Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2(1): 17–25 (1995)

UNA NOCIÓN DE PROCESO PUNTUAL EN TIEMPO DISCRETO

Jaime Lobo Segura[1]

Resumen

Luego de señalar las dificultades de la teoría clásica en el tratamiento de los procesos puntuales sobre la recta, se da una noción de proceso puntual en tiempo discreto cuya definición reposa sobre conceptos del análisis no standard. Este proceso se asemeja al de una sucesión finita de variables de Bernoulli indexadas por el tiempo. Se expone una breve teoría sobre estos procesos, y se establece el nexo con los procesos puntuales del tipo clásico. El marco de referencia es la versión de la "Internal Set Theory".

1 Introducción

En gran variedad de campos de la ciencia es usual la introducción de modelos estocásticos donde los datos observables los constituyen una sucesión de tiempos aleatorios, cada tiempo correspondiendo a la ocurrencia de un evento. Algunos ejemplos pueden ser la detección de fotones en la teoría de telecomunicaciones, el comportamiento de las colas en redes de computadoras o inventarios, o la emisión de partículas en los fenómenos radioactivos. Estos modelos reciben el nombre de procesos estocásticos puntuales sobre la recta o también de procesos de conteo, denominaciones que se justifican ya que la sucesión de eventos puede verse ya sea como una sucesión de puntos sobre la recta del tiempo o bien como una colección de variables indexadas por el tiempo que cuentan el número de eventos ocurridos en cada intervalo de tiempo.

Podemos precisar mejor estas ideas, y suponiendo que las observaciones se realizan a partir del tiempo 0, un proceso puntual sobre la recta se puede ver como una sucesión creciente $(T_n,\ n \in\ N)$ de variables positivas (tiempos de ocurrencia de los eventos) o como el proceso estocástico $N = (N_t, t \in [0, \infty))$ en tiempo continuo, donde N_t sería $card\{n : 0 \leq T_n \leq t\}$. Es claro que la sucesión $(T_n,\ n \in N)$ determina el proceso N y recíprocamente.

Las teorías matemáticas que sustentan el estudio de estos procesos pueden clasificarse en dos tipos: las que se centran en el estudio de los momentos, y las que se sirven del método de martingalas (método dinámico). De ellas, la más clásica es la primera, mientras que la segunda echa mano de la llamada intensidad estocástica, que resume en un instante dado el potencial para generar un evento en el futuro próximo. El método de martingalas

[1]Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

permite en particular el empleo de las técnicas del cálculo estocástico. El examen atento de estas teorías nos muestra que dificultades muy delicadas de orden conceptual no tardan en presentarse a medida que profundizamos en ellas. Así por ejemplo, la fundamentación rigurosa de la intensidad estocástica se establece en el marco de la llamada "Teoría general de procesos", cuya primera asimilación no es nada inmediata. Los procesos puntuales siendo de una estructura muy sencilla, cabe preguntarse si no existe un modo de representarlos que simplifique de alguna manera su estudio.

En este trabajo, se busca una representación de tipo binario para procesos puntuales clásicos que satisfacen ciertas condiciones, usando para ello los razonamientos del análisis no standard (ANS), y se deriva de esta representación la noción de proceso puntual en tiempo discreto. En la última sección se discute el interés que tendría la teoría de procesos puntuales en tiempo discreto para el estudio de los procesos clásicos.

El marco formal adoptado para el análisis no standard es el de la "Internal Set Theory" (IST), cuya exposición general puede hallarse en [2]. Se usará la terminología y notación standard siguientes: un número real x es *infinitesimal* si $|x| \leq a$ para todo $a > 0$ standard. Es llamado *ilimitado* si $|x| > a$ para todo real a standard. Si x, y son reales denotamos: $x \approx y$ si $x - y$ es infinitesimal, $x \approx \infty$ si x es ilimitado, $x \ll \infty$ si x no es ilimitado positivo.

2 Representación binaria de un proceso puntual standard

Una idea simplificadora para el estudio de dichos procesos es la siguiente: supongamos que el proceso puntual es *no explosivo*, es decir que para todo $t \in I\!R_+$ se tiene $N_t < \infty$ c.s. (lo que equivale a que la sucesión $(T_n, n \in N)$ diverja al infinito). Entonces bajo esta hipótesis es fácil ver que para cada realización ω del proceso puntual y cada $t \in I\!R_+$ existe una partición $\Pi(\omega)$, no única, del intervalo $[0, t]$, tal que en cada intervalo $[t_i, t_{i+1}[$ de $\Pi(\omega)$ solo uno de los eventos T_n ocurre. Esto equivale a que los incrementos $N_{t_{i+1}} - N_{t_i}$ (que denotamos por dN_i) valgan todos 0 ó 1 para la realización ω considerada. Como esta propiedad es preservada si se refina la partición $\Pi(\omega)$, se deduce que para un proceso con un *número finito de realizaciones* existe una partición Π de $[0, t]$ con la siguiente propiedad: para *todas* las realizaciones del proceso puntual los incrementos dN_i valen todos 0 ó 1. De esto se obtiene que el proceso puntual se puede representar como una sucesión finita de variables de Bernoulli indexadas por el tiempo, que llamaremos *representación binaria del proceso puntual.*

Desgraciadamente con el razonamiento anterior es imposible en la mayoría de los casos asegurar una representación binaria dado que el número de realizaciones de un proceso puntual es en general infinito (por ejemplo el de Poisson). Podemos sin embargo rescatar esta idea recurriendo al razonamiento no standard. Llamaremos una partición Π de $[0, t]$ un *casi intervalo* si cualesquiera puntos t_i, t_{i+1} de Π adyacentes son infinitamente cercanos. Un casi intervalo es pues un conjunto no standard y su cardinalidad es ilimitada si el intervalo $[0, t]$ es standard. Se recuerda que en la IST todo objeto definido mediante una fórmula interna con todas las constantes standard es standard.

Teorema 1 (Representación binaria no standard): *Sea un proceso puntual N standard no explosivo definido en un espacio standard, y un intervalo standard $[0, t]$. Existe entonces* *una representación binaria de N definida por un casi intervalo* Π *de* $[0,t]$*, salvo en un evento de probabilidad infinitesimal.* Π *contiene además todos los reales standard de* $[0,t]$.

DEMOSTRACIÓN: Basta suponer que N no es casi siempre igual al proceso constante 0. Para cada entero n consideremos la partición regular Π_n de $[0,t]$ constituida por los puntos $t_{i,n} = i * t/n$, $i = 0, \ldots, n$. De la hipótesis de no explosión se obtiene:

$$M_n = \max_{i=0,\ldots,n-1} dN_{i,n\, n \longrightarrow \infty} \longrightarrow 1 \text{ ó } 0, \quad \text{casi siempre.}$$

Si la sucesión de estos máximos tiende a 0, es constante e igual a 0. En el evento H donde ésta converge a 1, de probabilidad no nula, hay convergencia en probabilidad (con respecto a la probabilidad condicional $P(\odot|H)$). Pero siendo además una sucesión de enteros se tiene :

$$P(M_n > 1|H) \leq P(|M_n - 1| \geq 1/2|H)_{n \longrightarrow \infty} \longrightarrow 0.$$

En resumen obtenemos: $P(M_n > 1)_{n \longrightarrow \infty} \longrightarrow 0$. Sea ahora la sucesión standard $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $b_n = P(M_n > 1)$. De la interpretación no standard de la convergencia a 0 de una sucesión standard se tiene: $b_n \approx 0$ para n ilimitado. Sea n ilimitado y consideremos el evento $F = \{M_n > 1\}$. Entonces $P(F) \approx 0$, y fuera de F todos los incrementos $dN_{i,n}$ son menores o iguales a 1, es decir 0 ó 1. Basta tomar entonces Π como el casi intervalo de $[0,t]$ definido por una partición regular Π_n no standard cualquiera. Como todos los reales standard de $[0,t]$ están contenidos en un conjunto finito C (principio de idealización), el último resultado del teorema se obtiene con el refinamiento de Π_n y C, que no altera la representación binaria. ■

Una de las consecuencias importantes del teorema anterior es la siguiente: sea F el evento de probabilidad infinitesimal mencionado en el teorema 1 y Π el casi intervalo asociado a la representación binaria de N. Entonces definimos un proceso N', indexado por los puntos de Π, por:

$$N'_t = N_t \text{ para } t \in \Pi, \omega \in F; \quad N' = 0 \text{ en } F.$$

El proceso N' solo posee un número finito de realizaciones puesto que los incrementos de N' en Π, dN'_i, pertenecen a $\{0,1\}$ y que Π es finito. Por lo tanto puede verse como definido en un espacio finito de probabilidades. Llamamos a N' proceso *aledaño* a N. (La definición adoptada aquí para proceso aledaño es un poco más fuerte que la presentada en [3] bajo el nombre de nearby process). Este proceso es un ejemplo de lo que llamaremos en lo sucesivo *procesos puntuales en tiempo discreto*, que es una clase de procesos finitamente indexados y definidos en un espacio de probabilidad finito. El interés de la teoría de los espacios de probabilidad finitos ha sido objeto de estudio en la literatura no standard y uno de nuestros objetivos es buscar una teoría en espacios finitos para procesos puntuales con una noción adecuada para dichos procesos.

3 Esbozo de una teoría de procesos puntuales en tiempo discreto

Nos situamos en un espacio finito de probabilidades (Ω, P) provisto de una filtración $F = (F_{t \in T})$, donde Π es un casi intervalo con punto inicial 0 y final b. Para cada $t \in \Pi - \{b\}$

denotamos por $t+dt$ el punto de Π más próximo superior a t.

De la discusión hecha en la sección podemos desprender una noción sobre una clase de procesos en (Ω, P). Llamaremos *proceso puntual en tiempo discreto* sobre (Π, Ω), indexado por Π, un proceso N tal que para $t \in \Pi - \{b\} : dN_t = N_{t+dt} - N_t \in \{0,1\}$ y $N_0 = 0$. Se supondrá además que N es un proceso adaptado a la filtración F, es decir N_t es elemento de F_t para todo t en Π. Siendo N_t la suma de incrementos de la forma dN_s, los valores que toma N son siempre enteros.

El interés por desarrollar una teoría (o más bien un esbozo) para esta clase de procesos se justifica en gran parte por no hallar mención de esta nueva noción en la literatura de la matemática no standard, a no ser por ciertos intentos de sistematizar en términos finitistas el llamado proceso de Poisson (a este proceso me referiré posteriormente) y que pueden hallarse en el libro de Stroyan y Bayod, [4]. Presento entonces aquí un esbozo de una teoría general, para lo cual me apoyaré en los resultados obtenidos por Nelson sobre procesos estocásticos en espacios finitos, y que pueden hallarse en [3]. Es de aclarar también que esta sección puede leerse independientemente de la sección 1.

Si definimos un proceso Y por: $dY_t = E[dN_t \,|\, F_t]$, $Y_0 = 0$, deducimos una descomposición aditiva de N de la forma: $N = Y + Z$, siendo Z una F-martingala. Llamamos Y *F-compensador previsible de N* y lo denotamos N^p. Si la filtración F está sobreentendida se dirá simplemente compensador de N. De la misma manera el proceso cuyo incremento en t se escribe $dN^p(t)/dt$, se denominará *intensidad* (o F-intensidad) de N. Es de observar que todos estos conceptos dependen de la filtración F.

Propiedades del compensador previsible:

a) $d\,N_t^p \leq 1$, para todo $t \in \Pi - \{b\}$,

b) si X es un proceso F-adaptado, el proceso denotado $X * (N - N^p)$ y definido por: $X * (N - N^p)_0 = 0$ y $d(X * (N - N^p))_t = X_t(dN_t - dN_t^p)$, es una F-martingala nula en 0.

La propiedad a) se deduce de que $dN_t \leq 1$, y de que la esperanza condicional preserva el orden. La propiedad b) es una consecuencia inmediata de las propiedades de una integral estocástica ([3][cáp 9]), con respecto a una martingala en un casi intervalo. En efecto, por definición $N - N^p$ es una F-martingala nula en 0, y la definición de $X * (N - N^p)$, como anteriormente, corresponde a la definición de integral estocástica con respecto a la martingala $N - N^p$.

Sean dos filtraciones F, F' definidas por un casi intervalo Π y un proceso puntual en tiempo discreto N adaptado a ambas. Supongamos que $F_t \subset F'_t$ para todo $t \in \Pi$. Sea h (resp. h') la F-intensidad de N, (resp. la F'-intensidad de N). Es una consecuencia del doble condicionamiento con respecto a álgebras que :

$$h(t)dt = E[dN(t)|F_t] = E[E[dN(t)|F'_t]|F_t] = E[h'(t)dt|F_t] = E[h'(t)|F_t]dt$$

y dividiendo entre dt obtenemos la igualdad: $E[h'(t)|Ft] = h(t)$. Obtenemos :

Proposición 1 *Si h (resp. h') es la F-intensidad de N, (resp. la F'-intensidad de N) entonces: $E[h'(t)|F_t] = h(t)$.*

Dado un proceso puntual en tiempo discreto N, decimos que $t \in \Pi$ es una discontinuidad fija de N si N no es c.s. continua en t. Según un resultado de la teoría de los espacios finitos la propiedad “casi siempre N es continuo en t” es equivalente a:

$$\text{para todo } r \gg 0, \text{ y } h \approx 0: \qquad P(\max_{|s-t|\leq h} |N_s - N_t| \geq r) \approx 0$$

([3, cáp. 7]. Dado que N es creciente lo anterior equivale a :

$$\text{para todo } r \gg 0, \text{ y } h \approx 0: \quad P(|N_{ant(t+h)} - N_t| \geq r \text{ ó } |N_{suc(t-h)} - N_t| \geq r) \approx 0$$

donde $ant(u)$ (resp. $suc(u)$), denota el punto de Π más cercano superior a u (resp. más cercano inferior a u). En el teorema que sigue se da una condición suficiente para que N sea c.s. continua en t.

Teorema 2 *Sea I la función en Π definida por $I(t) = E(N_t)$. Entonces N es continua en t c.s. si I es continua en t.*

Demostración: Para el primer aserto, y según la caracterización anterior, basta demostrar para $r \gg 0$ y $h \approx 0$ que:

$$P(|N_{ant(t+h)} - N_t| \geq r) \approx 0, \;\; P(|N_{suc(t-h)} - N_t| \geq r) \approx 0.$$

Sea $u = ant(t + h)$. Entonces $u \geq t$, $u \in \Pi$. Como $N_u - N_t$ es positiva con valores enteros, el evento $\{|N_u - N_t| \geq r\}$ coincide con $\{N_u - N_t \geq 1\}$. Pero

$$P(\{N_u - N_t \geq 1\}) \leq E(N_u - N_t) \approx 0,$$

lo que demuestra la primera relación. De manera análoga se deduce la otra. ■

Para las nociones que introduciremos a continuación utilizaremos algunos resultados especiales que se encuentran en el apéndice de este trabajo. Por A se denotará una subálgebra de F_0. Un proceso puntual N en tiempo discreto F-adaptado sobre Ω se dice de *incrementos condicionalmente independientes con respecto a* A, si para todo $s \in \Pi - \{b\}$ el incremento dN_s es A-independiente de F_s. Abreviamos diciendo que N es $IIF//A$. Para un tal proceso N se tiene entonces:

$$E[\, dN_s | F_s \,] = E_A[\, dN_s \,], \qquad \text{para todo } s \in \Pi - \{b\}.$$

De ésto resulta que el F-compensador previsible de N está determinado por una F-intensidad cuyos incrementos son todos variables de A. Se tiene además: $N_t^p = E_A[N_t]$. Recíprocamente, si el F-compensador de N^p de N es de la forma $N_t^p = EA[N_t]$, entonces N es un $IIF//A$; en efecto la variable dN_t tiene valores 0 ó 1 y cumple la relación $E(dN_t|F_s) = E(dN_t|A)$, y el resultado se deduce del lema 2 del apéndice.

Si el álgebra A es la trivial, entonces en la definición anterior la esperanza con respecto a A coincide con la esperanza E no condicionada y por lo tanto:

$$E[dN_s|F_s] = E[dN_s], \qquad \text{para todo } s \in \Pi - \{b\}.$$

En este caso se dice simplemente que N es de *incrementos independientes con respecto a* F, propiedad que se abreviará por IIF. Para un IIF, el compensador F-previsible y la F-intensidad de N son determinísticos. En este caso $N_t^p = E[N_t]$.

Como es sabido para una variable aleatoria positiva X la condición "$X \approx \infty$ *c.s.*" implica "$E(X) \approx \infty$", mientras que "$E(X) \ll \infty$" implica "$X \ll \infty$ *c.s.*". En el caso de un proceso IIF estas condiciones resultan equivalentes como se enuncia a continuación:

Teorema 3 *Sea N un IIF. Entonces para $u, t \in \Pi,\ u > t$:*

a) $E(N_u - N_t) \approx \infty$ si y solo si $N_u - N_t \ll \infty$ c.s.

b) $E(N_u - N_t) \ll \infty$ si y solo si $N_u - N_t \ll \infty$ c.s.

Demostración: Sea $\Pi(t, u)$ el conjunto finito $\{s \in \Pi : t \leq s < u\}$ y consideremos la sucesión de eventos $A_s = \{dN_s = 1\},\ s \in \Pi(t, u)$, que son independientes en conjunto. Entonces:

$$E(N_u - N_t) = \sum_{s \in \Pi(t,u)} P(A_s).$$

Ahora bien, las variables dN_s siendo binarias, para cada $\omega \in \Omega$ el número $K(w)$ de $s \in \Pi(t, u)$ tales que $\omega \in A_s$ coincide con $N_u - N_t$, y los asertos a) y b) se deducen de la versión cardinal del teorema de Borel-Cantelli (ver [3, cáp. 7], para una demostración no standard de dicho teorema). ■

Entre los procesos puntuales con la propiedad de incrementos condicionalmente independientes se destacan los procesos de Poisson dobles: decimos que N $IIF//A$ es doblemente de Poisson si para $t \in \Pi$, casi siempre N es continuo en t, o en otras palabras N no posee discontinuidades fijas. Si N es un IIF se dirá simplemente que es de Poisson si la propiedad anterior se cumple. Además entre los procesos de Poisson cabe destacar los llamados homogéneos: son aquéllos para los cuales el incremento del compensador N^p se escribe: $d\,N^p(t) = \lambda\, dt$, donde λ es una constante positiva. La F-intensidad de un proceso de Poisson homogéneo es pues un proceso constante en Π.

En el teorema que sigue se da para el caso de un IIF una condición necesaria y suficiente para la ausencia de discontinuidad fija que completa el resultado general del teorema 2:

Teorema 4 *Sea N un IIF e I la función en Π definida por $I(t) = E(N_t)$. Entonces N es continua en t c.s. si y solo si I es continua en t.*

Demostración: La condición necesaria resulta del teorema 2. Demostremos que es suficiente en el caso de un IIF. Sea $u \approx t,\ u \in \Pi$, y supongamos $u > t$, y sea $\Pi(t, u)$ como en la prueba del teorema 3. Consideremos la sucesión de eventos $A_s = \{dN_s = 1\},\ s \in \Pi(t, u)$, independientes en conjunto pues N es IIF. Entonces se tiene:

$$(*) : \qquad E(N_u - N_t) = \sum_{t \leq s < u} E(dN_s) = \sum_{s \in \Pi(t,u)} P(A_s).$$

Si N es c.s. continua en t, entonces $P(N_u - N_t = 0) \approx 1$. Pero por otro lado $\{N_u - N_t = 0\} = \bigcap_{s\in\Pi(t,u)} A_s^c$, y tomando probabilidades tendremos :

$$1 \approx P\{N_u - N_t = 0\} = P\Big(\bigcap_{s\in\Pi(t,u)} A_c^s\Big)$$

$$= \Pi_{s\in\Pi(t,u)}(1 - P(A_s)) \leq \exp\Big(-\sum_{s\in\Pi(t,u)} P(A_s)\Big)$$

dado que $1 - x \leq \exp(-x)$. Las desigualdades anteriores implican que

$$\sum_{s\in\Pi(t,u)} P(A_s) \approx 0$$

y según (*) que $E(N_u - N_t) \approx 0$, es decir la continuidad de I en t. ■

Del teorema 2 y el anterior se deduce el corolario:

Corolario 1

a) Si N es un IIF su compensador, es continuo en Π si y solo si N es de Poisson.

b) Si N es de Poisson homogéneo de intensidad λ, entonces para $u, t \in \Pi$, $u > t$, se cumple:

$$N_u - N_t \approx \infty \text{ c.s. si y solo si } \lambda(u-t) \approx \infty,$$

$$N_u - N_t \ll \infty \text{ c.s. si } \lambda(u-t) \ll \infty.$$

4 Objetivos de una teoría de procesos puntuales en tiempo discreto

En el bosquejo de teoría de la sección anterior me he limitado a mencionar solo unos cuantos resultados que pueden dar una idea de su futuro desarrollo. Es conveniente ahora señalar algunos aspectos de interés de esta teoría en relación con el estudio de los análogos en tiempo continuo.

Si se desea establecer un teorema sobre procesos puntuales, clásico análogo a uno de los de en tiempo discreto, la manera general de proceder sería la siguiente. Siendo un teorema clásico, es un enunciado interno y basta suponer que es cierto para procesos standard en espacios standard, todas las demás constantes siendo standard. Es el axioma del transfer. Para un tal proceso existe, según el teorema 1, uno en tiempo discreto que es aledaño ("nearby process"). Si para el proceso aledaño el teorema análogo en espacios finitos existe y si las hipótesis y conclusiones son equivalentes a las del teorema clásico, entonces queda demostrado el teorema clásico.

Podemos ilustrar esta idea con el teorema 2 de la sección 2: se busca su análogo clásico para lo cual la noción de continuidad casi segura en un punto es la dada en la teoría clásica. Basta probarlo para un proceso standard, en intervalos standard, y el punto t standard. Se considera su proceso aledaño N', puntual en tiempo discreto. La función $I'(t) = E'(N'_t)$ es aledaña a $I(t) = E(N_t)$ en el casi intervalo Π de definición. Según el teorema A.7 en [3]: I es casi siempre continua en t si y solo si I' es c.s. continua en t, N es casi siempre continua en t si y solo si N' es c.s. continua en t. De acuerdo a lo antes mencionado el teorema 2 clásico queda probado.

Al seguir los pasos de este procedimiento es necesario usar los teoremas de equivalencia de propiedades analíticas y de propiedades probabilísticas entre procesos standard y sus aledaños, algunas de las cuales se pueden encontrar en el apéndice de [3].

La breve teoría sobre procesos puntuales en tiempo discreto se ha presentado en la forma más autocontenida posible, pues recurre unicamente a los espacios finitos de probabilidades y a las técnicas del análisis no standard. En este sentido seguimos el planteamiento de Nelson sobre el papel del análisis no standard en matemáticas: "una teoría elemental (sobre espacios finitos), posee el mismo contenido científico que la teoría convencional". Si esta tesis es válida, entonces las ideas desarrolladas en este trabajo podrían servir de teoría alternativa sobre los procesos puntuales con las ventajas que ofrece los razonamientos finitistas.

Algunas discusiones sobre procesos puntuales según el enfoque no standard pueden hallarse también en [4], pero siguiendo el punto de vista de las superestructuras.

Apéndice: Complementos sobre álgebras e independencia condicional

Los resultados de este apéndice pueden probarse en el marco de un espacio finito de una manera mucho más sencilla que en la teoría general, y por esta razón me limito a enunciarlos dejando al lector su prueba (a excepción del lema 2). Para las pruebas clásicas puede consultarse [1], en su apéndice.

La noción siguiente extiende la noción de independencia entre variables: dada una álgebra A se dice que las álgebras $A_1, \ldots, A_n$ son independientes con respecto a A, o A-independientes, si para toda $X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n$ se tiene:
$E_A(X_1 \ldots X_n) = E_A(X_1) \cdots E_A(X_n)$. Si el álgebra A es la trivial, en la definición anterior la esperanza con respecto a A coincide con E y se habla simplemente de independencia. Cuando $n = 2$ y A_1 es el álgebra generada por una variable X, se dice que X y A_2 son A-independientes si A_1, A_2 son A-independientes.

Proposición 2 *Sea una álgebra A que es subálgebra de A_n. Entonces $A_1, \ldots, A_n$ son A-independientes si y sólo si para toda $X_1 \in A_1, \ldots, X_{n-1} \in A_{n-1}$:*

$$E_{A(n)}(X_1 \ldots X_{n-1}) = E_A(X_1) \cdots E_A(Xn - 1).$$

Lema 1 (asociatividad de la independencia condicional) *Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ álgebras A-independientes. Sea I un conjunto de índices de $\{1, \ldots, n\}$ y J es el complementario de I. Sea C el álgebra engendrada por $(A_i, i \in I)$ y D el álgebra engendrada por $(A_j, j \in J)$. Entonces C y D son A-independientes.*

Lema 2 *Si X es una variable binaria tal que $E(X|F) = E(X|A)$, A siendo subálgebra de F, entonces X es A-independiente de F.*

DEMOSTRACIÓN: Si f está definida en $\{0,1\}$, podemos escribir:
$E(f(X)|F) = f(1)E(X|F) + f(0)(1 - E(X|F))$. Siendo esta variable elemento de A, se deduce que $f(X)$ es A-independiente de F (proposición 1 del apéndice), de donde el resultado buscado. ■

Referencias

[1] Brémaud (1981) *Point processes and queues.* Springer–Verlag, New York.

[2] Nelson (1977) "Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83(6), nov.

[3] Nelson (1987) *Radically elementary probability theory.* Princeton University Press.

[4] Stroyan, Bayod (1986) *Foundations of infinitesimal stochastic analysis.* North Holland, Amsterdam.

[5] Jacobsen (1982) *Statistical Analysis of Counting Processes.* Springer–Verlag, Lecture Notes in Statistics.