n \to h$ en la norma $\|\cdot\|_q$. Entonces

$$T(f) = \lim_{n\to\infty} T(f \mathbb{1}_{X_n}) = \lim_{n\to\infty} \langle h_n, f \rangle = \langle h, f \rangle \quad \text{para todo} \quad f \in L^p(X, \mu).$$

Finalmente, obsérvese que en el caso σ-finito:

$$\|T\| \leqslant \limsup_{n\to\infty} \left\| T\big|_{L^p(X_n,\mu)} \right\| = \lim_{n\to\infty} \|h_n\|_q = \|h\|_q \,. \qquad \square$$

Corolario 2.48. *Si $1 < p < \infty$, el dual doble de $L^p(X, \mu)$ coincide con el propio $L^p(X, \mu)$.* ⊟

Definición 2.49. Una función $g \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ tiene **variación acotada** si hay una constante $M \geqslant 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| \leqslant M \quad \text{para toda partición } \mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \text{ de } [a, b].$$

El mínimo M – el supremo de estas sumas sobre toda $\mathcal{P}$ – es la **variación total** $V_a^b(g)$.

La función g se llama **normalizada** si $g(a) = 0$ y g es *continua desde la derecha*, esto es, $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} g(t + \varepsilon) = g(t)$ para $a \leqslant t < b$. La totalidad $BVN([a, b])$ de funciones de variación acotada normalizadas es un espacio normado: la variación total V_a^b es su norma. ◊

Las particiones $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ forman un conjunto dirigido bajo refinamiento: al tomar dos particiones $\mathcal{P} := \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ y $\mathcal{Q} := \{s_0, s_1, \dots, s_m\}$, con $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$; $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = b$; su unión $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ es una partición de $[a, b]$ tal que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ (obviamente).

Cualquier función $g \in BVN[a, b]$ define una **integral de Stieltjes** sobre el intervalo $[a, b]$. Dada una función *continua* $f \colon [a, b] \to \mathbb{C}$, se define

$$\int_a^b f(t)\, dg(t) := \lim_{\mathcal{P}} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \big(g(t_j) - g(t_{j-1})\big),$$

para $\mathcal{P} := \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$; los puntos $\xi_1, \dots, \xi_n$ cumplen $t_{j-1} \leqslant \xi_j \leqslant t_j$ para cada j. (Se toma el límite indicado sobre la red cuyo conjunto índice es la totalidad de los $\mathcal{P} \cup \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, dirigido por las particiones $\mathcal{P}$.) En vista de la continuidad de f, es posible comprobar que las sumas a la derecha convergen en $\mathbb{C}$.

Entre todas las funciones de variación acotada $h\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ tales que $h(a) = 0$, hay exactamente una que cumple $\int_a^b f(t)\,dh(t) = \int_a^b f(t)\,dg(t)$ para todo f continua, y que sea además continua desde la derecha. ⟦ La redefinición $h(t) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} g(t+\varepsilon) - g(a)$ define $h \in BVN([a,b])$ con $V_a^b(h) = V_a^b(g)$ y con las mismas integrales de Stieltjes. ⟧

Proposición 2.50. *El espacio dual de $C[a,b]$ es isométricamente isomorfo a $BVN[a,b]$.*

Demostración. Si $g \in BVN([a,b])$, la receta $T_g(f) := \int_a^b f(t)\,dg(t)$ define una forma lineal T_g sobre $C[a,b]$. En vista de la estimación

$$\begin{aligned} |T_g(f)| &\leqslant \limsup_{\mathcal{P}} \sum_{j=1}^n \bigl| f(\xi_j)\bigl(g(t_j) - g(t_{j-1})\bigr)\bigr| \\ &\leqslant \|f\|_\infty \limsup_{\mathcal{P}} \sum_{j=1}^n |g(t_j) - g(t_{j-1})| =: \|f\|_\infty V_a^b(g), \end{aligned}$$

la forma lineal T_g es continua, con $\|T_g\| \leqslant V_a^b(g)$.

Por otro lado, sea $T \in C[a,b]^*$ una forma lineal continua cualquiera. Si $f \in C[a,b]$ y si $\mathcal{P}$ es una partición de $[a,b]$, defínase la *función escalonada* $f_{\mathcal{P}}$ por

$$f_{\mathcal{P}}(t) := \begin{cases} f(a) & \text{si } a \leqslant t \leqslant t_1, \\ f(t_{j-1}) & \text{si } t_{j-1} < t \leqslant t_j \text{ con } j \geqslant 2. \end{cases}$$

Como f es *uniformemente continua* en $[a,b]$, para cada $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que

$$|\mathcal{P}| \equiv \max_{1\leqslant j\leqslant n} (t_j - t_{j-1}) < \delta \implies \sup_{a\leqslant t\leqslant b} |f(t) - f_{\mathcal{P}}(t)| < \varepsilon. \tag{2.15}$$

Las funciones $f_{\mathcal{P}}$ no son continuas, pero pertenecen al espacio $B[a,b]$ de funciones acotadas sobre $[a,b]$, con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Este espacio normado incluye $C[a,b]$ como subespacio. Por el Corolario 2.11 al teorema de Hahn y Banach, la forma lineal $T \in C[a,b]^*$ se extiende a $\widetilde{T} \in B[a,b]^*$ con $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. Defínase $\tilde{g}(x) := \widetilde{T}(\mathbb{1}_{[a,x]})$ para $a < x \leqslant b$, y sea $\tilde{g}(a) := 0$.

Por la linealidad de $\widetilde{T}$, se obtiene

$$\widetilde{T}(f_{\mathcal{P}}) = \widetilde{T}\biggl(f(a)\mathbb{1}_{[a,t_1]} + \sum_{j=2}^n f(t_{j-1})\mathbb{1}_{(t_{j-1},t_j]} \biggr) = \sum_{j=1}^n f(t_{j-1})\bigl[\tilde{g}(t_j) - \tilde{g}(t_{j-1})\bigr]. \tag{2.16}$$

Al escribir $e^{i\theta_j} := \operatorname{signo}\bigl(\tilde{g}(t_j) - \tilde{g}(t_{j-1})\bigr)$, sigue la estimación

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \bigl|\tilde{g}(t_j) - \tilde{g}(t_{j-1})\bigr| &= \sum_{j=1}^n e^{i\theta_j}\widetilde{T}(\mathbb{1}_{(t_{j-1},t_j]}) = \widetilde{T}\biggl(\sum_{j=1}^n e^{i\theta_j}\mathbb{1}_{(t_{j-1},t_j]}\biggr) \\ &\leqslant \|\widetilde{T}\| \biggl\| \sum_{j=1}^n e^{i\theta_j}\mathbb{1}_{(t_{j-1},t_j]} \biggr\|_\infty = \|\widetilde{T}\| = \|T\|. \end{aligned}$$

Se concluye que $\tilde{g}$ es una función de variación acotada, con $V_a^b(\tilde{g}) \leqslant \|T\|$. Sea $g(a) := 0$; $g(b) := \tilde{g}(b)$; $g(t) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \tilde{g}(t+\varepsilon)$ para $a < t < b$. Entonces $g \in BVN([a,b])$ y se verifica $V_a^b(g) = V_a^b(\tilde{g}) = \|T\|$.

Si $\{\mathcal{P}_n\}$ es una sucesión encajada de particiones (es decir, $\mathcal{P}_{n+1} \supseteq \mathcal{P}_n$ para cada n) con $|\mathcal{P}_n| \to 0$, la desigualdad (2.15) implica que $f_{\mathcal{P}_n} \to f$ uniformemente sobre $[a,b]$; en otras palabras, $f_{\mathcal{P}_n} \to f$ en la norma de $B[a,b]$. Entonces

$$T(f) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{T}(f_{\mathcal{P}_n}) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_{\mathcal{P}_n}(t)\,dg(t) = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_{\mathcal{P}_n}(t)\,dg(t) = \int_a^b f(t)\,dg(t) = T_g(f),$$

debido a (2.16) y la convergencia uniforme[23] de $f_{\mathcal{P}_n}$ a f. Se ha demostrado con la isometría lineal $g \mapsto T_g$ es sobreyectiva. □

2.7 Dualidad y reflexividad

Definición 2.51. Sean E un espacio de Banach y E^{**} su dual doble. El **encaje natural** de E en E^{**} es la aplicación lineal $J\colon E \to E^{**}$ definido por

$$\langle y, Jx\rangle := \langle y, x\rangle, \quad \text{esto es,} \quad \underline{Jx}\colon y \mapsto y(x) \quad \text{para todo } x \in E,\ y \in E^*. \tag{2.17}$$

Obsérvese que J es una isometría (y como tal, es continua e inyectiva), porque

$$\begin{aligned} \|Jx\| &= \sup\{\, |\langle y, Jx\rangle| : y \in E^*,\ \|y\| \leqslant 1 \,\} \\ &= \sup\{\, |\langle y, x\rangle| : y \in E^*,\ \|y\| \leqslant 1 \,\} = \|x\|. \end{aligned}$$

La última igualdad es una consecuencia del teorema de Hahn y Banach.

El espacio E es **reflexivo** si la isometría $J\colon E \to E^{**}$ es *sobreyectiva*: $J(E) = E^{**}$. ◊

Ejemplo 2.52. Un espacio de Hilbert es reflexivo, en vista del Teorema 2.38 de Riesz. Hay una isometría semilineal biyectiva $V\colon H \to H^*$ definida por $\langle Vy, x\rangle := \langle y \mid x\rangle$. Como ya se notó en (2.7), H^* es otro espacio de Hilbert bajo el producto escalar $\langle Vx \mid Vy\rangle := \langle y \mid x\rangle$. Entonces hay otra isometría semilineal biyectiva $W\colon H^* \to H^{**}$ definida por $\langle Vy, W(Vz)\rangle := \langle Vz \mid Vy\rangle$. Las igualdades

$$\langle Vy, W(Vx)\rangle = \langle Vx \mid Vy\rangle = \langle y \mid x\rangle = \langle Vy, x\rangle,$$

dicen que la composición $J = WV\colon H \to H^{**}$ coincide con la isometría lineal (2.17). Basta notar que WV es biyectiva. ◊

[23]En contraste con la integral de Lebesgue, la integral de Stieltjes no obedece un teorema de convergencia dominada. Sin embargo, si una sucesión de integrandos *converge uniformemente* sobre $[a,b]$, en ese caso se puede el límite con la integral de Stieltjes.

Ejemplo 2.53. La Proposición 2.44 y su Corolario 2.45 muestran que $\underline{\ell}^p$ es reflexivo, para $1 < p < \infty$. Sea $q := p/(p-1)$. Al usar la fórmula de dualidad (2.9) en las identificaciones $(\underline{\ell}^p)^* \simeq \underline{\ell}^q$ y $(\underline{\ell}^q)^* \simeq \underline{\ell}^p$, se ve que J se identifica con la identidad $1 \in \mathcal{L}(\underline{\ell}^p)$. ◊

Ejemplo 2.54. De igual manera, la Proposición 2.47 y su Corolario 2.48 demuestran que $L^p(X,\mu)$ es reflexivo, cuando $1 < p < \infty$. De nuevo, usando la dualidad (2.13), se puede identificar J con $1 \in \mathcal{L}(L^p(X,\mu))$. ◊

Ejemplo 2.55. Del Corolario 2.43, se ve que $(\underline{c}_0)^{**} \simeq \underline{\ell}^\infty$. En este caso, el uso de (2.9) para las dos identificaciones $(\underline{c}_0)^* \simeq \underline{\ell}^1$ y $(\underline{\ell}^1)^* \simeq \underline{\ell}^\infty$ hace evidente que J se identifica con la *inclusión* $\underline{c}_0 \hookrightarrow \underline{\ell}^\infty$. Esta J es inyectiva pero no sobreyectiva. Por lo tanto, $\underline{c}_0$ *no es reflexivo*. ◊

Definición 2.56. Sea $A \in \mathcal{L}(E,F)$ un **operador** entre dos espacios normados E y F. Su **operador transpuesto** es la aplicación lineal $\underline{A}^{\mathrm{t}} \colon F^* \to E^* : w \mapsto w \circ A$. Así,

$$\langle A^{\mathrm{t}} w, x\rangle := \langle w, Ax\rangle \quad \text{para todo} \quad x \in E,\ w \in F^*. \tag{2.18a}$$

Sea $B \in \mathcal{L}(H,K)$ un operador entre dos espacios de Hilbert H y K. Su **operador adjunto** es la aplicación lineal $B^* := V^{-1} B^{\mathrm{t}} W : K \to H$, donde $V \colon H \to H^*$ y $W \colon K \to K^*$ son las isometrías del Teorema 2.38 de Riesz. De esta manera,

$$\langle B^* y \mid x\rangle = \langle y \mid Bx\rangle \quad \text{para todo} \quad x \in H,\ y \in K. \tag{2.18b}$$

Obsérvese que la correspondencia $A \mapsto A^{\mathrm{t}}$ es *lineal* pero que $B \mapsto B^*$ es *semilineal*. ◊

Lema 2.57. *Sea $A \in \mathcal{L}(E,F)$ un operador entre dos espacios normados E y F, su transpuesta es continua: $A^{\mathrm{t}} \in \mathcal{L}(F^*,E^*)$ con $\|A^{\mathrm{t}}\| = \|A\|$.*

Demostración. La Proposición 2.13 implica que

$$\begin{aligned}
\|A^{\mathrm{t}}\| &= \sup\{\, \|A^{\mathrm{t}} w\| : w \in F^*,\ \|w\| \leqslant 1 \,\} \\
&= \sup\{\, |\langle A^{\mathrm{t}} w, x\rangle| : \|w\| \leqslant 1,\ \|x\| \leqslant 1 \,\} \\
&= \sup\{\, |\langle w, Ax\rangle| : \|x\| \leqslant 1,\ \|w\| \leqslant 1 \,\} \\
&= \sup\{\, \|Ax\| : x \in E,\ \|x\| \leqslant 1 \,\} = \|A\|.
\end{aligned}$$ □

Lema 2.58. *Sea $B \in \mathcal{L}(H,K)$ un operador entre dos espacios de Hilbert H y K, su adjunto es continuo: $B^* \in \mathcal{L}(K,H)$ con $\|B^*\| = \|B\|$.*

Demostración. Por la desigualdad de Schwarz, $\|x\| = \sup\{\, |\langle z \mid x\rangle| : \|z\| \leqslant 1 \,\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|B^*\| &= \sup\{\, \|B^* y\| : y \in K,\ \|y\| \leqslant 1 \,\} \\
&= \sup\{\, |\langle B^* y \mid x\rangle| : \|y\| \leqslant 1,\ \|x\| \leqslant 1 \,\} \\
&= \sup\{\, |\langle y \mid Bx\rangle| : \|x\| \leqslant 1,\ \|y\| \leqslant 1 \,\} \\
&= \sup\{\, \|Bx\| : x \in H,\ \|x\| \leqslant 1 \,\} = \|B\|.
\end{aligned}$$ □

La última demostración proporciona una fórmula muy útil para la norma de un operador B entre dos espacios de Hilbert:

$$\|B\| = \sup\{\, |\langle y \mid Bx\rangle| : \|x\| \leqslant 1,\ \|y\| \leqslant 1 \,\}. \tag{2.19}$$

► La dualidad entre espacios de Banach (o de Hilbert) también conlleva correspondencias entre los subespacios de un lado y los espacios cocientes del otro lado.

Definición 2.59. Dado un espacio normado E, tómese subespacios $M \leqslant E$ y $N \leqslant E^*$. Los **anuladores** respectivos de M y N son los subespacios $M^\perp \leqslant E^*$ y ${}^\perp N \leqslant E$ definidos por

$$\underline{M^\perp} := \{\, y \in E^* : \langle y, x\rangle = 0 \text{ para todo } x \in M \,\} = \bigcap_{x\in M} \ker Jx\,; \tag{2.20a}$$

$$\underline{{}^\perp N} := \{\, x \in E : \langle y, x\rangle = 0 \text{ para todo } y \in N \,\} = \bigcap_{y\in N} \ker y. \tag{2.20b}$$

Por un lado, ${}^\perp N$ es un *subespacio cerrado* de E.[24] Por otro, $M^\perp$ es un subespacio cerrado de E^*_σ, esto es, *cerrado en la topología débil estelar* $\sigma(E^*, E)$ generado por las evaluaciones $\{\, Jx : x \in E \,\}$. Desde luego, $M^\perp$ es también cerrado en la topología de la norma de E^*. ◊

Notación. Si $B \subseteq E^*$, la notación $\overline{B}^\sigma$ denotará la clausura de B en E^*_σ; su clausura $\overline{B}$ en la norma de E^* cumple $\overline{B} \subseteq \overline{B}^\sigma$, ya que $\sigma(E^*, E)$ es más débil que la topología de la norma y por ende cada conjunto cerrado en E^*_σ es también cerrado en la norma de E^*; pero no al revés.

Proposición 2.60. *Si E es un espacio normado, el dual de E^*_σ es el subespacio $J(E)$ de E^{**}.*

Demostración. Si $f : E^* \to \mathbb{C}$ es una aplicación lineal no nula, entonces f es continua para la topología $\sigma(E^*, E)$ si y solo si hay $x \in E$, $x \neq 0$, tal que $|f(y)| \leqslant |\langle y, x\rangle|$ para todo $y \in E^*$.

Entonces los hiperplanos $\ker f$ y $(\mathbb{C}x)^\perp$ de E^* coinciden, así que $f = \alpha Jx = J(\alpha x)$ para alguna constante $\alpha \in \mathbb{C}$. Esto muestra que $(E^*_\sigma)^* = J(E)$. □

Proposición 2.61. *Si E es un espacio normado, tómese subespacios $M \leqslant E$ y $N \leqslant E^*$. Entonces ${}^\perp(M^\perp) = \overline{M} \leqslant E$, mientras $({}^\perp N)^\perp = \overline{N}^\sigma \leqslant E^*$.*

Demostración. Está claro que $M \leqslant {}^\perp(M^\perp)$ y $N \leqslant ({}^\perp N)^\perp$. Como ${}^\perp(M^\perp)$ y $({}^\perp N)^\perp$ son subespacios cerrados de E y de E^*_σ respectivamente, se ve que $\overline{M} \leqslant {}^\perp(M^\perp)$ y $\overline{N}^\sigma \leqslant ({}^\perp N)^\perp$.

Si $z \notin \overline{M}$, el Corolario 2.15 proporciona un elemento $g_z \in M^\perp$ tal que $\langle g_z, z\rangle \neq 0$; entonces $z \notin {}^\perp(M^\perp)$. Se concluye que $\overline{M} = {}^\perp(M^\perp)$.

Si $w \notin \overline{N}^\sigma$, hay una forma lineal $h \in (E^*_\sigma)^*$ tal que $h|_N = 0$ pero $h(w) \neq 0$, por el Corolario 2.10; es cuestión de extender la forma lineal $N + \mathbb{C}w \to \mathbb{C} : n + \lambda w \mapsto \lambda$, la cual es continua para la topología $\sigma(E^*, E)$ porque N es cerrado, a todo el espacio E^*_σ.

[24] El núcleo de una forma lineal continua es cerrado; y una intersección de cerrados es también cerrada.

Por la Proposición 2.60, hay un vector $x_h \in E$ tal que $h = Jx_h$. Por construcción, $Jx_h \in N^\perp$, así que $x_h \in {}^\perp N$. Por otro lado, vale $\langle w, x_h\rangle = \langle w, Jx_h\rangle = h(w) \neq 0$, así que $w \notin ({}^\perp N)^\perp$. Se concluye que $\overline{N}^\sigma = ({}^\perp N)^\perp$. ◻

► No siempre es necesario demostrar directamente si un determinado espacio de Banach es reflexivo. El siguiente resultado permite, en algunos casos, obtener una prueba indirecta.

Proposición 2.62. *Sea E un espacio de Banach. Si E^* es reflexivo, entonces E es reflexivo.*

Demostración. Sean $J \colon E \to E^{**}$ y $J_1 \colon E^* \to E^{***}$ los encajes naturales. Decir que E^* es reflexivo es afirmar que J_1 es sobreyectivo.

Está claro que $J^{\mathrm{t}} J_1 \in \mathcal{L}(E^*)$. Para $y \in E^*$, $x \in E$, se verifica

$$
{}_{E^*}\langle J^{\mathrm{t}} J_1 y, x\rangle_E = {}_{E^{***}}\langle J_1 y, Jx\rangle_{E^{**}} = {}_{E^*}\langle y, Jx\rangle_{E^{**}} = {}_{E^*}\langle y, x\rangle_E
$$

así que $J^{\mathrm{t}} J_1 y = y$ para todo $y \in E^*$, esto es, $J^{\mathrm{t}} J_1 = 1_{E^*} \in \mathcal{L}(E^*)$. Como J_1 es sobreyectivo por hipótesis, se deduce que $J^{\mathrm{t}} \colon E^{***} \to E^*$ es inyectivo.

Si $w \in J(E)^\perp \leqslant E^{***}$, entonces $\langle J^{\mathrm{t}} w, x\rangle = \langle w, Jx\rangle = 0$ para todo $x \in E$, así que $J^{\mathrm{t}} w = 0$ en E^*, lo cual implica que $w = 0$ en E^{***}. En otras palabras, $J(E)^\perp = \{0\}$. La completitud de E conlleva la completitud de $J(E)$ – porque la isometría J entrelaza las sucesiones de Cauchy en E y en $J(E)$ – así que $J(E)$ es un subespacio *cerrado* de E^{**}. La reflexividad de E sigue por las igualdades

$$
J(E) = \overline{J(E)} = {}^\perp(J(E)^\perp) = {}^\perp\{0 \in E^{***}\} = E^{**}.
$$

◻

Corolario 2.63. *Los espacios de Banach $\underline{\boldsymbol{\ell}}^1$ y $\underline{\boldsymbol{\ell}}^\infty$ no son reflexivos.* ⊟

Definición 2.64. Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$, denótese su **imagen**[25] por $\underline{\operatorname{Ran} A} := A(E) \leqslant F$. En contraste con el núcleo $\ker A$, el cual es un subespacio cerrado de E (debido a la continuidad de A), la imagen $\operatorname{Ran} A$ no es necesariamente cerrada en F. ◊

Proposición 2.65. *Sea $A \in \mathcal{L}(E, F)$ un operador entre espacios de Banach E y F. Entonces:*

(a) $\ker A^{\mathrm{t}} = (\operatorname{Ran} A)^\perp \leqslant F^*$; $\ker A = {}^\perp(\operatorname{Ran} A^{\mathrm{t}}) \leqslant E$.

(b) A^{t} *es uno-a-uno si y solo si* $\operatorname{Ran} A$ *es denso en* F.

(c) A *es uno-a-uno si y solo si* $\operatorname{Ran} A^{\mathrm{t}}$ *es denso en* E^*_σ.

[25] La notación $\underline{\mathrm{Ran}}$ es evidentemente un anglicismo, al igual que la notación $\underline{\ker}$ para un núcleo. La abreviatura $\underline{\mathrm{Im}}$ es inaceptable, porque suele denotar la parte imaginaria de un número complejo. El vocablo español *rango* no debe usarse para referirse al espacio imagen: en inglés las dos palabras *range* (la imagen) y *rank* (la dimensión de la imagen) se traducen como *rango* en castellano.

Demostración. Ad (a): Es suficiente notar las equivalencias:

$$\begin{aligned} w \in \ker A^{\mathrm{t}} &\iff \langle A^{\mathrm{t}}w, x\rangle = 0 \text{ para todo } x \in E \\ &\iff \langle w, Ax\rangle = 0 \text{ para todo } x \in E \iff w \in (\operatorname{Ran} A)^{\perp}, \\ x \in \ker A &\iff \langle w, Ax\rangle = 0 \text{ para todo } w \in F^* \\ &\iff \langle A^{\mathrm{t}}w, x\rangle = 0 \text{ para todo } w \in F^* \iff x \in {}^{\perp}(\operatorname{Ran} A^{\mathrm{t}}). \end{aligned}$$

Ad (b, c): Basta comprobar estas equivalencias:

$$\begin{aligned} \ker A^{\mathrm{t}} = \{0\} &\iff (\operatorname{Ran} A)^{\perp} = \{0\} \iff \overline{\operatorname{Ran} A} = {}^{\perp}((\operatorname{Ran} A)^{\perp}) = F\,; \\ \ker A = \{0\} &\iff {}^{\perp}(\operatorname{Ran} A^{\mathrm{t}}) = \{0\} \iff \overline{\operatorname{Ran} A^{\mathrm{t}}}^{\,\sigma} = ({}^{\perp}(\operatorname{Ran} A^{\mathrm{t}}))^{\perp} = E^*. \end{aligned}$$

□

► La dualidad entre espacios normados conlleva correspondencias importantes entre los subespacios de un lado y los espacios cocientes del otro lado.

Definición 2.66. Sea E un espacio normado y sea $M \leqslant E$ un subespacio *cerrado*. En el espacio vectorial cociente E/M se define una **norma cociente** por

$$\|x + M\| := \inf\{\, \|x + y\| : y \in M \,\}. \tag{2.21}$$

Es fácil comprobar que esta es una norma[26] sobre el espacio vectorial cociente E/M. Si E es de Banach, el espacio cociente E/M es completo en esta norma. ◊

Proposición 2.67. *Si M es un subespacio cerrado de un espacio de Banach E, hay dos isomorfismos isométricos:*

$$\text{(a)}\quad M^* \simeq E^*/M^{\perp}, \qquad \text{(b)}\quad (E/M)^* \simeq M^{\perp}.$$

Demostración. Ad (a): Sea $I : M \hookrightarrow E$ la inclusión (lineal y continua). Cada $w \in M^*$ posee una extensión $z \in E^*$ con $z|_M = w$ y $\|z\| = \|w\|$, por el Corolario 2.11. Se obtiene $I^{\mathrm{t}}z = w$ porque $\langle I^{\mathrm{t}}z, y\rangle = \langle z, Iy\rangle = \langle w, y\rangle$ para $y \in M$. Luego $I^{\mathrm{t}} : E^* \to M^*$ es sobreyectivo.

La Proposición 2.65 muestra que $\ker I^{\mathrm{t}} = (\operatorname{Ran} I)^{\perp} = M^{\perp}$, así que I^{t} induce una biyección lineal $V : E^*/M^{\perp} \to M^* : z + M^{\perp} \mapsto I^{\mathrm{t}}z$. La estimación

$$\|V(z + M^{\perp})\| = \|I^{\mathrm{t}}z\| = \sup\{\, |\langle z + u, y\rangle| : y \in M,\ \|y\| \leqslant 1 \,\} \leqslant \|z + u\| \quad \text{cuando} \quad u \in M^{\perp}$$

implica que $\|V(z + M^{\perp})\| \leqslant \|z + M^{\perp}\|$ para todo $z \in E^*$.

Por otro lado, al tomar $w \in M^*$, $z \in E^*$ tales que $z|_M = w$, $\|z\| = \|w\|$, hay otra estimación $\|z + M^{\perp}\| \leqslant \|z\| = \|w\| = \|I^{\mathrm{t}}z\| = \|V(z + M^{\perp})\|$. Se concluye que V es una isometría. Además, V es biyectiva porque $\operatorname{Ran} V = \operatorname{Ran} I^{\mathrm{t}} = M^*$.

[26]Fíjese que el lado derecho de (2.21) existe para todo subespacio vectorial M de E, pero el espacio cociente E/M es de Hausdorff – y (2.21) define una *norma* – solo si M es cerrado en E.

Ad (b): Sea $S\colon E \to E/M$ la aplicación cociente. Es evidente que $\|Sx\| \leqslant \|x\|$ para $x \in E$, por la definición (2.21) de la norma cociente. Si $v \in (E/M)^*$, $y \in M$, entonces $\langle S^{\mathrm{t}}v, y\rangle = \langle v, Sy\rangle = \langle v, M\rangle = 0$ [la coclase M es el cero de E/M], así que $\operatorname{Ran} S^{\mathrm{t}} \leqslant M^\perp$.

Si $u \in M^\perp$, la forma lineal $h\colon x + M \mapsto \langle u, x\rangle$ está bien definida y continua, de modo que $h \in (E/M)^*$. Además, vale $\langle u, x\rangle = \langle h, Sx\rangle = \langle S^{\mathrm{t}}h, x\rangle$ para $x \in E$, así que $S^{\mathrm{t}}h = u$. De esta manera, se ha comprobado que $\operatorname{Ran} S^{\mathrm{t}} = M^\perp$. De la Proposición 2.65(c), S^{t} es inyectiva porque S es sobreyectiva. Por lo tanto, S^{t} es una *biyección lineal* entre $(E/M)^*$ y $M^\perp$.

Si $v \in (E/M)^*$, la estimación

$$|\langle S^{\mathrm{t}}v, x\rangle| = |\langle v, Sx\rangle| \leqslant \|v\|\,\|Sx\| = \|v\|\,\|x + M\| \leqslant \|v\|\,\|x\| \quad \text{para} \quad x \in E$$

dice que $\|S^{\mathrm{t}}v\| \leqslant \|v\|$. Ahora tómese cualquier $x \in E$ tal que $\|x + M\| \leqslant 1$. Para cada $\varepsilon > 0$, hay $z \in (x + M)$ tal que $\|z\| < 1 + \varepsilon$. Por lo tanto,

$$|\langle v, x + M\rangle| = |\langle v, Sx\rangle| = |\langle v, Sz\rangle| = |\langle S^{\mathrm{t}}v, z\rangle| \leqslant \|S^{\mathrm{t}}v\|\,\|z\| < (1 + \varepsilon)\|S^{\mathrm{t}}v\|.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que $\|v\| \leqslant \|S^{\mathrm{t}}v\|$, para cada $v \in (E/M)^*$. Entonces se ha comprobado que $S^{\mathrm{t}}\colon (E/M)^* \to M^\perp$ es una isometría biyectiva. □

Proposición 2.68. *Sea E un espacio de Banach reflexivo y sea $M \leqslant E$ un subespacio cerrado. Entonces M es otro espacio de Banach reflexivo.*

Demostración. Obsérvese que hay dos isometrías $M^{**} \simeq (E^*/M^\perp)^* \simeq M^{\perp\perp} \leqslant E^{**}$, al aplicar la Proposición 2.67 dos veces: la parte (a) para M, y la parte (b) para obtener el dual de $E^*/M^\perp$. En adelante, se identificará M^{**} con el subespacio $M^{\perp\perp}$ de E^{**}.

Tómese $h \in M^{**}$. Se debe mostrar que $h \in J(M)$, donde $J\colon E \to E^{**}$ es el encaje natural; nótese que $J(M) \leqslant M^{\perp\perp}$. Si $I\colon M \hookrightarrow E$ es la inclusión, la forma lineal $h \circ I^{\mathrm{t}}\colon E^* \to \mathbb{C}$ es un elemento de E^{**}. Como $E^{**} = J(E)$ por hipótesis, entonces $h \circ I^{\mathrm{t}} = Jx$ para algún $x \in E$.

De hecho, x pertenece a M; porque si no, habría un elemento $u \in M^\perp$ con $\langle u, x\rangle \neq 0$, por el Corolario 2.15. Entonces $I^{\mathrm{t}}u = 0$ en M^* porque $u \in M^\perp = \ker I^{\mathrm{t}}$ por la Proposición 2.65(a); por lo tanto, sería $\langle u, x\rangle = \langle u, Jx\rangle = h(I^{\mathrm{t}}u) = 0$. Esta inconsistencia muestra que tal u no existe: se concluye que $x \in M$.

Además, $\operatorname{Ran} I^{\mathrm{t}} = M^*$ por la demostración de la Proposición 2.67 anterior. Por lo tanto, la relación deseada $h = Jx$ (como elementos de M^{**}) emerge de las igualdades:

$$\langle I^{\mathrm{t}}y, h\rangle = \langle y, Jx\rangle = \langle y, x\rangle = \langle y, Ix\rangle = \langle I^{\mathrm{t}}y, x\rangle = \langle I^{\mathrm{t}}y, Jx\rangle \quad \text{si} \quad y \in E^*.$$ □

2.8 Ejercicios sobre aplicaciones lineales y dualidad

En los ejercicios que siguen, E, F y G son espacios normados, salvo indicación contraria.

Ejercicio 2.1. Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y $S \in \mathcal{L}(F, G)$, mostrar que $ST \in \mathcal{L}(E, G)$ con $\|ST\| \leqslant \|S\|\,\|T\|$.

Ejercicio 2.2. El espacio vectorial finitodimensional $\mathbb{C}^n$ es un subespacio de $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, y como tal es un subespacio de cada espacio $\underline{\ell}^p$ con la norma $\|\cdot\|_p$ correspondiente. Una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{C})$ define un operador lineal $x \mapsto Ax$ sobre el espacio normado $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$, si $1 \leqslant p \leqslant \infty$; la norma correspondiente es

$$\|A\|_{p\to p} := \sup\{\, \|Ax\|_p : x \in \mathbb{C}^n,\ \|x\|_p \leqslant 1 \,\}. \tag{2.22}$$

(a) Comprobar las igualdades

$$\|A\|_{1\to 1} = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad \|A\|_{\infty\to\infty} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

(b) Encontrar $B \in M_2(\mathbb{C})$ tal que las tres normas $\|B\|_{1\to 1}$, $\|B\|_{2\to 2}$, $\|B\|_{\infty\to\infty}$ son distintas.

Ejercicio 2.3. Demostrar que una *aplicación bilineal* $B\colon E \times F \to G$ es continua sobre $E \times F$ si y solo si B es continua en $(0, 0)$, si y solo si hay una constante $M \geqslant 0$ tal que

$$\|B(x, y)\|_G \leqslant M\,\|x\|_E\,\|y\|_F \quad \text{para todo} \quad x \in E,\ y \in F.$$

Sea $\mathcal{B}(E, F; G)$ el espacio vectorial de las aplicaciones bilineales *continuas* de $E \times F$ en G. Comprobar que la fórmula

$$\|B\| := \sup\{\, \|B(x, y)\|_G : \|x\|_E \leqslant 1,\ \|y\|_F \leqslant 1 \,\}$$

define una norma en $\mathcal{B}(E, F; G)$.

Ejercicio 2.4. Sea $\mathcal{L}(E) \equiv \mathcal{L}(E, E)$ el espacio de operadores lineales continuos sobre E. Sean $A, B \in \mathcal{L}(E)$ y defínase $T_{A,B}\colon \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) : X \mapsto AXB$. Demostrar que $T_{A,B} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$, con $\|T_{A,B}\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.

Ejercicio 2.5. La fórmula

$$Tf(x) := \int_0^x f(t)\,dt$$

define una aplicación lineal $T\colon C([0, 1]) \to C([0, 1])$. Demostrar que T es continua y que $\|T\| = 1$. Demostrar por inducción que

$$T^n f(x) = \int_0^x \frac{1}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} f(t)\,dt$$

y concluir que $\|T^n\| \leqslant 1/n!$ para $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2.6. Defínase dos operadores de *operadores de corrimiento* $U, V \in \mathcal{L}(\underline{\ell}^p)$ por las fórmulas:

$$
\begin{aligned}
U &\colon (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mapsto (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots), \\
V &\colon (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mapsto (0, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, \dots).
\end{aligned}
$$

Calcular las normas $\|U\|_{p\to p}$ y $\|V\|_{p\to p}$ definidas por (2.22), para cualquier p con $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Ejercicio 2.7. Si $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es un intervalo compacto, sea $C([a, b])$ el espacio vectorial de funciones continuas $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$. Si $a \leqslant s \leqslant b$, demostrar que la **evaluación** $\underline{\mathrm{ev}_s}\colon C([a, b]) \to \mathbb{C}$ definida por $\mathrm{ev}_s(f) := f(s)$ es una forma lineal y continua sobre $C[a, b]$ con su norma usual $\|\cdot\|_\infty$; pero ev_s no es continua sobre $C([a, b])$ dotado con la norma $\|\cdot\|_2$.

Ejercicio 2.8. Sea $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ el espacio de Bargmann y Segal (Ejemplo 1.21). Cada $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ tiene una serie de Taylor $f(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, convergente en todo $\mathbb{C}$.

(a) Comprobar que $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n!\,|a_n|^2$. Concluir que los monomios $u_n(z) := (n!)^{-1/2}\,z^n$, para $n \in \mathbb{N}$, forman una base ortonormal para $\mathcal{F}(\mathbb{C})$.

(b) Usar la desigualdad de Schwarz para comprobar que

$$
|f(z)| \leqslant \|f\|\,e^{|z|^2} \quad \text{para todo} \quad z \in \mathbb{C}.
$$

Concluir que la evaluación $\mathrm{ev}_z : f \mapsto f(z)$ [para cualquier $z \in \mathbb{C}$] es una forma lineal continua sobre $\mathcal{F}(\mathbb{C})$.

(c) Defínase una familia de funciones $\{\, e_w : w \in \mathbb{C} \,\}$ por

$$
e_w(z) := \exp(\bar{w}z) \equiv e^{\bar{w}z} \quad \text{para} \quad z, w \in \mathbb{C}.
$$

Verificar que cada $e_w \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ y que $\langle e_w \mid f \rangle = f(w)$ para todo $w \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 2.9. Sea $E = C([-1, 1])$ con la norma $\|u\|_\infty := \sup\{\, |u(t)| : -1 \leqslant t \leqslant 1 \,\}$. Defínase

$$
h(u) := \int_0^1 u(t)\,dt - \int_{-1}^0 u(t)\,dt.
$$

Comprobar que $h\colon E \to \mathbb{C}$ es lineal y continua, con $\|h\| = 2$. Demostrar también que no hay $u \in E$ alguna con $\|u\|_\infty = 1$ y $|h(u)| = 2$.

Ejercicio 2.10. Sea E el espacio normado de todos los *polinomios* complejos $p\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$, con la norma $\|p\|_1 := \int_0^1 |p(t)|\,dt$. Demostrar que la forma bilineal $B\colon E \times E \to \mathbb{C}$ dada por $B(p, q) := \int_0^1 p(t)\,q(t)\,dt$ es separadamente continua pero no es conjuntamente continua.

Ejercicio 2.11 (Límites de Banach)**.** Sea $E = \ell^\infty_{\mathbb{R}}$ el espacio de Banach *real* de sucesiones reales acotadas, con la norma $\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Denótese por E^* el espacio de formas $\mathbb{R}$-lineales continuas sobre E. Sea $U : E \to E$ el operador de corrimiento $(U\boldsymbol{x})_n := x_{n+1}$. Demostrar que hay un elemento $L \in E^*$ tal que:

(a) $L(U\boldsymbol{x}) = L(\boldsymbol{x})$ para todo $\boldsymbol{x} \in E$;

(b) $\liminf_n x_n \leqslant L(\boldsymbol{x}) \leqslant \limsup_n x_n$ para todo $\boldsymbol{x} \in E$.

⟦ Indicación: Sea $\mu_n(\boldsymbol{x}) := (x_0 + x_1 + \cdots + x_n)/(n + 1)$ y sea M el subespacio de sucesiones acotadas $\boldsymbol{x}$ tales que $\lim_n \mu_n(\boldsymbol{x})$ existe. Demostrar que $p(\boldsymbol{x}) := \limsup_n x_n$ es una función convexa sobre E, y aplicar el teorema de Hahn y Banach. ⟧

Ejercicio 2.12. Considérese $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ como espacio normado con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Defínase una aplicación lineal $T : \mathbb{C}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ por

$$T : (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mapsto (x_0, 2x_1, 3x_2, \dots, nx_{n-1}, \dots).$$

Demostrar que T no es continua, pero que hay una sucesión de aplicaciones lineales continuas $T_n : \mathbb{C}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, para $n \in \mathbb{N}$, tal que $T\boldsymbol{x} = \lim_{n\to\infty} T_n\boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$. [¿Por qué este ejemplo no contradice el principio de acotación uniforme?]

Ejercicio 2.13. Si E y F son espacios de Banach, se puede definir dos normas sobre su suma directa algebraica $E \oplus F := \{ (x, y) : x \in E,\ y \in F \}$:

$$\|(x, y)\| := \|x\|_E + \|y\|_F, \qquad |||(x, y)||| := \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}.$$

Verificar que estas dos normas sobre $E \oplus F$ son equivalentes, y que $E \oplus F$ es un espacio de Banach para ambas normas.

Ejercicio 2.14. Defínase $f_s \in C([0, 1])$ para $0 < s < 1$ por $f_s(t) := 2st/(1 - s^2t^2)$. Calcular $\|f_s\|_\infty$ y $\|f_s\|_1$. Concluir que las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$ no son equivalentes sobre el espacio $\mathbb{C}$-vectorial $C([0, 1])$.

Ejercicio 2.15. Sea E un espacio de Banach y sean M, N dos subespacios de E tales que $M \cap N = \{0\}$ y $M + N = E$. Defínase $P : E \to E$ por $P(x + y) := x$ cuando $x \in M$, $y \in N$; fíjese que $P^2 = P$. Demostrar que la aplicación lineal idempotente P es *continua* si y solo si M y N son subespacios *cerrados* de E.

Ejercicio 2.16. Sean E, F dos espacios de Banach, y sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un operador tal que haya $m > 0$ con $\|Tx\| \geqslant m\|x\|$ para todo $x \in E$. Demostrar que $\operatorname{Ran} T := \{ Tx : x \in E \}$ es un subespacio *cerrado* de F. Demostrar además que T^{-1} existe con $T^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Ran} T, E)$.

Ejercicio 2.17. Sean $S : H \to H$ y $T : H \to H$ dos aplicaciones lineales de un espacio de Hilbert H en sí mismo, tales que $\langle y \mid Sx\rangle = \langle Ty \mid x\rangle$ para todo $x, y \in H$. Demostrar que S y T son continuas.

Ejercicio 2.18. Sea $C^1[a,b]$ el espacio vectorial de funciones continuamente diferenciables $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$; donde los derivadas en los extremos son unilaterales:

$$f'(a) := \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \qquad f'(b) := \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(b) - f(b-h)}{h}.$$

Demostrar que $C^1[a,b]$ es un subespacio denso de $C[a,b]$; este subespacio denso es el dominio del operador de derivación $D\colon f \mapsto f'$ sobre $C[a,b]$.

Verificar que D tiene grafo cerrado en $C[a,b] \times C[a,b]$, pero que D no se extiende a una aplicación lineal continua sobre $C[a,b]$. ¿Por qué esto no contradice el teorema del grafo cerrado?

Ejercicio 2.19. Considérese la ecuación diferencial lineal ordinaria con condición inicial:

$$x'(t) + f(t)\,x(t) = g(t), \qquad x(a) = z,$$

donde $f \in C[a,b]$. Se sabe que este problema tiene solución única $x \in C^1[a,b]$ si $g \in C[a,b]$, $z \in \mathbb{C}$. Demostrar que esta solución depende continuamente de los datos g, z.

Concretamente: dadas una sucesión de funciones $\{g_n\} \subset C[a,b]$ y una sucesión $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ tales que $g_n(t) \to g(t)$ uniformemente sobre $[a,b]$, y $z_n \to z$, verificar que las soluciones correspondientes x_n cumplen $x_n(t) \to x(t)$ y $x_n'(t) \to x'(t)$ uniformemente sobre $[a,b]$.

⟦ Indicación: usar la norma $|||x||| := \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$ sobre $C^1[a,b]$, para comprobar que la aplicación lineal $x \mapsto \bigl(x' + fx, x(a)\bigr)$ entre espacios apropiados tiene un inverso continuo. ⟧

Ejercicio 2.20. Considérese el espacio de Banach $E := \{\, f \in C([-\pi,\pi]) : f(-\pi) = f(\pi)\,\}$ de funciones continuas periódicas, el cual es un subespacio cerrado de $C([-\pi,\pi])$. Demostrar que existe una función $f \in E$ tales que las sumas parciales de su **desarrollo de Fourier**:

$$\underline{T_n f}(\theta) := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e^{ik\theta}, \quad \text{donde} \quad c_k(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} f(\theta)\,d\theta \quad \text{para} \quad k \in \mathbb{Z},$$

no convergen uniformemente sobre $[-\pi,\pi]$. Para ello, observar que T_n es una *convolución*:

$$T_n f(\theta) := \underline{D_n * f}(\theta) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(\theta - \phi) f(\phi)\,d\phi,$$

donde D_n es el **núcleo de Dirichlet**:

$$D_n(\theta) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta} = \frac{\operatorname{sen}((n+\frac12)\theta)}{\operatorname{sen}(\frac12\theta)}.$$

Comprobar que

$$\|T_n\| = \|D_n\|_1 > \frac{4}{\pi^2}\biggl(1 + \frac12 + \cdots + \frac1n\biggr),$$

y concluir que la sucesión $\{T_n f\}$ es divergente para algún f.

⟦ Indicación: usar $|\operatorname{sen}(\frac12\theta)| \leqslant \frac12|\theta|$ y cambiar $\phi := (n+\frac12)\theta$ en la integral de $|D_n(\theta)|$. ⟧

Ejercicio 2.21. Si $E = C[0,1]$, defínase $f \in E^*$ por $f(x) := \int_0^1 t\,x(t)\,dt$. Encontrar un elemento $x_0 \in E$ tal que $\|x_0\| = 1$ y $f(x_0) = \|f\|$.

Sea $g := f|_M$ donde $M := \{\, x \in E : x(1) = 0 \,\}$. Demostrar que $\|g\| = \|f\|$, de modo que $g \in M^*$, pero que g no alcanza su norma sobre elemento alguna de la bola unitaria $\overline{B}_1(M)$.

Ejercicio 2.22. Sea E un espacio normado y denótese por E^*_σ el espacio localmente convexo E^* con la topología débil estelar $\sigma(E^*, E)$. Demostrar que E^*_σ es metrizable si y sólo si el espacio vectorial E posee una base (de Hamel) numerable.

Demostrar que un espacio de Banach no puede tener una base de Hamel infinita pero numerable $\{\, x_1, x_2, x_3, \dots \,\}$. ⟦ Indicación: tomar $A_n := \operatorname{lin}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ y usar el teorema de Baire. ⟧ Concluir que E^*_σ no es metrizable cuando E es un espacio de Banach infinitodimensional.

Ejercicio 2.23. Sea $\underline{\boldsymbol{c}}$ el espacio de Banach de *sucesiones convergentes*, con la norma $\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$. Usando las notaciones $x_\infty := \lim_{n\to\infty} x_n$ para $x \in \underline{\boldsymbol{c}}$ y $\mathbb{1} := (1, 1, \dots, 1, \dots)$, verificar que $\boldsymbol{x} = x_\infty\,\mathbb{1} + \sum_{k=0}^\infty (x_k - x_\infty)\,\boldsymbol{e}_k$ como desarrollo convergente en la norma de $\underline{\boldsymbol{c}}$. Hallar un apareamiento de dualidad entre $\underline{\boldsymbol{c}}$ y $\underline{\boldsymbol{\ell}}^1$. Con esta apareamiento, demostrar que $\underline{\boldsymbol{c}}^*$ es isométricamente isomorfa a $\underline{\boldsymbol{\ell}}^1$.

⟦ Los espacios de Banach $\underline{\boldsymbol{c}}_0$ y $\underline{\boldsymbol{c}}$ forman entonces un *contraejemplo* a la afirmación de que $E^* \simeq F^*$ implica $E \simeq F$. ⟧

Ejercicio 2.24. El espacio $\underline{\boldsymbol{s}}$ de sucesiones rápidamente decrecientes (Ejemplo 1.10) es un espacio de Fréchet. Su topología está dada por las seminormas $\{\, r_n : n \in \mathbb{N} \,\}$, donde

$$r_n(\boldsymbol{x}) := \biggl(\sum_{k=0}^\infty (k+1)^{2n} |x_k|^2\biggr)^{1/2} \quad \text{para} \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Defínase el espacio $\underline{\boldsymbol{t}}$ de **sucesiones lentamente crecientes** por

$$\underline{\boldsymbol{t}} := \{\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : r_{-m}(\boldsymbol{y}) < \infty \text{ para algún } m \in \mathbb{N} \,\}.$$

Demostrar que el apareamiento de dualidad (2.9): $\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle := \sum_{k=0}^\infty y_k x_k$ está definido para $\boldsymbol{x} \in \underline{\boldsymbol{s}}$, $\boldsymbol{y} \in \underline{\boldsymbol{t}}$; y que esta fórmula define una biyección lineal entre $\underline{\boldsymbol{t}}$ y $\underline{\boldsymbol{s}}^*$.

Ejercicio 2.25. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida con $\mu(X) < \infty$. Mostrar que el espacio dual de $L^1(X,\mu)^*$ es isométricamente isomorfa a $L^\infty(X,\mu)$.

⟦ Indicación: Cada $T \in L^1(X,\mu)^*$ es de la forma $Tf = \int_X f g_T\,d\mu$ para alguna función medible g_T. Si $r > \|T\|$, demostrar que $\{\, x \in X : |g_T(x)| > r \,\}$ es de medida nula. ⟧

Ejercicio 2.26. Demostrar que $L^1[a,b]$ es isométricamente isomorfa a un subespacio propio de $(L^\infty[a,b])^*$. Para ello, comprobar que la evaluación $f \mapsto f(b)$ es una forma lineal continua de norma 1 sobre $C[a,b]$, que se extiende – por el teorema de Hahn y Banach – a un elemento de $(L^\infty[a,b])^*$; deducir que la imagen de $L^1[a,b]$ no es todo $(L^\infty[a,b])^*$.

Concluir que tanto $L^1[a,b]$ como $L^\infty[a,b]$ son espacios de Banach no reflexivos.

Ejercicio 2.27. Sea Mfa($\mathbb{N}$) el espacio normado de **medidas acotadas finitamente aditivas** sobre $\mathbb{N}$; sus elementos son las funciones $\mu\colon 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\mu(\emptyset) = 0; \quad \mu(A \uplus B) = \mu(A) + \mu(B); \quad \|\mu\| := \sup\biggl\{ \sum_{j=1}^{n} |\mu(A_j)| : \mathbb{N} = \biguplus_{j=1}^{n} A_j \biggr\} < \infty.$$

Si $T \in (\underline{\boldsymbol{\ell}}^\infty)^*$, comprobar que $A \mapsto T(\mathbb{1}_A)$ es un elemento de Mfa($\mathbb{N}$). Demostrar que esta correspondencia es una isometría biyectiva entre $(\underline{\boldsymbol{\ell}}^\infty)^*$ y Mfa($\mathbb{N}$). Verificar también que $\mu \in J(\underline{\boldsymbol{\ell}}^1)$ si y solo si μ es *numerablemente* aditiva.

Ejercicio 2.28. Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ posee la matriz $A = [a_{jk}]$ respecto de las bases estándares de $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^m$, verificar que la matriz del operador S^{t} es la transpuesta matricial $A^{\mathrm{t}} := [a_{kj}]$.

Ejercicio 2.29. (a) Si $g \in C[a,b]$, el **operador de multiplicación** $M_g \in \mathcal{L}(L^2[a,b])$ se define por $M_g h(t) := g(t)\,h(t)$ para $h \in L^2[a,b]$. Obtener las formas explícitas de la transpuesta M_g^{t} y del adjunto M_g^*.

(b) Si $k \in C\bigl([a,b] \times [a,b]\bigr)$, defínase un **operador integral** $K \in \mathcal{L}(L^2[a,b])$ por

$$Kh(t) := \int_a^b k(t,s)\,h(s)\,ds \quad \text{para} \quad h \in L^2[a,b].$$

Obtener las formas explícitas de la transpuesta K^{t} y del adjunto K^*.

Ejercicio 2.30. Si H es un espacio de Hilbert, $x, y \in H$, el símbolo $|x\rangle\langle y|$ denota el operador de rango uno $z \mapsto x\langle y \mid z\rangle = \langle y \mid z\rangle x$. ¿Cuál es el adjunto de este operador en $\mathcal{L}(H)$?

Ejercicio 2.31. (a) Sea E un espacio normado con espacio dual separable E^*. Demostrar que E también es separable.

⟦ Indicación: si $\{y_n\}$ es una sucesión densa en E^*, elíjase puntos $x_n \in E$ para $n \in \mathbb{N}$ con $|\langle y_n, x_n\rangle| \geqslant \frac{1}{2}\|y_n\|\,\|x_n\|$. Verificar que el subespacio $\operatorname{lin}\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ es denso en E. ⟧

(b) Concluir que un espacio de Banach *reflexivo* E es separable si y solo si E^* es separable. Dar un ejemplo de un espacio de Banach separable con espacio dual no separable.

Ejercicio 2.32. Si $\boldsymbol{x} \in \underline{\boldsymbol{c}}_0$, sea $f_{\boldsymbol{x}} \in C[0,1]$ la función continua dada por

$$f_{\boldsymbol{x}}(0) := 0, \quad f_{\boldsymbol{x}}\biggl(\frac{1-t}{k} + \frac{t}{k+1}\biggr) := (1-t)x_{k-1} + t x_k, \quad \text{para} \quad k \geqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Demostrar que $\boldsymbol{x} \mapsto f_{\boldsymbol{x}}$ es una isometría (no sobreyectiva) de $\underline{\boldsymbol{c}}_0$ en $C[0,1]$. Concluir que el espacio de Banach $C[0,1]$ no es reflexivo.

Ejercicio 2.33. Si E es un espacio de Banach reflexivo, mostrar que E^* también es reflexivo.

Ejercicio 2.34. Si E es un espacio de Banach y $M \leqslant E$ es un subespacio cerrado, demostrar que la reflexividad de E implica la reflexividad de M y de E/M. Si, por el contrario, tanto M como E/M son reflexivos, ¿puede afirmarse que E es reflexivo?

Ejercicio 2.35. (a) Sean $f, g_1, \dots, g_m$ formas lineales sobre un espacio $\mathbb{C}$-vectorial E. Comprobar que $f = \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_m g_m$ para algunos coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ si y solo si $\bigcap_{j=1}^m \ker g_j \leqslant \ker f$.

(b) Si E es un espacio localmente convexo, demostrar que una forma lineal $f : E \to \mathbb{C}$ es continua si y solo si $\ker f$ es un subespacio cerrado de E.

(c) Si E es un espacio localmente convexo, sea E_σ el espacio $\mathbb{C}$-vectorial E dotado con la topología débil $\sigma(E, E^*)$; demostrar que $(E_\sigma)^* = E^*$.

Ejercicio 2.36. Sea E un espacio de Banach y sea $P \in \mathcal{L}(E)$ *idempotente*, esto es, $P^2 = P$; véase el Ejercicio 2.15.

(a) Demostrar que un subespacio cerrado $M \leqslant E$ es la imagen $M = P(E)$ de un operador idempotente si y solo si M posee un **complemento** en E: un complemento de M, si existe, es otro subespacio cerrado $N \leqslant E$ con $M \cap N = \{0\}$, tal que $E \simeq M \oplus N$ como espacios de Banach. (La norma de $M \oplus N$ está dada por $\|x + y\| := \|x\|_M + \|y\|_N$.)

(b) Verificar que $\|P\| \geqslant 1$ excepto si $P = 0$. Dar un ejemplo de un operador idempotente con $\|P\| > 1$.

(c) Si $J : E \to E^{**}$ y $J_1 : E^* \to E^{***}$ son los encajes naturales, demostrar que $P := J_1 J^{\mathrm{t}}$ es un idempotente de norma 1 en $\mathcal{L}(E^{***})$.

3 Operadores y Teoría Espectral

He had bought a large map representing the sea,
Without the least vestige of land:
And the crew were much pleased when they found it to be
A map they could all understand.
— Lewis Carroll, *The Hunting of the Snark*[1]

3.1 Álgebras de Banach

Si H es un espacio de Hilbert, los operadores acotados forman un espacio de Banach $\mathcal{L}(H)$ que además es un álgebra: la composición usual de operadores es un producto asociativo que también es una aplicación bilineal continua. Este es un ejemplo típico de un *álgebra de Banach*. Los operadores acotados invertibles forman el grupo de elementos invertibles en esta álgebra de Banach.

Por otra parte, el espacio $C(K)$ de funciones continuas sobre un conjunto compacto K es un álgebra de Banach conmutativa, bajo el producto usual de funciones. Toda la información acerca del espacio topológico K puede extraerse del estudio de esta álgebra $C(K)$. Desde ese punto de vista, el álgebra no conmutativa $\mathcal{L}(H)$ puede considerarse como una especie de álgebra de coordenadas de un *espacio topológico no conmutativo*.[2]

Definición 3.1. Un **álgebra de Banach** es un espacio de Banach A que posee un *producto* bilineal y asociativo $A \times A \to A : (x, y) \mapsto xy$ tal que

$$\|xy\| \leqslant \|x\| \, \|y\| \quad \text{para todo} \quad x, y \in A. \tag{3.1}$$

Dícese que A es **unital** si hay[3] un elemento identidad $1 \in A$ con $\|1\| = 1$. ◊

La relación (3.1) implica la *continuidad* del producto. En efecto, si $x_n \to x$, $y_n \to y$ en A, entonces $\|y_n\| \to \|y\|$ y por tanto la sucesión de las normas $\|y_n\|$ es acotada; en consecuencia, cuando $n \to \infty$, se verifica

$$\|x_n y_n - xy\| \leqslant \|x_n y_n - x y_n\| + \|x y_n - xy\| \leqslant \|x_n - x\| \, \|y_n\| + \|x\| \, \|y_n - y\| \to 0.$$

[1] Charles L. Dodgson (1832–1898), matemático inglés, escribió varios cuentos y poemas bajo el pseudónimo *Lewis Carroll*.

[2] La correspondencia $K \leftrightarrow C(K)$ da lugar a un *funtor* contravariante entre los espacios topológicos compactos (de Hausdorff) y ciertas álgebras de Banach conmutativas. Este es un resultado fundamental de Guelfand y Naĭmark, en un artículo que se considera un punto de partida de la llamada *geometría no conmutativa*: Israel M. Guelfand y Mark A. Naĭmark, "On the embedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space", *Matematicheskii Sbornik* **12** (1943), 197–213.

[3] El contexto permitirá distinguir la identidad $1 \in A$ del número $1 \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 3.2. Si H es un espacio de Hilbert, el espacio $\mathcal{L}(H)$ con la composición de operadores (lineales y continuos) es un álgebra de Banach unital. Para comprobar (3.1), basta notar que

$$\|ST\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|STx\| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|S\|\,\|Tx\| = \|S\|\,\|T\|. \qquad \lozenge$$

Ejemplo 3.3. Si K es un espacio topológico compacto, $C(K)$ con el producto puntual de funciones es un álgebra de Banach *conmutativa*, cuyo elemento unidad es la función constante de valor 1:

$$\|fg\|_\infty = \sup_{t\in K} |f(t)\,g(t)| \leqslant \sup_{s,t\in K} |f(s)\,g(t)| = \|f\|_\infty\|g\|_\infty. \qquad \lozenge$$

Ejemplo 3.4. Si X es un espacio topológico localmente compacto pero no compacto, $C_0(X)$ con el producto puntual de funciones es un álgebra conmutativa de Banach *no unital*. ◊

Ejemplo 3.5. El espacio de sucesiones $\underline{\boldsymbol{\ell}^1}$ es un álgebra de Banach bajo el *producto de Cauchy* de sucesiones: $(\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y})_n := \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k}$. ◊

Ejemplo 3.6. Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m)$ son dos funciones integrables, su **convolución** es la función $f * g \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ definida por cualquiera de las fórmulas

$$\underline{f * g}(x) := \int f(x-t)\,g(t)\,d^m t = \int f(s)\,g(x-s)\,d^m s \tag{3.2}$$

(donde el dominio de estas integrales es todo $\mathbb{R}^m$). Estas dos integrales son iguales porque la medida de Lebesgue es invariante bajo el cambio de variable $s := x - t$ para cada x fijo. El teorema de Fubini garantiza que $f * g$ es también integrable, con

$$\begin{aligned}\|f * g\|_1 &= \int |f * g(x)|\,d^m x \leqslant \iint |f(x-t)|\,|g(t)|\,d^m t\,d^m x \\ &= \iint |f(s)|\,|g(t)|\,d^m t\,d^m s = \int |f(s)|\,d^m s \int |g(t)|\,d^m t = \|f\|_1\|g\|_1 .\end{aligned}$$

Entonces $L^1(\mathbb{R}^m)$ es un álgebra de Banach bajo convolución, conmutativa pero no unital. ◊

Lema 3.7. *Cualquier álgebra de Banach A es isomorfo a un ideal de codimensión* 1 *en un álgebra de Banach unital.*

Demostración. Defínase $\underline{A^+} := A \oplus \mathbb{C}$, con producto y norma definidos por

$$(x,\lambda)(y,\mu) := (\mu x + \lambda y + xy, \lambda\mu), \qquad \|(x,\lambda)\| := \|x\| + |\lambda|.$$

Este producto es bilineal y asociativo, con elemento identidad $(0,1)$. Además, resulta que

$$\big\|(x,\lambda)(y,\mu)\big\| = \|\mu x + \lambda y + xy\| + |\lambda\mu| \leqslant \big(\|x\| + |\lambda|\big)\big(\|y\| + |\mu|\big),$$

así que A^+ es un álgebra de Banach. Está claro que $\{\,(x,0) : x \in A\,\}$ es un ideal en A^+ y que $x \mapsto (x,0)$ es una isometría lineal de A en A^+ que preserva productos. □

Si el álgebra de Banach A ya es unital, hay un isomorfismo de álgebras $A^+ \simeq A \oplus \mathbb{C}$ dado por $(x, \lambda) \mapsto (x - \lambda 1, \lambda)$.

Ejemplo 3.8. Si $A = C_0(X)$ con X localmente compacto pero no compacto, la *compactificación de un punto* de X es el compacto $X^+ := X \uplus \{\infty\}$. El isomorfismo usual entre $C_0(X)$ y $\{ f \in C(X^+) : f(\infty) = 0 \}$ entrelaza los productos puntuales; al identificar $\mathbb{C}$ con el conjunto de funciones constantes sobre X^+, se ve que $A^+ \simeq C(X^+)$. ◊

► En adelante, las álgebras de Banach mencionadas serán unitales, salvo indicación contraria. El *grupo de elementos invertibles* de A será denotado por $\underline{A^\times}$. Fíjese que $1 \in A^\times$.

Escolio 3.9. *En un espacio de Banach E, una serie $\sum_{k=0}^\infty x_k$ converge (por definición) si la sucesión de sus sumas parciales converge en la norma de E. Esta serie se dice* ***absolutamente convergente*** *si $\sum_{k=0}^\infty \|x_k\|$ converge en $\mathbb{R}$. Entonces una serie absolutamente convergente es convergente en E; y se verifica la desigualdad*

$$\Bigl\| \sum_{k=0}^\infty x_k \Bigr\| \leqslant \sum_{k=0}^\infty \|x_k\|.$$

Proposición 3.10. *Sea A un álgebra de Banach unital. El grupo $A^\times$ es abierto en A e incluye la bola abierta $\{ x \in A : \|1 - x\| < 1 \}$.*

Demostración. Si $y \in A$ con $\|y\| < 1$ y si $m \geqslant n$, la desigualdad triangular y la propiedad (3.1) implican que[4]

$$\Bigl\| \sum_{k=n}^m y^k \Bigr\| \leqslant \sum_{k=n}^m \|y^k\| \leqslant \sum_{k=n}^m \|y\|^k \leqslant \frac{\|y\|^n}{1 - \|y\|}\,.$$

Entonces, las sumas parciales de $\sum_{k=0}^\infty y^k$ forman una sucesión de Cauchy en A; esta serie geométrica converge absolutamente en A.

Tómese $x \in A$ con $\|1 - x\| < 1$. Escríbase $z_n := \sum_{k=0}^n (1 - x)^k$ y $z := \sum_{k=0}^\infty (1 - x)^k \in A$; de modo que $z_n \to z$ en A. Entonces

$$\begin{aligned} xz &= z - (1 - x)z = z - \lim_{n\to\infty} ((1 - x)z_n) = z - \lim_{n\to\infty} (z_{n+1} - 1) = 1, \\ zx &= z - z(1 - x) = z - \lim_{n\to\infty} (z_n(1 - x)) = z - \lim_{n\to\infty} (z_{n+1} - 1) = 1, \end{aligned}$$

así que $x \in A^\times$ con $x^{-1} = \sum_{k=0}^\infty (1 - x)^k$.

Más generalmente, si $y \in A^\times$, tómese $x \in A$ con $\|x - y\| < 1/\|y^{-1}\|$. Entonces

$$\begin{aligned} \|xy^{-1} - 1\| &\leqslant \|x - y\|\,\|y^{-1}\| < 1, \\ \|y^{-1}x - 1\| &\leqslant \|y^{-1}\|\,\|x - y\| < 1, \end{aligned}$$

[4] Aquí se emplea el convenio $y^0 := 1$ si $y \neq 0$ en A.

así que hay $u, v \in A$ tales que $xy^{-1}u = 1$ y $vy^{-1}x = 1$, por el párrafo anterior. Luego, x tiene inversos a la derecha y a la izquierda, que necesariamente coinciden; es decir, x es invertible en A, con $y^{-1}u = vy^{-1} = x^{-1}$. Esto dice que $A^\times$ incluye la bola abierta $B\bigl(y; 1/\|y^{-1}\|\bigr)$ toda vez que $y \in A^\times$. Se concluye que $A^\times$ es abierto en A. $\square$

En el grupo $A^\times$, la inversión $x \mapsto x^{-1}$ no solamente es continua sino también *diferenciable*.

Definición 3.11. Sean E y F dos espacios de Banach; sea U un abierto en E. Una función $f : U \to F$ es **diferenciable** (en el sentido de Fréchet) en $x \in U$, si existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que: para todo $\varepsilon > 0$ hay $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ con $B(x; \delta) \subseteq U$ y

$$\|v\| < \delta \implies \|f(x + v) - f(x) - Tv\| < \varepsilon\|v\|.$$

Se escribe $df(x) := T$. Si f es diferenciable en cada $x \in U$, la función $df : U \to \mathcal{L}(E, F)$ es su **derivada**. $\Diamond$

Obsérvese que si $S \in \mathcal{L}(E, F)$ es lineal y continua, entonces S es automáticamente diferenciable en E, con $dS(x) \equiv S$ para todo $x \in E$.

Si f es diferenciable en x, $\|v\| < \delta(\varepsilon) \implies \|f(x + v) - f(x)\| < (\|T\| + \varepsilon)\|v\|$, así que f es *continua* en x: una función diferenciable es automáticamente continua.

Si V un abierto en F tal que $f(U) \subseteq V$, y si $g : V \to G$ es otra función diferenciable con valores en un espacio de Banach G, es fácil comprobar la **regla de la cadena** que dice que $d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$. Fíjese que $df(x) \in \mathcal{L}(E, F)$, $dg(f(x)) \in \mathcal{L}(F, G)$, $d(g \circ f)(x) \in \mathcal{L}(E, G)$.

En el caso especial $E = \mathbb{C}$, el teorema de Cauchy muestra que toda función diferenciable en U es una función *holomorfa*, con valores vectoriales en F. Los teoremas de la teoría de una variable compleja siguen válidos para tales funciones; es cuestión de reemplazar el valor absoluto en $\mathbb{C}$ por la norma de F en los lugares apropiados. En particular, las fórmulas integrales de Cauchy, el teorema de Liouville, los integrales de contorno y los desarrollos de Taylor y de Laurent conservan su validez, *mutatis mutandis*, para funciones holomorfas con valores vectoriales.

Proposición 3.12. *Sea A un álgebra de Banach unital. La* inversión $h : A^\times \to A^\times : x \mapsto x^{-1}$ *es diferenciable (y por ende continua), con $dh(x) : z \mapsto -x^{-1}zx^{-1}$ para $x \in A^\times$, $z \in A$.*

Demostración. En primer lugar, resulta que $dh(1) = -1 \in \mathcal{L}(A)$, porque

$$\|(1 + v)^{-1} - 1 + v\| = \|(1 + v)^{-1} - (1 - v)\| = \Bigl\|\sum_{k=2}^{\infty}(-v)^k\Bigr\| \leqslant \sum_{k=2}^{\infty}\|v\|^k = \frac{\|v\|^2}{1 - \|v\|} < \varepsilon\|v\|$$

toda vez que $\|v\| < \delta := \varepsilon/(1 + \varepsilon)$.

Si $x \in A^\times$, escríbase $y = x^{-1}$; defínase los operadores de multiplicación $L_y, R_y \in \mathcal{L}(A)$ por $L_y(z) := yz$, $R_y(z) := zy$. Fíjese que $L_y(h(R_y(z))) = L_y(h(zx^{-1})) = L_y(xz^{-1}) = z^{-1}$ para todo $z \in A^\times$; es decir, $L_y \circ h \circ R_y = h$. La regla de la cadena entonces muestra que

$$dh(x) = L_y \circ dh(R_y(x)) \circ R_y = L_y \circ (-1) \circ R_y = -L_y \circ R_y : z \mapsto -x^{-1}zx^{-1}. \qquad \square$$

► El concepto fundamental de la teoría de álgebras de Banach es *el espectro de un elemento*. (Este término tiene su origen en la física atómica, donde significa un conjunto de frecuencias de líneas de emisión – o absorción – en una banda de luz.)

Definición 3.13. Sea A un álgebra de Banach unital, $x \in A$. El **espectro** $\operatorname{sp}(x) \subset \mathbb{C}$ de x se define como

$$\underline{\operatorname{sp}(x)} := \{\, \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda 1 - x)^{-1} \text{ no existe} \,\} = \{\, \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda 1 - x) \notin A^\times \,\}.$$

En particular, si H es un espacio de Hilbert, el **espectro de un operador** $T \in \mathcal{L}(H)$ es el conjunto de escalares $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $\lambda 1 - T$ no es invertible en $\mathcal{L}(H)$. ◊

Ejemplo 3.14. Si $A = M_n(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ y $T \in A$, la matriz $\lambda 1 - T$ no es invertible si y solo si $\det(\lambda 1 - T) = 0$. En este caso, $\operatorname{sp}(T)$ es el conjunto (finito) de los **autovalores** de T. ◊

Ejemplo 3.15. Si $A = C(K)$ con K compacto, entonces $g \in A^\times$ si y solo si la función g no se anula en K, porque el inverso puntual de g es su *recíproco* $x \mapsto 1/g(x)$. Si $f \in C(K)$, la función $(\lambda 1 - f) \colon x \mapsto \lambda - f(x)$ no es invertible si y solo si $\lambda = f(x)$ para algún $x \in K$. En este caso, $\operatorname{sp}(f)$ coincide con *la imagen* $f(K) \subset \mathbb{C}$.

Este ejemplo deja ver que *cualquier compacto* $K \Subset \mathbb{C}$ es un posible espectro:[5] basta tomar $A = C(K)$ y $f(\lambda) \equiv \lambda$ en A, para obtener $\operatorname{sp}(f) = K$. ◊

Un teorema del álgebra lineal finitodimensional dice que cada matriz compleja posee al menos un autovalor complejo. ⟦ Esto sucede porque $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado: hay matrices en $M_2(\mathbb{R})$ que no poseen autovalores reales. ⟧ El resultado sigue válido para álgebras de Banach (complejas): el espectro de un elemento no puede ser vacío.

Proposición 3.16 (Guelfand)**.** *Sea A un álgebra de Banach unital. Si $x \in A$, entonces* $\operatorname{sp}(x)$ *es* compacto *en* $\mathbb{C}$ *y* no es vacío.

Demostración. Tómese $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > \|x\|$, de modo que $\|x/\lambda\| < 1$; por la Proposición 3.10, $(1 - x/\lambda)$ es invertible, luego $\lambda 1 - x = \lambda(1 - x/\lambda) \in A^\times$. Esto muestra que

$$\operatorname{sp}(x) \subseteq \{\, \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|x\| \,\}. \tag{3.3}$$

[5] Si X es un espacio topológico, la notación $K \Subset X$ significa que K es una parta compacta de X.

Defínase $f_x \colon \mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(x) \to A^\times : \lambda \mapsto (\lambda 1 - x)^{-1}$; esta f_x es continua, por ser la composición de las funciones continuas $\lambda \mapsto (\lambda 1 - x)$ y $z \mapsto z^{-1}$. Luego $\mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(x) = f_x^{-1}(A^\times)$ es abierto en $\mathbb{C}$, así que $\mathrm{sp}(x)$ es cerrado. Por (3.3) y el teorema de Heine y Borel, $\mathrm{sp}(x)$ es compacto en $\mathbb{C}$.

La función f_x es diferenciable por la regla de la cadena, en vista de la Proposición 3.12. Luego f_x es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(x)$. En la región $|\lambda| > \|x\|$ posee un desarrollo de Laurent:

$$f_x(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\Bigl(1 - \frac{x}{\lambda}\Bigr)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\lambda^{k+1}} .$$

Por lo tanto, para $|\lambda| > \|x\|$, se obtiene

$$\|f_x(\lambda)\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|x^k\|}{|\lambda|^{k+1}} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|x\|^k}{|\lambda|^{k+1}} = \frac{1}{|\lambda| - \|x\|} \to 0 \quad \text{cuando } \lambda \to \infty. \tag{3.4}$$

Si $\mathrm{sp}(x)$ fuera vacío, f_x sería una función holomorfa *entera* (con valores vectoriales), acotada en el disco compacto $\{\, \lambda : |\lambda| \leqslant \|x\| + 1 \,\}$ por su supremo allí, y acotada fuera de este disco por 1, debido a (3.4). Por el teorema de Liouville, f sería *constante*; pero, en vista de (3.4), este valor constante sería $0 \in A$, el cual no pertenece a $A^\times$. Se concluye que $\mathrm{sp}(x) \neq \emptyset$. ◻

Corolario 3.17 (Guelfand y Mazur)**.** *Si el álgebra de Banach A es un álgebra de división (o un cuerpo), entonces $A \simeq \mathbb{C}$.*

Demostración. Si $x \in A$, tómese $\lambda \in \mathrm{sp}(x)$, ya que $\mathrm{sp}(x) \neq \emptyset$. Entonces $\lambda 1 - x = 0$, porque el único elemento no invertible de A es 0. Esto muestra que $A = \mathbb{C}\,1$. ◻

Definición 3.18. Sea A un álgebra de Banach unital. El **radio espectral** de $x \in A$ es

$$\underline{r(x)} := \sup\{\, |\lambda| : \lambda \in \mathrm{sp}(x) \,\}.$$

La relación (3.3) muestra que $r(x) \leqslant \|x\|$. ◊

Proposición 3.19. *Sea A un álgebra de Banach unital. Si $x \in A$, el siguiente límite existe y coincide con su radio espectral:*

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}. \tag{3.5}$$

Demostración. La serie de Laurent de $f_x(\lambda) := (\lambda 1 - x)^{-1}$, definida inicialmente en el anillo abierto $\{\, \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|x\| \,\}$, converge en el anillo $\{\, \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(x) \,\}$, donde f_x está definida y es holomorfa. Si R es el radio de convergencia de la serie de potencias $\zeta \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \|x^k\| \zeta^{k+1}$ (al tomar $\zeta := \lambda^{-1}$), entonces $\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = R^{-1} \leqslant r(x)$.

Obsérvese que $\lambda \in \mathrm{sp}(x) \implies \lambda^n \in \mathrm{sp}(x^n)$ para $n \in \mathbb{N}^*$, en vista de la identidad

$$\lambda^n 1 - x^n = (\lambda 1 - x)(\lambda^{n-1} 1 + \lambda^{n-2} x + \cdots + \lambda x^{n-2} + x^{n-1}),$$

que muestra que $(\lambda 1 - x)$ tendría un inverso si $(\lambda^n 1 - x^n)$ fuera invertible. Entonces

$$\lambda \in \mathrm{sp}(x) \implies |\lambda^n| \leqslant \|x^n\| \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \implies |\lambda| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

En resumen, vale $\limsup_n \|x^n\|^{1/n} \leqslant r(x) \leqslant \liminf_n \|x^n\|^{1/n}$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$ existe y coincide con $r(x)$. □

Ejemplo 3.20. En $A = M_2(\mathbb{C}) = \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, la matriz $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ cumple $\|x\| = 1$ pero $\mathrm{sp}(x) = \{0\}$, así que $r(x) = 0 < \|x\|$. Obviamente, vale $\|x^n\|^{1/n} = 0$ para $n \geqslant 2$. Más generalmente, cualquier matriz nilpotente tiene radio espectral 0.

En cambio, si $x = \mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n] \in M_n(\mathbb{C})$ es una matriz *diagonal* con los autovalores λ_j indicados, entonces $r(x) = \|x\| = \max_{1\leqslant j \leqslant n} |\lambda_j|$. ◊

► Hay una clase de álgebras de Banach de particular importancia, debido al buen comportamiento de los espectros de sus elementos. Estas álgebras poseen una *involución* y sus normas cumplen una propiedad sencilla pero fundamental.

Definición 3.21. Una **involución isométrica** en un álgebra de Banach A es una aplicación $x \mapsto x^*$ de A en A que es:

- ⋆ *semilineal*: $(\alpha x + \beta y)^* = \bar\alpha x^* + \bar\beta y^*$;
- ⋆ *antihomomórfica*: $(xy)^* = y^* x^*$;
- ⋆ *involutiva*: $(x^*)^* = x$;
- ⋆ e *isométrica*: $\|x^*\| = \|x\|$.

Si A posee una involución isométrica, dícese que A es un **álgebra de Banach involutiva**.

Una **C^*-álgebra** es un álgebra de Banach involutiva que además satisface:[6]

$$\|x^* x\| = \|x\|^2 \quad \text{para todo} \quad x \in A. \tag{3.6}$$

Un elemento x en una C^*-álgebra es **normal** si $\underline{x^* x = x x^*}$; es **autoadjunto** si $\underline{x^* = x}$. ◊

[6] Algunos autores la llaman B^*-*álgebra*, reservando C^*-*álgebra* para las $*$-subálgebras cerradas de $\mathcal{L}(H)$.

Ejemplo 3.22. Si K es compacto, $C(K)$ es un álgebra de Banach involutiva bajo conjugación compleja, $f^*(x) := \overline{f(x)}$. Además, cada $f \in C(K)$ satisface

$$\|f^* f\|_\infty = \sup\{\, |\overline{f(x)}\, f(x)| : x \in K \,\} = \sup\{\, |f(x)|^2 : x \in K \,\} = \|f\|_\infty^2$$

así que $C(K)$ *es una C^*-álgebra unital y conmutativa*. ◊

Ejemplo 3.23. El álgebra de Banach $L^1(\mathbb{R}^m)$, bajo convolución, posee una involución isométrica dada por $h^*(x) := \overline{h(-x)}$. Esta álgebra de Banach involutiva es conmutativa pero no es una C^*-álgebra: aunque $\|h^* * h\|_1 \leqslant \|h\|_1^2$ en general, es fácil encontrar elementos $h \in L^1(\mathbb{R}^m)$ para los cuales esta desigualdad es estricta. ◊

Ejemplo 3.24. Si H es un espacio de Hilbert, la correspondencia $T \mapsto T^*$ es una involución isométrica sobre $\mathcal{L}(H)$. Esta es una C^*-álgebra, unital pero no conmutativa, porque

$$\begin{aligned} \|T^*T\| &= \sup\{\, \bigl|\langle x \mid T^*Tx\rangle\bigr| : \|x\| \leqslant 1 \,\} \\ &= \sup\{\, \bigl|\langle Tx \mid Tx\rangle\bigr| : \|x\| \leqslant 1 \,\} \\ &= \sup\{\, \|Tx\|^2 : \|x\| \leqslant 1 \,\} = \|T\|^2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

La siguiente Proposición justifica la primera de estas igualdades. ◊

Proposición 3.25. *Si H es un espacio de Hilbert, sea $T = T^* \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto. Entonces su norma satisface la relación*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \bigl|\langle x \mid Tx\rangle\bigr|.$$

Demostración. El **radio numérico** de un operador $T \in \mathcal{L}(H)$ se define como

$$\omega(T) := \sup\{\, |\langle x \mid Tx\rangle| : \|x\| \leqslant 1 \,\}.$$

La desigualdad de Schwarz muestra que

$$\omega(T) \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|x\|\, \|Tx\| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|T\|\, \|x\|^2 = \|T\|.$$

Cabe recordar la fórmula (2.19): $\|T\| = \sup\{\, |\langle y \mid Tx\rangle| : \|x\| \leqslant 1,\ \|y\| \leqslant 1 \,\}$.

Ahora bien, si $T = T^*$ y si $x, y \in H$, entonces

$$\begin{aligned} \Re\, \langle y \mid Tx\rangle &= \tfrac12\bigl(\langle y \mid Tx\rangle + \langle Tx \mid y\rangle\bigr) = \tfrac12\bigl(\langle y \mid Tx\rangle + \langle x \mid Ty\rangle\bigr) \\ &= \tfrac14\bigl(\langle x+y \mid T(x+y)\rangle - \langle x-y \mid T(x-y)\rangle\bigr) \\ &\leqslant \tfrac14\, \omega(T)\bigl(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\bigr) = \tfrac12\, \omega(T)\bigl(\|x\|^2 + \|y\|^2\bigr), \end{aligned}$$

por la ley del paralelogramo. Más generalmente, al escribir $\langle y \mid Tx\rangle = e^{i\theta}|\langle y \mid Tx\rangle|$, se obtiene

$$|\langle y \mid Tx\rangle| = e^{-i\theta}\langle y \mid Tx\rangle = \langle e^{i\theta}y \mid Tx\rangle \leqslant \tfrac12\omega(T)\bigl(\|x\|^2 + \|y\|^2\bigr).$$

Al aplicar la fórmula (2.19), se concluye que $\|T\| \leqslant \omega(T)$ cuando $T = T^*$. □

Lema 3.26. *Si $x \in A$, un álgebra de Banach involutiva, entonces* $\operatorname{sp}(x^*) = \{\, \bar\lambda : \lambda \in \operatorname{sp}(x) \,\}$.

Demostración. Nótese que $(y^*)^{-1} = (y^{-1})^*$ para todo $y \in A^\times$ (porque si $yz = zy = 1$, entonces $z^*y^* = y^*z^* = 1$). Luego, $(\bar\lambda 1 - x^*) = (\lambda 1 - x)^*$ es invertible si y solo si $(\lambda 1 - x)$ es invertible en A. En otras palabras, $\bar\lambda \in \operatorname{sp}(x^*)$ si y solo si $\lambda \in \operatorname{sp}(x)$. ◻

Proposición 3.27. *Sea A una C^*-álgebra, $x \in A$.*

(a) *Si x es* normal*: $xx^* = x^*x$, entonces $r(x) = \|x\|$.*

(b) *Si x es* autoadjunto*: $x = x^*$, entonces* $\operatorname{sp}(x) \subset \mathbb{R}$.

Demostración. Ad (a): Al aplicar la propiedad (3.6) con $x = y^*y$, se obtiene

$$\|(y^*y)^2\| = \|(y^*y)^*(y^*y)\| = \|y^*y\|^2.$$

Por inducción, vale $\left\|(y^*y)^{2^k}\right\| = \|y^*y\|^{2^k}$ para $k \in \mathbb{N}$. Ahora, si $xx^* = x^*x$, es evidente que $(x^n)^*x^n = (x^*x)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La Proposición 3.19 entonces muestra que

$$\begin{aligned} r(x) &= \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \lim_{k\to\infty} \left\|x^{2^k}\right\|^{2/2^{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \left\|(x^{2^k})^* x^{2^k}\right\|^{1/2^{k+1}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \left\|(x^*x)^{2^k}\right\|^{1/2^{k+1}} = \|x^*x\|^{1/2} = \|x\|. \end{aligned}$$

Ad (b): Si $x^* = x$, tómese $\lambda = \alpha + i\beta \in \operatorname{sp}(x)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Para todo $\gamma \in \mathbb{R}$, se ve enseguida que $\alpha + i(\beta + \gamma) = \lambda + i\gamma \in \operatorname{sp}(x + i\gamma 1)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \alpha^2 + (\beta + \gamma)^2 &\leqslant r(x + i\gamma 1)^2 \leqslant \|x + i\gamma 1\|^2 = \|(x + i\gamma 1)^*(x + i\gamma 1)\| \\ &= \|(x - i\gamma 1)(x + i\gamma 1)\| = \|x^2 + \gamma^2 1\| \leqslant \|x\|^2 + \gamma^2. \end{aligned}$$

En consecuencia, $\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta\gamma \leqslant \|x\|^2$ para todo $\gamma \in \mathbb{R}$. Esto solo es posible si $\beta = 0$, es decir, $\lambda = \alpha \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, el espectro de x es real. ◻

► Si $p \in \mathbb{C}[X]$ es un polinomio, $p(\zeta) \equiv \beta_0 + \beta_1\zeta + \cdots + \beta_n\zeta^n$, para cada elemento x de un álgebra unital A se define $p(x) := \beta_0 1 + \beta_1 x + \cdots + \beta_n x^n \in A$ por sustitución directa. Si A es un álgebra de Banach, el espectro de $p(x)$ se obtiene del espectro de x de la misma manera, según la proposición siguiente, conocido como el *teorema de la aplicación espectral*.

Proposición 3.28. *Si A un álgebra de Banach unital y si $p \in \mathbb{C}[X]$, entonces:*

(a) *Vale* $\operatorname{sp}(p(x)) = p(\operatorname{sp}(x)) \equiv \{\, p(\lambda) : \lambda \in \operatorname{sp}(x) \,\}$ *para todo $x \in A$.*

(b) *Si A es una C^*-álgebra y si $x = x^*$, entonces* $\|p(x)\| = \sup\{\, |p(\lambda)| : \lambda \in \operatorname{sp}(x) \,\}$.

Demostración. Ad (a): Tómese $\lambda \in \operatorname{sp}(x)$. Por el teorema del factor, hay otro polinomio $q \in \mathbb{C}[X]$ tal que $p(\lambda) - p(\zeta) \equiv (\lambda - \zeta)\, q(\zeta)$ para $\zeta \in \mathbb{C}$. Por sustitución directa, se obtiene $p(\lambda)1 - p(x) = (\lambda 1 - x)q(x)$ en A. Si $y \in A$ es un inverso para $p(\lambda)1 - p(x)$, entonces $q(x)y$ es un inverso para $\lambda 1 - x$. Por lo tanto, $p(\lambda) \in \operatorname{sp}(p(x))$.

Por otro lado, tómese $\mu \in \operatorname{sp}(p(x))$. Si p es constante, $p(\zeta) \equiv \mu$, entonces $\mu \in p(\operatorname{sp}(x))$ porque $\operatorname{sp}(p(x)) = \operatorname{sp}(\mu 1) = \{\mu\}$. Si p no es constante, el polinomio $\mu - p$ es un producto de factores de primer grado, por el teorema fundamental del álgebra:

$$\mu - p(\zeta) \equiv \alpha_0(\alpha_1 - \zeta)(\alpha_2 - \zeta)\cdots(\alpha_n - \zeta) \quad \text{con cada } \alpha_j \in \mathbb{C},\ \alpha_0 \neq 0.$$

Entonces $\mu 1 - p(x) = \alpha_0(\alpha_1 1 - x)\cdots(\alpha_n 1 - x)$. Como este producto no es invertible en A, hay al menos un factor $(\alpha_k 1 - x)$ que no es invertible; luego $\alpha_k \in \operatorname{sp}(x)$. En consecuencia, $\mu = p(\alpha_k) \in p(\operatorname{sp}(x))$.

Ad (b): Si $x = x^*$ y $p(\zeta) \equiv \beta_0 + \beta_1\zeta + \cdots + \beta_n\zeta^n$, entonces

$$p(x)^* = \bar\beta_0 1 + \bar\beta_1 x + \cdots + \bar\beta_n x^n \quad \text{conmuta con} \quad p(x) = \beta_0 1 + \beta_1 x + \cdots + \beta_n x^n.$$

Esto dice que $p(x)$ es un elemento *normal* de la C^*-álgebra A. Por la Proposición 3.27(a) sigue la igualdad $\|p(x)\| = r(p(x)) = \sup\{\, |p(\lambda)| : \lambda \in \operatorname{sp}(x)\,\}$. □

► Si x es un elemento de un álgebra unital A cualquiera, la correspondencia $p \mapsto p(x)$ es un *homomorfismo de álgebras* de $\mathbb{C}[X]$ en A. Si A es un álgebra de Banach, se quiere extenderlo en un homomorfismo $f \mapsto f(x)$ cuyo dominio es alguna compleción de $\mathbb{C}[X]$. Cualquier extensión de esta naturaleza se llama un **cálculo funcional** para el álgebra de Banach A.

Si A es una C^*-álgebra, como luego se verá, cualquier *función continua* $f\colon \operatorname{sp}(x) \to \mathbb{C}$ define un elemento $f(x) \in A$. Para las álgebras de Banach en general, esto no siempre es posible; pero al menos se puede definir $f(x)$ cuando f es holomorfa en un vecindario de $\operatorname{sp}(x)$.

Definición 3.29. Sea A un álgebra de Banach y sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Si $x \in A$ es un elemento tal que $\operatorname{sp}(x) \subset U$, sea Γ un contorno cerrado en $\mathbb{C}$ que rodea $\operatorname{sp}(x)$ una vez positivamente.[7] Si $f\colon U \to \mathbb{C}$ es un función holomorfa en U, la integral de contorno

$$f(x) := \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(\lambda)\,(\lambda 1 - x)^{-1}\,d\lambda \tag{3.8}$$

define un elemento $f(x) \in A$. Si $H(U)$ denota el álgebra de funciones holomorfas en U, se puede comprobar que $H(U) \to A : f \mapsto f(x)$ es un homomorfismo que no depende de Γ. Este homomorfismo $f \mapsto f(x)$ es un **cálculo funcional holomorfo** para A. ◊

[7]Este contorno cerrado Γ es una unión disjunta finita de curvas cerradas, suaves por trozos, en U. Dado un compacto $K \Subset \mathbb{C}$, dícese que Γ **rodea** K **una vez positivamente** si $\Gamma \cap K = \emptyset$ y si el *número de vueltas* $n_\Gamma(\zeta) := (2\pi i)^{-1}\oint_\Gamma(\lambda - \zeta)^{-1}\,d\lambda$ cumple $n_\Gamma(\zeta) = 1$ para todo $\zeta \in K$.

3.2 Operadores sobre un espacio de Hilbert

El tema de esta sección es una C^*-álgebra especial: el álgebra involutiva $\mathcal{L}(H)$ de operadores acotados[8] sobre un espacio de Hilbert H. Un operador $T \in \mathcal{L}(H)$ es **autoadjunto** si $T^* = T$; más generalmente, T es **normal** si $T^*T = TT^*$. En dimensión finita, los operadores normales son diagonalizables mediante un cambio de base ortonormal: T está caracterizado, hasta semejanza unitaria, por sus *autovalores*, contados con multiplicidad. Cuando la dimensión de H es infinita, algunos fenómenos nuevos emergen: para empezar, resulta que muchos operadores no poseen autovalores. En lugar del conjunto de autovalores, se debe estudiar el *espectro* del operador, que no es vacío (por la Proposición 3.16). La *multiplicidad* del espectro requiere un análisis delicado; antes de abordarlo, es recomendable construir un cálculo funcional para el operador T.

Definición 3.30. En la C^*-álgebra $\mathcal{L}(H)$, se destacan las siguientes clases de operadores:

(a) V es una **isometría** si $V^*V = 1$;

(b) U es **unitario** si $U^*U = UU^* = 1$, es decir, U es invertible con $U^{-1} = U^*$;

(c) W es una **isometría parcial** si $WW^*W = W$;

(d) P es un **proyector** (ortogonal) si $P^2 = P = P^*$;

(e) A es **positivo** si $A = B^*B$ para algún $B \in \mathcal{L}(H)$;

(f) R es una **contracción** si $1 - R^*R$ es positivo.

Estas clases no son disjuntos: cada unitario es una isometría; cada isometría es una isometría parcial y también es una contracción; cada proyector es positivo.[9] ◊

En la definición anterior, las clases de operadores mencionados (a las cuales se debería agregar los operadores normales y los autoadjuntos) se caracterizan por propiedades *puramente algebraicas*. En consecuencia, estas ocho clases también son aplicables a los elementos de una C^*-álgebra cualquiera. En $\mathcal{L}(H)$, sin embargo, posee una descripción *vectorial* alternativa en términos de sus efectos sobre los vectores en H; por ejemplo, $V \in \mathcal{L}(H)$ es una isometría si y solo si $\|Vx\| = \|x\|$ para todo $x \in H$. Otro punto de vista *espectral* sobre estas clases de operadores identifica las cualidades de sus espectros: véase la Proposición 3.27, por ejemplo. En lo sucesivo, se estudiará las relaciones entre estos tres enfoques.

[8] Un operador lineal $T\colon H \to H$ es *acotado* (su norma $\|T\|$ es finita) si y solo si es una aplicación lineal continua (Corolario 2.3).

[9] Fíjese que el operador 0 es un proyector y por ende es positivo. Habría sido más lógico decir que un operador que cumple la condición (e) es *no negativo*; sin embargo, en la teoría de matrices este término está reservado para otro uso. Una matriz compleja de la forma B^*B se llama *semidefinido positivo*. En $\mathcal{L}(H)$, se deja implícito el adjetivo "semidefinido".

Definición 3.31. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ es *autoadjunto*, los elementos $\{ p(T) : p \in \mathbb{C}[X] \}$ forman una $*$**-álgebra** o álgebra involutiva – incompleta – de elementos normales en $\mathcal{L}(H)$. Esta es el álgebra unital generado por T; sus elementos conmutan. Denótese por $\underline{C^*(T)}$ su *clausura* en la norma de $\mathcal{L}(H)$, la cual es una C^*-álgebra conmutativa.

Si $T \in \mathcal{L}(H)$ es *normal* pero no necesariamente autoadjunto, la $*$-álgebra unital generada por T es el conjunto de operadores de la forma $p(T, T^*)$, donde $p(\zeta, \bar{\zeta})$ es un polinomio en dos variables con coeficientes complejos. El conjugado complejo del polinomio $p(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{k,l} \alpha_k \beta_l \, \zeta^k \bar{\zeta}^l$ es $\bar{p}(\zeta, \bar{\zeta}) := \sum_{k,l} \bar{\beta}_l \bar{\alpha}_k \, \zeta^l \bar{\zeta}^k$; por lo tanto, la relación $p(T, T^*)^* = \bar{p}(T, T^*)$ es válida. La clausura de esta $*$-álgebra en $\mathcal{L}(H)$, también denotado por $\underline{C^*(T)}$, es la menor C^*-álgebra unital que contiene T; esta C^*-álgebra es *conmutativa* porque T es normal. ◊

Ejemplo 3.32. En la C^*-álgebra *finitodimensional* $M_n(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, la involución lleva una matriz $C = [c_{ij}]$ en $C^* = [\bar{c}_{ji}]$, su **conjugado hermítico**. Mediante un cambio de base ortonormal apropiado en $\mathbb{C}^n$, es posible encontrar[10] una matriz unitaria U tal que $A := UCU^{-1} = UCU^*$ sea una *matriz triangular superior*: $a_{ij} = 0$ si $i > j$. Su conjugado hermítico $A^* = (UCU^*)^* = UC^*U^*$ es triangular inferior. Si estas dos matrices triangulares son *diagonales*, entonces conmutan: $A^*A = AA^*$, lo cual implica que $C^*C = CC^*$.

Por otro lado, si C y C^* conmutan, hay una matriz unitaria U que los trigonaliza simultáneamente, es decir, tanto $A = UCU^*$ como $A^* = UC^*U^*$ son matrices triangulares superiores, o sea, ambos son matrices diagonales. Estos resultados dicen que *una matriz C es normal si y solo si es diagonalizable* mediante un cambio de base ortonormal de $\mathbb{C}^n$.

En otros términos, un operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ es normal si y solo si posee una matriz diagonal con respecto a alguna base ortonormal de $\mathbb{C}^n$. ◊

► Si $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ son los autovalores del operador normal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, la matriz diagonal de T en una base ortonormal apropiada es $A = \operatorname{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$. Si $p \in \mathbb{C}[X, Y]$ es un polinomio en dos variables, entonces

$$p(A, A^*) = \operatorname{diag}[p(\lambda_1, \bar{\lambda}_1), \dots, p(\lambda_n, \bar{\lambda}_n)]$$

es la matriz de $p(T, T^*)$ en esta base. En otras palabras, la matriz de una *función de T* con respecto a esta base ortonormal es la matriz diagonal de la función correspondiente de sus autovalores. Es posible generalizar esta observación a operadores sobre espacios de Hilbert de dimensión infinita, mediante un *cálculo funcional continuo*. Este cálculo depende de una generalización importante del teorema clásico de Weierstrass sobre la densidad del subespacio de los polinomios en el espacio de Banach $C[a, b]$.

Teorema 3.33 (Stone y Weierstrass)**.** *Sea B una $*$-subálgebra de $C(K)$, donde K es compacto. Si $1 \in B$ y si B* separa puntos *de K [es decir: si $x \neq y$ en K, existe $g \in B$ con $g(x) \neq g(y)$] entonces B es densa en $C(K)$.*

[10] Cabe recordar que una matriz $n \times n$ es unitaria si y solo si sus columnas forman una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$.

Demostración. Como $\Re f = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ y $\Im f = \frac{i}{2}(\bar{f} - f)$ para $f \in C(K)$, está claro que $B_{\mathbb{R}} := \{ g \in B : g(K) \subset \mathbb{R} \}$ es una subálgebra real de $C(K, \mathbb{R})$ que contiene $\Re g$ e $\Im g$ para todo $g \in B$. Basta, entonces, demostrar la versión real del teorema: *si $B_{\mathbb{R}}$ es una subálgebra real de $C(K, \mathbb{R})$ tal que $1 \in B_{\mathbb{R}}$ y si $B_{\mathbb{R}}$ separa puntos de K, entonces $B_{\mathbb{R}}$ es densa en $C(K, \mathbb{R})$.*

El teorema clásico de Weierstrass (en su versión real) dice que los polinomios reales forman un subespacio denso de $C([a, b], \mathbb{R})$ cuando $[a, b]$ es un intervalo compacto de $\mathbb{R}$. En el caso $[a, b] = [0, 1]$, por ejemplo, cada $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ es el límite uniforme de sus **polinomios de Bernstein**:[11]

$$B_n(f; t) := \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} t^k (1 - t)^{n-k}.$$

Si $g \in B_{\mathbb{R}}$ con $\|g\|_\infty = M$, aplíquese el teorema de Weierstrass para obtener una sucesión de polinomios reales $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $p_n(t) \to |t|$ uniformemente en el intervalo $[-M, M]$. Entonces $p_n(g(x)) \to |g(x)|$ uniformemente sobre K. Fíjese que $p_n \circ g \in B_{\mathbb{R}}$; la propiedad $1 \in B_{\mathbb{R}}$ sirve para incorporar el término constante de p_n. Luego, $|g| \in \overline{B_{\mathbb{R}}}$. Al escribir

$$f \vee g := \max\{f, g\} = \tfrac{1}{2}(f + g) + \tfrac{1}{2}|f - g|,$$
$$f \wedge g := \min\{f, g\} = \tfrac{1}{2}(f + g) - \tfrac{1}{2}|f - g|,$$

se obtiene $f \vee g \in \overline{B_{\mathbb{R}}}$ y $f \wedge g \in \overline{B_{\mathbb{R}}}$ también, para todo $f, g \in B_{\mathbb{R}}$.

Dada $f \in C(X)$, sean $x, y \in K$ con $x \neq y$. Tómese $g \in B_{\mathbb{R}}$ con $g(x) \neq g(y)$. Al tomar $h_{xy} := ag + b \in B_{\mathbb{R}}$ con valores apropiadas $a, b \in \mathbb{R}$, se puede obtener una solución simultánea de las ecuaciones $h_{xy}(x) = f(x)$ y $h_{xy}(y) = f(y)$.

Dado $\varepsilon > 0$, hay un vecindario abierto V_y de y en K tal que $h_{xy}(z) > f(z) - \varepsilon$ para $z \in V_y$. (Esto sucede porque la función $h_{xy} - f$ es continua en y.) Como K es compacto, hay puntos $y_1, \dots, y_m \in K$ tal que $K = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_m}$. Defínase $f_x := h_{xy_1} \vee \cdots \vee h_{xy_m}$. Entonces $f_x \in \overline{B_{\mathbb{R}}}$ cumple $f_x(x) = f(x)$ y $f_x(z) > f(z) - \varepsilon$ para todo $z \in K$.

Ahora hay un vecindario abierto U_x de x en K tal que $f_x(z) < f(z) + \varepsilon$ para $z \in U_x$. (Esto sigue de la continuidad de $f_x - f$ en x.) Como K es compacto, hay puntos $x_1, \dots, x_n \in K$ tales que $K = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$. Defínase $g := f_{x_1} \wedge \cdots \wedge f_{x_n}$. Se concluye que $g \in \overline{B_{\mathbb{R}}}$ y que $f(z) - \varepsilon < g(z) < f(z) + \varepsilon$ para todo $z \in K$.

En resumen: para cada $f \in C(K, \mathbb{R})$ y cada $\varepsilon > 0$, hay $g \in \overline{B_{\mathbb{R}}}$ tal que $\|f - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Esto comprueba que $\overline{B_{\mathbb{R}}}$ es densa en $C(K, \mathbb{R})$, y por ende $B_{\mathbb{R}}$ es densa en $C(K, \mathbb{R})$. Entonces, también, B es densa en $C(K)$. □

Escolio 3.34. *Sea B una $*$-subálgebra unital de $C(K)$ que separa puntos de K. Si $x_0 \in K$, entonces $\{ g \in B : g(x_0) = 0 \}$ es denso en el ideal $\{ f \in C(K) : f(x_0) = 0 \}$ de $C(K)$.* ⊟

[11] Para la demostración, véase, por ejemplo, la sección 2.4 del libro de análisis real de Simon.

El teorema siguiente establece un **cálculo funcional continuo** para un operador acotado autoadjunto. Esta es una primera versión del teorema espectral para tales operadores.

Teorema 3.35. *Sea $T = T^* \in \mathcal{L}(H)$ un operador acotado* autoadjunto. *Hay un $*$-isomorfismo isométrico $f \mapsto f(T)$ entre la C^*-álgebra $C(\mathrm{sp}(T))$ y la C^*-subálgebra $C^*(T)$ de $\mathcal{L}(H)$, con las siguientes propiedades:*

(a) *la imagen de la función idéntica $\lambda \mapsto \lambda$ es el operador T;*

(b) *si $f \geqslant 0$ en $C(\mathrm{sp}(T))$, entonces $f(T)$ es un operador positivo;*

(c) *si $Tx = \lambda x$ para $x \in H$ y $\lambda \in \mathrm{sp}(T)$, entonces $f(T)x = f(\lambda)x$ para $f \in C(\mathrm{sp}(T))$;*

(d) $\underline{\mathrm{sp}(f(T)) = f(\mathrm{sp}(T))}$ *para todo $f \in C(\mathrm{sp}(T))$.*

Demostración. Ad (a): Defínase un **$*$-homomorfismo** (un homomorfismo de álgebras involutivas) de $\mathbb{C}[X]$ en $\mathcal{L}(H)$ que lleva el polinomio

$$p(\lambda) \equiv \beta_0 + \beta_1\lambda + \cdots + \beta_n\lambda^n \quad \text{en el operador} \quad \underline{p(T)} := \beta_0 1 + \beta_1 T + \cdots + \beta_n T^n,$$

por sustitución directa. Es evidente que la imagen del polinomio $q(\lambda) \equiv \lambda$ es el operador T.

Por las Proposiciones 3.16 y 3.27, $\mathrm{sp}(T)$ es una parte compacta de $\mathbb{R}$. La restricción $p|_{\mathrm{sp}(T)}$ de un polinomio $p \in \mathbb{C}[X]$ es una función continua sobre $\mathrm{sp}(T)$; ellas forman una $*$-subálgebra $\mathbb{C}[X]|_{\mathrm{sp}(T)} \subset C(\mathrm{sp}(T))$. Como esta $*$-subálgebra contiene la función constante 1 y obviamente separa puntos de $\mathrm{sp}(T)$, el Teorema 3.33 muestra que es densa en $C(\mathrm{sp}(T))$.

La Proposición 3.28(b) muestra que $\|p(T)\| = \|p\|_\infty$ donde el lado derecho es la norma del supremo de la función continua $p|_{\mathrm{sp}(T)}$. El $*$-homomorfismo ya construido se extiende por continuidad a una isometría $f \mapsto f(T)$ desde $C(\mathrm{sp}(T))$ a la *compleción* de la $*$-subálgebra $\{\, p(T) : p \in \mathbb{C}[X] \,\}$ en la norma de operadores: esta compleción coincide con su *clausura* $C^*(T)$ en $\mathcal{L}(H)$.

Si $f, g \in C(\mathrm{sp}(T))$, hay polinomios $p_n, q_n \in \mathbb{C}[X]$ tales que $p_n \to f$, $q_n \to g$ uniformemente sobre $\mathrm{sp}(T)$. Resulta entonces que

$$\begin{aligned} fg(T) &= \lim_{n\to\infty} p_n q_n(T) = \lim_{n\to\infty} p_n(T)\, q_n(T) = f(T)\, g(T), \\ f(T)^* &= \lim_{n\to\infty} p_n(T)^* = \lim_{n\to\infty} \bar{p}_n(T) = \bar{f}(T), \end{aligned}$$

así que la isometría $f \mapsto f(T) : C(\mathrm{sp}(T)) \to C^*(T)$ es un $*$-isomorfismo de álgebras.

Ad (b): Si $f \geqslant 0$ en $C(\mathrm{sp}(T))$, es decir, $f(\lambda) \geqslant 0$ para $\lambda \in \mathrm{sp}(T)$, entonces $g(\lambda) := \sqrt{f(\lambda)}$ define una función continua $g \in C(\mathrm{sp}(T))$ que satisface $\bar{g} = g$ y $g^2 = f$. Entonces $f(T) = g(T)^2 = g(T)^* g(T)$ es un operador positivo.

Ad (c): Dada $f \in C(\mathrm{sp}(T))$, hay polinomios $p_n \in \mathbb{C}[X]$ tales que $\|p_n - f\|_\infty \to 0$. Si $Tx = \lambda x$, entonces $T^k x = \lambda^k x$ para cada k, así que

$$f(T)x = \lim_{n\to\infty} p_n(T)x = \lim_{n\to\infty} p_n(\lambda)x = f(\lambda)x.$$

Ad (d): Si $\mu \notin f(\mathrm{sp}(T))$, la fórmula $h(\lambda) := 1/(\mu - f(\lambda))$ define una función continua $h \in C(\mathrm{sp}(T))$. La relación $h(\lambda)(\mu - f(\lambda)) \equiv 1$ sobre $\mathrm{sp}(T)$ conlleva la igualdad de operadores $h(T)(\mu 1 - f(T)) = 1$ en $C^*(T)$. Entonces $\mu 1 - f(T)$ es invertible en $C^*(T)$ y por ende $\mu \notin \mathrm{sp}(f(T))$.

Por otro lado, si $\nu \in f(\mathrm{sp}(T))$, hay $\lambda_0 \in \mathrm{sp}(T)$ con $f(\lambda_0) = \nu$. Sea $\{r_n\}$ una sucesión de polinomios tales que $r_n(\lambda) \to \nu - f(\lambda)$ uniformemente sobre $\mathrm{sp}(T)$; se puede suponer que $r_n(\lambda_0) = 0$ para todo n, por el Escolio 3.34. Por lo tanto, hay polinomios $q_n \in \mathbb{C}[X]$ con $q_n(\lambda_0) \neq 0$ tales que $r_n(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^{k_n} q_n(\lambda)$ con $k_n \geqslant 1$ en $\mathbb{N}$. Como $(\lambda_0 1 - T)$ no es invertible en $\mathcal{L}(H)$, el producto $r_n(T) = (\lambda_0 1 - T)^{k_n} q_n(T)$ tampoco es invertible. Los elementos no invertibles forman una parte cerrada de $\mathcal{L}(H)$, por la Proposición 3.10. En consecuencia, $\nu 1 - f(T) = \lim_{n\to\infty} r_n(T)$ no es invertible en $\mathcal{L}(H)$, lo cual muestra que $\nu \in \mathrm{sp}(f(T))$. □

Las conclusiones (a,b,c,d) del Teorema 3.35 también son válidas para un operador *normal* $T \in \mathcal{L}(H)$, al extender el $*$-homomorfismo isométrico $p(\lambda, \bar\lambda) \mapsto p(T, T^*)$ de $\mathbb{C}[X, Y]$ en $C^*(T)$ a un $*$-isomorfismo isométrico entre $C(\mathrm{sp}(T))$ y $C^*(T)$. Cada operador $p(T, T^*)$ es también normal, así que $\|p(T, T^*)\| = r(p(T, T^*))$. Sin embargo, la demostración de la Proposición 3.28 no es aplicable para poder concluir que $r(p(T, T^*)) = \|p\|_\infty$. Esto requiere la teoría de caracteres de C^*-álgebras conmutativas, fuera del alcance de este curso.[12]

Ejemplo 3.36. Sea T un operador autoadjunto con $\underline{\mathrm{sp}(T) \subset [0, \infty)}$. La función $f(\lambda) := \sqrt{\lambda}$ está en $C(\mathrm{sp}(T))$. Se escribe $\underline{T^{1/2}} \equiv \underline{\sqrt{T}} := f(T)$ en este caso. De la relación $f(\lambda)^2 \equiv \lambda$ se deduce que $(\sqrt{T})^2 = T$. Esta f toma valores reales, así que $f = \bar f$ sobre $\mathrm{sp}(T)$. Por lo tanto, vale $(\sqrt{T})^* = \sqrt{T}$: esta **raíz cuadrada** de T es otro operador autoadjunto.

Obsérvese también que T es un *operador positivo*, ya que la función idéntica $\lambda \mapsto \lambda$ toma valores no negativos sobre $\mathrm{sp}(T)$. De hecho, se obtiene $T = R^*R$ al colocar $R := \sqrt{T}$. Como $f \geqslant 0$ sobre $\mathrm{sp}(T)$, el Teorema 3.35(b) muestra que la raíz cuadrada $\sqrt{T}$ es también un operador positivo. ◊

► Ya es hora de revisitar la definición de un **operador positivo** sobre un espacio de Hilbert, ofrecido por la expresión *algebraica* de la Definición 3.30(e): que $A \in \mathcal{L}(H)$ es positivo si $A = B^*B$ para algún $B \in \mathcal{L}(H)$. Hay dos posibilidades alternativas: una caracterización *vectorial* de positividad dice que la forma cuadrática $x \mapsto \langle x \mid Ax \rangle$ toma valores no negativos; además, el Ejemplo 3.36 sugiere una caracterización *espectral* de positividad. La Proposición siguiente muestra que estas tres criterios son equivalentes.

[12] Para el cálculo funcional continuo con operadores normales, véase el Teorema 4.3.15 del libro de Pedersen.

Proposición 3.37. *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador acotado. Estas condiciones son equivalentes:*

(a) $T = S^*S$ *para algún* $S \in \mathcal{L}(H)$;

(b) $\langle x \mid Tx \rangle \geqslant 0$ *para todo* $x \in H$;

(c) $T^* = T$ *con* $\operatorname{sp}(T) \subset [0, \infty)$.

Dícese que T es ***positivo*** *si cumple una, luego todas, de estas condiciones.*

Además, si T es positivo, existe un único *operador positivo R tal que $R^2 = T$.*

Demostración. Ad (c) $\Longrightarrow$ (a): Tómese $S := \sqrt{T}$, como en el Ejemplo 3.36.

Ad (a) $\Longrightarrow$ (b): Obsérvese que $\langle x \mid S^*Sx \rangle = \langle Sx \mid Sx \rangle = \|Sx\|^2 \geqslant 0$ para todo $x \in H$.

Ad (b) $\Longrightarrow$ (c): Sea $V := i(T^* - T)$, el cual es un operador autoadjunto. De la Proposición 3.25, se obtiene

$$\|V\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \bigl|\langle x \mid Vx \rangle\bigr| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \bigl|\langle Tx \mid x \rangle - \langle x \mid Tx \rangle\bigr| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \bigl|\overline{\langle x \mid Tx \rangle} - \langle x \mid Tx \rangle\bigr| = 0,$$

así que $V = 0$ y por ende $T^* = T$.

Al reemplazar T por $\|T\|^{-1}T$ si fuera necesario, se puede suponer que $\|T\| \leqslant 1$. Entonces

$$\|1 - T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \bigl|\langle x \mid (1 - T)x \rangle\bigr| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \bigl(\|x\|^2 - \langle x \mid Tx \rangle\bigr) \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|x\|^2 = 1. \tag{3.9}$$

Afirmación: el desarrollo binomial $(1 + t)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} t^k$ converge *absoluta y uniformemente en el intervalo cerrado* $[-1, 1]$. Para verificarla, basta comprobar la convergencia absoluta de $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k}$ cuando $t = 1$. Los números positivos $a_k := \bigl|\binom{1/2}{k}\bigr|$, para $k \geqslant 1$, satisfacen:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k - \frac{1}{2}}{k + 1}, \quad \text{así que} \quad a_k = 2\bigl[k a_k - (k + 1) a_{k+1}\bigr]; \quad \text{y además}$$

$$\lim_{k \to \infty} (k + 1) a_{k+1} = \lim_{k \to \infty} 2^{-k-1} \frac{(2k - 1)!!}{k!} = \lim_{k \to \infty} 2^{-2k-1} \binom{2k}{k} = 0$$

(usando la fórmula de Stirling). Por lo tanto, la siguiente serie converge telescópicamente:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\binom{1/2}{k}\right| = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [k a_k - (k + 1) a_{k+1}] = a_0 + 2a_1 - 2 \lim_{n \to \infty} (n + 1) a_{n+1} = 2.$$

Ahora defínase $R := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (T - 1)^k$. Esta serie converge absolutamente en el espacio de Banach $\mathcal{L}(H)$, con $\|R\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} a_k \|1 - T\|^k \leqslant 2$, en vista de (3.9). Por cálculo funcional continuo, se obtiene $R^2 = 1 + (T - 1) = T$. Como T es autoadjunto y la serie tiene coeficientes reales, es evidente que $R^* = R$. Se concluye que $T = R^2 = R^*R$.

Del Teorema 3.35(b) en $C(\mathrm{sp}(T))$, la fórmula $R = f(T)$ con $f(t) := (1 + (t - 1))^{1/2} \equiv \sqrt{t}$ implica que $R = g(T)^* g(T)$ donde $g(t) \equiv t^{1/4}$, así que R también es un operador positivo.

Falta comprobar la *unicidad* de la raíz cuadrada positiva. Si Q es otro operador positivo con $Q^2 = T$, entonces $QT = Q^3 = TQ$, así que $QR = RQ$ porque R es (por su construcción) un límite en $\mathcal{L}(H)$ de polinomios en T. Por lo tanto,

$$(Q - R)Q(Q - R) + (Q - R)R(Q - R) = (Q^2 - R^2)(Q - R) = (T - T)(Q - R) = 0.$$

Si $x \in H$, colóquese $y := (Q - R)x$; entonces

$$0 = \langle x \mid (Q - R)Q(Q - R)x \rangle + \langle x \mid (Q - R)R(Q - R)x \rangle = \langle y \mid Qy \rangle + \langle y \mid Ry \rangle.$$

La positividad de Q y R implica que los dos sumandos al lado derecho se anulan. Por la Proposición 3.25, se concluye que $(Q - R)Q(Q - R) = (Q - R)R(Q - R) = 0$. Al restar estos dos operadores, se obtiene $(Q - R)^3 = 0$ y luego $(Q - R)^4 = 0$.

Como $Q - R$ es autoadjunto, la propiedad (3.7) de operadores en $\mathcal{L}(H)$ muestra que

$$0 = \|(Q - R)^4\| = \|(Q - R)^2\|^2 = \|Q - R\|^4,$$

así que $Q - R = 0$ y por ende $Q = R$. □

Definición 3.38. El **módulo** $|T|$ de un operador $T \in \mathcal{L}(H)$ es el operador positivo dado por

$$|T| := \sqrt{T^*T} \equiv (T^*T)^{1/2}.$$

Obsérvese que $|T^*| = (TT^*)^{1/2}$, y que $|T| = |T^*|$ si y solo si T es un operador normal. ◊

Lema 3.39. *Sea $T = T^* \in \mathcal{L}(H)$ un operador acotado autoadjunto. Hay un único par de operadores positivos T_+ y T_- tales que $T = T_+ - T_-$ y además $T_+T_- = 0$.*

Demostración. Defínase $\lambda_+ := \frac{1}{2}(|\lambda| + \lambda)$ y $\lambda_- := \frac{1}{2}(|\lambda| - \lambda)$ para $\lambda \in \mathrm{sp}(T)$. Es obvio que

$$\lambda_+ - \lambda_- = \lambda, \qquad \lambda_+ + \lambda_- = |\lambda|, \qquad \lambda_+\lambda_- = \tfrac{1}{4}(|\lambda|^2 - \lambda^2) = 0.$$

La existencia y la positividad de T_+ y T_- siguen directamente del Teorema 3.35. Se deja la unicidad como un ejercicio. □

Corolario 3.40. *Cualquier operador acotado $T \in \mathcal{L}(H)$ es una combinación lineal de cuatro operadores positivos T_j, en la forma $T = T_1 - T_2 + iT_3 - iT_4$.*

Demostración. Defínase $\Re T := \frac{1}{2}(T + T^*)$ e $\Im T := \frac{i}{2}(T^* - T)$; ellos son autoadjuntos, con $T = \Re T + i\Im T$. Defínaese $T_1 := (\Re T)_+$, $T_2 := (\Re T)_-$, $T_3 := (\Im T)_+$, $T_4 := (\Im T)_-$. □

► La siguiente Proposición introduce la **descomposición polar** de un operador, que generaliza la expresión polar de un número complejo: $z = re^{i\theta} = e^{i\theta} r$.

Proposición 3.41 (Descomposición Polar). *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador acotado sobre H.*

(a) *Hay una única isometría parcial $W = WW^*W$ con $\ker W = \ker T$, tal que $\underline{T = W\,|T|}$.*

(b) *La descomposición polar de T^* es $T^* = W^*|T^*|$.*

Demostración. Ad (a): Escríbase $A := |T| \equiv (T^*T)^{1/2}$, un operador positivo. Para $x \in H$,

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax \mid Ax\rangle = \langle x \mid A^2x\rangle = \langle x \mid T^*Tx\rangle = \langle Tx \mid Tx\rangle = \|Tx\|^2, \tag{3.10}$$

así que la aplicación lineal $Ax \mapsto Tx : \operatorname{Ran} A \to \operatorname{Ran} T$ está bien definida e isométrica. Por continuidad, esta aplicación se extiende a una isometría entre sus compleciones (es decir, sus clausuras en H), $W_0 \colon \overline{\operatorname{Ran} A} \to \overline{\operatorname{Ran} T}$. Como $H = \overline{\operatorname{Ran} A} \oplus (\operatorname{Ran} A)^\perp$, se puede definir $W \in \mathcal{L}(H)$ por $W(y + z) := W_0 y$ para $y \in \overline{\operatorname{Ran} A}$, $z \in (\operatorname{Ran} A)^\perp$. Es evidente que $WAx = Tx$ para todo $x \in H$.

Como $A^* = A$, se ve que $\ker W = (\operatorname{Ran} A)^\perp = \ker A^* = \ker A$. De la igualdad (3.10), es evidente que $\ker A = \ker T$. Ahora

$$\langle Ax \mid W_0^*W_0Ax\rangle = \langle W_0Ax \mid W_0Ax\rangle = \langle Tx \mid Tx\rangle = \langle Ax \mid Ax\rangle \quad \text{para todo} \quad x \in H,$$

así que $W_0^*W_0 = 1$ en $\mathcal{L}(\overline{\operatorname{Ran} A})$. De ahí se ve que $W^*W \in \mathcal{L}(H)$ es un proyector, con imagen $\overline{\operatorname{Ran} A}$ y núcleo $(\overline{\operatorname{Ran} A})^\perp = (\operatorname{Ran} A)^\perp = \ker A$. Luego $WW^*W(y + z) = Wy = W(y + z)$ si $y \in \overline{\operatorname{Ran} A}$, $z \in \ker A$; esto muestra que $WW^*W = W$.

Para ver la unicididad de W, tómese $V \in \mathcal{L}(H)$ tal que $VV^*V = V$, $\ker V = \ker T$ y $T = VA$. Es inmediato que $(V^*V)^2 = V^*V = (V^*V)^*$, así que V^*V es un proyector. Como $\ker(V^*V) = \ker V = \ker T = \ker A$, su imagen es $(\ker A)^\perp = \overline{\operatorname{Ran} A}$. Luego, $1 - V^*V$ es el proyector con imagen $\ker A$. Si $z \in \ker A$, entonces $Vz = V(1 - V^*V)z = (V - VV^*V)z = 0$; y si $Ax \in \operatorname{Ran} A$, entonces $V(Ax) = Tx = W(Ax)$. Por lo tanto, V y W coinciden sobre los dos subespacios complementarios $\overline{\operatorname{Ran} A}$ y $\ker A$, así que $V = W$.

Ad (b): Como W^*W es el proyector con imagen $\overline{\operatorname{Ran} A}$, es evidente que $(W^*W)Ax = Ax$ para todo $x \in H$. Luego $W^*T = W^*WA = A$. Fíjese que $T^*W = AW^*W = A$ también.

Por lo tanto, la fórmula $T^* = (WA)^* = AW^* = W^*(WAW^*)$ muestra que la descomposición polar de T^* está dada por la isometría parcial W^* y el operador positivo WAW^*, cuyo cuadrado es $WAW^*WAW^* = WA^2W^* = (WA)(WA)^* = TT^*$. De hecho, las igualdades $W^*(WAW^*x) = AW^*x = T^*x$ y $\ker(WAW^*) = \ker T^*$ muestran que $\ker W^* = \ker T^*$. □

Escolio 3.42. *Si T es* normal*, con descomposición polar $T = W|T|$, entonces $W|T| = |T|W$ y la descomposición polar de T^* es $T^* = W^*|T|$.* ⊟

3.3 Operadores compactos

El espectro de un operador incluye todos sus autovalores, pero en general el espectro es más que la totalidad de los autovalores. Por ejemplo, el operador $Q \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ definido por $Qf(t) := tf(t)$ no posee autovalor alguno, aunque $\mathrm{sp}(Q) = [0,1]$. Sin embargo, hay una clase muy importante de operadores (no invertibles) cuyos espectros, aparte del valor excepcional $\lambda = 0$, se componen de autovalores solamente; estos son los *operadores compactos*.

Definición 3.43. Sean E y F dos espacios de Banach. Una aplicación lineal continua $S \in \mathcal{L}(E,F)$ es un **operador compacto** si todo conjunto acotado $A \subset E$ tiene imagen $S(A)$ relativamente compacta[13] en F. Si $B := \{ x \in E : \|x\| \leqslant 1 \}$ es la bola unitaria cerrada, S es un operador compacto si y solo si $\overline{S(B)}$ es una parte compacta de F.

Obsérvese que $S \in \mathcal{L}(E,F)$ es compacto si y solo si toda sucesión acotada $\{x_n\} \subset E$ posee una subsucesión $\{y_k \equiv x_{n_k}\}$ tal que la sucesión $\{Sy_k\}$ converge en F.

La totalidad de operadores compactos de E en F se denota por $\underline{\mathcal{K}(E,F)}$; en el caso $E = F$, se escribe $\underline{\mathcal{K}(E)} \equiv \mathcal{K}(E,E)$. ◊

Ejemplo 3.44. En el espacio de Banach $F = C(L)$ con L compacto, el *teorema de Ascoli y Arzelà* dice que una familia $\mathcal{F} \subset C(L)$ es relativamente compacta en $C(L)$ si y solo si:[14]

(a) $\mathcal{F}$ es **uniformemente acotada**: hay $M > 0$ tal que $\|f\|_\infty \leqslant M$ para todo $f \in \mathcal{F}$;

(b) $\mathcal{F}$ es **equicontinua**: si $\varepsilon > 0$, cada $x \in L$ tiene un vecindario V tal que $y \in V$ implica $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $f \in \mathcal{F}$. ◊

Ejemplo 3.45. Si $k \colon [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ es una función continua de dos variables, se puede definir un **operador integral** $K \in \mathcal{L}(C[a,b])$ por

$$Kf(s) := \int_a^b k(s,t) f(t)\,dt, \tag{3.11}$$

Es fácil verificar que

$$|Kf(s_1) - Kf(s_2)| \leqslant (b-a)\|f\|_\infty \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |k(s_1,t) - k(s_2,t)|. \tag{3.12}$$

La función Kf es continua porque k es uniformemente continua. Si B es la bola unitaria cerrada de $C[a,b]$, la relación (3.12) implica que $K(B)$ es equicontinua. Además,

$$|Kf(s)| \leqslant \int_a^b |k(s,t)f(t)|\,dt \leqslant (b-a)\|k\|_\infty \|f\|_\infty,$$

de donde $\sup_{f \in B} \|Kf\|_\infty \leqslant (b-a)\|k\|_\infty$, así que $K(B)$ es uniformemente acotada. Por el teorema de Ascoli y Arzelà, $K(B)$ es relativamente compacto; luego, $K \in \mathcal{K}(C[a,b])$. ◊

[13] Una parte $X \subset F$ es **relativamente compacta** si su clausura $\overline{X}$ es compacta.

[14] Para una demostración, véase, por ejemplo, el apartado II.7.4 del libro de Kolmogorov y Fomin.

Ejemplo 3.46. Si E y F son espacios normados, $S \in \mathcal{L}(E, F)$ es un **operador de rango finito** si $S(E) \leqslant F$ es un subespacio finitodimensional. En este caso, $\overline{S(B)}$ es una parte acotada y cerrada de $S(E)$; el teorema de Heine y Borel muestra que S es un operador compacto. ◊

Definición 3.47. Si H es un espacio de Hilbert, $x, y \in H$, la aplicación lineal $z \mapsto \langle y \mid z\rangle\, x$ es un operador de rango uno. Denótese este operador por $|x\rangle\langle y|$. Un argumento sencillo de álgebra lineal muestra que cualquier operador $S \in \mathcal{L}(H)$ de rango finito es de la forma $S = \sum_{k=1}^{n} |x_k\rangle\langle y_k|$, donde $\{x_1, \dots, x_n\}$ es una base lineal de $S(H)$. ◊

Ejemplo 3.48. Es importante señalar que *el operador identidad* $1 \in \mathcal{L}(E)$ *no es compacto* si E es un espacio de Banach infinitodimensional; por cuanto la bola unitaria cerrada no es compacta en E, por el Corolario 2.34. ◊

Lema 3.49. *Si E, F son espacios de Banach, entonces $\mathcal{K}(E, F)$ es un subespacio* cerrado *de $\mathcal{L}(E, F)$.*

Demostración. Es obvio que $\mathcal{K}(E, F)$ es un subespacio de $\mathcal{L}(E, F)$. Si $\{S_n\}$ es una sucesión de operadores compactos en $\mathcal{K}(E, F)$, y si $\|S_n - S\| \to 0$ para algún $S \in \mathcal{L}(E, F)$, se debe comprobar que S también es compacto.

Sea $B := \{\, x \in E : \|x\| \leqslant 1 \,\}$. Si $\varepsilon > 0$, elíjase $m \in \mathbb{N}$ con $\|S_m - S\| < \varepsilon/3$. Ahora $S_m(B)$ es **totalmente acotado** (o *precompacto*) en F: hay un juego finito de puntos $x_1, \dots, x_n \in B$ con $\min_{1\leqslant k\leqslant m} \|S_m(x) - S_m(x_k)\| < \varepsilon/3$ para todo $x \in B$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\min_{1\leqslant k\leqslant m} \|S(x) - S(x_k)\| &\leqslant \|S(x) - S_m(x)\| + \min_{1\leqslant k\leqslant m} \|S_m(x) - S_m(x_k)\| + \max_{1\leqslant k\leqslant m} \|S_m(x_k) - S(x_k)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Se concluye que $S(B)$ tambíen es totalmente acotado en F y por ende es relativamente compacto.[15] Se concluye que $S \in \mathcal{K}(E, F)$. □

Lema 3.50. *Si $S \in \mathcal{K}(E, F)$, entonces $S^{\mathrm{t}} \in \mathcal{K}(F^*, E^*)$.*

Demostración. Sean B y B' las bolas unitarias cerradas en E y F^* respectivamente. Sea $\{w_n\}$ una sucesión en B'. Si $S \in \mathcal{K}(E, F)$, las evaluaciones $f_n : y \mapsto \langle w_n, y\rangle$ forman una sucesión de funciones continuas sobre el compacto $\overline{S(B)} \Subset F$.

La desigualdad $|\langle w_n, y_1\rangle - \langle w_n, y_2\rangle| \leqslant \|y_1 - y_2\|$ muestra que la sucesión $\{f_n\}$ es equicontinua. También es uniformemente acotada, porque $|\langle w_n, y\rangle| \leqslant \|y\|$ para cada y. El teorema de Ascoli y Arzelà ahora dice que la sucesión $\{f_n\}$ es relativamente compacta, y por ende posee

[15] En un espacio métrico, un conjunto es compacto si y solo si es totalmente acotado y completo. Como la *clausura* de una parte de un espacio métrico completo coincide con su *compleción*, una parte de un espacio de Banach es relativamente compacta si y solo si es totalmente acotada.

una subsucesión convergente $\{g_k \equiv f_{n_k}\} \subset C(\overline{S(B)})$. Fíjese que $g_k(y) = \langle v_k, y\rangle$ para $y \in \overline{S(B)}$, donde $v_k := w_{n_k}$. Las igualdades

$$\|S^t v_k - S^t v_l\| = \sup_{x\in B}\bigl|\langle S^t v_k - S^t v_l, x\rangle\bigr| = \sup_{x\in B}\bigl|\langle v_k, Sx\rangle - \langle v_l, Sx\rangle\bigr| = \|g_k - g_l\|_\infty$$

dicen que la sucesión $\{S^t v_k\}$ es de Cauchy y por ende converge en el espacio de Banach E^*. En resumen, cada sucesión en $S^t(B')$ posee una subsucesión convergente; por lo tanto, S^t es un operador compacto. ◻

► La teoría de operadores compactos *entre espacios de Hilbert* tiene varios aspectos particulares que simplifican su tratamiento, en contraste con la de los operadores compactos entre espacios de Banach cualesquiera. El rasgo más característico es el mejoramiento de la convergencia débil a la convergencia en norma. En un espacio de Hilbert H, una sucesión $\{x_n\}$ **converge débilmente** a $x \in H$ si $\langle y \mid x_n\rangle \to \langle y \mid x\rangle$ para todo $y \in H$. (Esto es inmediato del Teorema 2.38, de Riesz.) La convergencia débil se denota con media flecha "$x_n \rightharpoonup x$", en contraste con la flecha ordinaria "$x_n \to x$" que significa convergencia en la norma, es decir, $\|x_n - x\| \to 0$. Es evidente que $x_n \to x$ implica $x_n \rightharpoonup x$, pero no al revés.

Proposición 3.51 (Hilbert)**.** *Sean H y K dos espacios de Hilbert y sea $S \in \mathcal{L}(H,K)$. Entonces S es un operador compacto si y solo si $x_n \rightharpoonup x$ en H implica $Sx_n \to Sx$ en K.*

Demostración. Sea $S \in \mathcal{L}(H,K)$ un operador tal que $x_n \rightharpoonup x$ en H implica $Sx_n \to Sx$ en K. La bola unitaria cerrada $B := \{\, x \in H : \|x\| \leqslant 1 \,\}$ es compacta en la topología débil estelar $\sigma(H^*, H)$, que coincide con la topología débil $\sigma(H, H^*)$ al identificar H con H^*. Cada sucesión en $S(B)$ es de la forma $\{Sx_n\}$ donde cada $x_n \in B$; por la compacidad débil de B, hay una subsucesión $\{z_k \equiv x_{n_k}\}$ tal que $z_k \rightharpoonup z \in B$; luego $Sz_k \to Sz \in S(B)$. Por lo tanto, cada sucesión en $S(B)$ posee una subsucesión convergente (en norma), así que S es un operador compacto.

Inversamente, supóngase que $S \in \mathcal{K}(H,K)$ y que $x_n \rightharpoonup x$ en H. La sucesión $\{x_n\}$ es acotada: en efecto, para cada $y \in H$, $\langle y \,|\, x_n\rangle \to \langle y \,|\, x\rangle$ en $\mathbb{C}$, así que $|\langle y \,|\, x_n\rangle| \leqslant M_y$ para algún $M_y \geqslant 0$. Por el principio de acotación uniforme, hay una constante $M \geqslant 0$ tal que $\|x_n\| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, se obtiene $Sx_n \rightharpoonup Sx$, porque

$$\langle y \mid Sx_n\rangle = \langle S^* y \mid x_n\rangle \to \langle S^* y \mid x\rangle = \langle y \mid Sx\rangle \quad \text{para todo} \quad y \in H.$$

Si $\{Sx_n\}$ no fuera convergente a Sx en la norma de K, habría $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $\{Sz_k \equiv Sx_{n_k}\}$ tal que $\|Sz_k - Sx\| \geqslant \varepsilon$ para todo k. A su vez, $\{Sz_k\}$ tendría una subsucesión $\{Sy_r \equiv Sz_{k_r}\}$, convergente en K, ya que cada $\|y_r\| \leqslant M$ y S es un operador compacto. Al poner $w := \lim_{r\to\infty} Sy_r$, sería $\|w - Sx\| \geqslant \varepsilon$ y por ende habría algún $v \in K$ con $\|v\| = 1$ tal que $|\langle v \mid w - Sx\rangle| \geqslant \varepsilon$; pero esta negaría la convergencia débil $Sy_r \rightharpoonup Sx$. Se concluye que $Sx_n \to Sx$. ◻

Proposición 3.52. *Si H es un espacio de Hilbert, $\mathcal{K}(H)$ es un $*$-ideal cerrado en $\mathcal{L}(H)$.*

Demostración. $\mathcal{K}(H)$ es un *subespacio cerrado* de $\mathcal{L}(H)$, por el Lema 3.49.

Cualquier operador acotado $T \in \mathcal{L}(H)$ preserva la convergencia débil de sucesiones; es decir, $x_n \rightharpoonup x \implies Tx_n \rightharpoonup Tx$. En efecto, si $x_n \rightharpoonup x$, entonces

$$\langle y \mid Tx_n \rangle = \langle T^*y \mid x_n \rangle \to \langle T^*y \mid x \rangle = \langle y \mid Tx \rangle \quad \text{para todo} \quad y \in H.$$

En consecuencia, si $S \in \mathcal{K}(H)$, $T \in \mathcal{L}(H)$, la Proposición 3.51 implica que

$$\begin{aligned} x_n \rightharpoonup x &\implies Tx_n \rightharpoonup Tx \implies STx_n \to STx, \\ x_n \rightharpoonup x &\implies Sx_n \to Sx \implies TSx_n \to TSx, \end{aligned}$$

así que ST y TS están en $\mathcal{K}(H)$. Luego, $\mathcal{K}(H)$ es un *ideal* en el álgebra $\mathcal{L}(H)$.

Sea $V : H \to H^*$ la isometría biyectiva del Teorema 2.38; si $S \in \mathcal{K}(H)$, entonces $S^* = V^{-1}S^{\mathrm{t}}V$ es compacto, ya que $S^{\mathrm{t}} \in \mathcal{K}(H^*)$ por el Lema 3.50. Así, $S \in \mathcal{K}(H) \implies S^* \in \mathcal{K}(H)$; el ideal $\mathcal{K}(H)$ es *un ideal involutivo* (o $*$-*ideal*) en $\mathcal{L}(H)$. □

El argumento de la demostración anterior también establece que la compacidad de la composición de un operador compacto y un operador acotado entre espacios de Hilbert distintos. Por ejemplo, si $T \in \mathcal{L}(H)$, $S \in \mathcal{K}(H,K)$ y $R \in \mathcal{L}(K)$, entonces $ST \in \mathcal{K}(H,K)$ y $RS \in \mathcal{K}(H,K)$; en otras palabras, $\mathcal{K}(H,K)$ es un $\mathcal{L}(K)$-$\mathcal{L}(H)$-bimódulo.

Proposición 3.53. *Si H es un espacio de Hilbert, cada $S \in \mathcal{K}(H)$ es un límite, en la norma de $\mathcal{L}(H)$, de operadores de rango finito.*

Demostración. El resultado es trivial si $\dim H$ es finito. Supóngase, entonces, que H es infinitodimensional (y separable).[16]

Denótese por $\mathcal{F}(H) := \{\, T \in \mathcal{L}(H) : \dim \operatorname{Ran} T < \infty \,\}$ el espacio vectorial de los operadores de rango finito. Del Ejemplo 3.46, se ve que $\mathcal{F}(H) \subseteq \mathcal{K}(H)$; como $\mathcal{K}(H)$ es cerrado en $\mathcal{L}(H)$, un límite en norma de operadores de rango finito es compacto.

Si $\{\, u_m : m \in \mathbb{N} \,\}$ es una base ortonormal de H, tómese $M_n := \operatorname{lin}\langle u_0, u_1, \dots, u_n \rangle$ para $n \in \mathbb{N}$. Sea $B = \overline{B}(0;1)$ la bola unitaria cerrada de H. Dado $S \in \mathcal{K}(H)$, colóquese

$$r_n := \sup\{\, \|Sx\| : x \in B \cap M_n^\perp \,\} \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}.$$

La sucesión $\{r_n\}$ es decreciente, con $r_n \downarrow r := \inf_n r_n \geqslant 0$. Elíjase una sucesión $\{x_n\}$ en H con $x_n \in B \cap M_n^\perp$, tal que $\|Sx_n\| \geqslant r/2$ para todo n. Nótese que la condición $x_n \in M_n^\perp$ implica que $x_n \rightharpoonup 0$.

[16]El espacio de Hilbert H se supone separable (ver la discusión después de la Proposición 1.36), así que cada base ortonormal de H es numerable.

Hay una subsucesión $\{z_k \equiv x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que $Sz_k \to y \in H$; fíjese que $\|y\| \geqslant r/2$ y que $z_k \rightharpoonup 0$. Para todo $w \in H$, vale

$$\langle w \mid y \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle w \mid Sz_k \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle S^* w \mid z_k \rangle = 0,$$

lo cual implica $y = 0$ en H, y por ende $r = 0$. De esta manera se concluye que $r_n \downarrow 0$.

Defínase ahora una sucesión $\{S_n\}$ de operadores de rango finito por

$$S_n := \sum_{m=0}^{n} |Su_m\rangle\langle u_m| \quad \text{o equivalentemente} \quad S_n x := \sum_{m=0}^{n} \langle u_m \mid x \rangle\, Su_m\,.$$

Fíjese que $\operatorname{Ran} S_n = S(M_n)$. Como $Sx = \sum_{m=0}^{\infty} \langle u_m \mid x \rangle\, Su_m$ (al aplicar el operador continuo S al desarrollo de Fourier de x), se obtiene

$$\|S - S_n\| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \left\| S\left(\sum_{m>n} \langle u_m \mid x \rangle\, u_m \right) \right\| = \sup\{\, \|Sx\| : x \in B \cap M_n^\perp \,\} = r_n \to 0.$$

En otras palabras, $S_n \to S$ en la norma de $\mathcal{L}(H)$. □

► Para los operadores integrales, tales como (3.11), es también ventajoso reemplazar el espacio de Banach $C[a,b]$ por el espacio de Hilbert $L^2[a,b]$: si el núcleo integral $k(s,t)$ es una función de cuadrado integrable, el operador K sobre $L^2[a,b]$ resulta ser compacto. Tales operadores integrales fueron estudiados por Schmidt, en términos de bases ortonormales.[17]

Definición 3.54. Sea H un espacio de Hilbert. Dícese que $S \in \mathcal{L}(H)$ es un **operador de Hilbert y Schmidt** si hay una base ortonormal $\{u_k\}$ de H tal que

$$\underline{\|S\|_2} := \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|Su_k\|^2 \right)^{1/2} < \infty. \tag{3.13}$$

Si $\{v_r\}$ es otra base ortonormal de H, la igualdad de Parseval muestra que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|Su_k\|^2 = \sum_{k,r=0}^{\infty} \bigl|\langle v_r \mid Su_k \rangle\bigr|^2 = \sum_{k,r=0}^{\infty} \bigl|\langle S^* v_r \mid u_k \rangle\bigr|^2 = \sum_{r=0}^{\infty} \|S^* v_r\|^2. \tag{3.14}$$

En esta ecuación, la última sumatoria no depende de $\{u_k\}$, ni la primera sumatoria de $\{v_r\}$. Por lo tanto, la cantidad $\|S\|_2$ es *independiente de la base ortonormal* elegida. La ecuación (3.14) también muestra que $S^* \in \mathcal{L}(H)$ es otro operador de Hilbert y Schmidt, con $\|S^*\|_2 = \|S\|_2$. Denótese la totalidad de operadores de Hilbert y Schmidt sobre H por $\underline{\mathcal{L}^2(H)}$. ◊

[17] Erhard Schmidt fue un estudiante de David Hilbert e hizo varias contribuciones a la teoría de operadores integrales después de 1905. Los desarrollos en bases ortonormales fueron la clave de su obra: Erhard Schmidt, “Zur theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen”, *Mathematische Annalen* **43** (1907), 433–476.

Lema 3.55. *$\mathcal{L}^2(H)$ es un espacio de Hilbert, cuya norma es $\|\cdot\|_2$.*

Demostración. Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $|z+w|^2 \leqslant 2|z|^2 + 2|w|^2$ por la desigualdad de Cauchy (o la ley del paralelogramo). Para $R, S \in \mathcal{L}^2(H)$, se verifica

$$\|R+S\|_2^2 = \sum_{k,r=0}^{\infty} \bigl|\langle v_r \mid (R+S)u_k\rangle\bigr|^2 \leqslant 2 \sum_{k,r=0}^{\infty} \bigl|\langle v_r \mid Ru_k\rangle\bigr|^2 + \bigl|\langle v_r \mid Su_k\rangle\bigr|^2 = 2\|R\|_2^2 + 2\|S\|_2^2 < \infty,$$

así que $R + S \in \mathcal{L}^2(H)$. Además, $\|\alpha S\|_2 = |\alpha|\,\|S\|_2$ para $\alpha \in \mathbb{C}$; se deduce que $\mathcal{L}^2(H)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(H)$. Escríbase

$$\langle R \mid S\rangle_2 := \sum_{k=0}^{\infty} \langle Ru_k \mid Su_k\rangle. \tag{3.15}$$

Los sumandos de esta serie forman un elemento de $\boldsymbol{\ell}^2$ y se verifica $|\langle R \mid S\rangle_2|^2 \leqslant \|R\|_2^2\,\|S\|_2^2$ por la desigualdad de Schwarz. Fíjese que $\langle S \mid S\rangle_2 = \|S\|_2^2$. Es evidente que (3.15) define un producto escalar sobre el espacio $\mathbb{C}$-vectorial $\mathcal{L}^2(H)$; en otras palabras, $\mathcal{L}^2(H)$ es un espacio *prehilbertiano* y $\|\cdot\|_2$ es una norma sobre este espacio.

Si $x = \sum_{k=0}^{\infty} \langle u_k \mid x\rangle\, u_k \in H$, la desigualdad de Schwarz y la igualdad de Parseval implican

$$\|Sx\|^2 \leqslant \biggl(\sum_{k=0}^{\infty} |\langle u_k \mid x\rangle|\,\|Su_k\|\biggr)^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|Su_k\|^2 \sum_{k=0}^{\infty} |\langle u_k \mid x\rangle|^2 = \|S\|_2^2\,\|x\|^2,$$

así que $\|S\|_2 \geqslant \|S\|$.

En consecuencia, si $\{S_n\}$ es una sucesión de Cauchy para la norma $\|\cdot\|_2$, también es una sucesión de Cauchy para la norma $\|\cdot\|$ de operadores acotados. Por lo tanto, hay un operador $S \in \mathcal{L}(H)$ tal que $\|S_n - S\| \to 0$. Tómese $C \geqslant 0$ tal que $\|S_n\|_2 \leqslant C$ para cada n; entonces $\sum_{k=0}^{r} \|S_n u_k\|^2 \leqslant C^2$ para cada $n, r \in \mathbb{N}$. Al dejar $n \to \infty$ se obtiene $\sum_{k=0}^{r} \|Su_k\|^2 \leqslant C^2$ para cada r; luego $S \in \mathcal{L}^2(H)$ también, con $\|S\|_2 \leqslant C$.

Dado $\varepsilon > 0$, hay $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|S_n - S_m\|_2 \leqslant \varepsilon$ para $m, n \geqslant N$. Si $r \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{r} \|(S_n - S)u_k\|^2 &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{r} \|(S_n - S_m)u_k\|^2 \\ &\leqslant \limsup_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \|(S_n - S_m)u_k\|^2 = \limsup_{m\to\infty} \|S_n - S_m\|_2^2 \leqslant \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Como r es arbitrario, se ve que $n \geqslant N(\varepsilon) \implies \|S_n - S\|_2 \leqslant \varepsilon$; luego, $\|S_n \to S\|_2 \to 0$. Por lo tanto, el espacio prehilbertiano $\mathcal{L}^2(H)$ es *completo* en la norma $\|\cdot\|_2$. ◻

Obsérvese que $\mathcal{L}^2(H)$ es también un *álgebra de Banach involutiva*; sin embargo, no es una C^*-álgebra si $\dim H = \infty$.

Lema 3.56. *Un operador de Hilbert y Schmidt es compacto.*

Demostración. Si $S \in \mathcal{L}^2(H)$ y si $n \in \mathbb{N}$, el operador $S_n := \sum_{k=0}^{n} |Su_k\rangle\langle u_k|$ tiene rango finito. Si $x \in H$, entonces

$$\|(S - S_n)x\|^2 \leqslant \biggl(\sum_{k>n} |\langle u_k \mid x\rangle| \, \|Su_k\|\biggr)^2 \leqslant \sum_{k>n} |\langle u_k \mid x\rangle|^2 \sum_{k>n} \|Su_k\|^2 \leqslant \|x\|^2 \sum_{k>n} \|Su_k\|^2,$$

así que $\|S - S_n\|^2 \leqslant \sum_{k>n} \|Su_k\|^2$. Luego, $\|S - S_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. El Lema 3.49 ahora muestra que $S \in \mathcal{K}(H)$. □

Proposición 3.57. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita. Si $\underline{k} \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$, el operador integral $K \in \mathcal{L}(L^2(X, \mu))$ definido por*

$$\underline{Kf}(x) := \int_X k(x, y) f(y) \, d\mu(y) \tag{3.16}$$

es un operador de Hilbert y Schmidt, con $\|K\|_2 = \|k\|_2$.

Demostración. Escríbase $k_x(y) \equiv k(x, y)$. La hipótesis $k \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$ y el teorema de Fubini muestran que $k_x \in L^2(X, \mu)$ para casi todo $x \in X$. Entonces la integral $Kf(x) = \int_X k_x(y) f(y) \, d\mu(y)$ converge para casi todo x y define una función μ-medible Kf casi por doquier. Si $h \in L^2(X, \mu)$, la desigualdad de Schwarz en $L^2(X \times X, \mu \times \mu)$ implica que

$$\begin{aligned} &\biggl(\iint_{X\times X} |\overline{h(x)}\, k(x, y) f(y)| \, d\mu(y) \, d\mu(x)\biggr)^2 \\ &\leqslant \iint_{X\times X} |\overline{h(x)} f(y)|^2 \, d\mu(y) \, d\mu(x) \iint_{X\times X} |k(x, y)|^2 \, d\mu(y) \, d\mu(x) = \|h\|_2^2 \, \|f\|_2^2 \, \|k\|_2^2 \,. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Luego la receta $h \mapsto \int_X \overline{h(x)}\, Kf(x) \, d\mu(x)$ define una forma semilineal continua sobre $L^2(X, \mu)$. Por el Teorema 2.38, *mutatis mutandis*, esta forma es $h \mapsto \langle h \mid g\rangle$ para algún $g \in L^2(X, \mu)$. Entonces $g = Kf$ casi por doquier: se concluye que $Kf \in L^2(X, \mu)$. Las igualdades

$$Kf(x) = \int_X k_x(y) f(y) \, d\mu(y) = \langle \bar{k}_x \mid f\rangle = \langle \bar{f} \mid k_x\rangle, \quad \text{para casi todo} \quad x \in X,$$

muestran que $\|Kf\|^2 = \int_X |\langle \bar{f} \mid k_x\rangle|^2 \, d\mu(x)$.

El cálculo (3.17) ahora dice que $|\langle h \mid Kf\rangle| \leqslant \|h\|_2 \, \|f\|_2 \, \|k\|_2$ para $h \in L^2(X, \mu)$. La Proposición 2.13 muestra que $\|Kf\|_2 \leqslant \|f\|_2 \, \|k\|_2$, así que $K \in \mathcal{L}(L^2(X, \mu))$ con $\|K\| \leqslant \|k\|_2$.

Si $\{u_n\}$ es una base ortonormal de $L^2(X, \mu)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \|K\|_2^2 = \sum_n \|Ku_n\|^2 &= \sum_n \int_X |\langle \bar{u}_n \mid k_x\rangle|^2 \, d\mu(x) = \int_X \sum_n |\langle \bar{u}_n \mid k_x\rangle|^2 \, d\mu(x) \\ &= \int_X \|k_x\|^2 \, d\mu(x) = \int_X \int_X |k(x, y)|^2 \, d\mu(y) \, d\mu(x) =: \|k\|_2^2 \end{aligned}$$

por convergencia monotónica y la igualdad de Parseval. Luego $K \in \mathcal{L}^2(L^2(X, \mu))$. □

► Es posible *caracterizar los operadores compactos autoadjuntos por sus espectros*. Si $T = T^* \in \mathcal{K}(H)$, resulta que $\operatorname{sp}(T) \setminus \{0\}$ es una colección de *autovalores* de T, todos con multiplicidad finita.[18] Al ordenar los autovalores $\{\lambda_k\}$ de tal manera que $|\lambda_k| \geqslant |\lambda_{k+1}|$ para todo k, se obtiene una sucesión en $\underline{c}_0$.

Lema 3.58. *Un operador compacto autoadjunto $T = T^* \in \mathcal{K}(H)$ posee un autovalor λ tal que $|\lambda| = \|T\|$.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en la bola unitaria $B = \{\, x \in H : \|x\| \leqslant 1 \,\}$ que converge débilmente: $x_n \rightharpoonup x \in B$. Entonces $Tx_n \to Tx$ por la Proposición 3.51. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \bigl|\langle x_k \mid Tx_k\rangle - \langle x \mid Tx\rangle\bigr| &= \bigl|\langle x_k \mid Tx_k - Tx\rangle + \langle x_k - x \mid Tx\rangle\bigr| \\ &\leqslant \|Tx_k - Tx\| + |\langle x_k - x \mid Tx\rangle| \to 0 \quad \text{cuando } \ n \to \infty. \end{aligned}$$

Luego, la función $x \mapsto |\langle x \mid Tx\rangle|$ es continua sobre B_σ (B con la topología débil $\sigma(H, H^*)$). Por la identificación $H^* \simeq H$ y el Teorema 2.36 de Banach y Alaoglu, B_σ es compacto; así que esta función continua alcanza su supremo en B_σ. Por la Proposición 3.25, este supremo es $\|T\|$. En otras palabras, hay un vector $z \in B$ tal que $|\langle z \mid Tz\rangle| = \|T\|$.

Por otro lado, la desigualdad de Schwarz implica que

$$\|T\| = |\langle z \mid Tz\rangle| \leqslant \|z\|\,\|Tz\| \leqslant \|T\|,$$

así que $|\langle z \mid Tz\rangle| = \|z\|\,\|Tz\|$. La Proposición 1.27 entonces dice que $Tz = \lambda z$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$; y además, $|\lambda|\,\|z\|^2 = \|T\|$. Si $T = 0$, la conclusión del Lema es trivial. Si $T \neq 0$, entonces z es un *autovector* para T y λ es un autovalor; al ser $z \in \ker(\lambda 1 - T)$, el operador $\lambda 1 - T$ no es invertible, así que $\lambda \in \operatorname{sp}(T)$ y por ende $|\lambda| \leqslant \|T\|$. Ahora la ecuación $|\lambda|\,\|z\|^2 = \|T\|$ muestra que $\|z\| = 1$ y $|\lambda| = \|T\|$. □

Lema 3.59. *Sea $T = T^* \in \mathcal{K}(H)$ y sean λ, μ dos autovalores de T.*

(a) *Si $\lambda \neq 0$, entonces* $\ker(\lambda 1 - T)$ *es finitodimensional.*

(b) *Si $\lambda \neq \mu$, entonces* $\ker(\lambda 1 - T)$ *y* $\ker(\mu 1 - T)$ *son subespacios ortogonales de H.*

Demostración. Ad (a): Escríbase $F_\lambda := \ker(\lambda 1 - T)$. Entonces $F_\lambda \neq \{0\}$ porque λ es un autovalor de T. Está claro que F_λ es cerrado en H, $T(F_\lambda) = F_\lambda$ y la restricción $T|_{F_\lambda}$ es un operador compacto sobre F_λ. Pero $\lambda^{-1}T|_{F_\lambda} = 1$, así que $1 \in \mathcal{L}(F_\lambda)$ es un operador compacto. A la luz del Ejemplo 3.48, esto muestra que $\dim F_\lambda$ es finita.

[18] El espectro de un operador compacto en $\mathcal{K}(E)$, donde E es un espacio de Banach, no necesariamente de Hilbert, comparte dichas propiedades: $\operatorname{sp}(T) \setminus \{0\}$ es un juego de autovalores de multiplicidad (algebraica) finita. Al no disponer en general del concepto de operador autoadjunto, la demostración requiere el *teorema de Riesz y Schauder* para elucidar la forma del espectro. Para ese teorema véase, por ejemplo, los libros de Dieudonné (§ 11.4.1), Rudin (Teorema 4.25) o Simon, *Operator Theory*, Teorema 3.3.1.

Ad (b): Supóngase, sin perder generalidad, que $\lambda \neq 0$. Si $x \in F_\lambda$, $y \in F_\mu$, entonces

$$\langle y \mid x \rangle = \frac{1}{\lambda}\langle y \mid Tx \rangle = \frac{1}{\lambda}\langle Ty \mid x \rangle = \frac{1}{\lambda}\langle \mu y \mid x \rangle = \frac{\mu}{\lambda}\langle y \mid x \rangle,$$

porque $T^* = T$ y por ende $\mu \in \mathbb{R}$. Luego $\langle y \mid x \rangle = 0$. Se deduce que $F_\lambda \perp F_\mu$. □

Teorema 3.60. *Si $T = T^* \in \mathcal{K}(H)$ es un operador compacto autoadjunto,* $\operatorname{sp}(T) \setminus \{0\}$ *coincide con la colección de autovalores no nulos de T, todos de multiplicidad finita.*[19]

Demostración. Si $\lambda \neq 0$ es un autovalor de T, entonces $\lambda \in \operatorname{sp}(T)$ y el Lema 3.59 muestra que su multiplicidad $m_\lambda := \dim F_\lambda$ es finita.

Considérese la colección $\mathcal{U}$ de familias ortonormales en H cuyos elementos son autovectores de T. Esta colección no es vacía por el Lema 3.58, está parcialmente ordenada por inclusión, y la unión (creciente) de cualquier cadena en $\mathcal{U}$ es otro elemento de $\mathcal{U}$. Por el Lema de Zorn, $\mathcal{U}$ posee un elemento maximal $\{u_k\}$, es decir, una familia ortonormal maximal de autovectores de T. Sea M el subespacio cerrado de H generado por esta familia; esto es la totalidad de desarrollos de Fourier convergentes $\sum_k \alpha_k u_k$ con $\alpha \in \underline{\ell}^2$.

Está claro que $T(M) \subseteq M$, con $T\left(\sum_k \alpha_k u_k\right) = \sum_k \lambda_k \alpha_k u_k$. Si $x \in M$, $y \in M^\perp$, entonces $\langle Ty \mid x \rangle = \langle y \mid Tx \rangle = 0$ porque $T = T^*$ y $Tx \in M$. Por lo tanto, $T(M^\perp) \subseteq M^\perp$ también.

La restricción $S := T|_{M^\perp}$ es compacto en $\mathcal{L}(M^\perp)$ – tanto por la Definición 3.43 como por la Proposición 3.51 – con $S^* = S$. Si fuera $M^\perp \neq 0$, el Lema 3.58 daría un autovector $z_0 \in M^\perp$ para S y de rebote para T, contrario a la maximalidad de $\{u_k\}$. Luego $M^\perp = \{0\}$ y $M = H$; es decir, los autovectores $\{u_k\}$ forman una *base ortonormal* de H.

Dado $\varepsilon > 0$, sea $C(\varepsilon) := \{\, j \in \mathbb{N} : |\lambda_j| > \varepsilon \,\}$. Si $C(\varepsilon)$ fuera infinito, la sucesión $\{u_j\}_{j \in C(\varepsilon)}$ satisfaría $u_j \rightharpoonup 0$, porque $\langle x \mid u_j \rangle \to 0$ para cada $x \in H$ por la igualdad de Parseval, así que $Tu_j \to 0$ en H. Pero esto es imposible porque $\|Tu_j\| = \|\lambda_j u_j\| = |\lambda_j| > \varepsilon$ para $j \in C(\varepsilon)$.

En consecuencia, $C(\varepsilon)$ es *finito* para cada $\varepsilon > 0$. Sea M_ε el subespacio cerrado con base ortonormal $\{\, u_k : k \notin C(\varepsilon) \,\}$. El operador compacto $S_\varepsilon := T|_{M_\varepsilon}$ cumple

$$\|S_\varepsilon x\|^2 = \Bigl\| \sum_{k \notin C(\varepsilon)} \langle u_k \mid \lambda_k x \rangle \Bigr\|^2 = \sum_{k \notin C(\varepsilon)} |\lambda_k|^2 \, |\langle u_k \mid x \rangle|^2 \leqslant \varepsilon^2 \, \|x\|^2 \quad \text{para} \quad x \in M_\varepsilon \,,$$

así que $\|S_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$, a la vez que $T|_{M_\varepsilon^\perp}$ tiene rango finito.

Si $\mu \in \operatorname{sp}(T)$ con $|\mu| > \varepsilon$, la restricción de $\mu 1 - T$ al subespacio T-invariante M_ε es invertible. Por lo tanto, $\mu 1 - T$ no tiene inverso en el complemento ortogonal $M_\varepsilon^\perp$, el cual es T-invariante y finitodimensional. Luego μ es un autovalor de T, con $\mu = \lambda_k$ para algún $k \in C(\varepsilon)$. Se ha comprobado que $\operatorname{sp}(T) \setminus \{0\}$ consiste de autovalores únicamente. □

[19] La **multiplicidad algebraica** m_λ de un autovalor λ es el número máximo de autovectores linealmente independientes para λ, esto es, $m_\lambda := \dim(\{\, x \in H : (\lambda 1 - T)^n x = 0 \text{ para algún } n \,\})$. Si $T = T^*$, esta dimensión coincide con la **multiplicidad geométrica**, $m_\lambda = \dim \ker(\lambda 1 - T)$.

Si $T = T^* \in \mathcal{K}(H)$ con $\dim H = \infty$, se puede ordenar los autovalores no nulos de T, contados con multiplicidad, de manera que $|\lambda_k| \geqslant |\lambda_{k+1}|$ para cada $k \in \mathbb{N}$. La desigualdad $\|S_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$ de la demostración anterior muestra que esta sucesión $\boldsymbol{\lambda}$ de autovalores no nulos cumple $\boldsymbol{\lambda} \in \underline{\boldsymbol{c}}_0$. Como $\operatorname{sp}(T)$ es compacto, esto muestra que $0 \in \operatorname{sp}(T)$, aun cuando 0 no sea un autovalor.

► Una matriz cuadrada $C \in M_n(\mathbb{C})$ es diagonalizable, por cambio de base ortonormal de $\mathbb{C}^n$, si y solo si es normal: $C^*C = CC^*$. Para simplificar las matrices no normales, se dispone de una factorización $C = UAV$, llamada *descomposición según valores singulares*, donde U y V son matrices unitarias y A es una matriz positiva semidefinida. Esta descomposición también es válida para operadores compactos sobre un espacio de Hilbert infinitodimensional.

Definición 3.61. Sea $T \in \mathcal{K}(H)$ un operador compacto con descomposición polar $T = W|T|$. El operador positivo $|T| = (T^*T)^{1/2}$ es compacto y autoadjunto; sus autovalores son los **valores singulares** del operador T. Aparte de 0, estos valores singulares μ_k son *positivos* y pueden ordenarse en forma *decreciente*: $\mu_0 \geqslant \mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_k \geqslant \cdots$, con $\mu_0 = \|T\|$ en vista del Lema 3.58 y la propiedad (3.6).

El Teorema 3.60 muestra que la sucesión $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_k\}$ pertenece a $\underline{\boldsymbol{c}}_0$. No es difícil comprobar que $T \in \mathcal{L}^2(H)$ si y solo si $\boldsymbol{\mu} \in \underline{\boldsymbol{\ell}}^2$.

Si $1 \leqslant p < \infty$, la **clase de Schatten** $\underline{\mathcal{L}^p(H)}$ es la totalidad de operadores compactos $T \in \mathcal{K}(H)$ cuyos valores singulares forman una sucesión en $\underline{\boldsymbol{\ell}}^p$. Resulta que cada $\mathcal{L}^p(H)$ es una $*$-ideal (no cerrado) de $\mathcal{L}(H)$. Fíjese que $\underline{\boldsymbol{\ell}}^p \subset \underline{\boldsymbol{\ell}}^r$ implica que $\mathcal{L}^p(H) \subset \mathcal{L}^r(H)$, toda vez que $1 \leqslant p < r < \infty$. ◊

Proposición 3.62. *Sea $T \in \mathcal{K}(H)$ un operador compacto, con valores singulares $\{\mu_k\}$, ordenados en forma decreciente. Entonces hay dos familias ortonormales $\{u_k\}$, $\{v_k\}$ en H tales que la siguiente **descomposición canónica** de T converge en la norma de $\mathcal{L}(H)$:*

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \, |v_k\rangle\langle u_k| \,. \tag{3.18}$$

Demostración. El operador T^*T es compacto porque T es compacto, por la Proposición 3.52. Además, $|T| = \sqrt{T^*T}$ es compacto, como límite en norma de polinomios $p_n(T^*T)$. Los autovalores de $T^*T = |T|^2$ son los números positivos μ_k^2 (amén de 0, si $\ker T \neq 0$).

Por la demostración del Teorema 3.60, hay una base ortonormal $\{u_k\}$ de $(\ker T)^\perp$ cuyos elementos son autovectores[20] de T^*T, concretamente: $T^*Tu_k = \mu_k^2 u_k$ para cada k. Defínase también $v_k := \mu_k^{-1} T u_k$.

La familia $\{v_k\}$ es ortonormal, porque

$$\langle v_k \mid v_l\rangle = (\mu_k\mu_l)^{-1}\langle u_k \mid T^*Tu_l\rangle = (\mu_l/\mu_k)\,[\![k = l]\!] = [\![k = l]\!].$$

[20] La base ortonormal de H, denominado $\{u_k\}$ en la demostración del Teorema 3.60, es la unión de esta base ortonormal de $(\ker T)^\perp$ y otra base ortonormal de $\ker T$, en el caso de que $\ker T \neq \{0\}$.

Usando la desigualdad de Bessel (1.25), se obtiene

$$\begin{aligned}
\Bigl\| Tx - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \langle u_k \mid x\rangle v_k \Bigr\|^2 &= \Bigl\| Tx - \sum_{k=0}^{n-1} \langle u_k \mid x\rangle Tu_k \Bigr\|^2 \\
&= \langle Tx \mid Tx\rangle + \sum_{k=0}^{n-1} |\langle u_k \mid x\rangle|^2 \langle Tu_k \mid Tu_k\rangle - \langle u_k \mid x\rangle\langle Tx \mid Tu_k\rangle - \langle x \mid u_k\rangle\langle Tu_k \mid Tx\rangle \\
&= \langle x \mid T^*Tx\rangle + \sum_{k=0}^{n-1} |\langle u_k \mid x\rangle|^2 \langle u_k \mid T^*Tu_k\rangle - \langle u_k \mid x\rangle\langle x \mid T^*Tu_k\rangle - \langle x \mid u_k\rangle\langle T^*Tu_k \mid x\rangle \\
&= \langle x \mid T^*Tx\rangle - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k^2 |\langle u_k \mid x\rangle|^2 = \sum_{k\geqslant n} \mu_k^2 |\langle u_k \mid x\rangle|^2 \leqslant \mu_n^2 \sum_{k\geqslant n} |\langle u_k \mid x\rangle|^2 \leqslant \mu_n^2 \|x\|^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\bigl\| T - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k |v_k\rangle\langle u_k| \bigr\|^2 \leqslant \mu_n$. Entonces la serie $\sum_{k\geqslant 0} \mu_k |v_k\rangle\langle u_k|$ bien es finita o bien converge a T en norma. □

La traza y los operadores trazables

Las clases de Schatten $\mathcal{L}^p(H)$ admite una descripción alternativa, en términos de la *traza* de un operador. La traza es un funcional sobre operadores análogo a la integral (de Lebesgue) de funciones sobre $\mathbb{R}^n$: no todas las funciones son integrables y no todos los operadores son “trazables”. Para definir la integral de Lebesgue, conviene empezar con las funciones no negativas; para definir la traza, conviene empezar con los operadores positivos.

Definición 3.63. Tómese una base ortonormal $\{u_k\}$ del espacio de Hilbert H. Si $A \in \mathcal{L}(H)$ es un operador *positivo*, defínase la **traza** de A como[21]

$$\underline{\operatorname{Tr} A} := \sum_{k=0}^{\infty} \langle u_k \mid Au_k\rangle \in [0, +\infty]. \tag{3.19}$$

Fíjese que se admite $+\infty$ como valor posible de la traza de operadores positivos. ◊

Lema 3.64. *Si $T \in \mathcal{L}(H)$, entonces* $\operatorname{Tr}(T^*T) = \operatorname{Tr}(TT^*)$.

Demostración. La traza de T^*T admite la expansión:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(T^*T) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle u_k \mid T^*Tu_k\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle Tu_k \mid Tu_k\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \Bigl\langle Tu_k \Bigm| \sum_{j=0}^{\infty} \langle u_j \mid Tu_k\rangle\, u_j \Bigr\rangle \\
= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \langle u_j \mid Tu_k\rangle\, \langle Tu_k \mid u_j\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \langle T^*u_j \mid u_k\rangle\, \langle u_k \mid T^*u_j\rangle.
\end{aligned}$$

[21] En la notación, se la asumido que H es infinitodimensional (y separable). La misma definición es aplicable, con una suma finita al lado derecho de (3.19), si H es de dimensión finita.

Como $\langle u_j | Tu_k \rangle \, \langle Tu_k | u_j \rangle = |\langle u_j | Tu_k \rangle|^2 \geqslant 0$, los términos de esta serie doble son no negativos. Por lo tanto, se puede cambiar el orden de sumación:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(T^*T) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \langle T^*u_j \mid u_k \rangle \, \langle u_k \mid T^*u_j \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \Big\langle T^*u_j \,\Big|\, \sum_{k=0}^{\infty} \langle u_k \mid T^*u_j \rangle \, u_k \Big\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \langle T^*u_j \mid T^*u_j \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \langle u_j \mid TT^*u_j \rangle = \operatorname{Tr}(TT^*). \qquad \square \end{aligned}$$

Lema 3.65. *Si $A \in \mathcal{L}(H)$ es positivo y $U \in \mathcal{L}(H)$ es unitario, entonces* $\operatorname{Tr}(UAU^*) = \operatorname{Tr} A$. *En consecuencia, la traza no depende de la base ortonormal empleada en su definición* (3.19). *Además, vale $Tr A \geqslant \|A\|$.*

Demostración. Colóquese $T := U\sqrt{A}$. Entonces $T^*T = \sqrt{A}\,U^*U\sqrt{A}$ y $TT^* = UAU^*$; la fórmula $\operatorname{Tr}(UAU^*) = \operatorname{Tr}(A)$ sigue inmediatamente del Lema 3.64.

Si $\{v_k\}$ es otra base ortonormal de H – necesariamente de la misma cardinalidad que $\{v_k\}$, por la Proposición 1.36 – sea U el operador unitario sobre H determinado por $Uv_k := u_k$ para todo k. Desde luego, $v_k := U^*u_k$ pues $U^* = U^{-1}$. Entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle v_k \mid Av_k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle U^*u_k \mid AU^*v_k \rangle = \operatorname{Tr}(UAU^*) = \operatorname{Tr} A.$$

En particular, dado $\varepsilon > 0$ se puede tomar v_0 tal que $\|v_0\| = 1$ y $\langle v_0 \mid Av_0 \rangle > \|A\| - \varepsilon$, por la Proposición 3.25. Entonces $\operatorname{Tr} A > \|A\| - \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. $\square$

Si $A, B \in \mathcal{L}(H)$ son operadores positivos y si $r > 0$, es obvio que

$$\operatorname{Tr}(rA) = r \operatorname{Tr} A \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Tr}(A + B) = \operatorname{Tr} A + \operatorname{Tr} B. \tag{3.20}$$

Además, $\operatorname{Tr} A \geqslant \operatorname{Tr} B \geqslant 0$ en $[0, +\infty]$ toda vez que $A \geqslant B \geqslant 0$ en $\mathcal{L}(H)$.

Lema 3.66. *Si $T \in \mathcal{L}(H)$ es tal que* $\operatorname{Tr}(|T|^p) < \infty$ *para algún $p > 0$, entonces $T \in \mathcal{K}(H)$.*

Demostración. Sea $\{u_k\}$ una base ortonormal de H. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon)$ tal que $\sum_{k>N} \langle u_k \mid |T|^p \, u_k \rangle < \varepsilon$. Sea P_ε el proyector con imagen $\operatorname{lin}\langle u_0, \dots, u_N \rangle$. Entonces

$$\begin{aligned} \big\| |T|^{p/2}(1 - P_\varepsilon) \big\|^2 &= \big\| (1 - P_\varepsilon)|T|^p(1 - P_\varepsilon) \big\| \\ &\leqslant \operatorname{Tr}\big((1 - P_\varepsilon)|T|^p(1 - P_\varepsilon)\big) = \sum_{k>N} \langle u_k \mid |T|^p \, u_k \rangle < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto dice que $|T|^{p/2}$ es un límite, en la norma de $\mathcal{L}(H)$, de operadores de rango finito $|T|^{p/2}P_\varepsilon$; luego $|T|^{p/2} \in \mathcal{K}(H)$. La función $f(\lambda) := \lambda^{2/p}$ es continua sobre $\operatorname{sp}(|T|^{p/2}) \subset [0, \infty)$, así que $|T| = f(|T|^{p/2})$ es compacto, por cálculo funcional continuo. La descomposición polar $T = W|T|$ entonces implica que T es compacto. $\square$

Los operadores de Hilbert y Schmidt entonces admiten la caracterización siguiente:

$$\mathcal{L}^2(H) = \{\, T \in \mathcal{L}(H) : \operatorname{Tr}(T^*T) < \infty \,\}, \quad \text{con} \quad \|T\|_2^2 = \operatorname{Tr}(T^*T) \geqslant \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

Definición 3.67. El espacio $\mathbb{C}$-vectorial de los **operadores trazables** es

$$\mathcal{L}^1(H) := \operatorname{lin}\langle A \in \mathcal{L}(H) : A \geqslant 0,\ \operatorname{Tr} A < \infty \rangle \subset \mathcal{K}(H). \tag{3.21}$$

Del Corolario 3.40, cada $T \in \mathcal{L}(H)$ tiene expresión única $T = A_1 - A_2 + iA_3 - iA_4$ con cada A_j positivo. Si $T \in \mathcal{L}^1(H)$, entonces $T^* = A_1 - A_2 + iA_4 - iA_3 \in \mathcal{L}^1(H)$. Es evidente de (3.20) que la traza (3.19) se extiende a una *forma lineal* $\operatorname{Tr}\colon \mathcal{L}^1(H) \to \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Tr}(T^*) = \overline{\operatorname{Tr} T}$. ◊

Lema 3.68. *$\mathcal{L}^1(H)$ es un $*$-ideal de $\mathcal{L}(H)$, con $\mathcal{F}(H) \subseteq \mathcal{L}^1(H) \subseteq \mathcal{L}^2(H) \subseteq \mathcal{K}(H)$. Se verifica*

$$\mathcal{L}^1(H) = \{\, T \in \mathcal{L}(H) : \operatorname{Tr}|T| < \infty \,\}.$$

Demostración. Hay una *fórmula de polarización* en $\mathcal{L}(H)$, análoga a (1.21):

$$4\, S^*T = \sum_{k=0}^{3} i^k (T + i^k S)^* (T + i^k S), \tag{3.22}$$

por un cálculo directo análogo a la demostración del Lema 1.30. Si $A \geqslant 0$ con $\operatorname{Tr} A < \infty$ y si $S \in \mathcal{L}(H)$, entonces

$$4\, AS = 4\, A^{1/2}A^{1/2}S = \sum_{k=0}^{3} i^k (A^{1/2}S + i^k A^{1/2})^* (A^{1/2}S + i^k A^{1/2}) = \sum_{k=0}^{3} i^k (S + i^k 1)^* A (S + i^k 1).$$

Al poner $R_k := S + i^k 1$, se calcula que

$$\operatorname{Tr}(R_k^* A R_k) = \operatorname{Tr}(R_k^* A^{1/2} A^{1/2} R_k) = \operatorname{Tr}(A^{1/2} R_k R_k^* A^{1/2}) \leqslant \|R_k R_k^*\| \ \operatorname{Tr} A < \infty,$$

usando la relación $0 \leqslant R_k R_k^* \leqslant \|R_k R_k^*\|\, 1$. Esto dice que $AS \in \mathcal{L}^1(H)$. Luego, al tomar $T = A_1 - A_2 + iA_3 - iA_4 \in \mathcal{L}^1(H)$, se obtiene $TS \in \mathcal{L}^1(H)$. Se ha mostrado que $\mathcal{L}^1(H)$ es un ideal a derecha de $\mathcal{L}(H)$; como es involutivo, es también un ideal a izquierda.

La descomposición polar $T = W|T|$, luego $|T| = W^*T$, muestra que $T \in \mathcal{L}^1(H)$ si y solo si $|T| \in \mathcal{L}^1(H)$, esto es, $\operatorname{Tr}|T| < \infty$.

Si $T \in \mathcal{L}^1(H)$, entonces $T^*T = |T|^2 = |T|^{1/2}|T||T|^{1/2} \leqslant \|T\|\,|T|$ porque $|T| \leqslant \|T\|\,1$, así que $\operatorname{Tr}(T^*T) \leqslant \|T\| \ \operatorname{Tr}|T| < \infty$. Esto comprueba que $\mathcal{L}^1(H) \subseteq \mathcal{L}^2(H)$. La inclusión $\mathcal{F}(H) \subseteq \mathcal{L}^1(H)$ es obvia, y $\mathcal{L}^2(H) \subseteq \mathcal{K}(H)$ es el Lema 3.56. □

Lema 3.69. *Si $T \in \mathcal{L}^1(H)$ y $X \in \mathcal{L}(H)$, entonces $|\operatorname{Tr}(XT)| \leqslant \|X\| \ \operatorname{Tr}|T|$. En consecuencia, $\mathcal{L}^1(H)$ es un álgebra de Banach bajo la norma $\|T\|_1 := \operatorname{Tr}|T|$.*

Demostración. Obsérvese que $T \in \mathcal{L}^1(H)$ implica $|T|^{1/2} \in \mathcal{L}^2(H)$. Con la descomposición polar $T = W|T|$, se obtiene $XW|T|^{1/2} \in \mathcal{L}^2(H)$. Nótese también que el producto escalar (3.15) en $\mathcal{L}^2(H)$ puede escribirse como $\langle R \mid S\rangle_2 := \operatorname{Tr}(R^*S)$. Entonces

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Tr}(XT)|^2 &= \bigl|\operatorname{Tr}(XW|T|^{1/2}|T|^{1/2})\bigr|^2 = \bigl|\bigl\langle |T|^{1/2}W^*X^* \bigm| |T|^{1/2}\bigr\rangle_2\bigr|^2 \\
&\leqslant \bigl\||T|^{1/2}W^*X^*\bigr\|_2^2 \, \bigl\||T|^{1/2}\bigr\|_2^2 = \operatorname{Tr}\bigl(|T|^{1/2}W^*X^*XW|T|^{1/2}\bigr) \operatorname{Tr}|T| \\
&\leqslant \|W^*X^*XW\| \operatorname{Tr}|T| \operatorname{Tr}|T| \leqslant \|X\|^2(\operatorname{Tr}|T|)^2,
\end{aligned}$$

al usar la desigualdad de Schwarz para la norma $\|\cdot\|_2$ sobre $\mathcal{L}^2(H)$.

Fíjese que $\|T\|_1 = \operatorname{Tr}|T| \geqslant \|\,|T|\,\| = \|T\|$ por el Lema 3.65. Se ve que $\|\alpha T\|_1 = |\alpha|\,\|T\|_1$. Si $S, T \in \mathcal{L}^1(H)$, sean $S+T = U\,|S+T|$ y $ST = V\,|ST|$ las descomposiciones polares. Entonces

$$\begin{aligned}
\|S+T\|_1 &= \operatorname{Tr}(U^*(S+T)) \leqslant |\operatorname{Tr}(U^*S)| + |\operatorname{Tr}(U^*T)| \\
&\leqslant \|U^*\| \operatorname{Tr}|S| + \|U^*\| \operatorname{Tr}|T| \leqslant \|S\|_1 + \|T\|_1\,; \\
\|ST\|_1 &= \operatorname{Tr}(V^*ST) \leqslant \|V^*S\| \operatorname{Tr}|T| \leqslant \bigl\||S|\bigr\| \operatorname{Tr}|T| \\
&\leqslant \operatorname{Tr}|S| \operatorname{Tr}|T| = \|S\|_1\,\|T\|_1\,.
\end{aligned}$$

Se concluye que $\|\cdot\|_1$ es una norma submultiplicativa sobre $\mathcal{L}^1(H)$.

Si $\{T_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^1(H)$, la desigualdad $\|T_m - T_n\| \leqslant \|T_m - T_n\|_1$ muestra que es también una sucesión de Cauchy en $\mathcal{K}(H)$; por lo tanto, hay $T \in \mathcal{K}(H)$ tal que $\|T_n - T\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Si $T - T_n = W_n|T - T_n|$ (descomposición polar) y si P es un proyector de rango finito, entonces

$$\operatorname{Tr}(P|T-T_n|) = \operatorname{Tr}(PW_n^*(T-T_n)) = \lim_{m\to\infty} \operatorname{Tr}(PW_n^*(T_m - T_n)) \leqslant \limsup_{m\to\infty} \|T_m - T_n\|_1$$

porque $\|PW_n^*\| \leqslant 1$. Luego, como P es arbitrario, $\|T - T_n\|_1 \leqslant \limsup_{m\to\infty} \|T_m - T_n\|_1$, el cual implica que $T \in \mathcal{L}^1(H)$ con $\|T - T_n\|_1 \to 0$. Luego $\mathcal{L}^1(H)$ es completo en la norma $\|\cdot\|_1$. □

3.4 El teorema espectral

El Teorema 3.35 define "funciones continuas" de un operador autoadjunto sobre H, al extender el homomorfismo algebraico $f \mapsto f(T)$ desde polinomios a funciones continuas sobre $\operatorname{sp}(T)$. El llamado teorema espectral extiende su dominio a las *funciones borelianas*.

Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, considérese la σ-álgebra $\mathcal{B}$ generado por $\mathcal{T}$; sus elementos (formados al tomar uniones e intersecciones numerables de conjuntos abiertos y/o cerrados, repetidamente) se llaman **partes borelianas** de X. Una función real $f : X \to \mathbb{R}$ es una **función boreliana** si $f^{-1}(I)$ es boreliano, para todo subintervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. En particular, si $A \subseteq \operatorname{sp}(T)$ es una parte boreliana del espectro de un operador autoadjunto T, su **función indicatriz** 1_A es boreliana[22] y cumple $1_A^2 = 1_A$. El operador asociado $P_A := 1_A(T)$ debe cumplir $P_A^2 = P_A = P_A^*$: esto es, debe ser un proyector en $\mathcal{L}(H)$.

[22]Fíjese que 1_A es continua sobre $\operatorname{sp}(T)$ si y solo si A es una unión de componentes conexos del espectro.

El teorema espectral construye este cálculo funcional en dos fases: primero se define una correspondencia $1_A \leftrightarrow P_A$ entre funciones indicatrices y proyectores; luego se extiende esta correspondencia a funciones borelianas con procedimientos de la teoría de medida.

Antes de abordar este teorema, conviene revisitar el teorema de representación de Riesz (la Proposición 2.50) que identifica el espacio dual de $C[a, b]$, generalizándolo el espacio dual de $C(K)$, donde $K \Subset \mathbb{C}$ es un compacto cualquiera. Las integrales de Stieltjes sobre $[a, b]$ se generalizan a las integrales con respecto a *medidas borelianas regulares* sobre K.

► A continuación se ofrece un breve bosquejo, sin demostraciones, de los resultados de la teoría de medida que fundamentan el teorema espectral. Para mayores detalles, consúltese los libros de Dieudonné (capítulo 13) o Pedersen (capítulo 6).

Definición 3.70. Sea X un espacio topológico localmente compacto (y de Hausdorff) y separable; sea $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de las partes borelianas de X. Una **medida boreliana** sobre X es una medida positiva ρ sobre $(X, \mathcal{B})$. La medida ρ se llama **regular** si $\rho(K) < \infty$ para cada $K \Subset X$ y si, para todo $A \in \mathcal{B}$,

$$\rho(A) = \inf\{\, \rho(U) : U \subseteq X \text{ abierto},\ A \subseteq U \,\} = \sup\{\, \rho(K) : K \subseteq X \text{ compacto},\ K \subseteq A \,\}.$$

Una *medida compleja* $\mu \colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ determina una medida positiva $|\mu|$, su **variación total**, por $|\mu|(A) := \sup\bigl\{ \sum_{k=0}^{\infty} |\mu(A_k)| : A = \biguplus_{k=0}^{\infty} A_k \bigr\}$. Escríbase $\|\mu\| := |\mu|(X) < \infty$. Dícese que μ es regular si su variación total $|\mu|$ es regular. Las medidas complejas borelianas regulares forman un espacio de Banach $\mathcal{M}(X)$, con norma $\mu \mapsto \|\mu\|$. ◊

Una dualidad entre $C_0(X)$ y $\mathcal{M}(X)$ está dada por la fórmula

$$\langle \mu, f \rangle := \int_X f(x)\, d\mu(x). \tag{3.23}$$

En vista de la desigualdad

$$|\langle \mu, f \rangle| \leqslant \int_X |f(x)|\, d|\mu|(x) \leqslant \|f\|_\infty\, |\mu|(X) = \|f\|_\infty\, \|\mu\|,$$

la forma lineal $f \mapsto \int_X f(x)\, d\mu(x)$ es continua, con norma no mayor que $\|\mu\|$; de hecho, resulta que su norma es igual a $\|\mu\|$. De este modo, $\mathcal{M}(X)$ es isométricamente isomorfa a un subespacio de $C_0(X)^*$.

Para demostrar que esta copia de $\mathcal{M}(X)$ coincide con todo $C_0(X)^*$, se aprovecha la estructura de orden (parcial) en estos dos espacios de Banach. La *descomposición de Jordan* de una media compleja (regular) expresa μ como combinación lineal de cuatro medidas positivas (regulares): $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$. Por otro lado, una forma lineal continua $\ell \in C_0(X)^*$ puede expresarse como $\ell = \ell_1 - \ell_2 + i\ell_3 - i\ell_4$, donde cada ℓ_j es una *forma lineal positiva*, en el sentido siguiente. ⟦ Conviene limitarse al caso de un espacio *compacto* y separable; el caso general puede extraerse de la unitización $C_0(X)^+ \simeq C(X^+)$. ⟧

Definición 3.71. Sea K un espacio topológico compacto y separable. Una **forma lineal** $\ell\colon C(K) \to \mathbb{C}$ es **positiva** si $\ell(f) \geqslant 0$ cuando $f \geqslant 0$ en $C(K)$. Si $0 \leqslant f \leqslant 1$ puntualmente en $C(K)$, entonces $0 \leqslant \ell(f) \leqslant \ell(1)$. Resulta que $|\ell(h)| \leqslant \|h\|_\infty \ell(1)$ para cualquier $h \in C(K)$, así que una forma lineal positiva ℓ es automáticamente continua, con $\|\ell\| = \ell(1)$. ◊

Teorema 3.72 (Riesz y Markov)**.** *Cada forma lineal positiva sobre $C(K)$ está dada por $f \mapsto \int_X f\,d\rho$, para una única medida boreliana regular positiva $\rho \in \mathcal{M}(X)$.* ⊟

Después de combinar las cuatro partes de una forma lineal continua o bien de una medida regular, con atención a los detalles de continuidad, se llega al teorema siguiente.[23]

Teorema 3.73 (Riesz y Kakutani)**.** *Sea K un espacio topológico compacto y separable; entonces el espacio dual $C(K)^*$ es isométricamente isomorfa a $\mathcal{M}(K)$.* ⊟

► Después de ese breve bosquejo de los resultados que identifican $C(K)^*$, se puede extender el cálculo funcional continuo para un operador autoadjunto $T = T^* \in \mathcal{L}(H)$. El Teorema 3.35 dice que $f \mapsto f(T) : C(\mathrm{sp}(T)) \hookrightarrow \mathcal{L}(H)$ es lineal e isométrica. Dados dos vectores $x, y \in H$, la aplicación $f \mapsto \langle y \mid f(T)x\rangle$ es una forma lineal continua sobre $C(\mathrm{sp}(T))$, que satisface

$$\bigl|\langle y \mid f(T)x\rangle\bigr| \leqslant \|y\|\,\|f(T)\|\,\|x\|. \tag{3.24}$$

Además, como $\|f(T)\| = \|f\|_\infty$, el funcional lineal $f \mapsto \langle y \mid f(T)x\rangle$ es continuo, con norma no mayor que $\|y\|\,\|x\|$. El Teorema 3.73 ahora produce medidas $\mu_{x,y} \in \mathcal{M}(\mathrm{sp}(T))$ tales que

$$\langle y \mid f(T)x\rangle = \int_{\mathrm{sp}(T)} f(\lambda)\,d\mu_{x,y}(\lambda) \quad \text{para todo} \quad f \in C(\mathrm{sp}(T)). \tag{3.25}$$

En vista de (3.24), estas medidas cumplen la desigualdad $\|\mu_{x,y}\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ para todo $x, y \in H$.

El paso siguiente es eliminar los vectores x, y de la ecuación (3.25).

Definición 3.74. Sea K un espacio topológico compacto separable, sea $\mathcal{B}$ su σ-álgebra de partes borelianas y sea H un espacio de Hilbert. Una **medida espectral** sobre K con valores en $\mathcal{L}(H)$ es una función $E\colon \mathcal{B} \to \mathcal{L}(H)$ tal que:

(a) $E(A)^2 = E(A) = E(A)^*$ para todo $A \in \mathcal{B}$.

(b) $E(\emptyset) = 0$ y $E(K) = 1$.

(c) $E(A \cap B) = E(A)\,E(B)$ para todo $A, B \in \mathcal{B}$.

(d) Para todo $x, y \in H$, $E_{x,y}\colon A \mapsto \langle y|E(A)x\rangle$ es una medida boreliana regular compleja. ◊

[23] Para las demostraciones de los teoremas 3.72 y 3.73, véase los teoremas 4.5.4 y 4.8.8, respectivamente, del libro *Real Analysis* de Simon.

La condición (a) de la Definición 3.74 dice que cada $E(A)$ es un *proyector*, con imagen cerrada $\operatorname{Ran} E(A) \leqslant H$. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $E(A \uplus B) = E(A) + E(B)$, porque

$$(E(A) + E(B))^2 = E(A)^2 + E(B)^2 = E(A) + E(B) = (E(A) + E(B))^*,$$

así que $E(A) + E(B)$ es un proyector, que además cumple, para $x, y \in H$:

$$\langle y \mid E(A \uplus B)x \rangle = E_{x,y}(A \uplus B) = E_{x,y}(A) + E_{x,y}(B) = \langle y \mid (E(A) + E(B))x \rangle.$$

En particular, $E(K \setminus A) = 1 - E(A)$ es el proyector cuya imagen es $(\operatorname{Ran} E(A))^\perp$.

Escríbase $\underline{\mathcal{P}(H)} := \{\, P \in \mathcal{L}(H) : P^2 = P = P^* \,\}$. Entonces $E \colon \mathcal{B} \to \mathcal{P}(H)$ es una función finitamente aditiva. La condición (d) afirma que E es *numerablemente aditiva*: en efecto, si $\{A_k\} \subset \mathcal{B}$ es una familia numerable de borelianos disjuntos, los subespacios $\operatorname{Ran} E(A_k)$ son mutuamente ortogonales; si $\bigvee_k \operatorname{Ran} E(A_k)$ denota el subespacio *cerrado* generado por ellos, entonces $\operatorname{Ran} E\big(\biguplus_k A_k\big) = \bigvee_k \operatorname{Ran}(E(A_k))$, así que $E\big(\biguplus_k A_k\big)x = \sum_k E(A_k)x$ para $x \in H$.

Definición 3.75. Si K es compacto y separable, denótese por $B_\infty(K)$ el espacio vectorial de *funciones borelianas acotadas* $g \colon K \to \mathbb{C}$. Esta es una C^*-álgebra con la norma $\|\cdot\|_\infty$, que incluye $C(K)$ como subálgebra cerrada. Sea $E \colon \mathcal{B} \to \mathcal{P}(H)$ una medida espectral. Defínase

$$\int_A \underline{dE(\lambda)} \equiv \int_K 1_A(\lambda)\, dE(\lambda) := E(A) \quad \text{para todo} \quad A \in \mathcal{B}.$$

Esta integral se extiende por linealidad a las funciones simples: si $h = \sum_{j=1}^n c_j 1_{A_j}$, se define $\int_K h(\lambda)\, dE(\lambda) := \sum_{j=1}^n c_j\, E(A_j) \in \mathcal{L}(H)$.

Si $g \in B_\infty(K)$, hay una sucesión $\{h_n\}$ de funciones simples tales que $h_n \to g$ uniformemente. Para $x \in H$, se cumple

$$\int_K |h_n(\lambda) - g(\lambda)|\, dE_{x,x}(\lambda) \leqslant \|h_n - g\|_\infty \langle x \mid E(K)x \rangle = \|h_n - g\|_\infty \|x\|^2,$$

y más generalmente, $\int_K |h_n(\lambda) - g(\lambda)|\, d|E_{x,y}|(\lambda) \leqslant \|h_n - g\|_\infty \|x\|\,\|y\|$ para $x, y \in H$. Por convergencia dominada, se obtiene $\big\langle y \big| \int h_n(\lambda)\, dE(\lambda)x \big\rangle \to I(g; y, x) \in \mathbb{C}$ donde este límite no depende de la sucesión aproximante $\{h_n\}$. Esta forma sesquilineal $(y, x) \mapsto I(g; y, x)$ cumple $I(g; y, x) \leqslant \|g\|_\infty \|x\|\,\|y\|$. Luego hay un operador acotado $S(g) \in \mathcal{L}(H)$ tal que $\langle y \mid S(g)x \rangle = I(g; y, x)$. Escríbase $\int_K \underline{g(\lambda)\, dE(\lambda)} := S(g)$. En otras palabras, se ha definido un operador (único) que cumple

$$\left\langle y \,\middle|\, \int_K g(\lambda)\, dE(\lambda)\, x \right\rangle := \int_K g(\lambda)\, dE_{x,y}(\lambda) \quad \text{para todo} \quad x, y \in H. \qquad \Diamond$$

Teorema 3.76 (El teorema espectral)**.** *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto. Existe una única medida espectral $E \colon \mathcal{B}(\operatorname{sp}(T)) \to \mathcal{P}(H)$ tal que $f(T) = \int_{\operatorname{sp}(T)} f(\lambda)\, dE(\lambda)$ para $f \in C(\operatorname{sp}(T))$. Los proyectores espectrales conmutan con T: $E(A)T = TE(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}(\operatorname{sp}(T))$; y si $S \in \mathcal{L}(H)$, entonces $ST = TS$ si y solo si $E(A)S = SE(A)$ para todo A.*

Demostración (bosquejo). La fórmula (3.25) *define* medidas borelianas $\{\, \mu_{x,y} : x, y \in H \,\}$ sobre $\operatorname{sp}(T)$. Si $A \in \mathcal{B}(\operatorname{sp}(T))$, cada $(y, x) \mapsto \mu_{x,y}(A)$ es una forma sesquilineal sobre H, que cumple $|\mu_{x,y}(A)| \leqslant \|x\| \, \|y\|$. Entonces hay un operador $E(A) \in \mathcal{L}(H)$ con $\|E(A)\| \leqslant 1$ tal que $\mu_{x,y}(A) = \langle y \mid E(A)x \rangle$ para $x, y \in H$. Luego se verifica que $A \mapsto E(A)$ es una medida espectral. Su unicidad viene de las igualdades $E_{x,y} = \mu_{x,y}$ para todo x, y.

Si $S \in \mathcal{L}(H)$ conmuta con T, entonces $S\,f(T) = f(T)\,S$ para polinomios f y de rebote para $f \in C(\operatorname{sp}(T))$. Luego, $\langle S^* y \mid f(T)x \rangle = \langle y \mid Sf(T)x \rangle = \langle y \mid f(T)Sx \rangle$ para todo x, y, así que $E_{x,S^*y} = E_{Sx,y}$ en $\mathcal{M}(\operatorname{sp}(T))$. Por lo tanto, vale

$$\langle y \mid SE(A)x \rangle = \langle S^* y \mid E(A)x \rangle = E_{x,S^*y}(A) = E_{Sx,y}(A) = \langle y \mid E(A)Sx \rangle.$$

Esto establece que $SE(A) = E(A)S$ para $A \in \mathcal{B}(\operatorname{sp}(T))$. Inversamente, si $SE(A) = E(A)S$ para todo A, entonces $E_{x,S^*y} = E_{Sx,y}$ para todo $x, y \in H$, lo cual implica que

$$\langle y \mid STx \rangle = \int_{\operatorname{sp}(T)} \lambda \, dE_{x,S^*y}(\lambda) = \int_{\operatorname{sp}(T)} \lambda \, dE_{Sx,y}(\lambda) = \langle y \mid TSx \rangle. \qquad \square$$

Esta correspondencia $g \mapsto \underline{g(T)} := \int_{\operatorname{sp}(T)} g(\lambda)\, dE(\lambda)$ es un $*$-*homomorfismo* de $B_\infty(\operatorname{sp}(T))$ en $\mathcal{L}(H)$, que lleva la función constante 1 en el operador identidad 1, tal que $\|g(T)\| \leqslant \|g\|_\infty$. (Su núcleo es el espacio vectorial de las funciones borelianas acotadas g tales que $g = 0$ casi por doquier con respecto de cada una de las medidas positivas $E_{x,x}$.)

Lema 3.77. *Sea $T = T^* \in \mathcal{L}(H)$ y sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua. Entonces $(f \circ g)(T) = f(g(T))$ para todo $g \in B_\infty(\operatorname{sp}(T))$.*

Demostración. Para monomios $\lambda \mapsto \lambda^n$, se obtiene $g^n(T) := \int g(\lambda)^n \, dE(\lambda) = g(T)^n$ de la propiedad homomórfica de $g \mapsto g(T)$. Para $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$, se puede comprobar que $\bar{g}(T) = g(T)^*$ a partir de la propiedad $E(A)^* = E(A)$. Entonces $(p \circ g)(T) = p(g(T))$ cuando $p(\lambda, \bar{\lambda})$ es un polinomio. El caso general sigue del teorema de Weierstrass, al aproximar f por tales polinomios, uniformemente en el disco compacto $\{\, \mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leqslant \|g\|_\infty \,\}$. $\square$

Proposición 3.78. *Sea U un operador unitario en $\mathcal{L}(H)$. Entonces hay un operador autoadjunto $T \in \mathcal{L}(H)$ con $\|T\| \leqslant 1$ tal que $U = \exp(2\pi i T)$.*

Demostración. Usando el cálculo funcional continuo para operadores normales, se comprueba que $\operatorname{sp}(U) \subseteq \mathbb{T} \equiv \{\, \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1 \,\}$. (Véase le Ejercicio 3.18.)

Defínase $e : [0, 1) \to \mathbb{T} : t \mapsto e^{2\pi i t}$. Esta función e es una biyección continua, pero su inverso g no es continuo; el intervalo semiabierto $[0, 1)$ no es homeomorfo al círculo $\mathbb{T}$. Sin embargo, g sí es una *función boreliana acotada* sobre $\mathbb{T}$ y, desde luego, sobre cualquier parte cerrada de $\mathbb{T}$. Colóquese $T := g(U)$.

De $g(\mathbb{T}) \subset \mathbb{R}$ resulta $g = \bar{g}$, así que $T = T^*$. Además, $\|T\| = \|g(U)\| \leqslant \|g\|_\infty \leqslant 1$.

Del Lema 3.77, se obtiene $\exp(2\pi i T) = e(T) = e(g(U)) = (e \circ g)(U) = U$. $\square$

3.5 Ejercicios sobre operadores y teoría espectral

En los ejercicios del 3.1 al 3.9, A es un álgebra de Banach y H es un espacio de Hilbert, salvo indicación contraria.

Ejercicio 3.1. Sea A un álgebra de Banach unital. Si $x \in A$ y si hay dos elementos $y, z \in A$ tales que $\|xy - 1\| < 1$ y $\|zx - 1\| < 1$, demostrar que x es invertible y que

$$x^{-1} = y \sum_{k=0}^{\infty} (1 - xy)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - zx)^k z.$$

Ejercicio 3.2. Sea J un *ideal cerrado* en un álgebra de Banach A, es decir, un subespacio cerrado tal que $xv \in J$, $vx \in J$ cuando $x \in A$, $v \in J$. Verificar que el espacio cociente A/J, con la norma $\|x + J\| := \inf_{v \in J} \|x + v\|$, es un álgebra de Banach.

Ejercicio 3.3. Si E es un espacio de Banach, el espacio de operadores continuos $\mathcal{L}(E)$ es un álgebra de Banach. Un operador $T \in \mathcal{L}(E)$ es **cuasinilpotente** si $\operatorname{sp}(T) = \{0\}$. Demostrar que los operadores $T \in \mathcal{L}(C[0, 1])$ y $S \in \mathcal{L}(\boldsymbol{\ell}^p)$ [donde $1 \leqslant p < \infty$] definidos por

$$Tf(x) := \int_0^x f(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad (S\boldsymbol{x})_n := \frac{x_{n+1}}{n+1}$$

son cuasinilpotentes; pero T no posee autovalor alguno.

Ejercicio 3.4. Sea x, y dos elementos de un álgebra de Banach unital A. Demostrar que

$$\operatorname{sp}(xy) \cup \{0\} = \operatorname{sp}(yx) \cup \{0\}.$$

Dar un ejemplo de un caso en donde $\operatorname{sp}(xy) \neq \operatorname{sp}(yx)$.

⟦ Indicación: Si $\lambda \notin \operatorname{sp}(xy) \cup \{0\}$, verificar que $\lambda^{-1}(1 + y(\lambda 1 - xy)^{-1}x)$ es un inverso para $\lambda 1 - yx$. ⟧

Ejercicio 3.5. Un problema básico de la mecánica cuántica es la búsqueda de dos operadores autoadjuntos Q y P sobre un espacio de Hilbert H que cumplen la **relación canónica de conmutación** $QP - PQ = i\hbar 1$, donde $\hbar$ es una constante real positiva.[24] Comprobar que este problema no posee solución alguna con $Q, P \in \mathcal{L}(H)$.

⟦ Indicación: Verificar la fórmula: $\operatorname{sp}(\mu 1 + x) = \mu + \operatorname{sp}(x)$ para $\mu \in \mathbb{C}$; luego usar el Ejercicio 3.4. ⟧

Ejercicio 3.6. Sea A un álgebra de Banach involutiva. Si $u \in A$ es una identidad a izquierda: $ux = x$ para todo $x \in A$, demostrar que $u = u^*$ y que u es una identidad (bilateral) para A.

[24] En un sistema cuántico con un solo grado de libertad, se interpreta Q como un operador de *posición* y P como un operador de *momento*. La cantidad $\hbar$ es la *constante de Planck*. Para enfrentar la ausencia de una solución en operadores acotados, es obligatorio representar Q y P por operadores autoadjuntos *no acotados*.

Ejercicio 3.7. (a) Sean A y B dos C^*-álgebras unitales y $\pi\colon A \to B$ un **$*$-homomorfismo** – esto es, un homomorfismo π tal que $\pi(x^*) = \pi(x)^*$ para todo $x \in A$. Demostrar que

$$\operatorname{sp}(\pi(x)) \subseteq \operatorname{sp}(x), \quad \text{y concluir que} \quad \|\pi(x)\| \leqslant \|x\| \text{ para } x \in A.$$

(En consecuencia, un $*$-homomorfismo entre C^*-álgebras unitales *es automáticamente continua*).

(b) Concluir que un $*$-isomorfismo entre C^*-álgebras unitales es una isometría.

(c) Demostrar que *la norma de una C^*-álgebra unital es única*:[25] si una $*$-álgebra unital A es una C^*-álgebra para dos normas $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ que verifican $\|x^*x\| = \|x\|^2$ y $|||x^*x||| = |||x|||^2$ para todo $x \in A$, comprobar que $\|x\| = |||x|||$ para todo $x \in A$.

Ejercicio 3.8. Sea A una C^*-álgebra sin unidad, y sea $A^+ := A \oplus \mathbb{C}$ su **unitización**, definida por el Lema 3.7. Demostrar que hay una norma sobre A^+ tal que A^+ sea una C^*-álgebra unital. (Esta norma es única, por el Ejercicio 3.7 anterior.)

⟦ Indicación: Defínase $|||(x,\lambda)||| := \sup\{\, \|xz + \lambda z\|_A : \|z\|_A \leqslant 1 \,\}$. Verificar que esta es una seminorma submultiplicativa sobre A^+. Si fuera $|||(u,\lambda)||| = 0$ con $\lambda \neq 0$, comprobar que $-\lambda^{-1}u$ sería una unidad para A; deducir que $|||\cdot|||$ es una norma para A^+. Verificar que esta es una C^*-norma y que A^+ es completa en esta norma. ⟧

Ejercicio 3.9. (a) Sea A una C^*-álgebra sin unidad. Un par de operadores (L,R) en $\mathcal{L}(A)$ es un **doble centralizador** para A si se verifica

$$L(xy) = L(x)y, \quad R(xy) = xR(y), \quad R(x)y = xL(y) \qquad \text{para todo} \quad x,y \in A.$$

Sea $\underline{\mathcal{M}(A)}$ la totalidad de tales (L,R). Si $z \in A$, defínase $L_z(x) := zx$ y $R_z(x) := xz$; verificar que $(L_z,R_z) \in \mathcal{M}(A)$ y que $\|L_z\| = \|R_z\| = \|z\|$. Más generalmente, demostrar que $\|L\| = \|R\|$ para todo $(L,R) \in \mathcal{M}(A)$.

(b) Demostrar que $\mathcal{M}(A)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(A) \oplus \mathcal{L}(A)$. Defínase un producto y una involución en $\mathcal{M}(A)$ por

$$(L_1,R_1)(L_2,R_2) := (L_1L_2, R_2R_1) \quad \text{y} \quad (L,R)^* := (R^\dagger, L^\dagger),$$

donde $T^\dagger(x) := T(x^*)^*$ para $T \in \mathcal{L}(A)$. Demostrar que $\mathcal{M}(A)$ una C^*-álgebra bajo este producto e involución,[26] con la norma dada por $\|(L,R)\| := \|L\| = \|R\|$. Verificar que la aplicación $z \mapsto (L_z,R_z)$ es un $*$-isomorfismo isométrico que lleva A en un *ideal* del **álgebra de multiplicadores** $\mathcal{M}(A)$.

[25] Una norma sobre una $*$-álgebra que cumple (3.6) se llama una **C^*-norma**.

[26] Si $A = C_0(X)$ con X localmente compacto, resulta que $\mathcal{M}(A) \simeq C_b(X)$, la C^*-álgebra de funciones continuas acotadas sobre X; se sabe que $C_b(X) \simeq C(\beta X)$, donde βX es la *compactificación de Stone y Čech* del espacio topológico X.

En los ejercicios que siguen, H es un espacio de Hilbert (separable).

Ejercicio 3.10. Verificar la equivalencia de las siguientes pares de condiciones para diversas clases de operadores acotados sobre H.

(a) *Operador autoadjunto*: $T^* = T$ si y solo si $\langle x \mid Tx \rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in H$.

(b) *Operador normal*: $TT^* = T^*T$ si y solo si $\|T^*x\| = \|Tx\|$ para todo $x \in H$.

(c) *Contracción*: $I - R^*R$ es positivo si y solo si $\|Rx\| \leqslant \|x\|$ para todo $x \in H$.

(d) *Isometría*: $V^*V = 1$ si y solo si $\|Vx\| = \|x\|$ para todo $x \in H$.

(e) *Isometría parcial*: $WW^*W = W$ si y solo si $\|Wx\| = \|x\|$ para todo $x \in (\ker W)^\perp$.

(f) *Proyector*: $P^2 = P = P^*$ si y solo si $Px = x$ para todo $x \in (\ker P)^\perp$.

Ejercicio 3.11. Sean $P, Q \in \mathcal{L}(H)$ dos proyectores, y sea $M \leqslant H$ un subespacio cerrado.

(a) Demostrar que $\operatorname{Ran} P$ es un subespacio cerrado de H; que $H = \ker P \oplus \operatorname{Ran} P$ como suma directa ortogonal; y que $\|P\| = 1$ o bien $P = 0$.

(b) Demostrar que hay un único proyector $P_M \in \mathcal{L}(H)$ tal que $\operatorname{Ran} P_M = M$. ⟦ Indicación: Usar la Proposición 1.43. ⟧ Verificar que el proyector con imagen $M^\perp$ es $1 - P_M$.

(c) Demostrar que PQ es un proyector si y solo si $PQ = QP$, en cuyo caso $P + Q - PQ$ es también un proyector. ¿Cuáles son las relaciones entre las imágenes $\operatorname{Ran} P$, $\operatorname{Ran} Q$, $\operatorname{Ran}(PQ)$, $\operatorname{Ran}(P + Q - PQ)$?

Ejercicio 3.12. Demostrar que cada operador idempotente de norma 1 en $\mathcal{L}(H)$ es un proyector. Esto es: si $S \in \mathcal{L}(H)$ cumple $S^2 = S$ y $\|S\| = 1$, entonces $S^* = S$.

⟦ Indicación: Verificar que $\|(1+t)Sx\|^2 \leqslant \|x + tSx\|^2 = \|x\|^2 + \|tSx\|^2$ para $x \in (\operatorname{Ran} S)^\perp$ y $t > 0$. Deducir que $(\operatorname{Ran} S)^\perp \subseteq \ker S$ y concluir que $\langle Sy \mid z \rangle = \langle y \mid Sz \rangle$ para $y, z \in H$. ⟧

Ejercicio 3.13. (a) Si $A \in \mathcal{L}(H)$ es positivo y si $\|A\| \leqslant 1$, demostrar que $\|1 - A\| \leqslant 1$.

(b) Si $T = T^* \in \mathcal{L}(H)$ cumple $\|T\| \leqslant 1$ y $\|1 - T\| \leqslant 1$, demostrar que T es positivo.

Ejercicio 3.14. Sean $A, B \in \mathcal{L}(H)$ dos operadores positivos.

(a) Demostrar que $A + B$ es positivo. Si $T \in \mathcal{L}(H)$, demostrar que T^*AT es positivo.

(b) Si $AB = BA$, demostrar que AB es positivo. ⟦ Indicación: mostrar que $B\sqrt{A} = \sqrt{A}\,B$. ⟧ Dar un ejemplo de operadores positivos A, B (con $AB \neq BA$) tales que AB no es positivo.

Ejercicio 3.15. Generalizar el Teorema 3.35 (cálculo funcional continuo) a elementos autoadjuntos de una C^*-álgebra unital cualquiera. Concretamente, si A es una C^*-álgebra unital y si $x = x^* \in A$, construir un $*$-isomorfismo isométrico $f \mapsto f(x)$ entre $C(\mathrm{sp}(x))$ y la $*$-subálgebra cerrada $C^*(x) \subseteq A$ generada por x, con las siguientes propiedades:

(a) la imagen de la función idéntica $\lambda \mapsto \lambda$ es el elemento $x \in A$;

(b) si $f \geqslant 0$ en $C(\mathrm{sp}(T))$, entonces $f(x) = y^*y$ para algún $y \in A$;

(c) $\mathrm{sp}(f(x)) = f(\mathrm{sp}(x))$ para todo $f \in C(\mathrm{sp}(x))$.

Ejercicio 3.16. Sea A una C^*-álgebra unital y sea B una $*$-subálgebra cerrada de A tal que $1 \in B$. Demostrar que $B \cap A^\times = B^\times$; es decir, si $x \in B$ posee un inverso $x^{-1} \in A$, entonces $x^{-1} \in B$. Concluir que $\mathrm{sp}_A(y) = \mathrm{sp}_B(y)$ para $y \in B$: los espectros de un elemento de B con respecto a las dos C^*-álgebras A y B coinciden.[27] ⟦ Indicación: Si $x^* = x$, usar el cálculo funcional continuo del Ejercicio 3.15 anterior; en general, verificar que $x^{-1} = (x^*x)^{-1}x^*$. ⟧

Ejercicio 3.17 (Cálculo funcional continuo para operadores normales)**.** Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador *normal*: $T^*T = TT^*$. Sea $C^*(T)$ la C^*-subálgebra unital de $\mathcal{L}(H)$ generada por T y T^* (Definición 3.31). Cada $f \in C(\mathrm{sp}\,T)$ es un límite uniforme de polinomios: $p_n(\lambda, \bar\lambda) \to f(\lambda)$ uniformemente para $\lambda \in \mathrm{sp}(T)$. Defínase $f(T) := \lim_{n\to\infty} p_n(T, T^*)$ en la norma de $\mathcal{L}(H)$. Demostrar que $f \mapsto f(T)$ es un $*$-isomorfismo isométrico entre $C(\mathrm{sp}\,T)$ y $C^*(T)$, que satisface $\mathrm{sp}(f(T)) = \{\, f(\lambda) : \lambda \in \mathrm{sp}(T) \,\}$ para todo $f \in C(\mathrm{sp}\,T)$.

Ejercicio 3.18. Sea $\mathbb{T} := \{\, \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1 \,\}$. Verificar que un operador normal $U \in \mathcal{L}(H)$ es *unitario* si y solo si $\mathrm{sp}(U) \subseteq \mathbb{T}$. ⟦ Indicación: Usar el Ejercicio 3.17 anterior. ⟧

Ejercicio 3.19. Si $A \in \mathcal{L}(H)$ es un operador *positivo*, usar la existencia de la raíz cuadrada positiva única $\sqrt{A}$ para comprobar esta generalización de la desigualdad de Schwarz:

$$\bigl|\langle y \mid Ax\rangle\bigr|^2 \leqslant \langle y \mid Ay\rangle\,\langle x \mid Ax\rangle \quad \text{para todo} \quad x, y \in H.$$

Ejercicio 3.20. Sea W una isometría parcial: $WW^*W = W$. Comprobar que $1 - W^*W$ es el proyector con imagen $\ker W$ y que $1 - WW^*$ es el proyector con imagen $\ker W^*$. ⟦ Indicación: usar el Ejercicio 3.11(b). ⟧

Ejercicio 3.21. Sea $T = W|T|$ la descomposición polar de un operador $T \in \mathcal{L}(H)$. Demostrar las siguientes propiedades de un operador normal T:

$$T^*T = TT^* \iff |T^*| = |T| \implies W|T| = |T|W \iff W^*|T| = |T|W^* \implies WT = TW.$$

[27] Este resultado para C^*-álgebras es falso para álgebras de Banach más generales: solo se puede asegurar que $\mathrm{sp}_A(y) \subseteq \mathrm{sp}_B(y)$ para $y \in B$. Para un contraejemplo, véase el Ejemplo 6.1.9 del libro *Operator Theory* de Simon.

Ejercicio 3.22. Escríbase $A \geqslant B$ en $\mathcal{L}(H)$ si $A - B$ es un operador positivo. Demostrar las siguientes propiedades de este orden parcial:

(a) si $A \geqslant 0$, entonces $\|A\|\,1 \geqslant A$;

(b) si $A \geqslant B \geqslant 0$, entonces $\|A\| \geqslant \|B\|$;

(c) si $A \geqslant 0$, entonces $\|A\|\,A \geqslant A^2$;

(d) si $A \geqslant 1$, entonces A es invertible con $1 \geqslant A^{-1}$;

(e) si $A \geqslant B \geqslant 0$, entonces $T^*AT \geqslant T^*BT$ para todo $T \in \mathcal{L}(H)$;

(f) si $A \geqslant B \geqslant 0$ y si $\mu > 0$, entonces $(\mu 1 + B)^{-1} \geqslant (\mu 1 + A)^{-1}$;

(g) si $A \geqslant B \geqslant 0$, entonces $\sqrt{A} \geqslant \sqrt{B}$.

⟦ Indicación: Para (a), (b) y (d), hallar intervalos en $\mathbb{R}$ que incluyen los espectros de estos operadores. Para (c), mostrar que $\operatorname{sp}\big((A - \frac{1}{2}\|A\|1)^2\big) \subseteq [0, \frac{1}{4}\|A\|^2]$. Para (f), aplicar (d) y (e) con $T = (\mu 1 + B)^{-1/2}$. Para (g), verificar la siguiente fórmula integral:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(1 - \frac{t}{t+\lambda}\right)\frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\lambda},$$

y en seguida usar (f) y cálculo funcional continuo. ⟧

► En los ejercicios que siguen, $\mathcal{K}(H)$ denota la C^*-álgebra de operadores compactos sobre H.

Ejercicio 3.23. Demostrar que $T \in \mathcal{L}(H)$ es un operador compacto si y solo si $|T|$ es un operador compacto.

Ejercicio 3.24. Si $S = S^* \in \mathcal{K}(H)$, se puede escribir $\operatorname{sp}(S) \setminus \{0\} = \{\, \lambda_k : k \in \mathbb{N} \,\}$, ordenado por $|\lambda_k| \geqslant |\lambda_{k+1}|$ para cada k. Demostrar que hay proyectores de rango finito $\{\, P_k : k \in \mathbb{N} \,\}$, con $P_k P_l = P_l P_k = 0$ para $k \neq l$, tales que $S = \sum_{k=0}^\infty \lambda_k P_k$ *con convergencia en la norma* de $\mathcal{L}(H)$.

Ejercicio 3.25. Si $A \in \mathcal{K}(H)$ es compacto y positivo, sea $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión de sus autovalores positivos, contados con multiplicidad, en orden decreciente: $\mu_k \geqslant \mu_{k+1}$. Sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una familia ortonormal de autovectores: $Au_k = \mu_k u_k$ para cada k. Demostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu_n = \sup\{\, \langle x \mid Ax\rangle : \|x\| \leqslant 1,\ \langle u_j \mid x\rangle = 0 \text{ para } j < n \,\}.$$

En seguida, demostrar el **teorema minimax de Courant** que caracteriza los autovalores de A:

$$\mu_n = \inf_{\dim M_n = n} \sup\{\, \langle x \mid Ax\rangle : \|x\| \leqslant 1,\ x \in M_n^\perp \,\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los subespacios $M_n \leqslant H$ de dimensión finita n.

Ejercicio 3.26. Si $S \in \mathcal{L}^2(H)$ y si $T \in \mathcal{L}(H)$ es un operador acotado, verificar que TS y ST pertenecen a $\mathcal{L}^2(H)$, con $\|TS\|_2 \leqslant \|T\|\,\|S\|_2$ y $\|ST\|_2 \leqslant \|S\|_2\,\|T\|$. Concluir que $\mathcal{L}^2(H)$ es un $*$-ideal *no cerrado* en $\mathcal{L}(H)$.

Ejercicio 3.27. Comprobar la *fórmula de polarización* (3.22), para $S, T \in \mathcal{L}(H)$:

$$4\,S^*T = \sum_{k=0}^{3} i^k (T + i^k S)^*(T + i^k S).$$

(a) Deducir que $RS \in \mathcal{L}^1(H)$ cuando $R, S \in \mathcal{L}^2(H)$.

(b) Demostrar que T es de la forma $T = RS$ con $R, S \in \mathcal{L}^2(H)$ *si y solo si* $T \in \mathcal{L}^1(H)$.
⟦ Indicación: usar $T = WA^{1/2}A^{1/2}$, si $T = WA$ es la descomposición polar. ⟧

(c) Verificar que $\operatorname{Tr}(RS) = \operatorname{Tr}(SR)$ cuando $R, S \in \mathcal{L}^2(H)$.

Ejercicio 3.28. Sea H un espacio de Hilbert infinitodimensional (separable).

(a) Comprobar que las inclusiones $\mathcal{F}(H) \subset \mathcal{L}^1(H) \subset \mathcal{L}^2(H) \subset \mathcal{K}(H)$ son estrictas.

(b) Si $T \in \mathcal{L}^1(H)$, demostrar que $\|T\|_2 \leqslant \|T\|_1$. ⟦ Indicación: usar el Ejercicio 3.19. ⟧

Ejercicio 3.29. Si $T \in \mathcal{L}^1(H)$, demostrar que $\operatorname{Tr}|T^*| = \operatorname{Tr}|T|$ y por ende $\|T^*\|_1 = \|T\|_1$.
⟦ Indicación: descomposición polar. ⟧

Ejercicio 3.30. (a) Si $x, y \in H$, comprobar que $\operatorname{Tr}\bigl(|x\rangle\langle y|\bigr) = \langle y \mid x\rangle$.

(b) Demostrar que $\bigl\||x\rangle\langle y|\bigr\| = \bigl\||x\rangle\langle y|\bigr\|_2 = \bigl\||x\rangle\langle y|\bigr\|_1 = \|x\|\,\|y\|$.

Ejercicio 3.31. (a) Si $S \in \mathcal{L}(H)$ y $T \in \mathcal{L}^1(H)$, comprobar que $|\operatorname{Tr}(ST)| \leqslant \|S\|\,\|T\|_1$.

(b) Sea $f \in \mathcal{K}(H)^*$. Defínase $T \in \mathcal{L}(H)$ por $\langle y \mid Tx\rangle := f\bigl(|x\rangle\langle y|\bigr)$ para $x, y \in H$. Si $\{u_k\}$ es una base ortonormal de H, $n \in \mathbb{N}$ y $T = WA$ (descomposición polar), demostrar que $f\bigl(\sum_{k=0}^{n} |u_k\rangle\langle Wu_k|\bigr) = \sum_{k=0}^{n} \langle u_k \mid Au_k\rangle$. Concluir que $T \in \mathcal{L}^1(H)$ con $\|T\|_1 \leqslant \|f\|$.

(c) Mostrar que $f(S) = \operatorname{Tr}(TS) = \operatorname{Tr}(ST)$ para todo $S \in \mathcal{K}(H)$. Concluir que $\langle T, S\rangle := \operatorname{Tr}(ST)$ define un isomorfismo isométrico $\mathcal{K}(H)^* \simeq \mathcal{L}^1(H)$.

(d) Sea $g \in \mathcal{L}^1(H)^*$. Defínase $R \in \mathcal{L}(H)$ por $\langle y \,|\, Rx\rangle := g\bigl(|x\rangle\langle y|\bigr)$. Demostrar que $R \in \mathcal{L}(H)$ con $\|R\| \leqslant \|g\|$.

(e) Concluir que $\langle T, R\rangle := \operatorname{Tr}(RT)$ define un isomorfismo isométrico $\mathcal{L}^1(H)^* \simeq \mathcal{L}(H)$.

(f) Luego, el encaje natural $J\colon \mathcal{K}(H) \to \mathcal{K}(H)^{**}$ puede identificarse con la inclusión $\mathcal{K}(H) \hookrightarrow \mathcal{L}(H)$. Si $\dim H = \infty$, concluir que los espacios de Banach $\mathcal{K}(H)$, $\mathcal{L}^1(H)$ y $\mathcal{L}(H)$ *no son reflexivos*.

4 Introducción a la Teoría de Distribuciones

Nous avons généralisé la notion de fonction, d'abord par celle de mesure, puis par celle de distribution. δ sera une mesure et non une fonction, δ' une distribution et non une mesure... Il est ensuite nécessaire d'établir les règles de calcul sur les distributions de façon à concilier les règles usuelles du calcul différentiel et celles du calcul symbolique. En avant tout, il faut introduire une bonne définition de la dérivée.

— Laurent Schwartz, *Théorie des distributions* (1966)

Durante la primera mitad del siglo XX, la búsqueda de soluciones a las ecuaciones diferenciales parciales motivaron la introducción de unas "derivadas débiles" de funciones continuas que no tenían derivadas como límite de cocientes de diferencias finitas. Por otro lado, en su libro *The Principles of Quantum Mechanics* (1930), Dirac introdujo una "función generalizada" $\delta(x)$ que se anula para $x \neq 0$ pero cuya integral sobre $\mathbb{R}$ es igual a 1, lo cual es clásicamente inadmisible. El principio de incertidumbre de Heisenberg (1927) establece la imposibilidad de determinar ciertos pares de coordenadas físicas (q_j, p_j) con total precisión;[1] esto pone en duda la relevancia física (en escalas microscópicas) del proceso de "evaluar una función f en un punto t": en su lugar, se debe considerar ciertos *valores promedios* de f.

Un promedio (ponderado) de una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es el resultado de calcular la integral

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx, \tag{4.1}$$

donde la "ventana" φ es una función no negativa tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt = 1$. Si la función φ tiene soporte en un vecindario estrecho de t_0 y si f en continua en t_0, esta integral es una aproximación el valor $f(t_0)$. La colección de tales integrales $\{\langle f, \varphi \rangle\}$ describe la función f con tanta precisión que el juego de sus valores puntuales $\{f(t)\}$.

Si f y φ son funciones de una variable real, diferenciables en el sentido ordinario, y si el soporte de φ queda en un intervalo compacto $[-R, R]$, se puede considerar la *fórmula de integración por partes*:

$$\langle f', \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\langle f, \varphi' \rangle. \tag{4.2}$$

Brevemente: mediante la dualidad (4.1), el lado derecho de esta fórmula se define la *derivada* de la función f, aun cuando f no sea diferenciable en el sentido clásico.

[1] Un *espacio de fases* es una variedad diferencial que admite una 2-forma simpléctica ω con una expresión local $\omega = \sum_j dq_j \wedge dp_j$ en "coordenadas de Darboux". Los pares (q_j, p_j) se llaman "variables conjugadas" con respecto a ω. El principio de incertidumbre impide la localización puntual de pares de variables conjugadas.

4.1 Funciones de prueba y distribuciones

Motivado por la fórmula (4.1), se definirá una distribución f como un elemento del espacio dual de un espacio de funciones φ. Para aprovechar la fórmula (4.2), tales funciones φ deben ser, al menos, indefinidamente diferenciables (es decir, suaves). La primera tarea, entonces, es identificar el espacio de tales funciones suaves φ, como espacio localmente convexo.

Sea U una parte abierta de $\mathbb{R}^m$. En el dominio U, hay dos candidatos obvios para este espacio de funciones: el espacio $\underline{\mathcal{E}(U)} \equiv C^\infty(U)$ de todas las *funciones suaves* $f\colon U \to \mathbb{C}$, del Ejemplo 1.15; o el espacio $\underline{\mathcal{D}(U)} \equiv C_c^\infty(U)$ de las *funciones suaves de soporte compacto* en U. Cuando $U = \mathbb{R}^m$, un tercer candidato es el espacio $\underline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)}$ de las *funciones declinantes*, del Ejemplo 1.16. Hay inclusiones obvias:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^m). \tag{4.3}$$

Al dotar estos espacios de topologías apropiadas, estas inclusiones resultarán continuas.

Cabe recordar que el **soporte** de una función continua $h\colon U \to \mathbb{C}$ es la *clausura* de la parte de U donde h no se anula:

$$\underline{\operatorname{sop} h} := \overline{h^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})}.$$

Alternativamente, se puede definir el soporte indirectamente: el complemento $U \setminus (\operatorname{sop} h)$ es la unión de las bolas abiertas $B(x; r) \subseteq U$ en donde h sí se anula (esto es, el mayor abierto $V \subseteq U$ tal que $h|_V \equiv 0$).

En el Ejemplo 1.13, se constató que el espacio $C(U)$ de las funciones continuas $h\colon U \to \mathbb{C}$ es un espacio de Fréchet. Las *funciones continuas de soporte compacto* $\operatorname{sop} h \Subset U$, denotado por $\underline{\mathcal{K}(U)} \equiv C_c(U)$, forman un subespacio denso[2] de $C(U)$.

Pasando a las funciones suaves, $\mathcal{D}(U)$ es también un subespacio vectorial denso de $\mathcal{E}(U)$. De hecho, si $x \in U$, existe una *función suave* $\varphi\colon U \to [0,1]$ con $\varphi(x) \neq 0$ tal que $\operatorname{sop} \varphi$ es compacto en U. Se ofrece un ejemplo típico a continuación.

Ejemplo 4.1. Si $\overline{B}(x_0; a) \subset U$ con $a > 0$, sea $r := \|x - x_0\|$; la función

$$\varphi_a(x) := C_a\, e^{a^2/(a^2-r^2)}\, [\![r < a]\!] \tag{4.4}$$

es una función suave con $\operatorname{sop} \varphi_a = \overline{B}(x_0; a) \Subset U$. Tómese la constante de normalización $C_a > 0$ para que $\int_{\mathbb{R}^m} \varphi_a(x)\, d^m x = 1$. ⟦ Obsérvese que la función φ_a es suave *no es analítica* en U: su serie de Taylor en cualquier punto de la esfera $r = a$ es idénticamente nula, pero φ_a es positiva en el interior de esta esfera. ⟧ ◊

[2] Si $x \in U$, hay un compacto $K \Subset U$ tal que $x \in K^\circ \subset K$ porque U es localmente compacto. Si además $x \in K^\circ \subset K \subset L^\circ \subset L \subset U$ con K y L compactos, el Lema de Urysohn produce una función continua $h\colon U \to [0,1]$ tal que $h(y) \equiv 1$ si $y \in K$ pero $h(z) \equiv 0$ si $z \notin L$. Por lo tanto $\operatorname{sop} h \subseteq L$, así que $h \in \mathcal{K}(U)$.

Definición 4.2. Sea U una parte abierta no vacía de $\mathbb{R}^m$. Los elementos del espacio vectorial $\mathcal{D}(U)$ se llaman **funciones de prueba** en U. Si $\{x_1, \dots, x_n\}$ es una parte finita de U, la fórmula (4.4) muestra que hay funciones $\psi_j \in \mathcal{D}(U)$ tales que $\psi_j(x_j) \neq 0$ pero $\psi_j(x_k) = 0$ para $j \neq k$; por lo tanto, las funciones $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ son linealmente independientes. Luego, $\mathcal{D}(U)$ es infinitodimensional.

Para cada compacto $K \Subset U$, sea $\mathcal{D}_K := \{ \varphi \in \mathcal{D}(U) : \operatorname{sop} \varphi \subseteq K \}$. Obsérvese que $\varphi \in \mathcal{D}_K \implies \partial^\alpha \varphi \in \mathcal{D}_K$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^m$. (Una derivación parcial no aumenta el soporte de una función suave.)

Cuando $K \Subset U$, el espacio vectorial $\mathcal{D}_K$ es un *subespacio cerrado* de $\mathcal{E}(U)$. Con la topología heredada de $\mathcal{E}(U)$, este $\mathcal{D}_K$ es entonces un *espacio de Fréchet*, con seminormas

$$p_{K,n}(\varphi) := \sup\{ |\partial^\alpha \varphi(x)| : x \in K,\ |\alpha| \leqslant n \}. \tag{4.5}$$

La unión $\mathcal{D}(U) = \bigcup_{K \Subset U} \mathcal{D}_K$ es un espacio localmente convexo (¡no metrizable!) bajo la topología localmente convexo más fuerte tal que todas las inclusiones $\mathcal{D}_K \hookrightarrow \mathcal{D}(U)$ sean continuas. Concretamente, $\varphi_k \to \varphi$ en $\mathcal{D}(U)$ si y solo si hay $K \Subset U$ tal que $\operatorname{sop} \varphi \subseteq K$ y $\operatorname{sop} \varphi_k \subseteq K$ para cada k y si además $\partial^\alpha \varphi_k \to \partial^\alpha \varphi$ uniformemente sobre K, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^m$. ◊

Un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^m$ es σ-compacto (Ejemplo 1.13): $U = \uparrow\bigcup_n K_n$ con $K_n \subset K_{n+1}^\circ$ para cada n. En tal caso, la inclusión continua $\mathcal{D}_{K_n} \hookrightarrow \mathcal{D}_{K_{n+1}}$ es un *encaje*: la topología relativa de $\mathcal{D}_{K_n}$ como subespacio de $\mathcal{D}_{K_{n+1}}$ coincide con su topología original. ⟦ Dícese que $\mathcal{D}(U)$ es el *límite inductivo estricto* de los espacios de Fréchet $\mathcal{D}_{K_n}$. ⟧

Definición 4.3. Sea U un abierto en $\mathbb{R}^m$. Una **distribución** en U es una forma lineal continua sobre $\mathcal{D}(U)$, es decir, un elemento del espacio dual $\underline{\mathcal{D}'(U)} := \mathcal{D}(U)^*$.

Si $f \in \mathcal{D}'(U)$, $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, la evaluación $\underline{\langle f, \varphi \rangle} := f(\varphi)$ define la dualidad entre distribuciones y funciones de prueba.

Una forma lineal $f : \mathcal{D}(U) \to \mathbb{C}$ es continua si y solo si su restricción a cada subespacio $\mathcal{D}_K$ es continua. Entonces $f \in \mathcal{D}'(U)$ si y solo si, para cada compacto $K \Subset U$, hay $n \in \mathbb{N}$ y $C > 0$ tales que

$$|f(\varphi)| \leqslant C\, p_{K,n}(\varphi) \quad \text{para cada} \quad \varphi \in \mathcal{D}_K. \tag{4.6}$$

La topología apropiada sobre $\mathcal{D}'(U)$ es la *topología débil estelar*[3] como espacio dual de $\mathcal{D}(U)$, es decir, la topología de *convergencia simple* sobre funciones de prueba. Entonces $f_j \to f$ en $\mathcal{D}'(U)$ si y solo si $\langle f_j, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$ para cada $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. ◊

[3] Si E es un espacio localmente convexo, la **topología fuerte** $\beta(E^*, E)$ sobre su espacio dual E^* es la topología de *convergencia uniforme sobre partes acotadas* de E. Cuando E es un espacio normado, esta es la topología de la norma sobre E^*. Las topologías débil estelar y fuerte sobre E no coinciden: hay redes que convergen para $\sigma(E^*, E)$ pero no para $\beta(E^*, E)$. Sin embargo, en el caso $E = \mathcal{D}(U)$, resulta que cualquier *sucesión* $\{f_n\}$ de distribuciones que converge débilmente también converge en la topología fuerte. Véase la Proposición 4.1.2 del libro: John Horváth, *Topological Vector Spaces and Distributions*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1966.

Definición 4.4. Una función $f\colon U \to \mathbb{C}$ es **localmente integrable** – escrito $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ – si

$$\int_K |f(x)|\, d^m x < \infty \quad \text{para cada} \quad K \Subset U,$$

es decir, si $f|_K \in \mathcal{L}^1(K, d^m x)$ con respecto a la medida de Lebesgue,[4] para cada compacto $K \subset U$. Una función localmente integrable define una **distribución regular** sobre U, por:

$$\underline{\langle f, \varphi\rangle} := \int_U f(x)\, \varphi(x)\, d^m x. \tag{4.7}$$

(Las distribuciones que no provienen de funciones localmente integrables son *singulares*.) ◊

Notación. Los practicantes de la teoría de distribuciones[5] suelen denotar el lado derecho de (4.7) por $\underline{\langle f(x), \varphi(x)\rangle}$ en vez de $\langle f, \varphi\rangle$, incorporando una variable de integración en el apareamiento de dualidad. Esto simplifica los procedimientos de "cambio de variable".

Ejemplo 4.5. Un caso importante de una distribución regular es la **función de Heaviside**[6] $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definido por

$$\underline{\theta(x)} := [\![x \geqslant 0]\!] = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Esta función es discontinua en $x = 0$. Su valor en $x = 0$ es irrelevante para definir la distribución regular: $\theta = \mathbb{1}_{[0,\infty)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, vale $\langle \theta, \varphi\rangle = \int_0^\infty \varphi(x)\, dx$. ◊

Ejemplo 4.6. La **delta de Dirac** es la distribución singular $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dada por la evaluación en $x = 0$:

$$\underline{\langle \delta, \varphi\rangle} \equiv \langle \delta(x), \varphi(x)\rangle := \underline{\varphi(0)}. \tag{4.9}$$

Dirac originalmente escribió:[7] $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(0)$. Es evidente que una función "$\delta(x)$" con esta propiedad debería cumplir $\delta(x) = 0$ para $x \neq 0$, a la vez que $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\, dx = 1$. Esta fórmula de Dirac adquiere sentido al interpretar su "integral" como la expresión (4.9).

Fíjese que $|\varphi(0)| \leqslant p_{K,0}(\varphi)$ para $K \Subset \mathbb{R}$, así que $\delta\colon \varphi \mapsto \varphi(0)$ es una distribución sobre $\mathbb{R}$.

Más generalmente, si U es un abierto en $\mathbb{R}^m$ con $y \in U$, defínase $\delta_y \in \mathcal{D}'(U)$ por

$$\underline{\langle \delta_y, \varphi\rangle} \equiv \langle \delta(x - y), \varphi(x)\rangle := \underline{\varphi(y)}.$$

En la notación de Dirac: $\int_U \delta(x - y)\, \varphi(x)\, d^m x = \varphi(y)$. ◊

[4] En este capítulo, todas las integrales se toman con respecto a la medida de Lebesgue, denotado por la "cola de integración" $d^m x$, salvo indicación expresa de lo contrario.

[5] Véase, por ejemplo, el libro de Estrada y Kanwal. Esta costumbre fue establecida por Israïl Guelfand en un tratado de cinco tomos (edición rusa, 1958); véase: I. M. Guelfand y G. E. Shilov, *Generalized Functions 1*, Academic Press, New York, 1964.

[6] Algunos autores escriben $\underline{H(x)}$ en vez de $\theta(x)$.

[7] En su libro: Paul Adrien Maurice Dirac, *Principles of Quantum Mechanics*, Oxford, 1930, la "función" $\delta(x - y)$ aparece como una "notación conveniente" para una versión continua de la delta de Kronecker δ_{jk}.

Ejemplo 4.7. La función $1/x$ no es localmente integrable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pues la integral $\int_a^b dx/x$ diverge toda vez que $a < 0 < b$. Sin embargo, es posible construir una distribución a partir de la función $1/x$, al usar el **valor principal de Cauchy** en $x = 0$ de las integrales. Defínase

$$\langle \underline{\mathrm{vp}(1/x)}, \varphi(x) \rangle := \mathrm{P}\!\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Como $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ es suave, hay otra función suave ψ tal que

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\psi(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esto sigue del teorema de Taylor de orden 0; y el teorema de valor medio muestra que $\psi(x) = \varphi'(tx)$ para algún $t \in (0,1)$, dependiente de x. Si $\operatorname{sop} \varphi \subset [-R, R]$, entonces

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant R} \left(\frac{\varphi(0)}{x} + \psi(x) \right) dx = \int_{-R}^{R} \psi(x)\,dx.$$

La continuidad de este funcional lineal de φ sigue del estimado

$$|\langle \mathrm{vp}(1/x), \varphi(x) \rangle| \leqslant 2R\,\|\psi\|_\infty \leqslant 2R\,\|\varphi'\|_\infty \leqslant 2R p_{[-R,R],1}(\varphi). \qquad \Diamond$$

► Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función diferenciable (por tanto, continua y localmente integrable), la *fórmula de integración por partes* (4.2) es válida, porque $f(x)\,\varphi(x)$ se anula en $\pm\infty$ porque $\operatorname{sop} \varphi$ es compacto. Para otras funciones o distribuciones, esta fórmula también permite definir la "derivada distribucional" de f.

Su $U \subseteq \mathbb{R}^m$ con $m > 1$ y $f : U \to \mathbb{C}$ es diferenciable, conviene abreviar sus derivadas parciales con la notación $\underline{\partial_j f} := \partial f / \partial x_j$.

Definición 4.8. Si $f \in \mathcal{D}'(U)$, con $U \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto, la **derivada parcial** $\partial_j f$ se define así:

$$\langle \underline{\partial_j f}, \varphi \rangle := -\langle f, \partial_j \varphi \rangle \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(U). \tag{4.10}$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}^m$ es un multiíndice, se acumulan $|\alpha|$ signos menos:

$$\langle \underline{\partial^\alpha f}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

En el caso $m = 1$ de una variable, se escribe $\langle f', \varphi \rangle := -\langle f, \varphi' \rangle$, como en (4.2). ◊

Ejemplo 4.9. La derivada distribucional de la función de Heaviside es la delta de Dirac:

$$\langle \theta', \varphi \rangle = -\langle \theta, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \quad \text{para} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Fíjese que θ es una distribución regular pero su derivada es singular. ◊

Ejemplo 4.10. La función $a(x) := |x|$ es continua sobre $\mathbb{R}$, pero en $x = 0$ no es diferenciable en el sentido ordinario. Su derivada distribucional se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}\langle a', \varphi\rangle = -\langle a, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} |x|\, \varphi'(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{0} x\, \varphi'(x)\, dx - \int_{0}^{\infty} x\, \varphi'(x)\, dx \\ &= -\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} (\operatorname{signo} x)\, \varphi(x)\, dx,\end{aligned}$$

después de una integración por partes, al notar que $x\,\varphi(x)$ se anula en $\{-\infty, 0, +\infty\}$. Luego $a' = \operatorname{signo}$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

La segunda derivada de $x \mapsto |x|$ es singular:

$$\langle a'', \varphi\rangle = -\langle a', \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} (\operatorname{signo} x)\, \varphi'(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\, dx - \int_{0}^{\infty} \varphi'(x)\, dx = 2\,\varphi(0),$$

así que $a'' = 2\delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. ◊

Ejemplo 4.11. La derivada distribucional de δ está dada por $\langle \delta', \varphi\rangle = -\varphi'(0)$.

Más generalmente, si $y \in U \subseteq \mathbb{R}^m$, las derivadas de orden superior de δ_y están dadas por $\langle \partial^\alpha \delta_y, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(y)$. ◊

Definición 4.12. El **orden** de una distribución $f \in \mathcal{D}'(U)$ se define como sigue. Para cada $K \Subset U$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $C > 0$, dependientes de K, tales que $|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant C\, P_{K,n}(\varphi)$ para $\varphi \in \mathcal{D}_K$. Si es posible elegir n independiente de K, el mínimo de tales n es el orden de f; si eso no es posible, dícese que f *tiene orden infinito*. ◊

Si $f \in L^1(U)$, la distribución regular definida por f es de orden 0, ya que

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant \|f\|_1 \|\varphi\|_\infty = \|f\|_1\, p_{\operatorname{sop}\varphi,0}(\varphi).$$

La delta de Dirac es una distribución de orden 0; su derivada δ' es de orden 1. La suma $\sum_{k\in\mathbb{N}} \partial^k \delta_k$ es un elemento de orden infinito en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

► Las relaciones entre distribuciones regulares dadas por las fórmulas usuales del cálculo integral se extienden a las distribuciones singulares como *definiciones*. Por ejemplo, la invariancia de la medida de Lebesgue bajo traslaciones establece que

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x-b)\, \varphi(x)\, d^m x = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, \varphi(x+b)\, d^m x$$

para $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, $b \in \mathbb{R}^m$ fijo. Esta fórmula permite *transponer* el operador de traslación τ_b de funciones de prueba a distribuciones, así:

$$\langle \underline{\tau_b f}, \varphi\rangle := \langle f, \tau_{-b}\varphi\rangle. \quad \text{para} \quad f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m),\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m). \tag{4.11}$$

En la notación extendida, se escribe $\langle f(x-b), \varphi(x)\rangle := \langle f(x), \varphi(x+b)\rangle$.

Considérese un *cambio de variable lineal*, dada por una matriz no singular $A \in M_m(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(Ax)\,\varphi(x)\,d^m x = \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\,\varphi(A^{-1}y)\,d^m y,$$

para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ y $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$. Esta fórmula se expresa al poner $y := Ax$ con regla de cambio $d^m y = |\det A|\,d^m x$. ⟦ Aquí, $\underline{\det A}$ es el *jacobiano* de la transformación lineal $x \mapsto Ax$. ⟧

Definición 4.13. Una aplicación lineal invertible $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ actúa sobre distribuciones por transposición. Para $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, defínase $A^{\mathrm{t}} f \equiv f \circ A \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ por

$$\langle \underline{f \circ A}, \varphi \rangle := \frac{1}{|\det A|} \langle f, \varphi \circ A^{-1} \rangle, \quad \text{o bien} \tag{4.12a}$$

$$\langle f(Ax), \varphi(x) \rangle := \frac{1}{|\det A|} \langle f(x), \varphi(A^{-1}x) \rangle. \tag{4.12b}$$

Si R es una aplicación *ortogonal*, $R^{-1} = R^{\mathrm{t}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, entonces $\det R = \pm 1$ y la fórmula (4.12b) se simplifica en $\langle f(Rx), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(R^{\mathrm{t}}x) \rangle$.

Una **dilatación** o *cambio de escala* es el caso $A = \lambda\, 1_m$ con $\lambda > 0$ en $\mathbb{R}$. La fórmula:

$$\langle f(\lambda x), \varphi(x) \rangle := \lambda^{-m} \langle f(x), \varphi(x/\lambda) \rangle \quad \text{para} \quad \lambda > 0 \tag{4.13}$$

expresa el efecto de esta dilatación sobre distribuciones. ◊

► La *multiplicación* de distribuciones presenta una dificultad: $\mathcal{D}'(U)$ *no es un álgebra*, porque algunos pares de distribuciones que no admiten un producto. Sin embargo, siempre es posible multiplicar una distribución por una función suave.

Definición 4.14. Sea $f \in \mathcal{D}'(U)$, $u \in \mathcal{E}(U)$. Su **producto** $uf = fu$ es el elemento de $\mathcal{D}'(U)$ dado por

$$\langle \underline{uf}, \varphi \rangle := \langle f, u\varphi \rangle \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(U). \tag{4.14}$$

Fíjese que $u\varphi(x) \equiv u(x)\,\varphi(x)$ es una función suave, con $\operatorname{sop}(u\varphi) \subseteq \operatorname{sop}\varphi$, así que $u\varphi \in \mathcal{D}(U)$. La regla de Leibniz para derivadas:[8]

$$\partial^\alpha(u\varphi) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!}\,\partial^\beta u\,\partial^{\alpha-\beta}\varphi \tag{4.15}$$

muestra que $p_{K,n}(u\varphi) \leqslant B\,p_{K,n}(\varphi)$ para $\varphi \in \mathcal{D}_K$ al tomar $B := p_{K,n}(u)$. Esto establece que el operador lineal $\varphi \mapsto u\varphi$ es continua sobre $\mathcal{D}(U)$; en consecuencia, la forma lineal $\varphi \mapsto \langle f, u\varphi \rangle$ es continua: el lado derecho de (4.14) define una distribución uf sobre U. Ahora (4.14) dice que el operador $f \mapsto uf$ sobre $\mathcal{D}'(U)$ es la *transpuesta* de $\varphi \mapsto u\varphi$ sobre $\mathcal{D}(U)$.

En resumen: los espacios localmente convexos $\mathcal{D}(U)$ y $\mathcal{D}'(U)$ son *módulos* para el álgebra $\mathcal{E}(U)$ y las operaciones de módulo son bilineales y (separadamente) continuas. ◊

[8] Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ se define $\underline{\alpha!} := \alpha_1!\,\alpha_2! \cdots \alpha_m!$.

Lema 4.15. *Se cumple la* regla de Leibniz *al aplicar una derivación parcial al un producto de distribuciones por funciones suaves:*

$$\partial_j(uf) = (\partial_j u)\, f + u\,(\partial_j f) \quad \textit{para} \quad f \in \mathcal{D}'(U),\ u \in \mathcal{E}(U). \tag{4.16}$$

Demostración. Por transposición: si $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, entonces

$$\begin{aligned}\langle \partial_j(uf), \varphi\rangle &= -\langle uf, \partial_j\varphi\rangle = -\langle f, u\partial_j\varphi\rangle = -\langle f, \partial_j(u\varphi)\rangle + \langle f, (\partial_j u)\varphi\rangle \\ &= \langle \partial_j f, u\varphi\rangle + \langle (\partial_j u) f, \varphi\rangle = \langle u\,(\partial_j f), u\varphi\rangle + \langle (\partial_j u) f, \varphi\rangle.\end{aligned}$$ □

Ejemplo 4.16. Si $a < 0 < b$ en $\mathbb{R}$ y si $u \in \mathcal{E}(a,b)$, entonces $u\,\delta = u(0)\,\delta$. En efecto, para $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$:

$$\langle u\,\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, u\varphi\rangle = u(0)\,\varphi(0) = u(0)\,\langle \delta, \varphi\rangle.$$

En particular, si $u(0) = 0$, entonces $u\delta = 0$ en $\mathcal{D}'(a,b)$. ◊

Ejemplo 4.17. En $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, el producto de la distribución $\mathrm{vp}(1/x)$ y la función x es la función constante 1. En efecto:

$$\langle x\ \mathrm{vp}(1/x), \varphi(x)\rangle = \langle \mathrm{vp}(1/x), x\varphi(x)\rangle = \mathrm{P}\!\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi\rangle,$$

porque $\varphi(x)$ no tiene una singularidad en $x = 0$.

Este ejemplo y el anterior advierten una *falta de asociatividad* del producto:

$$(\delta\,x)\ \mathrm{vp}(1/x) = 0\ \mathrm{vp}(1/x) = 0, \quad \text{mientras} \quad \delta(x\ \mathrm{vp}(1/x)) = \delta\,1 = \delta \neq 0.$$

Esto es parcialmente explicable al notar que productos de tipo $(fu)g$ o bien $f(ug)$ no están "autorizadas" por la definición de un *módulo* sobre $\mathcal{E}(U)$, aun cuando $f, g \in \mathcal{D}'(U)$ y $u \in \mathcal{E}(U)$ satisfagan $fu, ug \in \mathcal{E}(U)$. ◊

Definición 4.18. Sea $V \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^m$ (un par de abiertos). Una función de prueba $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ tiene una **extensión por cero** a $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(U)$, al definir $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(x)$ para $x \in V$ pero $\tilde{\varphi}(y) := 0$ para $y \in U \setminus V$. Como $U \setminus V \subset U \setminus \operatorname{sop}\varphi$, esta extensión está bien definida, con $\operatorname{sop}\tilde{\varphi} = \operatorname{sop}\varphi$. Luego $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}'(U)$. Este proceso define un *encaje* $I_{V,U} \colon \mathcal{D}(V) \to \mathcal{D}(U) : \varphi \mapsto \tilde{\varphi}$. Usualmente se escribe φ en vez de $\tilde{\varphi}$, identificando $\mathcal{D}(V)$ con su imagen como subespacio de $\mathcal{D}(U)$.

Si $f \in \mathcal{D}'(U)$, entonces $\underline{f|_V} := I^{\mathrm{t}}_{V,U}(f) \equiv f \circ I_{V,U} \in \mathcal{D}'(V)$ es la **restricción** de f a V. Dícese que f **se anula sobre** $\underline{\boldsymbol{V}}$ si $f|_V = 0$, esto es, $\langle f, \varphi\rangle = 0$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}(V)$.

El **soporte de una distribución** $f \in \mathcal{D}'(U)$ es el complemento $\underline{\operatorname{sop} f} := U \setminus V$ del mayor abierto V en donde f se anula.[9] ⟦ Si f se anula sobre V_1 y V_2, entonces f se anula sobre $V_1 \cup V_2$, porque cada $\varphi \in \mathcal{D}(V_1 \cup V_2)$ puede expresarse como $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ donde $\varphi_1 \in \mathcal{D}(V_1)$ y $\varphi_2 \in \mathcal{D}(V_2)$. ⟧ ◊

[9] Este enfoque generaliza la "forma indirecta" de definir el soporte de una función continua.

Ejemplo 4.19. El soporte de una distribución regular $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$ es el *soporte esencial* de f, es decir, el complemento del mayor abierto en donde f se anula casi por doquier.

Si $x \in U$, entonces $u\,\delta_x = u(x)\,\delta_x$ para todo $u \in \mathcal{E}(U)$, por el Ejemplo 4.16. Si $K \Subset U \setminus \{x\}$, entonces $\langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}_K$; luego, δ_x se anula sobre $U \setminus \{x\}$ pero no se anula sobre U. Por lo tanto, $U \setminus \{x\}$ es la mayor parte abierta de U en donde δ_x se anula. Se concluye que $\operatorname{sop} \delta_x = \{x\}$. ◊

Lema 4.20. *Sea $f \in \mathcal{D}'(U)$, donde U es un abierto en $\mathbb{R}^m$.*

(a) *Si $\alpha \in \mathbb{N}^m$, entonces* $\operatorname{sop}(\partial^\alpha f) \subseteq \operatorname{sop} f$.

(b) *Si $u \in \mathcal{E}(U)$, entonces* $\operatorname{sop}(uf) \subseteq (\operatorname{sop} u) \cap (\operatorname{sop} f)$.

(c) *Si $v \in \mathcal{E}(U)$ es tal que $v(x) \equiv 1$ en un vecindario de* $\operatorname{sop} f$, *entonces $vf = f$.*

Demostración. Ad (a): Sea $V \subseteq U$ abierto con $f|_V = 0$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(V)$, entonces $\partial^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(V)$; luego $\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle = 0$. Entonces $\operatorname{sop}(\partial^\alpha f) \subseteq U \setminus V$. Como $\operatorname{sop} f$ es la intersección de todos esos $U \setminus V$, se concluye que $\operatorname{sop}(\partial^\alpha f) \subseteq \operatorname{sop} f$.

Ad (b): La definición del soporte de f implica $\langle f, \varphi \rangle = 0$ cuando $\operatorname{sop} \varphi \cap \operatorname{sop} f = \emptyset$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ es tal que $\operatorname{sop} \varphi \cap \operatorname{sop} u \cap \operatorname{sop} f = \emptyset$, entonces $\operatorname{sop}(\varphi u) \cap \operatorname{sop} f = \emptyset$, así que $\langle uf, \varphi \rangle = \langle f, u\varphi \rangle = 0$. Luego uf se anula sobre $U \setminus (\operatorname{sop} u \cap \operatorname{sop} f)$.

Ad (c): Sea V un abierto tal que $\operatorname{sop} f \subset V \subseteq U$ y $v(x) \equiv 1$ sobre V. Para $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, está claro que $v\varphi \in \mathcal{D}(U)$ y $\operatorname{sop}(v\varphi - \varphi) \subseteq U \setminus V$, por tanto $\langle f, v\varphi - \varphi \rangle = 0$. Se concluye que $\langle vf, \varphi \rangle = \langle f, v\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. □

Proposición 4.21. *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^m$ y sea $f \in \mathcal{D}'(U)$ una distribución* cuyo soporte es compacto. *Entonces f es de orden finito y se extiende a una forma lineal continua sobre $\mathcal{E}(U)$.*

Demostración. Sea $V \subset U$ un abierto con $\operatorname{sop} f \Subset V \subset \overline{V} \Subset U$.[10] Elíjase $\psi \in \mathcal{D}(U)$ tal que $\psi(x) \equiv 1$ sobre V. Entonces $\psi f = f$, por el Lema 4.20(c). Por la continuidad de f sobre $\mathcal{D}(U)$, hay una constante $C_1 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$|\langle f, \varphi \rangle| = |\langle \psi f, \varphi \rangle| = |\langle f, \psi\varphi \rangle| \leqslant C_1\, p_{\operatorname{sop}\psi,n}(\psi\varphi) \quad \text{para} \quad \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

De la regla de Leibniz (4.15) se obtiene $p_{\operatorname{sop}\psi,n}(\psi\varphi) \leqslant 2^n p_{\operatorname{sop}\psi,n}(\psi)\, p_{\operatorname{sop}\varphi,n}(\varphi)$, así que

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leqslant C'_n\, p_{\operatorname{sop}\varphi,n}(\varphi) \quad \text{donde} \quad C'_n = 2^n C_1 p_{\operatorname{sop}\psi,n}(\psi).$$

En la última estimación, n no depende de φ (sino solamente de $\operatorname{sop}\psi$), así que f es de orden finito no mayor que n.

[10] Esto es posible porque $\operatorname{sop} f$ es compacto y U es localmente compacto.

Si $u \in \mathcal{E}(U)$, defínase $\langle f, u\rangle := \langle f, \psi u\rangle$, donde al lado derecho se usa la dualidad entre $\mathcal{D}'(U)$ y $\mathcal{D}(U)$. Esta fórmula define una *extensión* de f a una forma lineal sobre $\mathcal{E}(U)$.

Si $u_k \to 0$ en el espacio de Fréchet $\mathcal{E}(U)$ y si $\alpha \in \mathbb{N}^m$, entonces $\partial^\alpha u_k \to 0$ uniformemente sobre compactos en U. Por la regla de Leibniz, cada $\partial^\alpha(\psi u_k) \to 0$ uniformemente sobre $\operatorname{sop}\psi$, así que $\psi u_k \to 0$ en $\mathcal{D}_{\operatorname{sop}\psi}$ y por ende en $\mathcal{D}(U)$. Luego $\langle f, u_k\rangle = \langle f, \psi u_k\rangle \to 0$ cuando $k \to \infty$. En resumen: f es una forma lineal *continua* sobre $\mathcal{E}(U)$. □

Notación. El espacio dual de $\mathcal{E}(U)$ se denota por $\underline{\mathcal{E}'(U)} := \mathcal{E}(U)^*$.

Lema 4.22. *Hay una correspondencia biunívoca entre elementos de $\mathcal{E}'(U)$ y distribuciones de soporte compacto sobre U.*

Demostración. La Proposición 4.21 dice que cualquier distribución $f \in \mathcal{D}'(U)$ con soporte compacto se extiende a un elemento de $\mathcal{E}'(U)$. Esta extensión $\langle f, u\rangle := \langle f, \psi u\rangle$ es *única*, por dos razones. En primer lugar, el lado derecho $\langle f, \psi u\rangle$ no depende de ψ; porque si $\chi \in \mathcal{D}(U)$ también obedece $\chi \equiv 1$ sobre W con $\operatorname{sop} f \Subset W \subset \overline{W} \Subset U$, entonces $\psi - \chi \equiv 0$ en $V \cap W$, así que $\langle f, (\psi - \chi)u\rangle = 0$ para todo $u \in \mathcal{E}(U)$.

En segundo lugar, $\mathcal{D}(U)$ es un *subespacio denso* de $\mathcal{E}(U)$. De hecho, al escribir $U = \uparrow\bigcup_n K_n$ con cada $K_n \subset K^\circ_{n+1}$, hay funciones $\varphi_n \in \mathcal{D}(U)$ con $\varphi_n \equiv 1$ sobre K_n y $\operatorname{sop}\varphi_n \Subset K^\circ_{n+1}$; si $u \in \mathcal{E}(U)$, entonces $u\varphi_n \to u$ en la topología de $\mathcal{E}(U)$. En consecuencia, cual forma lineal continua sobre $\mathcal{E}(U)$ está determinada por su restricción al subespacio denso $\mathcal{D}(U)$.

Inversamente, cualquier elemento $g \in \mathcal{E}'(U)$ es una forma lineal sobre $\mathcal{E}(U)$ que cumple la condición de continuidad siguiente: existen $L \Subset U$, $n \in \mathbb{N}$ y $C > 0$ tales que

$$|g(u)| \leqslant C\, p_{L,n}(u) \quad \text{para todo} \quad u \in \mathcal{E}(U).$$

En particular $|g(\varphi)| \leqslant C\, p_{L,n}(\varphi)$ para $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, así que $\varphi \mapsto g(\varphi)$ es una distribución en U. Si $\varphi \in \mathcal{D}(U \setminus L)$, entonces tanto φ como todas sus derivadas $\partial^\alpha\varphi$ se anulan en un vecindario abierto de L. Esto implica que $p_{L,n}(\varphi) = 0$ y por ende $g(\varphi) = 0$ para tales φ. Luego, el soporte de la distribución $\varphi \mapsto g(\varphi)$ cumple $\operatorname{sop} g \subseteq L$. □

Definición 4.23. De la demostración anterior, se obtiene dos aplicaciones lineales inyectivas:

$$\mathcal{D}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}(U) \quad \text{y} \quad \mathcal{E}'(U) \hookrightarrow \mathcal{D}'(U).$$

La primera es una inclusión, pues $\mathcal{D}(U) \subset \mathcal{E}(U)$. La otra viene de la restricción de $g \in \mathcal{E}'(U)$ a una forma lineal continua sobre el subespacio denso $\mathcal{D}(U)$. Para cada $K \Subset U$, la inclusión $\mathcal{D}_K \hookrightarrow \mathcal{E}(U)$ es continua; por tanto, la inclusión $\mathcal{D}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}(U)$ también es continua. La inyección $\mathcal{E}'(U) \hookrightarrow \mathcal{D}'(U)$ es la *transpuesta* de la inclusión $\mathcal{D}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}(U)$.

Así, se identifica el espacio localmente convexo $\mathcal{E}'(U)$ con un subespacio vectorial de $\mathcal{D}'(U)$; luego, $\mathcal{E}'(U)$ es **el espacio de distribuciones de soporte compacto** sobre U. ◊

4.2 La convolución de funciones y distribuciones

En sección está dedicada a la operación de *convolución* de funciones y distribuciones definidas sobre $\mathbb{R}^m$. Las integrales $\int(\cdot)\,d^mx$ se toman sobre todo $\mathbb{R}^m$, salvo indicación explícita de lo contrario.

Definición 4.24. Si $f,g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ son dos funciones (medibles), su **convolución** es la función $f*g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ definida por la fórmula (3.2):

$$\underline{f*g}(x) := \int f(x-t)\,g(t)\,d^mt = \int f(s)\,g(x-s)\,d^ms, \tag{3.2}$$

toda vez que estas integrales existen para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Las dos integrales son iguales porque la medida de Lebesgue es invariante bajo el cambio de variable $s = x - t$ para cada x fijo. La simetría de la fórmula indica que $f*g = g*f$ si al menos una de las dos existe.

Si $f,g \in L^1(\mathbb{R}^m)$, entonces $f*g \in L^1(\mathbb{R}^m)$ con $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$ como ya se observó en el Ejemplo 3.6. ⟦ De hecho, si $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^m)$ con $1 \leqslant p \leqslant \infty$, entonces $f*g \in L^p(\mathbb{R}^m)$ con $\|f*g\|_p \leqslant \|f\|_1\|g\|_p$. ⟧[11] ◊

Fíjese bien que *no es posible convolver dos funciones constantes*. Por ejemplo, si $f(x) = g(x) \equiv 1$, el lado derecho de (3.2) sería $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} 1\,d^mx = +\infty$, con una integral divergente.

Notación. Si $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ es una función cualquiera, la *traslación* $\underline{\tau_x g}(s) := g(s-x)$ y la *reflexión* $\underline{\check{g}}(t) := g(-t)$ se pueden combinar en

$$\underline{\check{\tau}_x g}(s) := \check{g}(s-x) \equiv g(x-s).$$

Entonces la definición (3.2) de convolución se puede abreviar así:

$$f*g(x) := \langle \check{\tau}_x f, g\rangle = \langle f, \check{\tau}_x g\rangle. \tag{4.17}$$

Lema 4.25. *La* ***suma*** *de dos partes $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ es $\underline{A+B} := \{\, x+y : x \in A,\ y \in B \,\}$. Si A es cerrado y B es compacto, entonces $A+B$ es cerrado. Si ambos A y B son compactos, entonces $A+B$ es compacto.*

Demostración. Si A es cerrado y B es compacto, sea $z \in \overline{A+B}$. Hay sucesiones $\{x_n\} \subseteq A$ y $\{y_n\} \subseteq K$ tales que $x_n + y_n \to z$. Por compacidad, hay una subsucesión $\{y_{n_k}\}$ de $\{y_n\}$ tal que $y_{n_k} \to y \in B$. Entonces $z - y = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in A$ porque A es cerrado. Luego $z = (z-y) + y \in A+B$.

Si A y B son compactos, entonces $A \times B$ es compacto en $\mathbb{R}^{2m}$ y $A+B = s(A\times B)$ es la imagen de $A\times B$ bajo la función continua $s\colon \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^m : (x,y) \mapsto x+y$. □

[11] Las demostraciones de estas desigualdades exige un uso cuidadoso del teorema de Fubini; en particular, se debe verificar que la función $h(x,t) := f(x-t)\,g(t)$ es medible. Véase, por ejemplo, los teoremas 21.31 y 21.32 del libro: Edwin Hewitt y Karl Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer, Berlin, 1965; y la Prop. 7.1.2 del libro de Blancahrd y Brüning.

Si $f, g \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m) = C_c(\mathbb{R}^m)$, nótese que $f(x-t)g(t) = 0$ cuando $t \notin \operatorname{sop} g$ o bien $x - t \notin \operatorname{sop} f$. Entonces la integral se anula cuando $x \neq s + t$ con $s \in \operatorname{sop} f$ y $t \in \operatorname{sop} g$. De este modo, se obtiene

$$\operatorname{sop}(f * g) \subseteq \operatorname{sop} f + \operatorname{sop} g. \tag{4.18}$$

Como $f * g \colon x \mapsto \int_{\operatorname{sop} g} f(x-t)\, g(t)\, d^m t$ es continua ⟦ $f(x-t)\, g(t)$ es uniformemente continua sobre $\mathbb{R}^m$ y $\operatorname{sop} g$ es compacto ⟧ con $\operatorname{sop}(f * g)$ compacto por el Lema 4.25 y (4.18), se obtiene $f * g \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$.

Lema 4.26. *Sean $f, g, h \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$. Si al menos uno de f, g tiene soporte compacto, entonces*

(a) $\tau_z(f * g) = \tau_z f * g = f * \tau_z g$ *para todo* $z \in \mathbb{R}^m$*;*

(b) $f * g \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ *con* $\partial^\alpha(f * g) = \partial^\alpha f * g = f * \partial^\alpha g$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{N}^m$.

Si al menos dos de las funciones f, g, h tienen soportes compactos, entonces

(c) *la siguiente fórmula integral es válida:*

$$\langle f * g, h \rangle = \iint f(x)\, g(y)\, h(x+y)\, d^m x\, d^m y; \tag{4.19}$$

(d) *la convolución es* asociativa*:* $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Demostración. La fórmula (a) es un cálculo inmediato.

Ad (b): Si $\operatorname{sop} g$ es compacto, la fórmula $\partial_j(f * g) = \partial_j f * g$ se obtiene por derivación debajo del signo integral de la primera integral en (3.2), pues los integrandos son uniformemente continuas en (x, t). Si $\operatorname{sop} f$ es compacto, se obtiene $\partial_j(f * g) = f * \partial_j g$ usando la segunda integral en (3.2). Luego $f * g$ es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^m$. La conmutatividad $f * g = g * f$ implica la segunda fórmula (en ambos casos) para derivadas parciales de primer orden. El resultado general sigue por inducción sobre $|\alpha|$.

Ad (c): Un cálculo formal indica que

$$\begin{aligned} \langle f * g, h \rangle &= \int f * g(x)\, h(x)\, d^m x = \iint f(x-y)\, g(y)\, h(x)\, d^m y\, d^m x \\ &= \iint f(x-y)\, g(y)\, h(x)\, d^m x\, d^m y = \iint f(x)\, g(y)\, h(x+y)\, d^m x\, d^m y. \end{aligned}$$

Para justificar el cálculo, nótese que las hipótesis implican que $L(x, y) := f(x-y)\, g(y)\, h(x)$ tiene soporte compacto en $\mathbb{R}^{2m}$. Luego, se puede usar la continuidad uniforme de este integrando, o bien el teorema de Fubini, para cambiar del orden de integración.

Ad (d): La asociatividad es un cálculo directo: se requiere la compacidad de al menos dos soportes para obtener *existencia* de las convoluciones $f*(g*h)$ y $(f*g)*h$. Alternativamente, basta observar que estas dos funciones aparejadas con cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ dan el mismo resultado:

$$\langle f * g * h, \varphi\rangle = \iiint f(x)\, g(y)\, h(z)\, \varphi(x+y+z)\, d^m x\, d^m y\, d^m z.$$

En breve: la asociatividad de la convolución sigue de la asociatividad de la suma en $\mathbb{R}^m$. □

Entonces la convolución establece operaciones bilineales $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ y $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)\times\mathcal{E}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$. Por (4.18), hay otra operación bilineal $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Estas operaciones son (separadamente) continuas.

Cabe notar que la fórmula (4.19) puede abreviarse como

$$\langle f * g, h\rangle = \langle f \otimes g, h^\Delta\rangle \quad \text{donde} \quad h^\Delta(x,y) := h(x+y). \tag{4.20}$$

Aquí $\underline{f \otimes g}(x,y) := f(x)g(y)$ es el "producto tensorial" de f y g.

► Es necesario extender la convolución a una operación entre pares de distribuciones. Esta extensión procede por dualidad, en dos etapas: (a) la convolución de distribuciones con funciones de prueba, y (b) la convolución de dos distribuciones, en los casos factibles.

En (4.11), la traslación $\tau_b f$ fue definido por transposición, $\langle \tau_b f, \varphi\rangle := \langle f, \tau_{-b}\varphi\rangle$. De igual manera, se puede definir, en vista de (4.17):

$$\underline{\langle \check{f}, \varphi\rangle} := \langle f, \check{\varphi}\rangle, \qquad \underline{\langle \check{\tau}_b f, \varphi\rangle} := \langle f, \check{\tau}_b \varphi\rangle.$$

Fíjese que $\check{\tau}_b f = \tau_b \check{f}$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, porque

$$\langle \check{\tau}_b f, \varphi\rangle = \langle f, \tau_b \check{\varphi}\rangle = \langle f, (\tau_{-b}\varphi)^\vee\rangle = \langle \check{f}, \tau_{-b}\varphi\rangle = \langle \tau_b \check{f}, \varphi\rangle.$$

Definición 4.27. La **convolución** $f * \varphi$ de $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ es la *función* dada por

$$f * \varphi(x) := \langle f, \check{\tau}_x \varphi\rangle \equiv \langle f(y), \varphi(x-y)\rangle. \tag{4.21}$$

De modo similar, se define $\varphi * f$ por $\varphi * f(x) := \langle \check{\tau}_x f, \varphi\rangle = \langle f, \check{\tau}_x \varphi\rangle = f * \varphi(x)$, así que $\varphi * f = f * \varphi$. (Por ahora se mantendrá la distribución a la izquierda.) ◊

Proposición 4.28. *Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ y si $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, entonces:*

(a) $\tau_z(f * \varphi) = \tau_z f * \varphi = f * \tau_z \varphi$ *para todo* $z \in \mathbb{R}^m$*;*

(b) $f * \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ *con* $\partial^\alpha(f * \varphi) = \partial^\alpha f * \varphi = f * \partial^\alpha \varphi$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{N}^m$*;*

(c) $\operatorname{sop}(f * \varphi) \subseteq (\operatorname{sop} f) + (\operatorname{sop} \varphi)$*;*

(d) $f * (\varphi * \psi) = (f * \varphi) * \psi$.

Demostración. Ad (a): Por cálculo directo:

$$\begin{aligned}
[\tau_z(f * \varphi)](x) &= f * \varphi(x - z) = \langle f, \check{\tau}_{x-z}\varphi\rangle = \langle f, \tau_{x-z}\check{\varphi}\rangle \\
&= \langle f, \tau_{-z}\tau_x\check{\varphi}\rangle = \langle \tau_z f, \check{\tau}_x\varphi\rangle = \tau_z f * \varphi(x) \\
&= \langle f, \tau_x\tau_{-z}\check{\varphi}\rangle = \langle f, \tau_x(\tau_z\varphi)^{\vee}\rangle = \langle f, \check{\tau}_x(\tau_z\varphi)\rangle = f * \tau_z\varphi(x).
\end{aligned}$$

Ad (b): Si $j \in \{1, \dots, m\}$, $y \in \mathbb{R}^m$, la regla de la cadena muestra que

$$\partial_j(\check{\tau}_x\varphi)(y) = \partial_j\big(y \mapsto \varphi(x - y)\big) = -\partial_j\varphi(x - y) = -\check{\tau}_x(\partial_j\varphi)(y)$$

así que

$$f * \partial_j\varphi(x) = \langle f, \check{\tau}_x(\partial_j\varphi)\rangle = -\langle f, \partial_j(\check{\tau}_x\varphi)\rangle = \langle \partial_j f, \check{\tau}_x\varphi\rangle = \partial_j f * \varphi(x).$$

Si $\{e_1, \dots, e_m\}$ es la base estándar para $\mathbb{R}^m$ y $h \neq 0$, entonces

$$\frac{f * \varphi(x + he_j) - f * \varphi(x)}{h} = \frac{\langle f, \check{\tau}_{x+he_j}\varphi - \check{\tau}_x\varphi\rangle}{h} = \left\langle f, \frac{\check{\tau}_{x+he_j}\varphi - \check{\tau}_x\varphi}{h}\right\rangle. \tag{4.22}$$

La función de prueba al lado derecho es $y \mapsto (\varphi(x + he_j - y) - \varphi(x - y))/h$. Cuando $h \to 0$, esta función converge a $\check{\tau}_x(\partial_j\varphi)\colon y \mapsto \partial_j\varphi(x - y)$, uniformemente sobre $\{x\} - \operatorname{sop}\varphi$. Por tanto, $(\check{\tau}_{x+he_j}\varphi - \check{\tau}_x\varphi)/h \to \check{\tau}_x(\partial_j\varphi)$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ cuando $h \to 0$. La continuidad de f sobre $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ implica que la fracción (4.22) tiende a $\langle f, \check{\tau}_x(\partial_j\varphi)\rangle = f * \partial_j\varphi(x)$ cuando $h \to 0$.

Un argumento similar establece que la función $f * \psi$ es continua, para cada $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Se concluye que la función $f * \varphi$ es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^m$, con $\partial_j(f * \varphi) = f * \partial_j\varphi$ para cada j. Por inducción sobre el orden de derivación, se ve que $f * \varphi$ es de clase C^∞ y se obtiene las fórmulas $\partial^\alpha(f * \varphi) = \partial^\alpha f * \varphi = f * \partial^\alpha\varphi$.

Ad (c): La suma puntual $(\operatorname{sop} f) + (\operatorname{sop}\varphi)$ es cerrado en $\mathbb{R}^m$, por el Lema 4.25. Los argumentos que comprueban la relación (4.18) también son aplicables en este caso.

Ad (d): El Lema 4.25 muestra que $K := \operatorname{sop}\varphi + \operatorname{sop}\psi$ es compacto. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, la suma de Riemann

$$S_\varepsilon(\varphi, \psi)(y) := \sum_{u\in\mathbb{Z}^m} \varepsilon^m\varphi(y - \varepsilon u)\psi(\varepsilon u)$$

es *finita*, porque se anula para $y \notin K$. Luego $S_\varepsilon(\varphi, \psi)$ converge, uniformemente sobre compactos, a la función $\varphi * \psi$ cuando $\varepsilon \to 0$. De hecho, como cada $\partial^\alpha(\varphi * \psi) = \partial^\alpha\varphi * \psi$, estas sumas de Riemann convergen a $\varphi * \psi$ en la topología de $\mathcal{D}_K$. Entonces

$$\begin{aligned}
[f * (\varphi * \psi)](x) &= \langle f, \check{\tau}_x(\varphi * \psi)\rangle = \lim_{\varepsilon\to0}\langle f, \check{\tau}_x S_\varepsilon(\varphi, \psi)\rangle = \lim_{\varepsilon\to0}\left\langle f, \sum_{u\in\mathbb{Z}^m} \varepsilon^m\check{\tau}_{x-\varepsilon u}\varphi\,\psi(\varepsilon u)\right\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon\to0}\sum_{u\in\mathbb{Z}^m} \varepsilon^m f * \varphi(x - \varepsilon u)\psi(\varepsilon u) = \int f * \varphi(x - y)\,\psi(y)\,d^my = [(f * \varphi) * \psi](x). \qquad \square
\end{aligned}$$

Corolario 4.29. *Si $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, entonces $g * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.*

Demostración. Por la Proposición 4.28, partes (b) y (c), se sabe que $g * \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$, con soporte compacto $\operatorname{sop}(g * \varphi) \subseteq \operatorname{sop} g + \operatorname{sop} \varphi$, por el Lema 4.25. ◻

La fórmula (4.21) también sirve para definir la convolución de una distribución de soporte compacto con una función suave cualquiera. Si $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ y $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$, defínase

$$g * u(x) := \langle g, \check{\tau}_x u\rangle \equiv \langle g(y), u(x-y)\rangle \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

La demostración de la Proposición 4.28, *mutatis mutandis*, muestra que $g * u$ es un función suave con $\operatorname{sop}(g*u) \subseteq \operatorname{sop} g + \operatorname{sop} u$. Además, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, entonces $g*(u*\varphi) = (g*u)*\varphi$.

► La convolvabilidad de una distribución y una función suave, si al menos uno de los soportes es compacto, permite *aproximar cualquier distribución por funciones suaves*.

Lema 4.30. *Tómese $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int \psi(x)\,d^m x = 1$. Para $0 < \varepsilon \leqslant 1$, defínase*

$$\underline{\psi_\varepsilon(x)} := \varepsilon^{-m}\psi(x/\varepsilon).$$

Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, entonces $f * \psi_\varepsilon \to f$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ cuando $\varepsilon \downarrow 0$.

Demostración. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, fíjese que $f*\varphi(0) = \langle f, \check{\varphi}\rangle$ por la Definición 4.27. Al cambiar $\varphi \leftrightarrow \check{\varphi}$, se obtiene la fórmula útil $\langle f, \varphi\rangle = f * \check{\varphi}(0)$. Entonces

$$\langle f * \psi_\varepsilon, \check{\varphi}\rangle = [f * \psi_\varepsilon * \varphi](0) = \langle f, (\psi_\varepsilon * \varphi)\check{}\,\rangle.$$

Basta entonces comprobar que $\psi_\varepsilon * \varphi \to \varphi$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ cuando $\varepsilon \downarrow 0$, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.

Si $R > 0$ es tal que $\operatorname{sop}\psi \subseteq \overline{B}(0;R)$, entonces $\operatorname{sop}\psi_\varepsilon \subseteq \overline{B}(0;\varepsilon R)$. Luego, si $x \in \mathbb{R}^m$,

$$|\psi_\varepsilon * \varphi(x) - \varphi(x)| = \left|\int \psi_\varepsilon(y)\,(\varphi(x-y) - \varphi(x))\,d^m y\right| \leqslant \|\psi\|_1 \sup_{\|y\|\leqslant\varepsilon R} |\varphi(x-y) - \varphi(x)|$$

Como φ es uniformemente continua sobre $\mathbb{R}^m$, se deduce que $\psi_\varepsilon * \varphi \to \varphi$ uniformemente. Al sustituir $\varphi \mapsto \partial^\alpha\varphi$, se ve que $\partial^\alpha(\psi_\varepsilon * \varphi) = \psi_\varepsilon * \partial^\alpha\varphi \to \partial^\alpha\varphi$ uniformemente. Por lo tanto, $\psi_\varepsilon * \varphi \to \varphi$ en $\mathcal{D}_K$ donde $K := \operatorname{sop}\varphi + \overline{B}(0;R)$. Esto conlleva $\psi_\varepsilon * \varphi \to \varphi$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. ◻

Corolario 4.31. $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ *es denso en* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. ⊟

Si $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un abierto cualquiera, una modificación del resultado anterior demuestra que *cada $f \in \mathcal{D}'(U)$ es el límite de una sucesión en $\mathcal{D}(U)$*. Por ser U σ-compacto, hay una sucesión creciente de funciones no negativas $\chi_k \in \mathcal{D}(U)$, tales que $\chi_k f \to f$ en $\mathcal{D}'(U)$, por la demostración de la Proposición 4.21. También hay números positivos $\varepsilon_k \to 0$ tales que $(\operatorname{sop}\chi_k + \operatorname{sop}\psi_{\varepsilon_k}) \subset U$. La distribución de soporte compacto $\chi_k f$ puede tomarse como elemento de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$. Entonces $\varphi_k := \chi_k f * \psi_{\varepsilon_k}$ queda en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, por el Corolario 4.29, con $\operatorname{sop} \varphi_k \subset U$ para k grande. No es difícil verificar que $\varphi_k \to f$ en $\mathcal{D}'(U)$ cuando $k \to \infty$.

En síntesis, hay una cadena de inclusiones:

$$\mathcal{D}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}'(U) \hookrightarrow \mathcal{D}'(U),$$

donde cada flecha es una aplicación lineal continua e inyectiva con imagen densa.

► La Proposición 4.28(a) dice que la aplicación lineal $\varphi \mapsto f * \varphi$ conmuta con todas las traslaciones por vectores en $\mathbb{R}^m$. El siguiente resultado importante dice que cualquier operador lineal y continua que conmuta con traslaciones es la convolución por alguna distribución.

Proposición 4.32. (a) *Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, entonces $\varphi \mapsto f*\varphi$ es una aplicación lineal continua de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$.*

(b) *Si $L \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \mathcal{E}(\mathbb{R}^m))$ conmuta con las traslaciones: $\tau_z L = L\tau_z$ para todo $z \in \mathbb{R}^m$, entonces hay una única $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ tal que $L\varphi = f * \varphi$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.*

Demostración. Ad (a): La linealidad de $\varphi \mapsto f * \varphi$ es evidente. Para la continuidad, se debe mostrar que su restricción a cualquier $\mathcal{D}_K$ – una aplicación lineal entre los espacios de Fréchet $\mathcal{D}_K$ y $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ – es continua. A partir del Teorema 2.30, basta verificar que dicha aplicación tiene grafo cerrado.[12]

Supóngase, entonces, que $\varphi_k \to \varphi$ en $\mathcal{D}_K$ y que $f * \varphi_k \to u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$. Si $x \in \mathbb{R}^m$, entonces $\check{\tau}_x \varphi_k \to \check{\tau}_x \varphi$ en $\mathcal{D}_{\{x\}-K}$, así que $\check{\tau}_x \varphi_k \to \check{\tau}_x \varphi$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Por lo tanto, vale

$$u(x) = \lim_{k\to\infty} f * \varphi_k(x) = \lim_{k\to\infty} \langle f, \check{\tau}_x \varphi_k \rangle = \langle f, \lim_{k\to\infty} \check{\tau}_x \varphi_k \rangle = \langle f, \check{\tau}_x \varphi \rangle = f * \varphi(x).$$

Entonces $u = f * \varphi$. Se concluye que $\mathcal{D}_K \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^m) : \varphi \mapsto f * \varphi$ tiene grafo cerrado.

Ad (b): Defínase $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ por $\langle f, \varphi \rangle := L\check{\varphi}(0)$. El lado derecho es la composición de tres operaciones lineales continuas: $\varphi \mapsto \check{\varphi}$ en $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m))$, L mismo, y $u \mapsto u(0)$ en $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$; por lo tanto, define una distribución f.

Como L conmuta con traslaciones, cada $x \in \mathbb{R}^m$ satisface

$$L\varphi(x) = \tau_{-x}(L\varphi)(0) = L(\tau_{-x}\varphi)(0) = \langle f, \tau_x \check{\varphi} \rangle = \langle f, \check{\tau}_x \varphi \rangle = f * \varphi(x).$$

Luego $L\varphi = f * \varphi$ en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$. La unicidad de f está clara: si $L\varphi = g * \varphi$ para todo φ, entonces $(f - g) * \varphi = 0$ para todo φ. Al evaluar en 0, se obtiene $\langle f - g, \varphi \rangle = [(f - g) * \check{\varphi}](0) = 0$ para todo φ, así que $f - g = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. □

[12] El teorema del grafo cerrado es válido para aplicaciones lineales entre espacios de Fréchet, por una modificación sencilla de la demostración del Teorema 2.30.

► *La convolución de dos distribuciones* requiere alguna condición sobre sus soportes. (Si una de ellas tiene soporte compacto, la convolución debe existir.) Considérese primero el caso de tres funciones suaves $u, v, w \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$, al menos dos de ellas con soportes compactos. La fórmula (4.19) implica que

$$\begin{aligned} \langle u * v, w \rangle &= \iint u(x)\, v(y)\, w(x+y)\, d^m x\, d^m y \\ &= \iint u(s+t)\, v(-s)\, w(t)\, d^m s\, d^m t = \langle u, \check{v} * w \rangle. \end{aligned}$$

Informalmente: el operador $u \mapsto u * v$ es la transpuesta del operador $w \mapsto \check{v} * w$.

Definición 4.33. Sean $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ y $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ dos distribuciones, donde g tiene soporte compacto. Las convoluciones $g * f$ y $f * g$ son las distribuciones definidas por[13]

$$\begin{aligned} \langle g * f, \varphi \rangle &:= \langle g, \check{f} * \varphi \rangle, \\ \langle f * g, \varphi \rangle &:= \langle f, \check{g} * \varphi \rangle, \end{aligned} \qquad \text{para} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m). \tag{4.23}$$

Como $\check{f} * \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ y $\check{g} * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, los lados derechos de estas asignaciones están bien definidos. La Proposición 4.32 dice que la aplicación lineal $\varphi \mapsto \check{f} * \varphi$ es continua; y su demostración también muestra que $\varphi \mapsto \check{g} * \varphi$, para $\varphi \in \mathcal{D}_K$, tiene grafo cerrado como aplicación lineal de $\mathcal{D}_K$ en $\mathcal{D}_{K-(\operatorname{sop} g)}$. En consecuencia, $\varphi \mapsto \check{g} * \varphi$ queda en $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbb{R}^m))$. Los dos lados derechos de (4.23) entonces definen distribuciones sobre $\mathbb{R}^m$. ◊

El caso especial $g = \delta$ merece especial atención. Para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, las igualdades $\delta * \varphi(x) = \check{\tau}_x \varphi(0) = \varphi(x)$ implican $\delta * \varphi = \varphi$. Además, si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \delta * f, \varphi \rangle &= \langle \delta, \check{f} * \varphi \rangle = \check{f} * \varphi(0) = \langle \check{f}, \check{\varphi} \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \\ \langle f * \delta, \varphi \rangle &= \langle f, \check{\delta} * \varphi \rangle = \langle f, \delta * \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \end{aligned} \tag{4.24}$$

así que $\underline{\delta * f = f * \delta = f}$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. En otras palabras, *la delta de Dirac sirve como elemento identidad* para la operación de convolución.

Proposición 4.34. *Sean $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ y $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$. Entonces:*

(a) *las dos distribuciones definidos por* (4.23) *coinciden: $g * f = f * g$;*

(b) $\operatorname{sop}(g * f) \subseteq \operatorname{sop} g + \operatorname{sop} f$*;*

(c) *si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, entonces* $(g * f) * \varphi = g * (f * \varphi)$*;*

[13] Hay una definición alternativa de $g * f$, basada en la fórmula (4.20), al colocar $\langle g * f, \varphi \rangle := \langle g \otimes f, \varphi^\Delta \rangle$. Sin embargo, si $0 \neq \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, entonces $\varphi^\Delta \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{2m})$ pero el soporte de φ^Δ no es compacto. Hay algunas maneras de superar esta dificultad: véase el libro de Horváth, *op. cit.*, sección 4.9.

(d) *si* $h \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$*, entonces* $h * (g * f) = (h * g) * f$*;*

(e) $\partial^\alpha f = \partial^\alpha \delta * f$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{N}^m$*;*

(f) $\partial^\alpha (g * f) = \partial^\alpha g * f = g * \partial^\alpha f$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{N}^m$.

Demostración. Ad (a): La demostración del Lema 4.30 implica que $\varphi * \psi_\varepsilon \to \varphi$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$; luego, las distribuciones de la forma $\varphi * \psi$ generan un *subespacio denso* de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Para comprobar que $g * f = f * g$, basta mostrar que $\langle g * f, \varphi * \psi \rangle = \langle f * g, \varphi * \psi \rangle$ para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Esta igualdad sigue del cálculo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle g * f, \varphi * \psi \rangle &= \langle g, \check{f} * (\varphi * \psi) \rangle = \langle g, (\check{f} * \varphi) * \psi \rangle = \langle g, \psi * (\check{f} * \varphi) \rangle = \langle g * \check{\psi}, \check{f} * \varphi \rangle \\ &= \langle \check{f} * \varphi, g * \check{\psi} \rangle = \langle \check{f}, \check{\varphi} * (g * \check{\psi}) \rangle = \langle f, \varphi * (\check{g} * \psi) \rangle \\ &= \langle f, (\check{g} * \psi) * \varphi \rangle = \langle f, \check{g} * (\psi * \varphi) \rangle = \langle f, \check{g} * (\varphi * \psi) \rangle = \langle f * g, \varphi * \psi \rangle. \end{aligned}$$

Ad (b): Fíjese que $(\operatorname{sop} g + \operatorname{sop} f)$ es cerrado en $\mathbb{R}^m$, por el Lema 4.25. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es tal que $\operatorname{sop} \varphi \cap (\operatorname{sop} g + \operatorname{sop} f) = \emptyset$, entonces

$$\operatorname{sop} \ f \cap (\operatorname{sop} \varphi - \operatorname{sop} g) = \operatorname{sop} f \cap (\operatorname{sop} \varphi + \operatorname{sop} \check{g}) = \emptyset$$

y por ende $\operatorname{sop} f \cap \operatorname{sop}(\check{g} * \varphi) = \emptyset$, lo cual implica que $\langle g * f, \varphi \rangle = \langle f, \check{g} * \varphi \rangle = 0$. Esto a su vez implica que $\operatorname{sop} \varphi \cap \operatorname{sop}(g * f) = \emptyset$.

Para cualquier abierto $V \subset \mathbb{R}^m$, hay $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ con $\operatorname{sop} \varphi \subset V$. El argumento anterior implica que si $V \cap (\operatorname{sop} g + \operatorname{sop} f) = \emptyset$, entonces $V \cap \operatorname{sop}(g * f) = \emptyset$. Se concluye que $\operatorname{sop}(g * f) \subseteq (\operatorname{sop} g + \operatorname{sop} f)$.

Ad (c, d): Si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, la Proposición 4.28(d) implica

$$\begin{aligned} \langle (g * f) * \varphi, \psi \rangle &= \langle g * f, \check{\varphi} * \psi) \rangle = \langle g, \check{f} * (\check{\varphi} * \psi) \rangle \\ &= \langle g, (\check{f} * \check{\varphi}) * \psi \rangle = \langle g * (f * \varphi), \psi \rangle; \end{aligned}$$

luego, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$,

$$\begin{aligned} \langle h * (g * f), \varphi \rangle &= \langle h, (\check{g} * \check{f}) * \varphi \rangle = \langle h, \check{g} * (\check{f} * \varphi) \rangle \\ &= \langle h * g, \check{f} * \varphi \rangle = \langle (h * g) * f, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Ad (e): Para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, las igualdades $\delta * \psi = \psi$ para $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$; la Proposición 4.28(b) y la parte (a) implican

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \delta * \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \delta * \varphi \rangle \\ &= \langle f, (\partial^\alpha \delta)^{\check{}} * \varphi \rangle = \langle f * \partial^\alpha \delta, \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha \delta * f, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Ad (f): Al combinar las partes (a), (d) y (e), resulta que

$$\begin{aligned} \partial^\alpha (g * f) &= \partial^\alpha \delta * (g * f) = (\partial^\alpha \delta * g) * f = \partial^\alpha g * f \\ &= \partial^\alpha \delta * (f * g) = (\partial^\alpha \delta * f) * g = \partial^\alpha f * g = g * \partial^\alpha f. \end{aligned}$$ □

Corolario 4.35. *El espacio de Fréchet $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ es un álgebra conmutativa y asociativa bajo convolución.* ⊟

La convolución sobre $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ es una aplicación bilineal, $(g, h) \mapsto g*h$. La demostración de la Proposición 4.32 puede adaptarse para comprobar que $g \mapsto g * h$ y $h \mapsto g * h$ son continuas; es decir, la convolución es *separadamente continua*. Por una extensión de la Proposición 2.23 a los espacios de Fréchet, esta convolución es *conjuntamente continua*. Entonces $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ es un *álgebra topológica* bajo convolucíon.[14]

4.3 Distribuciones temperadas y transformadas de Fourier

Los elementos del espacio de Hilbert $L^2[-\pi, \pi]$ pueden identificarse con *funciones periódicas* sobre $\mathbb{R}$ de período 2π. Posee una base ortonormal de funciones trigonométricas $u_n(x) := (2\pi)^{-1/2}\, e^{inx}$, para $n \in \mathbb{Z}$; véase el Ejemplo 1.39. Al poner $a_n := \langle u_n \mid f \rangle$, el desarrollo $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, u_n(x)$, convergente en la norma $\|\cdot\|_2$ del espacio de Hilbert, es la **serie de Fourier** de f. En algunos casos, pero no todos, esta serie converge puntualmente para $x \in \mathbb{R}$: se dice que esta serie convergente representa la función dada.

Para representar una *función no periódica* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, se debe considerar una superposición de las funciones $u_t(x) := (2\pi)^{-1/2}\, e^{itx}$, cuyo parámetro $t \in \mathbb{R}$ no es necesariamente entero. En este caso, hay que representar f por una integral: $f(x) = \int_{\mathbb{R}} a(t)\, u_t(x)\, dt$, si la integral converge a f puntualmente.

Para investigar estas *integrales de Fourier*, conviene ampliar el espacio $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ de funciones de prueba al **espacio de Schwartz** $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de *funciones declinantes*, introducido en el Ejemplo 1.16.

Lema 4.36. *Las inclusiones $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ son continuas con imágenes densas.*

Demostración. Las seminormas (1.10) determinan la topología del espacio de Fréchet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$:

$$s_n(\varphi) := \sup\bigl\{ \bigl|(1 + \|x\|^2)^n \partial^\alpha \varphi(x)\bigr| : |\alpha| \leqslant n,\ x \in \mathbb{R}^m \bigr\}. \tag{1.10}$$

Si $\varphi \in \mathcal{D}_K$ con $K \Subset \mathbb{R}^m$, se ve que $s_n(\varphi) \leqslant C\, p_{K,n}(\varphi)$ donde $C := \sup\{ (1 + \|x\|^2)^n : x \in K \}$. Esto dice que $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ con una inclusión continua. Luego $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ y la inclusión $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ es continua porque su restricción a cada $\mathcal{D}_K$ es continua.

[14] La aplicación bilineal $(f, g) \mapsto f * g : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ *no es conjuntamente continua*, aun cuando se usa la topología fuerte (de convergencia uniforme sobre partes acotadas) sobre $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ en ambos lados. Para una descripción detallada de la continuidad de la convolución y la multiplicación entre diversos espacios de funciones de prueba y distribuciones, véase: Julian Larcher, "Multiplications and convolutions in L. Schwartz' spaces of test functions and distributions and their continuity", Analysis (2013), 319–332.

Tómese $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ tal que $\psi(x) = 1$ para $\|x\| \leqslant 1$. Dada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, el producto $\varphi_\varepsilon(x) := \varphi(x)\,\psi(\varepsilon x)$ queda en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. La regla de Leibniz en varias variables muestra que

$$\partial^\alpha(\varphi - \varphi_\varepsilon)(x) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \varepsilon^{|\beta|}\, \partial^{\alpha-\beta}\varphi(x)\, \partial^\beta(1 - \psi(\varepsilon x)),$$

donde $\partial^\beta(1 - \psi(\varepsilon x)) = 0$ para todo β si $\|x\| \leqslant 1/\varepsilon$. De ahí se obtiene $s_n(\varphi - \varphi_\varepsilon) \leqslant C_{n,\varepsilon} s_n(\varphi)$, donde $C_{n,\varepsilon} \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$. Esto implica que $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ en la topología de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Se deduce que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ es denso en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

Está claro que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$, por la definición del espacio de Schwartz. Un argumento similar al anterior muestra que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ es denso en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$; luego, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ también es denso en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$. Para la continuidad de la inclusión $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$, basta notar que si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ entonces $p_{K,n}(\varphi) \leqslant s_n(\varphi)$ para cada $K \Subset \mathbb{R}^m$ y $n \in \mathbb{N}$. □

Definición 4.37. Al transponer las inclusiones del Lema 4.36, se obtiene un par de inyecciones continuas entre los espacios duales:

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m),$$

donde se ha escrito $\underline{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)} \equiv \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)^*$. En particular, cualquier forma lineal continua sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ es una distribución sobre $\mathbb{R}^m$, aunque no toda distribución es de este tipo. Los elementos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ se llaman **distribuciones temperadas**.

Una distribución $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ es temperada si y solo si posee una extensión[15] a una forma lineal continua sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. ◊

Ejemplo 4.38. Un ejemplo de una función de Schwartz cuyo soporte no es compacto es la **función gaussiana**:

$$\underline{\varphi_0(x)} := \exp(-\tfrac{1}{2}\|x\|^2) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{4.25}$$

Sus derivadas parciales están dadas por $\partial^\alpha \varphi_0(x) = p_\alpha(x)\,\varphi_0(x)$, donde cada p_α es un *polinomio* de grado $\leqslant |\alpha|$. Además, cada función $(1 + \|x\|^2)^n p_\alpha(x)\,\varphi_0(x)$ es acotada y rápidamente decreciente, así que φ_0 es una función declinante. Nótese que $\operatorname{sop}\varphi_0$ es todo $\mathbb{R}^m$. ◊

Ejemplo 4.39. La función suave $f(x) := \exp(+\frac{1}{2}\|x\|^2)$ es localmente integrable; como tal, define una distribución regular sobre $\mathbb{R}^m$. Sin embargo, la integral $\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\varphi_0(x)\,d^m x$ diverge, así que esta distribución *no es* temperada. ◊

[15]El teorema de Hahn y Banach no garantiza la existencia de tal extensión, porque la topología de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ es más fuerte que su topología relativa como subespacio de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

Definición 4.40. Una función $u\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ tiene **crecimiento lento** (en el infinito) si hay un polinomio p tal que $|u(x)| \leqslant |p(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Sea $\underline{\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^m)}$ el espacio vectorial de funciones suaves f cuyas derivadas $\partial^\alpha u$ son todas de crecimiento lento. Cualquier polinomio queda en $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^m)$ y se ve que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^m)$.

Si $u \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^m)$ y $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, su *producto* cumple $u\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, por la regla de Leibniz: $\partial^\alpha(u\varphi) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta u \, \partial^{\alpha-\beta}\varphi$ implica que $s_n(u\varphi) < \infty$ para todo n.

La función exponencial $e_t(x) := e^{it\cdot x}$ con exponente lineal[16] queda en $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^m)$. ◊

Definición 4.41. La **transformada de Fourier** de $h \in L^1(\mathbb{R}^m)$ es esta función $\hat{h}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$:

$$\underline{\hat{h}(t)} := \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-it\cdot x}\, h(x)\, d^m x \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}^m. \tag{4.26}$$

También se escribe $\underline{\mathcal{F}h}(t) \equiv \hat{h}(t)$. El operador $\mathcal{F}$ se llama la **transformación de Fourier**.[17] ◊

Lema 4.42 (Riemann y Lebesgue)**.** *Si $h \in L^1(\mathbb{R}^m)$, entonces $\hat{h} \in C_0(\mathbb{R}^m)$. La aplicación lineal $\mathcal{F}\colon h \mapsto \hat{h}$ de $L^1(\mathbb{R}^m)$ en $C_0(\mathbb{R}^m)$ es continua.*

Demostración. Si $t_k \to t$ en $\mathbb{R}^m$, entonces $\hat{h}(t_k) \to \hat{h}(t)$ por convergencia dominada, ya que $|e^{it_k\cdot x}h(x)| = |h(x)|$ para cada k. Luego $\hat{h}$ es una función continua sobre $\mathbb{R}^m$. Esta función continua es acotada, porque

$$|\hat{h}(t)| \leqslant (2\pi)^{-m/2} \int |e^{-it\cdot x}h(x)|\, d^m x = (2\pi)^{-m/2}\|h\|_1 \,.$$

Como $e^{\pm\pi i} = -1$, al poner $b = b(t) := \pi t/\|t\|^2$, $b(0) := 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{h}(t) &= -\frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int e^{-it\cdot x} e^{-\pi i} h(x)\, d^m x = -\frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int e^{-it\cdot(x+b)} h(x)\, d^m x \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int e^{-it\cdot x} h(x-b)\, d^m x = -(\tau_b h)\hat{}\,(t). \end{aligned}$$

Luego $|\hat{h}(t)| \leqslant \frac{1}{2}(2\pi)^{-m/2}\|h - \tau_b h\|_1$. Fíjese que $b(t) \to 0$ en $\mathbb{R}^m$ cuando $\|t\| \to \infty$. Se deduce la condición $|\hat{h}(t)| \to 0$ de la convergencia $\tau_b h \to h$ en $L^1(\mathbb{R}^m)$ cuando $b \to 0$. Basta comprobar esa convergencia para h en el subespacio denso $\mathcal{K}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, en donde sigue por la continuidad uniforme de la función h.

En resumen: $h \in L^1(\mathbb{R}^m)$ implica que $\hat{h} \in C_0(\mathbb{R}^m)$, con $\|\hat{h}\|_\infty \leqslant (2\pi)^{-m/2}\|h\|_1$. Esta última desigualdad establece la continuidad de la transformación $h \mapsto \hat{h}$. □

[16] Aquí $\underline{t \cdot x} \equiv t_1x_1 + \cdots + t_mx_m$ denota el producto escalar real (producto punto) en $\mathbb{R}^m$.

[17] No hay acuerdo universal sobre la normalización de esta integral. Hay tres convenios incompatibles de uso general. El *convenio clásico* omite el factor $(2\pi)^{-m/2}$ delante de la integral, pero entonces la fórmula inversa tiene un factor de $(2\pi)^{-m}$. El *convenio francés* omite el factor de normalización, pero la función exponencial en la integral es $e^{2\pi i t\cdot x}$. El *convenio moderno*, adoptado en (4.26), usa la medida de Lebesgue normalizada $(2\pi)^{-m/2}\, d^m x$ en todas las integrales sobre $\mathbb{R}^m$. En fórmulas que involucran $\hat{h}$, aparecen ciertas potencias de 2π que difieren de un convenio a otro.

Notación. Al escribir $e_t(x) \equiv e^{it\cdot x}$ para $t, x \in \mathbb{R}^m$, la transformada de Fourier (4.26) toma la forma $\hat{h}(t) := (2\pi)^{-m/2}\langle e_{-t}, h\rangle$ donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota la dualidad entre $L^1(\mathbb{R}^m)$ y $L^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Ejemplo 4.43. La función gaussiana φ_0 de (4.25) coincide con su transformada de Fourier.

En efecto, en el caso $m = 1$, se obtiene

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\,\hat{\varphi}_0(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\,e^{-x^2/2}\,dx = e^{-t^2/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+it)^2/2}\,dx = e^{-t^2/2}\int_{\Im z=t} e^{-z^2/2}\,dz \\ &= e^{-t^2/2}\int_{\Im z=0} e^{-z^2/2}\,dz = e^{-t^2/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}\,\varphi_0(t).\end{aligned}$$

Las integrales tercera y cuarta coinciden, porque su diferencia es el límite, cuando $R \to \infty$, de unas integrales de contorno de esta función sobre un contorno rectangular con vértices $\pm R$ y $(\pm R + it)$; pero estas integrales se anulan por el teorema de Cauchy, ya que $z \mapsto e^{-z^2/2}$ es una función holomorfa entera.

En el caso $m > 1$, la integral (4.26) para $\varphi_0(x) = \prod_{j=1}^m e^{x_j^2/2}$ factoriza en un producto de m integrales unidimensionales. En resumen: $\mathcal{F}\varphi_0 = \varphi_0$ en cualquier dimensión. $\Diamond$

Notación. Si $\lambda > 0$, la **dilatación** de una función $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ por el *factor de escala* λ se denota por $\rho_\lambda f(x) := f(\lambda x)$.

Lema 4.44. *Si $g, h \in L^1(\mathbb{R}^m)$, $s \in \mathbb{R}^m$ y $\lambda > 0$, entonces:*[18]

(a) $\mathcal{F}(e_s h) = \tau_s \hat{h}$ *y* $\mathcal{F}(\tau_s h) = e_{-s}\hat{h}$;

(b) $\mathcal{F}(\rho_\lambda h) = \lambda^{-m}\rho_{1/\lambda}\hat{h}$;

(c) $\mathcal{F}(g * h) = (2\pi)^{m/2}\,\hat{g}\,\hat{h} \in C_0(\mathbb{R}^m)$.

Demostración. Ad (a): $\mathcal{F}(e_s h)(t) = (2\pi)^{-m/2}\int e^{-i(t-s)\cdot x}h(x)\,d^m x = \hat{h}(t-s)$. Además,

$$\mathcal{F}(\tau_s h)(t) = (2\pi)^{-m/2}\int e^{-it\cdot x}h(x-s)\,d^m x = (2\pi)^{-m/2}\int e^{-it\cdot(y+s)}h(y)\,d^m y = e^{-is\cdot t}\hat{h}(t).$$

Ad (b): Con el cambio de variable $y := \lambda x$, se obtiene

$$\mathcal{F}(\rho_\lambda h)(t) = (2\pi)^{-m/2}\int e^{-it\cdot x}h(\lambda x)\,d^m x = \lambda^{-m}\,(2\pi)^{-m/2}\int e^{-it\cdot y/\lambda}h(y)\,d^m y = \lambda^{-m}\,\hat{h}(t/\lambda).$$

Ad (c): De la Definición 4.24, se ve que $g * h \in L^1(\mathbb{R}^m)$, con $\|g * h\|_1 \leqslant \|g\|_1\|h\|_1$. El teorema de Fubini entonces implica que

$$\begin{aligned}(2\pi)^{m/2}\mathcal{F}(g * h)(t) &= \int e^{-it\cdot x}(g * h)(x)\,d^m x = \iint e^{-it\cdot(x+y)}g(x)\,h(y)\,d^m x\,d^m y \\ &= \int e^{-it\cdot x}g(x)\,d^m x \int e^{-it\cdot y}h(y)\,d^m y = (2\pi)^m\hat{g}(t)\,\hat{h}(t).\end{aligned}$$

$\square$

[18] Bajo el convenio clásico o el convenio francés, la constante en la parte (c) no es $(2\pi)^{m/2}$ sino 1, así que $\mathcal{F}$ es un *homomorfismo* que convierte convolución en multiplicación.

Lema 4.45. *Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, entonces $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Para $j = 1, \dots, m$ y todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, valen:*

$$\mathcal{F}(\partial_j \varphi) = i\, t_j \hat{\varphi}, \qquad \mathcal{F}(x_j \varphi) = i\, \partial_j \hat{\varphi}.$$

La transformación de Fourier $\mathcal{F}$ es un operador lineal y continuo sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

Demostración. Una integración por partes da la primera fórmula:

$$\mathcal{F}(\partial_j \varphi) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{-it\cdot x} \partial_j \varphi(x)\, d^m x = (2\pi)^{-m/2} \int i t_j e^{-it\cdot x} \varphi(x)\, d^m x = i\, t_j \hat{\varphi}(t),$$

porque $e^{-it\cdot x}\varphi(x) \to 0$ para cada t cuando $|x_j| \to \infty$. La segunda fórmula se obtiene por derivación bajo el signo integral:

$$i\, \partial_j \hat{\varphi}(t) = (2\pi)^{-m/2} \frac{\partial}{\partial t_j} \int i\, e^{-it\cdot x} \varphi(x)\, d^m x = (2\pi)^{-m/2} \int e^{-it\cdot x} x_j\, \varphi(x)\, d^m x.$$

Al combinar las dos fórmulas, se obtiene, para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^m$:

$$t^\beta\, \partial^\alpha \hat{\varphi} = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \mathcal{F}(\partial^\beta (x^\alpha \varphi)) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} \mathcal{F}((\partial^{\beta-\gamma} x^\alpha)\, (\partial^\gamma \varphi)). \tag{4.27}$$

Por el Lema 4.42, el lado derecho es una función acotada sobre $\mathbb{R}^m$ para cada α y β. Por lo tanto, $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ también.

La topología de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ está determinada por la familia numerable de seminormas

$$q_{k,n}(\varphi) := \max_{|\beta|\leqslant k} \max_{|\alpha|\leqslant n} \sup_{x\in\mathbb{R}^m} |x^\beta\, \partial^\alpha \varphi(x)|.$$

El cálculo (4.27) y la desigualdad $\|\hat{h}\|_\infty \leqslant (2\pi)^{m/2} \|h\|_1$ muestran que existe $C_{k,n} > 0$ tal que $q_{k,n}(\mathcal{F}\varphi) \equiv q_{k,n}(\hat{\varphi}) \leqslant C_{k,n}\, q_{n,k}(\varphi)$. Esto establece la continuidad de $\mathcal{F} \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. ☐

► El **teorema de inversión** del análisis de Fourier (a continuación) es válido cuando tanto h como $\hat{h}$ son elementos de $L^1(\mathbb{R}^m)$ y permite *reconstruir* la función original h a partir de su transformada $\hat{h}$. Sin embargo, no es fácil caracterizar la preimagen de $L^1(\mathbb{R}^m)$ bajo $h \mapsto \hat{h}$. En vista del Lema 4.45, es preferible empezar con el caso $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, garantizando la convergencia de todas las integrales en la demostración.

Proposición 4.46. *Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, entonces $\mathcal{F}(\mathcal{F}\varphi) = \check{\varphi}$. En otras palabras:*

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{+it\cdot x}\, \hat{\varphi}(t)\, d^m t \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{4.28}$$

En consecuencia, $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$ es biyectiva, con $\mathcal{F}^4 = 1$.

Demostración. Si $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, el teorema de Fubini muestra que

$$\begin{aligned}\int \psi(t)\hat{\varphi}(t)\,d^m t &= (2\pi)^{-m/2}\int e^{-it\cdot s}\psi(t)\varphi(s)\,d^m s\,d^m t \\ &= (2\pi)^{-m/2}\int e^{-it\cdot s}\psi(t)\varphi(s)\,d^m t\,d^m s = \int \hat{\psi}(s)\varphi(s)\,d^m s. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Si $\lambda > 0$, se puede sustituir $\psi \mapsto \rho_\lambda\psi$ y $\hat{\psi} \mapsto \lambda^{-m}\rho_{1/\lambda}\hat{\psi}$ en esta fórmula, en vista del Lema 4.44(b). De ahí se obtiene

$$\int \psi(\lambda t)\,\hat{\varphi}(t)\,d^m t = \int \lambda^{-m}\hat{\psi}(s/\lambda)\,\varphi(s)\,d^m s = \int \hat{\psi}(x)\,\varphi(\lambda x)\,d^m x.$$

La segunda igualdad viene del cambio de variable $s = \lambda x$. Por convergencia dominada, las integrales primera y tercera tienden, cuando $\lambda \to 0$, al resultado:

$$\psi(0)\int \hat{\varphi}(t)\,d^m t = \varphi(0)\int \hat{\psi}(x)\,d^m x.$$

Ahora considérese el caso especial donde $\psi = \varphi_0$ es la función gaussiana de (4.25). En ese caso, $\psi(0) = 1$ y $\int \hat{\psi}(x) d^m x = \int e^{-\|x\|^2/2}\,d^m x = (2\pi)^{m/2}$; la igualdad anterior se reduce a

$$\varphi(0) = (2\pi)^{-m/2}\int \hat{\varphi}(t)\,d^m t.$$

En seguida, se puede sustituir $\varphi \mapsto \tau_{-x}\varphi$ y $\hat{\varphi} \mapsto e_x\hat{\varphi}$ en esta última fórmula, aprovechando el Lema 4.44(a); al notar que $\varphi(x) = \tau_{-x}\varphi(0)$, se obtiene (4.28).

Las primeras cuatro potencias de $\mathcal{F}$, evaluadas en $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, son:

$$\mathcal{F}\varphi = \hat{\varphi}, \quad \mathcal{F}^2\varphi = \check{\varphi}, \quad \mathcal{F}^3\varphi = (\check{\varphi})\hat{}, \quad \mathcal{F}^4\varphi = (\check{\varphi})\check{} = \varphi.$$

Luego $\mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}\psi \implies \mathcal{F}^4\varphi = \mathcal{F}^4\psi \implies \varphi = \psi$, así que $\mathcal{F}$ es inyectiva; y $\mathcal{F}(\mathcal{F}^3\varphi) = \varphi$ muestra que $\mathcal{F}$ es sobreyectiva. □

Corolario 4.47. *Si $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, entonces*

$$\mathcal{F}(\varphi * \psi) = (2\pi)^{m/2}\,\hat{\varphi}\,\hat{\psi} \quad y \quad \mathcal{F}(\varphi\,\psi) = (2\pi)^{-m/2}\,\hat{\varphi} * \hat{\psi}.$$ ⊟

► Todas las fórmulas anteriores que involucran funciones declinantes y sus transformadas de Fourier se extienden a distribuciones temperadas, por transposición. En particular, la fórmula (4.29), escrito como $\langle\psi, \hat{\varphi}\rangle = \langle\hat{\psi}, \varphi\rangle$ para $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, indica cómo *definir* la extensión de $\mathcal{F}$.

Definición 4.48. Si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ es una distribución temperada, su **transformada de Fourier** $\underline{\mathcal{F}f \equiv \hat{f}}$ se define por

$$\underline{\langle \mathcal{F}f, \varphi \rangle} := \langle f, \mathcal{F}\varphi \rangle \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m). \tag{4.30}$$

El lado derecho es continuo en φ por el Lema 4.45 y así define un elemento $\hat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

Como espacio localmente convexo, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ tiene la topología (débil) de convergencia simple sobre elementos de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$; con esta topología, $\mathcal{F}$ es un operador lineal y continuo sobre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Su cuadrado cumple

$$\langle \mathcal{F}^2 f, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}^2\varphi \rangle = \langle f, \check{\varphi} \rangle = \langle \check{f}, \varphi \rangle,$$

así que $\mathcal{F}^2 f = \check{f}$ (y $\mathcal{F}^4 f = f$) para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$; en particular, $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m))$ es biyectiva. ◊

Ejemplo 4.49. La transformada de Fourier de la delta de Dirac es una *función constante*. En efecto, $\underline{\mathcal{F}\delta} \equiv (2\pi)^{-m/2}$, en vista de

$$\langle \mathcal{F}\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}\varphi \rangle = \hat{\varphi}(0) = (2\pi)^{-m/2} \int \varphi(x)\, d^m x = (2\pi)^{-m/2} \langle 1, \varphi \rangle. \qquad \lozenge$$

La *multiplicación por una función* suave en $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^m)$ conserva el espacio de distribuciones temperadas. Si $u \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^m)$ se define $uf \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ por transposición: $\underline{\langle uf, \varphi \rangle} := \langle f, u\varphi \rangle$, porque $\varphi \mapsto u\varphi$ es un operador lineal continuo sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

La *dilatación* de una distribución (temperada o no) fue definida por transposición, en la fórmula (4.13): en forma abreviada, $\underline{\langle \rho_\lambda f, \varphi \rangle} := \lambda^{-m} \langle f, \rho_{1/\lambda}\varphi \rangle$.

Proposición 4.50. *La transformación de Fourier* $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ *conserva las propiedades algebraicas de* $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$*. Concretamente, si* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$*, entonces:*

(a) $\mathcal{F}(e_s f) = \tau_s \hat{f}$, $\mathcal{F}(\tau_s f) = e_{-s} \hat{f}$ *para todo* $s \in \mathbb{R}^m$*;*

(b) $\mathcal{F}(\rho_\lambda f) = \lambda^{-m} \rho_{1/\lambda} \hat{f}$ *para todo* $\lambda > 0$*;*

(c) $\mathcal{F}(\partial_j f) = i\, x_j \hat{f}$, $\mathcal{F}(x_j f) = i\, \partial_j \hat{f}$ *para* $j = 1, \dots, m$.

Demostración. Ad (a, b): al transponer las fórmulas del Lema 4.44(a,b), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(e_s f), \varphi \rangle &= \langle e_s f, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle f, e_s \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}(\tau_{-s}\varphi) \rangle = \langle \mathcal{F}f, \tau_{-s}\varphi \rangle = \langle \tau_s(\mathcal{F}f), \varphi \rangle; \\
\langle \mathcal{F}(\tau_s f), \varphi \rangle &= \langle \tau_s f, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle f, \tau_{-s}(\mathcal{F}\varphi) \rangle = \langle f, \mathcal{F}(e_{-s}\varphi) \rangle = \langle \mathcal{F}f, e_{-s}\varphi \rangle = \langle e_{-s}\mathcal{F}f, \varphi \rangle; \\
\langle \mathcal{F}(\rho_\lambda f), \varphi \rangle &= \langle \rho_\lambda f, \mathcal{F}\varphi \rangle = \lambda^{-m} \langle f, \rho_{1/\lambda}(\mathcal{F}\varphi) \rangle = \langle f, \mathcal{F}(\rho_\lambda \varphi) \rangle \\
&= \langle \mathcal{F}f, \rho_\lambda \varphi \rangle = \lambda^{-m}\, \lambda^m \langle \mathcal{F}f, \rho_\lambda \varphi \rangle = \lambda^{-m} \langle \rho_{1/\lambda}(\mathcal{F}f), \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Ad (c): al transponer los resultados del Lema 4.45, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(\partial_j f), \varphi \rangle &= \langle \partial_j f, \mathcal{F}\varphi \rangle = -\langle f, \partial_j(\mathcal{F}\varphi) \rangle = i\, \langle f, \mathcal{F}(x_j \varphi) \rangle = i\, \langle \mathcal{F}f, x_j \varphi \rangle = \langle i\, x_j \mathcal{F}f, \varphi \rangle; \\
\langle \mathcal{F}(x_j f), \varphi \rangle &= \langle x_j f, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle f, x_j \mathcal{F}\varphi \rangle = -i\, \langle f, \mathcal{F}(\partial_j \varphi) \rangle = -i\, \langle \mathcal{F}f, \partial_j \varphi \rangle = \langle i\, \partial_j(\mathcal{F}f), \varphi \rangle. \qquad \square
\end{aligned}$$

Lema 4.51. *La convolución $f * \psi$ de $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ con $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ es una función suave. Salvo constantes, la transformación de Fourier* entrelaza *convolución con multiplicación:*

$$\mathcal{F}(f * \psi) = (2\pi)^{m/2}\, \hat{f}\, \hat{\psi}, \qquad \mathcal{F}(f\, \psi) = (2\pi)^{-m/2}\, \hat{f} * \hat{\psi}. \tag{4.31}$$

Demostración. La fórmula (4.21) define $\underline{f * \psi}(x) := \langle f, \check{\tau}_x \psi \rangle$ porque $\check{\tau}_x \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ para cada $x \in \mathbb{R}^m$ y $\psi \mapsto \check{\tau}_x \psi$ es continua para la topología de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Las afirmaciones de la Proposición 4.28 siguen válidos en este caso; en particular, $f * \psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ es suave.[19]

La fórmula (4.23) sigue válida para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, y de hecho, serviría como una definición alternativa de $f * \psi$:

$$\langle f * \psi, \varphi \rangle = \langle f, \check{\psi} * \varphi \rangle. \tag{4.23b}$$

El Corolario 4.47 y la relación $\mathcal{F}^2 \psi = \check{\psi}$ ahora muestran la primera relación de (4.31):

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(f * \psi), \varphi \rangle &= \langle f * \psi, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle f, \check{\psi} * \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}\hat{\psi} * \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= (2\pi)^{m/2} \langle f, \mathcal{F}(\hat{\psi}\, \varphi) \rangle = (2\pi)^{m/2} \langle \mathcal{F} f, \hat{\psi}\, \varphi \rangle = (2\pi)^{m/2} \langle \hat{f}\, \hat{\psi}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

De igual manera, se obtiene la segunda relación de (4.31):

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(f\psi), \varphi \rangle &= \langle f\psi, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle f, \psi\, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}(\mathcal{F}^3\psi)\, \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= (2\pi)^{-m/2} \langle f, \mathcal{F}(\mathcal{F}^3\psi * \varphi) \rangle = (2\pi)^{-m/2} \langle \hat{f}, \mathcal{F}^3\psi * \varphi \rangle \\ &= (2\pi)^{-m/2} \langle \hat{f}, (\hat{\psi})^{\vee} * \varphi \rangle = (2\pi)^{-m/2} \langle \hat{f} * \hat{\psi}, \varphi \rangle. \end{aligned} \qquad \square$$

Hasta ahora, se ha definido *productos y convoluciones* de distribuciones y funciones suaves; pero también las convoluciones de ciertas pares de distribuciones (Definición 4.33). Ahora se puede contemplar la posibilidad de definir, por dualidad, *productos* de algunas pares de distribuciones temperadas, donde $\mathcal{F}$ entrelaza convoluciones con productos.

Al intentar definir $\underline{\delta^2}$, el "cuadrado" de la delta de Dirac, por esta vía, habría que admitir la relación $\mathcal{F}(\delta^2) = (2\pi)^{-3m/2}\, 1 * 1$. Sin embargo, se sabe que $\underline{1 * 1}$ no existe, porque la integral (3.2) diverge. Por lo tanto, δ^2 tampoco existe.

► La transformación de Fourier tiene otra propiedad de gran importancia: *respeta el producto escalar* de funciones sobre $\mathbb{R}^m$ y por ende define un operador unitario sobre $L^2(\mathbb{R}^m)$.

Teorema 4.52 (Plancherel)**.** *La transformación de Fourier satisface*

$$\langle \mathcal{F}\psi \mid \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \psi \mid \varphi \rangle \quad \textit{para todo} \quad \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m). \tag{4.32}$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}$ lleva $L^2(\mathbb{R}^m)$ en $L^2(\mathbb{R}^m)$ como operador unitario.

[19] Resulta que $f * \psi \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^m)$. De hecho, $f * \psi$ pertenece al subespacio $\mathcal{O}_C(\mathbb{R}^m)$ de funciones suaves cuyas derivadas *crecen del mismo orden polinomial*. Para la prueba de esta afirmación, véase la Proposición 4.11.7 del libro de Horváth, *op. cit.*

Demostración. Las fórmulas (4.26) y (4.28), que definen $\mathcal{F}\psi$ y su transformada inversa, muestran que el conjugado complejo de $\hat{\psi} = \mathcal{F}\psi$ es

$$\overline{\mathcal{F}\psi} = \mathcal{F}^{-1}\bar{\psi} = \mathcal{F}^3\bar{\psi}.$$

Al sustituir $\psi \mapsto \mathcal{F}^{-1}\bar{\psi}$ en la fórmula (4.29), se obtiene, para $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$:

$$\langle \mathcal{F}\psi \mid \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \overline{\mathcal{F}\psi}, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}\bar{\psi}, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \bar{\psi}, \varphi\rangle = \langle \psi \mid \varphi\rangle.$$

Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, entonces $h(x) := (1 + \|x\|^2)^{m/2}\varphi(x)$ define una función acotada $h \in C_0(\mathbb{R}^m)$. Dicho de otro modo, $\varphi(x) = (1 + \|x\|^2)^{-m/2}h(x)$ es de cuadrado integrable:[20]

$$\|\varphi\|_2^2 \leqslant \|h\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}^m} \frac{d^m x}{(1 + \|x\|^2)^m} = \Omega_m \|h\|_\infty^2 \int_0^\infty \frac{r^{m-1}\,dr}{(1 + r^2)^m} < \infty,$$

comprobando que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \subset L^2(\mathbb{R}^m)$. Por otro lado, el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^m)$ tiene una base ortonormal $\{\, h_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^m \,\}$ de **funciones de Hermite** $h_\alpha(x) := H_{\alpha_1}(x_1)\dots H_{\alpha_m}(x_m)\, e^{-\|x\|^2/2}$ (véase el Ejercicio 1.17). Cada h_α es el producto de un polinomio por la gaussiana φ_0 y por tanto pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$; luego, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^m)$.

Por el Teorema 2.38 de Riesz, la fórmula integral $\langle g \mid h\rangle \equiv \langle \bar{g}, h\rangle$ identifica $L^2(\mathbb{R}^m)$ con su espacio dual. La transpuesta de la inclusión continua y densa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^m)$ es una inyección $L^2(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Así, cada elemento $h \in L^2(\mathbb{R}^m)$ define una distribución temperada.[21]

Ahora hay dos maneras de definir $\mathcal{F}$ como un operador sobre $L^2(\mathbb{R}^m)$. Por un lado, es posible extender $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$ por continuidad a todo $L^2(\mathbb{R}^m)$; la continuidad viene de (4.32) y la extensión es única porque el dominio original de $\mathcal{F}$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^m)$. La continuidad del producto escalar implica que la relación (4.32) sigue válida en todo $L^2(\mathbb{R}^m)$, así que el operador extendido es unitario.

Alternativamente, se puede restringir el operador $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, de la Definición 4.48, al subespacio $L^2(\mathbb{R}^m)$. Si $h \in L^2(\mathbb{R}^m)$ y $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, entonces

$$\langle \mathcal{F}h \mid \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \overline{\mathcal{F}h}, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}\bar{h}, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \bar{h}, \varphi\rangle = \langle h \mid \varphi\rangle,$$

esta vez por la Definición 4.48. De ahí se ve que $\langle \mathcal{F}^*\mathcal{F}h \mid \varphi\rangle = \langle h \mid \varphi\rangle$ para todo h y para φ en un subespacio denso de $L^2(\mathbb{R}^m)$. Se deduce que $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = 1$ sobre $L^2(\mathbb{R}^m)$, es decir, $\mathcal{F}$ es un isometría. La imagen de esta isometría es completo y también denso porque contiene $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) = \{\, \mathcal{F}\varphi : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \,\}$. En fin, esta isometría es sobreyectiva, así que es un operador unitario sobre $L^2(\mathbb{R}^m)$. □

[20] Aquí $\Omega_m := 2\,\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$ es la medida de la esfera unitaria $\mathbb{S}^{m-1}$ de $\mathbb{R}^m$.

[21] Si $h \in L^2(\mathbb{R}^m) \cap L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$ y $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, las dos definiciones de $\langle h, \varphi\rangle$ coinciden.

4.4 Distribuciones homogéneas

Notación. En esta sección, se usará el símbolo $\underline{\mathring{\mathbb{R}}^m} \equiv \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$.

Definición 4.53. Una distribución $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ es **homogénea de grado d** si $\rho_\lambda f = \lambda^d f$ para todo $\lambda > 0$. Dicho de otro modo:[22]

$$\lambda^d \langle f(x), \varphi(x)\rangle = \langle f(\lambda x), \varphi(x)\rangle = \lambda^{-m}\langle f(y), \varphi(y/\lambda)\rangle \quad \text{para} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m). \qquad \lozenge$$

Ejemplo 4.54. Una función suave $u \in \mathcal{E}(\mathring{\mathbb{R}}^m)$ es homogénea de grado $d \in \mathbb{C}$ si $\rho_\lambda u = \lambda^d u$ para todo $\lambda > 0$; en otras palabras, $u(\lambda x) = \lambda^d u(x)$ para todo $\lambda > 0$ y $x \neq 0$ en $\mathbb{R}^m$.

Si $x \in \mathring{\mathbb{R}}^m$, escríbase $x = r\omega$ donde $r := \|x\|$ y $\omega := x/r \in \mathbb{S}^{m-1}$. Entonces u es homogénea de grado d si y solo si[23]

$$u(x) = r^d\, v(\omega) \quad \text{para algún} \quad v \in \mathcal{E}(\mathbb{S}^{m-1}). \tag{4.33}$$

La posibilidad de extender u al origen – homogéneamente – depende del valor de d.

(a) Si $\Re d > 0$, se extiende u a una función $u\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ al definir $u(0) := 0$. La función extendida es continua (no necesariamente suave en 0) y es homogénea de grado d.

(b) Si $-m < \Re d \leqslant 0$, no es posible asignarle un valor apropiado $u(0)$ en el origen. Pero u al menos define una función localmente integrable sobre $\mathbb{R}^m$; en cuyo caso, u define una distribución regular $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, también homogénea de grado d.

(c) Si $\Re d \leqslant -m$, la extensión de u a una distribución homogénea $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ es problemática: se explorará las posibilidades a continuación. $\lozenge$

Ejemplo 4.55. La delta de Dirac es una distribución homogénea de grado $-m$. En efecto, si $\lambda > 0$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, entonces

$$\langle \rho_\lambda \delta, \varphi\rangle := \lambda^{-m}\langle \delta, \rho_{1/\lambda}\varphi\rangle = \lambda^{-m}\varphi(0/\lambda) = \lambda^{-m}\varphi(0) = \langle \lambda^{-m}\delta, \varphi\rangle. \qquad \lozenge$$

Ejemplo 4.56. Escríbase $\underline{x_+^d} \equiv x^d\theta(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Si $\Re d > -1$, esta es una función localmente integrable:

$$\langle x_+^d, \varphi\rangle := \int_0^\infty x^d \varphi(x)\,dx. \tag{4.34a}$$

Ahora bien, si $-2 < \Re d < -1$, es posible definir x_+^d por una fórmula alternativa:

$$\langle x_+^d, \varphi\rangle := \int_0^1 x^d(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx + \int_1^\infty x^d\varphi(x)\,dx + \frac{\varphi(0)}{d+1}\,. \tag{4.34b}$$

Al usar $\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\psi(x)$, la primera integral es $\int_0^1 x^{d-1}\psi(x)\,dx$, la cual converge.

[22] El grado d puede ser *complejo*: se define $\lambda^d := e^{d\log\lambda}$ si $\lambda > 0$. Nótese que $|\lambda^d| = \lambda^{\Re d}$.

[23] Una función $v\colon \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{C}$ es *suave* si y solo si su restricción a cada carta local de la variedad diferencial $\mathbb{S}^{m-1}$ es suave. Para ello, basta que v sea continua y que sea de clase C^∞ en un sistema de coordenadas esféricas.

La segunda fórmula (4.34b) define una función meromorfa[24] de la variable compleja d en el semiplano abierto $\Re d > -2$, con un único polo en $d = -1$, dado por el término $\varphi(0)/(d+1)$. En el semiplano $\Re d > -1$, esta función coincide con la función holomorfa definida por (4.34a).

Por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$, se puede extender $\langle x_+^d, \varphi\rangle$ a una función meromorfa de d en el semiplano $\Re d > -n-1$, con polos simples en $-1, -2, \dots, -n$ solamente, al sumar y restar un polinomio de Taylor de φ en el origen:

$$\langle x_+^d, \varphi\rangle := \int_0^1 x^d \biggl(\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\, x^k\biggr)\, dx + \int_1^\infty x^d \varphi(x)\, dx + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(d+k+1)}\,. \tag{4.34c}$$

La fórmula $(\lambda x)_+^d = \lambda^d x_+^d$ es válido para $\Re d > -1$ y los dos lados son holomorfas en d donde están definidas. Luego su validez se conserva en el plano perforado $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}^*)$, por continuación meromorfa. Entonces x_+^d es una distribución homogénea de grado d, toda vez que $d \notin \{-1, -2, -3, \dots\}$. $\Diamond$

Definición 4.57. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto con $x_0 \in U$, y sea $g \in \mathcal{D}'(U \setminus \{x_0\})$. Dícese que una distribución $f \in \mathcal{D}'(U)$ es una **extensión** o una *regularización* de g si $f|_{U\setminus\{x_0\}} = g$. Es decir: f extiende g si $\langle f, \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle$ toda vez que $\operatorname{sop}\varphi \Subset U \setminus \{x_0\}$. $\Diamond$

Un problema importante en algunas aplicaciones[25] es la extensión de una distribución homogénea sobre $\mathring{\mathbb{R}}^m$ a todo $\mathbb{R}^m$. Se presentan dos dificultades: la extensión generalmente no es única; y las extensiones que existen tampoco son homogéneas.

Ejemplo 4.58. La función $x_+^{-1} \equiv x^{-1}\theta(x)$ no es localmente integrable sobre $\mathbb{R}$, pero sí es localmente integrable sobre $\mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Fíjese que

$$\langle x_+^{-1}, \varphi\rangle = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \quad \text{si} \quad \operatorname{sop}\varphi \subset \mathring{\mathbb{R}},$$

pero esta integral sería divergente si se tomara $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\varphi(0) \neq 0$. Para aislar el comportamiento singular, escríbase $\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\psi(x)$ donde $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$; entonces, si $0 < \varepsilon < 1$, vale

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\, dx &= \int_\varepsilon^1 \biggl(\frac{\varphi(0)}{x} + \psi(x)\biggr)\, dx + \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \\ &= -\varphi(0)\log\varepsilon + \int_\varepsilon^1 \psi(x)\, dx + \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\, dx. \end{aligned}$$

[24]Una función compleja es **meromorfa** si es holomorfa en una región abierta de $\mathbb{C}$, salvo por singularidades aisladas que son *polos* (no se admiten singularidades esenciales).

[25]En la teoría cuántica de campos, abundan los cálculos de las “partes finitas” de ciertas integrales divergentes. Alternativamente, la llamada *teoría de perturbación causal* evita las divergencias mediante un algoritmo inductivo de extensión de distribuciones. Este algoritmo fue propuesto en: Henri Epstein y Vladimir Glaser, “The role of locality in perturbation theory”, *Annales de l’Institut Henri Poincaré A* **19** (1973), 211–295.

Al dejar $\varepsilon \downarrow 0$, el término $-\varphi(0)\log\varepsilon$ diverge, pero las dos integrales convergen. Al descartar el primer término, se obtiene la llamada **parte finita de Hadamard** de la integral divergente:

$$\operatorname{Fp}\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx := \int_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Una posible extensión de x_+^{-1} a $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ es la **pseudofunción** $\underline{\operatorname{Pf}(\theta(x)/x)}$ definida por

$$\langle \operatorname{Pf}(\theta(x)/x), \varphi(x)\rangle := \operatorname{Fp}\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Esta distribución extiende $\theta(x)/x$ a todo $\mathbb{R}$, pero *no es homogénea* de grado -1. En efecto:

$$\begin{aligned}
\langle \rho_\lambda \operatorname{Pf}(\theta(x)/x), \varphi(x)\rangle \equiv \lambda^{-1}\langle \operatorname{Pf}(\theta(x)/x), \varphi(x/\lambda)\rangle &= \frac{1}{\lambda}\operatorname{Fp}\int_0^\infty \frac{\varphi(x/\lambda)}{x}\,dx \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_0^{1/\lambda} \frac{\varphi(y)-\varphi(0)}{y}\,dy + \frac{1}{\lambda}\int_{1/\lambda}^\infty \frac{\varphi(y)}{y}\,dy \\
&= \frac{1}{\lambda}\operatorname{Fp}\int_0^\infty \frac{\varphi(y)}{y}\,dy - \frac{1}{\lambda}\int_1^{1/\lambda} \frac{\varphi(0)}{y}\,dy \\
&= \lambda^{-1}\langle \operatorname{Pf}(\theta(y)/y), \varphi(y)\rangle + (\lambda^{-1}\log\lambda)\,\varphi(0).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, vale

$$\rho_\lambda \operatorname{Pf}(\theta(x)/x) = \lambda^{-1}\operatorname{Pf}(\theta(x)/x) + \lambda^{-1}\log\lambda\,\delta(x).$$

El término "extra", proporcional a $\lambda^{-1}\log\lambda$, obstruye la homogeneidad de $\operatorname{Pf}(\theta(x)/x)$. ◊

Alternativamente, se puede aprovechar la circunstancia de que $1/x$ es la derivada de $\log x$ para $x > 0$. Entonces se puede definir la extensión[26]

$$R_1[x_+^{-1}] := (\log x)', \tag{4.35}$$

recordando que la derivada de una distribución regular puede ser singular. Resulta que esta extensión coincide con $\operatorname{Pf}(\theta(x)/x)$; su inhomogeneidad se ve más directamente:

$$\begin{aligned}
\langle \rho_\lambda(\log x)', \varphi(x)\rangle &= \lambda^{-1}\langle(\log x)', \varphi(x/\lambda)\rangle = -\lambda^{-1}\langle \log x, \lambda^{-1}\varphi'(x/\lambda)\rangle \\
&= -\lambda^{-2}\int_0^\infty \varphi'(x/\lambda)\,\log x\,dx = -\lambda^{-1}\int_0^\infty \varphi'(y)\,(\log y + \log\lambda)\,dy \\
&= \lambda^{-1}\langle(\log y)', \varphi(y)\rangle + \lambda^{-1}\log\lambda\,\varphi(0).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\rho_\lambda\big(R_1[x_+^{-1}]\big) \equiv R_1[(\lambda x)_+^{-1}] = \lambda^{-1}R_1[x_+^{-1}] + \lambda^{-1}\log\lambda\,\delta(x). \tag{4.36}$$

[26] En la notación, se omite el factor de $\theta(x)$, escribiendo $\underline{\log x}$ en vez de $\theta(x)\log x$; esta es una distribución regular sobre $\mathbb{R}$.

Para regularizar $x_+^{-k-1} = x^{-k-1}\theta(x)$ con $k \in \mathbb{N}^*$ como pseudofunción, es cuestión de remover la parte singular de la integral $\int_0^\infty x^{-k-1}\varphi(x)\,dx$, al restar de $\varphi(x)$ su polinomio de Taylor de grado k:

$$\langle \mathrm{Pf}(x^{-k-1}\theta(x)), \varphi\rangle := \mathrm{Fp}\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{k+1}}\,dx := \int_0^1 \biggl(\varphi(x) - \sum_{j=0}^{k} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!}\,x^j\biggr)\frac{dx}{x^{k+1}} + \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{k+1}}\,dx.$$

Es posible comprobar que $\mathrm{Pf}(x^{-k-1}\theta(x))$ coincide con la siguiente generalización de (4.35):

$$R_1[x_+^{-k-1}] := \frac{(-1)^k}{k!}\bigl((\log x)^{(k+1)} + H_k\,\delta^{(k)}(x)\bigr),$$

donde $H_k = 1 + \frac12 + \frac13 + \cdots + \frac1k$ es el k-ésimo número armónico.[27] El término $\delta^{(k)}$, con el coeficiente indicado, confiere a la extensión R_1 la importante propiedad multiplicativa: $x^j\,R_1[x_+^{-k}] = R_1[x_+^{-k+j}]$.

Ejemplo 4.59. En $\mathring{\mathbb{R}}^m$ con $m > 1$, la función radial r^d (es decir, $x \mapsto \|x\|^d$) es una función homogénea de grado d si $\Re d > 0$, con una extensión trivial a $\mathbb{R}^m$. Si $-m < \Re d \leqslant 0$, entonces r^d es localmente integrable en $\mathbb{R}^m$ y así la función r^d sobre $\mathring{\mathbb{R}}^m$ se extiende a una distribución regular sobre $\mathbb{R}^m$, homogénea de grado d.

Al efectuar las integrales, es útil usar coordenadas polares $x = r\omega$ en $\mathring{\mathbb{R}}^m$, con $r > 0$ y $\omega \in \mathbb{S}^{m-1}$; entonces $d^m x = r^{m-1}\,dr\,d\sigma(\omega)$, donde σ denota la forma de volumen sobre la esfera $\mathbb{S}^{m-1}$. Para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, defínase la función de una variable

$$\tilde\varphi(r) := \int_{\mathbb{S}^{m-1}} \varphi(r\omega)\,d\sigma(\omega)$$

que expresa la integral de φ sobre la esfera de radio r centrado en el origen. Nótese que $\tilde\varphi \in \mathcal{D}(0,\infty)$ cuando $\varphi \in \mathcal{D}(\mathring{\mathbb{R}}^m)$. Entonces la fórmula

$$\int_{\mathbb{R}^m} r^d \varphi(x)\,d^m x = \int_0^\infty r^{d+m-1}\tilde\varphi(r)\,dr$$

permite extender r^d al origen mediante $\langle r^d, \varphi\rangle := \langle x_+^{d+m-1}, \tilde\varphi\rangle$, para $d \notin \{-m, -m-1, \dots\}$. Para los valores singulares $d = -m-k$ con $k \in \mathbb{N}$, se puede usar la regularización

$$\underline{R_m}[r^{-m-k}] := r^{-m+1}R_1[r^{-k-1}] = r^{-m+1}\,\mathrm{Pf}(r^{-k-1}\theta(r)), \tag{4.37}$$

La distribución extendida $R_m[r^{-m-k}]$ no es homogénea; para comprobar eso, es necesario hacer un estudio más minucioso de las extensiones de potencias radiales. ◊

[27] Esta afirmación fue demostrada en: artículo: Ricardo Estrada y Ram P. Kanwal, "Regularization, pseudofunction and Hadamard finite part", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **141** (1989), 195–207.

Lema 4.60. *Sea $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ homogénea de grado d. Entonces $\mathcal{F}g$ también es homogénea, pero de grado $-m-d$.*

Demostración. Si $\varphi \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^m)$ y $\lambda > 0$, del Lema 4.44(b) se obtiene:

$$\begin{aligned}\langle \rho_\lambda(\mathcal{F}g), \varphi\rangle &= \lambda^{-m}\langle \mathcal{F}g, \rho_{1/\lambda}\varphi\rangle = \lambda^{-m}\langle g, \mathcal{F}(\rho_{1/\lambda}\varphi)\rangle = \langle g, \rho_\lambda(\mathcal{F}\varphi)\rangle \\ &= \lambda^{-m}\langle \rho_{1/\lambda}g, \mathcal{F}\varphi\rangle = \lambda^{-m}(1/\lambda)^d\langle g, \mathcal{F}\varphi\rangle = \lambda^{-m-d}\langle \mathcal{F}g, \varphi\rangle. \qquad \square\end{aligned}$$

Notación. El **operador de Euler** E sobre $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ o sobre $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ se define por:[28]

$$\underline{E} := \sum_{j=1}^m x^j \frac{\partial}{\partial x^j} \equiv \sum_{j=1}^m x^j\, \partial_j = r\,\frac{\partial}{\partial r}\,.$$

El **Laplaciano** Δ es el operador diferencial $\underline{\Delta} := \sum_{j=1}^m \partial_j^2$, sobre $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ o $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$.

Escolio 4.61. *Sea $u\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ una función diferenciable y sea $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$.*

(a) *La función u es homogénea de grado d si y solo si $E\,u = d\,u$.*

(b) *La distribución f es homogénea de grado d si y solo si $E\,f = d\,f$.* ⊟

Proposición 4.62. *Si $m \geqslant 3$, la ecuación diferencial $\Delta f = \delta$ tiene la siguiente **solución fundamental**,[29] la cual es una distribución regular en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$:[30]*

$$f(x) = -\frac{r^{-m+2}}{(m-2)\Omega_m}\,. \tag{4.38}$$

Demostración. Fíjese que $\mathcal{F}(\Delta f) = \sum_j it_j\,\mathcal{F}(\partial_j f) = -r^2\,\mathcal{F}f$. Entonces la ecuación dada es equivalente a $-r^2\,\mathcal{F}f = (2\pi)^{-m/2}$, o bien $\mathcal{F}f = -(2\pi)^{-m/2}r^{-2}$. La solución buscada es entonces $f = -(2\pi)^{-m/2}\mathcal{F}(r^{-2})$. Se debe determinar $\mathcal{F}(r^{-2})$.

Como $\mathcal{F}(r^{-2})$ es homogénea de grado $-m+2$ y es invariante bajo rotaciones, se ve que $\mathcal{F}(r^{-2}) = c_m\,r^{-m+2}$. Para determinar la constante c_m, sea $\varphi_a(x) := \rho_{\sqrt{a}}\varphi_0(x) = e^{-ar^2/2}$, y nótese que $\mathcal{F}\varphi_a = a^{-m/2}\varphi_{1/a}$ para $a > 0$. Además, $\int_0^\infty e^{-ar^2/2}\,da = 2\,r^{-2}$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(r^{-2}) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty a^{-m/2}e^{-r^2/2a}\,da = \frac{1}{2}\int_0^\infty b^{(m-4)/2}e^{-br^2/2}\,db \\ &= 2^{(m-4)/2}r^{-m+2}\int_0^\infty c^{(m-4)/2}e^{-c}\,dc = 2^{(m-4)/2}\Gamma(\tfrac{m}{2}-1)\,r^{-m+2},\end{aligned}$$

al sustituir $b = 1/a$, $c = br^2/2$. Ahora $(2\pi)^{-m/2}c_m = \Gamma(\frac{m}{2})\big/4\pi^{m/2}(\frac{m}{2}-1) = 1/(m-2)\Omega_m$. $\square$

[28] Conviene usar superíndices $x = (x^1, x^2, \dots, x^m)$ para denotar los componentes del vector $x \in \mathbb{R}^m$. Entonces $\partial_j = \partial/\partial x^j$ denota la derivada parcial correspondiente.

[29] Si L es un operador diferencial, f es una *solución fundamental para* L si $Lf = \delta$. Esta solución no es única, porque se le puede sumar cualquier solución g de la ecuación homogénea $Lg = 0$.

[30] Si $m = 2$, la solución es $f(x) = -(\log r)/2\pi$. Véase el Teorema 6.9.2 del libro de Análisis Real de Simon.

En particular, $f(x) = -r^{-1}/4\pi$ para $m = 3$; y $f(x) = -r^{-2}/4\pi^2$ para $m = 4$.

Ejemplo 4.63. La extensión $R_m[r^{-m}]$ definido por (4.37) puede expresarse como el Laplaciano de una distribución regular más una distribución con soporte en el origen. Considérese el caso $m \geqslant 3$. Se obtiene

$$R_m[r^{-m}] = r^{-m+1} R_1[x_+^{-1}] = r^{-m+1}\frac{d}{dr}(\log r) = r^{-m} E(\log r) = \sum_{j=1}^{m} \partial_j(x^j r^{-m} \log r) \tag{4.39}$$

$$= -\sum_{j=1}^{m} \partial_j^2 \biggl(\frac{r^{-m+2}}{m-2} \log r + \frac{r^{-m+2}}{(m-2)^2} \biggr) = -\frac{1}{m-2} \bigl[\Delta\bigl(r^{-m+2} \log r\bigr) - \Omega_m\, \delta(r) \bigr],$$

donde el último término sigue de la Proposición 4.62. En el cálculo se usado la identidad $\sum_j \partial_j(x^j f) = (E + m) f$ que sigue directamente de la regla de Leibniz (4.16). ◊

Definición 4.64. Una distribución $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ es **log-homogénea** de *bigrado* (d, k) si

$$(E - d)^{k+1} f = 0, \quad \text{pero} \quad (E - d)^k f \neq 0.$$ ◊

Ejemplo 4.65. La extensión $R_m[r^{-m}]$ es log-homogénea de bigrado $(-m, 1)$. En efecto, por (4.39):

$$R_m[(\lambda r)^{-m}] = \sum_{j=1}^{m} \partial_j\bigl(x^j (\lambda r)^{-m} (\log r + \log \lambda)\bigr) = \lambda^{-m} R_m[r^{-m}] + \lambda^{-m} \log \lambda\, \Omega_m\, \delta,$$

puesto que $\sum_j \partial_j(x^j\, r^{-m}) = (-m + 2)^{-1} \Delta(r^{-m+2}) = \Omega_m\, \delta$ por (4.38). ◊

Ejemplo 4.66. Otra función sobre $\mathring{\mathbb{R}}^m$ que merece una extensión al origen es la función radial $x \mapsto r^{-m} \log^k r \equiv r^{-m}(\log r)^k$. El método del Ejemplo 4.59 sugiere la siguiente extensión:

$$R_m[r^{-m} \log^k r] := \frac{1}{k+1}\, r^{-m+1} \frac{d}{dr}(\log^{k+1} r).$$

Esta extensión es log-homogénea de bigrado $(-m, k + 1)$. En efecto:

$$\begin{aligned} R_m\bigl[(\lambda r)^{-m} \log^k(\lambda r)\bigr] &= \frac{\lambda^{-m}}{k+1} \sum_{j=1}^{m} \partial_j\bigl(x^j r^{-m} (\log r + \log \lambda)^{k+1}\bigr) \\ &= \frac{\lambda^{-m}}{k+1} \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \log^i \lambda \sum_{j=1}^{m} \partial_j(x^j r^{-m} \log^{k-i+1} r) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \lambda^{-m} \log^i \lambda \binom{k}{i} R_m[r^{-m} \log^{k-i} r] + \lambda^{-m} \log^{k+1} \lambda\, \frac{\Omega_d}{k+1}\, \delta. \end{aligned}$$

De ahí se obtiene $(E+m)\, R_m[r^{-m} \log^k r] = k\, R_m[r^{-m} \log^{k-1} r]$. El resultado sigue por inducción sobre k. ◊

4.5 Ejercicios sobre distribuciones

En los ejercicios que siguen, U es un abierto en $\mathbb{R}^m$; la notación $K \Subset U$ significa que K es una parte compacta de U. La convergencia $f_\alpha \to f$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ usa la topología débil: significa que $\langle f_\alpha, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.

Ejercicio 4.1. (a) Si $0 < r < s$, demostrar que hay una función de prueba $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ tal que $\varphi(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$; $\varphi(x) \equiv 1$ en $\overline{B}(0;r)$; $\varphi(x) \equiv 0$ fuera de $B(0;s)$.

⟦ Indicación: mostrar que hay un elemento $\chi \geqslant 0$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ con soporte en $[r,s]$ y $\int_r^s \chi(t)\,dt = 1$. Colóquese $\eta(u) := 1 - \int_u^s \chi(t)\,dt$ y tómese $\varphi(x) := \eta(\|x\|)$. ⟧

(b) Si $K \Subset U$ demostrar que hay un abierto $V \subset U$ y una función de prueba $\psi \in \mathcal{D}(U)$ tales que $K \Subset V \subset \overline{V} \Subset U$, $\operatorname{sop}\psi \subseteq \overline{V}$ y $\psi(x) \equiv 1$ sobre K.

⟦ Indicación: Por su compacidad, es posible cubrir K por un número finito de bolas de cierto radio $\varepsilon > 0$, cuya unión está incluida en U. ⟧

Ejercicio 4.2. (a) Demostrar que $(\log|x|)' = \operatorname{vp}(1/x)$ como derivada distribucional de primer orden en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(b) Calcular la segunda derivada $f_j'' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de cada una de estas distribuciones regulares:

$$f_1(x) := e^{-|x|}; \qquad f_2(x) := \operatorname{sen}|x|; \qquad f_3(x) := \begin{cases} +1 & \text{si } x \geqslant 1, \\ x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -1 & \text{si } x \leqslant -1. \end{cases}$$

Ejercicio 4.3. Sea $h \in L^1(\mathbb{R}^m)$ una función tal que $h(x) \geqslant 0$ sobre $\mathbb{R}^m$ y $\int_{\mathbb{R}^m} h(x)\,d^m x = 1$. Defínase $h_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-m} h(x/\varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$. Demostrar que $h_\varepsilon \to \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ cuando $\varepsilon \downarrow 0$. ⟦ Indicación: escribir $\varphi(x) = \big(\varphi(x) - \varphi(0)\big) + \varphi(0)$. ⟧

(a) Demostrar la **fórmula de Breit y Wigner**:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \pi\,\delta \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

(b) Demostrar las **fórmulas de Sokhotski y Plemelj**:[31]

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \mp i\pi\,\delta + \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

⟦ Indicación: Considerar las partes real e imaginaria de $1/(x \pm i\varepsilon)$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, sea $\psi(x) := (\varphi(x) - \varphi(-x))/x$ para $x \neq 0$, $\psi(0) := 2\varphi'(0)$; verificar que $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ y usar convergencia dominada. ⟧

[31] En libros de física, estas fórmulas se escriben con el formato: $1/(x \pm i0) = \mp i\pi\,\delta + \operatorname{vp}(1/x)$.

Ejercicio 4.4. Sea $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ cuya derivada ψ' no se anula, y supóngase que $\psi(x) = 0$ si y solo si $x = x_0$. Con el cambio de variable $y := \psi(x)$, demostrar que

$$\langle \delta \circ \psi, \varphi \rangle = \frac{\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle}{|\psi'(x_0)|} \qquad \text{y concluir que} \qquad \delta(\psi(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|\psi'(x_0)|}\,.$$

Ejercicio 4.5. (a) El **peine de Dirac** es la suma infinita $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x-n)$. Demostrar que esta serie converge en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(b) Demostrar que la serie $h := \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta^{(n)}(x-n)$ también converge en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y que h es una distribución de orden infinito.

Ejercicio 4.6. Si $f \in \mathcal{D}'(a,b)$ donde $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto, demostrar que $(f - \tau_h f)/h \to f'$ en $\mathcal{D}'(a,b)$ cuando $h \to 0$.

Ejercicio 4.7. (a) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, demostrar que $\varphi = \psi'$ es la derivada de otra función de prueba $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si y sólo si $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 0$.

(b) Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ cumple $f' = 0$, demostrar que f es la distribución regular dada por una función constante. ⟦ Indicación: Tómese algún $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\int_{\mathbb{R}} \chi(x)\,dx = 1$ y evaluar $\langle f, \varphi - a\chi \rangle$ donde a es una constante apropiada. ⟧

(c) Si $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ cumple $h^{(n+1)} = 0$, demostrar que h es un polinomio de grado $\leqslant n$.

Ejercicio 4.8. Demostrar que cualquier distribución de soporte compacto tiene orden finito.

Ejercicio 4.9. El teorema de Taylor expresa $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ en la siguiente forma, con $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + x^{n+1}\psi(x).$$

Demostrar que las siguientes condiciones sobre $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ son equivalentes:

(a) $x^{n+1} f = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$;

(b) $f = c_0\,\delta + c_1\,\delta' + c_2\,\delta'' + \cdots + c_n\,\partial^n\delta$ para algunas constantes $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$.

⟦ Indicación: observar que $\operatorname{sop} f = \{0\}$ en los dos casos. ⟧

Ejercicio 4.10. Se definen operadores lineales de **traslación** τ_a (para $a \in \mathbb{R}^m$ fijo) y **reflexión** $\varphi \mapsto \check\varphi$ sobre $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ por:

$$\tau_a\varphi(x) := \varphi(x-a), \qquad \check\varphi(x) := \varphi(-x).$$

Demostrar que estas operadores lineales son *continuos* sobre $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.

⟦ Indicación: Para $K \Subset \mathbb{R}^m$, mostrar su continuidad como aplicaciones $\mathcal{D}_K \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. ⟧

Comprobar además que $\tau_a(\tau_b\varphi) = \tau_{a+b}\varphi$ y $(\tau_a\varphi)^\vee = \tau_{-a}\check\varphi$ para $a, b \in \mathbb{R}^m$.

Ejercicio 4.11. Si $a, b \in \mathbb{R}^m$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ y $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, comprobar las siguientes fórmulas de convolución:

$$\text{(a)}\quad \delta_a * \varphi = \tau_a \varphi, \qquad \text{(b)}\quad \delta_a * f = \tau_a f, \qquad \text{(c)}\quad \delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}\,.$$

Ejercicio 4.12. Sea $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función de Heaviside y $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la delta de Dirac (Ejemplos 4.5 y 4.6).

(a) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, verificar que $\theta * \varphi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\,dy$ para $x \in \mathbb{R}$.

(b) Demostrar que $\delta' * \theta = \delta$ y que $1 * \delta' = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.[32]

(c) Concluir que $1 * (\delta' * \theta) \neq (1 * \delta') * \theta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. ¿Por qué esto no contradice alguna de las fórmulas de asociatividad de la Sección 4.2?

Ejercicio 4.13. Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ cumple $\tau_x f = f$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$, mostrar que f es (la distribución regular dada por) una función constante.

Ejercicio 4.14. Verificar que la función $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^{-m}$ es integrable sobre $\mathbb{R}^m$. Concluir que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \subset L^1(\mathbb{R}^m)$. ¿Es cierto que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \subset L^p(\mathbb{R}^m)$ para todo $p > 1$?

Ejercicio 4.15. (a) Comprobar que $1 + \|x\|^2 \leqslant 2(1 + \|x - y\|^2)(1 + \|y\|^2)$, para $x, y \in \mathbb{R}^m$.

(b) Demostrar que la reflexión $\varphi \mapsto \check{\varphi}$ y la traslación $\varphi \mapsto \tau_b\varphi$, para $b \in \mathbb{R}^m$ fijo, son operadores lineales continuos sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

(c) Si $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, demostrar[33] que $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

Ejercicio 4.16. (a) Si $a > 0$, comprobar que la función $h(x) := e^{-a|x|}$ es integrable sobre $\mathbb{R}$. Verificar la fórmula

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{2a}{a^2 + t^2}\,.$$

Comprobar que $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R})$ también. ¿Cuál es la transformada de Fourier de $\hat{h}$?

(b) La función $t \mapsto \hat{h}(t)/\|\hat{h}\|_1$ es la *densidad de Cauchy* de la teoría de probabilidad. La *esperanza* $E(X)$ de una variable aleatoria X con esta densidad *no existe*: de hecho, si existiera, estaría dada por la fórmula $E(X) := (1/\|\hat{h}\|_1)\int_{\mathbb{R}} t\,\hat{h}(t)\,dt$. Usar la transformación de Fourier para demostrar que la función $t \mapsto t\,\hat{h}(t)$ no es integrable sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 4.17. Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$ mediante el teorema de Plancherel (Teorema 4.52).

[32] Aquí $1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ es la distribución regular definido por la función constante de valor 1.

[33] Esta es una hipótesis no declarada del Corolario 4.47.

Ejercicio 4.18. Demostrar que la transformación de Fourier conmuta con la acción de rotaciones: si $R \in M_m(\mathbb{R})$ es una matriz ortogonal con $\det R = +1$, y si $R \cdot \varphi(x) := \varphi(R^{-1}x)$ para $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, definir $R \cdot f$ para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ y así comprobar que $R \cdot \mathcal{F}f = \mathcal{F}(R \cdot f)$ para todo f.

Ejercicio 4.19. Sean $A, A^\dagger \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}))$ los operadores definidos por $A := 2^{-1/2}(x + d/dx)$, $A^\dagger := 2^{-1/2}(x - d/dx)$. Comprobar que $\langle A^\dagger \varphi \mid \psi \rangle = \langle \varphi \mid A\psi \rangle$ para $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$; y verificar que $A\varphi_0 = 0$ donde $\varphi_0(x) = e^{-x^2/2}$ es la función gaussiana. Demostrar también las igualdades $\mathcal{F}(A\varphi) = i\,A(\mathcal{F}\varphi)$ y $\mathcal{F}(A\varphi) = -i\,A(\mathcal{F}\varphi)$ para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Sea $\varphi_n := (n!)^{-1/2}(A^\dagger)^n \varphi_0$ para $n \in \mathbb{N}$. Resulta que los φ_n son proporcionales a la funciones de Hermite h_n del Ejercicio 1.17 que forman una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Demostrar que $\mathcal{F}\varphi_n = (-i)^n \varphi_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Concluir que el operador unitario $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ dado por el teorema de Plancherel tiene espectro finito $\{1, i, -1, -i\}$ y que cada autovalor tiene multiplicidad infinita.

Ejercicio 4.20. Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. La *parte finita* de la integral divergente $\int_0^\infty x^{-3/2}\varphi(x)\,dx$ se define como el límite

$$\operatorname{Fp}\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{3/2}}\,dx := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\biggl(-\frac{2\varphi(0)}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{3/2}}\,dx\biggr).$$

La pseudofunción $f(x) := \operatorname{Pf}(x^{-3/2}\theta(x))$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ se define por $\langle f, \varphi \rangle := \operatorname{Fp}\int_0^\infty x^{-3/2}\varphi(x)\,dx$.

Demostrar que la función $x^{-1/2}\theta(x)$ es localmente integrable sobre $\mathbb{R}$ y que la distribución regular $x_+^{-1/2}$ dada por esta función tiene derivada distribucional $-\frac{1}{2}\operatorname{Pf}(x^{-3/2}\theta(x))$.

Ejercicio 4.21. Demostrar el Escolio 4.61. ⟦ Indicación: Ad (a): calcular $\partial/\partial t|_{t=0}$ de $u(e^t x)$; Ad (b): calcular $\partial/\partial t|_{t=0}$ de $\langle \rho_{e^t} f, \varphi \rangle$. ⟧

Ejercicio 4.22. Sea $f(x)$ la solución fundamental (4.38) de la ecuación $\Delta f = \delta$ sobre $\mathbb{R}^m$ con $m \geqslant 3$. Si la convolución $f * h$ existe, comprobar que $g = f * h$ es una solución (débil) de la *ecuación de Poisson*, $\Delta g = h$.

Ejercicio 4.23. Considérese la función $r^{-q} = \|x\|^{-q}$ para $x \in \mathring{\mathbb{R}}^m$.

(a) Si $\frac{1}{2}m < q < m$, demostrar que $\mathcal{F}(r^{-q}) = c_{m,q}\, r^{-m+q}$ para alguna constante $c_{m,q}$.

(b) Comprobar la validez de esta fórmula para $0 < q < \frac{1}{2}m$ también. ⟦ Indicación: inversión de Fourier. ⟧ (Su validez para $q = \frac{1}{2}m$ sigue como caso límite).

(c) Verificar que $c_{m,q} = 2^{(m/2)-q}\,\Gamma(\frac{1}{2}(m-q))\big/\Gamma(q/2)$.

Ejercicio 4.24. Comprobar que $Ef = \partial/\partial t|_{t=0}(\rho_{e^t} f)$ para $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. En seguida, demostrar que la expansión de la demostración del Ejemplo 4.66 conlleva a la relación mencionada: $(E + m)\,R_m[r^{-m}\log^k r] = k\,R_m[r^{-m}\log^{k-1} r]$.

⟦ Indicación: calcular $\partial/\partial t|_{t=0}$ de $t^k e^{-td}$. ⟧