Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2015 **22**(1) : 49–59
cimpa – ucr issn: 1409-2433 (Print), 2215-3373 (Online)

CÁLCULO DE COEFICIENTES DE FOURIER EN DOS VARIABLES, UNA VERSIÓN DISTRIBUCIONAL

FOURIER COEFFICIENTES COMPUTATION IN TWO VARIABLES, A DISTRIBUTIONAL VERSION

Carlos Manuel Ulate R.*

Received: 15/Feb/2012; Revised: 3/Sep/2014;
Accepted: 17/Oct/2014

*Sede de Occidente, Universidad de Costa Rica, San Ramón, Costa Rica. E-Mail: carlos.ulate@ucr.ac.cr

Resumen

En el presente artículo, a partir de la fórmula distribucional de sumación del tipo de Euler–Maclaurin y una adecuada elección de la distribución, se obtienen representaciones para los coeficientes de Fourier en dos variables. Estas representaciones pueden ser usadas para la evaluación numérica de los coeficientes.

Palabras clave: Sumas Euler-Maclaurin; coeficientes de Fourier; distribuciones.

Abstract

The present article, by considering the distributional summations of Euler-Maclaurin and a suitable choice of the distribution, results in representations for the Fourier coefficients in two variables are obtained. These representations may be used for the numerical evaluation of coefficients.

Keywords: Euler-Maclaurin sums, Fourier coefficients, distributions.

Mathematics Subject Classification: 40G05, 42A16.

1 Introducción

En [5] usando la teoría de distribuciones, se obtiene una versión distribucional sobre la fórmula de sumación distribucional en dos variables. En efecto, si $g(x,y)$ es una distribución de dos variables cuyo soporte esta contenido en el cuadrado unidad $[0,1]^2$ con g integrable en un vecindario de la frontera del cuadrado unidad y si se define

$$G(x,y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}g(x-k,y-j),$$

de modo que G es periódica en ambas variables, al introducir las medias parciales para distribuciones en dos variables [5] obtenemos que la siguiente fórmula distribucional de orden q es válida [5],

$$
\begin{aligned}
G(x,y)\chi_X(x,y) &= c\chi_X(x,y) \\
&+\sum_{j=0}^{q-1}\alpha_j(\delta^{(j)}(x-M)-\delta^{(j)}(x-N))\chi_{[P,Q]}(y) \\
&+\sum_{j=0}^{q-1}\beta_j(\delta^{(j)}(y-Q)-\delta^{(j)}(y-P))\chi_{[N,M]}(x) \\
&+\sum_{i=0}^{q-2}\sum_{j=0}^{q-2-i}\gamma_{i,j}(\delta^{(i)}(x-M)-\delta^{(i)}(x-N))(\delta^{(j)}(y-Q) \\
&-\delta^{(j)}(y-P))+R_q(x,y),
\end{aligned} \tag{1}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
R_q(x,y) &= \frac{\partial^q}{\partial x^q}\left[(G_{q,0}(x,y)-G_{q,0}(0,y)+A_q(x))\chi_X(x,y)\right] \\
&\quad -\sum_{i=0}^{q-2}\frac{\partial^q}{\partial x^{i+1}\partial y^{q-i-1}}\left[G_{i+1,q-i-1}(0,y)\chi_X(x,y)\right] \\
&\quad +\frac{\partial^q}{\partial y^q}[C_q(y)\chi_X(x,y)],
\end{aligned} \tag{2}
$$

$X=[N,M]\times[P,Q]$ y $\{A_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $\{C_n(y)\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{G_{k,j}(x,y)\}_{k,j=0}^{\infty}$ es la familia de primitivas periódicas de orden n de $A_0(x)$, $C_0(y)$ y $G_{0,0}(x,y)=G(x,y)-A_0(x)-C_0(y)-c$, respectivamente, c es la media de G y

$$
\alpha_j=A_{j+1}(0), \quad \beta_j=C_{j+1}(0), \quad \gamma_{i,j}=G_{i+1,j+1}(0,0), \tag{3}
$$

son constantes.

Precisamente la aplicación directa de (1) y (3) permite obtener fórmulas aproximadas para los coeficientes de Fourier de una función $\phi\in\mathcal{C}^q([0,1]^2)$.

2 Preliminares

Denotando por $\mathcal{C}^q([0,1]^2)$ el espacio de funciones diferenciables de orden q sobre el cuadrado unidad, además $\mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$ es el espacio de funciones de prueba sobre $\mathbb{R}^p$, es decir, $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$ si ϕ es infinitamente diferenciable y $\operatorname{supp}(\phi)$ es compacto. Su dual, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$ es el espacio de distribuciones sobre $\mathbb{R}^p$ [2, 4].

Cuando $G(x,y)$ es una distribución periódica de dos variables, con periodos $p>0$, $q>0$, es posible definir las medias parciales [5]

$$A(x)=\lim_{y\to\infty} G(x,y)\ (C),$$

es decir, el límite distribucional en el sentido Cesàro

$$\langle A(x),\phi(x)\rangle=\lim_{y\to\infty}\langle G(x,y),\phi(x)\rangle\ (C),$$

$\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. De manera similar se define $C(y)=\lim_{x\to\infty} G(x,y)\ (C)$, precisamente $A(x)$ y $C(y)$ son periódicas, y las medias respectivas coinciden, con un valor común, que es la media de G.

Similarmente que en el caso de una variable la media se anula si y sólo si existe una única familia de distribuciones $\{G_{k,j}(x,y)\}_{k,j=0}^{\infty}$ tal que [5]:

$$\begin{aligned} G_{0,0}(x,y) &= G(x,y),\\ G_{k,j}(x+p,y+q) &= G_{k,j}(x,y),\\ \frac{\partial G_{k,j}}{\partial x} &= G_{k-1,j},\quad k\geq 1,\\ \frac{\partial G_{k,j}}{\partial y} &= G_{k,j-1},\quad j\geq 1. \end{aligned}$$

3 Coeficientes de Fourier en dos variables

Considere la función $g(x,y)=e^{2\pi\imath(nx+my)}\chi_{[0,1]}(x)\chi_{[0,1]}(y)$, $\imath\in\mathbb{C}$. Si tomamos $X=[0,1]^2$, tenemos que para toda $\phi\in\mathcal{C}^q([0,1]^2)$, vale la expresión

$$\begin{aligned} \langle g(x,y),\phi(x,y)\rangle &= \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi\imath(nx+my)}\chi_{[0,1]}(x)\chi_{[0,1]}(y)\phi(x,y)dx\,dy\\ &= \int_0^1\int_0^1 e^{2\pi\imath(nx+my)}\phi(x,y)dx\,dy, \end{aligned}$$

la cual puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \langle g(x,y),\phi(x,y)\rangle &= \int_0^1\int_0^1 e^{2\pi\imath nx}e^{2\pi\imath my}\phi(x,y)dx\,dy\\ &= C_{n,m}(\phi),\quad n,m=0,1,2,\ldots, \end{aligned}\tag{4}$$

donde la notación $C_{n,m}(\phi)$, es utilizada para representar los respectivos coeficientes de Fourier en dos variables, en particular para $n=m=0$, se tiene

$$C_{0,0}(\phi)=\int_0^1\int_0^1 \phi(x,y)dx\,dy,$$

es decir, el término constante en el desarrollo de Fourier de la función prueba ϕ.

Para $\phi \in \mathcal{C}^q([0,1]^2)$ y teniendo en cuenta (1.1), se tiene la siguiente expresión para los coeficientes $C_{n,m}(\phi)$,

$$
\begin{aligned}
&C_{n,m}(\phi) = c\int_0^1\int_0^1 \phi(x,y)dy\,dx\\
&+\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\alpha_j\int_0^1\left(\frac{\partial^j\phi}{\partial x^j}(1,y)-\frac{\partial^j\phi}{\partial x^j}(0,y)\right)dy\\
&+\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\beta_j\int_0^1\left(\frac{\partial^j\phi}{\partial y^j}(x,1)-\frac{\partial^j\phi}{\partial y^j}(x,0)\right)dx\\
&+\sum_{i=0}^{q-2}\sum_{j=0}^{q-2-i}(-1)^{i+j}\gamma_{i,j}\left(\frac{\partial^{i+j}\phi}{\partial x^i\partial y^j}(1,1)-\frac{\partial^{i+j}\phi}{\partial x^i\partial y^j}(1,0)\right.\\
&\left.-\frac{\partial^{i+j}\phi}{\partial x^i\partial y^j}(0,1)+\frac{\partial^{i+j}\phi}{\partial x^i\partial y^j}(0,0)\right)\\
&+R_q,
\end{aligned}
$$

donde el resto $R_q = R_q(\phi)$ se obtiene al aplicar (2) a la función ϕ.

Para hallar los coeficientes α_j, β_j y $\gamma_{i,j}$ que figuran en la representación anterior, se introducen los polinomios de Bernoulli [1] y usando la representación alternativa [5] se obtienen

$$
\alpha_j = \frac{(-1)^j}{(j+1)!}\langle g(x,y), B_{j+1}(x)B_0(y)\rangle, \tag{5}
$$

$$
\beta_j = \frac{(-1)^j}{(j+1)!}\langle g(x,y), B_0(x)B_{j+1}(y)\rangle, \tag{6}
$$

y

$$
\gamma_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j}}{(j+1)!(i+1)!}\langle g(x,y), B_{i+1}(x)B_{j+1}(y)\rangle. \tag{7}
$$

Como $B_0(t) = 1$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\alpha_j &= \frac{(-1)^j}{(j+1)!}\langle g(x,y), B_{j+1}(x)\rangle \\
&= \frac{(-1)^j}{(j+1)!}\langle e^{2\pi\imath(nx+my)}\chi_{[0,1]}\chi_{[0,1](y)}, B_{j+1}(x)\rangle \\
&= \frac{(-1)^j}{(j+1)!}\int_0^1\int_0^1 e^{2\pi\imath(nx+my)}B_{j+1}(x)dy\,dx \\
&= \frac{(-1)^j}{(j+1)!}\left(\int_0^1 e^{2\pi\imath(nx)}B_{j+1}(x)dx\right)\left(\int_0^1 e^{2\pi\imath(my)}dy\right) \\
&= \frac{(-1)^j}{(j+1)!}\left(\frac{e^{2\pi\imath m}-1}{2\pi\imath m}\right)\left(\int_0^1 e^{2\pi\imath(nx)}B_{j+1}(x)dx\right),
\end{aligned}$$

de modo que

$$\alpha_j = \frac{(-1)^j}{(j+1)!}\left(\frac{e^{2\pi\imath m}-1}{2\pi\imath m}\right)\left(\int_0^1 e^{2\pi\imath(nx)}B_{j+1}(x)dx\right). \tag{8}$$

Un cálculo similar establece que

$$\beta_j = \frac{(-1)^j}{(j+1)!}\left(\frac{e^{2\pi\imath n}-1}{2\pi\imath n}\right)\left(\int_0^1 e^{2\pi\imath(my)}B_{j+1}(y)dy\right). \tag{9}$$

De (8) y (9) es suficiente con estimar la integral,

$$\int_0^1 e^{2\pi\imath st}B_{j+1}(t)dt. \tag{10}$$

que corresponde a los coeficientes en la expansión de Fourier de los polinomios de Bernoulli [3]:

$$\overline{B_{2q}}(x) = 2(-1)^{q+1}(2q)!\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi rx)}{(2\pi r)^{2q}} \tag{11}$$

y

$$\overline{B_{2q+1}}(x) = 2(-1)^{q+1}(2q+1)!\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi rx)}{(2\pi r)^{2q+1}}. \tag{12}$$

Se sigue que (10) se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{2\pi\imath st}B_{j+1}(t)dt &= \int_0^1 \cos(2\pi st)B_{j+1}(t)dt + \imath\int_0^1 \sin(2\pi st)B_{j+1}(t)dt \\
&= C^{(s)}(B_{j+1}(t)) + \imath S^{(s)}(B_{j+1}(t)), \quad s = 1,2,3,\ldots
\end{aligned}$$

donde $C^{(s)}$ y $S^{(s)}$ representan los respectivos coeficientes de Fourier del polinomio de Bernoulli $B_{j+1}(t)$.

Por otra parte sabemos que,

$$\begin{aligned}\overline{B_{k+1}}(t) &= \int_0^1 B_{k+1}(t)dt + 2\sum_{n=1}^{\infty} C^{(n)}(B_{k+1}(t))\cos(2\pi nx) \\ &\quad +2\sum_{n=1}^{\infty} S^{(n)}(B_{k+1}(x))\sin(2\pi nx) \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty} C^{(n)}(B_{k+1}(t))\cos(2\pi nx) \\ &\quad +2\sum_{n=1}^{\infty} S^{(n)}(B_{k+1}(x))\sin(2\pi nx)\end{aligned}$$

puesto que $\int_0^1 B_{k+1}(t)dt = 0$.

En particular, si tomamos $k = 2q-1$, se obtiene

$$\overline{B_{2q}}(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} C^{(n)}(B_{2q})\cos(2\pi nx),$$

de igual forma si $k = 2q$, se sigue que

$$\overline{B_{2q+1}}(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} S^{(n)}(B_{2q+1})\sin(2\pi nx),$$

que al comparar con (11) y (12) nos da

$$\begin{cases} C^{(n)}(B_{2q}) = \frac{(-1)^{q+1}(2q)!}{(2\pi n)^{2q}} \\ S^{(n)}(B_{2q+1}) = \frac{(-1)^{q+1}(2q+1)!}{(2\pi n)^{2q+1}}, \end{cases}$$

y por lo tanto

$$\int_0^1 e^{2\pi \imath st} B_{j+1}(t)dt = \begin{cases} \frac{(-1)^{q+1}(2q)!}{(2\pi s)^{2q}} & \text{si} \quad j = 2q-1 \\ \frac{(-1)^{q+1}(2q+1)!}{(2\pi s)^{2q+1}} & \text{si} \quad j = 2q. \end{cases} \tag{13}$$

Es posible obtener los coeficientes α_j y β_j en (8) y (9) respectivamente a partir de la expresión anterior. En efecto, si $j = 2q$ se tiene

$$\begin{aligned}
\alpha_{2q} &= \frac{(-1)^{2q}(e^{2\pi\imath m}-1)}{2\pi\imath m(2q+1)!}\int_0^1 e^{2\pi\imath nx}B_{2q+1}(x)dx\\
&= \frac{(-1)^{2q}(e^{2\pi\imath m}-1)}{2\pi\imath m(2q+1)!}S^{(n)}(B_{2q+1}(x))\\
&= \frac{(-1)^{3q+1}(e^{2\pi\imath m}-1)}{\imath mn^{2q+1}(2\pi)^{2q+2}},
\end{aligned}$$

mientras que si $j = 2q+1$,

$$\begin{aligned}
\alpha_{2q+1} &= \frac{(-1)^{2q+1}(e^{2\pi\imath m}-1)}{2\pi\imath m(2q+2)!}\int_0^1 e^{2\pi\imath nx}B_{2q+2}(x)dx\\
&= \frac{(-1)^{2q+1}(e^{2\pi\imath m}-1)}{2\pi\imath m(2q+2)!}C^{(n)}(B_{2(q+1)}(x))\\
&= \frac{(-1)^{3q+3}(e^{2\pi\imath m}-1)}{\imath mn^{2q+2}(2\pi)^{2q+3}},
\end{aligned}$$

es decir,

$$\alpha_j = \begin{cases} \frac{(-1)^{3q+1}(e^{2\pi\imath m}-1)}{\imath mn^{2q+1}(2\pi)^{2q+2}} & \text{si} \quad j = 2q\\ \frac{(-1)^{3q+3}(e^{2\pi\imath m}-1)}{\imath mn^{2q+2}(2\pi)^{2q+3}} & \text{si} \quad j = 2q+1. \end{cases}$$

Un cálculo similar, establece que

$$\beta_j = \begin{cases} \frac{(-1)^{3r+1}(e^{2\pi\imath n}-1)}{\imath nm^{2r+1}(2\pi)^{2r+2}} & \text{si} \quad j = 2r\\ \frac{(-1)^{3r+3}(e^{2\pi\imath n}-1)}{\imath nm^{2r+2}(2\pi)^{2r+3}} & \text{si} \quad j = 2r+1. \end{cases}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\gamma_{ij} &= \frac{(-1)^{i+j}}{(i+1)!(j+1)!}\langle g(x,y), B_{i+1}(x)B_{j+1}(y)\rangle\\
&= \frac{(-1)^{i+j}}{(i+1)!(j+1)!}\int_0^1\int_0^1 g(x,y)B_{i+1}(x)B_{j+1}(y)dx\,dy\\
&= \frac{(-1)^{i+j}}{(i+1)!(j+1)!}\left(\int_0^1 e^{2\pi\imath nx}B_{i+1}(x)dx\right)\left(\int_0^1 e^{2\pi\imath my}B_{j+1}(y)dy\right),
\end{aligned}$$

las integrales que figuran en el lado derecho se obtienen, al igual que antes dependiendo de que los subíndices $i+1, j+1$ son pares o impares, así por ejemplo si $i+1=2r$ y $j+1=2s+1$ para algunos $r,s\in\mathbb{Z}^+$ tenemos,

$$
\begin{aligned}
\gamma_{2r-1,2s} &= \frac{(-1)^{2r+2s-1}}{(2r)!(2s+1)!}\left(\int_0^1 e^{2\pi\imath nx B_{2r}(x)dx}\right)\left(\int_0^1 e^{2\pi\imath my}B_{2s+1}(y)dy\right)\\
&= \frac{(-1)^{2r+2s+1}}{(2r)!(2s+1)!}\left(\frac{(-1)^{r+1}(2r)!}{(2\pi n)^{2r}}\right)\left(\frac{(-1)^{s+1}(2s+1)!}{(2\pi m)^{2s+1}}\right)\\
&= \frac{(-1)^{3r+3s+1}}{n^{2r}m^{2s+1}(2\pi)^{2r+2s+1}}.
\end{aligned}
$$

De manera similar se obtienen

$$
\begin{aligned}
\gamma_{2r,2s-1} &= \frac{(-1)^{3r+3s+1}}{n^{2r+1}m^{2s}(2\pi)^{2r+2s+1}},\\
\gamma_{2r-1,2s-1} &= \frac{(-1)^{3r+3s-1}}{n^{2r}m^{2s}(2\pi)^{2r+2s}}
\end{aligned}
$$

y

$$
\gamma_{2r,2s} = \frac{(-1)^{3r+3s+2}}{n^{2r+1}m^{2s+1}(2\pi)^{2r+2s+2}}.
$$

Además, de esta manera se puede obtener la siguiente representación para los coeficientes $C_{nm}(\phi)$,

$$
\begin{aligned}
C_{nm}(\phi) = c&\int_0^1\int_0^1 \phi(x,y)dy\,dx\\
&+\sum_{0\le 2r\le q-1}\tfrac{(-1)^{2r}(-1)^{3r+1}(e^{2\pi\imath m-1})}{\imath mn^{2r+1}(2\pi)^{2r+2}}\int_0^1\left[\phi_x^{(2r)}(1,y)-\phi_x^{(2r)}(0,y)\right]dy\\
&+\sum_{0\le 2r+1\le q-1}\tfrac{(-1)^{2r+1}(-1)^{3r+3}(e^{2\pi\imath m-1})}{\imath mn^{2r+2}(2\pi)^{2r+3}}\int_0^1\left[\phi_x^{(2r+1)}(1,y)-\phi_x^{(2r+1)}(0,y)\right]dy\\
&+\sum_{0\le 2l\le q-1}\tfrac{(-1)^{2l}(-1)^{3l+1}(e^{2\pi\imath n-1})}{\imath nm^{2l+1}(2\pi)^{2l+2}}\int_0^1\left[\phi_y^{(2l)}(x,1)-\phi_y^{(2l)}(x,0)\right]dx\\
&+\sum_{0\le 2l+1\le q-1}\tfrac{(-1)^{2l+1}(-1)^{3l+3}(e^{2\pi\imath n-1})}{\imath nm^{2l+2}(2\pi)^{2l+3}}\int_0^1\left[\phi_y^{(2l+1)}(x,1)-\phi_y^{(2l+1)}(x,0)\right]dx\\
&+\sum\gamma_{i,j}+R_q(\phi),
\end{aligned}
$$

donde $c=\lim_{x\to\infty}\left(\lim_{y\to\infty}G(x,y)\ (C)\right)$, es decir, el límite distribucional en el sentido Cesàro.

Finalmente la suma que involucra los $\gamma_{i,j}$ se puede escribir como,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{0\leq 2r-1\leq q-2} \quad \sum_{0\leq 2s\leq q-2r-1} (-1)^{2r+2s-1} \frac{(-1)^{3r+3s+1}}{n^{2r}m^{2s+1}(2\pi)^{2r+2s+1}} \times \\
&\quad \times \left[\phi_{xy}^{2(r+s)-1}(1,1) - \phi_{xy}^{2(r+s)-1}(1,0) - \phi_{xy}^{2(r+s)-1}(0,1) + \phi_{xy}^{2(r+s)-1}(0,0)\right] \\
&+ \quad \sum_{0\leq 2r\leq q-2} \quad \sum_{0\leq 2s-1\leq q-2r-2} (-1)^{2r+2s-1} \frac{(-1)^{3r+3s+1}}{n^{2r+1}m^{2s}(2\pi)^{2r+2s+1}} \times \\
&\quad \times \left[\phi_{xy}^{2(r+s)-1}(1,1) - \phi_{xy}^{2(r+s)-1}(1,0) - \phi_{xy}^{2(r+s)-1}(0,1) + \phi_{xy}^{2(r+s)-1}(0,0)\right] \\
&\quad \sum_{0\leq 2r-1\leq q-2} \quad \sum_{0\leq 2s-1\leq q-2r-1} (-1)^{2r+2s-2} \frac{(-1)^{3r+3s-1}}{n^{2r}m^{2s}(2\pi)^{2r+2s}} \times \\
&\quad \times \left[\phi_{xy}^{2(r+s)-2}(1,1) - \phi_{xy}^{2(r+s)-2}(1,0) - \phi_{xy}^{2(r+s)-2}(0,1) + \phi_{xy}^{2(r+s)-1}(0,0)\right] \\
&\quad \sum_{0\leq 2r\leq q-2} \quad \sum_{0\leq 2s\leq q-2r-2} (-1)^{2r+2s} \frac{(-1)^{3r+3s+2}}{n^{2r+1}m^{2s+1}(2\pi)^{2r+2s+2}} \times \\
&\quad \times \left[\phi_{xy}^{2(r+s)}(1,1) - \phi_{xy}^{2(r+s)}(1,0) - \phi_{xy}^{2(r+s)}(0,1) + \phi_{xy}^{2(r+s)}(0,0)\right],
\end{aligned}
$$

con resto dado por

$$
\begin{aligned}
R_q(\phi) &= (-1)^q \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left(G_{q,0}(x,y) - G_{q,0}(0,y) + A_q(x)\right) \frac{\partial^q \phi}{\partial x^q} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=0}^{q-2} G_{i+1,q-i-1}(0,y) \frac{\partial^q \phi}{\partial x^{i+1} \partial y^{q-i-1}} + C_q(y) \frac{\partial^q \phi}{\partial y^q} \right\} dy\, dx.
\end{aligned}
$$

4 Conclusiones

Queda claro en el artículo como a partir de una adecuada elección de la distribución g de dos variables con soporte contenido en $[0,1]^2$, se obtienen aproximaciones para los coeficientes de Fourier en dos variables, como variante de las fórmulas distribucionales del tipo de Euler-Maclaurin expuestas en [5].

El uso de los polinomios de Bernoulli permite hallar los coeficientes (5), (6) y (7) que figuran en la representación obtenida para los coeficientes $C_{nm}(\phi)$, los cuales a su vez puede ser implementadas para obtener información numérica de los coeficientes de Fourier.

Finalmente el procedimiento expuesto se puede aplicar en futuras investigaciones, para obtener diversas fórmulas para métodos de cuadratura basados en cuasi-interpolación o aproximaciones por splines.

Referencias

[1] Estrada, R.; Kanwal R.P. (1994) *Asymptotic Analysis: A Distributional Approach*. Birkhäuser, Boston.

[2] Kanwal, R.P. (1997) *Generalized Functions: Theory and Technique*, 2ª edición. Birkhäuser, Boston.

[3] Lyness, J. N. (1970) "The calculation of Fourier coefficients by the Möbius inversion of the Poisson summation formula, Part I. Functions whose early derivatives are continuous", *Math. of Comp.* **24**: 101–135.

[4] Schwartz, L. (1966) *Théorie des Distributions.* Hermann, Paris.

[5] Ulate, C.M.; Estrada, R. (1998) "Una fórmula distribucional de sumación del tipo de Euler-Maclaurin en dos variables", *Divulgaciones Matemáticas* **6**: 93–112.