

MA-707: GEOMETRÍA NO CONMUTATIVA

William J. Ugalde y Joseph C. Várilly

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

I Ciclo Lectivo del 2010

Introducción

En los últimos años, un nuevo enfoque matemático ha emergido como una disciplina importante: la *geometría no conmutativa*. Una de sus motivaciones primarias ha sido la física cuántica, que sugiere que para describir la “geometría del mundo”, las tres (o cuatro) coordenadas cartesianas no son suficientes. Por otro lado, la geometría algebraica moderna pone gran énfasis en el tratamiento categórico de las variedades, más allá de los conjuntos de soluciones de ecuaciones polinomiales; este tratamiento ha dado lugar a diversos tipos de “espacios generalizados”.

Desde 1980, cuando surgió el primer ejemplo de un espacio generalizado con una geometría diferencial bien definida, estas tendencias han sido concretadas en una teoría impulsada por Alain Connes y sus seguidores. Este seminario pretende ser una invitación a los fundamentos de esta nueva geometría. El prerrequisito esencial es un buen curso de álgebra lineal.

Programáticamente, esta disciplina es una fusión de temas del álgebra y del análisis con los tópicos propios de la geometría. En este sentido, ejemplifica la *unificación de las matemáticas* que caracteriza el siglo XXI. Como tal, es un tema “transversal” al pensum ordinario de matemáticas en pregrado, ya que no se subdivide fácilmente en cubículos.

Conceptualmente, se trata de una extensión de la geometría diferencial ordinaria. Una variedad diferencial puede ser descrita, en buena medida, por su *álgebra de coordenadas*, es decir, la colección de funciones suaves definidas sobre ella (con valores reales o complejos, dependiendo del caso). En particular, un punto queda determinada por la “evaluación” en dicho punto, la cual asigna a cada función coordenada un valor numérico específico. La generalización esencial consiste en reemplazar el juego de coordenadas por *un álgebra no conmutativa* —de ahí el nombre de nuestra temática— para luego extraer de ella la información geométrica deseada.

Ahora bien: las álgebras no conmutativas admiten pocos funcionales análogos a las evaluaciones puntuales; por lo tanto, hay un riesgo de perder la posibilidad de identificar puntos en el “espacio generalizado” subyacente. Esto es precisamente una de las dificultades que presenta la física cuántica cuando impide la determinación simultánea de la posición y momento de una partícula elemental: hay que aprender a tolerar “espacios sin puntos”. Un hilo conductor de la geometría no conmutativa es la posibilidad que ofrece de contemplar el mundo subatómico.

En este seminario, partiremos de unas variedades diferenciales muy sencillas de baja dimensión y alta simetría: la recta \mathbb{R} y el círculo \mathbb{S}^1 , en dimensión uno; el plano \mathbb{R}^2 , el toro \mathbb{T}^2 y la esfera \mathbb{S}^2 , en dimensión dos; y sus análogos \mathbb{R}^3 , \mathbb{T}^3 y \mathbb{S}^3 en dimensión tres. Además, conviene considerar el ejemplo humilde de un espacio finito F , el cual es un ejemplo trivial de variedad diferencial de dimensión cero.

Nuestra tarea consiste primeramente en aprender cómo comprender cada uno de estos espacios desde sus álgebras de coordenadas. En seguida, hay que darse cuenta de las diversas maneras de generalizar estas álgebras coordenadas para introducir las llamadas “espacios cuánticos” que son sus primos hermanos. Un proceso apodado “torcedura” da lugar al *toro no conmutativo* \mathbb{T}_θ^2 y al *plano de Moyal* \mathbb{R}_θ^2 . Una receta diferente, llamada “ q -deformación”, produce las *esferas cuánticas* \mathbb{S}_q^2 y \mathbb{S}_q^3 . En cada caso, los nuevos objetos no son únicos, sino que dependen de uno o más parámetros reales θ ó q . (En dimensión uno no se obtiene ejemplos nuevos.)

Los espacios no conmutativos pueden estudiarse en diversos niveles. En el nivel topológico, donde lo importante es determinar si el espacio es compacto o conexo, basta usar (el análogo de) un álgebra de funciones continuas como sus coordenadas. En el nivel diferencial, hay que usar álgebras de funciones suaves. En el nivel métrico, hay que emplear una herramienta que, ordinariamente, permite medir la distancia entre dos puntos. Esta herramienta, que se toma prestado de la mecánica cuántica, es el llamado operador de Dirac.

Es imperativo saber cómo calcular el tamaño global (longitud, área o volumen, según la dimensión) de un espacio métrico de tamaño finito —en el caso ordinario, de una variedad compacta. Una de los resultados más profundos de la geometría no conmutativa es que esta información reside en los autovalores del operador de Dirac. Se ejemplificará este cálculo en cada uno de los casos concretos mencionados anteriormente.

A continuación, se ofrece un índice de los tópicos que se pretende estudiar en el seminario. Este podrá sufrir pequeñas modificaciones de acuerdo con el interés de los participantes.

Temario

- ★ Espacios finitos discretos y no discretos: un preaviso de espacios cuánticos.
 - ★ Algebras conmutativas de coordenadas. La correspondencia de Guelfand, el teorema de Guelfand y Naïmark. Introducción a las C^* -álgebras.
 - ★ El concepto de fibrado vectorial y su módulo de secciones. Módulos proyectivos. La correspondencia de Serre y Swan.
 - ★ El círculo \mathbb{S}^1 . La coordenada $z = e^{i\theta}$ y los polinomios de Fourier. Sus fibrados de línea y la franja de Möbius. El operador $-id/d\theta$ y sus autovalores, la fórmula de la longitud de arco.
 - ★ La geometría de la esfera \mathbb{S}^2 : coordenadas angulares y complejas. Fibrados de línea sobre \mathbb{S}^2 , el fibrado de espín. Métricas, conexiones de Levi-Civita y acciones de Clifford; fórmulas para el caso de \mathbb{S}^2 . Armónicos esféricos y la diagonalización del operador de Dirac.
 - ★ La geometría de la esfera \mathbb{S}^3 : ángulos de Euler. El grupo de Lie $SU(2)$ y el isomorfismo entre $SU(2)$ y \mathbb{S}^3 . El fibrado de espín de \mathbb{S}^3 y su operador de Dirac. Cálculo del espectro de este operador, con sus multiplicidades.
 - ★ El toro no conmutativo \mathbb{T}_θ^2 . La relación de conmutación de Weyl. Funciones suaves sobre \mathbb{T}^2 y sus series de Fourier. La traza normalizada y un espacio de Hilbert para el toro \mathbb{T}_θ^2 . El espacio de espinores y un operador de Dirac para \mathbb{T}_θ^2 .
 - ★ La medición de distancias: de las geodésicas al método espectral. El concepto de triple espectral.
 - ★ El concepto de q -deformación de un álgebra de coordenadas. Las coordenadas del grupo cuántico $SU_q(2)$ y su álgebra de simetría. El estado de Haar y las representaciones de $SU_q(2)$. Su operador de Dirac isospectral.
 - ★ Area y volumen en geometría no conmutativa. Trazas de operadores e integrales de funciones, la fórmula de Connes. Cálculo de $\text{Area}(\mathbb{S}^2)$ y $\text{Vol}(\mathbb{S}^3)$ por el método espectral.
-

Bibliografía

Hay pocos libros que tratan la geometría no conmutativa a nivel de pregrado. Sin embargo, hay varias monografías más avanzadas, que incluyen algunos temas con menores prerequisites. A continuación se mencionan algunos de los libros y artículos más relevantes.

1. Alain Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, London, 1994.
 2. Alain Connes y Matilde Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
 3. Ludwik Dąbrowski *et al.*, "The Dirac operator on $SU_q(2)$ ", *Commun. Math. Phys.* **259**, 729–759 (2005).
 4. José M. Gracia-Bondía, Joseph C. Várilly y Héctor Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser, Boston, 2001.
 5. Masoud Khalkhali, *Basic Noncommutative Geometry*, EMS Publishing House, Zürich, 2009.
 6. Giovanni Landi, *An Introduction to Noncommutative Spaces and their Geometry*, *Lecture Notes in Physics* **m51**, Springer, Berlin, 1997.
 7. Marc A. Rieffel, "Compact quantum metric spaces", en *Operator Algebras, Quantization, and Noncommutative Geometry*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004; pp. 315–330.
 8. Walter van Suijlekom, "The geometry of noncommutative spheres and their symmetries", tesis doctoral, SISSA, Trieste, Italia, 2005.
 9. Thomas Timmermann, *An Invitation to Quantum Groups and Duality*, EMS Publishing House, Zürich, 2008.
 10. William J. Ugalde, "Operadores de Dirac en fibrados de base esférica", tesis de maestría, Universidad de Costa Rica, 1996.
 11. Joseph C. Várilly, "Quantum symmetry groups of noncommutative spheres", *Commun. Math. Phys.* **221** (2001), 511–523.
 12. Joseph C. Várilly, *An Introduction to Noncommutative Geometry*, *EMS Lectures in Mathematics* **4**, EMS Publishing House, Zürich, 2006.
-

1 Espacios y álgebras de coordenadas

Isaac Newton publicó su gran libro sobre las leyes de movimiento y la gravitación¹ en 1687. Su tercera parte fue titulado *De mundi systemate* y explica cómo la ley de gravitación concuerda con los movimientos de los planetas, satélites, cometas y demás componentes del “sistema del mundo” (modernamente apodado el “sistema solar”); de ahí se infiere su aplicabilidad a todo cuerpo celestial, incluyendo las estrellas. Newton quiso entender el sistema del mundo, es decir, la composición del universo, mediante leyes universales de la física. Hoy en día enfrentamos un proyecto más modesto: ¿cómo entender la *geometría* del mundo?

Durante los siglos XIX y XX, la ciencia empezó a comprender el universo en escalas microscópicas, en contraste con la escala cosmológica que atrajo la atención de Newton. Con la teoría atómica de Dalton (anticipada, aunque sin respaldo empírico, por los griegos antiguos) se llegó a comprender que la materia no es indefinidamente divisible, sino que se compone de átomos; los cuales, a su vez, contienen protones, neutrones, electrones y diversas otras partículas; los protones y neutrones son compuestos de tres “quarks” cada uno. Aquéllas partículas que aparentemente no tienen estructura interna, como los quarks, electrones y neutrinos, son los “constituyentes fundamentales de la materia”, en la terminología de los físicos.

Ahora bien, estos constituyentes fundamentales no se comportan como los “partículas puntuales” de la mecánica clásica, ni obedecen estrictamente las leyes de movimiento de Newton. Clásicamente, un cuerpo pequeño (Newton hablaba de *corpusculi*) se caracteriza por ciertas variables q_1, \dots, q_r de configuración (posiciones y ángulos) que tienen parejas p_1, \dots, p_r (momentos y momentos angulares). Una *coordenada*, es decir, una función específica $f(q_1, \dots, q_r, p_1, \dots, p_r)$, proporciona información no ambigua sobre el estado físico de la partícula de marras. Sin embargo, en escalas subatómicas no es posible determinar todas estas variables con total precisión, debido al *principio de incertidumbre* descubierto por Heisenberg: $(\Delta q_i)(\Delta p_i) \geq 4\pi\hbar$, donde $\hbar \doteq 1.0545716 \times 10^{-34}$ Joule-segundos es una pequeña constante física, llamada la *constante de Planck*.²

Por lo tanto, en la geometría en escalas subatómicas el concepto de “punto”

¹Isaac Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, Londres, 1687.

²Aquí Δq_i denota la desviación estándar en la medición de la variable q_i ; la desigualdad expresa el hecho experimental de que una medida precisa de q_i es incompatible con una medida precisa de p_i . La constante introducida originalmente por Planck fue $h = 2\pi\hbar$, pero la versión \hbar es más usado actualmente.

pierde relevancia. De hecho, se estima que sería imposible efectuar medidas de longitud más pequeñas que la *longitud de Planck* $\ell_P \doteq 1.6163 \times 10^{-35}$ metros. Evidentemente, esta longitud es tan pequeña que puede despreciarse a escalas macroscópicas; pero es relevante no sólo para la física de partículas elementales sino también para la cosmología (podría ser el radio del universo un instante después del “Big Bang”).

Estas consideraciones históricas motivan el problema matemático de concebir *una geometría sin puntos* que eventualmente, con suficiente desarrollo, podrá modelar la “geometría del mundo”. Este proyecto matemático se llama la *geometría no conmutativa*.

1.1 Las coordenadas de espacios finitos

No hay problema fundamental alguno de la mecánica cuántica que no puede entenderse en términos de matrices 2×2 . (Pero eso nos dice algo importante acerca de las matrices 2×2 .)

— Eugene P. Wigner

La idea clave de la geometría no conmutativa es la de *reemplazar los espacios* (con o sin puntos) *por sus álgebras de coordenadas*. Esta idea también está presente en la llamada geometría algebraica, donde una variedad algebraica es sustituida por su anillo de funciones regulares.³ Pero hay algunas diferencias de énfasis entre los dos enfoques. En primer lugar, debido a sus orígenes en ideas físicas, el cuerpo de base suele ser \mathbb{R} (los números reales) o bien \mathbb{C} (los números complejos). En geometría algebraica, debido a su patrocinio por la teoría de los números, el cuerpo de base es arbitrario, muchas veces de característica no cero, y el ejemplo de mayor interés es \mathbb{Q} (los números racionales). En años recientes, ha habido un *rapprochement* entre las dos teorías, pero por ahora solamente en la frontera de investigación.⁴

³Una variedad algebraica V en un espacio vectorial \mathbb{K}^n (sobre un cuerpo \mathbb{K}) es un conjunto en donde se anulan ciertos polinomios de n variables; el cociente del anillo de polinomios por el ideal de aquellos polinomios que se anulan sobre V se llama el anillo de funciones regulares en V .

⁴El libro reciente de Alain Connes y Matilde Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives* (American Mathematical Society, Providence, RI, 2008) explora esta frontera entre la geometría no conmutativa y la teoría de los números.

El calificativo *no conmutativa* indica que las coordenadas puedan formar un álgebra no conmutativa, en contraste con la situación “clásica” en donde un conjunto de puntos posee un álgebra de coordenadas conmutativa.

Antes de seguir, conviene aclarar ciertos términos.

Definición 1.1. Un **cuerpo** \mathbb{K} es un grupo abeliano bajo una operación suma, junto con un producto asociativo, conmutativo y distributivo sobre la suma, con elemento unidad 1, tal que cada elemento no cero $a \in \mathbb{K}$ posee un inverso multiplicativo a^{-1} , es decir, $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ en \mathbb{K} .

Un **anillo** R es un grupo abeliano bajo una operación suma, dotado con un *producto* asociativo y distributivo sobre la suma, con elemento unidad 1, que puede ser conmutativo o no. Algunos de sus elementos no ceros, quizás no todos, poseen inversos; ellos forman un grupo multiplicativo R^\times .

Un **espacio vectorial** V sobre el cuerpo \mathbb{K} es un grupo abeliano bajo una operación suma, que posee una operación de *multiplicación escalar* $(\lambda, v) \mapsto \lambda v \in V$, para $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in V$, que es distributiva sobre la suma y cumple $1v = v$ para $v \in V$.

Un **álgebra** A sobre un cuerpo \mathbb{K} es un anillo que es a su vez un espacio vectorial sobre \mathbb{K} , tal que $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$ para $\lambda \in \mathbb{K}$ y $a, b \in A$.

Los ejemplos familiares de cuerpos incluyen \mathbb{Q} , \mathbb{R} y \mathbb{C} . El anillo de cuaterniones \mathbb{H} (que se estudiará en detalle más adelante) cumple todas las propiedades de un cuerpo salvo la conmutatividad. Las matrices $n \times n$ con entradas en \mathbb{K} forman un álgebra sobre \mathbb{K} , denotada $M_n(\mathbb{K})$; no es conmutativa si $n > 1$.

En lo sucesivo, todas las álgebras discutidas serán complejas (es decir, con \mathbb{C} como su cuerpo de base), salvo indicación contraria.⁵

► Si $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ es un conjunto finito, llámese **coordenada** de X una asignación de un valor numérico a cada punto de X . De este modo, una coordenada es una lista ordenada $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ de números (complejos), es decir, un elemento de \mathbb{C}^n ; o equivalentemente, una función $f: X \rightarrow \mathbb{C}$. Tradicionalmente, la palabra “coordenada” se aplica a una sola entrada $f(x_k)$ de esta lista, pero es preferible para nuestros propósitos considerar todos las entradas a la vez. Para precisar el punto

⁵¿Por qué conviene usar escalares complejos en vez de reales? Esto también es un legado del principio de incertidumbre. Para dos cantidades observables A y B , hay un observable C que acota inferiormente la observabilidad simultánea en un estado cuántico ϕ , es decir, $(\Delta_\phi A)(\Delta_\phi B) \geq \phi(C)$ para todo ϕ , si y sólo si se usa el cuerpo \mathbb{C} ; la fórmula apropiada es $C = i[A, B]$. Para una discusión axiomática, véase el libro de Gérard G. Emch, *Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory* (Wiley, New York, 1972).

$x_j \in X$, basta considerar la coordenada f_j que es la función de X en \mathbb{C} definida por

$$f_j(x_k) := \begin{cases} 1 & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

(El lado derecho de esta fórmula es la llamada *delta de Kronecker*, δ_{jk} .) Fíjese que las coordenadas forman un espacio vectorial sobre \mathbb{C} , del cual $\{f_1, \dots, f_n\}$ es una base. Con el producto puntual dado por

$$(fg)(x_k) := f(x_k)g(x_k),$$

las coordenadas forman un *álgebra conmutativa* sobre \mathbb{C} , de dimensión finita n . Esta álgebra será denotada por $C(X)$.

La notación $C(X)$ suele usarse para denotar la totalidad de *funciones continuas* sobre X (de valores complejos, salvo indicación contraria). Pero ¿cuál es la *topología* de X en este caso? Por definición, $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ es una **función continua** si la preimagen de cada disco abierto $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ es una parte “abierta” de X . Para que *toda* función sea continua, es suficiente que *toda* parte $V \subseteq X$ sea abierta, es decir, que X tenga la *topología discreta*.

Conviene recordar la definición de una topología, antes de continuar.

Definición 1.2. Una **topología** sobre un conjunto X (no necesariamente finita) es una familia \mathcal{T} de partes $U \subseteq X$ tales que:

- (i) $X \in \mathcal{T}, \emptyset \in \mathcal{T}$;
- (ii) \mathcal{T} contiene uniones arbitrarias de sus miembros: si $\{U_\alpha : \alpha \in A\} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$;
- (iii) \mathcal{T} contiene intersecciones finitas de sus miembros: si $V_1, \dots, V_r \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcap_{j=1}^r V_j \in \mathcal{T}$.

El par (X, \mathcal{T}) , un conjunto X dotado de una topología específica, se llama un *espacio topológico*.⁶ Los elementos de \mathcal{T} se llaman conjuntos abiertos, o simplemente **abiertos**, de X .

Dos ejemplos triviales de topologías son la **topología discreta**, para la cual $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, la totalidad de partes de X ; y la **topología indiscreta**, para la cual $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$.

⁶Es común omitir la mención de \mathcal{T} si el contexto la determina, para poder decir “ X es un espacio topológico”.

Una función $f: X \rightarrow Y$ se llama **función continua** si la preimagen $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$ de cualquier abierto V de Y es un abierto de X . Si X tiene la topología discreta, cualquier función $f: X \rightarrow Y$ es continua. En cambio, si X tiene la topología indiscreta, las únicas funciones continuas de X en Y son las funciones constantes.

► Considérese un conjunto finito $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ con la topología discreta. Este espacio topológico posee dos propiedades importantes. Primero, X es **compacto**, es decir, cualquier colección de abiertos $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ cuya unión es X posee una subcolección finita $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_r}\}$ que *cubre* X , es decir, $U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_r} = X$. (La compacidad es trivial cuando X es finito.)

Además, este espacio topológico es de **Hausdorff**:⁷ dos elementos distintos $x, y \in X$ pueden ser “separados” por abiertos, es decir, hay dos abiertos $U \ni x$, $V \ni y$ y tales que $U \cap V = \emptyset$. Esta propiedad es trivial cuando la topología es discreta, porque se puede tomar $U = \{x\}$, $V = \{y\}$.

La topología usual de \mathbb{R} está formada por las uniones de intervalos abiertos $(s, t) := \{r \in \mathbb{R} : s < r < t\}$. Entonces \mathbb{R} no es compacto, porque $\{(n-1, n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$ es un cubrimiento por abiertos que no posee un subcubrimiento finito. Pero \mathbb{R} sí es de Hausdorff, porque si $s < t$, sea $\delta := (t-s)/2$; los intervalos abiertos $U := (s-\delta, s+\delta)$ y $V := (t-\delta, t+\delta)$ separan los puntos s, t .

Ejercicio 1.3. Mostrar que el plano complejo \mathbb{C} , con su topología usual de uniones de discos abiertos $D(z_0; r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, no es compacto pero sí es de Hausdorff.

Cuando un espacio topológico X es compacto y de Hausdorff, el álgebra $C(X)$ de las funciones continuas $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ proporciona información completa sobre X , por un teorema famoso de Gelfand y Naïmark, que luego veremos.

► Sobre el conjunto de dos puntos $Z = \{x, y\}$ es posible establecer tres topologías diferentes: la discreta $\mathcal{T}_d = \{Z, \{x\}, \{y\}, \emptyset\}$; la indiscreta $\mathcal{T}_i = \{Z, \emptyset\}$; y la llamada topología de Sierpiński, $\mathcal{T}_s = \{Z, \{x\}, \emptyset\}$. Fíjese que en esta última, el singulete $\{x\}$ es abierto pero $\{y\}$ no lo es; tampoco hay dos abiertos que separan los puntos x, y .

Los dos puntos x, y de Z (con la topología discreta) *se distinguen por sus coordenadas*: basta hallar una función $f: Z \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Por ejemplo, la función $f_1: x \mapsto 1, y \mapsto 0$ cumple el propósito.

⁷Felix Hausdorff (1868–1942) estableció la teoría de espacios topológicos en su libro *Grundzüge der Mengenlehre* (Veit, Leipzig, 1914).

Ahora bien, supóngase que se quiere borrar la distinción entre x y y mediante un artificio con las coordenadas: ¿cómo se debe proceder?⁸

Una posibilidad es de *fundir* los dos puntos al considerar solamente las coordenadas $f: Z \rightarrow \mathbb{C}$ para las cuales $f(x) = f(y)$. Estas forman una subálgebra, de dimensión 1, del álgebra bidimensional $C(Z)$. En otras palabras, se reemplaza \mathbb{C}^2 por su “subálgebra diagonal” \mathbb{C} . Esto corresponde al proceso de pasar del espacio topológico $Z = \{x, y\}$ a un *espacio cociente* con un sólo punto (Figura 1.1).

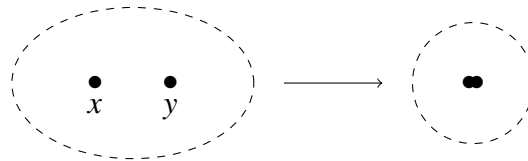


Figura 1.1: Cociente de un espacio de dos puntos

Alternativamente, se puede mantener el conjunto $Z = \{x, y\}$ mientras se reemplaza la topología discreta por la topología *indiscreta*: las únicas funciones continuas $f: Z \rightarrow \mathbb{C}$ que son continuas, en el segundo caso, son las funciones constantes, es decir, aquellas f que cumplen $f(x) = f(y)$. Con sólo estas coordenadas, no es posible distinguir entre x y y .

Hay otra manera de concebir la indistinguibilidad de los dos elementos de Z , la cual, en vez de reducirse a una subálgebra de \mathbb{C}^2 , la sustituye con un álgebra más grande. Consideremos x, y como dos “estados” de un sistema abstracto en donde se permite cambiar (o no cambiar) de estado con el avance del tiempo. Entonces conviene asignar parámetros numéricos $f_{xx} := f(x)$, $f_{yy} := f(y)$ a los dos estados cuando no se cambian, pero además se asignan otros dos parámetros a las *transiciones* entre dos estados:

$$f_{yx} : x \mapsto y, \quad f_{xy} : y \mapsto x.$$

Estos cuatro números forman un elemento de un espacio vectorial de dimensión 4 (sobre \mathbb{C}). Para obtener un producto apropiado de dichas “coordenadas”, considérese una transición en dos pasos al combinar dos procesos representados por coordenadas g (la primera transición) y f (la segunda transición). Si $h := fg$ es la

⁸Una motivación para hacerlo viene de la física cuántica: la estructura molecular de un átomo como el litio (número atómico 3) sólo se comprende si sus tres electrones son *indistinguibles*. Véase, por ejemplo, Jens Peder Dahl, *Introduction to the Quantum World of Atoms and Molecules* (World Scientific, Singapur, 2001).

coordenada del proceso completo, el número h_{yx} representa la combinación de dos transiciones $x \mapsto y$:

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{g_{yx}} & y \\
 g_{xx} \downarrow & \searrow h_{yx} & \downarrow f_{yy} \\
 x & \xrightarrow{f_{yx}} & y
 \end{array}$$

lo cual sugiere la regla de combinación

$$h_{yx} := f_{yx}g_{xx} + f_{yy}g_{yx}.$$

De igual manera, se obtiene $h_{xx} := f_{xx}g_{xx} + f_{xy}g_{yx}$, $h_{xy} := f_{xx}g_{xy} + f_{xy}g_{yy}$ y además $h_{yy} := f_{yx}g_{xy} + f_{yy}g_{yy}$. Estas fórmulas pueden resumirse en la fórmula general

$$h_{ij} := \sum_k f_{ik}g_{kj}.$$

En otras palabras, el álgebra de coordenadas apropiada es $M_2(\mathbb{C})$, las matrices 2×2 con entradas en \mathbb{C} ; una coordenada típica es una matriz

$$f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Las dos álgebras \mathbb{C} (unidimensional) y $M_2(\mathbb{C})$ expresan la fusión de los dos puntos de \mathbb{Z} , pero no son isomorfos: la segunda álgebra $M_2(\mathbb{C})$ no es conmutativa. Estas álgebras sí están relacionadas de otro modo: son equivalentes en el sentido de Morita.⁹ Un concepto importante en lo sucesivo es que es permisible mudar entre dos álgebras de coordenadas equivalentes, si fuere oportuno.

► Para obtener un ejemplo más intrincado del paso al cociente, considérese las rotaciones de un círculo \mathbb{S}^1 . La rotación por un ángulo α lleva $z \in \mathbb{S}^1$ en $ze^{i\alpha}$. Las imágenes del punto $z \in \mathbb{S}^1$ bajo repeticiones de esta rotación (y de su rotación inversa) forman una **órbita** $\{ze^{in\alpha} : n \in \mathbb{Z}\}$ bajo una acción del grupo aditivo \mathbb{Z} .

Si $\alpha/2\pi = p/q \in \mathbb{Q}$, donde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ con $\text{mcd}(p, q) = 1$, dicese que esta es una *rotación racional*: cada órbita es un conjunto finito de q elementos —véase la Figura 1.2. Aquí hay una acción “efectiva” del grupo cíclico finito \mathbb{Z}/q : las

⁹Dos álgebras finitodimensionales A y B se dicen *equivalentes en el sentido de Morita*, si hay un B -módulo a la derecha E cuya álgebra de endomorfismos es isomorfo a A : $\text{End}_B(E) \simeq A$. En este caso, resulta que E es también un A -módulo a la izquierda, cuyos endomorfismos recuperan B : ${}_A\text{End}(E) \simeq B$. Véase, por ejemplo: Nathan Jacobson, *Basic Algebra II* (W. H. Freeman, New York, 1980).

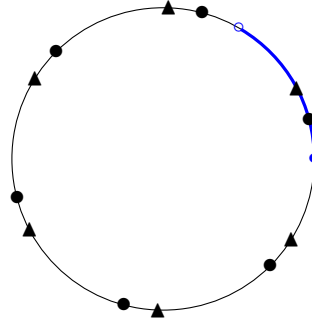


Figura 1.2: Órbitas en el círculo bajo una rotación racional: $\alpha = 2\pi/6$

órbitas están en una correspondencia biunívoca con el arco circular semiabierto $C_q := \{e^{2\pi i\phi} : 0 \leq \phi < 1/q\}$, porque hay un solo representante de cada órbita en C_q . El espacio de órbitas $\mathbb{S}^1/(\mathbb{Z}/q)$ posee una **topología cociente** natural: un juego de órbitas se declara abierto si la unión de las órbitas es abierta en \mathbb{S}^1 . O bien, es cuestión de identificar los dos extremos del arco C_q : el espacio topológico cociente es otro círculo.¹⁰

Ahora bien: en el caso de una *rotación irracional*, $\alpha/2\pi \notin \mathbb{Q}$, cada órbita $\{ze^{in\alpha} : n \in \mathbb{Z}\}$ es infinita y es *densa* en el círculo \mathbb{S}^1 : cualquier arco abierto de \mathbb{S}^1 contiene un punto (de hecho, infinitos puntos) de cada órbita. En este caso, el único abierto no vacío de \mathbb{S}^1 que es una unión de órbitas es \mathbb{S}^1 mismo. El juego de órbitas \mathbb{S}^1/\mathbb{Z} está bien definido como conjunto, pero *su topología es indiscreta*.

En términos de coordenadas, el álgebra apropiada para describir el espacios de órbitas bajo una rotación de ángulo α es

$$A = \{f \in C(\mathbb{S}^1) : f(e^{i\alpha}z) = f(z), \text{ para } z \in \mathbb{S}^1\}.$$

En el caso racional, $\alpha = 2\pi p/q$, estas son *funciones periódicas* sobre el círculo, con período $e^{2\pi i/q}$. La correspondencia $C(\mathbb{S}^1) \rightarrow A : g \mapsto f$ dada por

$$f(z) := g(z^q)$$

es un isomorfismo de álgebras. En el caso irracional, las únicas funciones continuas que cumplen la condición definitoria de A son las funciones *constantes*, así que

¹⁰Más generalmente, cuando un espacio topológico X posee una relación de equivalencia \sim , hay una aplicación sobreyectiva $\pi : X \rightarrow Y$ donde $Y = X/\sim$ es el conjunto de clases de equivalencia. Se declara $U \subseteq Y$ un “abierto de Y ” si y sólo si $\pi^{-1}(U) = \{x \in X : [x] \in U\}$ es un abierto de X ; así se define la *topología cociente* sobre Y .

$A \simeq \mathbb{C}$ en ese caso. Esto plantea el siguiente problema: ¿será posible asociar al juego de órbitas \mathbb{S}^1/\mathbb{Z} un álgebra de coordenadas (no conmutativa) que mejor revela la estructura del espacio cociente? Como se verá adelante, una tal álgebra debe tener dimensión infinita.

► ¿Cuáles álgebras finitodimensionales son posibles álgebras de coordenadas? Para conservar el papel de los números reales en el contexto de álgebras sobre \mathbb{C} , se pide que el álgebra sea *involutiva*.

Definición 1.4. Una **involución** sobre un álgebra compleja A es una biyección de A en A , denotada $a \mapsto a^*$, la cual

- ★ es antilineal: $(\lambda a + \mu b)^* = \bar{\lambda} a^* + \bar{\mu} b^*$, para $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ y $a, b \in A$;
- ★ es involutiva: $(a^*)^* = a$ para todo $a \in A$;
- ★ es un antihomomorfismo: $(ab)^* = b^* a^*$ para todo $a, b \in A$.

Ejemplos son el propio \mathbb{C} , con conjugación compleja, $\lambda^* := \bar{\lambda}$; y el álgebra de matrices $M_n(\mathbb{C})$, donde $[a_{ij}]^* := [\bar{a}_{ji}]$ es el adjunto (o conjugado hermítico) de $[a_{ij}]$.

Un álgebra sobre \mathbb{C} dotado de una involución se llama **álgebra involutiva**, o bien ***-álgebra**.

¿Cuál es la ventaja de emplear la *-álgebra $M_2(\mathbb{C})$ en vez de la *-álgebra conmutativa \mathbb{C} para describir el espacio de dos puntos fundidos? Resulta que la primera posee más *-automorfismos (aplicaciones lineales del álgebra en sí mismo que preservan el producto y la involución.) En efecto, si u es una matriz unitaria 2×2 ,

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{que cumple} \quad uu^* = u^*u = 1_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces $a \mapsto uau^*$ es un automorfismo de $M_2(\mathbb{C})$; este automorfismo es trivial si y sólo si $u = \lambda 1_2$ con $|\lambda| = 1$. En cambio, el álgebra unidimensional \mathbb{C} no posee automorfismos no triviales.

► Las *-álgebras de dimensión finita son fáciles de describir: hay un número finito de enteros positivos k_1, \dots, k_r tales que

$$A \simeq M_{k_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{k_2}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{k_r}(\mathbb{C}). \quad (1.1)$$

Como generalización del ejemplo anterior del espacio de dos puntos, esta puede considerarse como el álgebra de coordenadas de un conjunto X de $k_1 + \dots + k_r$ elementos, con una topología que sólo permite distinguir r de esos elementos.

Ejercicio 1.5. Describir una topología sobre ese conjunto X que corresponde al uso de esta álgebra de coordenadas.

Para algunas aplicaciones de la geometría no conmutativa, hace falta considerar *álgebras reales* en vez de complejas. Entonces entran en juego las álgebras de matrices $M_k(\mathbb{R})$, con involución trivial; y también las álgebras $M_k(\mathbb{H})$ sobre los **cuaterniones** \mathbb{H} . Los cuaterniones tienen la forma

$$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \quad \text{con } a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},$$

y su producto obedece $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, lo cual implica que $ij = k = -ji$. Además, $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j$ como un espacio \mathbb{C} -vectorial¹¹ y posee la involución dada por $i^* = -i$, $j^* = -j$, $k^* = -k$. Las álgebras involutivas reales se clasifican como sumas directas análogas a (1.1), donde los sumandos son álgebras de matrices sobre \mathbb{R} , \mathbb{C} o bien \mathbb{H} . Un caso históricamente importante es el álgebra

$$A = \mathbb{C} \oplus \mathbb{H} \oplus M_3(\mathbb{C}),$$

que se ha propuesto como el álgebra de la “geometría finita” asociado al Modelo Estándar de partículas elementales.¹²

1.2 La correspondencia de Guelfand

Cuando se trata de asignar coordenadas a un espacio no necesariamente finito, hay que tomar bien en cuenta su topología. El caso “ordinario” es un espacio topológico *compacto* y de *Hausdorff*. Se pide compacidad para evitar complicaciones innecesarias, al principio: se verá luego cómo remover esta restricción. La propiedad de Hausdorff permite hallar un álgebra de coordenadas *conmutativa*.

Sea X , entonces, un espacio topológico compacto y de Hausdorff.¹³ Considérese el álgebra

$$A = C(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{C}, \text{ continua}\},$$

¹¹Fíjese que \mathbb{H} es un álgebra sobre \mathbb{R} pero no sobre \mathbb{C} : ¿por qué no?

¹²Las partículas elementales obedecen ciertas simetrías (aun no se sabe exactamente por qué) que podrían aparecer como automorfismos de álgebras no conmutativas. Una posible justificación del álgebra $\mathbb{C} \oplus \mathbb{H} \oplus M_3(\mathbb{C})$ aparece en el artículo reciente: Ali H. Chamseddine y Alain Connes, “Why the Standard Model”, *Journal of Geometry and Physics* **58** (2008), 38–47.

¹³En la geometría algebraica, se emplea las llamadas topologías de Zariski, que en general no son de Hausdorff. Sus practicantes usan el término **cuasicompacto** para designar un espacio topológico que no es de Hausdorff pero en donde cada cubrimiento por abiertos posee un subcubrimiento finito.

con el producto puntual de funciones, $fg(x) := f(x)g(x)$. La conjugación compleja de funciones es una involución:

$$f^*(x) := \overline{f(x)}.$$

Cada función continua sobre un espacio compacto es acotada: la siguiente cantidad es finita, para cada $f \in C(X)$:

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in X\}. \quad (1.2)$$

La asignación $f \mapsto \|f\| \in \mathbb{R}^+$ es una **norma** sobre $C(X)$, porque cumple estas tres propiedades:¹⁴

- ★ $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in A$;
- ★ $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$, para todo $f, g \in A$;
- ★ $\|f\| \geq 0$, con igualdad si y sólo si $f = 0$ en A .

Además, $C(X)$ es un **álgebra normada involutiva**, porque la norma es submultiplicativa y la involución es isométrica:

- ★ $\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$, para todo $f, g \in A$;
- ★ $\|f^*\| = \|f\|$, para todo $f \in A$.

La norma define una topología sobre $C(X)$, al declarar abiertos las uniones arbitrarias de *bolas abiertas* $B(f_0; \varepsilon) := \{f \in A : \|f - f_0\| < \varepsilon\}$.

Las propiedades de la lista anterior expresan *la continuidad de las operaciones algebraicas*. Por ejemplo, si $f \in B(f_0; \varepsilon)$ y $g \in B(g_0; \varepsilon)$, entonces

$$\begin{aligned} \|fg - f_0g_0\| &= \|fg - fg_0 + fg_0 - f_0g_0\| \leq \|fg - fg_0\| + \|fg_0 - f_0g_0\| \\ &\leq \|f\| \|g - g_0\| + \|f - f_0\| \|g_0\| \\ &\leq (\|f_0\| + \varepsilon) \|g - g_0\| + \|f - f_0\| \|g_0\| \\ &\leq \varepsilon(\|f_0\| + \|g_0\| + \varepsilon). \end{aligned}$$

De ahí se ve que el producto $(f, g) \mapsto fg$ es continuo.

En el álgebra normada $C(X)$ las sucesiones de Cauchy convergen, porque si una sucesión $\{f_n\}$ obedece $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$ para m, n suficientemente grandes, entonces

¹⁴Aquí $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ denota los números reales no negativos.

también vale $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$; defínase $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ en \mathbb{C} . Es fácil mostrar que la función $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ es continua y que $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces el álgebra normada $C(X)$ es *completa*: se dice que $C(X)$ es un **álgebra de Banach**.¹⁵

Hay álgebras de Banach involutivas y conmutativas que no son álgebras de funciones continuas sobre espacio alguno. Un ejemplo conocido es el álgebra $L^1(\mathbb{R})$ de funciones integrables sobre la recta real,¹⁶ con la operación de *convolución*: $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt$. Para caracterizar las álgebras de funciones continuas (con producto puntual), hace falta imponer una condición extra sobre la norma.

Definición 1.6. Una C^* -**álgebra** es un álgebra de Banach involutiva A (no necesariamente conmutativa), cuya norma satisface

$$\|a^*a\| = \|a\|^2, \quad \text{para todo } a \in A. \quad (1.3)$$

Es evidente que $C(X)$ es una C^* -álgebra conmutativa, porque

$$\|f^*f\| = \sup\{|\overline{f(x)}f(x)| : x \in X\} = \sup\{|f(x)|^2 : x \in X\} = \|f\|^2.$$

El álgebra de matrices $M_n(\mathbb{C})$ también es una C^* -álgebra (no conmutativa si $n > 1$). Su norma se define como

$$\|a\| := \sup\{|a\xi| : \xi \in \mathbb{C}^n, \|\xi\| \leq 1\},$$

donde la longitud $\|\xi\|$ del vector $\xi \in \mathbb{C}^n$ es la euclidiana, $\|\xi\|^2 := |\xi_1|^2 + \dots + |\xi_n|^2$. Con el producto escalar usual

$$\langle \xi | \eta \rangle := \bar{\xi}_1 \eta_1 + \dots + \bar{\xi}_n \eta_n,$$

la desigualdad de Schwarz dice que

$$|\langle \xi | \eta \rangle| \leq \|\xi\| \|\eta\|. \quad (1.4)$$

En consecuencia, cuando $a \in M_n(\mathbb{C})$ y $\|\xi\| \leq 1$, vale

$$\|a\xi\|^2 = \langle a\xi | a\xi \rangle = \langle \xi | a^*a\xi \rangle \leq \|\xi\| \|a^*a\xi\| \leq \|a^*a\|.$$

¹⁵Stefan Banach (1892–1945) [pron. *ba-naj*] inauguró el estudio sistemático de operadores lineales con su libro *Teoria operacji, tom I: Operacje liniowe* (Kasa Mianowskiego, Varsovia, 1931), traducido al francés en 1932.

¹⁶Su norma es $\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$. Para eliminar funciones no negativas de integral cero, procede declarar equivalentes dos funciones integrables f, g si $\int_{\mathbb{R}} |f(t) - g(t)| dt = 0$; entonces, los elementos de $L^1(\mathbb{R})$ no son funciones *strictu sensu*, sino clases de equivalencia módulo funciones nulas.

De ahí se obtiene $\|a\|^2 \leq \|a^*a\|$. Además, vale $\|a^*a\| \leq \|a^*\| \|a\| = \|a\|^2$ y se concluye que $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

Las estimaciones para la norma de $M_n(\mathbb{C})$ siguen válidas en dimensión infinita, donde \mathbb{C}^n queda reemplazada por un *espacio de Hilbert* cualquiera.

Definición 1.7. Un **espacio de Hilbert** H es un espacio \mathbb{C} -vectorial normado y completo (es decir, un *espacio de Banach*) cuya norma proviene de un producto escalar:

$$\|\xi\| := \sqrt{\langle \xi | \xi \rangle}.$$

Con más detalle: un **producto escalar** sobre un espacio \mathbb{C} -vectorial asocia un número $\langle \xi | \eta \rangle \in \mathbb{C}$ a cada par de vectores ξ, η , de tal manera que

- * $\langle \eta | \xi \rangle = \overline{\langle \xi | \eta \rangle}$;
- * $\langle \zeta | \alpha\xi + \beta\eta \rangle = \alpha\langle \zeta | \xi \rangle + \beta\langle \zeta | \eta \rangle$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;
- * $\langle \xi | \xi \rangle \geq 0$, con igualdad si y sólo si $\xi = 0$.

Fíjese que el producto escalar $\langle \cdot | \cdot \rangle$ es lineal en la segunda variable pero antilineal en la primera variable;¹⁷ en otras palabras, es una operación *sesquilineal*. Su tercera propiedad dice que es *definida positiva*.

Al igual que \mathbb{C}^n , cualquier espacio de Hilbert posee una *base ortonormal*, esto es, una familia de vectores $\{e_j\}_{j \in J}$ tales que $\langle e_j | e_k \rangle = 0$ para $j \neq k$ y $\|e_j\| = 1$ para todo j , donde además cada vector ξ tiene una expansión convergente que cumple la *fórmula de Parseval*:

$$\xi = \sum_{j \in J} \langle e_j | \xi \rangle e_j \quad \text{con} \quad \|\xi\|^2 = \sum_{j \in J} |\langle e_j | \xi \rangle|^2.$$

Se dice que un espacio de Hilbert es **separable** si posee una base ortonormal numerable (finita o infinita). Un ejemplo conocido de un espacio de Hilbert separable es $H = L^2(\mathbb{R})$, con producto escalar

$$\langle f | g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} g(t) dt.$$

¹⁷Algunos libros de matemática ponen, equivocadamente, la linealidad en la primera variable. Aunque formalmente ese hábito es aceptable, la física cuántica nos enseña que la linealidad a la derecha es más acorde con las buenas costumbres.

Definición 1.8. Un ejemplo de una C^* -álgebra no conmutativa es $\mathcal{L}(H)$, la totalidad de aplicaciones lineales y continuas de H en H . Una aplicación lineal (u **operador**) $T : H \rightarrow H$ es continua si y sólo si su norma es finita, donde

$$\|T\| := \sup\{|T\xi| : \xi \in H, \|\xi\| \leq 1\}.$$

El **adjunto** T^* de un operador se define por la receta

$$\langle \xi | T^* \eta \rangle := \langle T\xi | \eta \rangle, \quad \text{para } \xi, \eta \in H.$$

El producto en $\mathcal{L}(H)$ es la composición de operadores: $ST(\xi) := S(T\xi)$. En particular, es $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \simeq M_n(\mathbb{C})$: un isomorfismo concreto viene de elegir una base ortonormal para \mathbb{C}^n . Los cálculos hechos para $M_n(\mathbb{C})$ muestran, *mutatis mutandis*, que $\|T^*T\| = \|T\|^2$ en $\mathcal{L}(H)$.

► En un famoso artículo en 1943, Guelfand y Naïmark establecieron¹⁸ que estos dos ejemplos de C^* -álgebras son paradigmas para toda esta familia de álgebras, mediante el siguiente par de teoremas:

1. *Cualquier C^* -álgebra conmutativa es isomorfa a $C(X)$ para algún espacio topológico compacto y de Hausdorff, X ;*
2. *Cualquier C^* -álgebra, conmutativa o no, es isomorfa a alguna subálgebra cerrada¹⁹ de $\mathcal{L}(H)$, para cierto espacio de Hilbert, H .*

(Hay que tomar en cuenta que esta información no es suficiente para clasificar todas las C^* -álgebras, porque hay una enorme cantidad de subálgebras de $\mathcal{L}(H)$ que no son isomorfos entre sí. En el caso finitodimensional, la fórmula (1.1) comprende todas las posibilidades;²⁰ pero cuando H es infinitodimensional y separable, la clasificación de todas sus subálgebras cerradas es una tarea de investigación abierta.)

Conviene indicar, sin dar una demostración completa, cómo se obtiene el primero de estos teoremas. Para empezar, dado un espacio X que es compacto y de Hausdorff, ¿cómo se puede describir un punto $x \in X$ en términos del álgebra $C(X)$? Hay dos opciones.

¹⁸Israel Moiseyevich Guelfand y Mark Aronovich Naïmark, “On the embedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space”, *Matematicheskii Sbornik* **12** (1943), 197–213.

¹⁹Una parte Y de un espacio topológico X es **cerrada** si su complemento $X \setminus Y$ es abierto. Un conjunto cerrado contiene los límites de todas sus sucesiones convergentes.

²⁰Hay una única norma sobre el álgebra de matrices (1.1) que cumple las propiedades de una C^* -álgebra; en el caso finitodimensional, la clasificación algebraica es suficiente.

- ★ La *evaluación* $\varepsilon_x: C(X) \rightarrow \mathbb{C} : f \mapsto f(x)$ es un **carácter** del álgebra, es decir, es una aplicación lineal y multiplicativa (un homomorfismo de álgebras) no nula, con valores escalares.
- ★ El subespacio $I_x := \{g \in C(X) : g(x) = 0\}$ es un **ideal maximal** de $C(X)$.

Como $I_x = \ker \varepsilon_x$, estas dos nociones son equivalentes: el núcleo de un carácter es un ideal maximal; el paso al cociente por un ideal maximal $C(X) \rightarrow C(X)/I \simeq \mathbb{C}$ define un carácter.

Lema 1.9. *Sea $M(C(X))$ el conjunto de todos los ideales maximales de $C(X)$. Entonces hay una correspondencia biunívoca $X \longleftrightarrow M(C(X))$.*

Demostración. Un ideal maximal $I \subset C(X)$ es por definición propio, es decir, no es todo $C(X)$. Para ver que I debe ser I_x para algún x , es suficiente mostrar que toda función $g \in I$ se anula en al menos un punto x (luego, $I \subseteq I_x$ y la maximalidad de I muestra la igualdad).

Si esto no fuera cierto, en cada $y \in X$ habría un elemento $h_y \in I$ tal que $h_y(y) \neq 0$; por la continuidad de la función h_y , valdría $h_y(z) \neq 0$ en una vecindad abierta V_y de y . Como X es compacto, habría un juego finito de puntos $y_1, \dots, y_k \in X$ tal que $X = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_k}$; ahora la función

$$g := \sum_{j=1}^k h_{y_j} \bar{h}_{y_j} = \sum_{j=1}^k |h_{y_j}|^2$$

sería un elemento de I tal que $g(z) > 0$ para todo $z \in X$. Pero entonces su recíproco $1/g$ sería también continuo, así que $1 = g(1/g) \in I$, de modo que I no sería propio.

Además, si $x \neq y$, los ideales I_x e I_y no coinciden, porque siempre puede hallarse $f \in C(X)$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$, por ser X compacto y de Hausdorff.²¹ \square

Considérese ahora una C^* -álgebra *conmutativa* con unidad, A . El conjunto $M(A)$ de los ideales maximales de A es un candidato obvio para un espacio topológico X , si se quiere mostrar que $A \simeq C(X)$. Hace falta, entonces, identificar una topología sobre $M(A)$ para que sea compacto y de Hausdorff.

Como cada $I \in M(A)$ es de la forma $I = \ker \mu$, donde $\mu: A \rightarrow \mathbb{C}$ es un carácter de A , se puede reemplazar I por μ y considerar $M(A)$ como el *espacio de caracteres*

²¹Este es el llamado *Lema de Urysohn*: un espacio compacto y de Hausdorff X posee la propiedad de *normalidad*: si $x \neq y$ en X , hay $f: X \rightarrow [0, 1]$ continua, tal que $f^{-1}(0)$ sea una vecindad de x mientras que $f^{-1}(1)$ es una vecindad de y .

de A . Ahora bien, cada $\mu \in M(A)$ es, en particular, un funcional lineal sobre A . Los funcionales lineales continuos $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$ forman un espacio vectorial A^* , que posee una norma natural

$$\|\phi\| := \sup\{|\phi(a)| : a \in A, \|a\| \leq 1\}.$$

Resulta que cualquier carácter μ es automáticamente continuo,²² con $\|\mu\| = 1$. Entonces $M(A)$ es una parte de la bola unitaria $A_1^* := \{\phi \in A^* : \|\phi\| \leq 1\}$ y esta parte es cerrada (el límite de una sucesión de caracteres es un carácter, por la continuidad de las operaciones algebraicas). Pero ahora hay una dificultad importante: la bola unitaria de un espacio normado de dimensión infinita *no es compacta*, en la topología dada por la norma.²³

Sin embargo, la bola A_1^* admite una topología diferente en la cual sí es compacta. Sus abiertos son uniones de intersecciones finitas de las “franjas” de la forma $\{\phi \in A_1^* : |\phi(b) - \phi_0(b)| < 1\}$, para $b \in A$, $\phi_0 \in A_1^*$. De este modo, A_1^* aparece como una parte cerrada del producto cartesiano de intervalos reales, $\prod_{b \neq 0} [-\|b\|, \|b\|]$. Un teorema básico de Tijonov (1935) dice que un producto cartesiano cualquiera de compactos es compacto,²⁴ lo cual fue usado por Alaoglu (1940) para mostrar que A_1^* es compacto (y de Hausdorff). En consecuencia, su parte cerrada $M(A)$ es también compacto y de Hausdorff en esta **topología de Guelfand**.

Definición 1.10. Sea A una C^* -álgebra conmutativa con unidad y sea $M(A)$ su espacio de caracteres, dotado de la topología de Guelfand. La **transformada de Guelfand** de un elemento $a \in A$ es la función continua $\hat{a} : M(A) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\hat{a}(\mu) := \mu(a). \tag{1.5a}$$

(La definición de la topología de Guelfand garantiza la continuidad de esta función

²²Estas propiedades de funcionales lineales y caracteres están explicadas en muchos textos de análisis. Véase, por ejemplo, George F. Simmons, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1963.

²³Esta falta de compacidad de bolas unitarias en dimensión infinita fue descubierta por Frédéric Riesz en 1918, cuando identificó una sucesión de vectores con $\|x_j\| = 1$ pero $\|x_j - x_k\| \geq \frac{1}{2}$ para $j \neq k$; luego esta sucesión no puede tener una subsucesión convergente. Véase la sección III.2 de: Kôsaku Yosida, *Functional Analysis*, 6a edición Springer, Berlin, 1980.

²⁴¿Qué cosa es un producto cartesiano de una cantidad no numerable de conjuntos? Para identificar uno de sus elementos, hay que elegir simultáneamente un número no numerable de entradas. Por tanto, la construcción de Tijonov usa ineludiblemente el famoso *axioma de elección* de la teoría de conjuntos. Los trabajos corolarios de Alaoglu, Guelfand y Naïmark cimentaron el papel del axioma de elección en el análisis contemporáneo.

de evaluación.) La **transformación de Guelfand** es la aplicación

$$\mathcal{G}: A \rightarrow C(M(A)) : a \mapsto \hat{a}. \quad (1.5b)$$

El (primer) **teorema de Guelfand y Naïmark**²⁵ dice que la transformación $\mathcal{G}_A: A \rightarrow C(M(A))$ es biyectiva, respeta la involución —esto es,

$$\hat{a}^*(\mu) = \overline{\hat{a}(\mu)} = \overline{\mu(a)} = \mu(a^*) = \widehat{a^*}(\mu);$$

y además es *isométrica* (respeta las normas) porque

$$\|\hat{a}\| := \sup\{|\hat{a}(\mu)| : \mu \in M(A)\} = \|a\|, \quad \text{para todo } a \in A.$$

En otras palabras, \mathcal{G}_A es un **-isomorfismo isométrico* entre A y $C(M(A))$.

Este no es el lugar para demostrar el teorema de Guelfand y Naïmark en detalle.²⁶ Sin embargo, conviene hacer un par de aclaraciones. En primer lugar, la transformación (1.5) está definida para otras álgebras de Banach conmutativas; pero en general no es inyectiva ni sobreyectiva. En segundo lugar, la propiedad isométrica $\|\hat{c}\| = \|c\|$ se demuestra inicialmente para los elementos de A de la forma $c = a^*a$; luego se concluye que

$$\|\hat{a}\|^2 = \|\hat{a}^* \hat{a}\| = \|\hat{c}\| = \|c\| = \|a^*a\| = \|a\|^2,$$

en vista de la fórmula esencial (1.3).

Los elementos de la C^* -álgebra A de la forma a^*a se llaman **elementos positivos** (admitiendo $0 = 0^*0$ como elemento positivo honorario). Es evidente que, si $t > 0$, entonces $t(a^*a) = (\sqrt{t}a)^*(\sqrt{t}a)$, así que el juego de elementos positivos es invariante bajo dilataciones positivas. No es nada evidente, pero sí es cierto, que la suma de dos elementos positivos de una C^* -álgebra es positiva: dados $a, b \in A$, existe $c \in A$ tal que $a^*a + b^*b = c^*c$. [En el caso conmutativo, esto se puede ver, una vez establecido el teorema de Guelfand y Naïmark, al comprobarlo cuando $A = C(X)$.]

► Hay una versión del teorema de Guelfand y Naïmark *para C^* -álgebras sin unidad*. En general, si A es un álgebra compleja sin unidad, se forma la suma

²⁵Este teorema es el “Lemma 1” del artículo citado de 1943.

²⁶Véase el libro de Simmons, *op. cit.* para una prueba completa. Para una discusión abreviada de las ideas de la demostración, véase la sección 1.2 del libro (en adelante denotado **E-NCG**): José M. Gracia Bondía, Joseph C. Várilly y Héctor Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser, Boston, 2001.

directa de espacios vectoriales $A^+ := A \oplus \mathbb{C}$, con la involución obvia; su producto se define con la receta:

$$(a,t)(b,u) := (ab + tb + ua, tu) \quad \text{para } a, b \in A; t, u \in \mathbb{C}.$$

Entonces A^+ es un álgebra con unidad $(0, 1)$, que incluye A , al identificar $a \in A$ con $(a, 0) \in A^+$, como subálgebra de codimensión 1. Si A es una C^* -álgebra, se introduce una norma en A^+ por

$$\|(a,t)\| := \sup\{\|ab + tb\| : b \in A, \|b\| \leq 1\}.$$

Con esta norma, A^+ es una C^* -álgebra con unidad.

Ejercicio 1.11. Verificar que $\|(a,t)^*(a,t)\| = \|(a,t)\|^2$ para $(a,t) \in A^+$.

Cada carácter $\mu \in M(A)$ se extiende a un carácter de A^+ al definir $\mu(a,t) := \mu(a) + t$. La C^* -álgebra A^+ posee exactamente un carácter extra: la aplicación $(a,t) \mapsto t$, que extiende el funcional cero sobre A . De este modo, se ve que

$$M(A^+) = M(A) \uplus \{0\},$$

la *unión disjunta* de $M(A)$ con un elemento extra.

En topología, hay un proceso análogo. Si Z es un espacio topológico compacto y de Hausdorff, la omisión de un elemento $z_0 \in Z$ produce $X = Z \setminus \{z_0\}$, que es un espacio **localmente compacto**: cada elemento de X posee una vecindad compacta. En la otra dirección, si X es localmente compacto (y de Hausdorff), se le puede agregar *un elemento extra* ∞ de modo que $X^+ := X \uplus \{\infty\}$ sea compacto. Se definen las “vecindades abiertas de ∞ ” como los complementos de partes compactas de X . (Por ejemplo, en el caso $X = \mathbb{R}$, se usan los conjuntos $\{x \in \mathbb{R} : |x| > r\} \uplus \{\infty\}$, para $r \geq 0$, como vecindades básicas de ∞ .) Este proceso $X \rightsquigarrow X^+$ se llama la **compactificación por un punto** de un espacio localmente compacto.

Si X es localmente compacto (y de Hausdorff), se dice que una función continua $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ **se anula en el infinito** si, para cada $\varepsilon > 0$, hay una parte compacta $K \subset X$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para $x \notin K$. Se denota la totalidad de funciones continuas que se anulan en el infinito por $C_0(X)$. Es evidente que cada $f \in C_0(X)$ se puede extender a una función *continua* sobre X^+ al colocar $f(\infty) := 0$. Además, cualquier función continua $g: X^+ \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(\infty) = 0$ se restringe a un elemento $g|_X \in C_0(X)$. Si se identifica el escalar $z \in \mathbb{C}$ con la *función constante* de valor z sobre X^+ , se obtiene una correspondencia biunívoca

$$C(X^+) \longleftrightarrow C_0(X) \oplus \mathbb{C}.$$

Además, esta biyección es lineal, multiplicativa, preserva la conjugación compleja de funciones y mantiene la norma $\|g\| := \sup |g(y)| : y \in X^+$; en otras palabras, es un $*$ -isomorfismo isométrico.

Se ha comprobado el isomorfismo $C(X^+) \simeq C_0(X)^+$, para X localmente compacto y de Hausdorff. Por otro lado, si A es una C^* -álgebra sin unidad, se obtiene un homeomorfismo $M(A^+) \approx M(A)^+$, al identificar el carácter trivial de A^+ con el “punto en el infinito” de $M(A)$.

1.3 La equivalencia entre espacios y álgebras

El teorema de Gelfand y Naïmark establece la existencias de dos correspondencias, $X \mapsto C(X)$ y $A \mapsto M(A)$, que son mutuamente inversos. Así se relacionan espacios topológicos compactos y de Hausdorff, por un lado, con C^* -álgebras con unidad, por el otro lado. De hecho, esta es un ejemplo importante de una *equivalencia de categorías*.

Las “categorías” fueron introducidas en los años cuarentas para formalizar correspondencias parecidas, entre distintos tipos de objetos matemáticos.²⁷ Es muy importante que, además de asociar los objetos subyacentes, también se asocian las aplicaciones apropiadas entre dichos objetos. La definición formal es la siguiente.

Definición 1.12. Una **categoría** \mathcal{C} consta de una clase de **objetos** $\text{Ob}(\mathcal{C})$, acompañado de una familia de conjuntos $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, uno para cada par de objetos A, B ; los elementos de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ se llaman **morfismos** de A en B . Además, debe haber una regla de *composición de morfismos*, la cual a cada par de morfismos $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, D)$ les asocia un morfismo $gf \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, D)$. Hay tres requisitos obligatorios:

- (a) Los conjuntos de morfismos $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ son *disjuntos*: cada morfismo f determina unívocamente dos objetos A, B tales que $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.
- (b) Para cada objeto $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ hay un único *morfismo idéntico* $1_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ tal que $f1_A = f$ y $1_Ag = g$ cuando $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, A)$.
- (c) La composición es *asociativa*: si $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, D)$ y además $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, E)$, entonces vale

$$h(gf) = (hg)f \quad \text{en} \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, E).$$

²⁷El artículo seminal es: Samuel Eilenberg y Saunders MacLane, “General theory of natural equivalences”, *Transactions of the American Mathematical Society* **58** (1945), 231–294. En este ensayo se introdujo el término “categoría” por primera vez.

Hay muchas categorías ya conocidas:

- ★ Los **conjuntos** son objetos de una categoría Set ; el conjunto de morfismos $\text{Hom}_{\text{Set}}(X, Y)$ es simplemente la totalidad de *funciones* $f: X \rightarrow Y$.
- ★ Los **grupos** son objetos de una categoría Gr ; sus morfismos son los *homomorfismos* entre grupos.
- ★ Los **espacios vectoriales** sobre un cuerpo \mathbb{K} son objetos de una categoría $\mathbb{K}\text{-Vect}$, cuyos morfismos son las aplicaciones \mathbb{K} -lineales.
- ★ Las **álgebras** sobre \mathbb{K} son objetos de una categoría $\mathbb{K}\text{-Alg}$; sus morfismos son los *homomorfismos de álgebras*, es decir, aplicaciones \mathbb{K} -lineales que preservan productos.
- ★ Los **espacios topológicos** son objetos de una categoría Top , cuyos morfismos son las *funciones continuas*.

La categoría Comp de los espacios topológicos *compactos y de Hausdorff* forman una subcategoría de esta última.²⁸

La categoría $C^*\text{-AlgCom}$ de C^* -álgebras unitales conmutativas tiene como morfismos los llamados ***-homomorfismos**: un elemento $\varphi \in \text{Hom}_{C^*\text{-AlgCom}}(A, B)$ es una aplicación \mathbb{C} -lineal $\varphi: A \rightarrow B$ que preserva tanto el producto como la involución:

$$\varphi(aa') = \varphi(a)\varphi(a'), \quad \varphi(a^*) = \varphi(a)^*,$$

para $a, a' \in A$. Una propiedad importante de estos morfismos es que cada φ es *automáticamente continua*,²⁹ porque $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$ para todo $a \in A$.

► Si $f: X \rightarrow Y$ es una función continua entre dos espacios compactos y de Hausdorff, la *composición a la derecha* $Cf: h \mapsto h \circ f$ lleva $C(Y)$ en $C(X)$ y es fácil ver que Cf es un morfismo de C^* -álgebras; por ejemplo, se ve que $(h + h') \circ f = h \circ f + h' \circ f$ al evaluar los dos lados en cualquier elemento $x \in X$. En otras palabras,

$$f \in \text{Hom}_{\text{Comp}}(X, Y) \quad \text{produce} \quad Cf \in \text{Hom}_{C^*\text{-AlgCom}}(C(Y), C(X)). \quad (1.6)$$

Del mismo modo, si $\varphi: A \rightarrow B$ es un *-homomorfismo de C^* -álgebras unitales conmutativas, la composición $M\varphi: \mu \mapsto \mu \circ \varphi$ lleva cada carácter $\mu \in M(B)$ en un

²⁸Esta subcategoría es **plena**, en el sentido de que $\text{Hom}_{\text{Comp}}(X, Y) = \text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y)$ para todo $X, Y \in \text{Ob}(\text{Comp})$.

²⁹Esta propiedad no es evidente; su verificación requiere el estudio del “espectro” de un elemento de una C^* -álgebra.

carácter $\mu \circ \varphi$ de $M(A)$ y así define una función $M\varphi: M(B) \rightarrow M(A)$. Esta función es continua en virtud de la topología de Guelfand de $M(A)$, ya que es necesario y suficiente que $\hat{a} \circ M\varphi: M(B) \rightarrow \mathbb{C}$ sea continua para todo $a \in A$. Pero

$$\hat{a}(M\varphi(\mu)) = \hat{a}(\mu \circ \varphi) = (\mu \circ \varphi)(a) = \mu(\varphi(a)) = \widehat{\varphi(a)}(\mu),$$

así que $\hat{a} \circ M\varphi = \widehat{\varphi(a)}$ es efectivamente una función continua sobre $M(B)$. La conclusión es que

$$\varphi \in \text{Hom}_{C^*\text{-AlgCom}}(A, B) \quad \text{produce} \quad M\varphi \in \text{Hom}_{\text{Comp}}(M(B), M(A)). \quad (1.7)$$

En resumen, los procesos $X \mapsto C(X)$, $f \mapsto Cf$ y respectivamente $A \mapsto M(A)$, $\varphi \mapsto M\varphi$ son ejemplos de *funtores* (contravariantes).

Definición 1.13. Un **funtor covariante** $\mathcal{F}: C \rightarrow D$ entre dos categorías consta de:

- ★ una aplicación $\text{Ob}(C) \rightarrow \text{Ob}(D) : A \mapsto \mathcal{F}A$;
- ★ y una familia de funciones $\text{Hom}_C(A, B) \rightarrow \text{Hom}_D(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B) : h \mapsto \mathcal{F}h$ para todo $A, B \in \text{Ob}(C)$,

que respeta unidades y *preserva* el orden de composición:

- (a) $\mathcal{F}1_A = 1_{\mathcal{F}A}$ para todo $A \in \text{Ob}(C)$,
- (b) $\mathcal{F}(kh) = (\mathcal{F}k)(\mathcal{F}h)$ toda vez que $h \in \text{Hom}_C(A, B)$, $k \in \text{Hom}_C(B, C)$.

Un **funtor contravariante** (a veces llamado **cofuntor**) $\mathcal{G}: C \rightarrow D$ consta de:

- ★ una aplicación $\text{Ob}(C) \rightarrow \text{Ob}(D) : A \mapsto \mathcal{G}A$;
- ★ y una familia de funciones $\text{Hom}_C(A, B) \rightarrow \text{Hom}_D(\mathcal{G}B, \mathcal{G}A) : h \mapsto \mathcal{G}h$ para todo $A, B \in \text{Ob}(C)$,

que respeta unidades y *revierte* el orden de composición:

- (a') $\mathcal{G}1_A = 1_{\mathcal{G}A}$ para todo $A \in \text{Ob}(C)$,
- (b') $\mathcal{G}(kh) = (\mathcal{G}h)(\mathcal{G}k)$ toda vez que $h \in \text{Hom}_C(A, B)$, $k \in \text{Hom}_C(B, C)$.

Lema 1.14. Las dos correspondencias $C: \text{Comp} \rightarrow C^*\text{-AlgCom}$, respectivamente $M: C^*\text{-AlgCom} \rightarrow \text{Comp}$, son *funtores contravariantes*.

Demostración. En vista de (1.6) y (1.7), basta comprobar las propiedades (a') y (b') de la Definición 1.13, en ambos casos.

Para mostrar que $C1_X = 1_{C(X)}$ para X compacto y de Hausdorff, sólo hay que notar que, para todo $f: X \rightarrow Y$ y $k: Z \rightarrow X$ continuas, las composiciones $f \mapsto f \circ 1_X$ y $k \mapsto 1_X \circ k$ son triviales.

Para mostrar que $M1_A = 1_{M(A)}$ para A una C^* -álgebra unital conmutativa, sólo hay que notar que, para todo $\varphi: A \rightarrow B$ y $\psi: C \rightarrow A$ $*$ -homomorfismos, las composiciones $\varphi \mapsto \varphi \circ 1_A$ y $\psi \mapsto 1_A \circ \psi$ son triviales.

Para mostrar que $C(g \circ f) = Cf \circ Cg$ cuando $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$ son continuas, sólo hay que notar que, para cada $h: W \rightarrow X$ continua, vale

$$\begin{aligned} C(g \circ f)(h) &= h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \\ &= Cf(h \circ g) = Cf(Cg(h)) = (Cf \circ Cg)(h), \end{aligned}$$

usando la composición ordinaria de funciones continuas.

Para mostrar que $M(\psi \circ \varphi) = M\varphi \circ M\psi$ cuando $\varphi: A \rightarrow B$ y $\psi: B \rightarrow C$ son $*$ -homomorfismos, basta notar que, para cada $*$ -homomorfismo $\chi: D \rightarrow A$, vale

$$\begin{aligned} M(\psi \circ \varphi)(\chi) &= \chi \circ (\psi \circ \varphi) = (\chi \circ \psi) \circ \varphi \\ &= M\varphi(\chi \circ \psi) = M\varphi(M\psi(\chi)) = (M\varphi \circ M\psi)(\chi), \end{aligned}$$

usando la composición ordinaria de $*$ -homomorfismos. □

► Debe ser evidente que la composición de dos funtores contravariantes es un functor covariante. El Lema 1.14 entonces muestra que hay dos “endofuntores” (de una categoría en sí mismo) dados por $MC: \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ y $CM: C^*\text{-AlgCom} \rightarrow C^*\text{-AlgCom}$. Sin embargo, MC no es el “functor identidad” $X \mapsto X$, $f \mapsto f$; y CM tampoco es el functor identidad $A \mapsto A$, $\varphi \mapsto \varphi$.

En otras palabras, los funtores C y M no son inversos uno del otro; se puede afirmar que las categorías Comp y $C^*\text{-AlgCom}$ no son “isomorfos”. En efecto, el concepto apropiado es bastante más sutil. Se trata de dos categorías que son *equivalentes*, en un sentido más amplio que el mero isomorfismo. (Se ampliará este concepto en el apartado 2.6, más adelante.)

Para ver que no hay pérdida de información al pasar de la categoría de espacios Comp a la categoría de álgebras $C^*\text{-AlgCom}$, hay que razonar como sigue.

Sea X un espacio compacto y de Hausdorff. Si $x \in X$, la evaluación $f \mapsto f(x)$ define un carácter $\varepsilon_x \in M(C(X))$, y la función $\varepsilon_X: x \mapsto \varepsilon_x: X \rightarrow M(C(X))$ es un *homeomorfismo*, es decir, una biyección continua con inverso continuo.

Por otro lado, Si A es una C^* -álgebra unital conmutativa, la transformación de Guelfand $\mathcal{G}_A : a \mapsto \hat{a} : A \rightarrow C(M(A))$ es un $*$ -isomorfismo.³⁰

Las familias $\{\varepsilon_X : X \in \text{Ob}(\text{Comp})\}$ y $\{\mathcal{G}_A : A \in \text{Ob}(C^*\text{-AlgCom})\}$ dan lugar a dos diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \varepsilon_X \downarrow & & \downarrow \varepsilon_Y \\
 M(C(X)) & \xrightarrow{MCf} & M(C(Y))
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\varphi} & B \\
 \mathcal{G}_A \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}_B \\
 C(M(A)) & \xrightarrow{CM\varphi} & C(M(B))
 \end{array}
 \quad (1.8)$$

que son *diagramas conmutativos*. Por ejemplo, para ver la conmutatividad del segundo diagrama, tómesese $a \in A$, $v \in M(B)$; entonces

$$\begin{aligned}
 (CM\varphi \circ \mathcal{G}_A)(a)(v) &= (CM\varphi)(\hat{a})(v) = C(M\varphi)(\hat{a})(v) = \hat{a}(M(\varphi)(v)) \\
 &= \hat{a}(v \circ \varphi) = v(\varphi(a)) = \widehat{\varphi(a)}(v) = (\mathcal{G}_B \circ \varphi)(a)(v),
 \end{aligned}$$

de modo que $CM\varphi \circ \mathcal{G}_A = \mathcal{G}_B \circ \varphi$, en efecto. De manera similar se verifica que $MCf \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ f$.

La conmutatividad de los diagramas (1.8) dice que las flechas verticales constituyen “morfismos entre funtores”, $\varepsilon_\bullet : 1_{\text{Comp}} \rightarrow MC$ y $\mathcal{G}_\bullet : 1_{C^*\text{-AlgCom}} \rightarrow CM$.³¹

Las flechas verticales son reversibles, porque cada ε_X [respectivamente, cada \mathcal{G}_A] es un isomorfismo en la categoría apropiada. De hecho, el Lema 1.9 dice que $\varepsilon_X : X \rightarrow M(C(X))$ es una biyección (después de identificar el carácter ε_y con el ideal maximal $I_y = \ker \varepsilon_y$) y no es muy difícil comprobar que ε_X y su aplicación inversa son continuas. Por otro lado, el teorema de Guelfand y Naïmark dice precisamente que cada $\mathcal{G}_A : A \rightarrow C(M(A))$ es un $*$ -isomorfismo isométrico de C^* -álgebras.

Mediante la familia de transformaciones de Guelfand \mathcal{G}_\bullet cada concepto relacionado con espacios compactos y de Hausdorff puede emparejarse con un concepto análogo para C^* -álgebras unital conmutativas. De este modo, la topología de X puede expresarse completamente en términos de la estructura algebraica de $C(X)$. La “topología no conmutativa” entonces consiste en “olvidar” la conmutatividad del álgebra y abarcar el estudio de la C^* -álgebras unital en general.

³⁰En general, un morfismo $f \in \text{Hom}_C(A, B)$ se llama **isomorfismo** si hay otro morfismo $g \in \text{Hom}_C(B, A)$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$. Un homeomorfismo es un isomorfismo en la categoría Comp ; un $*$ -isomorfismo de álgebras involutivas es un isomorfismo en la categoría $C^*\text{-AlgCom}$.

³¹Si C y D son dos categorías fijas, es posible crear una categoría $\text{Fun} = \text{Fun}(C, D)$ cuyos objetos son los funtores covariantes de C en D . Una **transformación natural**, o *morfismo de funtores* en $\text{Hom}_{\text{Fun}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es una familia $\theta_\bullet = \{\theta_A : A \in \text{Ob}(C)\}$, con $\theta_A \in \text{Hom}_D(\mathcal{F}A, \mathcal{G}A)$, que entrelaza las acciones de \mathcal{F} y \mathcal{G} sobre morfismos: $\mathcal{G}h \circ \theta_A = \theta_B \circ \mathcal{F}h$ para $h \in \text{Hom}_C(A, B)$. Dícese que θ_\bullet es un **isomorfismo natural** si cada morfismo θ_A es invertible.

2 Fibrados vectoriales y módulos proyectivos

En esta sección nos dedicaremos a averiguar qué tipo de objeto es el análogo no conmutativo de un fibrado vectorial (sobre una variedad diferencial compacta M).

La forma de hacerlo es a través del teorema (o correspondencia) de Serre y Swan,¹ el cual dice que existe una equivalencia entre la categoría de fibrados vectoriales sobre una variedad diferencial compacta M y la categoría de módulos proyectivos finitamente generados sobre el álgebra $C^\infty(M)$ de funciones suaves sobre la variedad.

2.1 Variedades diferenciales

Una variedad diferencial es un espacio topológico, cada uno de cuyos puntos posee un vecindario que se ve como un conjunto abierto en \mathbb{R}^n , donde el mismo n sirve para todos estos puntos. Dichas descripciones locales se llaman *cartas*. Para completar la definición de una variedad diferencial, hay que pedir que si dos cartas describen vecindarios distintos de un mismo punto, entonces el cambio entre esas descripciones locales sea “suave”.

Al valor común n se le llama **dimensión** de la variedad. Intuitivamente, las curvas son variedades diferenciales de dimensión uno, $n = 1$, las superficies son variedades diferenciales de dimensión dos, $n = 2$, los sólidos son variedades diferenciales de dimensión tres, $n = 3$, etcétera.

Definición 2.1. Sea M un espacio topológico de Hausdorff, conexo² y paracompacto.³ Un **atlas** (o *estructura diferencial*) **n -dimensional** en M es una familia $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ de partes abiertas $U_\alpha \subset M$ y homeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que:

¹La versión original aparece en: Jean-Pierre Serre, “Faisceaux algébriques cohérents”, *Annals of Mathematics* **61** (1955), 197–278; en el contexto de fibrados vectoriales en variedades algebraicas sobre cuerpos algebraicamente cerrados. Richard Swan publicó unos años más tarde “Vector bundles and projective modules”, *Transactions of the American Mathematical Society* **105** (1962), 264–277; una versión complementaria, que trata de fibrados vectoriales sobre variedades diferenciales compactas.

²En general las variedades diferenciales no tienen por qué ser conexas, y pueden estar formadas por diversos componentes, de modo tal que las condiciones para variedad se satisfacen en cada componente con la misma dimensión n en todos.

³Dícese que M es **paracompacto** si cada cubrimiento por abiertos $(V_\alpha)_\alpha$ de M tiene un refinamiento localmente finito, i.e., un cubrimiento $(W_\beta)_\beta$ tal que cada W_β es una parte de algún V_α y cada punto $p \in M$ tiene un vecindario U con $U \cap W_\beta \neq \emptyset$, solamente para una cantidad finita de los β . Un espacio compacto es evidentemente paracompacto.

- ★ la colección $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ es un cubrimiento abierto de M ;
- ★ cada $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ es abierta en \mathbb{R}^n y toda vez que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, la aplicación

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es un difeomorfismo entre partes abiertas de \mathbb{R}^n .

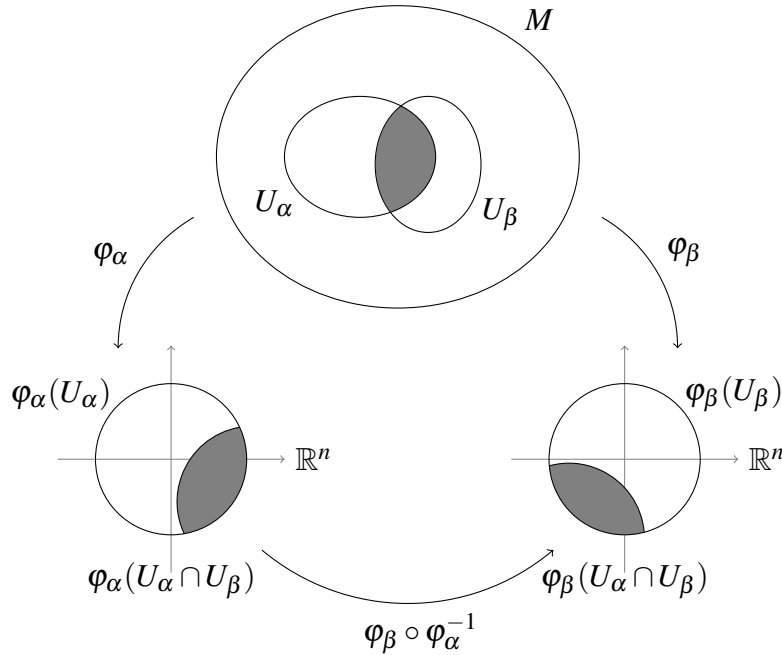


Figura 2.1: Una función de transición entre dos cartas locales

Al espacio M junto con una familia maximal⁴ que cumple esas dos propiedades, se le llama una **variedad diferencial de dimensión n** . Cada par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ es una **carta** (local) de la variedad diferencial M . La aplicación inversa $\varphi_\alpha^{-1} : \varphi(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$ se le llama **parametrización local** de M .

Para cada carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, escribimos $\varphi_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ donde cada $x_\alpha^i : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua. A los x_α^i se les llaman **coordenadas locales** determinadas por la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Las aplicaciones suaves

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

⁴La maximalidad del atlas no es indispensable. Cualquier atlas, puede ser extendido a un atlas maximal por el Lema de Zorn, usando el orden parcial: $(U, \varphi) \leq (V, \psi)$ si y sólo si $U \subseteq V$ y $\psi|_U = \varphi$. De este modo, dos atlas definen la misma variedad diferencial si su unión es también un atlas, en cuyo caso se dice que los atlas (o las estructuras diferenciales) son **compatibles**.

son las **funciones de transición** de este atlas: véase la Figura 2.1.

Ejemplo 2.2. Algunas variedades diferenciales:

1. El espacio euclidiano \mathbb{R}^n con la sola carta $1_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. En este caso el atlas maximal esta dado por los pares $(U, 1_U)$ con U abierto en \mathbb{R}^n . En consecuencia, la dimensión de \mathbb{R}^n como variedad diferencial coincide con su dimensión como espacio vectorial.⁵

En forma similar, cualquier abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ con $1_U : U \rightarrow U$ es una variedad diferencial n -dimensional.

2. Cualquier parte abierta V de una variedad diferencial M es también una variedad diferencial de la misma dimensión. Para cada carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de M tal que $U_\alpha \cap V \neq \emptyset$, tómesese $(U_\alpha \cap V, \varphi_\alpha|_V)$ como una carta para V .
3. El círculo $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ es una variedad diferencial unidimensional. Unas posibles cartas están dadas por

$$U = \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\}, \quad \varphi_U = (\psi|_{(-\pi, \pi)})^{-1},$$

y

$$V = \mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0)\}, \quad \varphi_V = (\psi|_{(0, 2\pi)})^{-1}$$

donde $\psi(t) := (\cos t, \sin t)$.

4. La esfera $\mathbb{S}^n = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1\}$. ¿Cuáles serían las cartas y cuál es la dimensión? \diamond

► Las cartas locales permiten trasladar la noción de aplicaciones diferenciables de \mathbb{R}^n a las variedades diferenciales.

Definición 2.3. Una aplicación continua $f : M \rightarrow N$ entre variedades diferenciales es **diferenciable** si para cada carta (U, φ) de M y cada carta (V, ψ) de N , la composición de aplicaciones

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es diferenciable.

⁵Aquí se ha usado la notación “categórica” de escribir 1_X para denotar la aplicación identidad sobre un conjunto X . Otros autores escriben id o a veces Id , con resultados lamentables.

Si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es suave,⁶ entonces la aplicación f también se le llama **suave**.

Usando en \mathbb{R} la sola carta $1_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, una *función* continua $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable [respectivamente, suave] si para cada carta (U, φ) de M la función $g \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable [respectivamente, suave].

► La forma natural de identificar variedades diferenciales es un difeomorfismo, i.e., una aplicación diferenciable e invertible con inverso diferenciable.⁷

Definición 2.4. Una aplicación suave $f: M \rightarrow N$ es un **difeomorfismo** si es una biyección y su inverso es suave,⁸ en tal caso las variedades M y N se llaman **difeomorfas**. La aplicación f se llama un *difeomorfismo local* en el punto $p \in M$ si existen vecindarios U de p y V de $f(p)$ tales que $f|_U: U \rightarrow V$ sea un difeomorfismo.

De la definición se sigue que si (U, φ) es una carta local entonces $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ es un difeomorfismo.

Ejemplo 2.5. Algunas variedades diferenciales difeomorfas:

1. En \mathbb{R}^2 considérese $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$, el eje x , y el grafo $\{(x, e^x) : x \in \mathbb{R}\}$ de la función $f(x) = e^x$. La biyección obvia $(x, 0) \mapsto (x, e^x)$ es un difeomorfismo.
2. Cualesquiera dos esferas $\{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = r_i^2\}$ con $r_1 \neq 0 \neq r_2$ son difeomorfas.
3. Si $n \neq m$, las esferas \mathbb{S}^n y \mathbb{S}^m no son difeomorfas.⁹ ◇

Definición 2.6. Sea M una variedad diferencial de dimensión n . Una parte $N \subseteq M$ es una **subvariedad d -dimensional** de M si para todo $p \in N$ existe una carta (U, φ) de M con $p \in U$ tal que $\varphi(U \cap N) = (\mathbb{R}^d \times 0) \cap \varphi(U)$. En tal caso se dice que $n - d$ es la **codimensión** de N en M .

⁶Una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es **suave**, o *indefinidamente diferenciable*, si posee derivadas parciales continuas de todos los ordenes.

⁷Dicho de otro modo: un difeomorfismo es un isomorfismo en la categoría de variedades diferenciales.

⁸Algunos autores llaman difeomorfismo a una biyección diferenciable con inverso diferenciable, sin requerir suavidad (es decir, sin hablar de derivadas parciales de orden superior). Aquí se usa la categoría VarDif cuyos objetos son variedades diferenciales y cuyos morfismos son aplicaciones suaves. Es factible considerar morfismos que son diferenciables una sola vez, pero se trata de una categoría distinta.

⁹Esto no es evidente. De hecho, \mathbb{S}^n y \mathbb{S}^m tampoco son homeomorfas, por el llamado teorema de invariancia del dominio.

► Para obtener las propiedades globales de una variedad diferencial a partir de sus cartas locales, que son copias de \mathbb{R}^n , se puede usar el siguiente instrumento.

Definición 2.7. Sea M una variedad diferencial y sea $(V_\alpha)_\alpha$ un cubrimiento por abiertos de M . Una familia $(f_\beta)_\beta$ de funciones suaves $f_\beta : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una **partición de la unidad**, subordinada al cubrimiento $(V_\alpha)_\alpha$, si:

- ★ $f_\beta(p) \geq 0$ para cada $p \in M$;
- ★ los soportes¹⁰ $W_\beta := \text{sop}(f_\beta)$ de cada función f_β forman un refinamiento localmente finito de (V_α) ;
- ★ $\sum_\beta f_\beta(p) = 1$ para todo $p \in M$.¹¹

Teorema 2.8. *Sea M una variedad diferencial. Para cada cubrimiento por abiertos $(V_\alpha)_\alpha$ de M existe una partición de la unidad subordinada a él. Si M es compacta, hay una partición finita de la unidad.*

Demostración. Sea $B_r := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$ la bola abierta de radio r centrado en el origen. Hay una función suave $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} h(x) &= 1 & \text{si } \|x\| \leq 1, \\ 0 < h(x) < 1 & \text{si } 1 < \|x\| < 2, \\ h(x) &= 0 & \text{si } \|x\| \geq 2, \end{aligned}$$

Por ejemplo, tómesese $h(x) := g(\|x\|)$, donde $g : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ es una función suave tal que $g(t) = 1$ para $0 \leq t \leq 1$ y $g(t) = 0$ para $t \geq 2$. La existencia de una función suave g con estas propiedades es un ejercicio estándar de cálculo diferencial.¹²

Dada el cubrimiento $(V_\alpha)_\alpha$ de M , se puede fabricar un atlas $(U_\beta, \varphi_\beta)_\beta$ para M tal que $U_\beta = \varphi_\beta^{-1}(B_3)$ para cada β y tal que $(U_\beta)_\beta$ sea un cubrimiento localmente finito de M que refina $(V_\alpha)_\alpha$ —esto es, para cada β hay algún $\alpha = \alpha(\beta)$ con

¹⁰Si X es un espacio topológico, el **soporte** de una función $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ (o bien $g : X \rightarrow \mathbb{C}$) es la clausura de la parte de X donde g no se anula: $\text{sop } g := \overline{\{y \in X : g(y) \neq 0\}}$.

¹¹En cada punto $p \in M$, la sumatoria $\sum_\beta f_\beta(p)$ es una suma *finita*, en virtud de la “finitud local” del recubrimiento $(W_\beta)_\beta$. Si M es compacta, se puede asumir que tanto $(V_\alpha)_\alpha$ como $(f_\beta)_\beta$ sean familias finitas.

¹²Es posible fabricar g con modificaciones apropiadas de la función suave $f(t) := e^{-1/t^2}$ si $t \neq 0$, $f(0) := 0$. Esta función cumple $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \geq 1$, luego no coincide con la suma de su serie de Taylor en $t = 0$. Es un ejemplo de una función de una variable real que es *suave pero no analítica*. No hay funciones de una variable *compleja* con dicha propiedad, lo cual implica la inexistencia de particiones de la unidad para variedades holomorfas.

$U_\beta \subseteq V_\alpha$. Si M es compacta, se puede suponer que $(V_\alpha)_\alpha$ y luego $(U_\beta)_\beta$ son cubrimiento finitos. Entonces, para $p \in M$, se pone

$$h_\beta(p) := \begin{cases} h(\varphi_\beta(p)) & \text{si } p \in U_\beta \\ 0 & \text{si } p \notin U_\beta \end{cases} \quad \text{y} \quad f_\beta(p) := \frac{h_\beta(p)}{\sum_\beta h_\beta(p)}.$$

Nótese que esta definición de f_β tiene sentido pues en cualquier punto $p \in M$ resulta que $h_\beta(p) > 0$ para algún β pero sólo para una cantidad finita de los β ; de modo que $0 < \sum_\beta h_\beta(p) < \infty$. Además, resulta que $\text{sop}(f_\beta) = \text{sop}(h_\beta) \subset U_\beta \subseteq V_{\alpha(\beta)}$. De este modo, las funciones $(f_\beta)_\beta$ forman una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $(V_\alpha)_\alpha$. \square

2.2 Fibrados vectoriales

Los fibrados vectoriales son una estructura que, intuitivamente, añade a una variedad una copia de un mismo espacio vectorial en cada punto, de modo que se obtiene una nueva variedad.

Un fibrado vectorial es un caso particular de una estructura más general (que se llama simplemente *fibrado*).

Definición 2.9. Un **fibrado**

$$\pi: E \xrightarrow{F} M$$

consiste de cuatro elementos: tres variedades diferenciales E, M y F llamadas respectivamente el **espacio total**, el **espacio base**, y la **fibra** (típica); y una aplicación suave y sobreyectiva $\pi: E \rightarrow M$ (usualmente llamada la *proyección*) de modo que:¹³

- ★ para cada $x \in M$, la preimagen $E_x := \pi^{-1}(x)$ es una subvariedad diferencial de E la cual es difeomorfa a F ; a E_x se le llama **la fibra sobre x** ,
- ★ π define localmente una estructura de producto (cartesiano) sobre E en el siguiente sentido; cada punto de M posee un vecindario O y un difeomorfismo

$$\psi: \pi^{-1}(O) \rightarrow O \times F,$$

de modo que $\Pi_1 \circ \psi = \pi$, donde $\Pi_1: O \times F \rightarrow O$ es la proyección sobre el primer factor.

¹³Si se considera π como el elemento esencial del fibrado, entonces se obtiene una forma de descomponer E en “hojas”. Si se considera F como el elemento esencial, entonces lo que se logra es construir una nueva variedad diferencial que proyecta sobre M .

Ejercicio 2.10. Mostrar que $\dim E = \dim M + \dim F$.

Sea $\pi: E \rightarrow M$ un fibrado con fibra F , y sea $(O_\alpha)_\alpha$ un cubrimiento del espacio base M por abiertos de modo tal que cada $\pi^{-1}(O_\alpha)$ sea difeomorfo a $O_\alpha \times F$. Para cada α hay un difeomorfismo

$$\psi_\alpha: \pi^{-1}(O_\alpha) \rightarrow O_\alpha \times F$$

de modo que $\Pi_1 \circ \psi_\alpha = \pi$. De este modo podemos escribir

$$\psi_\alpha(b) = (x, \psi_{\alpha,x}(b))$$

donde $b \in \pi^{-1}(O_\alpha)$ con $x = \pi(b)$. Así, $\psi_{\alpha,x}: E_x \rightarrow F$ es un difeomorfismo entre la fibra sobre x y la fibra típica.

Si $\beta \neq \alpha$ y $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$ entonces para cualquier $x \in O_\alpha \cap O_\beta$ la fibra sobre x se identifica con la fibra F de dos maneras; mediante $\psi_{\alpha,x}$ y mediante $\psi_{\beta,x}$. La comparación entre ambas produce un difeomorfismo

$$\psi_{\alpha,x} \circ \psi_{\beta,x}^{-1}: F \rightarrow F.$$

Definición 2.11. Para cada punto $x \in O_\alpha \cap O_\beta$ corresponde un difeomorfismo de F , y así una aplicación $\psi_{\alpha\beta}$ de $O_\alpha \cap O_\beta$ hacia el grupo de difeomorfismos de F , llamado **la función de transición** sobre $O_\alpha \cap O_\beta$, definida mediante

$$\psi_{\alpha\beta}(x) := \psi_{\alpha,x} \circ \psi_{\beta,x}^{-1}.$$

Lema 2.12. *Las funciones de transición satisfacen*

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha\beta}(x) &= \psi_{\beta\alpha}(x)^{-1} && \text{para } x \in O_\alpha \cap O_\beta, \\ \psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\gamma}(x) &= \psi_{\alpha\gamma}(x) && \text{para } x \in O_\alpha \cap O_\beta \cap O_\gamma. \end{aligned}$$

Observación. En casos de interés la fibra F posee estructuras adicionales. Esta estructura puede ser de espacio vectorial, de espacio con producto interno, o de grupo de Lie,¹⁴ por ejemplo. Los difeomorfismos de F que preservan dicha estructura muchas veces forman un grupo de Lie. Se dice que la fibración $\pi: E \rightarrow M$ es compatible con la estructura de F si cada fibra de E posee dicha estructura y si además cada $\psi_{\alpha,x}$ es un isomorfismo en el sentido apropiado, para algún cubrimiento $(O_\alpha)_\alpha$ de M .

¹⁴Un **grupo de Lie** es una variedad diferencial que posee una estructura de grupo, tal que las operaciones de producto e inversión sean aplicaciones suaves. Los ejemplos “clásicos” son los grupos de matrices invertibles que comparten alguna propiedad particular, como por ejemplo las matrices ortogonales, unitarias o unimodulares.

En el siguiente ejemplo se ve cómo usar un subgrupo G del grupo de automorfismos sobre F para definir un fibrado sobre M .

Ejemplo 2.13 (La cinta infinita de Möbius). Sea M el círculo \mathbb{S}^1 , $F = \mathbb{R}$ la recta real, y G el grupo de dos elementos $\{1, -1\}$, actuando en \mathbb{R} por multiplicación. Cubramos el círculo con dos partes abiertas O_1, O_2 cada una difeomorfo a un intervalo abierto, de modo que $O_1 \cap O_2$ es la unión de dos componentes disjuntas, P y Q , cada una difeomorfa a un intervalo abierto. Sea $\psi_{12}(x) := 1$ para $x \in P$ y $\psi_{12}(x) := -1$ para $x \in Q$. Las condiciones para las funciones de transición del Lema 2.12 están satisfechos. Definamos E como la totalidad de las clases de equivalencia de triples (x, i, z) donde $x \in M$; $i = 1$ ó 2 ; $z \in F$, mediante¹⁵

$$(x, i, z) \sim (y, j, w) \quad \text{si y sólo si} \quad x = y, \quad w = \psi_{ji}(x)z.$$

El resultado es un fibrado llamado la *cinta infinita de Möbius*. ◇

Definición 2.14. Sean M y F dos variedades diferenciales. El **fibrado trivial** con base M y fibra F es el fibrado que se obtiene al considerar como espacio total la variedad diferencial $E = M \times F$ junto con la proyección sobre el primer factor $\pi := \Pi_1$.

Todo fibrado es localmente difeomorfo a un fibrado trivial mediante una *trivialización local* $\psi: \pi^{-1}(O) \rightarrow O \times F$. Si es posible tomar $O = M$ “globalmente”, el fibrado también se llama trivial. En detalle, $\pi: E \xrightarrow{F} M$ es un *fibrado trivial* si existe un difeomorfismo $\psi: E \rightarrow M \times F$ tal que $\Pi_1 \circ \psi = \pi$.

► Para empezar el camino hacia la algebraización de los fibrados, conviene introducir el concepto básico de *sección*.

Definición 2.15. Una **sección** del fibrado $\pi: E \xrightarrow{F} M$ es una aplicación suave

$$s: M \rightarrow E, \quad \text{tal que} \quad \pi \circ s = 1_M,$$

¹⁵Este es un caso particular de una construcción más general que permite recuperar un fibrado a partir de sus funciones de transición. De hecho, supóngase que se conoce el conjunto de funciones de transición $\{\psi_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in A\}$ asociadas al cubrimiento $(O_\alpha)_{\alpha \in A}$ del espacio base M y que satisfacen las propiedades del Lema 2.12. Como el espacio total tómesese el conjunto de clases de equivalencia $\{(x, \alpha, y) : \alpha \in A, x \in O_\alpha, y \in F\} / \sim$, donde $(x, \alpha, y) \sim (x', \beta, y')$ si y sólo si $x = x'$, $y' = \psi_{\beta\alpha}(x)(y)$. La proyección es $\pi[x, \alpha, y] := x$. La identificación de la fibra sobre x con F se obtiene al fijar α y de la aplicación $[x, \alpha, y] \rightarrow y$. Por último, $\pi^{-1}(O_\alpha)$ se identifica con $O_\alpha \times F$ mediante la aplicación $[x, \alpha, y] \mapsto (x, y)$.

es decir, $\pi \circ s$ es la aplicación identidad de la base M . El conjunto de secciones suaves¹⁶ del fibrado será denotado por $\Gamma(M, E)$.

La existencia de tales secciones “globales” exige un buen diálogo con las funciones de transición. Pero no hay obstáculo si se restringe el dominio a un vecindario que admite una trivialización local.¹⁷ Una **sección local** es una aplicación suave $s: O \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = 1_O$, para alguna parte abierta O de M .

Una sección de un fibrado es una forma de elegir un punto $s(x)$ en la fibra E_x para cada punto x de la variedad base de un fibrado, de manera compatible con las estructuras diferenciales involucradas. *Grosso modo*, esta elección generaliza la noción del grafo de una función.

Ejercicio 2.16. Una aplicación suave de M en F puede describirse como una sección del fibrado trivial de base M y fibra F . ¿Cómo?

Definición 2.17. Un fibrado $\pi: E \xrightarrow{V} M$ se llama **fibrado vectorial**¹⁸ si cada fibra E_x es un espacio vectorial (real o complejo,¹⁹ de dimensión finita) y cada aplicación $\psi_{\alpha,x}$ de la fibra E_x a la fibra típica V , la cual se puede tomar como \mathbb{R}^k o bien \mathbb{C}^k para algún k , es un isomorfismo lineal. El **ranko** del fibrado vectorial es la dimensión, k , de la fibra típica.

► Se pueden formar combinaciones lineales de secciones de fibrados vectoriales usando como coeficientes unas funciones suaves sobre la variedad base. De hecho,

¹⁶A veces conviene usar secciones que son solamente *continuas*, sin pedir diferenciabilidad. Al sustituir la palabra “suave” con “continua” por doquier, es posible definir variedades topológicas y fibrados topológicos: sus funciones de transición serían homeomorfismos en vez de difeomorfismos, etc. Cada fibrado diferencial es también topológico, porque toda función suave es automáticamente continua. Esta es una instancia del uso de un **functor olvidadizo** de la teoría de categorías.

¹⁷En el caso particular de fibrados vectoriales, siempre existen al menos una sección global: la **sección cero**, que asigna a cada punto $x \in M$ el cero del espacio vectorial E_x .

¹⁸El ejemplo por excelencia es el **fibrado tangente** TM a una variedad diferencial n -dimensional M , cuya fibra sobre cada punto $x \in M$ es el espacio tangente T_xM . Si $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ es una carta local alrededor del punto $x \in M$, el espacio vectorial real T_xM posee por base el conjunto de aplicaciones lineales $\{(\partial_{x^1})_x, \dots, (\partial_{x^n})_x\}$ de $C^\infty(M)$ en \mathbb{R} definidas por las derivadas parciales en \mathbb{R}^n , $(\partial_{x^i})_x(f) := (f \circ \varphi^{-1})_{,x^i}(\varphi(x))$.

¹⁹Si bien los fibrados vectoriales mejor conocidos en la geometría diferencial, el *fibrado tangente* y el *fibrado cotangente* de una variedad n -dimensional poseen como fibra típica \mathbb{R}^n , en la geometría no conmutativa se encuentran muchos fibrados vectoriales complejos. El contexto dirá si es mejor usar escalares reales o complejos.

sea $\pi: E \xrightarrow{V} M$ un fibrado vectorial complejo²⁰ y sean s_1 y s_2 dos secciones del fibrado, y $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$. Como para cada punto $x \in M$ existe un vecindario O de x y un difeomorfismo $\psi: \pi^{-1}(O) \rightarrow O \times V$, de modo que $\Pi_1 \circ \psi = \pi$, se puede definir $f_1 s_1 + f_2 s_2$ como la sección cuyo valor en $x \in M$ está dado por

$$(f_1 s_1 + f_2 s_2)(x) := \psi^{-1}(x, f_1(x) \Pi_2 \circ \psi \circ s_1(x) + f_2(x) \Pi_2 \circ \psi \circ s_2(x)), \quad (2.1)$$

teniendo en cuenta que V es un espacio \mathbb{C} -vectorial. Como $\pi \circ \psi^{-1} = \Pi_1$, se observa que $\pi((f_1 s_1 + f_2 s_2)(x)) = x$.

Para ver que dicha sección está bien definida, hay que mostrar que no depende del par (O, ψ) y que es una aplicación suave de M en E . Esta se comprueba en seguida, al usar las funciones de transición.

Lema 2.18. *La expresión (2.1) define una nueva sección del fibrado vectorial $\pi: E \xrightarrow{V} M$.*

Demostración. Primero, considérese otro vecindario O' de x y otro difeomorfismo $\psi': \pi^{-1}(O') \rightarrow O' \times V$, de modo que $\Pi_1 \circ \psi' = \pi$. Escribimos

$$\psi(b) = (x, \psi_x(b)) \quad \text{y} \quad \psi'(b) = (x, \psi'_x(b)),$$

para $b \in \pi^{-1}(O \cap O')$ con $x = \pi(b)$. Con esta notación, la fórmula (2.1) para ψ' se escribe como

$$(f_1 s_1 + f_2 s_2)(x) = \psi'^{-1}(x, f_1(x) \psi'_x(s_1(x)) + f_2(x) \psi'_x(s_2(x))).$$

Ambos $\psi_x, \psi'_x: E_x \rightarrow V$ son difeomorfismos. Su cociente produce un difeomorfismo $\psi'_x \circ \psi_x^{-1}: V \rightarrow V$, la cual es además una transformación lineal. De este modo, se obtiene

$$\begin{aligned} (f_1 s_1 + f_2 s_2)(x) &= \psi'^{-1}(x, f_1(x) \psi'_x(s_1(x)) + f_2(x) \psi'_x(s_2(x))) \\ &= \psi'^{-1}(x, \psi'_x \circ \psi_x^{-1}(f_1(x) \psi_x(s_1(x)) + f_2(x) \psi_x(s_2(x)))) \\ &= \psi^{-1}(x, f_1(x) \psi_x(s_1(x)) + f_2(x) \psi_x(s_2(x))), \end{aligned}$$

lo cual demuestra la independencia del par (O, ψ) en la definición de $f_1 s_1 + f_2 s_2$.

La suavidad de la aplicación $f_1 s_1 + f_2 s_2: M \rightarrow E$ es consecuencia de su expresión explícita (2.1), y de la suavidad de $\psi, \psi^{-1}, s_1, s_2, f_1, f_2$ y las proyecciones. \square

²⁰Los elementos de $C^\infty(M)$ son funciones suaves $f: M \rightarrow \mathbb{C}$, de valores complejos. Si se prefiere trabajar exclusivamente con funciones suaves reales $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, toda la discusión sigue válida al cambiar \mathbb{C}^k a \mathbb{R}^k y $C^\infty(M)$ a $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

La conclusión es que el conjunto $\Gamma(M, E)$ de secciones de $\pi: E \xrightarrow{V} M$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} y además es un *módulo*²¹ sobre el álgebra $C^\infty(M)$.

Observación. La trivialidad local de un fibrado vectorial asegura la existencia de bases de secciones locales. Dado un abierto O del espacio base M que admite una trivialización local, hay un juego de secciones locales $s_1, \dots, s_k: O \rightarrow \pi^{-1}(O)$ tales que para cada $x \in O$, $\{s_1(x), \dots, s_k(x)\}$ es una base vectorial para la fibra E_x .

La naturaleza de la fibras de un fibrado vectorial nos permite realizar múltiples operaciones con los fibrados vectoriales, por ejemplo formar fibrado duales y sumas directas o productos tensoriales de dos o más fibrados vectoriales. Se examinará algunas de estas construcciones oportunamente.

2.3 Módulos sobre anillos

En este apartado se estudiará los módulos proyectivos sobre anillos. Los módulos son una generalización de los espacios vectoriales, si para el cuerpo (que proporciona los coeficientes para las combinaciones lineales de vectores) se sustituye un anillo cualquiera. Los módulos de mayor interés para la geometría no conmutativa tienen una propiedad adicional, la de proyectividad, que los espacios vectoriales poseen automáticamente.

Conviene recordar las definiciones de anillo y de álgebra (Definición 1.1).

Ejemplo 2.19. El conjunto $C^\infty(M)$ de funciones suaves (de valores complejos) sobre una variedad diferencial M es un anillo conmutativo.²² De hecho, $C^\infty(M)$ es un álgebra sobre \mathbb{C} . \diamond

Definición 2.20. Un A -**módulo derecho** E sobre un anillo A es un grupo abeliano $(E, +)$ junto con una operación $E \times A \rightarrow E$ (llamada **multiplicación escalar**) de modo tal que para todo $a, b \in A$ y $x, y \in E$ se satisfacen:

$$\star (x + y)a = xa + ya;$$

²¹Los módulos están discutidos ampliamente en la próxima subsección.

²²Por definición, un anillo posee un elemento unidad 1. En $C^\infty(M)$, esta es la función constante de valor $1 \in \mathbb{C}$. Si M no es compacta, el anillo $C^\infty(M)$ es muy grande y es preferible reemplazarlo por $C_0^\infty(M) = C^\infty(M) \cap C_0(M)$, las funciones suaves que se anulan en el infinito; véase la discusión al final del apartado 1.2. (Cualquier variedad diferencial es localmente compacta.) Ahora bien, $C_0^\infty(M)$ no es unital si M no es compacta: las funciones constantes no zeros no se anulan en el infinito. En parte para evitar los llamados “anillos sin unidad”, conviene limitarnos por ahora al caso de variedades compactas.

$$\star x(a+b) = xa + xb;$$

$$\star x(ab) = (xa)b;$$

$\star x1 = x$ para la unidad 1 de A (i.e., todos nuestros módulos son unitarios).

En forma similar se definen los A -módulos izquierdos.²³ Si B es otro anillo, dícese que E es un B - A -**bimódulo** si E es un módulo derecho sobre A y a la vez es un módulo izquierdo sobre B y si además las acciones de B y A conmutan: $b(xa) = (bx)a$ para todo $x \in E$, $a \in A$, $b \in B$.

Si el anillo A es *conmutativo*, cada A -módulo a la derecha E resulta ser también un A -módulo a la izquierda (y vice versa) al poner $ax := xa$ para $a \in A$, $x \in E$. En este caso, se habla de “ A -módulo” sin ambigüedad.

Si A es un cuerpo, un A -módulo es, ni más ni menos, un espacio vectorial sobre A .

Una función $f: E \rightarrow E'$ entre dos A -módulos (derechos) es un **homomorfismo**²⁴ de A -módulos (o bien un **A -homomorfismo**) si para todo $a, b \in A$ y $x, y \in E$ se tiene que

$$f(xa + yb) = f(x)a + f(y)b.$$

Un **epimorfismo** (**monomorfismo**, **isomorfismo**, respectivamente) de A -módulos es un A -homomorfismo sobreyectivo (inyectivo, biyectivo, respectivamente).

Ejercicio 2.21. Comprobar que el espacio $\Gamma(M, E)$ de secciones de un fibrado vectorial $\pi: E \xrightarrow{V} M$ es un módulo sobre $C^\infty(M)$.

Ejemplo 2.22. Considérese el espacio vectorial \mathbb{C}^n como la totalidad de “vectores de columna” con n entradas. Este es un módulo izquierdo para el álgebra de matrices $B = M_n(\mathbb{C})$, bajo el producto de matrices por columnas. Por otro lado, la multiplicación por escalares $x\lambda = \lambda x$ hace de \mathbb{C}^n un \mathbb{C} -módulo derecho; entonces \mathbb{C}^n es un $M_n(\mathbb{C})$ - \mathbb{C} -bimódulo. \diamond

► Cualquier espacio \mathbb{K} -vectorial (finitodimensional) posee una base, es decir, un juego (finito) de vectores que genera el espacio vectorial y a la vez es linealmente independiente. Estas dos propiedades de una base no se generalizan a A -módulos

²³Algunos textos de álgebra hablan de A -módulos (a la izquierda) y de módulos- A (a la derecha). Es mejor evitar semejante pedantería, pero resulta útil nombrar las categorías de estos módulos como ${}_A\text{Mod}$ y Mod_A , respectivamente.

²⁴En el caso particular de espacios vectoriales sobre cuerpos, los homomorfismos son precisamente las transformaciones lineales.

cualesquiera. Sin embargo, hay dos clases de módulos que admiten familias finitas de elementos espaciales: los módulos *libres* y más ampliamente, los módulos *proyectivos*. (Cada módulo libre es proyectivo.)

Definición 2.23. Si E es una A -módulo derecho, una parte X **genera** E si²⁵

$$E = \{x_1a_1 + \cdots + x_na_n : n \in \mathbb{N}, x_j \in X, a_j \in A\}.$$

En particular, si E tiene una parte generante X de cardinalidad finita, se dice que E es **finitamente generado** como A -módulo derecho.

Si además el conjunto X es **A -linealmente independiente**, esto es, si la relación $x_1a_1 + \cdots + x_na_n = 0$ para todo $x_j \in X, a_j \in A$ implica necesariamente que cada $a_j = 0$, se dice que X es una **base** de E . Un A -módulo derecho E se llama **libre** si y sólo si posee una base.

Ejemplo 2.24. En contraste con el caso de espacios vectoriales, un A -módulo no posee una base necesariamente (si A no es un cuerpo). Por otro lado, si A^n denota la totalidad de columnas con n entradas que son elementos de A , entonces A^n es un A -módulo derecho con una *base estándar*. En efecto, sea u_j la columna cuya j -ésima entrada es 1 y cuyas demás entradas son 0. Entonces $u_1a_1 + \cdots + u_na_n$ es la columna $(a_1, \dots, a_n)^\top$, la cual es nula²⁶ si y sólo si cada $a_j = 0$.

Si J es un conjunto arbitrario (no necesariamente finita), hay un A -módulo libre $A^{(J)} = \bigoplus_{j \in J} A$ cuya base tiene la cardinalidad de J . Esta es una suma directa²⁷ de copias de A , indexada por los elementos de J . \diamond

Definición 2.25. La **suma directa** $E \oplus F$ de dos A -módulos derechos E y F es la totalidad de pares ordenados $\{(x, y) : x \in E, y \in F\}$. La operación de suma y la acción de A se definen “entrada por entrada”, como es de esperar:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (x, y)a := (xa, ya) \quad \text{para } a \in A.$$

Es usual identificar E con $E \oplus 0$ y F con $0 \oplus F$, para poder considerar E y F como submódulos de $E \oplus F$.

²⁵Las expresiones $x_1a_1 + \cdots + x_na_n$ se llaman *combinaciones lineales* de los elementos x_1, \dots, x_n , por supuesto. Para $n = 0$, el elemento nulo $0 \in E$ se cuenta como una “combinación lineal vacía”.

²⁶La notación $^\top$ significa *transpuesta*. A veces se escribe columnas como transpuestas de filas.

²⁷Se emplea la notación $A^J = \prod_{j \in J} A$ para el *producto cartesiano* de $|J|$ copias de A ; sus elementos son *todas* las funciones $j \mapsto a_j$ de J en A . Los elementos de A^J tales que $a_j = 0$ excepto por una cantidad finita de índices j forman la llamada *suma directa*, denotada por $A^{(J)}$.

Si H es un A -módulo derecho *isomorfo* a $E \oplus F$, se dice que H es “una” suma directa²⁸ de E y F . Por ejemplo, es $A^2 \simeq A \oplus A$ y más generalmente, se ve que $A^{m+n} \simeq A^m \oplus A^n$.

De igual manera, se define la suma directa de tres o más A -módulos derechos; por ejemplo, se define $E \oplus F \oplus G := \{(x, y, z) : x \in E, y \in F, z \in G\}$. Hay isomorfismos evidentes $(E \oplus F) \oplus G \simeq E \oplus F \oplus G \simeq E \oplus (F \oplus G)$.

Definición 2.26. Un A -módulo derecho E es **proyectivo** si es un *sumando directo* de un A -módulo derecho *libre*. En otras palabras, E es proyectivo si (y sólo si) hay un A -módulo libre L y si hay otro A -módulo derecho F tales que $E \oplus F \simeq L$.

Fíjese que todo A -módulo libre L es proyectivo: basta tomar $F = 0$, porque $L \oplus 0 \simeq L$.

Ejemplo 2.27. He aquí un ejemplo típico de un A -módulo derecho proyectivo pero no necesariamente libre. Considérese A^n como A -módulo derecho *libre* y sea $p \in M_n(A)$ una matriz tal que $p^2 = p$; se dice que p es un elemento **idempotente** del anillo $M_n(A)$. Defínase

$$E := pA^n \equiv \{px : x \in A^n\}, \quad (2.2)$$

donde px denota el producto de la matriz p por la columna x ; el resultado es la columna cuya i -ésima entrada es $\sum_{j=1}^n p_{ij}x_j \in A$. Es más o menos evidente que E es un A -submódulo derecho de A^n , porque $(px)a = p(xa)$ para todo $a \in A$.

La relación $p^2 = p$ implica que la matriz $1 - p \in M_n(A)$ es también idempotente:

$$(1 - p)^2 = 1 - 2p + p^2 = 1 - 2p + p = 1 - p.$$

defínase $F := (1 - p)A^n = \{x - px : x \in A^n\}$. Entonces F es otro A -submódulo derecho de A^n . Si $z \in E \cap F$, entonces $z = py = x - px$ para algunos $x, y \in A^n$. Esto implica que

$$z = py = p^2y = pz = px - p^2x = px - px = 0.$$

Se concluye que $E \cap F = 0$. Además, cada elemento $x \in A^n$ cumple la ecuación

$$x = px + (x - px) \in E \oplus F.$$

Se concluye que $E \oplus F \simeq A^n$; luego, E es proyectivo. \diamond

²⁸Los textos de álgebra hacen alarde de una distinción entre la suma directa *externa* $E \oplus F$, que es la definición actual, y una suma directa *interna*: este es un A -módulo derecho H que incluye copias de E y F como submódulos que satisfacen $E \cap F = 0$. Hay un isomorfismo evidente $(E \oplus F) \simeq H$. El punto de vista categórico desprecia las distinciones entre objetos isomorfos.

Este ejemplo es “típico” porque cada A -módulo derecho **proyectivo y finitamente generado** tiene esta forma. Si E es generado por un juego finito de sus elementos $\{x_1, \dots, x_n\}$, hay un A -homomorfismo sobreyectivo $\phi: A^n \rightarrow E$ determinado por $\phi(u_j) := x_j$ para $j = 1, \dots, n$. Es posible mostrar que hay un idempotente $q = q^2 \in M_n(A)$ tal que $qA^n = \ker \phi$ como submódulos de A^n ; y que $(1 - q)A^n \simeq \text{im } \phi \simeq E$. Entonces es cuestión de tomar $p := 1 - q$. Para los detalles, remitimos a cualquier texto de álgebra superior.²⁹

► La siguiente caracterización de módulos proyectivos por “diagramas y flechas” suele ser bastante útil.

Lema 2.28. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) E es un A -módulo proyectivo;
- (b) dados dos A -homomorfismos $f: E \rightarrow G$ y $g: F \rightarrow G$ con g sobreyectivo, existe un A -homomorfismo $h: E \rightarrow F$ tal que $g \circ h = f$. En otras palabras, el siguiente diagrama conmuta:³⁰

$$\begin{array}{ccccc}
 & & E & & \\
 & & \downarrow f & & \\
 & h \swarrow & & \searrow & \\
 F & \xrightarrow{g} & G & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

- (c) toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0 \tag{2.3}$$

(i.e., f es un monomorfismo, g es un epimorfismo y $\ker g = \text{im } f$) de A -homomorfismos de módulos, escinde (i.e., $D \simeq C \oplus E$).

Demostración. Ad(b) \implies (c): Dada la sucesión exacta corta (2.3), hay un diagrama conmutativo cuya flecha vertical es 1_E :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & E & & \\
 & & & & \downarrow 1_E & & \\
 & & h \swarrow & & & \searrow & \\
 0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \longrightarrow 0,
 \end{array}$$

²⁹Hay un tratamiento muy detallado en: Lekh R. Vermani, *An Elementary Approach to Homological Algebra* (Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, FL, 2003). Para un bosquejo más terso, véase el apartado 2.A del libro E-NCG.

³⁰En el diagrama la fila inferior es exacta en G : la sobreyectividad de g dice que $\text{im } g = G = \ker(G \rightarrow 0)$.

La existencia de $h: E \rightarrow D$ tal que $g \circ h = 1_E$ viene de la condición (a). Defínase un A -homomorfismo $j: C \oplus E \rightarrow D$ por $j(c \oplus e) := f(c) + h(e)$. Si $j(c \oplus e) = 0$ entonces $f(c) = -h(e)$ y $0 = gf(c) = -gh(e) = -e$ de donde $e = 0$; y además $c \in \ker f = 0$; luego j es inyectivo. Por otra parte, cualquier $d \in D$ cumple $g(d - h(g(d))) = 0$, así que $d - h(g(d)) \in \ker g = \text{im } f$; luego existe $c \in C$ con $f(c) = d - h(g(d))$ y por tanto es posible escribir $d = f(c) + h(g(d)) = j(c \oplus g(d))$; se concluye que j es también sobreyectivo. En resumen, j es un isomorfismo entre $C \oplus E$ y D .

Ad(c) \implies (a): Todo módulo proyectivo E es la imagen bajo un homomorfismo de un módulo libre. Si el conjunto $\{x_j : j \in J\}$ genera E , sea $L := A^J$, un A -módulo libre con la “base estándar” $\{e_j : j \in J\}$. Entonces hay un homomorfismo sobreyectivo $q: L \rightarrow E$ determinado por $q(e_j) := x_j$ para todo j . Ahora, si $K = \ker q$, entonces la sucesión corta de A -homomorfismos

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} L \xrightarrow{q} E \longrightarrow 0,$$

donde i es la inclusión de K en L , es exacta. La condición (b) dice que hay un isomorfismo $L \simeq K \oplus E$, así que E es proyectivo.

Ad(a) \implies (b): Si existe un A -módulo libre L y un A -módulo K tales que $L \simeq K \oplus E$, sea $q: L \rightarrow E$ el A -homomorfismo sobreyectivo dado por $(k, e) \mapsto e$ y sea $i: E \rightarrow L$ el A -homomorfismo inyectivo dado por $e \mapsto (0, e)$; fíjese que $q \circ i = 1_E$. Considérese el siguiente diagrama de A -homomorfismos de módulos:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{q} & E \\ \downarrow h' & \searrow h & \downarrow f \\ F & \xrightarrow{g} & G \longrightarrow 0. \end{array}$$

Como L es libre y por ende proyectivo, hay un A -homomorfismo $h': L \rightarrow F$ tal que $g \circ h' = f \circ q$. Ahora sea $h: E \rightarrow F$ el A -homomorfismo compuesto $h := h' \circ i$. Entonces $g \circ h = g \circ h' \circ i = f \circ q \circ i = f$. □

2.4 Operaciones con fibrados vectoriales

A continuación desarrollamos una poco de intuición sobre la relación entre fibrados vectoriales y módulos proyectivos.

Definición 2.29. Sean $\pi_1: E' \xrightarrow{V} M$ y $\pi_2: E'' \xrightarrow{W} M$ dos fibrados vectoriales sobre la misma base, de rangos respectivos k y l . Su **suma de Whitney** es el fibrado vectorial con base M , de rango $k+l$, cuya fibra sobre $x \in M$ es la suma directa

$$E'_x \oplus E''_x = \pi_1^{-1}(x) \oplus \pi_2^{-1}(x) \simeq V \oplus W.$$

Para completar la descripción de este fibrado, hay que describir su estructura local como producto cartesiano. Si $(O'_\beta)_\beta$ y $(O''_\gamma)_\gamma$ son cubrimientos por abiertos de M que admiten trivializaciones locales de E' y E'' respectivamente, tienen un refinamiento común formado por todas las intersecciones no vacías $O'_\beta \cap O''_\gamma$. De este modo, se construye un atlas $(O_\alpha, \varphi_\alpha)_\alpha$ de M que trivializa los dos fibrados dados simultáneamente.

El espacio total E de la suma de Whitney es el conjunto

$$E := \{(e', e'') : e' \in E', e'' \in E'', \pi_1(e') = \pi_2(e'')\}.$$

Así, $e' \in E'_x$ y $e'' \in E''_x$ quedan en dos fibras sobre el mismo punto $x = \pi_1(e') = \pi_2(e'')$ de M . Defínase la aplicación $\pi: E \rightarrow M$ mediante $\pi(e', e'') := \pi_1(e') = \pi_2(e'')$. Para dotar a E de estructura de variedad diferencial, considérese el atlas formado por las cartas $(U_\alpha, \widehat{\varphi}_\alpha)_\alpha$ donde $U_\alpha := \pi^{-1}(O_\alpha)$ y $\widehat{\varphi}_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{n+k+l}$ está dado por dado por

$$\widehat{\varphi}_\alpha(e', e'') := (\varphi_\alpha(x), \psi'_{\alpha,x}(e'), \psi''_{\alpha,x}(e'')),$$

donde $x = \pi(e', e'')$, mientras $\psi'_{\alpha,x}: E'_x \rightarrow V \simeq \mathbb{R}^k$ y $\psi''_{\alpha,x}: E''_x \rightarrow W \simeq \mathbb{R}^l$ son los isomorfismos lineales³¹ determinados por las trivializaciones locales de E' y E'' .

De este modo, $\pi: E \xrightarrow{V \oplus W} M$ es un fibrado vectorial con fibras $E_x \simeq E'_x \oplus E''_x$. Sus trivializaciones locales son las aplicaciones

$$\psi_\alpha: U_\alpha \rightarrow O_\alpha \times (V \oplus W) : (e', e'') \mapsto (x, \psi'_{\alpha,x}(e'), \psi''_{\alpha,x}(e'')).$$

Es usual escribir $E' \oplus E'' := E$ para denotar el espacio total de la suma de Whitney.

Los fibrados vectoriales reales y complejos son los objetos de dos categorías, $\text{Vect}_{\mathbb{R}}$ y $\text{Vect}_{\mathbb{C}}$, con los siguientes morfismos. (Para mayor comodidad, omitimos la mención explícita del cuerpo \mathbb{R} o \mathbb{C} .)

³¹En la notación, se ha supuesto que las fibras típicas V y W son espacios vectoriales reales. Si se trata de fibrados vectoriales complejos, cada $\widehat{\varphi}_\alpha$ lleva U_α en $\mathbb{R}^{n+2k+2l}$.

Definición 2.30. Un **morfismo** entre fibrados vectoriales $\pi: E \xrightarrow{V} M, \pi': E' \xrightarrow{V'} M'$ es un par de funciones suaves $f: E \rightarrow E'$ y $g: M \rightarrow M'$ tal que $g \circ \pi = \pi' \circ f$ y para cada $x \in M$, la restricción de f a las fibras $E_x \rightarrow E'_{g(x)}$ es una transformación lineal:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{g} & M' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E_x & \xrightarrow{f|_{E_x}} & E'_{g(x)} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \{x\} & \xrightarrow{g} & \{g(x)\} \end{array}$$

Un tal morfismo es invertible si f y g son biyecciones suaves con inversos suaves $f^{-1}: E' \rightarrow E, g^{-1}: M' \rightarrow M$, en cuyo caso (f^{-1}, g^{-1}) es un morfismo inverso de (f, g) ; dícese que (f, g) es un **isomorfismo de fibrados** y que estos dos fibrados son **isomorfos**. Para que haya isomorfismo, es necesario que $\dim E = \dim E', \dim M = \dim M'$ y que los rangos coincidan.

En el caso particular en que $M = M'$ y $g = 1_M$, se obtiene una subcategoría³² $\text{Vect}(M)$ de fibrados vectoriales con base M , cuyos morfismos se denotan simplemente por f en vez de $(f, 1_M)$:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & M & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E_x & \xrightarrow{f|_{E_x}} & E'_{g(x)} \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & \{x\} & \end{array}$$

Un isomorfismo en esta categoría se le llama una **equivalencia** de fibrados vectoriales sobre M . Obsérvese que un fibrado vectorial $\pi: E \xrightarrow{V} M$ es trivial si y sólo si es equivalente al fibrado $\Pi_1: M \times V \xrightarrow{V} M$.

► En la categoría $\text{Vect}(M)$, la suma de Whitney cumple el mismo papel de la *suma directa* en la categoría An de anillos. Hay un “objeto cero”, el cual es el **fibrado nulo** $1_M: M \xrightarrow{0} M$ de rango cero, usualmente denotado por 0 . Para cada fibrado vectorial $\pi: E \rightarrow M$ podemos identificar M con la subvariedad $s_0(M)$ de E , donde s_0 es la sección global nula. Así, el fibrado nulo se identifica con un subfibrado³³

³²Por definición, una **subcategoría** D de una categoría C consta de una subclase de objetos de C , denotada $\text{Ob}(D)$ y partes $\text{Hom}_D(A, B) \subseteq \text{Hom}_C(A, B)$ para todo $A, B \in \text{Ob}(D)$, tales que: (a) $1_A \in \text{Hom}_D(A, A)$ para todo $A \in \text{Ob}(D)$; (b) si $f \in \text{Hom}_D(A, B)$ y $g \in \text{Hom}_D(B, E)$, entonces $gf \in \text{Hom}_D(A, E)$. Estas condiciones garantizan que D sea también una categoría.

³³Un **subfibrado** de un fibrado vectorial $\pi: E \rightarrow M$ es un fibrado vectorial $\pi': E' \rightarrow M$ tal que E' es una subvariedad de $E, \pi|_{E'} = \pi'$ y para todo $x \in M$ la fibra E'_x es una subvariedad de la fibra E_x .

de cada fibrado vectorial. Hay morfismos inyectivos $f': e' \mapsto (e', s'_0 \circ \pi'(e'))$ y $f'': e'' \mapsto (s'_0 \circ \pi''(e''), e'')$, con s'_0 y s''_0 las respectivas secciones nulas; y también hay morfismos sobreyectivos $g': (e', e'') \mapsto e'$ y $g'': (e', e'') \mapsto e''$ tales que las dos composiciones:

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{f'} E' \oplus E'' \xrightarrow{g''} E'' \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow E'' \xrightarrow{f''} E' \oplus E'' \xrightarrow{g'} E' \longrightarrow 0,$$

sean sucesiones exactas cortas³⁴ de fibrados vectoriales sobre M .

► El siguiente resultado permite concluir que un morfismo entre fibrados vectoriales es un isomorfismo si su restricción a cada fibra es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Lema 2.31. *Si f es un morfismo entre fibrados vectoriales $\pi: E \rightarrow M$ y $\pi': E' \rightarrow M$ (con la misma base) cuya restricción a cada fibra $f_x: E_x \rightarrow E'_x$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, entonces los fibrados vectoriales son equivalentes (f es un isomorfismo).*

Demostración. Basta mostrar que f es un difeomorfismo entre las variedades diferenciales E y E' (lo cual garantiza que $f^{-1}: E' \rightarrow E$ es suave). De la teoría de variedades diferenciales se sabe³⁵ que es suficiente mostrar que $d_y f$ es un isomorfismo entre los espacios tangentes $T_y E$ y $T_{f(y)} E'$, para cada $y \in E$. Como ambas variedades diferenciales E y E' poseen la misma dimensión, ambos espacios tangentes $T_y E$ y $T_{f(y)} E'$ poseen la misma dimensión. Basta, entonces, mostrar que cada $d_y f$ es un monomorfismo. De la relación $\pi' \circ f = \pi$ se obtiene $d_{f(y)} \pi' \circ d_y f = d_y \pi$ por la regla de la cadena. Si $d_y f(v) = 0$, entonces $d_y \pi(v) = 0$, lo cual implica que v queda en el subespacio $T_y E_{\pi(y)}$ de $T_y E$.³⁶ Hay una identificación natural entre los

³⁴Si $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ son morfismos de anillos, el triple $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ se dice **exacto en B** si $\ker g = \operatorname{im} f$. Una cadena de dos o más morfismos que es exacta en cada anillo intermedio se llama una **sucesión exacta**. Una sucesión exacta **corta** es de la forma $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$; su exactitud dice que f es inyectiva, g es sobreyectiva y además $\ker g = \operatorname{im} f$. Este concepto tiene sentido en cualquier categoría abeliana, como $\operatorname{Vect}(M)$, por ejemplo.

³⁵La diferencial dh de una aplicación $h: M \rightarrow N$ entre variedades diferenciales es una familia de aplicaciones lineales $dh(x) \equiv d_x h: T_x M \rightarrow T_{h(x)} N$, para $x \in M$, entre los espacios tangentes correspondientes. Los diferenciales cumplen la *regla de la cadena* $d(g \circ h)_x = d_{h(x)} g \circ d_x h$.

³⁶Como π es una proyección, $d_y \pi: T_y E \rightarrow T_{\pi(y)} M$ es sobreyectiva para todo $y \in E$. Por el teorema del rango, $\dim(\ker d_y \pi)$ es igual a la dimensión de cada fibra. De la definición de $d_y \pi$ y de la regla de la cadena se concluye que $T_y(\pi^{-1}(\pi(y))) = T_y E_{\pi(y)}$ está incluido en $\ker d_y \pi$.

espacios vectoriales $T_y E_{\pi(y)} \cong E_{\pi(y)}$. Como cada restricción de f a las fibras es un isomorfismo lineal, podemos identificar estos espacios con $E'_{\pi'(f(y))} \cong T_{f(y)} E'_{\pi'(f(y))}$ mediante $v \mapsto d_y f(v)$, de modo que $v = 0$. \square

Lema 2.32. *Sobre una misma base M , toda sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \longrightarrow 0 \quad (2.4)$$

de fibrados vectoriales escinde: el término medio es la suma Whitney de sus dos vecinos, $E \simeq E' \oplus E''$.

Observación. Antes de demostrar el lema, conviene hacer algunas observaciones sobre su enunciado.

Para cada $x \in M$, la respectiva sucesión de restricciones a las fibras

$$0 \longrightarrow E'_x \xrightarrow{f|_{E'_x}} E_x \xrightarrow{g|_{E_x}} E''_x \longrightarrow 0 \quad (2.5)$$

es una sucesión exacta corta de aplicaciones lineales entre espacios vectoriales. En particular $k' + k'' = k$, g es sobreyectiva y f es inyectiva, dado que la restricción a las fibras es una transformación lineal.

El cero 0 al inicio y al final de la sucesión (2.4) representa el fibrado trivial $M \times 0 \rightarrow M$ de rango cero. De este modo, $0 \rightarrow E'$ es la aplicación que envía cada punto $(x, 0) \in M \times 0$ hacia el punto en $\tau'_0(x) \in \pi'^{-1}(x) \subset E'$, donde se usa la sección (global) nula τ'_0 del fibrado vectorial $E' \rightarrow M$. En forma análoga, la aplicación $E'' \rightarrow 0$ envía cada punto $b'' \in E''$ al punto $(\pi''(b''), 0) \in M \times 0$.

Por exactitud en el nodo E , se entiende que $g \circ f(b') = \tau''_0(x)$, para todo $b' \in E'$ con $\pi'(b') = x$. Aquí, τ''_0 es la sección (global) nula del fibrado vectorial $E'' \rightarrow M$.

Demostración. Como para cada $x \in M$, el espacio vectorial E''_x es un módulo libre, se sabe del lema 2.28 que la sucesión exacta corta (2.5) escinde. Entonces resulta que $E_x \simeq E'_x \oplus E''_x$ para cada x , aunque eso no es suficiente para garantizar la equivalencia deseada de fibrados vectoriales $E \simeq E' \oplus E''$.

Tómese un cubrimiento abierto $(O_\alpha)_\alpha$ de M (localmente finito, por ser M paracompacto) de modo que los fibrados vectoriales E', E y E'' son triviales sobre cada O_α (véase la Definición 2.29). Para cada $x \in M$, elíjase O_α que contiene x , junto con los difeomorfismos correspondientes $\psi': \pi'^{-1}(O_\alpha) \rightarrow O_\alpha \times V$, $\psi: \pi^{-1}(O_\alpha) \rightarrow O_\alpha \times (V \oplus W)$ y $\psi'': \pi''^{-1}(O_\alpha) \rightarrow O_\alpha \times W$.

La exactitud de la sucesión corta de fibrados sobre la base O_α ,

$$0 \longrightarrow (\pi')^{-1}(O_x) \xrightarrow{f} \pi^{-1}(O_x) \xrightarrow{g} (\pi'')^{-1}(O_x) \longrightarrow 0 \quad (2.6)$$

con las respectivas restricciones, es una consecuencia de la exactitud de (2.4). De este modo, la sucesión corta asociada

$$0 \longrightarrow O_x \times V \xrightarrow{\tilde{f}} O_x \times (V \oplus W) \xrightarrow{\tilde{g}} O_x \times W \longrightarrow 0 \quad (2.7)$$

de fibrados vectoriales triviales, con $\tilde{f} := \psi \circ f \circ \psi'^{-1}$ y $\tilde{g} := \psi'' \circ g \circ \psi^{-1}$, es también exacta.

Al identificar $O_\alpha \times (V \oplus W)$ con la suma de Whitney $(O_\alpha \times V) \oplus (O_\alpha \times W)$, es inmediato que la sucesión (2.7) escinde. Usando los difeomorfismos locales,

$$\pi'^{-1}(O_\alpha) \oplus \pi''^{-1}(O_\alpha) \xrightarrow{\psi' \oplus \psi''} O_\alpha \times V \oplus O_\alpha \times W \simeq O_\alpha \times (V \oplus W) \xrightarrow{\psi^{-1}} \pi^{-1}(O_\alpha),$$

se concluye que la sucesión (2.6) también escinde. Así, para cada α hay un morfismo de fibrados vectoriales invertible entre $\pi^{-1}(O_\alpha)$ y $\pi'^{-1}(O_\alpha) \oplus \pi''^{-1}(O_\alpha)$. De la observación que sigue a la demostración del Lema 2.28, se sabe que existe un morfismo $j_\alpha : (\pi'')^{-1}(O_\alpha) \rightarrow \pi^{-1}(O_\alpha)$ tal que $g \circ j_\alpha = 1_{\pi'^{-1}(O_\alpha)}$.

Sea $(h_\alpha)_\alpha$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento localmente finito $(O_\alpha)_\alpha$ de M . Ahora defínase un morfismo $j : E'' \rightarrow E$ mediante $j := \sum_\alpha h_\alpha j_\alpha$. De este modo $g \circ j = 1_E$ y podemos concluir que $E \simeq E' \oplus E''$. \square

Lema 2.33. *Si $\pi : E \xrightarrow{V} M$ es un fibrado vectorial con M compacto, entonces existe otro fibrado vectorial $\pi' : E' \xrightarrow{W} M$ tal que $E \oplus E'$ sea equivalente a un fibrado trivial.*

Demostración. Por hipótesis, podemos asumir que existe un cubrimiento finito $\{O_1, \dots, O_m\}$ de M de modo que el fibrado vectorial E es trivial sobre cada O_i . Si el rango de este fibrado es k , por la trivialidad local existen secciones locales $s_{i1}, \dots, s_{ik} : O_i \rightarrow E$ tales que $s_{i1}(x), \dots, s_{ik}(x)$ son linealmente independientes para cada $x \in O_i$. Elíjase una partición de la unidad $\{h_1, \dots, h_m\}$ subordinada al cubrimiento $\{O_1, \dots, O_m\}$; entonces cada $h_i s_{ij}$ se anula fuera de O_i .

Defínase una aplicación $g : M \times \mathbb{C}^{km} \rightarrow E$ mediante $g(x, t) := \sum_{i,j} t_{ij} h_i s_{ij}(x)$. Por su definición, g es un morfismo sobreyectivo de fibrados,³⁷ por lo cual podemos formar la sucesión exacta corta, donde $E' := \ker g$:

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{f} M \times \mathbb{C}^{km} \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

³⁷La aplicación g es sobreyectiva porque para cada $y \in E$ existe una sección s con $y = s(\pi(y))$ —véase la demostración de unicidad en la Proposición 2.45— y con $x = \pi(y)$, los $\{h_i s_{i1}(x), \dots, h_i s_{ik}(x)\}$ expanden la fibra E_x .

donde f es la inclusión canónica. Se obtiene $E \oplus E' \simeq E' \oplus E \simeq M \times \mathbb{C}^{km}$, del Lema 2.32. \square

Observación. Las hipótesis del enunciado se satisfacen si M es una variedad diferencial, no necesariamente compacta. No es evidente, pero sí es cierto, que para un fibrado vectorial dado $E \rightarrow M$, es posible encontrar un cubrimiento abierto *finito* de M que trivializa el fibrado (es decir, cada $E|_{O_i} \rightarrow O_i$ es un fibrado vectorial trivial).³⁸ La finitud de un tal cubrimiento es evidente si M es compacta.

Lema 2.34. Si $E = E' \oplus E''$ es una suma de Whitney de fibrados vectoriales sobre M , entonces $\Gamma(M, E) = \Gamma(M, E') \oplus \Gamma(M, E'')$ como módulos sobre $C^\infty(M)$.

Demostración. En la notación de la Definición 2.29, si $s \in \Gamma(M, E)$ entonces es posible definir $s' \in \Gamma(M, E')$ y $s'' \in \Gamma(M, E'')$ mediante

$$s'(x) := \Pi_1 \circ s(x), \quad s''(x) := \Pi_2 \circ s(x), \quad \text{para todo } x \in M,$$

donde $\Pi_1: E' \oplus E'' \rightarrow E'$, $\Pi_2: E' \oplus E'' \rightarrow E''$ son las sobreyecciones naturales. Como resultado se identifican $s(x) \leftrightarrow (s'(x), s''(x)) \in E'_x \oplus E''_x$ para todo $x \in M$, y entonces

$$\Gamma(M, E) \simeq \Gamma(M, E') \oplus \Gamma(M, E''). \quad \square$$

Corolario 2.35. Si $\pi: E \xrightarrow{V} M$ es un fibrado vectorial sobre una variedad diferencial compacta M , entonces su $C^\infty(M)$ -módulo de secciones $\Gamma(M, E)$ es finitamente generado y proyectivo.

Demostración. De la suma de Whitney $E \oplus E' \simeq M \times \mathbb{C}^{km}$ se obtiene la suma directa de módulos de secciones $\Gamma(M, E) \oplus \Gamma(M, E') \simeq \Gamma(M, M \times \mathbb{C}^{km})$. Ahora bien, una sección del fibrado trivial $M \times \mathbb{C}^{km} \rightarrow M$ es simplemente un juego de km funciones $f_1, \dots, f_{km}: M \rightarrow \mathbb{C}$, de modo que $\Gamma(M, M \times \mathbb{C}^{km}) \simeq C^\infty(M)^{km}$. En otras palabras, $\Gamma(M, E)$ es un sumando directo del $C^\infty(M)$ -módulo *libre* de rango km ; lo cual establece su proyectividad.

La generación finita de $\Gamma(M, E)$ sigue de la demostración del Lema 2.33. De hecho, las secciones $\{h_i s_{ij} : i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, k\}$ generan $\Gamma(M, E)$. \square

Ejemplo 2.36. Veamos ahora como encontrar el idempotente p asociado (por el Ejemplo 2.27) al $C^\infty(M)$ -módulo de secciones $\Gamma(M, E)$ de un fibrado vectorial de rango r sobre una variedad diferencial compacta M .

³⁸Para una demostración, véase el Teorema 7.5.16 de: Lawrence Conlon, *Differentiable Manifolds*, 2a edición, Birkhäuser, Boston, 2001.

En este caso $A = C^\infty(M)$ y se identifica $A^r \equiv \Gamma(M, M \times \mathbb{C}^r)$.³⁹ Se busca una matriz cuadrada $p \in M_k(C^\infty(M))$ para algún k , tal que $p^2 = p$ y

$$\Gamma(M, E) \simeq pA^k \equiv \{px : x \in A^k\}.$$

Por hipótesis, existe un cubrimiento finito $\{O_1, \dots, O_m\}$ de M tal que el fibrado vectorial E es trivial sobre cada O_i . También existen funciones no negativas f_1, \dots, f_m tales que $\{f_1^2, \dots, f_m^2\}$ es una partición de la unidad subordinada a este cubrimiento; en particular, se cumple $f_1^2 + \dots + f_m^2 = 1$.

Para cada función de transición $\psi_{ij}: O_i \cap O_j \rightarrow GL(r, \mathbb{C})$, defínase la función $p_{ij} := f_i f_j \psi_{ij}$, de modo tal que

$$\sum_{k=1}^m p_{ik} p_{kj} = \sum_{k=1}^m f_i f_k^2 f_j \psi_{ik} \psi_{kj} = f_i f_j \left(\sum_{k=1}^m f_k^2 \right) \psi_{ij} = p_{ij}.$$

Tómese como $p = p^2$ la matriz $mr \times mr$ en $M_{mr}(C^\infty(M))$ cuyas entradas son estos p_{ij} .

Si s es una sección en $\Gamma(M, E)$, entonces la restricción de s a cualquier O_i coincide con una sección local s_i , de modo que $s_i = \psi_{ij} s_j$ sobre $O_i \cap O_j$. De esta manera, s puede considerarse como el vector columna $s = (f_1 s_1, \dots, f_m s_m)^\top \in C^\infty(M)^{mr}$ tal que

$$\begin{aligned} ps &= \sum_{k=1}^m (p_{1k} f_k s_k, \dots, p_{mk} f_k s_k)^\top = \sum_{k=1}^m (f_1 f_k^2 \psi_{1k} s_k, \dots, f_m f_k^2 \psi_{mk} s_k)^\top \\ &= \sum_{k=1}^m (f_1 f_k^2 s_1, \dots, f_m f_k^2 s_m)^\top = s. \end{aligned}$$

Esta identificación muestra que $\Gamma(M, E) \simeq pA^{mr}$. ◇

2.5 La correspondencia de Serre y Swan

La asociación que envía un fibrado vectorial $\pi: E \xrightarrow{V} M$ de base compacta a su $C^\infty(M)$ -módulo de secciones $\Gamma(M, E)$ es biunívoca, como se verá en esta sección. Esta asociación nos permite expresar las propiedades geométricas de un fibrado vectorial en un lenguaje algebraico. Como muestra un botón!

Lema 2.37. *Un fibrado vectorial $\pi: E \xrightarrow{V} M$ es trivial si y sólo si su $C^\infty(M)$ -módulo de secciones $\Gamma(M, E)$ es libre.*

³⁹O bien $C^\infty(M, \mathbb{R})^r \equiv \Gamma(M, M \times \mathbb{R}^r)$, en el caso real.

Demostración. Sea $\phi: E \rightarrow M \times V$ un isomorfismo de fibrados vectoriales y sea $\{e_1, \dots, e_k\}$ una base vectorial de V . Para cada $x \in M$, defínase $s_i(x) := \phi^{-1}(x, e_i)$. El conjunto $\{s_1, \dots, s_k\}$ es una base para el $C^\infty(M)$ -módulo $\Gamma(M, E)$ y por tanto este módulo es libre.

Para el recíproco, si $\Gamma(M, E)$ es un módulo libre con base $\{s_1, \dots, s_k\}$, entonces la aplicación $\phi: E \rightarrow M \times \mathbb{C}^k$ dada por

$$\sum_{i=1}^k t^i s_i(x) \longmapsto (x, t^1, \dots, t^k)$$

es un isomorfismo de fibrados vectoriales. □

Ejercicio 2.38. Verificar los detalles de la demostración del Lema 2.37.

Corolario 2.39. Si E es un $C^\infty(M)$ -módulo libre con un número finito k de generadores, entonces E es isomorfo como $C^\infty(M)$ -módulo al módulo de secciones del fibrado trivial $M \times \mathbb{C}^k$. Dicho de otro modo: existe un fibrado vectorial cuyo módulo de secciones es isomorfo a E .

Teorema 2.40. Para M una variedad diferencial compacta (y conexa), un $C^\infty(M)$ -módulo P es isomorfo al módulo de secciones $\Gamma(M, E)$ de un fibrado vectorial $\pi: E \rightarrow M$ sobre M si y sólo si P es finitamente generado y proyectivo.

Demostración. Por el Corolario 2.35, el módulo de secciones $\Gamma(M, E)$ de todo fibrado vectorial $\pi: E \rightarrow M$ es proyectivo y finitamente generado.

Ahora sea P un $C^\infty(M)$ -módulo proyectivo y finitamente generado cualquiera. Hay que fabricar un fibrado vectorial $\pi: E \rightarrow M$ tal que P sea isomorfo al módulo de secciones $\Gamma(M, E)$.

Por el lema 2.28, P es un sumando directo de un $C^\infty(M)$ -módulo libre y por el Corolario 2.39, podemos tomar dicho módulo libre como el módulo de secciones $\Gamma(M, M \times V)$ del fibrado trivial $M \times V$, donde $\dim V = k$ para algún k . Escribimos $\Gamma(M, M \times V) = P \oplus Q$, para algún $C^\infty(M)$ -módulo Q .

Para cada $x \in M$ defínase $E_x := \{p(x) \in V : p \in P\}$ y $F_x := \{q(x) \in V : q \in Q\}$. Veamos que $E_x \oplus F_x = V$. Para $b \in V$ sea $s \in \Gamma(M, M \times V)$ una sección tal que $s(x) = (x, b)$ y escribáse $s =: p + q$ con $p \in P$ y $q \in Q$. Así, $b = p(x) + q(x) \in E_x + F_x$. Por otra parte, si $b \in E_x \cap F_x$, entonces $b = p(x) = q(x)$ para algunos $p \in P$ y $q \in Q$ y $(p - q)(x) = 0$. Como $M \times V$ es un fibrado trivial, existe una base global de secciones $\{s_1, \dots, s_k\}$ de modo que

$$p - q = \sum_{i=1}^k f^i s_i = \sum_{i=1}^k f^i p_i + \sum_{i=1}^k f^i q_i$$

para algunas funciones $f^i \in C^\infty(M)$ y cada $s_i = p_i + q_i \in P \oplus Q$. Sin perder generalidad, se puede asumir que $f^i(x) = 0$ para $i = 1, \dots, k$. Como $P \cap Q = 0$ se ve que $p = \sum_{i=1}^k f^i p_i$. Así, $b = p(x) = 0$ y por ende $E_x \cap F_x = 0$.

Veamos ahora que la unión disjunta $E := \bigsqcup_{x \in M} E_x$ de todos los E_x , $x \in M$, constituye un fibrado vectorial sobre M (de hecho, un subfibrado de $M \times V$) y que P coincide con su módulo de secciones $\Gamma(M, E)$.

Primero, la dimensión de E_x no depende de x . Sea $d = \dim E_x$ y sean p_1, \dots, p_d secciones en P tales que los $p_1(x), \dots, p_d(x)$ generan el espacio vectorial E_x . Basta con usar la continuidad de las secciones para concluir que en un vecindario U de x los $p_1(y), \dots, p_d(y)$ son linealmente independientes⁴⁰ para todo $y \in U$. Así, $\dim E_y \geq \dim E_x$ mientras $y \in U$. Un argumento similar muestra que $\dim F_y \geq \dim F_x$. Como $\dim E_y + \dim F_y = k$ es constante, se concluye que $\dim E_x$ es una función localmente constante. Como M es conexa, esta es una constante global.⁴¹

Segundo, si $\{p_1(x), \dots, p_d(x)\}$ es una base para E_x para algún $x \in M$, entonces el conjunto $\{p_1(y), \dots, p_d(y)\}$ forma una base para el espacio E_y para todo y en un vecindario de x , por lo cual los E_x poseen localmente una base que depende suavemente de x y por tanto podemos identificarlos con una parte abierta de $G_{k,d}$, el grassmanniano.⁴²

Tercero, P coincide con $\Gamma(M, E)$. Por construcción, es $P \subseteq \Gamma(M, E)$. Si $s \in \Gamma(M, E) \subseteq \Gamma(M, M \times V)$, existen $p \in P$, $q \in Q$ con $s = p + q$. Como $E_x \cap F_x = 0$ y $s(x) - p(x) = q(x)$ para todo $x \in M$, se concluye que $q = 0$ y por lo tanto $s \in P$. \square

⁴⁰En una base para E_x los vectores $p_1(x), \dots, p_d(x)$ poseen una representación matricial cuyo determinante es diferente de cero (pues son linealmente independientes). Como la función determinante es continua, y cada p_i es continuo, se obtiene una función continua que no se anula en el punto x . De ahí que hay un abierto $U \ni x$ tal que el determinante de la representación matricial de los $p_1(y), \dots, p_d(y)$ no se anula para todo $y \in U$.

⁴¹Por definición, una función $f: X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos es **localmente constante** si cada $x \in X$ posee un vecindario V tal que $f|_V$ sea constante. Por lo tanto, f es constante en cada componente conexo de X ; o bien, en todo X si X es conexo.

⁴²El **espacio grassmanniano** $G_{n,m}$ es el conjunto de todos los subespacios m -dimensionales de \mathbb{R}^n . Al tomar coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^n) en \mathbb{R}^n y al ser U la totalidad de los subespacios de dimensión m que satisfacen el sistema de ecuaciones $x^{m+i} = \sum_{j=1}^m a_{ij} x^j$, para $i = 1, \dots, n-m$, con $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{m(n-m)}$ la aplicación que envía cada subespacio a los coeficientes del sistema, se obtiene una carta local (U, φ) . Para cubrir el espacio $G_{n,m}$ basta con permutar el orden de las coordenadas. La compatibilidad de las cartas se obtiene de la dependencia suave de las soluciones del sistema sobre sus coeficientes. Como resultado, $G_{n,m}$ es una variedad diferencial de dimensión $m(n-m)$.

2.6 Una equivalencia de categorías

El teorema de Serre y Swan puede expresarse de modo elegante como una *equivalencia de categorías*. Recordemos la Definición 1.12 de una categoría. Cabe preguntar ahora qué significa que dos categorías sean “esencialmente la misma”.

Definición 2.41. Dos categorías C y D son **equivalentes** si hay un funtor $\mathcal{F}: C \rightarrow D$ que satisface las siguientes condiciones:

- * \mathcal{F} es **pleno**: para todo $A, B \in \text{Ob}(C)$, la aplicación $h \mapsto \mathcal{F}h: \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$ es sobreyectiva;
- * \mathcal{F} es **fiel**: para todo $A, B \in \text{Ob}(C)$, esa aplicación es inyectiva; y
- * \mathcal{F} es **esencialmente sobreyectivo**: para todo $D \in \text{Ob}(D)$, existe $A \in \text{Ob}(C)$ tal que $\mathcal{F}A$ y D son isomorfos.⁴³

En tal caso dicese que el funtor \mathcal{F} es una **equivalencia** entre las categorías C y D .

Ejemplo 2.42. Al final de la subsección 1.3 se construyó, *avant la lettre*, una equivalencia entre las categorías Comp y $C^*\text{-AlgCom}$. Dada un funtor $\mathcal{F}: C \rightarrow D$ que cumple las propiedades de la Definición 2.41, no es difícil construir un funtor $\mathcal{G}: D \rightarrow C$ con las mismas propiedades, el cual, aunque no sea un inverso *strictu sensu* de \mathcal{F} , sí es un “inverso hasta isomorfismo”, en el siguiente sentido. Si 1_C es la identidad tanto sobre los objetos como los morfismos de la categoría C , hay isomorfismos naturales⁴⁴ entre funtores $\mathcal{G}\mathcal{F} \simeq 1_C$ y $\mathcal{F}\mathcal{G} \simeq 1_D$.

Los dos funtores $C: \text{Comp} \rightarrow C^*\text{-AlgCom}$ y $M: C^*\text{-AlgCom} \rightarrow \text{Comp}$, definidos anteriormente, son equivalencias de categorías. \diamond

Ejemplo 2.43. La colección de módulos (a la derecha) sobre un anillo A , junto con sus A -homomorfismos, forma una categoría denotada por Mod_A . Los A -módulos proyectivos finitamente generados forman una subcategoría plena ModPFG_A . \diamond

Hay un funtor evidente entre la categoría $\text{Vect}(M)$ de fibrados vectoriales de base M , y la categoría $\text{Mod}_{C^\infty(M)}$ de módulos (a la derecha) sobre el anillo $A = C^\infty(M)$.

⁴³Esto es: hay un morfismo invertible en $\text{Hom}_D(\mathcal{F}A, D)$.

⁴⁴Véase la última nota al pie de la subsección 1.3.

Ejemplo 2.44. La aplicación Γ que asigna a un fibrado vectorial⁴⁵ $\pi: E \xrightarrow{V} M$ su $C^\infty(M)$ -módulo de secciones $\Gamma(M, E)$, y a cada morfismo $f: E \rightarrow E'$ —esto es, $f \in \text{Hom}_{\text{Vect}(M)}(E, E')$ — le asigna el $C^\infty(M)$ -homomorfismo de módulos Γf que envía cada sección $s \in \Gamma(M, E)$ a la sección $\Gamma f(s) \in \Gamma(M, E')$ dada por $\Gamma f(s): x \mapsto f(s(x))$, o bien $\Gamma f(s) := f \circ s$.

En efecto, hemos definido un functor $\Gamma: \text{Vect}(M) \rightarrow \text{Mod}_{C^\infty(M)}$.

La igualdad $\Gamma 1_E = 1_{\Gamma(M, E)}$ es evidente. Para verificar que para cada f en $\text{Hom}_{\text{Vect}(M)}(E, E')$ se obtiene un elemento Γf en $\text{Hom}_{\text{Mod}_{C^\infty(M)}}(\Gamma(M, E), \Gamma(M, E'))$, debemos comprobar la $C^\infty(M)$ -linealidad de $s \mapsto f \circ s$. En efecto, si $s_1, s_2 \in \Gamma(M, E)$ y $h \in C^\infty(M)$, entonces

$$\Gamma f(s_1 + hs_2) = f \circ (s_1 + hs_2) = f \circ s_1 + hf \circ s_2 = \Gamma f(s_1) + h\Gamma f(s_2)$$

por la \mathbb{C} -linealidad de cada $f_x: E_x \rightarrow E'_{f(x)}$, esto es, $f(h(x)s_2(x)) = h(x)f(s_2(x))$. Por ende, Γf es un $C^\infty(M)$ -homomorfismo de módulos.

Por último, si $f: E \rightarrow E'$ y $g: E' \rightarrow E''$ son morfismos de fibrados vectoriales, entonces

$$\Gamma(g \circ f)(s) = (g \circ f) \circ s = g \circ (f \circ s) = \Gamma g(\Gamma f(s)) \quad \text{para } s \in \Gamma(M, E),$$

así que $\Gamma(g \circ f) = \Gamma g \circ \Gamma f$. En fin, las correspondencias $E \mapsto \Gamma(M, E)$, $f \mapsto \Gamma f$ cumplen las propiedades de un functor covariante. \diamond

Proposición 2.45. Para cada dos fibrados vectoriales $\pi: E \xrightarrow{V} M$ y $\pi': E' \xrightarrow{W} M$ sobre una variedad compacta M , el functor Γ determina una biyección entre los morfismos en $\text{Hom}_{\text{Vect}(M)}(E, E')$ y en $\text{Hom}_{\text{Mod}_{C^\infty(M)}}(\Gamma(M, E), \Gamma(M, E'))$.

Demostración. Vamos a mostrar que para cada $C^\infty(M)$ -homomorfismo de módulos $\varphi \in \text{Hom}_{\text{Mod}_{C^\infty(M)}}(\Gamma(M, E), \Gamma(M, E'))$ existe un único morfismo de fibrados vectoriales $f \in \text{Hom}_{\text{Vect}(M)}(E, E')$ tal que $\Gamma f = \varphi$.

Para la unicidad: si $f, f': E \rightarrow E'$ cumplen $\Gamma f = \Gamma f'$, entonces para toda sección $s \in \Gamma(M, E)$ y todo $x \in M$ se verifica $f(s(x)) = f'(s(x))$. Ahora si $b \in E$, entonces $b \in E_x$ para $x = \pi(b) \in M$. Si O es un abierto alrededor de x sobre el cual podemos trivializar E localmente, es fácil definir una sección local $s: O \rightarrow E$ con $s(x) = b$. Al multiplicar s por una función suave que se anule fuera de O y de valor 1 en x , se extiende s a una sección global con valor b en x . Por lo tanto, $f(b) = f'(b)$ para todo $b \in E$ y se concluye que $f = f'$.

⁴⁵Sería más correcto denotar este functor por $\Gamma(M, -)$ y así se hace en algunos textos. Aquí dejamos fija la base M para poder simplificar un poco la notación.

Para la existencia: si φ es un $C^\infty(M)$ -homomorfismo de módulos entre $\Gamma(M, E)$ y $\Gamma(M, E')$ y si $b \in E$, entonces $b \in E_x$ para algún $x \in M$. Justo como en el párrafo anterior, existe una sección $s \in \Gamma(M, E)$ tal que $s(x) = b$. Defínase $f(b) := \varphi(s)(x) \in E'_x$. Hay que comprobar que f está bien definido, que f es un morfismo de fibrados vectoriales de E en E' y que $\Gamma f = \varphi$.

Si s y s' son dos secciones de E con $s(x) = s'(x)$ entonces $(s - s')(x)$ corresponde al punto $(x, 0)$ bajo cualquier trivialización local de E . Como la restricción a cada fibra es una transformación lineal, también $\varphi(s - s')(x)$ corresponde al punto $(x, 0)$ bajo cualquier trivialización local de E' . De este modo, se ve que $\varphi(s)(x) = \varphi(s')(x)$, por lo cual f está bien definido.

Por su definición, $\pi = \pi' \circ f$ y es fácil verificar que la restricción de f a cada fibra es una transformación lineal. Para concluir que f es un morfismo entre fibrados vectoriales; falta verificar que f sea suave. Sea O un vecindario de x sobre el cual tanto E como E' son triviales. Como la suavidad es un asunto local, basta verificar que la restricción de f a $\pi^{-1}(O)$ es suave.

Para $t \in \Gamma(O, \pi^{-1}(O))$ y $x \in O$ se ve que

$$f|_{\pi^{-1}(O)}(t(x)) = \varphi_O(t)(x), \quad (2.8)$$

donde φ_O es un $C^\infty(O)$ -homomorfismo entre $\Gamma(O, \pi^{-1}(O))$ y $\Gamma(O, (\pi')^{-1}(O))$ inducido⁴⁶ por φ . Como estos dos módulos son libres (gracias al Lema 2.37), podemos elegir bases para cada uno de ellos de modo que podemos representar φ_O como una matriz sobre el anillo $C^\infty(O)$. Por la relación (2.8), esta misma matriz representa a la restricción de f a $\pi^{-1}(O)$; por lo tanto, dicha restricción es suave.

Por último, $\Gamma f(s)(x) = f(s(x)) = \varphi(s)(x)$, para todo $s \in \Gamma(M, E)$ y $x \in M$. Por lo tanto $\Gamma f(s) = \varphi(s)$ para todo s y entonces $\Gamma f = \varphi$. \square

⁴⁶Sea A un anillo conmutativo y $S \subset A$ una parte multiplicativa (contiene al 1, no contiene al 0 y es cerrado bajo multiplicación). En el conjunto $A \times S$ se define la relación de equivalencia $(a, s) \sim (a', s')$ si y sólo si existe $s'' \in S$ tal que $s''(as' - a's) = 0$. La totalidad $S^{-1}A$ de las clases de equivalencia $[a, s] =: a/s$ es un anillo bajo la suma y producto usuales de fracciones, llamado la **localización** del anillo A sobre S . Hay un homomorfismo canónico $A \rightarrow S^{-1}A : a \mapsto a/1$.

Si P es un A -módulo se define similarmente $S^{-1}P := (P \times S)/\sim$ con $(p, s) \sim (p', s')$ si y sólo si existe $s'' \in S$ tal que $s''(s'p - sp') = 0$. Esta es la localización de P sobre S .

En resumen, a cada parte multiplicativa $S \subset A$ se le asigna un funtor de la categoría Mod_A a la categoría $\text{Mod}_{S^{-1}A}$.

Ahora bien, si O es un abierto en M y si $S = \{f \in C^\infty(M) : f(x) = 0 \text{ para } x \in O\}$, entonces $S^{-1}C^\infty(M) = C^\infty(O)$ y el homomorfismo canónico $C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(O)$ coincide con la restricción $f \mapsto f|_O$. Dejamos la verificación de los detalles al lector, quien puede consultar: Jet Nestruev, *Smooth Manifolds and Observables*, Graduate Texts in Mathematics **220** (Springer, Berlin, 2003).

Observación. Por el Teorema 2.40, el funtor Γ entre las categorías $\text{Vect}(M)$ y $\text{ModPFG}_{C^\infty(M)}$ es esencialmente sobreyectivo. Por la Proposición 2.45, el funtor Γ es tanto pleno como fiel. Es decir, las categorías $\text{Vect}(M)$ y $\text{ModPFG}_{C^\infty(M)}$ son equivalentes.

► En estas notas utilizamos módulos sobre el álgebra $C^\infty(M)$. En su trabajo original,⁴⁷ Swan consideró fibrados vectoriales topológicos $\pi: E \rightarrow M$ sobre una base compacta M (las trivializaciones locales son continuas pero no necesariamente suaves), junto con sus secciones *continuas* $\Gamma_{\text{cont}}(M, E)$, que forman un módulo sobre el álgebra $C(M)$ de funciones continuas; obtuvo una equivalencia de categorías entre $\text{Vect}_{\text{top}}(M)$ y $\text{ModPFG}_{C(M)}$.

► Motivados por estas equivalencias, nos atrevemos a definir un *fibrado vectorial no conmutativo* como un A -módulo (derecho) proyectivo y finitamente generado \mathcal{E} para un álgebra \mathcal{A} , no necesariamente conmutativa. En general, \mathcal{A} será una subálgebra densa de una C^* -álgebra A .

⁴⁷La referencia es: Richard G. Swan, “Vector bundles and projective modules”, *Transactions of the American Mathematical Society* **105** (1962), 264–277.

3 El círculo \mathbb{S}^1

Continuando con las motivaciones sobre la geometría no conmutativa como una geometría sin puntos, en esta sección desarrollamos un caso particular de uno de los resultados centrales de la geometría no conmutativa.¹ Trabajando sobre el círculo \mathbb{S}^1 , vamos a ver como es posible recuperar la distancia $d(p, q)$ entre dos puntos p y q (usualmente la longitud del arco más corto que los une), como el supremo

$$\sup\{|f(p) - f(q)| : f \in \mathcal{A}, \|f'\|_\infty \leq 1\} = d(p, q),$$

donde \mathcal{A} es una subálgebra del álgebra de funciones continuas sobre el círculo.

El círculo \mathbb{S}^1 como parte de \mathbb{R}^2 es tradicionalmente descrito en los cursos de cálculo como el lugar geométrico de los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Si deseamos tomar como base el plano complejo, podemos identificar el círculo \mathbb{S}^1 con el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z| = 1$, y gracias a la fórmula de Euler, estos puntos $z \in \mathbb{S}^1$ satisfacen $z = e^{i\theta}$, para algún $\theta \in \mathbb{R}$, donde para obtener unicidad de dicha representación sería necesario restringir la variable θ a un intervalo semiabierto de longitud 2π .

Como parte de \mathbb{C} (o bien de \mathbb{R}^2), el círculo \mathbb{S}^1 hereda una topología que lo hace un espacio de Hausdorff y compacto. Más aún, como vimos en el ejemplo 2.2, \mathbb{S}^1 posee una estructura de variedad diferencial unidimensional. Como tal, podemos considerar el álgebra $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ de funciones suaves sobre \mathbb{S}^1 . Si sólo tomamos en cuenta su naturaleza como espacio topológico, podemos considerar un álgebra más amplia, $C(\mathbb{S}^1)$, la cual consiste sólo de las funciones continuas de \mathbb{S}^1 en \mathbb{C} . Evidentemente, $C^\infty(\mathbb{S}^1) \subset C(\mathbb{S}^1)$.

3.1 Una completión de $C(\mathbb{S}^1)$

Sobre el espacio vectorial $C(\mathbb{S}^1)$ podemos definir el producto escalar

$$\langle f | g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(e^{i\theta})} g(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}^1} \overline{f(z)} g(z) \frac{dz}{z}, \quad (3.1)$$

¹Este resultado aparece por primera vez en: Alain Connes, “Compact metric spaces, Fredholm modules, and hyperfiniteness”, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **9** (1989), 207–220.

el cual hemos normalizado para obtener²

$$\langle z^k | z^l \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-k)\theta} d\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, \\ 0 & \text{si } k \neq l. \end{cases}$$

Es decir, el conjunto de funciones $\{z \mapsto z^k : k \in \mathbb{Z}\}$ es una familia ortonormal en $C(\mathbb{S}^1)$, con la norma inducida por el producto escalar (3.1),

$$\|f\|_2^2 := \langle f | f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta. \quad (3.2)$$

El espacio de funciones $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $\|f\|_2 < \infty$ suele denotarse $\mathcal{L}^2(\mathbb{S}^1)$. Si $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{S}^1)$ son tales que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta})|^2 d\theta = 0,$$

no es necesariamente cierto que f sea igual a g , por ejemplo si $f(e^{i\theta}) \neq g(e^{i\theta})$ sólo en una cantidad contable de puntos $e^{i\theta}$. Vale la pena entonces identificar estas dos funciones. Se declara una relación de equivalencia en $\mathcal{L}^2(\mathbb{S}^1)$ al tomar $f \sim g$ si y sólo si $\|f - g\|_2 = 0$. Estas clases de equivalencia forman un espacio normado,³ que se denota $L^2(\mathbb{S}^1)$. Este es un espacio normado completo, según el teorema de Riesz y Fischer⁴ de hecho, en vista de que $\|f\|_2^2 = \langle f | f \rangle$ por (3.1), este es un espacio de Hilbert.

Ahora bien, si dos funciones *continuas* $f, g \in C(\mathbb{S}^1)$ cumplen $\|f - g\|_2 = 0$, entonces la función continua no negativa $\theta \mapsto |f(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta})|^2$ es idénticamente cero. Por tanto, cada clase de equivalencia en $L^2(\mathbb{S}^1)$ contiene a lo sumo un solo representante continuo. Dicho de otro modo, la aplicación $f \mapsto [f] : C(\mathbb{S}^1) \rightarrow$

²Gracias a la fórmula de Euler:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-k)\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(l-k)\theta d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(l-k)\theta d\theta.$$

³El espacio cociente $\mathcal{L}^2(\mathbb{S}^1)/\sim$ hereda la seminorma (3.2), en vista de la desigualdad triangular; y por definición, $\|f\|_2 = 0$ implica $f \sim 0$, así que la clase de f es nula en $L^2(\mathbb{S}^1)$.

⁴Frigyes Riesz (1880–1956), matemático húngaro, alcanzó la fama con su “teorema de representación de Riesz” (1909), en la cual mostró que cada funcional lineal continuo sobre $C([a, b])$ es una integral de Stieltjes con respecto a alguna función de variación acotada sobre el intervalo $[a, b]$. El austriaco Ernst Sigismund Fischer (1875–1954) completó, en 1907, un trabajo anterior de Riesz, al estudiar a fondo la convergencia de funciones en la norma del integral del cuadrado; en particular, mostró la completitud del espacio $L^2([a, b])$.

$L^2(\mathbb{S}^1)$ es inyectiva. Entonces, se acostumbra cometer el pecado venial de llamar “funciones” a los elementos de $L^2(\mathbb{S}^1)$, al escribir f en vez de $[f]$. De este modo, se considera $C(\mathbb{S}^1)$ como un subespacio vectorial de $L^2(\mathbb{S}^1)$, sin ambigüedad, y es permisible escribir $C^\infty(\mathbb{S}^1) \subset C(\mathbb{S}^1) \subset L^2(\mathbb{S}^1)$.

El espacio normado $C(\mathbb{S}^1)$ no es completo en la norma (3.2). De hecho, considérese la sucesión de funciones continuas $f_n: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$f_n(e^{i\theta}) := \begin{cases} \left| \frac{2\theta}{\pi} \right|^n & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{si } -\pi \leq \theta \leq -\frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \end{cases}$$

y sea f la función que vale 0 para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ y 1 en cualquier otro punto. Por la simetría $\theta \leftrightarrow -\theta$ de los integrandos, se obtiene

$$\|f_n - f\|_2^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2\theta}{\pi} \right)^{2n} d\theta = \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, $(f_n)_n$ es una sucesión que converge en la norma $\|\cdot\|_2$ a la función f . En particular, $(f_n)_n$ es una sucesión de Cauchy —con respecto a esta norma— en $C(\mathbb{S}^1)$ cuyo límite es una función discontinua; y no hay función continua alguna que sea equivalente a esta f en el sentido antedicho.⁵

► Es legítimo preguntarse ¿cómo se puede verificar que la completación de $C(\mathbb{S}^1)$ en la norma $\|\cdot\|_2$ es todo $L^2(\mathbb{S}^1)$?

Dado que el conjunto de funciones $\{z \mapsto z^k : k \in \mathbb{Z}\}$ es una familia ortonormal en $C(\mathbb{S}^1)$, con respecto a la norma (3.2), una forma natural de responder a esta pregunta es generar un espacio —necesariamente un subespacio de $L^2(\mathbb{S}^1)$ — con dichos elementos y luego tratar de identificarlo.

Con un poco más de generalidad, supóngase que hay una familia ortonormal contable de funciones $(u_k)_k$ en un espacio de Hilbert H y considérese un elemento de H generado por los u_k de la forma $\sum_k a_k u_k$, con $a_k \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\left\| \sum_k a_k u_k \right\|_2^2 = \left\langle \sum_k a_k u_k \mid \sum_k a_r u_r \right\rangle = \sum_k |a_k|^2, \quad (3.3)$$

al usar la continuidad del producto escalar en H . Por lo tanto, los posibles coeficientes de una tal serie deben de formar una sucesión de cuadrado sumable en \mathbb{C} .

Al retomar el caso $u_k(z) = z^k$ en $L^2(\mathbb{S}^1)$, se llega a la siguiente definición.

⁵En la sección 1.2, se consideró otra norma sobre el espacio $C(\mathbb{S}^1)$, es decir, la norma del supremo (1.2). Resulta que $C(\mathbb{S}^1)$ sí es completo en esa norma, la cual define la topología de *convergencia uniforme* sobre $C(\mathbb{S}^1)$. Por un teorema clásico de Weierstrass, un límite uniforme de funciones continuas es continua, sea en un intervalo compacto real $[a, b]$ o bien en \mathbb{S}^1 . De esta forma se aprende que la norma $\|\cdot\|_2$ no es equivalente a la norma del supremo.

Definición 3.1. Para una función $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{S}^1)$ se definen sus **coeficientes de Fourier** $(a_k)_k$ mediante

$$a_k := \langle z^k | f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} f(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}^1} \bar{z}^k f(z) \frac{dz}{z}.$$

Si la serie

$$\mathcal{F}f(z) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k \quad (3.4)$$

es convergente en la norma (3.2), se le llama la **serie de Fourier** para la función f . A las sumas parciales $\sum_{k=-m}^n a_k z^k$ se les llama **polinomios de Fourier** de f .

Observación. De (3.3), si $\mathcal{F}f$ es convergente en la norma (3.2), entonces sus coeficientes forman una sucesión de cuadrado sumable. Por la desigualdad triangular, las funciones sobre \mathbb{S}^1 cuyas series de Fourier convergen en la norma (3.2) forman un subespacio vectorial de $L^2(\mathbb{S}^1)$. En el corolario 3.2 se verá que este subespacio es todo $L^2(\mathbb{S}^1)$.

Para una función $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ y cualesquiera números $b_k \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=-m}^n b_k z^k \right\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(e^{i\theta}) - \sum_{k=-m}^n b_k e^{ik\theta} \right|^2 d\theta \\ &= \|f\|_2^2 + \sum_{k=-m}^n |b_k|^2 - (\bar{a}_k b_k + a_k \bar{b}_k) \\ &= \|f\|_2^2 + \sum_{k=-m}^n |a_k - b_k|^2 - |a_k|^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

De este modo, la integral es mínima cuando $b_k = a_k$, los coeficientes de Fourier de f , y en dicho caso

$$\left\| f(z) - \sum_{k=-m}^n a_k z^k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-m}^n |a_k|^2. \quad (3.6)$$

Corolario 3.2. La suma parcial $\sum_{k=-m}^n a_k z^k$ de la serie de Fourier (3.4) de una función $f(z)$ es la que minimiza el lado izquierdo de (3.5). Además, los coeficientes de Fourier a_k de f satisfacen

$$\|\mathcal{F}f\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

En particular, si $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$, la serie de Fourier $\mathcal{F}f$ es convergente en la norma (3.2) y define un elemento de $L^2(\mathbb{S}^1)$.

Observación. En general, para cualquier familia ortonormal $(u_k)_k$ en un espacio de Hilbert H , para cualquier $f \in H$ es válida la desigualdad

$$\sum_k |\langle u_k | f \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2$$

y se le conoce como **desigualdad de Bessel**.

Lema 3.3. Si $(b_k)_k$ es una sucesión de cuadrado sumable en \mathbb{C} , entonces existe una función $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ tal que los b_k son precisamente los coeficientes de Fourier de f y además

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |b_k|^2 = \|f\|_2^2.$$

Demostración. Basta con definir la función $f := \sum b_k z^k$. Esta función tal vez no converge puntualmente en \mathbb{S}^1 , pero tiene sentido como límite de sumas parciales en $L^2(\mathbb{S}^1)$. Por construcción, los b_k son los coeficientes de Fourier de f y dado que los z^k forman una familia ortonormal completa,⁶ resulta $\|f\|_2^2 = \sum |b_k|^2$ y $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$. \square

Por (3.6), la convergencia a f de la serie de Fourier de f en la norma (3.2) es equivalente a la **identidad de Parseval**:

$$\|\mathcal{F}f\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 = \|f\|_2^2, \quad (3.7)$$

i.e., el caso de igualdad en la desigualdad de Bessel. La identidad de Parseval es válida en todo espacio de Hilbert H con una familia ortonormal completa $(u_k)_k$:

$$\sum_k |\langle u_k | f \rangle|^2 = \|f\|_2^2.$$

Este último argumento es la parte central del llamado Teorema de Riesz y Fischer.⁷

En resumen, dada una función $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$, la serie $\mathcal{F}f$ converge (en norma) precisamente a la función f . Se ve, entonces, que los monomios z^k generan un subespacio denso de $L^2(\mathbb{S}^1)$.

⁶Una familia ortonormal $(u_k)_k$ en un espacio de Hilbert H se dice *completa*, o que es una **base ortonormal**, si es maximal; o lo que es equivalente, si $\langle u_k | x \rangle = 0$ para todo k implica $x = 0$. Para las familias ortonormales completas, la desigualdad de Bessel se cumple con igualdad. La maximalidad de la familia ortonormal $\{z^k : k \in \mathbb{Z}\}$ en $L^2(\mathbb{S}^1)$ es un teorema del análisis clásico; consúltese el Teorema II.9 del libro: Michael Reed y Barry Simon, *Functional Analysis* (Academic Press, New York, 1972).

⁷Para los detalles, consúltese, por ejemplo: Reed y Simon, *op. cit.*

Observación. Como los polinomios de Fourier son funciones continuas (de hecho, son funciones suaves) sobre \mathbb{S}^1 , la completación del subespacio $C(\mathbb{S}^1)$ [o bien, del espacio $C^\infty(\mathbb{S}^1)$] en la norma de $L^2(\mathbb{S}^1)$ es todo $L^2(\mathbb{S}^1)$. Así, $C(\mathbb{S}^1)$ y $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ son *subespacios densos* de $L^2(\mathbb{S}^1)$. Más aún, el subespacio $\mathcal{O}(\mathbb{S}^1)$ de los polinomios de Fourier es también denso en $L^2(\mathbb{S}^1)$, aunque este subespacio no es completo en norma alguna.⁸ Hay, entonces, una cadena de subespacios densos:

$$\mathcal{O}(\mathbb{S}^1) \subset C^\infty(\mathbb{S}^1) \subset C(\mathbb{S}^1) \subset L^2(\mathbb{S}^1).$$

3.2 Operadores de multiplicación

De la sección anterior identificamos en forma preliminar el álgebra $A = C(\mathbb{S}^1)$ de funciones continuas sobre el círculo, y el espacio de Hilbert $H = L^2(\mathbb{S}^1)$ de funciones de cuadrado integrable, dentro del cual el álgebra forma un subespacio denso.

Cada elemento a del álgebra A define un **operador lineal acotado** sobre el espacio de Hilbert H de la siguiente manera:

$$M_a : f \mapsto af, \quad \text{para todo } f \in H.$$

De hecho,

$$\|af\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |a(e^{i\theta})f(e^{i\theta})|^2 d\theta \leq \|a\|_\infty^2 \|f\|_2^2, \quad (3.8)$$

donde $\|a\|_\infty := \sup\{|a(z)| : z \in \mathbb{S}^1\}$ es la “norma del supremo” (1.2) introducida en la sección 1.2; se usa el subíndice ∞ para distinguirla de la norma de los elementos de $L^2(\mathbb{S}^1)$. Luego, el operador M_a , el cual denotamos también por a simplemente, está bien definido y es trivialmente un operador *lineal*. A este operador le llamamos **multiplicación** por a . La relación (3.8), gracias a la linealidad, muestra además que el operador M_a es **acotado** y por tanto continuo⁹ en la topología que la norma determina sobre el espacio de Hilbert H .

Sobre un espacio de Hilbert H la cantidad

$$\|A\| := \sup\{\|A(f)\|_2 : \|f\|_2 \leq 1, f \in H\}, \quad (3.9)$$

⁸Un espacio de Banach (un espacio normado y completo) no puede tener dimensión infinito contable, debido a un teorema de Baire. Véase Reed y Simon, *op. cit.*

⁹En general, una aplicación lineal A entre dos espacios normados es continua si y sólo si satisface una estimación de la forma $\|A(f)\| \leq C\|f\|$ para alguna constante no negativa C ; la menor C posible coincide con la norma dada por la fórmula (3.9).

llamada la **norma del operador** A , define una norma sobre el espacio de operadores lineales continuos $\mathcal{L}(H)$. De (3.8) se ve que

$$\|M_a\| \leq \sup\{|a(z)| : z \in \mathbb{S}^1\} =: \|a\|_\infty, \quad \text{para todo } a \in A = C(\mathbb{S}^1).$$

Para mostrar que esta desigualdad se cumple con igualdad, como \mathbb{S}^1 es compacto, existe $z_* = e^{i\theta_*} \in \mathbb{S}^1$ tal que $\|a\|_\infty = |a(z_*)|$. Para cada $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeño para que $a(z) \neq 0$ si $z = e^{i\theta}$ con $|\theta - \theta_*| < \varepsilon$, defínase la función

$$f_\varepsilon(z) := \begin{cases} 0, & \text{si } z = e^{i\theta} \text{ con } |\theta - \theta_*| > \varepsilon, \\ \frac{c_\varepsilon}{a(z)}, & \text{si } z = e^{i\theta} \text{ con } |\theta - \theta_*| \leq \varepsilon, \end{cases}$$

donde la constante c_ε satisface

$$|c_\varepsilon|^2 = \frac{\pi}{\varepsilon} \inf\{|a(z)|^2 : z = e^{i\theta} \text{ con } |\theta - \theta_*| \leq \varepsilon\}.$$

Primero, obsérvese que

$$\|f_\varepsilon\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_* - \varepsilon}^{\theta_* + \varepsilon} \frac{|c_\varepsilon|^2}{|a(e^{i\theta})|^2} d\theta \leq \frac{\varepsilon |c_\varepsilon|^2}{\pi \inf\{|a(z)|^2 : z = e^{i\theta} \text{ con } |\theta - \theta_*| \leq \varepsilon\}} = 1.$$

Segundo, fíjese que

$$\begin{aligned} \|M_a(f_\varepsilon)\|_2^2 &= \|af_\varepsilon\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_* - \varepsilon}^{\theta_* + \varepsilon} |c_\varepsilon|^2 d\theta \\ &= \inf\{|a(z)|^2 : z = e^{i\theta} \text{ con } |\theta - \theta_*| \leq r\} \rightarrow |a(z_*)|^2 \end{aligned}$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, lo cual muestra que

$$\|M_a\| = \|a\|_\infty \quad \text{para todo } a \in A = C(\mathbb{S}^1). \quad (3.10)$$

Por otra parte, con $f = 1$, la función constante —que cumple $\|1\|_2 = 1$ en vista de (3.2)— se obtiene $\|M_a(1)\|_2 = \|a\|_2$ para toda $a \in A = C(\mathbb{S}^1)$, de donde

$$\|a\|_2 \leq \|M_a\| = \|a\|_\infty.$$

(Entre otras cosas, esta desigualdad muestra que la inclusión $C(\mathbb{S}^1) \hookrightarrow L^2(\mathbb{S}^1)$ es continua.)

En el caso particular en que consideramos $a(z) := z^k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, la identidad de Parseval muestra que

$$\|z^k (\sum_l a_l z^l)\|_2^2 = \|\sum_l a_l z^k z^l\|_2^2 = \|\sum_l a_l z^{l+k}\|_2^2 = \sum_l |a_l|^2 = \|\sum_l a_l z^l\|_2^2.$$

Es decir, $\|z^k f\|_2 = \|f\|_2$ para todo $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ y en consecuencia el operador de multiplicación por z^k posee norma 1, para todo $k \in \mathbb{Z}$.¹⁰

3.3 La fórmula de la longitud de arco

Como ya sabemos que toda función $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ puede escribirse como una serie en los z^k usando los coeficientes de Fourier de f , tiene sentido considerar el operador

$$\frac{d}{d\theta} : f(e^{i\theta}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ik\theta} \longmapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} ik a_k e^{ik\theta}.$$

En el caso particular en el que $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$, f' existe y pertenece al espacio $C^\infty(\mathbb{S}^1)$. De este modo, usando integración por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} f'(e^{i\theta}) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\phi} f'(e^{i\phi}) d\phi \right) e^{ik\theta} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -ie^{-i(k+1)\phi} \frac{d}{d\phi} (f(e^{i\phi})) d\phi \right) e^{ik\theta} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{d\phi} (ie^{-i(k+1)\phi}) f(e^{i\phi}) d\phi \right) e^{ik\theta} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (k+1) e^{-i(k+1)\phi} f(e^{i\phi}) d\phi \right) e^{ik\theta} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\phi} f(e^{i\phi}) d\phi \right) e^{i(k-1)\theta} = -ie^{-i\theta} \frac{d}{d\theta} (f(e^{i\theta})), \end{aligned}$$

al ajustar los índices en la última serie. Es decir, el operador $d/d\theta$ está bien definido en $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, el cual es denso en $L^2(\mathbb{S}^1)$, y en este subespacio¹¹ actúa mediante

$$\frac{d}{d\theta} (f(e^{i\theta})) = ie^{i\theta} f'(e^{i\theta}), \quad \text{o bien} \quad \frac{d}{d\theta} (f(z)) = iz f'(z).$$

La relación

$$\langle \sum a_k z^k \mid \sum il b_l z^l \rangle = \sum ik \bar{a}_k b_k = \langle \sum -ik a_k z^k \mid \sum b_l z^l \rangle,$$

¹⁰Los operadores de multiplicación por z^k son operadores **unitarios**, es decir, operadores U en un espacio de Hilbert que satisfacen las relaciones $U^*U = UU^* = 1_H$, donde el **operador adjunto** $U^* : H \rightarrow H$ está definido por la fórmula $\langle f \mid U^*g \rangle := \langle Uf \mid g \rangle$, para todo $f, g \in H$. En nuestro caso, $(z^k)^* = z^{-k}$ dado que $\langle \sum a_l z^{l+k} \mid \sum b_j z^j \rangle = \sum \bar{a}_l b_{l+k} = \sum \bar{a}_{j-k} b_j = \langle \sum a_l z^l \mid \sum b_j z^{j-k} \rangle$.

¹¹Basta con considerar el subespacio $C^1(\mathbb{S}^1)$.

sugiere que $(d/d\theta)^* = -d/d\theta$. Para obtener un operador que sea formalmente autoadjunto¹² al actuar sobre $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, conviene ajustar el operador $d/d\theta$ multiplicándolo por una constante imaginaria.

Lema 3.4. *El operador*

$$D \equiv -i \frac{d}{d\theta} : f(e^{i\theta}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ik\theta} \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} k a_k e^{ik\theta} = e^{i\theta} f'(e^{i\theta}), \quad (3.11)$$

está bien definido sobre $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ —incluso sobre $C^1(\mathbb{S}^1)$ —, es lineal y satisface

$$\langle f | Dg \rangle = \langle Df | g \rangle, \quad \text{para todo } f, g \in C^\infty(\mathbb{S}^1). \quad \square$$

Observación. Si $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$ es una función una vez continuamente diferenciable, entonces $D(f) \in C(\mathbb{S}^1)$ es una función continua. Por tanto, sus coeficientes de Fourier forman una sucesión de cuadrado sumable: si $f(e^{i\theta}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ik\theta}$, entonces $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k a_k|^2 < \infty$. Para $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$, se obtiene $D(f) \in C^1(\mathbb{S}^1)$, luego $D^2(f) = D(D(f))$ existe y pertenece a $C(\mathbb{S}^1)$; por ende, la sucesión $(k^2 a_k)_k$ es de cuadrado sumable. Por inducción, se concluye que las coeficientes de Fourier $(a_k)_k$ de una función suave $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ cumplen la regla

$$(k^r a_k)_k \text{ es de cuadrado sumable, para todo } r \in \mathbb{N}. \quad (3.12)$$

Un juego $(a_k)_k$ de números (reales o complejos) que satisface la condición (3.12) se le llama **sucesión rápidamente decreciente** o bien *sucesión declinante* (en francés).¹³

En resumen: los coeficientes de Fourier de una función suave forman una sucesión rápidamente decreciente. Hay un resultado inverso (el cual es un caso particular del llamado *Lema de Sobolev*): cualquier elemento de $L^2(\mathbb{S}^1)$ cuyos coeficientes de Fourier forman una sucesión rápidamente decreciente es (equivalente a) una función suave sobre \mathbb{S}^1 . Dicho de otro modo: la condición caracteriza los elementos de $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ dentro de $C(\mathbb{S}^1)$ o de $L^2(\mathbb{S}^1)$.

¹²La fórmula $\langle y | T^*x \rangle := \langle Ty | x \rangle$, que define el adjunto de un operador T sobre un espacio de Hilbert finitodimensional H , resulta insuficiente para definir el concepto de *adjunto* en los casos infinitodimensionales, más aun si T sólo está definido en un subespacio denso, como en el caso del operador $d/d\theta$ de marras. Entonces suele decirse que T es **formalmente autoadjunto** sobre un subespacio $V \subset H$ si la relación $\langle y | Tx \rangle = \langle Ty | x \rangle$ es válida para vectores $x, y \in V$, sin perjuicio de lo que pueda ocurrir para vectores fuera de V .

¹³A veces la condición de decrecimiento rápido aparece como “la sucesión $(k^m a_k)_k$ es *acotada*, para todo $m \in \mathbb{N}$ ”. Es un ejercicio de análisis comprobar que esta condición es equivalente a (3.12).

► Como para cada $k \in \mathbb{Z}$ resulta que $D(z^k) = kz^k$, es evidente que cada $k \in \mathbb{Z}$ es un **autovalor** de D con **autovector** z^k correspondiente. Los números enteros $\{k : k \in \mathbb{Z}\}$ forman una lista, tal vez parcial, de los autovalores de D . ¿Existiría algún otro autovalor para D , aparte de estos? Resulta que no: en efecto, $D(f) = \lambda f$ si y sólo si $\sum (k - \lambda) a_k e^{ik\theta} = 0$, si y sólo si $(k - \lambda) a_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ —gracias a la identidad de Parseval— si y sólo si $\lambda = k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ y $a_l = 0$ para todo $l \neq k$.

La invocación de la identidad de Parseval es apropiada porque la lista de *autovectores* $\{z^k : k \in \mathbb{Z}\}$ genera $L^2(\mathbb{S}^1)$ como espacio de Hilbert.¹⁴ (De hecho, constituyen una base ortonormal.) Por tanto, no puede haber otro autovector para D que fuera ortogonal a todos los anteriores; e *ipso facto*, no puede haber más autovalores para D . Como cada autovector z^k conlleva un autovalor k distinto, también se concluye que todos los autovalores de D tienen *multiplicidad* 1, es decir, el subespacio $\{f \in L^2(\mathbb{S}^1) : D(f) = kf\}$ es unidimensional en cada caso.

Más aún, dado que cada $\|z^k\|_2 = 1$ y

$$\|D(z^k)\|_2 = \|kz^k\|_2 = |k|,$$

perdemos toda esperanza de extender el operador D a un operador acotado¹⁵ sobre $L^2(\mathbb{S}^1)$. Sin embargo, el conmutador entre D y el operador de multiplicación z^k satisface

$$\begin{aligned} [D, z^k](\sum_l a_l e^{il\theta}) &= D(\sum_l a_l e^{i(k+l)\theta}) - z^k \sum_l l a_l e^{il\theta} \\ &= \sum_l (k+l) a_l e^{i(k+l)\theta} - \sum_l l a_l e^{i(l+k)\theta} \\ &= \sum_l k a_l e^{i(k+l)\theta} = kz^k \sum_l a_l e^{il\theta}, \end{aligned}$$

de donde $[D, z^k](f) = kz^k f$. Este es otro operador de multiplicación, el cual es acotado por (3.8). Por lo tanto, se puede extender $[D, z^k]$ en forma única (por su continuidad) a todo $L^2(\mathbb{S}^1)$, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$. Evidentemente dicha extensión,

¹⁴Es decir, las combinaciones lineales de los z^k forman un subespacio denso de este espacio de Hilbert.

¹⁵El operador D es un ejemplo de un operador **no acotado**. Un operador lineal $T : E \rightarrow F$ entre dos espacios de Banach puede estar definido sólo en un subespacio denso $\text{Dom } T \subset E$ (su **dominio**). En el caso de un operador entre espacios de Hilbert $T : H \rightarrow K$, la densidad del dominio $\text{Dom } T$ es suficiente para la existencia de un operador adjunto. Si $y \in K$ es tal que $x \mapsto \langle Tx | y \rangle_K$ es un operador lineal y acotado sobre $\text{Dom } T$, entonces se extiende por continuidad a todo H y así, por un teorema de representación de Riesz, hay un único vector $z \in H$ tal que $\langle Tx | y \rangle_K = \langle x | z \rangle_H$. El **operador adjunto** $T^* : K \rightarrow H$ se define por $T^*y := z$.

la cual se denota también mediante $[D, z^k]$, coincide con el operador de multiplicación por kz^k .

En general, si $f, g \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$, entonces $[D, f](g) := D(fg) - fD(g)$ es la función

$$z \mapsto z(f(z)g(z))' - f(z)zg'(z) = zf'(z)g(z) = D(f)(z)g(z),$$

y así el conmutador $[D, f]$ es igual al operador de multiplicación por $D(f): z \mapsto zf'(z)$, para toda función $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$.

Observación. La igualdad (3.10) permite calcular la norma del operador acotado $[D, f]$ para $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$:

$$\|[D, f]\| = \|zf'(z)\|_\infty = \|f'\|_\infty.$$

De hecho, esta igualdad es válida para $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$; no se requiere derivar f más de una sola vez.

La distancia como un supremo sobre coordenadas. Si $p = e^{i\theta_p}$ y $q = e^{i\theta_q}$ (con $0 \leq \theta_q \leq \theta_p < 2\pi$) son dos puntos en \mathbb{S}^1 , entonces la **distancia** $d(p, q)$ entre p y q (sobre \mathbb{S}^1) es precisamente la longitud del arco más corto¹⁶ que une p con q . Sin pérdida de generalidad supongamos $0 \leq |\theta_p - \theta_q| \leq \pi$.

Si $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$, por el teorema del valor medio, existe un valor θ_0 entre θ_p y θ_q tal que

$$\begin{aligned} |f(p) - f(q)| &= |f(e^{i\theta_p}) - f(e^{i\theta_q})| = |\theta_p - \theta_q| |f'(e^{i\theta_0})| \\ &\leq |\theta_p - \theta_q| \|f'\|_\infty = |\theta_p - \theta_q| \|[D, f]\|, \end{aligned}$$

donde usamos (3.10). Por lo tanto,

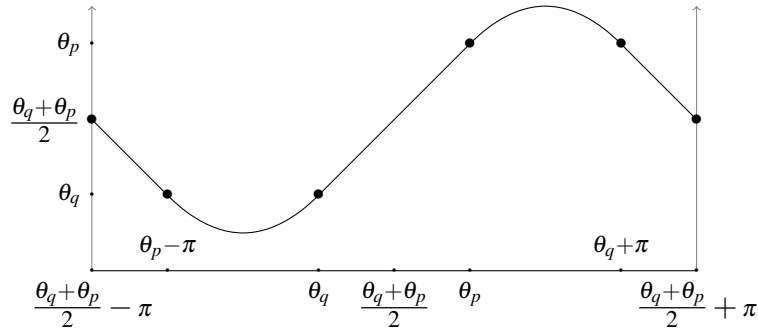
$$\sup\{|f(p) - f(q)| : f \in C^1(\mathbb{S}^1), \|[D, f]\| \leq 1\} \leq |\theta_p - \theta_q| = d(p, q).$$

Evidentemente, si $\mathcal{A} \subseteq C^1(\mathbb{S}^1)$ es un álgebra de funciones, sigue siendo cierto que

$$\sup\{|f(p) - f(q)| : f \in \mathcal{A}, \|[D, f]\| \leq 1\} \leq |\theta_p - \theta_q| = d(p, q).$$

Uno de los resultados centrales de la geometría no conmutativa establece que hay igualdad en la desigualdad anterior.

¹⁶Se rechaza el uso de la **distancia cordal**, es decir, la longitud $|e^{i\theta_p} - e^{i\theta_q}|$ de la cuerda del círculo cuyos extremos son p y q , porque la medición de esa cuerda depende del encaje del círculo en el plano \mathbb{R}^2 . La longitud del arco circular, en cambio, depende de la geometría *intrínseca* del círculo, sin referencia a su colocación dentro de una variedad de dimensión superior.



Si $0 \leq \theta_p - \theta_q < \pi$, existe una función f_{p-q} tal que

$$f_{p-q}(e^{i\theta}) = \begin{cases} \theta, & \text{si } \theta_q \leq \theta \leq \theta_p, \\ -\theta, & \text{si } \frac{\theta_p+\theta_q}{2} - \pi \leq \theta \leq \theta_p - \pi \quad \text{ó} \quad \theta_q + \pi \leq \theta \leq \frac{\theta_p+\theta_q}{2} + \pi, \end{cases}$$

y para $\theta_p - \pi \leq \theta \leq \theta_q$ y $\theta_p \leq \theta \leq \theta_q + \pi$ se define de modo que f_{p-q} pertenece a $\mathcal{A} = C^1(\mathbb{S}^1)$ —o alternativamente $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{S}^1)$ — con $\|f'_{p-q}\|_\infty \leq 1$.

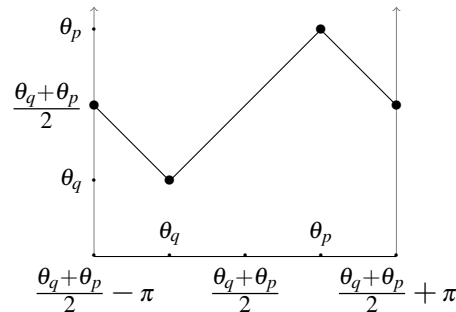
Para esta función, $f_{p-q}(e^{i\theta_p}) - f_{p-q}(e^{i\theta_q}) = \theta_p - \theta_q$, y entonces

$$\sup\{|f(p) - f(q)| : f \in \mathcal{A}, \|[D, f]\|_\infty \leq 1\} = |\theta_p - \theta_q| = d(p, q).$$

Si $p - q = \pi$ la función f_π está dada por

$$f_\pi(e^{i\theta}) = \begin{cases} \theta & \text{si } \theta_q \leq \theta \leq \theta_p, \\ -\theta & \text{si } \frac{\theta_p+\theta_q}{2} - \pi \leq \theta \leq \theta_p - \pi \quad \text{ó} \quad \theta_q + \pi \leq \theta \leq \frac{\theta_p+\theta_q}{2} + \pi, \end{cases}$$

la cual es de clase $C^1(\mathbb{S}^1)$ excepto en los puntos $e^{i\theta_p}$ y $e^{i\theta_q}$. No obstante, esta función f_π sí cumple la *condición de Lipschitz* $|f_\pi(e^{i\alpha}) - f_\pi(e^{i\beta})| \leq |\alpha - \beta|$ para cada par de puntos de \mathbb{S}^1 .



En este caso,

$$\sup\{|f(p) - f(q)| : f \in \mathcal{A}, \|[D, f]\|_\infty \leq 1\} = |\theta_p - \theta_q| = d(p, q), \quad (3.13)$$

donde el álgebra $\mathcal{A} \subset C(\mathbb{S}^1)$ es la totalidad de funciones de Lipschitz sobre el círculo.

La fórmula (3.13) es una de las piezas claves de la geometría no conmutativa, porque mide la distancia entre dos puntos p y q sin hacer referencia a los posibles puntos intermedios entre estos dos extremos. En otras palabras, se mide la longitud del arco entre p y q sin mencionar los demás puntos de este arco, sino solamente las *coordenadas* que pertenecen a un álgebra apropiada y un operador especial D . De hecho, el operador D entra en la fórmula solamente a través de sus conmutadores $[D, f]$, que son también coordenadas. El lado izquierdo de (3.13) indica la separación máxima entre coordenadas, de gradiente no mayor que 1, evaluados en los dos puntos de interés. Esta separación máxima resulta ser una *distancia* entre p y q porque el operador D es un operador muy especial. En los capítulos que siguen, la presencia de un operador distinguido D jugará el papel principal.

4 La geometría de la esfera \mathbb{S}^2

Hasta ahora, los ejemplos que ilustran los principios generales de la geometría no conmutativa han tenido escaso contenido geométrico, por su baja dimensión. Los espacios finitos, cuyas álgebras de coordenadas son finitodimensionales, poseen “dimensión cero” en un sentido geométrico que se espera aclarar próximamente. El círculo \mathbb{S}^1 es unidimensional como variedad diferencial, aunque su álgebra de coordenadas (una completación del álgebra de las series de Fourier) incluye una infinitud de elementos linealmente independientes (los monomios z^k , por ejemplo). En este capítulo se abordará el ejemplo de una variedad diferencial compacta bidimensional: la esfera \mathbb{S}^2 .

Nuestro programa, hasta donde se podrá percibir a esta altura, comienza con espacios “ordinarios” cuyas álgebras de coordenadas son conmutativas, antes de proceder al caso no conmutativo. (En realidad, un nombre más exacto para esta disciplina habría sido “geometría *no necesariamente* conmutativa” pero este apelativo incumple los requisitos de *marketing*.) En todo caso, uno de nuestros objetivos es asociar a una variedad diferencial M de dimensión n un concepto de dimensión que es transferible a casos no conmutativos pero que debe coincidir con $n = \dim M$ en el caso ordinario.

Ahora bien: un paso inicial es ejemplificar este proceso en el caso de una variedad ordinaria de dimensión 2. El ejemplo evidente sería el plano \mathbb{R}^2 ; pero como este espacio no es compacto, habría que abordar algunos considerandos técnicos antes de examinarlo. Hay dos ejemplos compactos bidimensionales que pueden sustituir al plano: el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, el producto cartesiano de dos círculos,¹ o bien la esfera \mathbb{S}^2 , que resulta ser homeomorfo a la compactificación de un punto del plano: $(\mathbb{R}^2)^+ \approx \mathbb{S}^2$, véase el final de la sección 1.2. El estudio del toro sería esencialmente una repetición del capítulo anterior, porque se reduce al estudio de series de Fourier en dos variables. La esfera \mathbb{S}^2 exhibe unos fenómenos nuevos.

4.1 Fibrados de línea sobre la esfera

La esfera es una variedad de dimensión 2: si se omite un punto cualquiera, el complemento es homeomorfo al plano \mathbb{R}^2 . Si se omite un par de puntos antipodales N y S , se obtiene dos abiertos $U_N := \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ y $U_S := \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ cuya unión es toda \mathbb{S}^2 . Este es un cubrimiento por abiertos homeomorfos a \mathbb{R}^2 ; sólo falta verificar

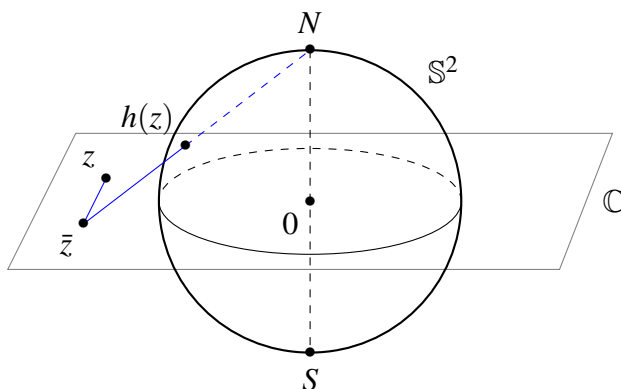
¹El producto cartesiano de n círculos, $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ (n veces) se llama un **toro** n -dimensional —de ahí viene la letra \mathbb{T} . Para $n = 1$, se usa \mathbb{T} como sinónimo de \mathbb{S}^1 .

que en la intersección hay una función de transición suave.

Hay tres maneras bien conocidas para describir la esfera \mathbb{S}^2 mediante coordenadas locales. Una de ellas es considerar la esfera como una superficie encajada en \mathbb{R}^3 :

$$\mathbb{S}^2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}.$$

El uso de las tres coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) , una de las cuales sería redundante, exige un manejo delicado de la ligadura $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Alternativamente, se puede optar por el uso de las coordenadas esféricas (θ, ϕ) , con atención a su comportamiento singular en los polos norte y sur.²



La tercera opción, que mejor nos conviene, es considerar \mathbb{S}^2 como la compactificación de un punto del plano complejo:

$$\mathbb{S}^2 \approx \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \uplus \{\infty\}.$$

Como de costumbre, se escribe $z = x + iy$ para identificar \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 ; una fracción $c/0$, donde $c \neq 0$ en \mathbb{C} , se identifica con el punto extra ∞ . La *proyección estereográfica* $h: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{S}^2$ es la función dada por³

$$h(z) := \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{-2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right), \quad h(\infty) := (0, 0, 1).$$

²En contraste con la costumbre en los libros de cálculo integral, aquí θ denota la *coordenada polar* mientras ϕ denota la *coordenada acimutal*; en cuyo caso, las fórmulas de cambio de variable son $x_1 = \sin \theta \cos \phi$, $x_2 = \sin \theta \sin \phi$, $x_3 = \cos \theta$.

³Esta función h combina la proyección estereográfica tradicional —dada por líneas rectas que pasan por el polo norte y cortan la esfera y el plano— con la reflexión $z \mapsto \bar{z}$, para que h preserve las orientaciones usuales del plano y de la esfera.

Aquí se está usando implícitamente en encaje de \mathbb{S}^2 en \mathbb{R}^3 . No es difícil ver que esta h es una biyección continua, cuyo inverso $z = h^{-1}(x_1, x_2, x_3) := (x_1 - ix_2)/(1 - x_3)$ se expresa en coordenadas esféricas por la fórmula

$$z = e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}. \quad (4.1a)$$

(Fíjese que en los polos norte, donde $\theta = 0$ y $z = \infty$; y sur, donde $\theta = \pi$ y $z = 0$, el valor de ϕ es irrelevante.) Si se excluye el polo norte N de \mathbb{S}^2 y el punto ∞ de \mathbb{C}_∞ , esta función inversa define una carta local (U_N, φ_N) , donde $\varphi_N: U_N \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ es el homeomorfismo $h^{-1}|_{U_N}$.

Considérese también la fórmula

$$\zeta = e^{i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (4.1b)$$

La aplicación $(\theta, \phi) \mapsto \zeta$ lleva \mathbb{S}^2 en \mathbb{C}_∞ de otro modo, pero ahora el polo norte $\theta = 0$ corresponde con $\zeta = 0$ mientras el polo sur $\theta = \pi$ corresponde con $\zeta = \infty$. Al excluir el polo sur, se obtiene una carta local (U_S, φ_S) , donde $\varphi_S: U_S \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo.

Al comparar las dos fórmulas en (4.1), es evidente que

$$\zeta = \frac{1}{z} \quad \text{en } U_N \cap U_S,$$

así que la función de transición $z \mapsto \zeta$ es la función racional $z \mapsto 1/z$, la cual es suave.⁴ Luego estas dos cartas locales determinan una estructura de variedad diferencial bidimensional sobre la esfera \mathbb{S}^2 .

Observación. Al conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \uplus \{\infty\}$ se le llama la **esfera de Riemann**.

Con el uso de las fórmulas (4.1), se puede reemplazar todas las fórmulas tradicionales que usan las coordenadas esféricas (θ, ϕ) por fórmulas que emplean z, \bar{z} en U_N , o bien $\zeta, \bar{\zeta}$ en U_S . Conviene introducir las cantidades reales positivas

$$q := 1 + z\bar{z} = \frac{2}{1 - \cos \theta}, \quad q' := 1 + \zeta\bar{\zeta} = \frac{2}{1 + \cos \theta}.$$

Como $\bar{z} = e^{i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$, las diferenciales dz y $d\bar{z}$ satisfacen

$$dz = -\frac{e^{-i\phi}}{1 - \cos \theta} (d\theta + i \sin \theta d\phi), \quad d\bar{z} = -\frac{e^{i\phi}}{1 - \cos \theta} (d\theta - i \sin \theta d\phi),$$

⁴De hecho, la función $z \mapsto 1/z$ es *holomorfo* en el dominio $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; por lo tanto, como aplicación de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ en sí mismo, es suave (y además obedece las ecuaciones de Cauchy y Riemann).

de modo que

$$q^{-1} dz = -\frac{1}{2}e^{-i\phi} (d\theta + i \sin \theta d\phi), \quad q^{-1} d\bar{z} = -\frac{1}{2}e^{i\phi} (d\theta - i \sin \theta d\phi).$$

De igual manera, se obtiene

$$q'^{-1} d\zeta = \frac{1}{2}e^{i\phi} (d\theta + i \sin \theta d\phi), \quad q'^{-1} d\bar{\zeta} = \frac{1}{2}e^{-i\phi} (d\theta - i \sin \theta d\phi).$$

La **forma de área** para \mathbb{S}^2 está dada por⁵

$$\omega = \sin \theta d\theta \wedge d\phi = 2i q^{-2} dz \wedge d\bar{z} = 2i q'^{-2} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}. \quad (4.2)$$

En general, para cada expresión en las variables z, \bar{z} hay una expresión análoga en las variables $\zeta, \bar{\zeta}$ que se obtiene fácilmente de la transformación $\zeta = 1/z$. En adelante se usará mayormente las variables z, \bar{z} en la carta (U_N, φ_N) , dejando al lector la tarea de obtener las fórmulas análogas para la otra carta (U_S, φ_S) .⁶

► Sobre la variedad \mathbb{S}^2 hay varios **fibrados de línea** complejos, es decir, fibrados vectoriales *complejos* de rango 1. Cada fibrado de línea $\pi: L \xrightarrow{\mathbb{C}} \mathbb{S}^2$ está caracterizado por su módulo de secciones suaves $\mathcal{E} = \Gamma(\mathbb{S}^2, L)$ en vista de la equivalencia categórica de la sección 2.6. El teorema de Serre y Swan (Teorema 2.40) dice que \mathcal{E} es un módulo proyectivo finitamente generado sobre el álgebra $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{S}^2)$. Como tal, es $\mathcal{E} \simeq p\mathcal{A}^n$ en vista del Ejemplo 2.27, donde $n \in \mathbb{N}$ y $p \in M_n(\mathcal{A})$ es una matriz idempotente. La demostración del teorema señala que en cada $x \in \mathbb{S}^2$, el rango de la matriz $p_x \in M_n(\mathbb{C})$ debe ser 1 para que la fibra $L_x = p_x \mathbb{C}^n$ tenga dimensión 1. Hace falta, entonces, encontrar los idempotentes $p \in M_n(\mathcal{A})$ de rango constante 1.

Esta tarea se simplifica un poco al darse cuenta que es suficiente considerar aquellos idempotentes que son también *autoadjuntos*:

$$p^2 = p = p^* \quad \text{en el álgebra } M_n(\mathcal{A}).$$

Definición 4.1. Si A es un álgebra involutiva sobre \mathbb{C} , un elemento $p \in A$ que es idempotente y autoadjunto, $p^2 = p = p^*$, es un **proyector** (a veces, *proyector ortogonal*).

Lema 4.2. Para cada elemento idempotente $e = e^2$ en una C^* -álgebra B , hay un proyector $p \in B$ que cumple: $ep = p$, $pe = e$.

⁵Esta es una 2-forma diferencial, donde la operación \wedge es antisimétrica: $d\theta \wedge d\phi = -d\phi \wedge d\theta$.

⁶El lector perezoso puede consultar la siguiente referencia, que de hecho forma la base de todo este capítulo: William J. Ugalde Gómez, “Operadores de Dirac en fibrados de base esférica”, tesis de maestría, Universidad de Costa Rica, 1996.

Demostración. Considérese, en la C^* -álgebra B , el siguiente elemento:⁷

$$r := ee^* + (1 - e^*)(1 - e) = 1 + (e - e^*)(e^* - e).$$

Este r es positivo e invertible, porque es de la forma $1 + b^*b$, donde $b = e^* - e$. En particular, es $r^* = r$. Es fácil comprobar que

$$er = ee^*e = re \quad \text{y} \quad e^*r = e^*ee^* = re^*.$$

Como r conmuta con e y e^* , su inverso r^{-1} también conmuta con e y e^* .

Defínase $p := ee^*r^{-1}$. Entonces $p^* = r^{-1}ee^* = p$; y además

$$p^2 = ee^*ee^*r^{-2} = e(e^*r)r^{-2} = ee^*r^{-1} = p,$$

usando las relaciones ya establecidas. Luego, p es un proyector en A . Es claro que $ep = e^2e^*r^{-1} = ee^*r^{-1} = p$ ya que $e^2 = e$. Por otro lado, como $per = ee^*e = er$, resulta $pe = (per)r^{-1} = (er)r^{-1} = e$. \square

Ejemplo 4.3. Si $A = M_m(\mathbb{C})$, cualquier idempotente es semejante a una matriz de bloques $e = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donde c es una submatriz rectangular. Los pasos de la demostración anterior dan

$$e^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c^* & 0 \end{pmatrix}, \quad ee^* = \begin{pmatrix} 1 + cc^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 1 + cc^* & 0 \\ 0 & 1 + c^*c \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en donde las relaciones $ep = p$, $pe = e$ son obvias. \diamond

Observación. En el Lema 4.2, la hipótesis de que B sea una C^* -álgebra se usa únicamente para garantizar que un elemento de la forma $1 + b^*b$ es invertible. Esta propiedad es válida en algunas otras álgebras, por ejemplo en $B = M_n(C^\infty(M))$ para M una variedad compacta.

En particular, el resultado del Lema 4.2 es aplicable cuando $B = M_n(\mathcal{A})$ con $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{S}^2)$. Las relaciones $ep = p$ y $pe = e$ garantizan que $e\mathcal{A}^n = p\mathcal{A}^n$. Para clasificar los módulos proyectivos finitamente generados de la forma $\mathcal{E} = p\mathcal{A}^n$ con p idempotente, no hay pérdida de generalidad si se asume que p es también autoadjunto.

Hay que exhibir proyectores $p \in M_n(C^\infty(\mathbb{S}^2))$ que tengan rango constante 1. Para clasificar los fibrados de línea, resulta ser suficiente examinar el caso $n = 2$ de matrices 2×2 .

⁷Esta manera de obtener p a partir de e aparece en el Teorema 26 del libro: Irving Kaplansky, *Rings of Operators* (Benjamin, New York, 1968). Es una versión abstracta del Ejemplo 4.3.

Definición 4.4. Las **matrices de Pauli**⁸ son las siguientes tres matrices hermíticas en $M_2(\mathbb{C})$,

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Fíjese que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y que $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$.

Estas matrices anticonmutan: $\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i$ para $i \neq j$, así que

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3, \quad [\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1, \quad [\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2.$$

Las cuatro matrices $\{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ forman una base del espacio vectorial $M_2(\mathbb{C})$.

Ejercicio 4.5. Si $A = a_0 1 + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3 \equiv a_0 1 + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$ y $B = b_0 1 + \vec{b} \cdot \vec{\sigma}$ son dos matrices *hermíticas* en $M_2(\mathbb{C})$, con $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ y $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, verificar que

$$AB = (a_0 b_0 + \vec{a} \cdot \vec{b}) 1 + (a_0 \vec{b} + b_0 \vec{a} + i \vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}.$$

Comprobar que cada proyector de rango 1 en el álgebra $M_2(\mathbb{C})$ es de la forma

$$p = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + n_3 & n_1 - in_2 \\ n_1 + in_2 & 1 - n_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}), \quad (4.4)$$

donde $\vec{n} \in \mathbb{S}^2$; es decir, $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ y se cumple $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$.

► Este ejercicio permite obtener todos los proyectores en $M_2(C^\infty(\mathbb{S}^2))$ de rango constante 1, al interpretar el vector \vec{n} de la fórmula (4.4) como $\vec{n} = \vec{n}(\vec{x})$, con una dependencia del punto $\vec{x} \in \mathbb{S}^2$. Dicho de otro modo, hay que considerar \vec{n} como una *función* suave $\vec{n}: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$.

Una modificación suave de esta función \vec{n} cambia el proyector p y de rebote cambia el fibrado correspondiente en otro fibrado equivalente. Pero no siempre es posible cambiar una aplicación suave (o continua) de \mathbb{S}^2 en \mathbb{S}^2 en otra mediante deformaciones continuas: hay un invariante discreto, el **grado** de la aplicación, que clasifica tales \vec{n} .

⁸Wolfgang Pauli (1900–1958), físico austriaco, fue uno de los fundadores de la mecánica cuántica. En 1924 propuso su *principio de exclusión*, que prohíbe que dos electrones ocupen el mismo estado cuántico; esto conlleva que cada electrón tenga un nuevo grado de libertad, su *espín*. Logró expresar los operadores cuánticos asociados con el espín mediante estas tres matrices 2×2 .

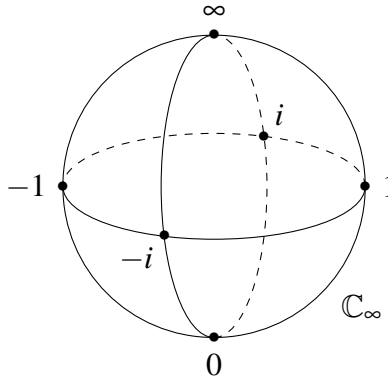
Es mejor transferir el cálculo de la esfera encajada \mathbb{S}^2 a la esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ al poner

$$z = h^{-1}(\vec{x}) = \frac{x_1 - ix_2}{1 - x_3}, \quad f(z) := h^{-1}(\vec{n}(\vec{x})) = \frac{n_1 - in_2}{1 - n_3}.$$

En este caso, el proyector (4.4) se convierte en la función $p: \mathbb{C}_\infty \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ dado por

$$p(z) = \frac{1}{1 + |f(z)|^2} \begin{pmatrix} |f(z)|^2 & f(z) \\ \overline{f(z)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Fíjese que esta matriz tiene traza constante 1, lo cual se espera de un proyector de rango constante 1.



Si $m \in \mathbb{N}$, el monomio $f(z) := z^m$ es una aplicación de grado m sobre la esfera de Riemann: deja fijos los polos 0 y ∞ y permuta los círculos $|z| = r$, para $r > 0$. Mientras z recorre uno de estos círculos una vez, z^m recorre un círculo de la imagen m veces. En cambio, la aplicación conjugada $z \mapsto \bar{z}^m$ recorre ese mismo círculo m veces en el sentido contrario; su grado es $-m$. Cada elemento de \mathbb{Z} es entonces el grado de alguna aplicación suave de la esfera en sí mismo.⁹

⁹La clasificación de los módulos proyectivos “de rango uno” sobre $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{S}^2)$ por el grado de la aplicación f depende de dos consideraciones más. Primero, que dos módulos $p_1\mathcal{A}^2$ y $p_2\mathcal{A}^2$ corresponden con fibrados de línea equivalentes si y sólo si las funciones correspondientes f_1 y f_2 son *homotópicas*, es decir, continuamente deformables entre sí. Segundo, que la totalidad de clases de homotopía de aplicaciones continuas (o suaves) de \mathbb{S}^2 en \mathbb{S}^2 constituyen un grupo denotado $\pi_2(\mathbb{S}^2)$ y que un teorema de Hurewicz establece que $\pi_2(\mathbb{S}^2) \simeq \mathbb{Z}$: el grado de una aplicación la clasifica hasta homotopía. De ahí se concluye que, con sólo exhibir un proyector en $M_2(C^\infty(\mathbb{S}^2))$ para cada grado $m \in \mathbb{Z}$, se obtiene todos los fibrados de línea complejos sobre \mathbb{S}^2 , hasta equivalencia.

La función idéntica $f(z) := z$, de grado 1, proporciona el llamado **proyector de Bott**:¹⁰

$$p_1(z) = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} z\bar{z} & z \\ \bar{z} & 1 \end{pmatrix}, \quad p_1(\infty) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Más generalmente, los siguientes proyectores $\{p_m : m \geq 0\}$ y $\{p_{-m} : m > 0\}$ corresponden con fibrados de línea inequivalentes L^m, L^{-m} :

$$p_m(z) = \frac{1}{1 + z^m \bar{z}^m} \begin{pmatrix} z^m \bar{z}^m & z^m \\ \bar{z}^m & 1 \end{pmatrix}, \quad p_{-m}(z) = \frac{1}{1 + z^m \bar{z}^m} \begin{pmatrix} z^m \bar{z}^m & \bar{z}^m \\ z^m & 1 \end{pmatrix}.$$

Fíjese que para $m = 0$, donde $f(z) \equiv 0$, el proyector $p_0(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es constante y el módulo $p_0 \mathcal{A}^2 = 0 \oplus \mathcal{A}$ es un submódulo *libre* de $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}$. El fibrado de línea asociado es el fibrado trivial $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{C}$.

► Conviene elegir bases locales de secciones para estos fibrados; como son de rango uno, basta tomar una sola sección local en cada caso. Para $m \in \mathbb{N}$, defínase $s_{mN} \in \Gamma(U_N, L^m)$, $s_{mS} \in \Gamma(U_S, L^m)$ por

$$s_{mN}(z) := \frac{1}{\sqrt{1 + z^m \bar{z}^m}} \begin{pmatrix} z^m \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s_{mS}(\zeta) := \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta^m \bar{\zeta}^m}} \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta^m \end{pmatrix}.$$

Una sección global $s \in \mathcal{E}_m$ está dada por un par de funciones suaves $f_N : U_N \rightarrow \mathbb{C}$ y $f_S : U_S \rightarrow \mathbb{C}$ que cumplen $f_N s_{mN} = f_S s_{mS}$ en $U_N \cap U_S$. En otras palabras, estas dos funciones son relacionadas por una **transformación de gauge**:

$$f_N(z) = (\bar{z}/z)^{m/2} f_S(z^{-1}) \quad \text{para } z \neq 0. \quad (4.5a)$$

Para los módulos \mathcal{E}_{-m} , haya fórmulas análogas con los intercambios $z \leftrightarrow \bar{z}$ y $\zeta \leftrightarrow \bar{\zeta}$. Se definen secciones locales $s_{-m,N} \in \Gamma(U_N, L^{-m})$, $s_{-m,S} \in \Gamma(U_S, L^{-m})$ análogamente; un elemento de \mathcal{E}_{-m} consta de dos funciones $g_N : U_N \rightarrow \mathbb{C}$ y $g_S : U_S \rightarrow \mathbb{C}$ que cumplen $g_N s_{-m,N} = g_S s_{-m,S}$ en $U_N \cap U_S$, así que

$$g_N(z) = (z/\bar{z})^{m/2} g_S(z^{-1}) \quad \text{para } z \neq 0. \quad (4.5b)$$

¹⁰La suma de Whitney de fibrados vectoriales complejos (de rango cualquiera) sobre una variedad M corresponde con la suma directa de proyectores (de tamaño matricial ilimitada). Bajo esta suma directa, unos clases de equivalencia de los proyectores generan un semigrupo. Hay una construcción natural que convierte este semigrupo en un grupo abeliano, denotado $K^0(M)$. En el caso $M = \mathbb{S}^2$, la clase $[p_1]$ es el generador del grupo $K^0(\mathbb{S}^2) \simeq \mathbb{Z}$. Este *elemento de Bott* juega un papel central en las pruebas modernas de un *teorema de periodicidad* de Raoul Bott (1923–2005) que establece patrones repetitivos en la homotopía de ciertos grupos de Lie.

Definición 4.6. La **recta proyectiva compleja** $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ es el conjunto de los subespacios unidimensionales de \mathbb{C}^2 . Si $(z_0, z_1) \neq (0, 0)$ en \mathbb{C}^2 , denótese¹¹ por $[z_0 : z_1]$ el subespacio $\mathbb{C}(z_0, z_1) = \{(\lambda z_0, \lambda z_1) : \lambda \in \mathbb{C}\}$. Cada una de estas rectas es de la forma $[z : 1]$ para algún $z \in \mathbb{C}$, con la sola excepción de la recta $[1 : 0]$. Al escribir $z := z_1/z_0$ si $z_0 \neq 0$ y $\zeta := z_0/z_1$ si $z_1 \neq 0$, se ve que hay biyecciones obvias entre los conjuntos $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$; $\mathbb{S}^2 = U_N \cup U_S$; y \mathbb{C}_∞ , tales que $[1 : 0] \leftrightarrow N \leftrightarrow \infty$.

El fibrado $L \xrightarrow{\mathbb{C}} \mathbb{S}^2$ cuyo módulo de secciones es $\mathcal{E}_1 = \Gamma(\mathbb{S}^2, L)$ admite la siguiente descripción. A cada punto $[z_0 : z_1]$ de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ se le asocia la propia recta $L_{[z_0:z_1]} := \mathbb{C}(z_0, z_1)$ como fibra. No es difícil comprobar, sobre $U_N = \{z_0 \neq 0\}$ y sobre $U_S = \{z_1 \neq 0\}$, que esto define un fibrado localmente trivial complejo de rango 1. Este es el **fibrado de línea tautológico** sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. La sección local en $\Gamma(U_N, L)$ dada por $[z : 1] \mapsto (z\lambda(z), \lambda(z))$, donde $\lambda : U_N \rightarrow \mathbb{C}$ es alguna función suave, se identifica con el elemento $z \mapsto \begin{pmatrix} z\lambda(z) \\ \lambda(z) \end{pmatrix} = \lambda(z) \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$ de \mathcal{E}_1 .

También se define el **fibrado de hiperplanos** $H \xrightarrow{\mathbb{C}} \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ como el *dual* del fibrado de línea tautológico: la fibra $H_{[z_0:z_1]} := L_{[z_0:z_1]}^*$ es el espacio vectorial dual de la fibra correspondiente de L . De modo más concreto, se puede definir $H_{[z_0:z_1]} := \mathbb{C}(\bar{z}_0, \bar{z}_1)$, de modo que secciones locales sobre U_n son los múltiplos de $\begin{pmatrix} \bar{z} \\ 1 \end{pmatrix}$, así que $\Gamma(\mathbb{S}^2, H) \simeq \mathcal{E}_{-1}$.

Lema 4.7. *El fibrado de rango dos $L \oplus H \xrightarrow{\mathbb{C}^2} \mathbb{S}^2$ es trivial.*

Demostración. Basta comprobar que el módulo $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_{-1} \simeq \Gamma(L \oplus H, \mathbb{S}^2)$ es un módulo libre. Obsérvese que la matriz unitaria $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ cumple la siguiente relación:

$$\begin{aligned} up_{-1}u^{-1} &= \frac{1}{1+z\bar{z}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z\bar{z} & \bar{z} \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1+z\bar{z}} \begin{pmatrix} 1 & -z \\ -\bar{z} & z\bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{1+z\bar{z}} \begin{pmatrix} z\bar{z} & z \\ \bar{z} & 1 \end{pmatrix} = 1 - p_1. \end{aligned}$$

Es necesario establecer una equivalencia $p_1 + p_{-1} \sim p_1 + up_{-1}u^{-1} = 1$ que conlleva un isomorfismo $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_{-1} = p_1\mathcal{A}^2 + p_{-1}\mathcal{A}^2 \simeq \mathcal{A}^2$ y de este modo trivializa el fibrado vectorial $L \oplus H$. Esta equivalencia está dada por una deformación suave

¹¹Estas son las llamadas **coordenadas homogéneas** de un punto de la recta proyectiva.

de 1 en u en el álgebra $M_2(\mathcal{A}) = M_2(C^\infty(\mathbb{S}^2))$, la cual no puede cambiar los grados de las aplicaciones de \mathbb{S}^2 en sí mismo. Es suficiente considerar la familia de matrices constantes¹²

$$v_t = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

que satisfacen $v_0 = 1$, $v_1 = u$. □

Definición 4.8. El **fibrado espinorial** sobre \mathbb{S}^2 es el fibrado trivial $L \oplus H \xrightarrow{\mathbb{C}^2} \mathbb{S}^2$. Su módulo de secciones suaves es el **módulo espinorial** $\mathcal{S} = \mathcal{S}^+ \oplus \mathcal{S}^-$, donde se escribe $\mathcal{S}^+ \equiv \mathcal{E}_1$, $\mathcal{S}^- \equiv \mathcal{E}_{-1}$. A los elementos de \mathcal{S} se les llama **espinores** sobre la esfera.¹³

En concordancia con (4.5), cada espinor está dado por dos pares de funciones (ψ_N^+, ψ_N^-) y (ψ_S^+, ψ_S^-) , sujetos a las reglas de transformación:

$$\psi_N^+(z) \equiv \sqrt{\bar{z}/z} \psi_S^+(z^{-1}), \quad \psi_N^-(z) \equiv \sqrt{z/\bar{z}} \psi_S^-(z^{-1}). \quad (4.6)$$

Por ejemplo, los pares de funciones

$$\begin{pmatrix} \psi_N^+(z) \\ \psi_N^-(z) \end{pmatrix} := \frac{1}{\sqrt{1+z\bar{z}}} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi_S^+(\zeta) \\ \psi_S^-(\zeta) \end{pmatrix} := \frac{1}{\sqrt{1+\zeta\bar{\zeta}}} \begin{pmatrix} \bar{\zeta} \\ 1 \end{pmatrix}$$

cumplen las condiciones (4.6) y por ende definen un espinor $\psi = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$.

4.2 La geometría métrica de la esfera

La esfera \mathbb{S}^2 es un espacio curvo. ¿Cómo se aborda el concepto de *curvatura* en términos de coordenadas sobre la esfera?

Una *métrica riemanniana* sobre una variedad M atribuye una longitud a cada vector tangente y determina un ángulo entre dos vectores tangentes en el mismo punto de M . Se trata de la asignación de un producto escalar (real) a cada espacio

¹²En la terminología de la topología algebraica, esta función $t \mapsto v_t$ es una **homotopía** suave entre sus extremos 1 y u . Entonces $t \mapsto (1 \oplus v_t)$ es una homotopía entre $p_1 \oplus p_{-1}$ y 1 en $M_4(\mathcal{A})$. Un lema de la llamada *K-teoría* establece que si dos proyectores en una C^* -álgebra son homotópicos, entonces sus rangos son módulos isomorfos. Véase, por ejemplo: Gerard J. Murphy, *C^* -Algebras and Operator Theory* (Academic Press, San Diego, 1990).

¹³Los elementos de los submódulos \mathcal{S}^\pm son llamados *mediosespinores* por los matemáticos, pero *espinores quirales* por los físicos.

vectorial tangente $T_x M$, el cual es una fibra del fibrado tangente $TM \xrightarrow{\mathbb{R}^n} M$. Al considerar estos productos escalares en todos los puntos de M simultáneamente, la métrica asigna una función sobre M a cada par de secciones del fibrado tangente. La definición formal es la siguiente.

Definición 4.9. Sea M una variedad diferencial de dimensión n . Sea $C_{\mathbb{R}}^{\infty}(M)$ la totalidad de funciones suaves $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ con valores reales.¹⁴ Esta es un álgebra sobre \mathbb{R} . Un **campo vectorial** real sobre M es una *derivación* de esta álgebra, es decir, una aplicación \mathbb{R} -lineal $X: C_{\mathbb{R}}^{\infty}(M) \rightarrow C_{\mathbb{R}}^{\infty}(M)$ que cumple la siguiente **regla de Leibniz**:

$$X(fh) = fX(h) + X(f)h \quad \text{para todo } f, h \in C_{\mathbb{R}}^{\infty}(M). \quad (4.7)$$

Se denota $\mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(M)$ la totalidad de campos vectoriales reales; este es un módulo sobre el anillo conmutativo $C_{\mathbb{R}}^{\infty}(M)$, al escribir $hX: f \mapsto hX(f)$ para $h \in C_{\mathbb{R}}^{\infty}(M)$.

En una carta local (U, φ) de M que define coordenadas locales $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, véase la Definición 2.1, las *derivadas parciales*

$$\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x^j}$$

forman una base local: se puede escribir $X = f^1 \partial_1 + \dots + f^n \partial_n$ con coeficientes $f^1, \dots, f^n \in C_{\mathbb{R}}^{\infty}(U)$.

Una **métrica riemanniana** sobre M es una función

$$g: \mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(M) \times \mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(M) \rightarrow C_{\mathbb{R}}^{\infty}(M)$$

que es $C_{\mathbb{R}}^{\infty}(M)$ -*bilineal* y simétrica, y cumple $g(X, X) > 0$ para $X \neq 0$ en $\mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(M)$. En términos de una base local, g se expresa mediante una matriz simétrica $[g_{ij}]$ de elementos de $C_{\mathbb{R}}^{\infty}(U)$, dados por $g_{ij} := g(\partial_i, \partial_j)$.

Resulta que los campos vectoriales pueden identificarse como las secciones suaves del fibrado tangente $TM \xrightarrow{\mathbb{R}^n} M$. De hecho, un *vector tangente* $X_t \in T_t M$ no es más que una aplicación \mathbb{R} -lineal $X_t: C_{\mathbb{R}}^{\infty}(U) \rightarrow \mathbb{R}$, para algún vecindario U de t , que cumple la regla de Leibniz $X_t(fg) = f(t)X_t(g) + X_t(f)g(t)$. De igual manera, la métrica g puede considerarse como una sección de un fibrado cuya fibra en t es la totalidad de formas bilineales simétricas definidas positivas sobre $T_t M$. Sin embargo, el punto de vista “no conmutativo” proclama que es mejor trabajar directamente con las secciones de estos fibrados.

¹⁴Si se quiere, estas son las funciones suaves complejas en $C^{\infty}(U)$ que son iguales a sus conjugados complejos, $f = \bar{f}$.

Definición 4.10. Una **forma diferencial** real de primer grado (una 1-*forma* diferencial) es una aplicación $\alpha: \mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(M) \rightarrow C_{\mathbb{R}}^{\infty}(M)$ que es *lineal* sobre el anillo $C_{\mathbb{R}}^{\infty}(M)$, esto es,¹⁵

$$\langle \alpha, hX \rangle = h \langle \alpha, X \rangle \quad \text{para todo } h \in C_{\mathbb{R}}^{\infty}(M), X \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(M).$$

Ellas constituyen un módulo $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^1(M)$ sobre $C_{\mathbb{R}}^{\infty}(M)$.

En una carta local (U, φ) de M , hay una base local de 1-formas $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ la cual es *dual* a la base local de campos vectoriales:

$$\langle dx^i, \partial_j \rangle = \delta_j^i \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Esto dice que es posible escribir localmente $\alpha = a_1 dx^1 + \dots + a_n dx^n$.

La métrica g se expresa localmente como una suma de productos *simétricos* de estas 1-formas locales:

$$g = g_{ij} dx^i dx^j,$$

donde se sobreentiende una *sumatoria*¹⁶ sobre los dos índices $i, j = 1, \dots, n$. De esta manera, la evaluación de g en dos campos vectoriales locales es

$$g(f^i \partial_i, h^j \partial_j) = g_{ij} f^i h^j.$$

Observación. Es útil considerar campos vectoriales y 1-formas de valores complejas en vez de reales. (En general, cualquier espacio vectorial real V da lugar a una “*complexificación*” $V^{\mathbb{C}} = V \oplus iV$.) De esta forma, se puede reemplazar $C_{\mathbb{R}}^{\infty}(M)$ y $\mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(M)$ por sus *complexificaciones* $C^{\infty}(M)$ y $\mathfrak{X}(M)$, con supresión de la etiqueta \mathbb{C} . Entonces $\mathfrak{X}(M)$ es un módulo sobre $C^{\infty}(M)$; de hecho, es el módulo de secciones suaves del fibrado $(TM)^{\mathbb{C}} \rightarrow M$, cuyas fibras son $(T_x M)^{\mathbb{C}} = T_x M \oplus i T_x M$.

De igual modo, las 1-formas complejas $\mathcal{A}^1(M)$ son un módulo sobre $C^{\infty}(M)$. Por ejemplo, si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, se escribe $dz = dx + i dy$ y también $d\bar{z} = dx - i dy$. Su producto simétrico es $dz d\bar{z} = (dx)^2 + (dy)^2$.

¹⁵Se usa la notación $\langle \alpha, X \rangle \equiv \alpha(X)$ para la evaluación de una 1-forma sobre un campo vectorial para enfatizar la *dualidad* entre estos dos objetos. Esta notación tiene la ventaja de mermar las cantidades de paréntesis empleados.

¹⁶Este es el *convenio de Einstein*: se suma sobre cada índice repetido que aparece una vez abajo (como subíndice) y una vez arriba (como exponente). Fue introducido en: Albert Einstein, “Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie”, *Annalen de Physik* **49** (1916), 769–822.

Ejemplo 4.11. La **métrica redonda** sobre la esfera \mathbb{S}^2 está dada en coordenadas esféricas o complejas por:

$$g = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 = 4q^{-2} dz d\bar{z} = 4q'^{-2} d\zeta d\bar{\zeta}. \quad (4.8)$$

Esta métrica se dice *redonda* porque es invariante bajo una acción natural del grupo de rotaciones de la esfera.

Fíjese que los campos vectoriales locales sobre el abierto U_N dados por

$$E_1 := \frac{1}{2}q \partial_x, \quad E_2 := \frac{1}{2}q \partial_y$$

forman una *base ortonormal local* para $\mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(U_N)$:

$$g(E_1, E_1) = g(E_2, E_2) = 1, \quad g(E_1, E_2) = 0,$$

porque $g = 4q^{-2} (dx)^2 + 4q^{-2} (dy)^2$ sobre U_N . \diamond

Por su definición, la métrica g es definida positiva y en particular es invertible, en el siguiente sentido. La matriz de funciones $[g_{ij}]$ en $M_n(C_{\mathbb{R}}^{\infty}(U))$ tiene un determinante que es una función estrictamente positiva en U ; por tanto, existe una matriz inversa $[g^{rs}] \in M_n(C_{\mathbb{R}}^{\infty}(U))$, la cual es la expresión local de una función $C_{\mathbb{R}}^{\infty}(M)$ -lineal, simétrica y definida positiva

$$g^{-1} : \mathcal{A}_{\mathbb{R}}^1(M) \times \mathcal{A}_{\mathbb{R}}^1(M) \rightarrow C_{\mathbb{R}}^{\infty}(M).$$

Localmente, se obtiene $g^{rs} = g^{-1}(dx^r, dx^s)$ como las entradas de la matriz inversa.¹⁷

Con esta forma bilineal positiva, se puede definir la ortogonalidad de 1-formas diferenciales. En la esfera, una base ortonormal local de 1-formas sobre U_N está dada por

$$\vartheta^1 := 2q^{-1} dx, \quad \vartheta^2 := 2q^{-1} dy,$$

y se obtiene $g^{-1}(\vartheta^1, \vartheta^1) = g^{-1}(\vartheta^2, \vartheta^2) = 1$, $g^{-1}(\vartheta^1, \vartheta^2) = 0$.

¹⁷La positividad definida de g establece unos **isomorfismos musicales** $X \mapsto X^{\flat} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{A}^1(M)$ y $\alpha \mapsto \alpha^{\sharp} : \mathcal{A}^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ por las recetas $\langle X^{\flat}, Y \rangle := g(X, Y)$ y $g(\alpha^{\sharp}, Y) := \langle \alpha, Y \rangle$. De ahí se obtiene la relación $g^{-1}(\alpha, \beta) = g(\alpha^{\sharp}, \beta^{\sharp})$. En coordenadas locales, las fórmulas son $(\partial_i)^{\flat} = g_{ij} dx^j$ y $(dx^r)^{\sharp} = g^{rs} \partial_s$. Estas fórmulas subtienden lo que los físicos llaman “el yoga de subir y bajar índices”.

► La coordenada compleja z sobre U_N (y también ζ sobre U_S) se aprovecha mejor cuando se reemplazan estas bases ortonormales locales por *bases isotrópicas* locales.¹⁸ Es cuestión de tomar

$$\begin{aligned} q\partial_z &= E_1 - iE_2, & q^{-1}dz &= \frac{1}{2}(\vartheta^1 + i\vartheta^2), \\ q\bar{\partial}_z &= E_1 + iE_2, & q^{-1}d\bar{z} &= \frac{1}{2}(\vartheta^1 - i\vartheta^2), \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde se escribe $\partial_z := \partial/\partial z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$ y también $\bar{\partial}_z := \partial/\partial \bar{z} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$ como abreviaturas.¹⁹

► Una métrica Riemanniana influye en el cálculo diferencial sobre una variedad M a través del concepto de la *derivada covariante* o *conexión* que induce en los fibrados tangente y cotangente.

Definición 4.12. Una **conexión** en un fibrado vectorial $E \xrightarrow{V} M$ es una familia de aplicaciones \mathbb{C} -lineales²⁰

$$\nabla_X : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E), \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{X}(M),$$

que es $C^\infty(M)$ -lineal en X :

$$\nabla_{X+Y} = \nabla_X + \nabla_Y \quad \text{y} \quad \nabla_{hX} = h\nabla_X \quad \text{para } h \in C^\infty(M), X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

y que cumple la siguiente regla de Leibniz:

$$\nabla_X(sf) = (\nabla_X s)f + sX(f), \quad \text{para } s \in \Gamma(M, E), f \in C^\infty(M). \quad (4.10)$$

En el caso particular en que $E = TM$ es el *fibrado tangente* (o su complexificación), se dice que ∇ es una **conexión afín**. En coordenadas locales, una conexión afín

¹⁸Si V es un espacio vectorial real dotado de una forma \mathbb{R} -bilineal simétrica d , se puede extender d a una forma \mathbb{C} -bilineal y simétrica (no hermítica) sobre la complexificación $V^{\mathbb{C}} = V \oplus iV$ al tomar $d(u + iv, u' + iv') := d(u, u') + id(u, v') + id(v, u') - d(v, v')$. Dícese que un vector $w \in V^{\mathbb{C}}$ es **isotrópico** si $d(w, w) = 0$. Si d es definida positiva sobre V , el único vector isotrópico en V o en iV es el vector cero; pero cualquier vector de la forma $u + iv$, con $\{u, v\}$ ortonormal en V , es un vector isotrópico no nulo en $V^{\mathbb{C}}$.

¹⁹Si $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, se escribe $\partial/\partial z := \frac{1}{2}(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$ y $\partial/\partial \bar{z} := \frac{1}{2}(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$, con atención a los signos. Las ecuaciones de Cauchy y Riemann para una función $h(z, \bar{z})$ entonces toman la forma $\partial h/\partial \bar{z} = 0$, de modo que “ h depende sólo de z y no de \bar{z} ”.

²⁰Hay una manera de “eliminar X ” usando ciertos productos tensoriales sobre el anillo $A = C^\infty(M)$. Escríbese $\mathcal{A}^1(M, E) := \Gamma(M, E) \otimes_A \mathcal{A}^1(M)$. La forma diferencial df , para $f \in C^\infty(M)$, se define por $\langle df, X \rangle := X(f)$ cuando $X \in \mathfrak{X}(M)$. La correspondencia $X \mapsto \nabla_X$ determina una aplicación \mathbb{C} -lineal $\nabla : \Gamma(M, E) \rightarrow \mathcal{A}^1(M, E)$ cuya regla de Leibniz es $\nabla(sf) = (\nabla s)f + s \otimes df$.

queda determinada para una familia de funciones $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$ llamadas **símbolos de Christoffel**, definidos por

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k. \quad (4.11)$$

En más detalle: cada ∇_{∂_i} lleva $\mathfrak{X}(U)$ en $\mathfrak{X}(U)$; y si $X = f^i \partial_i \in \mathfrak{X}(U)$, entonces $\nabla_X \partial_j = f^i \nabla_{\partial_i} \partial_j$. El lado derecho de (4.11) es el desarrollo del lado izquierdo en la base local $\{\partial_k : k = 1, \dots, n\}$ de $\mathfrak{X}(U)$.

Definición 4.13. En la presencia de una métrica riemanniana g , hay una *única* conexión afín que es (a) libre de torsión; y (b) compatible con la métrica. Estas condiciones se expresan mediante las siguientes fórmulas:²¹

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad (4.12a)$$

$$g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) = Z(g(X, Y)) \quad \text{para todo } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (4.12b)$$

En coordenadas locales, la única solución a estas ecuaciones resulta ser²²

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

La conexión afín ∇ determinada por las condiciones (4.12) se llama la **conexión de Levi-Civita** para la métrica g sobre la variedad M .

Para la carta local (U_N, φ_N) , la métrica redonda g de (4.8) tiene matriz $[g_{ij}]$ con $g_{ij} = 4q^{-2} \delta_{ij}$ para $z = x^1 + ix^2$; luego $g^{kl} = \frac{1}{4} q^2 \delta^{kl}$ y además $\partial_l g_{ij} = -16x^l q^{-3} \delta_{ij}$. Los símbolos de Christoffel en estas coordenadas locales son

$$\Gamma_{ij}^k = -2q^{-1} (x^i \delta_j^k + x^j \delta_i^k - x^k \delta_{ij}).$$

Ejercicio 4.14. Verificar las siguientes relaciones para los campos locales E_α que son ortonormales²³ sobre U_N , con $\alpha = 1, 2$:

$$\nabla_{E_\alpha} E_\beta = (\delta_{\alpha\beta} x^\gamma - \delta_\alpha^\gamma x^\beta) E_\gamma,$$

en vista de la regla de Leibniz (4.10).

²¹El corchete $[X, Y]$ se define por $[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f))$ para $f \in C^\infty(M)$. El corchete cumple la regla de Leibniz (4.7), así que pertenece a $\mathfrak{X}(M)$. La libertad de torsión es equivalente a la simetría de los símbolos de Christoffel en sus dos subíndices: $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

²²Estas fórmulas se obtienen por un cálculo sencillo pero largo; consúltese cualquier libro moderno de geometría diferencial. Recomendamos: Theodore Frankel, *The Geometry of Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).

²³Es tradicional usar índices latinos i, j, k para los campos vectoriales básicos como ∂_1, ∂_2 pero índices griegos α, β, γ para los campos vectoriales ortonormales como E_1, E_2 .

Al emplear las versiones complejas (4.9), se obtienen las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}\nabla_{q\partial_z}(q\partial_z) &= -\bar{z}q\partial_z, & \nabla_{q\partial_z}(q\bar{\partial}_z) &= \bar{z}q\bar{\partial}_z, \\ \nabla_{q\bar{\partial}_z}(q\partial_z) &= zq\partial_z, & \nabla_{q\bar{\partial}_z}(q\bar{\partial}_z) &= -zq\bar{\partial}_z.\end{aligned}\quad (4.13a)$$

Las expresiones al lado derecho de estas ecuaciones son secciones locales del fibrado tangente complejificado $(T\mathbb{S}^2)^\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2$. Habida cuenta de la regla de Leibniz (4.10), se ve que $\nabla_{q\partial_z}$ y $\nabla_{q\bar{\partial}_z}$ son *operadores diferenciales de primer grado* sobre tales secciones.

Sobre las secciones locales del fibrado dual —este es el *fibrado cotangente* complejificado $(T^*\mathbb{S}^2)^\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2$ — se definen operadores diferenciales de primer orden por el mismo proceso. Las secciones de este fibrado son precisamente las 1-formas diferenciales (complejas). Sobre las 1-formas se define una nueva conexión ∇ , que también suele llamarse una *conexión de Levi-Civita*, por la siguiente regla de compatibilidad:²⁴

$$\langle \nabla_X \alpha, Y \rangle = X(\langle \alpha, Y \rangle) - \langle \alpha, \nabla_X Y \rangle,$$

donde la conexión afín ya considerada aparece al lado derecho. Si $\langle \alpha, Y \rangle$ es una función constante, el término $X(\langle \alpha, Y \rangle)$ se anula, así que los símbolos de Christoffel para la nueva conexión son los *negativos* de los anteriores de (4.11):

$$\nabla_{\partial_i} dx^k = -\Gamma_{ij}^k dx^j.$$

Para las 1-formas complejas, en el abierto U_N , esta conexión de Levi-Civita viene dada por:

$$\begin{aligned}\nabla_{q\partial_z}(q^{-1}dz) &= \bar{z}q^{-1}dz, & \nabla_{q\partial_z}(q^{-1}d\bar{z}) &= -\bar{z}q^{-1}d\bar{z}, \\ \nabla_{q\bar{\partial}_z}(q^{-1}dz) &= -zq^{-1}dz, & \nabla_{q\bar{\partial}_z}(q^{-1}d\bar{z}) &= zq^{-1}d\bar{z}.\end{aligned}\quad (4.13b)$$

► Sobre la carta (U_S, φ_S) se puede escribir fórmulas totalmente análogas. No hace falta escribir los detalles, pero vale la pena considerar las transformaciones de gauge para las 1-formas. Si $\alpha = f_N(z)q^{-1}dz + g_N(z)q^{-1}d\bar{z}$ es una 1-forma

²⁴Esta fórmula, reescrita como $X(\langle \alpha, Y \rangle) = \langle \nabla_X \alpha, Y \rangle + \langle \alpha, \nabla_X Y \rangle$, es una nueva regla de Leibniz para el campo vectorial X . En la teoría general de conexiones, se habla de *conexiones asociadas* sobre dos fibrados. Esta asociación suele definirse en términos de las acciones de grupos de simetría sobre las diversas fibras. Aquí es preferible adoptar un recetario pedestre, en términos de reglas de Leibniz. Para una discusión detallada, véase: Werner Greub, Stephen Halperin y Ray Vanstone, *Connections, Curvature, and Cohomology* (Academic Press, New York, 1972).

cualquiera, cuya expresión sobre U_S es $\alpha = -f_S(\zeta) q'^{-1} d\zeta - g_S(\zeta) q'^{-1} d\bar{\zeta}$ con un signo negativo por convenio, las formas básicas se relacionan sobre $U_N \cap U_S$ por

$$q'^{-1} d\zeta = \frac{z\bar{z}}{q} (-z^{-2} dz) = -\frac{\bar{z}}{z} q^{-1} dz, \quad q'^{-1} d\bar{\zeta} = \frac{z\bar{z}}{q} (-\bar{z}^{-2} d\bar{z}) = -\frac{z}{\bar{z}} q^{-1} d\bar{z},$$

las funciones coeficientes son ligadas, necesariamente, por

$$f_N(z) \equiv (\bar{z}/z) f_S(z^{-1}), \quad g_N(z) \equiv (z/\bar{z}) g_S(z^{-1}). \quad (4.14)$$

Al comparar estas reglas de transformación con las fórmulas generales (4.5), se concluye que

$$\mathcal{A}^1(\mathbb{S}^2) \simeq \mathcal{E}_{(2)} \oplus \mathcal{E}_{(-2)}.$$

La equivalencia categórica dada por el teorema de Serre y Swan permite concluir que el fibrado cotangente complexificado es una suma de Whitney de fibrados de línea, $(T^*\mathbb{S}^2)^{\mathbb{C}} \simeq L^2 \oplus L^{-2}$, y como tal, este fibrado de rango 2 sobre la esfera no es trivial.²⁵

Ejercicio 4.15. Obtener las reglas de transformación para los campos vectoriales complejas

$$X = h_N(z) q \partial_z + k_N(z) q \bar{\partial}_z = -h_S(\zeta) q \partial_\zeta - h_S(\zeta) q \bar{\partial}_\zeta$$

sobre $U_N \cap U_S$; concluir que $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2) \simeq \mathcal{E}_{(-2)} \oplus \mathcal{E}_{(2)}$ como $C^\infty(\mathbb{S}^2)$ -módulos.²⁶

4.3 El operador de Dirac para la esfera \mathbb{S}^2

Las derivadas covariantes de campos vectoriales y 1-formas, dadas explícitamente por las fórmulas (4.13), no son suficientes para crear un cálculo diferencial sobre los espinores en $\mathcal{S} \simeq \mathcal{E}_{(1)} \oplus \mathcal{E}_{(-1)}$, porque estos sumandos no aparecen como submódulos de $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ ni de $\mathcal{A}^1(\mathbb{S}^2)$. Para derivar espinores, hace falta introducir un ingrediente nuevo.

²⁵El lector astuto habrá notado que no hemos definido explícitamente el fibrado cotangente sobre una variedad. Para los efectos de la geometría no conmutativa, ya no es necesario hacerlo: las 1-formas, locales y globales, contienen toda la información pertinente.

²⁶El isomorfismo $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2) \simeq \mathcal{A}^1(\mathbb{S}^2)$ dado por este ejercicio coincide con el isomorfismo musical $X \mapsto X^\flat$, con inverso $\alpha \mapsto \alpha^\sharp$: fíjese en los signos en la fórmulas (4.9).

Definición 4.16. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n y sea d una forma bilineal simétrica no degenerada²⁷ sobre V . El **álgebra de Clifford** $\mathcal{Cl}(V, d)$ es el álgebra real generada por elementos $\{c(v) : v \in V\}$ tal que $v \mapsto c(v)$ es lineal, sujeta a las relaciones

$$c(u)c(v) + c(v)c(u) = 2d(u, v)1, \quad \text{para todo } u, v \in V. \quad (4.15)$$

En particular, cada $c(u)^2 = d(u, u)1$ es un *escalar* (esto es, un múltiplo de la identidad 1 del álgebra).

Sobre la complexificación $V^{\mathbb{C}} = V \oplus iV$ se define $\mathcal{Cl}(V) := \mathcal{Cl}(V^{\mathbb{C}}, d)$, generado por $\{c(u + iv) = c(u) + ic(v) : u, v \in V\}$. Este es un *álgebra de Clifford compleja*.

Hay varias maneras de mostrar la existencia y la unicidad (hasta isomorfismo) del álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(V, d)$. Por ahora, la siguiente construcción será suficiente.²⁸ Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal²⁹ de V , cuyos elementos satisfacen $d(e_i, e_j) = 0$ para $i \neq j$ y $d(e_j, e_j) = \pm 1$ para todo j . En vista de (4.15), los productos $c(e_{i_1})c(e_{i_2})\dots c(e_{i_k})$, con $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, junto con la identidad 1 (para el caso trivial $k = 0$), forman una base lineal para $\mathcal{Cl}(V, d)$. Entonces

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{Cl}(V, d) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Cl}(V) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

El álgebra compleja $\mathcal{Cl}(V)$ es un *álgebra involutiva*, al definir $c(w)^* := c(\bar{w})$ para $w = u + iv \in V^{\mathbb{C}}$, con $\bar{w} := u - iv$. Entonces $(c(w)c(z))^* = c(\bar{z})c(\bar{w})$, etcétera.

²⁷Dícese que una forma bilineal d es *no degenerada* si la condición “ $d(u, v) = 0$ para todo u ” implica $v = 0$. Una forma definida positiva (o negativa) es no degenerada, obviamente. Por un teorema de Sylvester, cualquier forma bilineal simétrica real puede ser expresada, con respecto a una base apropiada, como $d(u, v) = u_1v_1 + \dots + u_rv_r - u_{r+1}v_{r+1} - \dots - u_{r+s}v_{r+s}$; esta forma es no degenerada si y sólo si $r + s = n$. Al entero $r - s$ se la llama la *signatura* de d .

²⁸La clasificación de las álgebras de Clifford reales y complejas viene de artículo seminal: Michael F. Atiyah, Raoul Bott y Arnold Shapiro, “Clifford modules”, *Topology* **3** (1964), 3–38. Hay varias exposiciones detalladas; véase, por ejemplo, el capítulo 5 de E-NCG, o bien el primer capítulo de: H. Blaine Lawson and Marie-Louise Michelsohn, *Spin Geometry*, (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989).

²⁹Si d es definida positiva, entonces $d(e_j, e_j) = +1$ para cada j . Si la signatura de d es $r - s$, con $r + s = n$, habrá r casos de $d(e_j, e_j) = +1$ y s casos de $d(e_j, e_j) = -1$. En el caso complejo, se puede tomar todos los signos positivos, al sustituir $e_k \mapsto ie_k$ si fuera $d(e_k, e_k) = -1$. La signatura es un invariante hasta isomorfismo sólo en el caso real.

El **elemento quiral** $\chi \in \mathbb{C}\ell(V)$ se define por³⁰

$$\chi := (-i)^m c(e_1)c(e_2)\dots c(e_n) \quad \text{para} \quad \begin{cases} n = 2m, & \text{ó} \\ n = 2m + 1. \end{cases} \quad (4.16)$$

Las propiedades esenciales de este elemento son:

$$\chi^* = \chi, \quad \chi^2 = 1, \quad \chi c(v) = (-1)^{n-1} c(v) \chi \quad \text{para} \quad v \in V.$$

En una representación matricial, χ corresponde a una matriz hermítica con autovalores ± 1 . Cuando n es *impar*, χ es *central*, es decir, conmuta con todos los elementos del álgebra, sin ser un escalar. Cuando n es *par*, χ *anticonmuta* con todos los generadores del álgebra (pero sí conmuta con el producto de un número par de generadores).³¹

► En el caso concreto que nos interesa, tómesese $V = \mathbb{R}^2$, con base ortonormal $\{e_1, e_2\}$. Los generadores correspondientes son las primeras dos matrices de Pauli:

$$c(e_1) := \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c(e_2) := \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

y el elemento quiral es la tercera matriz de Pauli (4.3):

$$\chi := -i\sigma_1\sigma_2 = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$, conviene introducir combinaciones complejas de los generadores:

$$\sigma^+ := \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- := \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fíjese que $\chi\sigma^\pm = \pm\sigma^\pm$ pero $\sigma^\pm\chi = \mp\sigma^\pm$.

³⁰Un cambio de base ortonormal de V se efectúa por $e_i \mapsto Ae_i$ donde A es una matriz ortogonal. La expresión (4.16) cambia mediante $\chi \mapsto (\det A)\chi = \pm\chi$. Luego, la fórmula que define χ es independiente de la base ortonormal, si se conserva su *orientación* al demandar $\det A = +1$.

³¹Las representaciones de $\mathbb{C}\ell(V)$ forman un subcapítulo interesante de álgebra. Para $n = 2m$, par, resulta que el álgebra $\mathbb{C}\ell(V)$ es *simple*, con $\mathbb{C}\ell(V) \simeq M_N(\mathbb{C})$ donde $N = 2^m$. Para $n = 2m + 1$, impar, se obtiene $\mathbb{C}\ell(V) \simeq M_N(\mathbb{C}) \oplus M_N(\mathbb{C})$ con $N = 2^m$. En ambos casos, se identifica χ con una matriz de bloques $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Véase, por ejemplo: Barry Simon, *Representations of Finite and Compact Groups* (American Mathematical Society, Providence, RI, 1996).

Ejercicio 4.17. Mostrar que las siguientes tres matrices 4×4 generan el álgebra de Clifford compleja $\mathbb{C}\ell(\mathbb{C}^3)$. Identificar el elemento quiral correspondiente:

$$\gamma_1 := \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 := \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 := \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Sobre una variedad compacta M , esta estructura puede replicarse en cada espacio tangente $T_x M$, donde la métrica g induce una forma bilineal simétrica g_x ; o alternativamente en cada espacio cotangente $T_x^* M$, donde g^{-1} induce una forma bilineal simétrica g_x^{-1} . De esta manera, es posible construir un fibrado vectorial cuyas fibras son las álgebras involutivas $\mathbb{C}\ell(T_x^* M)$.

Sin embargo, es preferible trabajar directamente con las secciones del fibrado de álgebras $\mathbb{C}\ell(T^* M) \rightarrow M$, mediante la definición que sigue.

Definición 4.18. Dada una variedad compacta M con una métrica riemanniana g , una **acción de Clifford** de las 1-formas $\mathcal{A}^1(M)$ es una familia de operadores $c(\alpha)$, parametrizada por $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$, tal que $\alpha \mapsto c(\alpha)$ sea $C^\infty(M)$ -lineal y que satisfice las siguientes *relaciones de anticonmutación*:

$$c(\alpha)c(\beta) + c(\beta)c(\alpha) = 2g^{-1}(\alpha, \beta)1, \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in \mathcal{A}^1(M). \quad (4.17)$$

Dichos operadores deben preservar un $C^\infty(M)$ -módulo \mathcal{S} , esto es,

$$c(\alpha) : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, \quad \text{para } \alpha \in \mathcal{A}^1(M).$$

El módulo \mathcal{S} , si existe, será llamado un *módulo espinorial* para el par (M, g) . Antes de discutir el caso general, conviene examinar el ejemplo de la esfera \mathbb{S}^2 , donde el módulo espinorial ya ha sido definido.

Lema 4.19. En el caso $M = \mathbb{S}^2$, las relaciones (4.17) están satisfechos sobre U_N por una familia de matrices $c(\alpha) \in M_2(C^\infty(U_N))$, donde $\alpha \mapsto c(\alpha)$ es $C^\infty(U_N)$ -lineal, determinados por las dos fórmulas siguientes:

$$c(q^{-1} dz) := \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c(q^{-1} d\bar{z}) := \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Si $\alpha = f_N(z)q^{-1} dz + g_N(z)q^{-1} d\bar{z}$ en $\mathcal{A}^1(U_N)$, es inmediato que $c(\alpha) = f_N(z)c(q^{-1} dz) + g_N(z)c(q^{-1} d\bar{z})$. Como la expresión $g^{-1}(\alpha, \beta)$ es bilineal en α y β para el anillo de coeficientes $C^\infty(U_N)$, basta examinar las 1-formas básicas $q^{-1} dz$ y $q^{-1} d\bar{z}$.

Por las relaciones (4.9) y la ortonormalidad de $\{\vartheta^1, \vartheta^2\}$, se obtiene

$$g^{-1}(q^{-1} dz, q^{-1} dz) = g^{-1}(q^{-1} d\bar{z}, q^{-1} d\bar{z}) = 0, \quad 2g^{-1}(q^{-1} dz, q^{-1} d\bar{z}) = 1.$$

Por otro lado, las matrices σ^+ y σ^- cumplen las relaciones

$$(\sigma^+)^2 = (\sigma^-)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^+ \sigma^- + \sigma^- \sigma^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces las relaciones (4.17) quedan satisfechas para $\alpha, \beta = q^{-1} dz$ ó $q^{-1} d\bar{z}$, como había que mostrar. \square

La demostración del lema anterior aprovecha que el módulo $\mathcal{A}^1(U_N)$ es libre sobre $C^\infty(U_N)$. Sobre el abierto U_S , se obtienen relaciones análogas. Mediante las transformaciones de gauge (4.14), se comprueba la compatibilidad de las fórmulas para $c(\alpha)$ en las dos cartas, de modo que $c(\alpha) \in M_2(C^\infty(\mathbb{S}^2))$ para $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathbb{S}^2)$. Dicho de otro modo, la fórmula

$$c(f_N(z) q^{-1} dz + g_N(z) q^{-1} d\bar{z}) := \begin{pmatrix} 0 & f_N(z) \\ g_N(z) & 0 \end{pmatrix}$$

determina $\alpha \mapsto c(\alpha)$ globalmente sobre \mathbb{S}^2 .

Lema 4.20. *El módulo espinorial $\mathcal{S} = \mathcal{S}^+ \oplus \mathcal{S}^-$ es un bimódulo para la acción a la derecha del álgebra $C^\infty(\mathbb{S}^2)$ y para la acción a la izquierda del álgebra \mathcal{B} generado por $\{c(\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}^1(\mathbb{S}^2)\}$.*

Demostración. Por la Definición 4.8, un espinor $\psi \in \mathcal{S}$ se escribe como una matriz 2×1 de la forma $\psi = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix}$ cuyas funciones coeficientes cumplen (4.6). El álgebra $C^\infty(\mathbb{S}^2)$ actúa a la derecha, al multiplicar ψ^+ y ψ^- para la misma función suave. El álgebra \mathcal{B} , cuyos elementos son matrices 2×2 , actúa a la izquierda mediante el producto de matrices.

Si $\alpha = f_N(z) q^{-1} dz + g_N(z) q^{-1} d\bar{z}$, entonces

$$c(\alpha) \psi = \begin{pmatrix} 0 & f_N(z) \\ g_N(z) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_N^+(z) \\ \psi_N^-(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_N(z) \psi_N^-(z) \\ g_N(z) \psi_N^+(z) \end{pmatrix},$$

y las reglas de transformación (4.6) y (4.14) muestran que el lado derecho es también un elemento de \mathcal{S} :

$$f_N(z) \psi_N^-(z) = \sqrt{\bar{z}/z} f_S(z^{-1}) \psi_S^-(z^{-1}), \quad g_N(z) \psi_N^+(z) = \sqrt{z/\bar{z}} g_S(z^{-1}) \psi_S^+(z^{-1}).$$

Es claro que las acciones de \mathcal{B} y de $C^\infty(\mathbb{S}^2)$ conmutan. \square

► Hay dos estrategias posibles para establecer la existencia de la familia de operadores $c(\alpha)$ en general, para una variedad compacta M con métrica g . Una de ellas es trabajar fibra por fibra, mostrando que $\mathbb{C}\ell(T_x^*M) \simeq \mathcal{L}(S_x)$, donde los S_x son las fibras de un fibrado espinorial $S \rightarrow M$. (Habrá que tener cuidado con las dependencias suaves del punto x y con los cambios de cartas locales.) La otra estrategia es considerar el álgebra $\mathcal{B} = \Gamma(M, \mathbb{C}\ell(T^*M))$ generado por unos $c(\alpha)$ que cumplen (4.17) *in abstracto*, establecer su existencia como subálgebra densa de una cierta C^* - lgebra, y buscar un *bimódulo* \mathcal{S} para las álgebras \mathcal{B} y \mathcal{A} . El teorema de Serre y Swan, posteriormente, permitirá identificar \mathcal{S} como las secciones suaves de cierto fibrado vectorial: $\mathcal{S} = \Gamma(M, S)$.

Hay un *teorema de Plymen* que ejecuta la segunda estrategia.³² Dada una variedad compacta M con métrica riemanniana g , siempre es posible construir un álgebra \mathcal{B} ,  nico hasta isomorfismo cuando $n = \dim M$ es par, cuyos generadores $c(\alpha)$ satisfacen (4.17). La búsqueda de un \mathcal{B} - \mathcal{A} -bimódulo \mathcal{S} , sin embargo, no siempre es posible: hay una “obstrucción” topológica en general.³³ Las variedades para las cuales \mathcal{S} existe se llaman **variedades de espín**; \mathcal{S} se llama su *módulo espinorial*; al poner $\mathcal{S} = \Gamma(M, S)$, el fibrado $S \rightarrow M$ se llama su *fibrado espinorial*, cuyo rango es 2^m . Cuando hay al menos una solución, puede haber varias soluciones inequivalentes: se habla de un surtido de “estructuras de espín” sobre M .

En el caso de la esfera \mathbb{S}^2 , que resulta ser una variedad de espín con estructura de espín única, el Lema 4.20 exhibe la solución explícitamente.

Definición 4.21. Sea M una variedad de espín compacta con métrica riemanniana g y sea ∇ la *conexión de Levi-Civita* sobre las 1-formas, $\nabla_X : \mathcal{A}^1(M) \rightarrow \mathcal{A}^1(M)$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Sea $\mathcal{S} = \Gamma(M, S)$ un módulo espinorial para (M, g) , es decir, un \mathcal{B} - \mathcal{A} -bimódulo donde $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ y \mathcal{B} es el álgebra generado por una acción de Clifford $\{c(\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}^1(M)\}$ sobre \mathcal{S} .

³²El trabajo original es: Roger J. Plymen, “Strong Morita equivalence, spinors and symplectic spinors”, *Journal of Operator Theory* **16** (1986), 305–324. Es un resultado fundamental de la geometría no conmutativa. Para una exposición, véase el Capítulo 9 de E–NCG.

³³Para que haya un fibrado espinorial S , se requiere que la llamada *clase de Dixmier y Douady* $\delta(M) \in H^3(M, \mathbb{Z})$ se anule. En el caso contrario, las versiones locales (triviales) del fibrado espinorial no se pueden compaginar para formar un fibrado globalmente bien definido. Si $\delta(M) = 0$, se dice que M posee una estructura de esp n^c. Luego, hay una obstrucción secundaria, la anulación de la llamada *clase de Stiefel y Whitney* $w(M) \in H^2(M, \mathbb{Z}/2)$, para que el fibrado espinorial tenga una versión real. Si $w(M) = 0$ también, se dice que M posee una estructura de espín. Estos grupos de cohomología también sirven para parametrizar las diversas estructuras de espín que pueden existir sobre M . Véase el capítulo 9 de E–NCG y también el libro de Lawson y Michelsohn, *op. cit.*

La **conexión de espín** para \mathcal{S} es la familia ∇^S de operadores \mathbb{C} -lineales

$$\nabla_X^S : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{X}(M),$$

que es $C^\infty(M)$ -lineal en X y que cumple las *dos reglas de Leibniz* siguientes:³⁴

$$\nabla_X^S(\psi f) = (\nabla_X^S \psi) f + \psi X(f), \quad (4.18a)$$

$$\nabla_X^S(c(\alpha)\psi) = c(\nabla_X \alpha)\psi + c(\alpha)\nabla_X^S \psi, \quad (4.18b)$$

para $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\psi \in \mathcal{S}$, $f \in C^\infty(M)$ y $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$. La primera regla dice que ∇^S es una conexión; la segunda es su compatibilidad con la acción de Clifford de $\mathcal{A}^1(M)$.

Ejemplo 4.22. Para el caso de la esfera \mathbb{S}^2 , hay que exhibir los operadores diferenciales ∇_X^S en la carta local (U_N, φ_N) . Una vez más, podemos considerar $\psi \in \mathcal{S}$, restringido a U_N , como una columna de dos funciones suaves. Los siguientes operadores definen la conexión de espín:

$$\nabla_{q\partial_z}^S = q\partial_z + \frac{1}{2}\bar{z}\chi, \quad \nabla_{q\bar{\partial}_z}^S = q\bar{\partial}_z - \frac{1}{2}z\chi. \quad (4.19)$$

Para comprobarlo, se puede calcular los casos básicos uno por uno, usando el formulario (4.13b). Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \nabla_{q\partial_z}^S(c(q^{-1}dz)\psi) &= q\partial_z(\sigma^+\psi) + \frac{1}{2}\bar{z}\chi\sigma^+\psi = q\partial_z(\sigma^+\psi) + \frac{1}{2}\bar{z}\sigma^+\psi \\ &= \bar{z}\sigma^+\psi + q\partial_z\sigma^+\psi - \frac{1}{2}\bar{z}\sigma^+\psi \\ &= \bar{z}\sigma^+\psi + \sigma^+(q\partial_z\psi + \frac{1}{2}\bar{z}\chi\psi) \\ &= c(\bar{z}q^{-1}dz)\psi + c(q^{-1}dz)\nabla_{q\partial_z}^S\psi \\ &= c(\nabla_{q\partial_z}(q^{-1}dz))\psi + c(q^{-1}dz)\nabla_{q\partial_z}^S\psi, \end{aligned}$$

donde también se ha usado las identidades $\chi\sigma^+ = \sigma^+$ y $\sigma^+\chi = -\sigma^+$. Dejamos los demás casos al lector. \diamond

Ejercicio 4.23. Usar las fórmulas (4.6) para comprobar que los operadores diferenciales (4.19) preservan \mathcal{S} , es decir, que los componentes $q\partial_z\psi_N^+(z) + \frac{1}{2}\bar{z}\psi_N^+(z)$, $q\partial_z\psi_N^-(z) - \frac{1}{2}\bar{z}\psi_N^-(z)$ de $\nabla_{q\partial_z}^S\psi$ obedecen la regla de transformación (4.6); y similarmente para los componentes de $\nabla_{q\bar{\partial}_z}^S\psi$.

³⁴Se omite una prueba de la existencia y unicidad de esta conexión de espín. Los cálculos que siguen para la esfera \mathbb{S}^2 sirven para indicar la estructura de esa prueba. En el próximo capítulo aparecerá una fórmula más general para ∇^S .

Definición 4.24. Sea M una variedad de espín compacta con métrica riemanniana g , módulo espinorial \mathcal{S} y conexión de espín $\nabla^{\mathcal{S}}$ sobre \mathcal{S} . El **operador de Dirac** \mathcal{D} es el operador lineal sobre \mathcal{S} dado por:³⁵

$$\mathcal{D} := -ic(dx^j)\nabla_{\partial_j}^{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}. \quad (4.20a)$$

(Hay una sumatoria implícita sobre j , por el convenio de Einstein; el factor $-i$ garantiza autovalores reales para \mathcal{D} .)³⁶

Esta es una expresión en coordenadas locales, al parecer. Sin embargo, como $\alpha \mapsto c(\alpha)$ y $X \mapsto \nabla_X^{\mathcal{S}}$ son $C^\infty(M)$ -lineales, cualquier cambio de coordenadas locales induce jacobianos inversos $\partial_j \mapsto h_j^k \partial_k$ y $dx^r \mapsto f_s^r dx^s$, con $[f_s^r] = [h_j^k]^{-1}$, de modo que se recupera la expresión análoga en las nuevas coordenadas. En particular, esta observación se aplica a las funciones de transición donde dos cartas locales traslapan: la fórmula (4.20) da un operador globalmente bien definido.

Igualmente, se puede cambiar las bases locales $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ y $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ para $\mathfrak{X}(M)$ y $\mathcal{A}^1(M)$ en bases *ortonormales* locales $\{E_1, \dots, E_n\}$ y $\{\vartheta^1, \dots, \vartheta^n\}$, mutuamente duales. En este caso, la fórmula (4.20a) se convierte en

$$\mathcal{D} = -ic(\vartheta^\alpha)\nabla_{E_\alpha}^{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}. \quad (4.20b)$$

Ejemplo 4.25. Considérese el caso del *círculo*, $M = \mathbb{S}^1$. Este es un grupo multiplicativo: tiene un cubrimiento por abiertos que son traslaciones (alrededor del círculo) de un vecindario de 1. Concretamente, se puede tomar $\mathbb{S}^1 = U \cup V$, donde

$$U := \{e^{i\theta} : -\pi < \theta < \pi\} = \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}, \quad V := \{e^{i\theta} : 0 < \theta < 2\pi\} = \mathbb{S}^1 \setminus \{+1\}.$$

En los dos casos, $d/d\theta$ es un campo vectorial local; de hecho, este es un *campo vectorial global* porque las dos versiones coinciden sobre $U \cap V$. Por lo tanto, $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^1) = \{f(e^{i\theta})d/d\theta : f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)\}$ es un módulo libre³⁷ de rango uno sobre $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, con base $\{d/d\theta\}$.

³⁵En breve, se extenderá como un operador autoadjunto (no acotado) sobre un espacio de Hilbert que incluye \mathcal{S} como subespacio denso. Esta versión extendida es lo que se entiende comúnmente como el “operador de Dirac”. Sin embargo, las propiedades algebraicas de \mathcal{D} son determinadas por su acción sobre \mathcal{S} ; conviene empezar ahí.

³⁶La notación \mathcal{D} , una letra D rayada, sigue una costumbre iniciado por Feynman. Los físicos escriben la fórmula (4.20a) como $\mathcal{D} = -i\gamma^\mu \nabla_\mu^{\mathcal{S}}$ donde los “matrices gamma” $\gamma^\mu = c(\vartheta^\mu)$ son generadores del álgebra de Clifford. También usan otras abreviaturas como $\not{p} := \gamma^\mu p_\mu$ para la acción del cuadvivector de momento, etcétera.

³⁷En consecuencia, el fibrado tangente $T\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\mathbb{R}} \mathbb{S}^1$ es trivial. Desde luego, es fácil probar que $T\mathbb{S}^1 \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ por los métodos convencionales de la geometría diferencial.

De igual manera, la diferencial $d\theta$ es una 1-forma global, porque sus dos versiones en U y V coinciden sobre $U \cap V$. Luego $\mathcal{A}^1(\mathbb{S}^1) = \{h(e^{i\theta})d\theta : h \in C^\infty(\mathbb{S}^1)\}$ es otro módulo libre de rango uno sobre $C^\infty(\mathbb{S}^1)$. Para definir una métrica riemanniana g sobre \mathbb{S}^1 , sólo hay que declarar que

$$g(d/d\theta, d/d\theta) = 1, \quad g^{-1}(d\theta, d\theta) = 1.$$

Como módulo espinorial, tómesese $\mathcal{S} := C^\infty(\mathbb{S}^1)$, trivial de rango uno.³⁸ La acción espinorial también es trivial; hay que tomar $c(d\theta) := 1$. La conexión de espín queda determinada por $\nabla_{d/d\theta}^{\mathcal{S}} := d/d\theta$.

Como resultado, el operador de Dirac es simplemente $\not{D} := -id/d\theta$, definido en primera instancia sobre $C^\infty(\mathbb{S}^1)$. Los autovalores y autovectores de este operador han sido discutidos en la sección 3.3. \diamond

El caso de \mathbb{S}^2 es menos trivial, porque los módulos $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$, $\mathcal{A}^1(\mathbb{S}^2)$ y \mathcal{S} no son libres. Aquí se puede usar además las combinaciones lineales (4.9) de E_1, E_2 y ϑ^1, ϑ^2 para obtener

$$\begin{aligned} \not{D} &= -ic(q^{-1}dz) \nabla_{q\partial_z}^{\mathcal{S}} - ic(q^{-1}d\bar{z}) \nabla_{q\bar{\partial}_z}^{\mathcal{S}} \\ &= -ic(q'^{-1}d\zeta) \nabla_{q'\partial_\zeta}^{\mathcal{S}} - ic(q'^{-1}d\bar{\zeta}) \nabla_{q'\bar{\partial}_\zeta}^{\mathcal{S}}. \end{aligned}$$

La primera de estas expresiones es

$$\begin{aligned} \not{D} &= -i\sigma^+ \nabla_{q\partial_z}^{\mathcal{S}} - i\sigma^- \nabla_{q\bar{\partial}_z}^{\mathcal{S}} \\ &= -i\sigma^+ (q\partial_z + \frac{1}{2}\bar{z}\chi) - i\sigma^- (q\bar{\partial}_z - \frac{1}{2}z\chi) \\ &= -i(q\partial_z - \frac{1}{2}\bar{z})\sigma^+ - i(q\bar{\partial}_z - \frac{1}{2}z)\sigma^- \\ &= -i \begin{pmatrix} 0 & q\partial_z - \frac{1}{2}\bar{z} \\ q\bar{\partial}_z - \frac{1}{2}z & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observación. Hay una notación cómoda para las dos operadores diferenciales que aparecen en la última matriz:³⁹

$$\bar{\partial}_z := q\partial_z - \frac{1}{2}\bar{z}, \quad \bar{\bar{\partial}}_z := q\bar{\partial}_z - \frac{1}{2}z. \quad (4.21)$$

³⁸Hay que advertir que este no es la única posibilidad para el módulo espinorial \mathcal{S} sobre \mathbb{S}^1 . La otra alternativa es tomar las secciones de una cinta infinita de Möbius.

³⁹La letra $\bar{\partial}$ (pron. *eth*) fue una variante de la letra ‘d’ en el viejo abecedario anglosajón; se usa hoy sólo en el islandés y en el faroés. Fue introducido para representar los componentes de este operador de Dirac sobre \mathbb{S}^2 en: Edward T. Newman y Roger Penrose, “Note on the Bondi–Metzner–Sachs group”, *Journal of Mathematical Physics* **7** (1966), 863–870.

Aquí los términos q , $\frac{1}{2}\bar{z}$, $\frac{1}{2}z$ son *operadores de multiplicación* sobre $C^\infty(\mathbb{S}^2)$ y por ende *no conmutan* con el operador diferencial ∂_z . Es fácil comprobar que

$$q\partial_z - \frac{1}{2}\bar{z} = q^{3/2} \circ \partial_z \circ q^{-1/2}$$

donde el lado derecho es la composición de tres operadores sobre $C^\infty(\mathbb{S}^2)$. Con esta notación, la expresión local del operador de Dirac sobre U_N es

$$\mathcal{D} = -i \begin{pmatrix} 0 & \bar{\partial}_z \\ \bar{\partial}_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Vale la pena calcular el cuadrado de \mathcal{D} . Se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2 &= \begin{pmatrix} -\bar{\partial}_z \bar{\partial}_z & 0 \\ 0 & -\bar{\partial}_z \bar{\partial}_z \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} q\partial_z q \bar{\partial}_z & 0 \\ 0 & q \bar{\partial}_z q \partial_z \end{pmatrix} + \frac{1}{2}q(z\partial_z + \bar{z}\bar{\partial}_z + 1) - \frac{1}{4}z\bar{z} \\ &= -q^2 \partial_z \bar{\partial}_z + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z\bar{z} + \frac{1}{2}q(z\partial_z - \bar{z}\bar{\partial}_z) \chi \end{aligned}$$

el cual es un operador diagonal (en términos de la expresión matricial 2×2). Sus dos componentes diagonales son operadores diferenciales de segundo orden; en adelante se verá que todos los autovalores de \mathcal{D}^2 son positivos.

4.4 El espectro del operador de Dirac

Ya es hora de considerar *espacios de Hilbert* asociados con la esfera. Es posible completar $C(\mathbb{S}^2)$ con respecto a una norma conveniente, tal como ya se hizo para \mathbb{S}^1 . Hay que introducir, entonces, una integral sobre la esfera y definir un producto escalar de funciones. Si $f, h \in C(\mathbb{S}^2)$ se expresan en coordenadas esféricas, es tradicional definir

$$\langle f | h \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \overline{f(\theta, \phi)} h(\theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi.$$

La forma de área $\omega = \sin \theta \, d\theta \wedge d\phi$ es invariante bajo rotaciones.⁴⁰ En vista de (4.2), también es posible escribir

$$\langle f | h \rangle = 2i \iint_{\mathbb{C}} \overline{f(z)} h(z) q^{-2} \, dz \, d\bar{z} = 2i \iint_{\mathbb{C}} \overline{f(\zeta)} h(\zeta) q'^{-2} \, d\zeta \, d\bar{\zeta}, \quad (4.23)$$

⁴⁰Una **rotación** de la esfera es una transformación $(\theta, \phi) \mapsto (\theta', \phi')$ de la esfera que (a) es *isométrica*, en el sentido de preservar la distancia geodésica entre pares de puntos; y (b) es *orientada*, es decir, tiene jacobiano positivo. Las rotaciones forman un grupo de Lie, denominado $SO(3)$; resulta que $\sin \theta' \, d\theta' \wedge d\phi' = \sin \theta \, d\theta \wedge d\phi$ para cualquier rotación. Es tradicional omitir el símbolo \wedge en la cola de integración $\sin \theta \, d\theta \, d\phi$ al calcular integrales con respecto a esta área.

para $f, h \in C(\mathbb{S}^2)$, si se quiere parametrizar estas dos funciones por las coordenadas locales de U_N o bien de U_S .

La completación de $C(\mathbb{S}^2)$ en la norma $\|\cdot\|_2$ asociada a este producto escalar se llama $L^2(\mathbb{S}^2, \omega)$; este es un espacio de Hilbert.⁴¹

► Una base ortonormal de este espacio de Hilbert emerge de las soluciones polinomiales de la *ecuación de Laplace* en \mathbb{R}^3 :

$$\Delta f = 0, \quad \text{donde} \quad \Delta \equiv -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Se dice que $f(x_1, x_2, x_3)$ es una *función armónica sólida* si $\Delta f = 0$. Hay soluciones que son *polinomios homogéneos* de grado $l \in \mathbb{N}$,

$$H_l(x_1, x_2, x_3) = \sum_{m+n+p=l} c_{mnp} x_1^m x_2^n x_3^p,$$

y estas soluciones forman un espacio \mathbb{C} -vectorial⁴² de dimensión $2l + 1$. Se obtienen funciones bien definidas sobre \mathbb{S}^2 al dividir estos polinomios armónicos H_l por el factor de escala r^l , donde $r^2 := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Las funciones resultantes $Y_l := r^{-l} H_l$ satisfacen la ecuación de Laplace modificada:

$$\Delta Y_l - \frac{l(l+1)}{r^2} Y_l = 0.$$

El operador diferencial $-i\partial/\partial\phi$ conmuta con Δ y sus autovalores m en este espacio de polinomios cumplen $|m| \leq l$. Esto indica que las habrá $2l + 1$ soluciones independientes de la ecuación anterior de la forma $Y_{lm}(\theta, \phi) = e^{im\phi} b_{lm}(\theta)$.

Definición 4.26. Los **armónicos esféricos** $\{Y_{lm} : l \in \mathbb{N}; m = -l, \dots, l\}$ son las funciones continuas sobre \mathbb{S}^2 definidos, en términos de coordenadas esféricas, por

$$Y_{lm}(\theta, \phi) := \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta)$$

donde las

$$P_l^m(\cos\theta) = \frac{(-1)^{l+m}}{2^l l!} \sin^m \theta \frac{d^{l+m}}{d(\cos\theta)^{l+m}} \sin^{2l} \theta$$

⁴¹De nuevo, se toma el espacio $\mathcal{L}^2(\mathbb{S}^2, \omega)$ de funciones de cuadrado integrable con respecto a la forma de área ω ; y se identifican dos funciones f, h si $\|f - h\|_2 = 0$. Cada clase de equivalencia contiene a lo sumo una función continua, así que la inclusión $C(\mathbb{S}^2) \hookrightarrow L^2(\mathbb{S}^2, \omega)$ está bien definida.

⁴²Este es un simple ejercicio de conteo: hay $\binom{l+2}{2}$ maneras de elegir los exponentes m, n, p ; el polinomio ΔH_l es de grado $l - 2$, así que $\Delta H_l = 0$ da $\binom{l}{2}$ ecuaciones lineales para los coeficientes c_{mnp} ; el número de soluciones independientes de dichas ecuaciones es $\binom{l+2}{2} - \binom{l}{2} = 2l + 1$.

son las llamadas *funciones asociadas de Legendre*.⁴³ Con la normalización dada, los Y_{lm} forman una base ortonormal de $L^2(\mathbb{S}^2, \omega)$.

Ejercicio 4.27. Comprobar que los armónicos esféricos tiene la siguiente forma en las coordenadas locales (z, \bar{z}) de la carta (U_N, φ_N) :

$$Y_{lm}(z) = c_{lm} q^{-l} \sum_{s=r=m}^l \binom{l}{r} \binom{l}{s} z^r (-\bar{z})^s, \quad \text{con} \quad (4.24a)$$

$$c_{lm} = (-1)^{l-m} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{\sqrt{(l+m)!(l-m)!}}{l!}. \quad (4.24b)$$

► Resulta, sin embargo, que $L^2(\mathbb{S}^2, \omega)$ no es el espacio de Hilbert “correcto” para nuestros propósitos. Hay que tomar una compleción, no del álgebra de funciones $C(\mathbb{S}^2)$, sino del módulo $\mathcal{S} = \mathcal{S}^+ \oplus \mathcal{S}^-$ de los espinores.

Lema 4.28. *Los operadores $\bar{\partial}$ y $\bar{\partial}^*$ de (4.21) son formalmente antiadjuntos; es decir, para cada par de espinores $\psi, \varphi \in \mathcal{S}$, se cumple*

$$\langle \varphi^+ | \bar{\partial}_z \psi^- \rangle = -\langle \bar{\partial}_z \varphi^+ | \psi^- \rangle \quad (4.25)$$

con respecto al producto escalar (4.23).

Demostración. La fórmula emplea productos escalares de elementos de \mathcal{S}^\pm , identificadas con funciones sobre $\varphi_N(U_N) = \mathbb{C}$. De la expresión $\bar{\partial}_z = q \partial_z - \frac{1}{2} \bar{z}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \varphi^+ | \bar{\partial}_z \psi^- \rangle &= \int_{\mathbb{C}} \overline{\varphi^+(z)} \bar{\partial}_z \psi^-(z) q^{-2} dz d\bar{z} \\ &= \int_{\mathbb{C}} \overline{\varphi^+(z)} \partial_z \psi^-(z) q^{-1} dz d\bar{z} - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{C}} \overline{\varphi^+(z)} \bar{z} \psi^-(z) q^{-2} dz d\bar{z} \\ &= - \int_{\mathbb{C}} \partial_z (q^{-1} \overline{\varphi^+(z)}) \psi^-(z) dz d\bar{z} - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{C}} \overline{\varphi^+(z)} \bar{z} \psi^-(z) q^{-2} dz d\bar{z} \\ &= - \int_{\mathbb{C}} q^{-1} \partial_z (\overline{\varphi^+(z)}) \psi^-(z) dz d\bar{z} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{C}} \overline{\varphi^+(z)} \bar{z} \psi^-(z) q^{-2} dz d\bar{z} \\ &= - \int_{\mathbb{C}} q^{-1} \overline{\partial_z \varphi^+(z)} \psi^-(z) dz d\bar{z} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{C}} \overline{z \varphi^+(z)} \psi^-(z) q^{-2} dz d\bar{z} \\ &= - \int_{\mathbb{C}} q^{-2} \overline{\partial_z \varphi^+(z)} \psi^-(z) dz d\bar{z} = -\langle \bar{\partial}_z \varphi^+ | \psi^- \rangle, \end{aligned}$$

⁴³La bibliografía sobre los armónicos esféricos es amplio y vasto. Recomendamos, para la notación tradicional y un buen catálogo de resultados, el libro: Nikolai N. Lebedev, *Special Functions and their Applications* (Dover, New York, 1972). Para un tratamiento moderno sin prerrequisitos, véase: Miguel Pérez Saborid, “The coordinate-free approach to spherical harmonics”, preprint, Sevilla, 2008, arXiv:0806.3367.

donde la segunda igualdad es integración por partes, la tercera viene de $-\partial_z(q^{-1}) = q^{-2}\partial_z(q) = \bar{z}q^{-2}$ puesto que $q = 1 + z\bar{z}$. Esta $\bar{z}q^{-2}$ se combina con $-\frac{1}{2}\bar{z}q^{-2}$ del segundo término para producir $+\frac{1}{2}\bar{z}q^{-2}$. El resto es (o debe de ser) evidente. \square

El lema anterior indica cómo hay que completar \mathcal{S} para formar un espacio de Hilbert espinorial.

Definición 4.29. Dícese que un espinor $\psi \in \mathcal{S} = \Gamma(\mathbb{S}^2, \mathcal{S})$ es **de cuadrado integrable** si sus componentes ψ_N^+ y ψ_N^- están en $\mathcal{L}^2(\mathbb{S}^2, \omega)$ donde $\omega = 2iq^{-1}dz \wedge d\bar{z}$. [Como los factores de la transformaciones de gauge $(\bar{z}/z)^{\pm 1}$ tienen valor absoluto 1, esto es equivalente a la condición análoga para los componentes ψ_S^+ y ψ_S^- para la otra carta local.]

El **espacio de espinores** H para \mathbb{S}^2 es el espacio de Hilbert obtenido al completar \mathcal{S} con respecto al producto escalar

$$\begin{aligned} \langle \varphi | \psi \rangle &:= \langle \varphi_N^+ | \psi_N^+ \rangle + \langle \varphi_N^- | \psi_N^- \rangle \\ &= \langle \varphi_S^+ | \psi_S^+ \rangle + \langle \varphi_S^- | \psi_S^- \rangle \end{aligned}$$

donde los productos escalares al lado derecho son los de $L^2(\mathbb{S}^2, \omega)$. En otras palabras, H es la suma directa ortogonal⁴⁴ de dos copias de $L^2(\mathbb{S}^2, \omega)$.

Proposición 4.30. El operador de Dirac $\mathcal{D} = -i \begin{pmatrix} 0 & \partial_z \\ \bar{\partial}_z & 0 \end{pmatrix}$ es formalmente auto-adjunto sobre espinores en \mathcal{S} .

Demostración. Si $\psi, \varphi \in \mathcal{S}$, la Definición 4.29 da el producto escalar

$$\langle \varphi | \mathcal{D}\psi \rangle = -i \left\langle \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \partial_z \psi^- \\ \bar{\partial}_z \psi^+ \end{pmatrix} \right\rangle = -i \langle \varphi^+ | \partial_z \psi^- \rangle - i \langle \varphi^- | \bar{\partial}_z \psi^+ \rangle$$

donde se ha suprimido el subíndice N de los componentes. Con dos aplicaciones del Lema 4.28, se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \varphi | \mathcal{D}\psi \rangle &= \overline{\langle \mathcal{D}\psi | \varphi \rangle} = i \overline{\langle \bar{\partial}_z \psi^- | \varphi^+ \rangle} + i \overline{\langle \bar{\partial}_z \psi^+ | \varphi^- \rangle} \\ &= i \langle \varphi^+ | \partial_z \psi^- \rangle + i \langle \bar{\partial}_z \psi^+ | \varphi^- \rangle \\ &= -i \langle \bar{\partial}_z \varphi^+ | \psi^- \rangle - i \langle \bar{\psi}^+ | \bar{\partial}_z \varphi^- \rangle \\ &= -i \langle \bar{\partial}_z \varphi^+ | \psi^- \rangle - i \langle \bar{\partial}_z \varphi^- | \psi^+ \rangle = \langle \mathcal{D}\varphi | \psi \rangle, \end{aligned}$$

para todo $\psi, \varphi \in \mathcal{S}$. \square

⁴⁴La **suma directa ortogonal** de dos espacios de Hilbert H y K es el espacio vectorial $H \oplus K$; es cuestión de definir bien el producto escalar. Al poner $\langle (\xi, \eta) | (\xi', \eta') \rangle := \langle \xi | \xi' \rangle + \langle \eta | \eta' \rangle$, es evidente que los dos sumandos H y K son ortogonales entre sí.

► Para determinar los autovalores y autovectores para el operador de Dirac, no es suficiente que sea formalmente autoadjunto. Se requiere extender el dominio de \mathcal{D} , más allá de los espinores suaves, para que el operador extendido sea autoadjunto *tout court*. Como \mathcal{D} es un operador no acotado, este asunto es algo delicado.⁴⁵ En el caso presente, los problemas desaparecen: como \mathcal{D} es un operador diferencial *elíptico* sobre una variedad compacta, tiene una extensión autoadjunta que posee un juego completo de autovectores, los cuales son espinores suaves.⁴⁶

El problema de hallar los autovalores de \mathcal{D} consiste en resolver un par de ecuaciones diferenciales (parciales) de primer orden. La solución no es inmediata porque hay una “condición de frontera”: cualquier solución local sobre U_N ó U_S debe cumplir las reglas de transformación de gauge (4.6), para poder representar un espinor. Nuestra estrategia es cortar el nudo gordiano al *exhibir* los autovectores explícitamente.⁴⁷

Ejercicio 4.31. Comprobar las siguientes fórmulas para derivadas de polinomios en z, \bar{z} y q^{-1} , si $l, r, s \geq 0$:

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_z(q^{-l}z^r(-\bar{z})^s) &= (l + \frac{1}{2} - r)q^{-l}z^r(-\bar{z})^{s+1} + rq^{-l}z^{r-1}(-\bar{z})^s, \\ -\bar{\partial}_{\bar{z}}(q^{-l}z^r(-\bar{z})^s) &= (l + \frac{1}{2} - s)q^{-l}z^{r+1}(-\bar{z})^s + sq^{-l}z^r(-\bar{z})^{s-1},\end{aligned}\quad (4.26)$$

(La primera es un cálculo con la regla de Leibniz, la segunda sigue por conjugación compleja.)

⁴⁵Si un operador A sólo está (inicialmente) definido en un subespacio denso $\text{Dom}A$ de un espacio de Hilbert H , la validez de la fórmula $\langle A^*\xi | \eta \rangle := \langle \xi | A\eta \rangle$ exige tomar el subespacio $\{\xi \in H : \eta \mapsto \langle \xi | A\eta \rangle \text{ es continuo}\}$ como $\text{Dom}A^*$. Dícese que A es *hermítico* (algunos autores dicen *simétrico*) si $\text{Dom}A^* \supseteq \text{Dom}A$, con $A^*\xi = A\xi$ para $\xi \in \text{Dom}A$. Al repetir este proceso para formar el adjunto doble A^{**} , se obtiene $\text{Dom}A \subseteq \text{Dom}A^{**} \subseteq \text{Dom}A^*$. El operador A es **autoadjunto** si es hermítico, con $\text{Dom}A^* = \text{Dom}A$, en cuyo caso se escribe $A^* = A$, por supuesto. Esta condición exige que el dominio inicial de A no sea demasiado pequeño ni demasiado grande. (Si A es acotado, se extiende por continuidad a todo H y estas consideraciones de dominios se vuelven triviales.)

⁴⁶Dícese que un operador no acotado es *esencialmente autoadjunto* si posee una *única* extensión en operador autoadjunto. Un teorema de Wolf dice que un operador de Dirac sobre una variedad de espín completa (en particular, compacta) es esencialmente autoadjunto. Para la prueba, véase el Teorema 9.15 de E-NCG, o bien el libro de Lawson y Michelsohn, *op. cit.*

⁴⁷Estos autovectores fueron introducidos por Newman y Penrose, *op. cit.* y estudiados en detalle en: Joshua N. Goldberg, A. J. Macfarlane, Edward T. Newman, Fritz Rohrlich y E. C. G. Sudarshan, “Spin- s spherical harmonics and $\bar{\partial}$ ”, *Journal of Mathematical Physics* **8** (1967), 2155–2161.

Cuenta la leyenda que el rey macedonio Alejandro, a su paso por Gordión, la capital de Frigia, en 333 a. C., aceptó el reto de desatar un nudo muy complicado; al no encontrar las terminaciones del nudo, lo partió en dos con su espada.

Las fórmulas (4.26) indican una esperanza de formar autovectores para \mathcal{D} con ciertas combinaciones lineales de las funciones $q^{-l}z^r(-\bar{z})^s$, con l y $(s-r)$ fijos. El otro requisito para esos autovectores es que sus dos componentes deben ser medioespinores, es decir, deben cumplir una regla de transformación de gauge. Resulta que esta condición impone restricciones sobre los exponentes l, r, s .

En efecto, considérese una función de la forma

$$\phi(z) := \sum_{r,s \geq 0} a(r,s) q^{-l} z^r (-\bar{z})^s,$$

donde la suma es finita, es decir, $a(r,s) = 0$ excepto por un número finito de pares (r,s) . Se ve de inmediato que

$$\sqrt{\bar{z}/z} \phi(z^{-1}) = (-1)^{l+\frac{1}{2}} \sum_{r,s \geq 0} a(r,s) q^{-l} z^{l-\frac{1}{2}-r} (-\bar{z})^{l+\frac{1}{2}-s}.$$

Para que ϕ represente un medioespinor en \mathcal{S}^+ , se requiere (y es suficiente) que $\phi(z) \equiv \sqrt{\bar{z}/z} \phi(z^{-1})$. Los exponentes de z y \bar{z} a los lados derechos de ambos desarrollos deben ser *enteros no negativos*. Esto exige que

$$l - \frac{1}{2} \in \mathbb{N}; \quad r \in \{0, 1, \dots, l - \frac{1}{2}\}, \quad s \in \{0, 1, \dots, l + \frac{1}{2}\}.$$

En otras palabras, es necesario que $l \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}$ y que $a(r,s) = 0$ fuera de los rangos indicados para r y s .

Para que ϕ represente un medioespinor en \mathcal{S}^- , sólo hay que intercambiar los requisitos sobre r y s . Los coeficientes de las sumatorias también deben cumplir la relación de simetría $a(r,s) = (-1)^{l \pm \frac{1}{2}} a(l \mp \frac{1}{2} - r, l \pm \frac{1}{2} - s)$ para que $\phi \in \mathcal{S}^\pm$.

Estas consideraciones conducen a la siguiente definición.⁴⁸ Compárese sus fórmulas con (4.24).

Definición 4.32. Para cada $l \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\}$ y cada $m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}$, defínase

$$Y_{lm}^+(z) := C_{lm} q^{-l} \sum_{r-s=m-\frac{1}{2}} \binom{l-\frac{1}{2}}{r} \binom{l+\frac{1}{2}}{s} z^r (-\bar{z})^s, \quad (4.27a)$$

$$Y_{lm}^-(z) := C_{lm} q^{-l} \sum_{r-s=m+\frac{1}{2}} \binom{l+\frac{1}{2}}{r} \binom{l-\frac{1}{2}}{s} z^r (-\bar{z})^s, \quad (4.27b)$$

⁴⁸Estas fórmulas, con un análisis de su simetría, aparecen en Goldberg *et al* (1967), *op. cit.*

donde las constantes C_{lm} son

$$C_{lm} := (-1)^{l-m} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+\frac{1}{2})!(l-\frac{1}{2})!}}. \quad (4.27c)$$

Con estos componentes, defínanse los siguientes espinores:

$$Y'_{lm} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Y_{lm}^+ \\ iY_{lm}^- \end{pmatrix}, \quad Y''_{lm} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -Y_{lm}^+ \\ iY_{lm}^- \end{pmatrix}.$$

Fíjese que los índices $m = s - r \pm \frac{1}{2}$ son *semienteros*, al igual que los índices l . Si $l = \frac{3}{2}$, entonces $m = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, por ejemplo.⁴⁹

Es un ejercicio tedioso comprobar que todos estos espinores forman una familia ortonormal en el espacio de Hilbert H . Por construcción, todos ellos pertenecen al subespacio denso \mathcal{S} de espinores suaves. Es menos evidente, pero cierto, que esta familia ortonormal $\{Y'_{lm}, Y''_{lm} : l \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}, m = -l, \dots, l\}$ ya es una *base ortonormal* para H , en donde se cumple la identidad de Parseval:⁵⁰

$$\|\psi\|^2 = \sum_{l,m} |\langle Y'_{lm} | \psi \rangle|^2 + |\langle Y''_{lm} | \psi \rangle|^2 \quad \text{para todo } \psi \in H.$$

Estos espinores son autovectores para \mathcal{D} , en vista del lema siguiente.

Lema 4.33. Si $l \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\}$ y $m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}$, entonces

$$\partial_z Y_{lm}^- = (l + \frac{1}{2}) Y_{lm}^+ \quad \text{y} \quad \bar{\partial}_z Y_{lm}^+ = -(l + \frac{1}{2}) Y_{lm}^-.$$

Demostración. En vista de la fórmula (4.26), se calcula que

$$\begin{aligned} \partial_z Y_{lm}^-(z) &= C_{lm} q^{-l} \sum_{r-s=m+\frac{1}{2}} \binom{l+\frac{1}{2}}{r} \binom{l-\frac{1}{2}}{s} [(l+\frac{1}{2}-r)z^r (-\bar{z})^{s+1} + rz^{r-1} (-\bar{z})^s] \\ &= C_{lm} q^{-l} \sum_{j-k=m-\frac{1}{2}} \left[(l+\frac{1}{2}-j) \binom{l+\frac{1}{2}}{j} \binom{l-\frac{1}{2}}{k-1} + (j+1) \binom{l+\frac{1}{2}}{j+1} \binom{l-\frac{1}{2}}{k} \right] z^j (-\bar{z})^k. \end{aligned}$$

El término entre corchetes es igual a

$$(l+\frac{1}{2}) \binom{l-\frac{1}{2}}{j} \binom{l-\frac{1}{2}}{k-1} + (l+\frac{1}{2}) \binom{l-\frac{1}{2}}{j} \binom{l-\frac{1}{2}}{k} = (l+\frac{1}{2}) \binom{l-\frac{1}{2}}{j} \binom{l+\frac{1}{2}}{k}.$$

⁴⁹La notación está motivada por la teoría cuántica de momento angular, donde l cuenta el momento angular total (orbital y de espín) en unidades de \hbar , mientras $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$ es un “número cuántico magnético”.

⁵⁰La demostración depende de la teoría de representaciones de grupos de Lie compactos, fuera de nuestra alcance: véase la Proposición 9.28 de E-NCG.

Por lo tanto, se obtiene

$$\bar{\partial}_z Y_{lm}^-(z) = (l + \frac{1}{2}) C_{lm} q^{-l} \sum_{j-k=m-\frac{1}{2}} \binom{l-\frac{1}{2}}{j} \binom{l+\frac{1}{2}}{k} z^j (-\bar{z})^k = (l + \frac{1}{2}) Y_{lm}^+.$$

La segunda relación del enunciado sigue por un cálculo similar. \square

Corolario 4.34. *Los espinores Y'_{lm}, Y''_{lm} son autovectores para el operador de Dirac:*

$$\mathcal{D}Y'_{lm} = (l + \frac{1}{2})Y'_{lm}, \quad \mathcal{D}Y''_{lm} = -(l + \frac{1}{2})Y''_{lm},$$

y cada autovalor entero no cero $\pm(l + \frac{1}{2})$ tiene multiplicidad $(2l + 1)$.

Demostración. La forma matricial (4.22) de \mathcal{D} muestra que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}Y'_{lm} &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\bar{\partial}_z Y_{lm}^- \\ \bar{\partial}_z Y_{lm}^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (l + \frac{1}{2})Y_{lm}^+ \\ i(l + \frac{1}{2})Y_{lm}^- \end{pmatrix} = (l + \frac{1}{2})Y'_{lm}, \\ \mathcal{D}Y''_{lm} &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\bar{\partial}_z Y_{lm}^- \\ -\bar{\partial}_z Y_{lm}^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (l + \frac{1}{2})Y_{lm}^+ \\ -i(l + \frac{1}{2})Y_{lm}^- \end{pmatrix} = -(l + \frac{1}{2})Y''_{lm}. \end{aligned}$$

Para cada autovalor $\pm(l + \frac{1}{2})$, hay $(2l + 1)$ valores posibles de m , que corresponden a autovectores linealmente independientes. Como la familia $(Y'_{lm}, Y''_{lm})_{l,m}$ es una base ortonormal para H , no puede haber más autovectores, así que $(2l + 1)$ es la multiplicidad de $\pm(l + \frac{1}{2})$ en cada caso. \square

Definición 4.35. Si un operador autoadjunto T (no necesariamente acotado) sobre un espacio de Hilbert H posee una base ortonormal de autovectores, la colección de sus autovectores es el **espectro** de T , denotado por $\text{sp}(T)$. Esta es una parte discreta de la recta real \mathbb{R} .

La *multiplicidad* $m(\lambda)$ de un autovalor $\lambda \in \text{sp}(T)$ es la dimensión del subespacio de autovectores correspondientes, esto es, $m(\lambda) := \dim \ker(T - \lambda)$.

Más generalmente, el espectro de un operador S sobre H , no necesariamente autoadjunto, es la totalidad de los $\lambda \in \mathbb{C}$ para las cuales $S - \lambda$ no tiene un operador inverso acotado. Si S es acotado, un teorema de Gelfand establece que $\text{sp}(S)$ es una parte compacta de \mathbb{C} ; y si $S^* = S$, entonces $\text{sp}(S) \subset \mathbb{R}$.

► En conclusión: para el operador de Dirac \mathcal{D} sobre la esfera \mathbb{S}^2 , se ha comprobado que

$$\text{sp}(\mathcal{D}) = \{ \pm(l + \frac{1}{2}) : l \in \mathbb{N} + \frac{1}{2} \} = \{ \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Hay que notar que el valor 0 no pertenece a $\text{sp}(\mathcal{D})$. Entre otras cosas, esto dice que el operador \mathcal{D} posee un inverso acotado.

5 La geometría de la esfera \mathbb{S}^3

Siguiendo con la agenda planteada en la sección anterior, desarrollamos ahora el ejemplo de la esfera tridimensional \mathbb{S}^3 . En esta oportunidad se identificará la variedad \mathbb{S}^3 con un grupo de Lie $SU(2)$, para tratar de obtener ventaja de su estructura.

Al igual que en el caso de la esfera \mathbb{S}^2 , el programa se divide en tres partes.¹ Primero se dará una descripción adecuada de la variedad en uso, en este caso \mathbb{S}^3 , con su métrica riemanniana. Segundo se determinará el fibrado de espinores sobre la variedad. Tercero, se describirá el operador de Dirac correspondiente.

El en ejemplo del círculo estos mismos tres pasos estaban presentes, aunque de manera más discreta, y al final pudimos ejemplificar como obtener la distancia inherente al círculo a partir de esta información. Uno de los objetivos de esta sección y la anterior es prepararse para ilustrar cómo obtener la distancia entre puntos de estas variedades diferenciales de baja dimensión, haciendo uso de esta información no conmutativa.

5.1 La esfera \mathbb{S}^3 es un grupo

La esfera \mathbb{S}^3 se define como el conjunto de puntos $(t_0, t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^4$ que satisfacen la relación

$$t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1.$$

Como tal, es una variedad diferencial compacta, sin frontera, de dimensión 3. Como en el caso de la esfera \mathbb{S}^2 , existe un juego finito de cartas locales que la describen. Esta vez, sin embargo, es preferible identificar la esfera \mathbb{S}^3 con el grupo de Lie $SU(2)$ para obtener ventaja de su estructura de grupo.

Por definición, $SU(2)$ es el grupo (bajo multiplicación matricial) de matrices 2×2 con entradas complejas que son unitarias² y poseen determinante 1. Una tal matriz tiene la forma

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}), \quad \text{con } a\bar{a} + b\bar{b} = 1. \quad (5.1)$$

Al poner $a = t_0 - it_3$, $b = -t_2 - it_1$, con los t_i reales, se obtiene

$$u = t_0 1 + t_1 i + t_2 j + t_3 k,$$

¹Los despachos militares desde Galia del proconsul C. Iulius Caesar, publicados posteriormente como sus *Commentationes de bello Gallico*, comienza con la oración: "Gallia est omnis divisa in partes tres".

²Una matriz compleja u es **unitaria** si $uu^\dagger = u^\dagger u = 1$, donde u^\dagger es su transpuesta conjugada.

donde $i \leftrightarrow -i\sigma_1$, $j \leftrightarrow -i\sigma_2$, $k \leftrightarrow -i\sigma_3$ corresponden a los tres cuaterniones imaginarios básicos (haciendo uso de las matrices de Pauli), mencionados al final de la Sección 1.1.

De este modo, el grupo $SU(2)$ se puede ver como un subgrupo del grupo $U(2)$ de matrices unitarias 2×2 , o bien como el grupo de cuaterniones de módulo 1. Como $t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1$ porque $\det u = 1$, hay una identificación³ de $SU(2)$ con \mathbb{S}^3 .

Representaciones de $SU(2)$

Es usual estudiar un grupo abstracto al hacer uso de sus representaciones. Por definición una **representación** de un grupo G en un espacio vectorial V (sobre un cuerpo \mathbb{K}) es un homomorfismo del grupo G en el grupo $GL(V)$ de transformaciones lineales invertibles de V en V , es decir, una aplicación $\rho: G \rightarrow GL(V)$ tal que $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ para todo $g, h \in G$. A V se le llama el espacio de la representación y a $n = \dim V$ se le llama el *grado* (o dimensión) de la representación. Es usual decir que V es un “ G -módulo”. Si n es finita, entonces se pueden identificar $GL(V)$ y $GL(n, \mathbb{K})$.

Una representación de un grupo describe el grupo parcialmente, en términos de transformaciones lineales sobre espacios vectoriales. Si la representación es *fiel*, es decir, si $\rho(g) = 1_V$ sólo para $g = 1 \in G$, entonces los elementos del grupo y la operación del grupo se pueden ver como matrices y multiplicación de matrices.⁴

Para todo grupo G , en particular para $SU(2)$, existe la representación trivial unidimensional, que lleva $g \mapsto 1$ para todo $g \in G$. Una representación no trivial sencilla para $SU(2)$ es la *autorepresentación* dada por la inclusión $SU(2) \hookrightarrow M_2(\mathbb{C})$.

Veamos una segunda representación no trivial. Si $v \in SU(2)$ con $\text{tr } v = 0$, entonces v es un “cuaternión puro” con parte escalar cero. De este modo,

$$v = -i(t_1 \sigma_1 + t_2 \sigma_2 + t_3 \sigma_3) = -i\vec{t} \cdot \vec{\sigma}$$

con $\vec{t} \in \mathbb{S}^2$. Es decir, se identifica \mathbb{S}^2 con los elementos de $SU(2)$ de traza cero.

Para $u \in SU(2)$ fijo, las propiedades de la traza implican que $\text{tr}(uvu^{-1}) = \text{tr}(v)$. La transformación $v \mapsto uvu^{-1}$ es \mathbb{R} -lineal, lleva \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 y \mathbb{S}^2 en \mathbb{S}^2 ; esta es una

³Es usual escribir \mathbb{S}^3 cuando se quiere “olvidar” la estructura de grupo de $SU(2)$ y considerar esta esfera solamente como variedad diferencial.

⁴Un grupo de Lie *compacto* siempre posee una representación fiel finitodimensional. Véase, por ejemplo: Theodor Bröcker y Tammo tom Dieck, *Representations of Compact Lie Groups*, (Springer, Berlin, 1985).

rotación R_u de la esfera \mathbb{S}^2 . Obtenemos así una representación 3-dimensional para $SU(2)$, dada en forma explícita por $u \mapsto R_u$.⁵

El conjunto de las representaciones nos permite entender un grupo abstracto determinado. Es válido preguntarse ¿cuántas representaciones hay, hasta equivalencia?⁶ Para un grupo compacto como $SU(2)$, cada representación irreducible debe ser finitodimensional,⁷ y así, el grado ayuda a distinguir las representaciones. Más aún, en el caso particular de $SU(2)$, hay una *única* representación (hasta equivalencia) en cada dimensión.

Denotamos con V_j al espacio de la representación compleja cuya dimensión es $2j + 1$, con $V_j \simeq \mathbb{C}^{2j+1}$, donde $j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \dots\}$ es *semientero*.⁸ A la representación la llamaremos $\pi_j: SU(2) \rightarrow \mathcal{L}(V_j)$.

Es tradicional *parametrizar* $SU(2)$ con tres *ángulos de Euler* α, β, γ mediante⁹

$$u = \begin{pmatrix} e^{i(\alpha+\gamma)/2} \cos \frac{1}{2}\beta & e^{i(\alpha-\gamma)/2} \sin \frac{1}{2}\beta \\ -e^{-i(\alpha-\gamma)/2} \sin \frac{1}{2}\beta & e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \cos \frac{1}{2}\beta \end{pmatrix} \equiv k(\alpha) h(\beta) k(\gamma), \quad (5.2)$$

donde

$$k(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix}, \quad h(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\beta & \sin \frac{1}{2}\beta \\ -\sin \frac{1}{2}\beta & \cos \frac{1}{2}\beta \end{pmatrix}.$$

⁵Puede considerarse como un homomorfismo de $SU(2)$ en $SO(3) = \{M \in GL(3, \mathbb{R}) : MM^T = M^T M = I, \det M = 1\}$, el grupo especial ortogonal de grado 3. El núcleo del homomorfismo $\rho: SU(2) \rightarrow SO(3) : u \mapsto u(\cdot)u^{-1}$ es el subgrupo de matrices escalares $\{\pm 1\}$.

⁶Dados dos espacios vectoriales V y W y un grupo G , dos representaciones $\rho_1: G \rightarrow GL(V)$ y $\rho_2: G \rightarrow GL(W)$ se llaman equivalentes si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $\psi: V \rightarrow W$ tal que $\psi\rho_1(g)\psi^{-1} = \rho_2(g)$, para todo $g \in G$.

⁷Una representación $\rho: G \rightarrow GL(V)$ es *reducible* si $V = V_1 \oplus V_2$, con $\rho(g)(V_1) \subseteq V_1$ y $\rho(g)(V_2) \subseteq V_2$ para cada $g \in G$. Para un grupo compacto, resulta que (a) cada representación irreducible es finitodimensional; y (b) cualquier representación puede descomponerse en una suma directa de representaciones irreducibles. Véase, por ejemplo: Barry Simon, *Representations of Finite and Compact Groups* (American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.)

⁸El uso de etiquetas semienteras es un legado histórico de la teoría cuántica de momento angular. El llamado *momento angular orbital* de una partícula subatómica, como un electrón, se describía inicialmente por ciertos operadores, ligados a las representaciones del grupo de rotaciones $SO(3)$, con autovalores $m\hbar$ que son múltiplos enteros de la constante de Planck \hbar . El espín fue introducido como otra especie de momento angular, pero los autovalores básicos eran $\pm \frac{1}{2}\hbar$, ligados al “cubrimiento doble” $SU(2)$ del grupo de rotaciones. Es usual tomar unidades físicas en las cuales $\hbar = 1$. De este modo, el llamado *momento angular total* (orbital más espín) posee autovalores semienteros.

⁹Toda las parametrizaciones y los cálculos relativos a la teoría de $SU(2)$ y sus representaciones pueden encontrarse en: Lawrence C. Biedenharn y James D. Louck, *Angular Momentum in Quantum Physics: Theory and Application* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1981).

Su imagen en $SO(3)$ es la composición de una rotación en el eje y con un ángulo β , entre dos rotaciones en el eje z por ángulos respectivos α y γ .¹⁰

Con esta parametrización, se puede escribir explícitamente las entradas de las matrices (complejas) cuadradas, de lado $2j + 1$, que representan $SU(2)$ sobre el espacio vectorial V_j . Las filas y columnas son etiquetadas por

$$m, n \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}, \quad (5.3)$$

así que $\pi_j(k(\alpha)h(\beta)k(\gamma)) = [D_{mn}^j(\alpha, \beta, \gamma)]$, donde

$$D_{mn}^j(\alpha, \beta, \gamma) := \sqrt{\frac{(j+n)!(j-n)!}{(j+m)!(j-m)!}} e^{i(n\alpha+m\gamma)} (\sin \frac{1}{2}\beta)^{2j} \\ \times \sum_r (-1)^{j+m-r} \binom{j+m}{r} \binom{j-m}{r-m-n} (\operatorname{ctg} \frac{1}{2}\beta)^{2r-m-n}.$$

Observación. Los armónicos esféricos Y_{lm} y los armónicos espinoriales de la sección 4.4 son casos particulares:¹¹

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} D_{0m}^l(-\phi, \theta, 0), \\ Y_{lm}^\pm(e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} D_{\mp \frac{1}{2}, m}^l(-\phi, \theta, -\phi).$$

5.2 La métrica y la conexión de Levi-Civita en \mathbb{S}^3

Como para cada punto $p = (t_0, t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{S}^3$, el espacio tangente $T_p\mathbb{S}^3$ es (un traslado al nuevo origen p de) un subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 , podemos considerar como producto interno g_p sobre $T_p\mathbb{S}^3$ la restricción del producto escalar usual de \mathbb{R}^4 . De este forma, la métrica en \mathbb{S}^3 es precisamente la métrica inducida¹² por la métrica riemanniana en \mathbb{R}^4 :

$$g_{\mathbb{S}^3}(p)(u, v) := g_{\mathbb{R}^4}(p)(u, v) = u \cdot v.$$

¹⁰En particular, los cuaterniones parametrizan el grupo de rotaciones: esta es una observación de Rodrigues (él de las fórmulas), en: Olinde Rodrigues, “Des lois géométriques que régissent les déplacements d’un système solide dans l’espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire”, *Journal de Mathématiques* **5** (1840), 380–440.

¹¹Estas fórmulas se obtienen por sustitución directa. Véase también E-NCG, p. 418; y Goldberg *et al.*, *op. cit.*

¹²La longitud de curvas en \mathbb{S}^3 con respecto a esta métrica inducida es simplemente la longitud usual de estas curvas en \mathbb{R}^4 .

Recordemos que $v = (v_0, v_1, v_2, v_3) \in T_p\mathbb{S}^3$ si y sólo si $v \cdot p = 0$. Ahora bien, el elemento unidad del grupo $SU(2)$ corresponde al punto $1 \equiv (1, 0, 0, 0) \in \mathbb{S}^3$. En este punto,

$$T_1\mathbb{S}^3 = \{(0, v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^4\},$$

por lo cual

$$g_1((0, v_1, v_2, v_3), (0, w_1, w_2, w_3)) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3.$$

En $T_1\mathbb{S}^3$ los vectores $E(1)_1 = (0, 1, 0, 0) = \partial_1$, $E(1)_2 = (0, 0, 1, 0) = \partial_2$, $E(1)_3 = (0, 0, 0, 1) = \partial_3$ forman una base ortonormal. Evidentemente, para cada $T_p\mathbb{S}^3$ podemos elegir una base ortonormal. La estructura de $\mathbb{S}^3 \equiv SU(2)$ nos permite hacerlo en forma canónica.

Para cada $u \in SU(2)$ la aplicación $\lambda_u: v \mapsto uv$ es un difeomorfismo de $SU(2)$ en si mismo, y entonces su diferencial es un isomorfismo entre $T_v\mathbb{S}^3$ y $T_{uv}\mathbb{S}^3$. Queremos verificar que dicho isomorfismo preserva los respectivos productos internos. De hecho, de cualquier curso de geometría diferencial sabemos que este isomorfismo está dado por λ_u mismo, es decir

$$d_p(\lambda_u)(v) = \lambda_u(v) \in T_{up}\mathbb{S}^3,$$

para todo $p \in \mathbb{S}^3$, $v \in T_p\mathbb{S}^3$ y $u \in SU(2)$. Más aún, un cálculo largo pero sencillo muestra que λ_u preserva el producto interno:

$$g_{\mathbb{S}^3}(p)(v, w) = g_{\mathbb{S}^3}(\lambda_u(p))(\lambda_u(v), \lambda_u(w)).$$

En conclusión, λ_u transporta la base ortonormal $\{E(1)_1, E(1)_2, E(1)_3\}$ de $T_1\mathbb{S}^3$ a una base ortonormal $E(u)_i = \lambda_u(E(1)_i)$ de $T_u\mathbb{S}^3$. De ahora en adelante se suprimirá la referencia al punto en la notación al escribir simplemente $E_i \equiv E(p)_i$. En forma explícita, si $u \in SU(2)$ corresponde con el punto $(t_0, t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{S}^3$ obtenemos tres campos vectoriales¹³ en \mathbb{R}^4 :

$$\begin{aligned} E_1 &= (-t_1, t_0, t_3, -t_2) \equiv -t_1 \partial_0 + t_0 \partial_1 + t_3 \partial_2 - t_2 \partial_3, \\ E_2 &= (-t_2, -t_3, t_0, t_1) \equiv -t_2 \partial_0 - t_3 \partial_1 + t_0 \partial_2 + t_1 \partial_3, \\ E_3 &= (-t_3, t_2, -t_1, t_0) \equiv -t_3 \partial_0 + t_2 \partial_1 - t_1 \partial_2 + t_0 \partial_3, \end{aligned} \quad (5.4)$$

¹³El *campo vectorial radial* (o “campo de Euler”) en \mathbb{R}^4 es $E_0 := t_0 \partial_0 + t_1 \partial_1 + t_2 \partial_2 + t_3 \partial_3$, el cual es ortogonal a los otros: $g_{\mathbb{R}^4}(E_0, E_i) = 0$ para $i = 1, 2, 3$. El espacio tangente $T_p\mathbb{S}^3$ puede ser identificado con el complemento ortogonal del vector $E(p)_0$ en \mathbb{R}^4 .

donde las expresiones de la derecha representan la forma en que los campos vectoriales E_a actúan sobre una función f . Por ejemplo, en el punto $p = (t_0, t_1, t_2, t_3)$,

$$E_1 f(p) = -t_1 \frac{\partial f}{\partial t_0}(p) + t_0 \frac{\partial f}{\partial t_1}(p) + t_3 \frac{\partial f}{\partial t_2}(p) - t_2 \frac{\partial f}{\partial t_3}(p).$$

Calculemos ahora la conexión de Levi-Civita para \mathbb{S}^3 correspondiente a la métrica inducida por \mathbb{R}^4 . Para esto usamos la fórmula de Leibniz y la propiedad $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k = 0$ en \mathbb{R}^4 (véase la expresión para Γ_{ij}^k en términos de coordenadas locales en la Definición 4.13).

$$\nabla_{f^i \partial_i} (h^j \partial_j) = f^i \nabla_{\partial_i} (h^j \partial_j) = f^i \partial_i (h^j) \partial_j + f^i h^j \nabla_{\partial_i} \partial_j = f^i \partial_i (h^j) \partial_j.$$

Al usar las expresiones explícitas para los E_a , obtenemos que $\nabla_{E_a} E_a = 0$ y

$$\nabla_{E_1} E_2 = E_3 = -\nabla_{E_1} E_2, \quad \nabla_{E_2} E_3 = E_1 = -\nabla_{E_2} E_3, \quad \nabla_{E_3} E_1 = E_2 = -\nabla_{E_3} E_1.$$

Observación. Es una vieja costumbre denotar el símbolo totalmente antisimétrico sobre tres índices por ε , esto es,

$$\varepsilon_{12}^3 = \varepsilon_{23}^1 = \varepsilon_{31}^2 = +1, \quad \varepsilon_{13}^2 = \varepsilon_{21}^3 = \varepsilon_{32}^1 = -1.$$

También se define $\varepsilon_{ab}^c := 0$ si dos índices coinciden.

En resumen: la fórmula $\nabla_{E_a} E_b = \varepsilon_{ab}^c E_c$ (sin suma sobre c), donde ε_{ab}^c es antisimétrico en sus tres índices con $\varepsilon_{12}^3 = 1$, expresa los símbolos de Christoffel para \mathbb{S}^3 , para la base ortonormal de campos vectoriales.

Recordemos que $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{S}^3)$ es el módulo de secciones del fibrado sobre \mathbb{S}^3 cuyas fibras son $T_p^* \mathbb{S}^3$; este fibrado real tiene rango 3. La base de 1-formas $\{\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3\}$ para $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{S}^3)$ dual a la base ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$ de $\mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(\mathbb{S}^3)$ está dada, como es usual, por $\langle \vartheta^a, E_b \rangle = \delta_b^a$. En forma explícita,

$$\begin{aligned} \vartheta^1 &= -t_1 dt^0 + t_0 dt^1 + t_3 dt^2 - t_2 dt^3, \\ \vartheta^2 &= -t_2 dt^0 - t_3 dt^1 + t_0 dt^2 + t_1 dt^3, \\ \vartheta^3 &= -t_3 dt^0 + t_2 dt^1 - t_1 dt^2 + t_0 dt^3, \end{aligned}$$

con los dt^k la base dual¹⁴ en $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R}^4)$ de los ∂_k .

¹⁴Los fibrados tangente $T\mathbb{S}^3 \xrightarrow{\mathbb{R}^3} \mathbb{S}^3$ y cotangente $T^*\mathbb{S}^3 \xrightarrow{\mathbb{R}^3} \mathbb{S}^3$ son triviales porque \mathbb{S}^3 es un grupo de Lie. Por tanto, sus módulos de secciones (globales) poseen bases. En cambio, los fibrados tangente y cotangente de la esfera \mathbb{S}^2 no son triviales; para ellos, hubo que usar bases de secciones locales.

Veamos ahora la extensión de la conexión de Levi-Civita a las 1-formas,

$$\nabla_X: \mathcal{A}^1(\mathbb{S}^3) \rightarrow \mathcal{A}^1(\mathbb{S}^3)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$. Por definición, si $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathbb{S}^3)$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$, entonces $\nabla_X \alpha \in \mathcal{A}^1(\mathbb{S}^3)$ y

$$\langle \nabla_X \alpha, Y \rangle := X(\langle \alpha, Y \rangle) - \langle \alpha, \nabla_X Y \rangle.$$

En particular

$$\langle \nabla_X(f\alpha), Y \rangle = X(\langle f\alpha, Y \rangle) - \langle f\alpha, \nabla_X Y \rangle = f\langle \nabla_X \alpha, Y \rangle + X(f)\langle \alpha, Y \rangle,$$

para cada $f \in C^\infty(\mathbb{S}^3)$. Luego, si $f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(\mathbb{S}^3)$ entonces

$$\langle \nabla_X(f_a \vartheta^a), Y \rangle = f_a \langle \nabla_X \vartheta^a, Y \rangle + X(f_a) \langle \vartheta^a, Y \rangle.$$

Dado que cada ϑ^a y $\nabla_X \vartheta^b$ es $C^\infty(\mathbb{S}^3)$ -lineal sobre $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$ y $\nabla_{fX} \alpha = f \nabla_X \alpha$, nos basta con determinar $\nabla_{E_a} \vartheta^b$ para cada $a, b = 1, 2, 3$.

Si $\nabla_{E_a} \vartheta^b = f_{a1}^b \vartheta^1 + f_{a2}^b \vartheta^2 + f_{a3}^b \vartheta^3$, entonces

$$f_{ac}^b = \langle \nabla_{E_a} \vartheta^b, E_c \rangle = E_a(\langle \vartheta^b, E_c \rangle) - \langle \vartheta^b, \nabla_{E_a} E_c \rangle = -\varepsilon_{ac}^d \langle \vartheta^b, E_d \rangle = -\varepsilon_{ac}^b.$$

Por lo tanto $\nabla_{E_a} \vartheta^c = -\varepsilon_{ab}^c \vartheta^b$ donde ε_{ab}^c es antisimétrico en sus tres índices con $\varepsilon_{12}^3 = 1$.

5.3 La conexión de espín en \mathbb{S}^3

De la definición 4.18, dada la variedad compacta \mathbb{S}^3 con la métrica g inducida por la métrica de \mathbb{R}^4 y una acción de Clifford c de las 1-formas $\mathcal{A}^1(\mathbb{S}^3)$, si existe un $C^\infty(\mathbb{S}^3)$ -módulo \mathcal{S} , tal que

$$c(\alpha): \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, \quad \text{para } \alpha \in \mathcal{A}^1(M),$$

a dicho módulo le llamaremos un **módulo espinorial** para el par (\mathbb{S}^3, g) . Para identificar este módulo espinorial, es cuestión de identificar las fibras S_p de un *fibrado espinorial* S de modo tal que cada fibra S_p es invariante bajo los $c(\alpha)(p)$; entonces se pone $\mathcal{S} = \Gamma(\mathbb{S}^3, S)$, el módulo de secciones sobre el fibrado $S \rightarrow \mathbb{S}^3$.

Como para cada $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathbb{S}^3)$, la correspondencia $\alpha \mapsto c(\alpha)$ es $C^\infty(M)$ -lineal y cada $c(\alpha)(p)$ es un operador lineal sobre la fibra S_p del módulo espinorial, para

obtener una acción de Clifford hay que identificar $\gamma^a \equiv c(\vartheta^a)$ para $a = 1, 2, 3$. Del Ejercicio 4.17 se sabe que las tres matrices

$$\gamma^1 := \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 := \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 := \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix},$$

generan el álgebra de Clifford compleja $\mathbb{C}\ell(\mathbb{C}^3)$, cuya base está formada por los 8 elementos

$$1, \quad \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \quad \gamma^1\gamma^2, \gamma^1\gamma^3, \gamma^2\gamma^3, \quad \gamma^1\gamma^2\gamma^3,$$

donde el elemento quiral correspondiente está dado por la matriz 4×4 (escrito en bloques 2×2):

$$\chi = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, una 1-forma $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathbb{S}^3)$ está dada por una combinación lineal de la forma $\alpha = f_a \vartheta^a$, con $f_a \in C^\infty(\mathbb{S}^3)$. Al aplicar c se obtiene

$$c(\alpha) = f_a c(\vartheta^a) = \begin{pmatrix} f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 + f_3\sigma_3 & 0 \\ 0 & -f_1\sigma_1 - f_2\sigma_2 - f_3\sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver, dada la forma explícita de los σ_a , que el espacio vectorial S_p que es invariante bajo el álgebra $\mathbb{C}\ell(\mathbb{C}^3)$ es precisamente \mathbb{C}^4 . Los $c(\alpha)$ actúan sobre este espacio en forma de matrices diagonales en bloques 2×2 , donde el bloque inferior es simplemente el negativo del bloque superior. En el lenguaje de representaciones, esto quiere decir que la acción del álgebra de Clifford sobre el fibrado espinorial es *reducible*.¹⁵ Para obtener una acción *irreducible*, se limita la acción de cada $c(\alpha)$ a su bloque superior, y en lugar de considerar como fibrado espinorial al fibrado trivial $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{C}^4$, se considera $S = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{C}^2$, de modo tal que cada sección de este fibrado, es decir un espinor $\psi \in \mathcal{S} = \Gamma(\mathbb{S}^3, S)$, es una aplicación suave de \mathbb{S}^3 en \mathbb{C}^2 , donde la acción del álgebra de Clifford está dada solamente por la acción del bloque superior. En particular, fíjese que, $\chi\psi = \psi$ para todo $\psi \in \mathcal{S}$.

► Veamos ahora la **conexión de espín** para \mathcal{S} . De la definición 4.21, se sabe que dicha conexión es la familia $\nabla^{\mathcal{S}}$ de operadores \mathbb{C} -lineales

$$\nabla_X^{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^3),$$

¹⁵La aplicación c , que lleva el álgebra $\mathcal{A}^1(\mathbb{S}^3)$ en operadores lineales sobre un módulo E de secciones, es una *representación de álgebras*, porque preserva las operaciones de suma, producto y multiplicación escalar. Como en el caso de las representaciones de grupos, dicha representación se llama *reducible* si $E = E_1 \oplus E_2$, donde $c(\alpha)(E_1) \subseteq E_1$ y $c(\alpha)(E_2) \subseteq E_2$ para cada $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathbb{S}^3)$. En el caso presente, los elementos de E aparecen como columnas de 4 funciones; en los submódulos E_1 y E_2 se anulan las 2 entradas inferiores o las 2 entradas superiores, respectivamente.

que es $C^\infty(\mathbb{S}^3)$ -lineal en X y que, de acuerdo con (4.18), cumple las *dos reglas de Leibniz* siguientes:

$$\begin{aligned}\nabla_X^S(\psi f) &= (\nabla_X^S \psi) f + \psi X(f), \\ \nabla_X^S(c(\alpha)\psi) &= c(\nabla_X \alpha)\psi + c(\alpha)\nabla_X^S \psi,\end{aligned}$$

para $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$, $\psi \in \mathcal{S}$, $f \in C^\infty(\mathbb{S}^3)$ y $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathbb{S}^3)$.

Como $\mathcal{S} = \Gamma(\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^3 \times \mathbb{C}^2) \cong C^\infty(\mathbb{S}^3) \oplus C^\infty(\mathbb{S}^3)$, cada espinor ψ se puede representar como una columna de dos funciones suaves $f_i: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{C}$, o bien, como una $C^\infty(\mathbb{S}^3)$ -combinación lineal de dos espinores globales básicos ψ^i :

$$\psi = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = f_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + f_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: f_1 \psi^1 + f_2 \psi^2.$$

Para identificar ∇_X^S nos basta con identificar 12 funciones suaves $h_{ai}^j \in C^\infty(\mathbb{S}^3)$ tales que

$$\nabla_{E_a}^S \psi^j := h_{ai}^j \psi^i,$$

para $a = 1, 2, 3$ e $i, j = 1, 2$, dado que la regla de Leibniz implica

$$\begin{aligned}\nabla_{E_a}^S \psi &= \nabla_{E_a}^S (f_1 \psi^1 + f_2 \psi^2) = E_a(f_1)\psi^1 + E_a(f_2)\psi^2 + f_1 \nabla_{E_a}^S \psi^1 + f_2 \nabla_{E_a}^S \psi^2 \\ &= E_a \psi + f_1 h_{a1}^1 \psi^1 + f_2 h_{a2}^2 \psi^2 = E_a \psi + \begin{pmatrix} h_{a1}^1 & h_{a1}^2 \\ h_{a2}^1 & h_{a2}^2 \end{pmatrix} \psi.\end{aligned}$$

La clave es la relación

$$\nabla_{E_a}^S (c(\vartheta^b)\psi^i) = c(\nabla_{E_a} \vartheta^b)\psi^i + c(\vartheta^b)\nabla_{E_a}^S \psi^i = -\varepsilon_{ad}^b c(\vartheta^d)\psi^i + h_{aj}^i c(\vartheta^b)\psi^j.$$

Con $b = 3$ e $i = 1$, obtenemos

$$h_{a1}^1 \psi^1 = \nabla_{E_a}^S \psi^1 = \nabla_{E_a}^S (c(\vartheta^3)\psi^1) = -\varepsilon_{a3}^3 c(\vartheta^3)\psi^1 + h_{a1}^1 c(\vartheta^3)\psi^1,$$

donde $c(\vartheta^3)\psi^1 = \sigma_3 \psi^1 = \psi^1$ y $c(\vartheta^3)\psi^2 = \sigma_3 \psi^2 = -\psi^2$. De este modo,

$$h_{12}^1 = -\frac{i}{2}, \quad h_{22}^1 = \frac{1}{2}, \quad h_{32}^1 = 0.$$

Similarmente, con $b = 1$ e $i = 1$, obtenemos

$$h_{11}^2 = -\frac{i}{2}, \quad h_{12}^2 = h_{11}^1, \quad h_{21}^2 = -\frac{1}{2}, \quad h_{22}^2 = h_{21}^1, \quad h_{31}^2 = 0, \quad h_{32}^2 = i + h_{31}^1.$$

También se puede calcular que

$$h_{11}^1 = h_{12}^2 = h_{21}^1 = h_{22}^2 = 0, \quad h_{31}^1 = -\frac{i}{2}, \quad h_{32}^2 = \frac{i}{2}.$$

Al identificar $\gamma_a \equiv \gamma^a := c(\vartheta^a)$, para facilitar la notación, la conexión de espín sobre \mathbb{S}^3 está dada por la relación:

$$\nabla_{E_a}^S \psi := E_a \psi - \frac{1}{4} \varepsilon_{ab}^c \gamma^b \gamma_c \psi,$$

donde

$$E_a \psi = E_a \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} E_a(\psi_1) \\ E_a(\psi_2) \end{pmatrix}.$$

Como para nuestro módulo espinorial $\mathcal{S} = C^\infty(\mathbb{S}^3) \oplus C^\infty(\mathbb{S}^3)$, los generadores γ^a del álgebra de Clifford actúan como las matrices de Pauli $\sigma^a \equiv \sigma_a$, con $a = 1, 2, 3$, entonces la fórmula anterior para la conexión de espín sobre \mathbb{S}^3 se reduce a

$$\nabla_{E_a}^S \psi = E_a \psi - \frac{1}{4} \varepsilon_{ab}^c \sigma^b \sigma_c \psi. \quad (5.5)$$

5.4 El operador de Dirac en \mathbb{S}^3

Ya tenemos todo lo necesario para plantear el operador de Dirac \mathcal{D} para \mathbb{S}^3 , visto como aplicación del módulo espinorial \mathcal{S} en sí mismo. La fórmula general (4.20b) dice que

$$\mathcal{D} = -i c(\vartheta^a) \nabla_{E_a}^S : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S},$$

empleando una base ortonormal de campos vectoriales $(E_a)_a$ y su base ortonormal dual de 1-formas $(\vartheta^a)_a$. En el caso de \mathbb{S}^3 estamos usando $c(\vartheta^a) = \sigma^a$ y al emplear la fórmula (5.5) se obtiene

$$\mathcal{D} := -i \sigma^a \left(E_a - \frac{1}{4} \varepsilon_{ab}^c \sigma^b \sigma_c \right) = -i \sigma^a E_a - \frac{3}{2}. \quad (5.6)$$

Para $a = 1$, por ejemplo, se obtiene

$$\frac{i}{4} \sigma^1 \varepsilon_{1b}^c \sigma^b \sigma_c = \frac{i}{4} \sigma^1 (\sigma^2 \sigma_3 - \sigma^3 \sigma_2) = \frac{i}{4} \sigma^1 (2i \sigma_1) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los casos $a = 2$ y $a = 3$ contribuyen otros $-\frac{1}{2}$ cada uno, así que el segundo término del operador de Dirac es la constante $-3/2$ (multiplicado por una matriz identidad 2×2); como operador, este término es $\psi \mapsto -\frac{3}{2} \psi$.

► Para investigar los autovalores del operador (5.6), hay que completar el módulo espinorial $\mathcal{S} = C^\infty(\mathbb{S}^3) \oplus C^\infty(\mathbb{S}^3)$ para formar un espacio de Hilbert, de la forma $H = L^2(\mathbb{S}^3) \oplus L^2(\mathbb{S}^3)$.

Para definir $L^2(\mathbb{S}^3)$ con más precisión, es necesario determinar su **forma de volumen**, esto es, la “cola de integración” que entra en la definición del producto escalar. En la parametrización (5.2) por los ángulos de Euler, se define

$$\langle f | h \rangle := \frac{1}{16\pi^2} \int_{-2\pi}^{2\pi} \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \overline{f(\alpha, \beta, \gamma)} h(\alpha, \beta, \gamma) \sin \beta \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma.$$

El factor $1/16\pi^2$ es una normalización convencional, para que la función constante de valor 1 tenga norma uno, esto es, $\|1\|_2 = 1$. Esta 3-forma es *invariante bajo traslaciones* a la izquierda en el grupo $SU(2)$: si se escribe, como de costumbre,¹⁶

$$du = \frac{1}{16\pi^2} \sin \beta \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma,$$

de modo que $\langle f | h \rangle = \int_{SU(2)} \overline{f(u)} h(u) \, du$, entonces resulta que

$$\int_{SU(2)} F(v^{-1}u) \, du = \int_{SU(2)} F(u') \, du'.$$

En consecuencia (al tomar $F = \bar{f}h$), se obtiene $\langle \lambda_v f | \lambda_v h \rangle = \langle f | h \rangle$ para todo $v \in SU(2)$: los *operadores de traslación* $f \mapsto \lambda_v f$, definidos anteriormente, son operadores *unitarios* sobre $L^2(\mathbb{S}^3)$.

Ejercicio 5.1. Comprobar esta invariancia, con el uso de la factorización $u = k(\alpha)h(\beta)k(\gamma)$ dada en (5.2). Si se escribe $u' = vu$, es suficiente considerar los casos $v = k(\phi)$ y $v = h(\theta)$. En el primer caso, se obtiene $u' = vu = k(\alpha + \phi)h(\beta)k(\gamma)$ y $du' = du$ es evidente. En el segundo caso, el cálculo es más intrincado.

► Los autovectores del operador de Dirac para la esfera \mathbb{S}^2 resultaron ser expresiones polinomiales en ciertas variables locales; en aquél caso, los componentes de los espinores Y'_{lm} y Y''_{lm} eran polinomios en z, \bar{z}, q^{-1} . Esto nos motiva a buscar autovectores polinomiales también para el caso de la esfera \mathbb{S}^3 . Como antes, es preferible usar *variables complejas* en vez de reales. Introducimos

$$z := t_0 - it_3, \quad w := -t_2 - it_1,$$

¹⁶Esta costumbre de denotar la cola de integración por “ du ” va en contra de su naturaleza como 3-forma diferencial. Algunos autores hablan de du como una *medida* de integración, determinada por la 3-forma de volumen $(1/16\pi^2) \sin \beta \, d\alpha \wedge d\beta \wedge d\gamma$. Este es un ejemplo de una **medida de Haar**: por un teorema de Haar, cada grupo localmente compacto posee una medida invariante a la izquierda, que es único hasta un factor de escala; si el grupo es compacto, es posible tomar el factor de escala, que es $1/16\pi^2$ para $SU(2)$, para que la función constante 1 tenga integral 1.

de modo que

$$z\bar{z} + w\bar{w} = t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1.$$

Esta misma identificación de \mathbb{S}^3 con $SU(2)$ ya aparece en el despliegue (5.1):

$$u = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}), \quad \text{con } z\bar{z} + w\bar{w} = 1,$$

pero ahora usamos (z, w) en vez de (a, b) con la intención de considerar esta matriz como punto de la esfera \mathbb{S}^3 , “olvidando” su estructura de grupo. Fíjese que las variables z, \bar{z}, w, \bar{w} son 4 *parámetros reales* para $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$, y la *ligadura* $z\bar{z} + w\bar{w} = 1$ determina la esfera \mathbb{S}^3 en términos de estas variables.

Ejercicio 5.2. Comprobar que los campos vectoriales ortonormales E_1, E_2, E_3 de (5.4) se expresan en las variables z, \bar{z}, w, \bar{w} de este modo:¹⁷

$$\begin{aligned} E_1 &= -iw\partial_z + i\bar{w}\bar{\partial}_z - iz\partial_w + i\bar{z}\bar{\partial}_w, \\ E_2 &= w\partial_z + \bar{w}\bar{\partial}_z - z\partial_w - \bar{z}\bar{\partial}_w, \\ E_3 &= -iz\partial_z + i\bar{z}\bar{\partial}_z + iw\partial_w - i\bar{w}\bar{\partial}_w. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Usando la ortonormalidad $g(E_a, E_b) = \delta_{ab}$, obtener la fórmula $g = dzd\bar{z} + dwd\bar{w}$ para la métrica riemanniana (en \mathbb{R}^4 y también, por restricción, en \mathbb{S}^3).

Si se expresa (5.6) como

$$\not{D} + \frac{3}{2} = -i\sigma^a E_a = -i \begin{pmatrix} E_3 & E_1 - iE_2 \\ E_1 + iE_2 & -E_3 \end{pmatrix},$$

se observa que al igual que en el capítulo anterior, vale la pena introducir dos campos “isotrópicos”:

$$\begin{aligned} E_+ &:= E_1 - iE_2 = -2iw\partial_z + 2i\bar{z}\bar{\partial}_w, \\ E_- &:= E_1 + iE_2 = 2i\bar{w}\bar{\partial}_z - 2iz\partial_w, \end{aligned}$$

que cumplen $g(E_+, E_+) = g(E_-, E_-) = 0$ y $g(E_+, E_-) = 2$.

El *conmutador* $[E_+, E_-] = E_+E_- - E_-E_+$ es un operador diferencial de *primer* orden, porque en la diferencia de los productos se cancelan los términos de *segundo* orden; por ejemplo, $4w\bar{w}\partial_z\bar{\partial}_z - 4\bar{w}w\bar{\partial}_z\partial_z = 0$ por la igualdad de segundas

¹⁷El cuarto *campo radial* E_0 (campo de Euler) es $E_0 = z\partial_z - \bar{z}\bar{\partial}_z + w\partial_w - \bar{w}\bar{\partial}_w$. Obsérvese que $E_a(z\bar{z} + w\bar{w}) = 0$ para $a = 0, 1, 2, 3$.

derivadas parciales mixtas. Por la regla de Leibniz, sobreviven los términos como $-2iw \partial_z(-2iz) \partial_w = -4w \partial_w$. Se obtiene

$$[E_+, E_-] = 4z \partial_z - 4\bar{z} \bar{\partial}_z - 4w \partial_w + 4\bar{w} \bar{\partial}_w = 4i E_3.$$

De este modo, se obtienen tres conmutadores de campos vectoriales:

$$\begin{aligned} [E_3, E_+] &= 4w \partial_z - 4\bar{z} \bar{\partial}_w = 2i E_+, \\ [E_3, E_-] &= -4\bar{w} \bar{\partial}_z - 4z \partial_w = -2i E_-, \\ [E_+, E_-] &= 4z \partial_z - 4\bar{z} \bar{\partial}_z - 4w \partial_w + 4\bar{w} \bar{\partial}_w = 4i E_3. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Estas *relaciones de conmutación* serán útiles en el cálculo del espectro del operador de Dirac.

► Obsérvese, en primer lugar, que el monomio $z^k \bar{z}^l w^m \bar{w}^n$ es formalmente un autovector para el operador diferencial E_3 :

$$\begin{aligned} E_3 &= -iz \partial_z + i\bar{z} \bar{\partial}_z + iw \partial_w - i\bar{w} \bar{\partial}_w, \\ E_3(z^k \bar{z}^l w^m \bar{w}^n) &= i(l - k + n - m) (z^k \bar{z}^l w^m \bar{w}^n). \end{aligned}$$

Para $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N} = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}$ y para $m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$ —fíjese que los números $(j+m)$ y $(j-m)$ son enteros en $\{0, 1, 2, \dots, 2j\}$ — considérese el polinomio

$$|j, m\rangle := z^{j+m} w^{j-m}. \quad (5.9)$$

La notación $|j, m\rangle$ se usa cuando se considera este polinomio como vector en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{S}^3)$. (Este tipo de notación fue introducido por el propio Dirac.)¹⁸

Lema 5.3. *Los vectores $|j, m\rangle$ son autovectores de E_3 . Además, el índice m cambia por un monto de ± 1 bajo los **operadores de escalera** E_+ , E_- :*

$$\begin{aligned} E_3 |j, m\rangle &= -2im |j, m\rangle, \\ E_+ |j, m\rangle &= -2i(j+m) |j, m-1\rangle, \\ E_- |j, m\rangle &= -2i(j-m) |j, m+1\rangle. \end{aligned} \quad (5.10)$$

¹⁸Los matemáticos suelen escribir un autovector como v_λ si el autovalor correspondiente es λ . Dirac escribió $|\lambda\rangle$ simplemente; además de ahorrar la letra v para otros usos, estos autovectores se combinan de una forma elegante: el producto escalar de $|\lambda\rangle$ y $|\mu\rangle$ es $\langle\lambda|\mu\rangle$. Si un vector es un autovector simultáneo de dos operadores, puede denotarse por dos etiquetas, como nuestro $|j, m\rangle$. A veces es preferible estipular que $|\lambda\rangle$ tenga norma 1, pero en el ejemplo actual no lo haremos, porque todavía no es evidente cómo calcular la norma de $|j, m\rangle$.

Demostración. Los sumandos $i\bar{z}\bar{\partial}_z - i\bar{w}\bar{\partial}_w$ de E_3 anulan los monomios “holomorfos” $z^{j+m}w^{j-m}$, así que E_3 actúa en efecto como si fuera $-iz\partial_z + iw\partial_w$. Como

$$z\partial_z(z^{j+m}) = (j+m)z^{j+m} \quad \text{y} \quad w\partial_w(w^{j-m}) = (j-m)w^{j-m},$$

se obtiene

$$E_3(z^{j+m}w^{j-m}) = (-i(j+m) + i(j-m))z^{j+m}w^{j-m} = -2imz^{j+m}w^{j-m}$$

lo cual demuestra la primera relación.

De manera similar, $E_+ = -2iw\partial_z + 2i\bar{z}\bar{\partial}_w$ actúa como $-2iw\partial_z$ sobre el polinomio $z^{j+m}w^{j-m}$ y lo transforma en

$$E_+(z^{j+m}w^{j-m}) = -2iw\partial_z(z^{j+m}w^{j-m}) = -2i(j+m)z^{j+m-1}w^{j-m+1}.$$

Del mismo modo, $E_- = 2i\bar{w}\bar{\partial}_z - 2iz\partial_w$ actúa como $-2iz\partial_w$, así que

$$E_-(z^{j+m}w^{j-m}) = -2i(j-m)z^{j+m+1}w^{j-m-1}. \quad \square$$

En particular, fíjese que $E_+|j, -j\rangle = 0$ y $E_-|j, j\rangle = 0$. Tomando en cuenta las relaciones (5.8), el álgebra generado por los tres operadores E_3, E_+, E_- preserva el espacio finitodimensional¹⁹

$$V_j := \text{lin}\langle |j, m\rangle : m = -j, -j+1, \dots, j-1, j\rangle$$

para cualquier $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. Los $|j, m\rangle$ son linealmente independientes, porque son monomios de diferentes exponentes, así que $\dim V_j = 2j+1$.

► Los mismos considerandos rigen para los monomios “antiholomorfos”

$$|j, m\rangle' := \bar{z}^{j-m}\bar{w}^{j+m},$$

aunque la acción concreta de E_3, E_+, E_- es levemente distinta. Para j fijo, estos vectores generan otro subespacio V_j' , también de dimensión $2j+1$, que tiene intersección nula con cualquier V_k . Todos ellos son subespacios finitodimensionales de $L^2(\mathbb{S}^3)$.

¹⁹La notación V_j indica que estos espacios también son espacios de representación del grupo $SU(2)$. Así sucede, en efecto; pero no se requiere la representación explícita en el trabajo entre manos. Resulta que los campos vectoriales E_1, E_2, E_3 constituyen una versión “infinitesimal” del grupo de Lie $SU(2)$, llamado su *álgebra de Lie*; y su acción da lugar a una representación de $SU(2)$ por un proceso de exponenciación. Consúltese el libro de Simon, *op. cit.*

Más generalmente, considérese los monomios “mixtos”:

$$|j, m\rangle'' := z^{j_1+m_1} \bar{z}^{j_2-m_2} w^{j_1-m_1} \bar{w}^{j_2+m_2},$$

toda vez que $j_1 + j_2 = j$ y $m_1 + m_2 = m$. De hecho, para cada entero $2j_2$ fijo en el rango $\{0, 1, 2, \dots, 2j\}$, se repite el patrón del caso holomorfo, en donde $2j_2 = 0$; o del caso antiholomorfo, en donde $2j_2 = 2j$.

En resumen: el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{S}^3)$ contiene $(2j+1)$ copias del espacio V_j , cuya suma directa tiene dimensión $(2j+1)^2$; las bases de los diversos sumandos cumplen las relaciones (5.10), bajo la aplicación de los operadores E_3, E_+, E_- .

Además, todos los vectores de la forma $|j, m\rangle''$ resultan ser ortogonales en $L^2(\mathbb{S}^3)$. Al normalizarlos apropiadamente, se obtiene una familia ortonormal en $L^2(\mathbb{S}^3)$. Lo difícil, como siempre, es probar que esta familia es una *base* ortonormal de este espacio de Hilbert. Esta es consecuencia de un teorema de Peter y Weyl (1927), no demostrado aquí.²⁰

► Con estos preparativos, podemos obtener el espectro del operador \mathcal{D} sobre el espacio de Hilbert $H = L^2(\mathbb{S}^3) \oplus L^2(\mathbb{S}^3)$, por un método sugerido por Hitchin.²¹

Partiendo del operador

$$\mathcal{D} + \frac{3}{2} = -i \sigma^a E_a = -i \begin{pmatrix} E_3 & E_+ \\ E_- & -E_3 \end{pmatrix},$$

es fácil calcular su cuadrado:

$$\left(\mathcal{D} + \frac{3}{2}\right)^2 = - \begin{pmatrix} E_3^2 + E_+ E_- & [E_3, E_+] \\ [E_-, E_3] & E_3^2 + E_- E_+ \end{pmatrix}.$$

En vista de las relaciones de conmutación (5.8), esto es

$$\left(\mathcal{D} + \frac{3}{2}\right)^2 = - \begin{pmatrix} E_3^2 + E_+ E_- & 2i E_+ \\ 2i E_- & E_3^2 + E_- E_+ \end{pmatrix},$$

²⁰El teorema de Peter y Weyl es la pieza clave de la teoría de representaciones de un grupo compacto G . En el álgebra $C(G)$ de funciones continuas, hay ciertas funciones f cuyos traslados $\lambda_v f$ generan un subespacio finitodimensional; ellas forman una subálgebra $\mathcal{O}(G)$ de $C(G)$. El teorema afirma esta subálgebra es densa en $C(G)$ en la norma $\|\cdot\|_\infty$. Como corolario, $\mathcal{O}(G)$ también es densa en el espacio de Hilbert $L^2(G)$ para la norma $\|\cdot\|_2$. Por tanto, una familia ortonormal que genera $\mathcal{O}(G)$ como espacio vectorial es una base ortonormal para $L^2(G)$. Para los detalles de la prueba, consúltese el libro de Bröcker y tom Dieck, *op. cit.*

²¹Véase le artículo: Nigel Hitchin, “Harmonic Spinors”, *Advances in Mathematics* **14** (1974), 1–55.

así que el siguiente operador es “diagonal”:

$$\left(\mathcal{D} + \frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(\mathcal{D} + \frac{3}{2}\right) = - \begin{pmatrix} E_3^2 - 2iE_3 + E_+E_- & 0 \\ 0 & E_3^2 + 2iE_3 + E_-E_+ \end{pmatrix}.$$

Más aun, la relación $E_+E_- - E_-E_+ = 4iE_3$ muestra que los dos términos diagonales son *iguales*. Basta entonces averiguar los autovalores de cualquiera de ellos, en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{S}^3)$.

Lema 5.4. *El vector $|j, m\rangle := z^{j+m} w^{j-m}$ en el subespacio V_j de $L^2(\mathbb{S}^3)$ es un autovector para el operador $-(E_3^2 - 2iE_3 + E_+E_-)$, con autovalor $4j^2 + 4j$.*

Demostración. Si se aplica uno de los productos E_+E_- o E_-E_+ a este vector, se obtiene del Lema 5.3:

$$\begin{aligned} E_+E_-|j, m\rangle &= -2i(j-m)E_+|j, m+1\rangle = -4(j-m)(j+m+1)|j, m\rangle, \\ E_-E_+|j, m\rangle &= -2i(j+m)E_+|j, m-1\rangle = -4(j+m)(j-m+1)|j, m\rangle. \end{aligned}$$

Como $|j, m\rangle$ es también un autovector para E_3 , con autovalor $-2im$, es evidente que

$$\begin{aligned} -(E_3^2 - 2iE_3 + E_+E_-)|j, m\rangle &= (4m^2 + 4m + 4(j-m)(j+m+1))|j, m\rangle \\ &= (4j^2 + 4j)|j, m\rangle. \end{aligned} \quad \square$$

En consecuencia, si λ es un autovalor (necesariamente real) del operador autoadjunto $\mathcal{D} + \frac{3}{2}$, entonces se verifica la ecuación cuadrática

$$\lambda^2 - 2\lambda = 4j^2 + 4j,$$

o bien $(\lambda - 1)^2 = (2j + 1)^2$, cuyas soluciones son $\lambda = 2j + 2$ y $\lambda = -2j$. Los posible autovalores para \mathcal{D} serían:

$$\lambda - \frac{3}{2} = 2j + \frac{1}{2}, \quad \lambda - \frac{3}{2} = -2j - \frac{3}{2}.$$

Cada $2j$ es un número entero no negativo; los autovalores de \mathcal{D} entonces son *semienteros* (positivos y negativos) pero no enteros.

Veamos ahora la *multiplicidad* de cada uno de estos autovalores. Queremos encontrar vectores $(u, v)^\top$ en el espacio vectorial $V_j \oplus V_j$ que sean autovectores para el operador $\mathcal{D} + \frac{3}{2}$ con autovalores $-2j$ ó $(2j + 2)$, con $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$.

En lo sucesivo, el vector $|j, m\rangle$ representa un monomio (holomorfo, antiholomorfo o mixto) de la base de cualquiera de las $(2j + 1)$ copias de V_j incluido en $L^2(\mathbb{S}^3)$. Cada autovector exhibido con primer índice j es uno de $(2j + 1)$ variantes; luego hay que contar su multiplicidad $(2j + 1)$ veces.

Lema 5.5. Las siguientes relaciones determinan autovalores y autovectores para el operador $\mathcal{D} + \frac{3}{2}$ en el subespacio V_j , para $m = -j, -j+1, \dots, j-1$:

$$-i \begin{pmatrix} E_3 & E_+ \\ E_- & -E_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -|j, m\rangle \\ |j, m+1\rangle \end{pmatrix} = (2j+2) \begin{pmatrix} -|j, m\rangle \\ |j, m+1\rangle \end{pmatrix}, \quad (5.11a)$$

$$-i \begin{pmatrix} E_3 & E_+ \\ E_- & -E_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (j+m+1)|j, m\rangle \\ (j-m)|j, m+1\rangle \end{pmatrix} = -2j \begin{pmatrix} (j+m+1)|j, m\rangle \\ (j-m)|j, m+1\rangle \end{pmatrix}. \quad (5.11b)$$

Demostración. Sea $\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$ un espinor en $V_j \oplus V_j$ tal que $(\mathcal{D} + \frac{3}{2})\psi = \lambda \psi$ para algún autovalor λ . Entonces sus componentes son

$$\psi_+ = \sum_{m=-j}^j a_m |j, m\rangle, \quad \psi_- = \sum_{m=-j}^j b_m |j, m\rangle,$$

para algunos coeficientes $a_m, b_m \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\begin{aligned} \lambda \psi_+ &= \sum_{m=-j}^j \lambda a_m |j, m\rangle = -i \sum_{m=-j}^j a_m E_3 |j, m\rangle + b_m E_+ |j, m\rangle \\ &= -2 \sum_{m=-j}^j a_m m |j, m\rangle + b_m (j+m) |j, m-1\rangle, \\ \lambda \psi_- &= \sum_{m=-j}^j \lambda b_m |j, m\rangle = -i \sum_{m=-j}^j a_m E_- |j, m\rangle - b_m E_3 |j, m\rangle \\ &= -2 \sum_{m=-j}^j a_m (j-m) |j, m+1\rangle - b_m m |j, m\rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{m=-j}^j (\lambda + 2m) a_m |j, m\rangle &= -2 \sum_{m=-j+1}^j b_m (j+m) |j, m-1\rangle \\ &= -2 \sum_{m=-j}^{j-1} b_{m+1} (j+m+1) |j, m\rangle, \\ \sum_{m=-j}^j (\lambda - 2m) b_m |j, m\rangle &= -2 \sum_{m=-j}^{j-1} a_m (j-m) |j, m+1\rangle \\ &= -2 \sum_{m=-j+1}^j a_{m-1} (j-m+1) |j, m\rangle, \end{aligned}$$

al ajustar los índices de las sumatorias al lado derecho por $m \mapsto m \pm 1$. La independencia lineal de los vectores $|j, m\rangle$ entonces muestra que

$$(\lambda + 2j)a_j = 0, \quad (\lambda + 2j)b_{-j} = 0,$$

y además, para cada $m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1\}$, se cumplen

$$\begin{aligned} (\lambda + 2m)a_m + 2(j+m+1)b_{m+1} &= 0, \\ 2(j-m+1)a_{m-1} + (\lambda - 2m)b_m &= 0. \end{aligned}$$

Es necesario que $(\lambda + 2m) : 2(j+m+1) = 2(j-m) : (\lambda - 2m - 2)$ para que estas ecuaciones sean consistentes, lo cual implica unas ecuaciones cuadráticas para λ :

$$(\lambda + 2m)(\lambda - 2m - 2) = 4(j+m+1)(j-m).$$

Todas ellas se simplifican a $\lambda^2 - 2\lambda = 4j^2 + 4j$, como era de esperar; así que $\lambda = 2j + 2$ o bien $\lambda = -2j$.

En el caso $\lambda = 2j + 2$, se obtiene

$$a_j = 0, \quad b_{-j} = 0, \quad \text{y} \quad a_m = -b_{m+1} \quad \text{para} \quad m = -j, \dots, j-1.$$

Entonces ψ es una combinación lineal de los $2j$ espinores independientes (5.11a).

En el caso $\lambda = -2j$, se obtiene

$$(j-m)a_m = (j+m+1)b_{m+1} \quad \text{para} \quad m = -j, \dots, j-1,$$

y los valores de a_j y b_{-j} quedan libres. En este caso, ψ es una combinación lineal de los $2j$ espinores independientes (5.11b) y de los dos espinores siguientes:

$$\begin{pmatrix} |j, j\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ |j, -j\rangle \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

En síntesis, hay $2j$ espinores independientes para el autovalor $2j+2$; y hay $2j+2$ espinores independientes para el autovalor $-2j$. \square

El Lema 5.5 muestra un total de $2j + (2j+2) = 4j+2$ autovectores linealmente independientes en cada subespacio $V_j \oplus V_j$, de dimensión $2(2j+1)$. Los espinores (5.11) y (5.12) generan este subespacio, así que la lista es completa. Ahora bien, cada uno de estos casos se repite $(2j+1)$ veces, para las distintas versiones de V_j en $L^2(\mathbb{S}^3)$. Como punto final, hay que restar $\frac{3}{2}$ de cada autovalor, ya que los autovalores de \not{D} son de la forma $\lambda - \frac{3}{2}$. El resultado final es el siguiente.

Teorema 5.6. *Los autovalores de \mathcal{D} para la esfera \mathbb{S}^3 son:*

$$\begin{aligned} &(2j + \frac{1}{2}), \text{ para } j > 0; && \text{con multiplicidad } 2j(2j + 1), \\ &-(2j + \frac{3}{2}), \text{ para } j \geq 0, && \text{con multiplicidad } (2j + 2)(2j + 1). \end{aligned} \quad \square$$

Obsérvese que la sustitución $j = k - \frac{1}{2}$, en el caso positivo, restaura la simetría entre los autovalores positivos y negativos. El espectro de \mathcal{D} es simétrico alrededor de cero; en efecto, estos autovalores son

$$\begin{aligned} &(2k + \frac{3}{2}), \text{ para } k \geq 0; && \text{con multiplicidad } (2k + 2)(2k + 1), \\ &-(2j + \frac{3}{2}), \text{ para } j \geq 0, && \text{con multiplicidad } (2j + 2)(2j + 1). \end{aligned}$$

Si se omite la multiplicidad, el espectro de \mathcal{D} es

$$\text{sp}(\mathcal{D}) = \{\pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{7}{2}, \dots\}.$$

Fíjese, en particular, que 0 no pertenece a $\text{sp}(\mathcal{D})$.

6 El toro no conmutativo

La geometría no conmutativa, entendida como una teoría de “espacios no conmutativos” en los cuales actúa una geometría diferencial, comenzó a finales de los años setentas con el estudio de los toros no conmutativos. Hubo varios antecedentes históricos: en la mecánica cuántica, con la versión integrada de Weyl de las relaciones de conmutación de Heisenberg; y también en la llamada teoría ergódica, con la foliación de Kronecker del toro bidimensional por una rotación irracional. Alrededor de 1980, se logró una clasificación “topológica” de ciertas álgebras no conmutativas de coordenadas ligadas al toro; el avance clave fue dado por Connes, con la introducción de su estructura diferencial.¹

6.1 Las álgebras de coordenadas de toros no conmutativos

En la Sección 3.1, se ha visto que cada función continua sobre el círculo \mathbb{S}^1 admite un desarrollo en una serie de Fourier, de tal manera que los monomios z^k , para $k \in \mathbb{Z}$, forman una base ortonormal para el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{S}^1)$, que incluye a $C(\mathbb{S}^1)$ como subespacio denso. Aquí $z = e^{i\theta}$ es el generador del álgebra involutiva $\mathcal{O}(\mathbb{S}^1)$ de los polinomios de Fourier. Esta $*$ -álgebra $\mathcal{O}(\mathbb{S}^1)$ es conmutativa, al ser generado por un solo elemento unitario, y su completación $C(\mathbb{S}^1)$ es, *ipso facto*, una C^* -álgebra conmutativa.²

El producto cartesiano de varios círculos es un **toro**. Se escribe

$$\mathbb{T}^l := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 \quad (\text{con } l \text{ factores}).$$

(Cuando $l = 1$, la nomenclatura \mathbb{T} es sinónimo de \mathbb{S}^1 , aunque es usual emplear \mathbb{T} cuando se considera el círculo como grupo multiplicativo; mientras \mathbb{S}^1 denota el círculo como variedad unidimensional, al “olvidar” su estructura de grupo.)³ Para parametrizar el toro \mathbb{T}^l como variedad diferencial, debemos emplear l variables angulares ϕ_1, \dots, ϕ_l . Es cómodo usar la *notación francesa* en la cual $0 \leq \phi_k < 1$

¹Los artículos principales son estos tres: Mihai V. Pimsner y Dan Voiculescu, “Imbedding the irrational rotation C^* -algebra into an AF -algebra”, *Journal of Operator Theory* **4** (1980), 201–210; Marc A. Rieffel, “ C^* -algebras associated with irrational rotations”, *Pacific Journal of Mathematics* **93** (1981), 415–429; Alain Connes, “ C^* -algèbres et géométrie différentielle”, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris* **290A** (1980), 599–604.

²La unitariedad de z es la relación $z\bar{z} = \bar{z}z = 1$. Obsérvese de nuevo que $\mathcal{O}(\mathbb{S}^1)$ está dotado de dos normas y por ende posee dos completaciones: su completación en la norma $\|\cdot\|_\infty$ es la C^* -álgebra $C(\mathbb{S}^1)$, mientras su completación en la norma $\|\cdot\|_2$ es el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{S}^1)$.

³En la teoría de los grupos de Lie y su aplicación a las partículas elementales, se denota el grupo \mathbb{T} por $U(1)$, es decir, el grupo de matrices unitarias 1×1 .

para $k = 1, \dots, l$, en vez de recorrer un rango de 2π , por ejemplo.⁴ De esta manera, el desarrollo de Fourier de una función $f \in C(\mathbb{T}^l)$ se escribe así:

$$f(\phi_1, \dots, \phi_l) = \sum_{r \in \mathbb{Z}^l} c_r e^{2\pi i(r_1 \phi_1 + \dots + r_l \phi_l)}. \quad (6.1a)$$

Fíjese que $r \in \mathbb{Z}^l$ es un *multiíndice*, es decir, $r = (r_1, \dots, r_l)$ es un juego de l números enteros.

Las funciones suaves

$$u_k(\phi_1, \dots, \phi_l) := e^{2\pi i \phi_k}, \quad \text{para } k = 1, \dots, l$$

generan el álgebra de **polinomios de Fourier**, $\mathcal{O}(\mathbb{T}^l)$. Sus elementos son de la forma

$$f = \sum_{r \in \mathbb{Z}^l} c_r u_1^{r_1} u_2^{r_2} \dots u_l^{r_l} \quad (6.1b)$$

donde la suma es finita (es decir, $c_r \neq 0$ sólo para una cantidad finita de los multi-índices r). En general, cada $f \in C(\mathbb{T}^l)$ puede representarse en esta forma —por una generalización directa de los argumentos para el caso $l = 1$, del círculo— donde la suma en general es infinita y habría que poner atención a su convergencia.

Al denotar por u_k^* el conjugado complejo de la función u_k , es inmediato que los u_k son *elementos unitarios* del álgebra $\mathcal{O}(\mathbb{T}^l)$, esto es,

$$u_k u_k^* = u_k^* u_k = 1,$$

y que además los u_k *conmutan entre sí*:

$$u_k u_j = u_j u_k, \quad \text{para todo } j, k = 1, \dots, l.$$

La completación $C(\mathbb{T}^l)$ de $\mathcal{O}(\mathbb{T}^l)$ es entonces una C^* -álgebra (unital, conmutativa) generado por estos l elementos unitarios. Su espacio de caracteres es el toro \mathbb{T}^l , de acuerdo con el teorema de Gelfand y Naïmark; cada carácter es una evaluación $f \mapsto f(\phi_1, \dots, \phi_l)$.

Aparte de las relaciones anteriores que expresan su unitariedad y su conmutatividad, no hay otra relación algebraica alguna entre los generadores u_1, \dots, u_l .

⁴Los practicantes del análisis de Fourier todos conocen la igualdad fundamental: “ $2\pi = 1$ ”. Mejor dicho, como todos los cálculos están plagados de factores de 2π , es preferible ignorarlos hasta el momento de determinar alguna constante. La “solución francesa” a esta dificultad consiste en colocar el factor de 2π en los exponentes, al escribir $e^{2\pi i \phi}$ en vez de $e^{i\theta}$; o bien, si se quiere, al medir ángulos con el parámetro $\phi = \theta/2\pi$.

► Hay una variante no conmutativa de estas relaciones cuando $l \geq 2$. Para aliviar la notación, conviene enfatizar el caso más sencillo, $l = 2$. Escribiremos $u := u_1$, $v := u_2$, así que en $C(\mathbb{T}^2)$ estos u, v son dos elementos unitarios que conmutan: $uv = vu$.

Definición 6.1. Sea $\theta \in \mathbb{R}$ un número real cualquiera. La notación A_θ denotará la C^* -álgebra universal generado por dos elementos unitarios u, v que cumplen la relación de conmutación

$$vu = e^{2\pi i\theta} uv. \quad (6.2)$$

La relación (6.2) es una de las fórmulas básicas de la mecánica cuántica.⁵

Lema 6.2. Sobre el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ de funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de cuadrado integrable, hay operadores unitarios U_θ y V_θ , dados por

$$U_\theta f(t) := e^{2\pi i t} f(t), \quad V_\theta f(t) := f(t + \theta). \quad (6.3a)$$

Estos operadores cumplen la relación

$$V_\theta U_\theta = e^{2\pi i\theta} U_\theta V_\theta. \quad (6.3b)$$

Demostración. El producto escalar en $L^2(\mathbb{R})$ está dado por

$$\langle f | h \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} h(t) dt.$$

Las relaciones $\langle U_\theta f | U_\theta h \rangle = \langle f | h \rangle$ y $\langle V_\theta f | V_\theta h \rangle = \langle f | h \rangle$ son evidentes, la segunda de ellas por la invariancia por traslación⁶ expresada vulgarmente en la fórmula de cambio de variable $d(t + \theta) = dt$. Como también se verifica $\langle U_\theta f | U_\theta h \rangle = \langle f | U_\theta^* U_\theta h \rangle$ por la definición del operador adjunto U_θ^* , se concluye que $U_\theta^* U_\theta = 1$ y de igual modo $V_\theta^* V_\theta = 1$. Además, los operadores U_θ y V_θ son obviamente

⁵Heisenberg introdujo un par de operadores, Q y P , para representar observables de “posición” y “momento” (para un solo grado de libertad) en un sistema cuántico, notando que los resultados experimentales implicaban la relación de conmutación $QP - PQ = i\hbar 1$. Esta relación no puede realizarse con matrices de tamaño finito, porque las matrices QP y PQ tendrían los mismos autovalores —un buen ejercicio del álgebra lineal— y no podrían diferir por una constante. Luego P y Q deben ser operadores no acotados, cuyo manejo es problemático. Hermann Weyl resolvió el problema analítico al introducir los grupos uniparamétricos de operadores unitarios $U(t) := e^{itQ}$ y $V(s) := e^{isP}$, que cumplen relaciones de conmutación de la forma (6.2).

⁶La recta \mathbb{R} es un grupo abeliano no compacto; la invariancia por traslación de la **medida de Lebesgue** ‘ dt ’ dice que ésta es una medida de Haar para el grupo \mathbb{R} .

biyectivos,⁷ así que $U_\theta^{-1} = U_\theta^*$ y $V_\theta^{-1} = V_\theta^*$. Luego, los operadores U_θ y V_θ son unitarios.

La relación de conmutación para U_θ y V_θ es consecuencia de un cálculo directo:

$$\begin{aligned} (V_\theta U_\theta f)(t) &= U_\theta f(t + \theta) = e^{2\pi i(t+\theta)} f(t + \theta) \\ &= e^{2\pi i\theta} e^{2\pi it} f(t + \theta) = e^{2\pi i\theta} e^{2\pi it} V_\theta f(t) \\ &= e^{2\pi i\theta} (U_\theta V_\theta f)(t). \end{aligned} \quad \square$$

Podemos identificar $L^2(\mathbb{S}^1)$ con un subespacio de $L^2(\mathbb{R})$, que consiste de las *funciones periódicas* f , con período 1, que son de cuadrado integrable:

$$L^2(\mathbb{S}^1) \simeq \{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f(t+1) \equiv f(t) \}.$$

Es evidente que tanto U_θ como V_θ dejan invariante este subespacio —hay que interpretar $(t + \theta)$ “módulo 1”, por supuesto— de modo que, al restringirlos a este subespacio, se obtiene un par de operadores unitarios sobre $L^2(\mathbb{S}^1)$ que satisfacen las fórmulas (6.3). Hemos exhibido un ejemplo concreto de la relación (6.2). En adelante llamaremos A_θ a la C^* -subálgebra de $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{S}^1))$ generada por estos operadores U_θ y V_θ .

Es posible mostrar que este ejemplo es *universal*: dado algún otro C^* -álgebra A generado por dos unitarios u, v que cumplen (6.2), la correspondencia $U_\theta \mapsto u$, $V_\theta \mapsto v$ se extiende, por linealidad y continuidad, a un *morfismo* de C^* -álgebras $\pi: A_\theta \rightarrow A$. Cuando θ es un número irracional, este morfismo es un isomorfismo.⁸ Estos considerandos muestran la existencia (y unicidad, hasta isomorfismo) de la C^* -álgebra universal de la Definición 6.1.

De esta definición, es evidente que $A_{\theta+m} \simeq A_\theta$ para cualquier $m \in \mathbb{Z}$, porque $e^{2\pi i(\theta+m)} = e^{2\pi i\theta}$. Como $uv = e^{-2\pi i\theta}vu$, el intercambio $u \leftrightarrow v$ conlleva un isomorfismo $A_\theta \simeq A_{-\theta} \simeq A_{1-\theta}$. Resulta que no hay otros isomorfismos: el intervalo $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ parametriza una familia de C^* -álgebras no isomorfas.

⁷Una matriz w que cumple $w^\dagger w = 1$ también cumple $|\det w|^2 = 1$, así que w es invertible, con $w^{-1} = w^\dagger$ y en particular $ww^\dagger = 1$. En dimensión infinita, por contraste, un operador W sobre un espacio de Hilbert es una **isometría** si $W^*W = 1$, porque esta condición es equivalente a la propiedad $\langle Wf | Wh \rangle = \langle f | h \rangle$ para todo f, h ; pero una isometría no es necesariamente unitaria, salvo si también es biyectiva.

⁸La existencia del morfismo π no es difícil, pero requiere un poco de la tecnología de las C^* -álgebras. Se obtiene un isomorfismo en el caso irracional, porque en ese caso A_θ resulta ser una C^* -álgebra *simple* (no tiene un ideal cerrado propio). Véase, por ejemplo, la Sección 12.3 de: Niels Erik Wegge-Olsen, *K-theory and C*-algebras: a Friendly Approach* (Oxford University Press, Oxford, 1993).

Cuando $\theta = 0$, la relación de conmutación (6.2) se reduce a $vu = uv$. La C^* -álgebra conmutativa A_0 es simplemente $C(\mathbb{T}^2)$, generados por los dos monomios de Fourier u_1, u_2 .

Lema 6.3. *Si θ es un número racional $\theta = p/q$ no entero (con $p, q \in \mathbb{N}$ relativamente primos), $A_{p/q}$ es isomorfo al álgebra de secciones continuas $\Gamma_{\text{cont}}(\mathbb{T}^2, E)$ de un fibrado cuya fibra típica es el álgebra finitodimensional $M_q(\mathbb{C})$.*

Demostración. Sean u_1, u_2 los monomios de Fourier que generan $C(\mathbb{T}^2)$. Escribáse $\lambda = e^{2\pi ip/q}$. Las dos matrices en $M_q(\mathbb{C})$ dadas por

$$R := \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & \lambda^2 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \lambda^{q-1} \end{pmatrix}, \quad S := \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

son unitarias (sus columnas forman bases ortonormales de \mathbb{C}^q) y cumplen las relaciones

$$R^q = 1, \quad S^q = 1, \quad RS = \lambda SR.$$

Si $f \in C(\mathbb{T}^2)$, $T = [t_{ij}] \in M_q(\mathbb{C})$, denótese⁹ por $T \otimes f$ el elemento de $M_q(C(\mathbb{T}^2))$ cuya entrada (i, j) es $t_{ij}f$. Los elementos $u := S \otimes u_1$ y $v := R \otimes u_2$ de $M_q(C(\mathbb{T}^2))$ son unitarios y cumplen $vu = \lambda uv$.

Pero estos elementos no generan todo el álgebra $M_q(C(\mathbb{T}^2))$. Hay dos endomorfismos¹⁰ que dejan fijos a u y v :

$$\varphi_1: T \otimes u_1^k u_2^l \mapsto RTR^{-1} \otimes \lambda^{-k} u_1^k u_2^l, \quad \varphi_2: T \otimes u_1^k u_2^l \mapsto STS^{-1} \otimes \lambda^l u_1^k u_2^l.$$

Estos endomorfismos conmutan y satisfacen $\varphi_1^q = \varphi_2^q = 1$, así que generan un grupo abeliano H de orden q^2 . El álgebra $A_{p/q}$ generado por u y v es la subálgebra de $M_q(C(\mathbb{T}^2))$ dejada fija por φ_1 y φ_2 .

Ahora bien, $M_q(C(\mathbb{T}^2))$ no es más que el álgebra de secciones continuas del fibrado trivial $E_q = \mathbb{T}^2 \times M_q(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{T}^2$ cuyas fibras son copias del álgebra finitodimensional $M_q(\mathbb{C})$. Por el teorema de Serre y Swan, a la acción del grupo H

⁹Esta es una instancia del **producto tensorial** de álgebras: $M_q(C(\mathbb{T}^2))$ es isomorfo al producto tensorial $M_q(\mathbb{C}) \otimes C(\mathbb{T}^2)$, cuyos elementos son sumas finitas de “tensores simples” de la forma $T \otimes f$.

¹⁰Un **endomorfismo** de una C^* -álgebra A es un morfismo (una aplicación lineal y multiplicativo que respeta la involución) de A en sí mismo.

sobre las secciones le corresponde una acción paralela por morfismos de fibrados, dados por

$$g_1: (z_1, z_2; T) \mapsto (\lambda^{-1}z_1, z_2; RTR^{-1}), \quad g_2: (z_1, z_2; T) \mapsto (z_1, \lambda z_2; STS^{-1}),$$

donde $(z_1, z_2) = (e^{2\pi i\phi_1}, e^{2\pi i\phi_2})$ son los elementos del espacio base \mathbb{T}^2 . A las secciones fijas por el grupo H le corresponde las secciones de un fibrado cociente $E_q/H \rightarrow \mathbb{T}^2/H$, cuya fibra típica sigue siendo $M_q(\mathbb{C})$.

La base \mathbb{T}^2/H del nuevo fibrado es el cociente de \mathbb{T}^2 bajo rotaciones $(z_1, z_2) \mapsto (\lambda^{-k}z_1, \lambda^l z_2)$. Al poner $w_1 := z_1^q, w_2 := z_2^q$, sus elementos pueden identificarse con los puntos (w_1, w_2) de una nueva versión de \mathbb{T}^2 . Junto con $E := E_q/H$, se obtiene un fibrado $E \rightarrow \mathbb{T}^2$, que ya no es trivial, pero es tal que $A_{p/q} \simeq \Gamma_{\text{cont}}(\mathbb{T}^2, E)$. \square

El álgebra $A_{p/q}$ obtenida por la construcción anterior no es conmutativa: su *centro* consiste de las secciones continuas $s: \mathbb{T}^2 \rightarrow E$ donde cada $s(w_1, w_2)$ es una *matriz escalar*. Este centro es isomorfo a $C(\mathbb{T}^2)$: una función es la asignación de un número escalar en cada punto.

En el caso irracional, $\theta \notin \mathbb{Q}$, la situación es más grave: el centro de A_θ es simplemente \mathbb{C} (múltiplos escalares de la unidad 1) en ese caso. Sin embargo, resulta que los polinomios de Fourier también pueden definirse en todos los casos, lo cual permite la construcción de una subálgebra de “funciones suaves”.

6.2 El álgebra suave de un toro no conmutativo

En el Capítulo 3 sobre el círculo (véase la observación después del Lema 3.4) se caracterizaron las funciones suaves en $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ como aquellos elementos de la C^* -álgebra $C(\mathbb{S}^1)$ cuyos coeficientes de Fourier formaban una *sucesión rápidamente decreciente*.

La misma observación es aplicable a la subálgebra $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ de $C(\mathbb{T}^2)$, con la única complicación de trabajar con dos índices. La serie de Fourier (6.1b) para $f \in C(\mathbb{T}^2)$ es simplemente

$$f = \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} c_{rs} u^r v^s \quad (6.5)$$

para el caso $\theta = 0$. Se dice que la sucesión $(a_{rs})_{r,s}$, cuyo conjunto índice es \mathbb{Z}^2 , es **rápida y decreciente** si y sólo si

$$(r^m s^n a_{rs})_{r,s} \quad \text{es de cuadrado sumable, para todo } m, n \in \mathbb{N},$$

como generalización directa de (3.12). Las funciones suaves sobre \mathbb{T}^2 son aquellas f cuyos coeficientes de Fourier c_{rs} son rápidamente decrecientes.

Hasta ahora, no se ha hablado de la *topología* más adecuado para el espacio vectorial $C^\infty(M)$ asociado a una variedad compacta. Para el caso $M = \mathbb{T}^2$, los desarrollos de Fourier ofrecen una manera directa de definir normas sobre $C^\infty(M)$.

Definición 6.4. Para cada $k \in \mathbb{N}$, defínase una norma p_k sobre el espacio $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ por

$$p_k(f)^2 := \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} (1 + r^2 + s^2)^k |c_{rs}|^2$$

si f tiene el desarrollo de Fourier (6.5). Cada sumatoria $p_k(f)^2$ es finita porque (c_{rs}) es rápidamente decreciente. Por su definición, las normas p_k crecen con k , esto es, $p_k(f) \leq p_{k+1}(f)$. Ellas definen una topología de Hausdorff sobre $C^\infty(\mathbb{T}^2)$, donde los conjuntos $U_{k,\varepsilon} := \{f : p_k(f) < \varepsilon\}$ forman una base de vecindarios de 0. Sin embargo, esta topología no está dada por una sola norma.¹¹

Una sucesión de funciones $(f_n)_n$ en $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ es una *sucesión de Cauchy* si es de Cauchy para cada norma p_k por separado: $p_k(f_n - f_m) \rightarrow 0$ cuando $m, n \rightarrow \infty$ para cada k . Similarmente, se dice que $(f_n)_n$ converge a un límite f si $p_k(f_n - f) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ para cada k . Una sucesión de Cauchy debe converger: en principio, podría haber un límite para cada k , pero el ordenamiento de las p_k garantiza que estos límites coinciden. Luego, el espacio vectorial $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ es *completo* en la topología dada.¹²

Definición 6.5. La **subálgebra suave** \mathcal{A}_θ de la C^* -álgebra A_θ (generada por unitarios u, v que cumplen $vu = e^{2\pi i\theta} uv$) es la totalidad de elementos de A_θ de la forma

$$a = \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} a_{rs} u^r v^s \quad \text{con } (a_{rs}) \text{ rápidamente decreciente.}$$

Con respecto a la familia de normas dadas por

$$p_k(a)^2 := \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} (1 + r^2 + s^2)^k |a_{rs}|^2 \quad (6.6)$$

definidas inicialmente sobre las sumas finitas de términos $a_{rs} u^r v^s$, esta es un álgebra cuya topología es completa. La inclusión $\mathcal{A}_\theta \hookrightarrow A_\theta$ es continua y densa.

¹¹Una familia alternativa de normas está dada por $q_k(f) := \sup_{r,s \in \mathbb{Z}} (1 + r^2 + s^2)^{k/2} |c_{rs}|$. Resulta que las dos familias de normas $\{p_k\}_k$ y $\{q_k\}_k$ determinan la misma topología sobre $C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Como $q_0(f) = \|f\|_\infty$ y $p_0(f) = \|f\|_2$, las inclusiones $C^\infty(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow C(\mathbb{T}^2)$ y $C^\infty(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow L^2(\mathbb{T}^2)$ son continuas.

¹²El espacio vectorial completo, cuya topología está definida por una familia contable de (semi)normas, es un **espacio de Fréchet**. Cualquier espacio de Banach (normado y completo) es de Fréchet, pero $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ no es de Banach. Un álgebra con una familia contable de (semi)normas, cuyo producto es continuo en la topología que ellas definen, se llama un **álgebra de Fréchet**.

Para una θ fija, se adopta el siguiente *convenio de notación*:

$$A_\theta \equiv C(\mathbb{T}_\theta^2), \quad \mathcal{A}_\theta \equiv C^\infty(\mathbb{T}_\theta^2), \quad \text{lin}\langle u^r v^s : r, s \in \mathbb{Z} \rangle \equiv \mathcal{O}(\mathbb{T}_\theta^2). \quad (6.7)$$

Entonces $\mathcal{O}(\mathbb{T}_\theta^2) \subset C^\infty(\mathbb{T}_\theta^2) \subset C(\mathbb{T}_\theta^2)$. Al objeto misterioso \mathbb{T}_θ^2 presente en esta notación,¹³ se le llama el **toro no conmutativo** con parámetro θ .

Con $\lambda = e^{2\pi i \theta}$, las fórmulas para el producto y la involución en $\mathcal{O}(\mathbb{T}_\theta^2)$ son

$$ab = \sum_{m,n,r,s} a_{r-n,m} \lambda^{mn} b_{n,s-m} u^r v^s, \quad a^* = \sum_{r,s} \lambda^{rs} \bar{a}_{-r,-s} u^r v^s. \quad (6.8)$$

A la hora de calcular $p_k(ab)$, se toma el módulo cuadrado $|c_{rs}|^2$ de cada coeficiente c_{rs} de $u^r v^s$. Luego, las potencias de λ son irrelevantes porque $|\lambda| = 1$. Basta entonces comprobar la continuidad del producto en el caso conmutativo $\lambda = 1$. Por otro lado, es evidente que $p_k(a^*) = p_k(a)$ para cada k . Estas operaciones continuas se extienden a la completación $\mathcal{A}_\theta = C^\infty(\mathbb{T}_\theta^2)$, así que ésta también es un álgebra involutiva.

6.3 Un espacio de Hilbert para el toro no conmutativo

La introducción de álgebras de coordenadas no conmutativas, que extendió el estudio de las funciones (sobre variedades) a los operadores (sobre espacios de Hilbert) dio un nuevo sesgo a la vieja pregunta *¿cuál es la integral de una función?* Si se considera una integral como un proceso de “sumar todos los valores” de una función, el proceso análogo que sería aplicable a operadores es la de “sumar todos sus autovalores”. Aunque en ambos casos hay que considerar ciertas sutilezas — como la de ponderar las integrales con ciertas funciones de densidad, o manipular operadores que no poseen un espectro discreto de autovalores— el análogo directo de la integral de funciones es la **traza** de un operador.

En los años cincuentas, Irving Segal propuso una teoría de *integración no conmutativa*¹⁴ para el álgebra $\mathcal{L}(H)$ de todos los operadores sobre un espacio de

¹³Lo que hay en juego con esta notación es una dualidad categórica. Si $\theta \notin \mathbb{Z}$, A_θ no conmuta y el teorema de Gelfand y Naïmark no ofrece un espacio topológico cuyas funciones continuas devuelven A_θ . Entonces la escritura de $C(\mathbb{T}_\theta^2)$ es una mentira piadosa. Sin embargo, conviene alegar la existencia de un tal *espacio no conmutativo* \mathbb{T}_θ^2 (se dice *espacio cuántico* en polaco) para poder usar el lenguaje de espacios topológicos y variedades diferenciales directamente, y no sólo a través de sus álgebras de coordenadas.

¹⁴El artículo seminal es: Irving E. Segal, “A noncommutative extension of abstract integration”, *Annals of Mathematics* **57** (1953), 401–457.

Hilbert H . La “integral” de un operador A , según Segal, es su traza $\text{Tr}(A)$; cuando $A = T^*T$ es un operador positivo, con espectro discreto, $\text{Tr}(A)$ es la suma de los autovalores de A si esta suma converge. Como hay muchas funciones no integrables, también hay muchos operadores no trazables en $\mathcal{L}(H)$. Sin embargo, Segal mostró que la traza se parece a una integral en muchos aspectos, debido a su propiedad básica $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

La dificultad esencial con el álgebra $\mathcal{L}(H)$ es que el operador unidad no es trazable cuando H es infinitodimensional, porque $\text{Tr}(1) = \dim H$. Sin embargo, para ciertas *subálgebras* uniales de $\mathcal{L}(H)$ —una clase que contiene todas las C^* -álgebras uniales, por el segundo teorema de Gelfand y Naïmark— es posible encontrar algunas trazas finitas.

Definición 6.6. Sea A una C^* -álgebra unital. Una aplicación lineal $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}$ es un **forma lineal positiva** si $\varphi(a^*a) \geq 0$ para todo $a \in A$; esto es, si lleva elementos positivos de A en números no negativos.¹⁵ Esta forma lineal positiva se llama **fiel** si $\varphi(a^*a) = 0$ sólo cuando $a = 0$.

Una forma lineal positiva es automáticamente continua, porque satisface

$$|\varphi(a)| \leq \|a\| \varphi(1), \quad \text{para todo } a \in A.$$

Si $\varphi(1) = 1$, se dice que φ es un **estado** de A .¹⁶

Una **traza** (finita) sobre A es una forma lineal positiva $\tau: A \rightarrow \mathbb{C}$ que cumple

$$\tau(ab) = \tau(ba), \quad \text{para todo } a, b \in A. \tag{6.9}$$

Más generalmente, es posible considerar funcionales lineales positivos y trazas que sólo toman valores finitos en una subálgebra de A ; este es el caso de la traza de operadores en $\mathcal{L}(H)$.

Tómese un valor θ fijo en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$. Sobre la C^* -álgebra $A_\theta = C(\mathbb{T}_\theta^2)$ del toro no conmutativo, hay una traza finita fiel¹⁷ $\tau: A_\theta \rightarrow \mathbb{C}$ dada, sobre la

¹⁵Hay que recordar que $0 = 0^*0$ es un elemento positivo, de oficio.

¹⁶La terminología viene de la física cuántica: un sistema físico posee *observables* y *estados*. Se puede afirmar, *grosso modo*, que los observables son las cantidades que se miden experimentalmente; y que un estado del sistema asigna un valor (o valor esperado, si hay fenómenos aleatorios presentes) a cada observable. En los sistemas cuánticos, los observables son elementos de ciertas C^* -álgebras y un estado asigna un valor no negativo a cada observable positivo.

¹⁷Es evidente que $\tau(a^*a) > 0$ cuando $a \neq 0$ es un elemento de la subálgebra densa $C^\infty(\mathbb{T}_\theta^2)$. Por desgracia, esto no es suficiente para asegurar la fidelidad de τ en todo $C(\mathbb{T}_\theta^2)$. La demostración de la fidelidad se encuentra en: Stephen C. Power, “Simplicity of C^* -algebras of minimal dynamical systems”, *Journal of the London Mathematical Society* **18** (1978), 534–538.

subálgebra $C^\infty(\mathbb{T}_\theta^2)$, por

$$\tau(a) := a_{00} \quad \text{cuando} \quad a = \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} a_{rs} u^r v^s.$$

La positividad de τ , para elementos de $C^\infty(\mathbb{T}_\theta^2)$, viene de (6.8):

$$\tau(a^*a) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \lambda^{-nm} \bar{a}_{n,-m} \lambda^{mn} a_{n,-m} = \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} |a_{rs}|^2 \geq 0.$$

La propiedad tracial también sigue de (6.8):

$$\tau(ab) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} a_{-n,m} \lambda^{mn} b_{n,-m} = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} b_{n,-m} \lambda^{mn} a_{-n,m} = \tau(ba).$$

Cuando $\theta = 0$, $\tau(f)$ es el término constante en la serie de Fourier para $f \in C(\mathbb{T}^2)$. La Definición 3.1 de estos términos para el círculo \mathbb{S}^1 , que se extiende trivialmente al caso de $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, muestra que esta es la *integral* de f sobre \mathbb{T}^2 :

$$a_{00} = \int_0^1 \int_0^1 f(e^{2\pi i \phi_1}, e^{2\pi i \phi_2}) d\phi_1 d\phi_2.$$

De esta manera, se ve que la traza τ es una extensión genuina de la integral (normalizada para que la integral de la función constante 1 tenga valor 1) a los toros no conmutativos.

► En el Capítulo 3, se construyó el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{S}^1)$ a partir de la integral normalizada sobre \mathbb{S}^1 . El cuadrado de la norma $\|f\|_2$, para $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$, es la integral de la función $|f|^2 = \bar{f}f$. De hecho, se definió $\|f\|_2$ inicialmente para los elementos de la C^* -álgebra $C(\mathbb{S}^1)$, antes de definir $L^2(\mathbb{S}^1)$ como la *compleción* de $C(\mathbb{S}^1)$ en la norma $\|\cdot\|_2$. Siguiendo los pasos de Irving Segal, se introduce ahora, por estricta analogía, un espacio de Hilbert como una compleción de la C^* -álgebra A_θ del toro no conmutativo.

Definición 6.7. Sobre la C^* -álgebra $A_\theta = C(\mathbb{T}_\theta^2)$ se define un producto escalar

$$\langle a | b \rangle := \tau(a^*b), \quad \text{para todo} \quad a, b \in A_\theta. \quad (6.10a)$$

La norma correspondiente es

$$\|a\|_2 := \sqrt{\tau(a^*a)}, \quad \text{para todo} \quad a \in A_\theta. \quad (6.10b)$$

La continuidad de τ y la relación $\tau(1) = 1$ implican que

$$\|a\|_2^2 = \tau(a^*a) \leq \|a^*a\| = \|a\|^2 \quad \text{para} \quad a \in A_\theta,$$

donde se ha usado la propiedad básica de una C^* -álgebra.

Defínase $L^2(A_\theta, \tau)$ como la *compleción* de A_θ en la norma $\|\cdot\|_2$. Este es un espacio de Hilbert, porque el producto escalar se extiende a la compleción.

Los elementos del álgebra A_θ son también elementos de $L^2(A_\theta, \tau)$, porque la desigualdad $\|a\|_2 \leq \|a\|$ garantiza que cada $\|a\|_2$ es finita. Conviene usar la notación de subrayar \underline{a} cuando el elemento $a \in A_\theta$ es considerado como vector en el espacio de Hilbert $L^2(A_\theta, \tau)$.

► Cada elemento $a \in A_\theta$ define un **operador de multiplicación** a la izquierda sobre este espacio de Hilbert:

$$L_a : \underline{b} \mapsto \underline{ab}.$$

Como

$$L_{aa'}(\underline{b}) = \underline{aa'b} = L_a(\underline{a'b}) = L_a L_{a'}(\underline{b}),$$

la correspondencia lineal $\pi_\tau : a \mapsto L_a$ es lineal y multiplicativa. Además, se verifica

$$\langle L_a(\underline{c}) | \underline{b} \rangle = \langle \underline{ac} | \underline{b} \rangle = \tau((ac)^*b) = \tau(c^*a^*b) = \langle \underline{c} | L_{a^*}(\underline{b}) \rangle,$$

así que $\pi_\tau(a)^* = (L_a)^* = L_{a^*} = \pi_\tau(a^*)$. En otras palabras, $\pi_\tau : A_\theta \rightarrow \mathcal{L}(L^2(A_\theta, \tau))$ es un morfismo de C^* -álgebras. Equivalentemente, π_τ es una **representación** de la C^* -álgebra A_θ sobre el espacio de Hilbert $L^2(A_\theta, \tau)$.

Fíjese que esta es una instancia concreta del segundo teorema de Guelfand y Naïmark. La construcción de este espacio de Hilbert por compleción de una C^* -álgebra en una nueva norma, junto con la representación del álgebra por operadores de multiplicación a la izquierda, fue otra contribución de Segal: hoy en día se le llama la *construcción GNS*.¹⁸

Para distinguir mejor entre un elemento del álgebra a y el vector correspondiente \underline{a} , considérese la siguiente aplicación $J_\tau : L^2(A_\theta, \tau) \rightarrow L^2(A_\theta, \tau)$:

$$J_\tau : \underline{b} \mapsto \underline{b}^*.$$

¹⁸La etiqueta ‘GNS’ es, por supuesto, un acrónimo de Guelfand, Naïmark y Segal. Obsérvese que la propiedad tracial de τ no es esencial: para cualquier estado φ de una C^* -álgebra A , se construye un espacio de Hilbert $L^2(A, \varphi)$ a partir del producto escalar $\langle a | b \rangle := \varphi(a^*b)$, y los operadores $\underline{b} \mapsto \underline{ab}$ definen una representación π_φ de A . El morfismo $a \mapsto \pi_\varphi(a)$ es inyectivo si y sólo si φ es fiel. La construcción aparece por primera vez en: Irving E. Segal, “Irreducible representations of operator algebras”, *Bulletin of the American Mathematical Society* **53** (1947), 73–88. Una discusión detallada aparece en el libro: Gerard J. Murphy, *C^* -algebras and Operator Theory* (Academic Press, San Diego, CA, 1990).

Sobre el subespacio denso $\{\underline{b} : b \in A_\theta\}$, esta aplicación J_τ es *antilineal e isométrica* porque

$$\|J_\tau(\underline{b})\|_2 = \|\underline{b}^*\|_2 = \sqrt{\tau(bb^*)} = \sqrt{\tau(b^*b)} = \|\underline{b}\|_2,$$

al emplear la propiedad tracial de τ . En particular, J_τ es continua y por tanto se extiende por continuidad a todo $L^2(A_\theta, \tau)$; se denota esta extensión por J_τ también. Así definida, J_τ es un operador antilineal acotado sobre $L^2(A_\theta, \tau)$, cuyo cuadrado es la identidad: $J_\tau^2 = 1$.

Además, J_τ es **antiunitario**: preserva el producto escalar con un cambio del orden de los dos vectores. En efecto,

$$\langle J_\tau(\underline{c}) | J_\tau(\underline{b}) \rangle = \langle \underline{c}^* | \underline{b}^* \rangle = \tau(cb^*) = \tau(b^*c) = \langle \underline{b} | \underline{c} \rangle,$$

para todo $b, c \in A_\theta$; como estos vectores forman un subespacio denso del espacio de Hilbert, se concluye que

$$\langle J_\tau(\underline{\xi}) | J_\tau(\underline{\eta}) \rangle = \langle \underline{\eta} | \underline{\xi} \rangle \quad \text{para todo } \underline{\xi}, \underline{\eta} \in L^2(A_\theta, \tau).$$

Con la ayuda de J_τ , podemos considerar una segunda representación de A_θ sobre $L^2(A_\theta, \tau)$, dado por $\pi'_\tau(a) := J_\tau \pi_\tau(a^*) J_\tau$; o bien

$$\pi'_\tau(a)(\underline{b}) := J_\tau \pi_\tau(a^*) J_\tau(\underline{b}) = J_\tau \pi_\tau(a^*)(\underline{b}^*) = J_\tau(\underline{a^* b^*}) = \underline{ba}.$$

Entonces $\pi'_\tau(a) \equiv R_a$ es el *operador de multiplicación a la derecha* por a , esto es, $R_a : \underline{b} \mapsto \underline{ba}$. Este π'_τ revierte el orden de productos, $\pi'_\tau(ac) = \pi'_\tau(c) \pi'_\tau(a)$. Dicho de otro modo, π'_τ es una representación del *álgebra opuesta* $A_\theta^{\text{op}} \simeq A_{-\theta}$ sobre el mismo espacio de Hilbert.¹⁹

La asociatividad del producto en A_θ , manifestado en la relación $a(bc) = (ab)c$, implica que

$$\pi_\tau(a) \pi'_\tau(c) = \pi'_\tau(c) \pi_\tau(a) \quad \text{para todo } a, c \in A_\theta.$$

En otras palabras, el espacio de Hilbert $L^2(A_\theta, \tau)$ es un *bimódulo* para los dos álgebras A_θ (a la izquierda) y $A_{-\theta}$ (a la derecha). El operador antiunitario J_τ que

¹⁹Si A es un álgebra, el *álgebra opuesta* A^{op} es el mismo espacio vectorial A con un nuevo producto dado por $a \cdot c \equiv ca$ en términos del producto original. En el caso de los toros no conmutativos, esto implica un cambio de generadores $u \leftrightarrow v$, lo cual es equivalente a la sustitución $\theta \leftrightarrow -\theta$.

entrelaza las dos acciones de estas álgebras es la llamada **involución de Tomita**²⁰ para la representación π_τ .

6.4 Derivaciones y un operador de Dirac para \mathbb{T}_θ^2

Para el toro ordinario \mathbb{T}^2 , parametrizada por los ángulos (ϕ_1, ϕ_2) , el cálculo diferencial está determinada por las dos derivadas parciales $\partial/\partial\phi_1$ y $\partial/\partial\phi_2$. Si

$$f(\phi_1, \phi_2) = \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} c_{rs} u^r v^s = \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} c_{rs} e^{2\pi i(r\phi_1 + s\phi_2)},$$

entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_1} = \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} 2\pi i r c_{rs} e^{2\pi i(r\phi_1 + s\phi_2)}, \quad \frac{\partial f}{\partial \phi_2} = \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} 2\pi i s c_{rs} e^{2\pi i(r\phi_1 + s\phi_2)}.$$

Los coeficientes de Fourier de estas derivadas parciales se forman por las sustituciones $c_{rs} \mapsto 2\pi i r c_{rs}$ y $c_{rs} \mapsto 2\pi i s c_{rs}$, simplemente. Esta observación nos permite generalizar las derivadas parciales a las álgebras suaves de todos los toros no conmutativos.

Definición 6.8. Defínase dos aplicaciones lineales $\delta_1, \delta_2: C^\infty(\mathbb{T}_\theta^2) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}_\theta^2)$ por

$$\begin{aligned} \delta_1 a &\equiv \delta_1 \left(\sum_{r,s} a_{rs} u^r v^s \right) := \sum_{r,s} 2\pi i r a_{rs} u^r v^s, \\ \delta_2 a &\equiv \delta_2 \left(\sum_{r,s} a_{rs} u^r v^s \right) := \sum_{r,s} 2\pi i s a_{rs} u^r v^s. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Estas aplicaciones lineales son continuas como operadores sobre el álgebra suave $C^\infty(\mathbb{T}_\theta^2)$. En efecto, la fórmula (6.6) muestra que

$$\begin{aligned} p_k(\delta_1 a)^2 &= \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} 4\pi^2 r^2 (1 + r^2 + s^2)^k |a_{rs}|^2 \\ &\leq 4\pi^2 \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} (1 + r^2 + s^2)^{k+1} |a_{rs}|^2 = 4\pi^2 p_{k+1}(a)^2, \end{aligned}$$

así que $p_k(\delta_1 a) \leq 2\pi p_{k+1}(a)$ y de igual modo $p_k(\delta_2 a) \leq 2\pi p_{k+1}(a)$. Estas estimaciones establecen la continuidad deseada.²¹

²⁰Las representaciones GNS para estados de una C^* -álgebra A que no son trazas requiere un tratamiento mucho más delicado del operador antilineal $\underline{b} \mapsto \underline{b}^*$ el cual no es acotado en general. Tomita (1967) y luego Takesaki (1970) mostraron, con un trabajo de análisis muy profundo, que este operador posee una “descomposición polar” como producto de un operador lineal positivo (que es simplemente 1 en el caso tracial) y un operador antiunitario J_τ , de tal modo que $J_\tau(\cdot)J_\tau$ entrelaza la acción a la izquierda de A con el álgebra de operadores que conmutan con esta acción.

²¹En más detalle: para que el operador lineal sea continuo, basta ver que es continuo en 0. La continuidad en 0 de δ_j es consecuencia de las relaciones $\delta_j^{-1}(U_{k,\varepsilon}) \supseteq U_{k+1,\varepsilon/2\pi}$ para $j = 1, 2$; porque la preimagen de un vecindario básico de 0 es otro vecindario de 0.

Lema 6.9. *Los operadores δ_1, δ_2 son derivaciones de $C^\infty(\mathbb{T}_\theta^2)$, es decir, son lineales (sobre \mathbb{C}) y cumplen las reglas de Leibniz:*

$$\delta_j(ab) = (\delta_j a)b + a(\delta_j b), \quad j = 1, 2.$$

Estas derivaciones son **simétricas** y subordinadas a la traza τ :

$$(\delta_1 a)^* = \delta_1(a^*), \quad (\delta_2 a)^* = \delta_2(a^*), \quad \tau(\delta_1 a) = \tau(\delta_2 a) = 0.$$

Demostración. Basta ver el caso $j = 1$, el argumento para $j = 2$ es idéntico. El coeficiente de Fourier (r, s) de $\partial_1(ab)$, a partir de la fórmula (6.8), es

$$\begin{aligned} & 2\pi i r \left(\sum_{m,n} a_{r-n,m} \lambda^{mn} b_{n,s-m} \right) \\ &= \sum_{m,n} 2\pi i (r-n) a_{r-n,m} \lambda^{mn} b_{n,s-m} + \sum_{m,n} a_{r-n,m} \lambda^{mn} (2\pi i n) b_{n,s-m} \end{aligned}$$

y el lado derecho es el coeficiente de Fourier (r, s) de la suma $(\delta_1 a)b + a(\delta_1 b)$.

También se verifica

$$\begin{aligned} \delta_1(a^*) &= 2\pi i \sum_{r,s} r \lambda^{rs} \bar{a}_{-r,-s} u^r v^s = 2\pi i \sum_{r,s} r \bar{a}_{-r,-s} v^s u^r \\ &= 2\pi i \sum_{r,s} (-r) \bar{a}_{rs} v^{-s} u^{-r} = -2\pi i \sum_{r,s} r \bar{a}_{rs} (v^*)^s (u^*)^r = (\delta_1 a)^*, \end{aligned}$$

donde se ha usado la relación $vu = \lambda uv$ unas rs veces para obtener $\lambda^{rs} u^r v^s = v^s u^r$; fíjese que $v^{-1} = v^*$ y $u^{-1} = u^*$ porque u, v son *elementos unitarios* del álgebra.

Las relaciones $\tau(\delta_1 a) = \tau(\delta_2 a) = 0$ son evidentes, porque los coeficientes constantes al lado derecho de (6.11) son ceros. \square

► El toro ordinario \mathbb{T}^2 posee una *métrica riemanniana plana*,²² que viene de su identificación como un espacio cociente $\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$. (Este cociente se obtiene al identificar el álgebra de coordenadas $C(\mathbb{T}^2)$ con la subálgebra de funciones continuas $f \in C(\mathbb{R}^2)$ para las cuales $f(\phi_1, \phi_2)$ es periódica, con período 1, en ambas variables.) Para la métrica plana, los campos vectoriales

$$\partial_1 \equiv \frac{\partial}{\partial \phi_1}, \quad \partial_2 \equiv \frac{\partial}{\partial \phi_2}$$

son ortonormales, $g(\partial_i, \partial_j) = \delta_{ij}$; y $\Gamma_{ij}^k = 0$ porque $\nabla_{\partial_i} \partial_j = 0$.

²²Hay otras métricas sobre el toro, que no son planas. Por ejemplo, dados dos radios a, b con $b > a > 0$, hay un encaje de \mathbb{T}^2 en \mathbb{R}^3 dada por la ecuación $(r-b)^2 + z^2 = a^2$ en coordenadas cilíndricas; la métrica usual en \mathbb{R}^3 restringida a esta superficie impone sobre \mathbb{T}^2 una métrica curva, es decir, una métrica con algunos coeficientes de Christoffel no nulos.

El toro \mathbb{T}^2 también posee²³ un módulo espinorial libre, $\mathcal{S} = C^\infty(\mathbb{T}^2) \oplus C^\infty(\mathbb{T}^2)$; la acción de Clifford de $\mathcal{A}^1(\mathbb{T}^2)$ sobre \mathcal{S} está dada por

$$c(d\phi_1) := \sigma_1, \quad c(d\phi_2) := \sigma_2.$$

La conexión de espín satisface $\nabla_{\partial_j}^{\mathcal{S}} = \partial_j$, actuando como derivada parcial sobre los dos componentes de un espinor, ya que cada $\Gamma_{ij}^k = 0$. Entonces el operador de Dirac sobre \mathbb{T}^2 está dado por

$$\not{D} := -i\sigma_1\partial_1 - i\sigma_2\partial_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & 0 \end{pmatrix},$$

como operador lineal $\not{D}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. Al completar $\mathcal{S} = C^\infty(\mathbb{T}^2) \oplus C^\infty(\mathbb{T}^2)$ al espacio de Hilbert $H = L^2(\mathbb{T}^2) \oplus L^2(\mathbb{T}^2)$, se obtiene un operador autoadjunto (no acotado) sobre H , también denotado por \not{D} .

Definición 6.10. Para definir un operador de Dirac para un *toro no conmutativo* \mathbb{T}_θ^2 , es cuestión de seguir estos pasos por estricta analogía, omitiendo aquellos pasos que exigen construcciones “puntuales” (como por ejemplo, la identificación de un fibrado espinorial). Entonces $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ se reemplaza por el álgebra suave $\mathcal{A}_\theta = C^\infty(\mathbb{T}_\theta^2)$; las derivadas parciales ∂_1, ∂_2 —vistos como campos vectoriales sobre \mathbb{T}^2 — se mudan en las derivaciones básicas δ_1, δ_2 del álgebra $C^\infty(\mathbb{T}_\theta^2)$. El módulo espinorial para \mathbb{T}^2 queda sustituido por la suma directa directa de dos copias del álgebra suave, $\mathcal{S} := C^\infty(\mathbb{T}_\theta^2) \oplus C^\infty(\mathbb{T}_\theta^2)$. El *operador de Dirac* D se define sobre este dominio como²⁴

$$D := -i\sigma_1\delta_1 - i\sigma_2\delta_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & \delta_1 - i\delta_2 \\ \delta_1 + i\delta_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

El **espacio espinorial** es el espacio de Hilbert

$$H := L^2(\mathcal{A}_\theta, \tau) \oplus L^2(\mathcal{A}_\theta, \tau),$$

en la cual \mathcal{S} es un subespacio denso. El operador D de (6.12) debe considerarse como operador autoadjunto no acotado sobre H , con dominio denso \mathcal{S} .

²³En contraste con los casos de \mathbb{S}^2 y \mathbb{S}^3 , hay varias posibilidades inequivalentes para el módulo espinorial sobre \mathbb{T}^2 . El caso libre, que corresponde a un fibrado espinorial trivial $\mathcal{S} = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}^2$, es el caso más sencillo.

²⁴En adelante, conviene reservar la notación de Feynman \not{D} para el caso conmutativo, usando la letra D para sus homónimos no conmutativos. Es fácil comprobar que tanto \not{D} como D son *formalmente* autoadjuntos sobre sus dominios \mathcal{S} en cada caso. Un teorema de Wolf (1972) asegura que \not{D} se extiende a un dominio más grande, como operador autoadjunto; y lo mismo vale para D .

Sobre el espacio espinorial H también se distinguen otro los siguientes operadores, expresadas en una notación matricial:

$$\pi(a) := \begin{pmatrix} \pi_\tau(a) & 0 \\ 0 & \pi_\tau(a) \end{pmatrix}, \quad \Gamma := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & -J_\tau \\ J_\tau & 0 \end{pmatrix}.$$

El operador Γ , que coincide con σ_3 en este caso, es el análogo directo del (operador de multiplicación por) χ , el elemento quiral para la acción de Clifford sobre el toro. Este Γ es un **operador de graduación**: es acotado, autoadjunto y unitario a la vez; como tal, su espectro consta de dos autovalores, $+1$ y -1 . La suma directa $H = L^2(A_\theta, \tau) \oplus L^2(A_\theta, \tau)$ descompone H en los autoespacios correspondientes.

Los operadores $\{\pi(a) : a \in A\}$ constituyen una representación de la C^* -álgebra $A = C(\mathbb{T}_\theta^2)$ sobre H . Esta representación es *par*, es decir, conmuta con la graduación:

$$\pi(a)\Gamma = \Gamma\pi(a) \quad \text{para todo } a \in A,$$

porque es diagonal en su presentación matricial.

En cambio, el operador “antidiagonal” J es *impar*, es decir, anticonmuta con Γ ; y además, su cuadrado es -1 :

$$J\Gamma = -\Gamma J, \quad J^2 = -1.$$

Una propiedad importante del operador de Dirac es que sus conmutadores con los operadores de multiplicación son operadores acotados. En este caso no conmutativo, se considera $\pi(a)$ como un operador de multiplicación *a la izquierda* sobre H . Para calcular, los conmutadores $[D, \pi(a)]$, conviene abreviar

$$\delta := \delta_1 - i\delta_2, \quad \bar{\delta} := \delta_1 + i\delta_2,$$

de modo que

$$[D, \pi(a)] = -i \left[\begin{pmatrix} 0 & \delta \\ \bar{\delta} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi_\tau(a) & 0 \\ 0 & \pi_\tau(a) \end{pmatrix} \right] = -i \begin{pmatrix} 0 & [\delta, \pi_\tau(a)] \\ [\bar{\delta}, \pi_\tau(a)] & 0 \end{pmatrix}.$$

Para $a, b \in A_\theta$ y $j = 1, 2$, se obtiene

$$[\delta_j, \pi_\tau(a)](b) = \delta_j(ab) - \pi_\tau(a)\delta_j(b) = \pi_\tau(\delta_j a)(b),$$

porque $\delta_j(ab) - a\delta_j(b) = \delta_j(a)b$ en A_θ . Luego $[\delta, \pi_\tau(a)] = \pi_\tau(\delta a)$ y también $[\bar{\delta}, \pi_\tau(a)] = \pi_\tau(\bar{\delta} a)$, así que

$$[D, \pi(a)] = -i \begin{pmatrix} 0 & \pi_\tau(\delta a) \\ \pi_\tau(\bar{\delta} a) & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.13)$$

el cual es un *operador acotado*, si $a \in \mathcal{A}_\theta = C^\infty(\mathbb{T}_\theta^2)$. Fíjese que es necesario que el elemento a esté al menos en el dominio común de las derivaciones δ_1 y δ_2 para que $[D, \pi(a)]$ fuera acotado.

El operador J es *antiunitario* si H es dotado de la suma directa de los productos escalares de las dos copias de $L^2(\mathcal{A}_\theta, \tau)$; esto es, $\langle J\xi | J\eta \rangle = \langle \eta | \xi \rangle$ para $\xi, \eta \in H$. El uso de J permite definir operadores de multiplicación *a la derecha* sobre H , por

$$\pi'(c) := J\pi(c^*)J^{-1} = \begin{pmatrix} -J_\tau\pi_\tau(c^*)J_\tau & 0 \\ 0 & -J_\tau\pi_\tau(c^*)J_\tau \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \pi'_\tau(c) & 0 \\ 0 & \pi'_\tau(c) \end{pmatrix}.$$

Como cada $\pi'_\tau(c)$ conmuta con $\pi_\tau(\delta a)$ y $\pi_\tau(\overline{\delta a})$ para $a, c \in \mathcal{A}_\theta$, se concluye que estos operadores sobre H también conmutan:

$$[D, \pi(a)] \text{ conmuta con } \pi'(c), \text{ para todo } a, c \in \mathcal{A}_\theta. \quad (6.14)$$

¿Cuál es el significado de esta condición? Si se regresa por un momento al caso conmutativo $\theta = 0$, se ve que $[\not{D}, \pi(a)]$, para $a \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, es una matriz (impar) de operadores de multiplicación, porque \not{D} es un *operador diferencial de primer orden*; mientras $\pi'(c)$ es una matriz (par) de operadores de multiplicación, que conmuta con aquella. La relación (6.14) entonces expresa el sentimiento que D es “moralmente” un operador diferencial de primer orden; por tanto, a esta fórmula (6.14) se le llama la **condición de primer orden** para los tres objetos \mathcal{A}_θ , H y D . Esta es una primera instancia no trivial de un *triple spectral*.

7 Distancia y dimensión

El operador de Dirac sobre las variedades riemannianas compactas y con estructura de espín ha sido, en las secciones anteriores, el objeto central de nuestra atención. En primer lugar, la interacción del operador de Dirac con el álgebra de coordenadas de la variedad proporciona la distancia geodésica entre dos puntos,¹ como ya fue ejemplificado en el caso del círculo en el Capítulo 3. En segundo lugar, como luego veremos, el espectro del operador de Dirac determina la dimensión de la variedad. El operador de Dirac juega un tercer papel, que veremos más adelante, porque facilita una realización algebraica de la forma de volumen sobre la variedades riemanniana,

7.1 El operador de Dirac revisitado

Después de haber visto varios ejemplos particulares de operadores de Dirac en los capítulos anteriores, ya es hora de recapitular su construcción en general. Nuestro punto de partida es una variedad diferencial M compacta y sin frontera, dotada de una métrica riemanniana g . A cada tal par (M, g) le corresponde una única conexión

$$\nabla = \nabla^g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M) : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

llamada de Levi-Civita, libre de torsión y compatible con la métrica en el sentido de las relaciones (4.12). Después de una elección de bases locales $\{E_a\}$ de campos vectoriales, que son ortonormales con respecto a la métrica: $g(E_a, E_b) = \delta_{ab}$, dicha conexión se expresa en la forma

$$\nabla_{E_a} E_b = \widehat{\Gamma}_{ab}^c E_c,$$

para ciertas funciones suaves $\widehat{\Gamma}_{ab}^c \in C^\infty(M)$.

La conexión de Levi-Civita es un primer ejemplo del concepto de una *conexión* sobre el $C^\infty(M)$ -módulo de secciones $\mathcal{E} = \Gamma(M, E)$ de un fibrado vectorial $E \rightarrow M$:

$$\nabla^E : \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} : (X, s) \mapsto \nabla_X^E s,$$

que es $C^\infty(M)$ -lineal en X y \mathbb{C} -lineal en s , de modo tal que cada aplicación $s \mapsto \nabla_X^E s$ cumple una regla de Leibniz: $\nabla_X^E (sf) = (\nabla_X^E s)f + sX(f)$ para $f \in C^\infty(M)$.

¹Esta propiedad de la distancia métrica fue observada en: Alain Connes, "Compact metric spaces, Fredholm modules, and hyperfiniteness", *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **9** (1989), 207–220.

En ciertos casos, es posible *asociar* una tal conexión ∇^E a la conexión ∇ de Levi-Civita, si el fibrado E se construye a partir del fibrado tangente por alguna receta particular. Para el fibrado cotangente $T^*M \rightarrow M$, cuyas fibras son los espacios vectoriales duales de los espacios tangentes: $T_x^*M = (T_xM)^* = \text{Hom}_{\text{Vect}}(T_xM, \mathbb{R})$, hay una *conexión dual* (también denotado por ∇) de Levi-Civita:

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{A}^1(M) \rightarrow \mathcal{A}^1(M) : (X, \alpha) \mapsto \nabla_X \alpha,$$

donde $\mathcal{A}^1(M) = \Gamma(M, (T^*M)^\mathbb{C})$ es el módulo de 1-formas diferenciales complejas. Si se eligen bases ortonormales locales $\{\vartheta^a\}$, duales a las bases locales de campos vectoriales $\{E_a\}$, la conexión dual de Levi-Civita queda determinada por

$$\nabla_{E_a} \vartheta^c = -\widehat{\Gamma}_{ab}^c \vartheta^b,$$

como ya fue ejemplificado en la Sección 5.2.

El segundo ejemplo de una conexión asociada requiere que la variedad riemanniana posea una estructura de espín, dada por un (bi)módulo espinorial \mathcal{S} . Este es un módulo (a la derecha, digamos) para $C^\infty(M)$ y a la vez un módulo a la izquierda² para una acción de Clifford c de las 1-formas $\mathcal{A}^1(M)$ en el sentido de la Definición 4.18, dado por operadores

$$c(\alpha) : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, \quad \text{para } \alpha \in \mathcal{A}^1(M),$$

tales que esta acción sea irreducible.³ Por el teorema de Serre y Swan, el *módulo de Clifford* \mathcal{S} es de la forma $\mathcal{S} = \Gamma(M, S)$, donde $S \rightarrow M$ es el **fibrado espinorial** correspondiente. Hay una *conexión de espín* sobre \mathcal{S} asociada a la conexión de Levi-Civita,

$$\nabla^S : \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} : (X, \psi) \mapsto \nabla_X^S \psi,$$

Dicha conexión de espín se expresa localmente por la fórmula

$$\nabla_{E_a}^S = E_a \psi - \frac{1}{4} \widehat{\Gamma}_{ab}^c \gamma^b \gamma_c \psi,$$

²La acción de Clifford de $\mathcal{A}^1(M)$ conmuta con la multiplicación por funciones de $C^\infty(M)$ porque $c(\alpha)f = c(f\alpha) = fc(\alpha)$. Entonces \mathcal{S} debe ser un \mathcal{B} - \mathcal{A} -bimódulo, donde $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ es un álgebra conmutativa, mientras \mathcal{B} es el *álgebra* formado por sumas finitas de productos $c(\alpha)c(\beta)\dots c(\kappa)$ sujetas a las relaciones (4.17).

³Siempre es posible hallar módulos *reducibles* para una acción de Clifford de $\mathcal{A}^1(M)$. Un ejemplo es $\mathcal{A}^\bullet(M) = \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{A}^k(M)$, las formas diferenciales de todos los órdenes, al poner $c(\alpha)(\omega) := \alpha \wedge \omega + \iota_{\alpha^\sharp} \omega$, donde el segundo sumando es la contracción de la forma diferencial ω con el campo vectorial α^\sharp . Pero este módulo de Clifford no es irreducible. La búsqueda de un módulo espinorial, irreducible, enfrenta obstrucciones topológicas; la variedad M es de espín cuando estas obstrucciones resultan superables. Véase, por ejemplo, la sección 9.2 de [E-NCG].

donde $\gamma_a \equiv \gamma^a := c(\vartheta^a)$ son las llamadas “matrices gamma”⁴ y $E_a\psi$ denota la acción del campo vectorial E_a sobre los componentes, en una base local, del espinor ψ .

En la Definición 4.24, introducimos el *operador de Dirac* como una aplicación lineal $\not{D}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. Su expresión local (4.20) es independiente de las bases locales de campos vectoriales y 1-formas usadas (siempre que estas bases sean mutuamente duales). Con respecto a las bases locales ortonormales E_a , este operador es

$$\not{D} = -i\gamma^a(E_a - \frac{1}{4}\widehat{\Gamma}_{ab}^c\gamma^b\gamma^c). \quad (7.1)$$

Para poder hablar sin ambigüedades de los autovalores y autovectores de \not{D} , es necesario completar el módulo espinorial \mathcal{S} en un espacio de Hilbert H , a cuyos elementos se les llama espinores.⁵ (El módulo \mathcal{S} posee un producto escalar, cuya naturaleza será discutida más abajo.) Como la variedad riemanniana M es compacta, resulta que el operador \not{D} no sólo es formalmente autoadjunto sobre su dominio \mathcal{S} , sino que se extiende a un operador autoadjunto sobre H (definido en un dominio mayor), con un espectro discreto pero no acotado.

⁴Por lo visto, cada conexión ∇^E asociada a ∇ tiene el aspecto local $\nabla_X^E = X + \dot{\mu}(X)$, donde $\dot{\mu}$ es una *representación* “infinitesimal” del álgebra de Lie generado por los campos vectoriales X ; esto es, una aplicación lineal con valores en el fibrado de endomorfismos $\text{End}E \rightarrow X$, que cumple $\dot{\mu}([X, Y]) = [\dot{\mu}(X), \dot{\mu}(Y)]$. Los coeficientes $\widehat{\Gamma}_{ab}^c$ son antisimétricas en los índices b, c , debido a la ortogonalidad de los campos vectoriales E_a . En cada punto x , la aplicación $\widehat{\Gamma}_{a\bullet}^c(x) \mapsto \frac{1}{4}\widehat{\Gamma}_{ab}^c(x)\gamma^b\gamma^c$ lleva matrices antisimétricas en $\text{End}(T_xM)$ en operadores lineales de $\text{End}(S_x)$, respetando los conmutadores. Esta es la llamada **representación de espín infinitesimal**. Véase, por ejemplo, la sección 5.3 de [E-NCG].

⁵Un operador autoadjunto D sobre un espacio de Hilbert H cumple el **teorema espectral**, que permite expresar D como un tipo de integral de Stieltjes $D = \int_{\Omega} \lambda dE(\lambda)$, de modo que la fórmula $f(D) = \int_{\Omega} f(\lambda) dE(\lambda)$ es válida para una amplia clase de funciones definidas sobre el **espectro** $\Omega = \text{sp}(D)$. Este espectro se define como $\text{sp}(D) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (D - \lambda)^{-1} \text{ no existe}\}$. El operador de Dirac sobre una variedad de espín compacta M posee un *espectro discreto de multiplicidad finita* y esta integral es una sumatoria $D = \sum_j \lambda_j E_j$ donde cada λ_j es un autovalor y cada E_j es un proyector ortogonal en $\mathcal{L}(H)$ con rango finitodimensional; con $f(D) = \sum_j f(\lambda_j) E_j$.

El espectro es *real* si D es autoadjunto. Si T es un operador *acotado* sobre H , su espectro es una parte *compacta* de \mathbb{C} ; T posee una presentación integral del mismo tipo. Toda esta maquinaria requiere que H sea un espacio de Hilbert; un mero espacio de Banach no sería suficiente. La completitud de H es necesario para garantizar la existencia de operadores como $f(H)$ que podrían definirse como límites de ciertas sumas de Riemann.

7.2 Medición de distancias con el operador de Dirac

De la expresión explícita (4.20a) para el operador de Dirac, se verifica la siguiente fórmula⁶ para el conmutador $[\mathcal{D}, f] \equiv [\mathcal{D}, M_f]$, si $f \in C^\infty(M)$, si $\psi \in \mathcal{S}$:

$$[\mathcal{D}, f] \psi \equiv \mathcal{D}(f\psi) - f\mathcal{D}\psi = -i\gamma^a (E_a(f\psi) - fE_a\psi) = -i(E_af)\gamma^a\psi,$$

porque el operador de multiplicación por f conmuta con el término $\frac{i}{4}\widehat{\Gamma}_{ab}^c\gamma^a\gamma^b\gamma^c$ de (7.1). Por lo tanto,

$$[\mathcal{D}, f] \psi = -i(E_af)c(\vartheta^a)\psi = -i(\partial_j f)c(dx^j)\psi = -ic(df)\psi,$$

donde $df = (\partial_j f)dx^j = (E_af)\vartheta^a$ es la diferencial de f . En particular, $[\mathcal{D}, f]$ es un *operador acotado* sobre el subespacio denso \mathcal{S} de H ; como tal, se extiende por continuidad a un operador acotado sobre H , que será denotado por el mismo nombre:

$$[\mathcal{D}, f] = -ic(df) \in \mathcal{L}(H). \quad (7.2)$$

Para confirmar que $c(df)$ es efectivamente un operador acotado, hay que explicar en más detalle el origen del producto escalar en el espacio de Hilbert de espinores.

Definición 7.1. Sea $E \rightarrow M$ un fibrado vectorial complejo sobre una variedad compacta M . Dícese que este es un **fibrado vectorial hermítico** si cada fibra E_x está dotado de un producto escalar definida positiva $\langle \cdot | \cdot \rangle_x$, de tal manera que si $s, t \in \Gamma(M, E)$ son dos secciones, entonces el **apareamiento hermítico**⁷

$$(s | t) : x \mapsto \langle s(x) | t(x) \rangle_x$$

es una función suave sobre M . De esta manera, se define una función

$$(\cdot | \cdot) : \Gamma(M, E) \times \Gamma(M, E) \rightarrow C^\infty(M)$$

que es *sesquilineal*, es decir, $C^\infty(M)$ -antilineal en la primera variable y $C^\infty(M)$ -lineal en la segunda variable; obedece $\overline{(s | t)} = (t | s)$; y es definida positiva, en el sentido de que la función $(s | s)$ es no negativa para todo s pero es la función nula sólo si $s = 0$.

Como ejemplo, si g es una métrica riemanniana sobre M , el fibrado tangente complexificado $(TM)^\mathbb{C} \rightarrow M$ es un fibrado vectorial hermítico, al definir

$$(Y | Z) : x \mapsto g_x(\overline{Y_x}, Z_x), \quad \text{para todo } Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

⁶Es tradicional escribir f , en vez de M_f , para el operador de multiplicación por la función f .

⁷Algunos autores dicen que $(\cdot | \cdot)$ es un *producto interno*, lo cual arriesga una confusión con el *producto escalar* $\langle \cdot | \cdot \rangle$ de un espacio de Hilbert.

Dualmente, el fibrado cotangente complexificado $(T^*M)^{\mathbb{C}} \rightarrow M$ es otro fibrado vectorial hermítico, donde $(\alpha | \beta) : x \mapsto g_x^{-1}(\overline{\alpha(x)}, \beta(x))$, para $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^1(M)$.

Definición 7.2. Si M es una variedad riemanniana compacta de espín, con dimensión $n = 2m$ ó $n = 2m + 1$, entonces la fibra típica F del fibrado espinorial $S \xrightarrow{F} M$ es un espacio vectorial complejo de dimensión 2^m , dotado de un producto escalar.⁸ De este modo, el fibrado espinorial resulta ser un fibrado espinorial hermítico.

Cada métrica riemanniana g determina una n -forma de volumen $v_g \in \mathcal{A}^n(M)$, que define una **integral** sobre M , normalizada (si se quiere)⁹ tal que $\int_M v_g = 1$. La integral del *apareamiento* $(\phi | \psi)$ de dos espinores define un **producto escalar**:

$$\langle \phi | \psi \rangle := \int_M (\phi | \psi) v_g. \quad (7.3)$$

La completación del módulo espinorial $\mathcal{S} = \Gamma(M, S)$ con respecto a este producto escalar es el espacio de Hilbert $H = L^2(M, S)$ de “espinores de cuadrado integrable”.

Antes de calcular la norma como operador de $c(df)$, para $f \in C^\infty(M)$, conviene introducir el dual de la 1-forma df .

Definición 7.3. Sea (M, g) una variedad riemanniana. El **gradiente** de una función $f \in C^\infty(M)$ es el campo vectorial que corresponde a la 1-forma df bajo es isomorfismo $\mathfrak{X}(M) \simeq \mathcal{A}^1(M)$ determinada por la métrica g :

$$\text{grad } f := (df)^\sharp, \quad \text{o bien} \quad g(\text{grad } f, Y) = \langle df, Y \rangle = Y(f) \text{ si } Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (7.4)$$

En la métrica usual de \mathbb{R}^n , para la cual $(dx^j)^\sharp = \partial_j$, la expansión $df = (\partial_j f) dx^j$ implica que $\text{grad } f = \sum_j (\partial_j f) \partial_j$, como ya se sabe.

Obsérvese que si $f, h \in C^\infty(M)$, entonces

$$g(\text{grad } f, \text{grad } h) = \langle df, \text{grad } h \rangle = g^{-1}(df, (\text{grad } h)^\flat) = g^{-1}(df, dh).$$

⁸Sería fatigoso construir este fibrado en detalle, pero estas son las ideas principales. En el caso par, $n = 2m$, el espacio vectorial real $T_x^*M \simeq \mathbb{R}^{2m}$ puede identificarse con el espacio vectorial complejo \mathbb{C}^m , con su producto escalar usual, de muchas maneras (es cuestión de hallar un operador g_x -ortogonal J_x sobre T_x^*M tal que $J_x^2 = -1$, que juega el papel de la multiplicación por i). Luego se forma el álgebra exterior $S_x := \Lambda^\bullet \mathbb{C}^m$, de dimensión 2^m . Es posible construir *-isomorfismos $c_x: \mathcal{C}\ell(T_x^*M) \rightarrow \mathcal{L}(S_x)$ de tal manera que todo depende suavemente de x . Para los detalles de estas **representaciones de Fock**, remitimos a la sección 5.3 de [E-NCG].

⁹Estas formas de volumen normalizadas para las esferas \mathbb{S}^n ($n = 1, 2, 3$) son las siguientes: para \mathbb{S}^1 , $v_g = (2\pi)^{-1} d\theta$; para \mathbb{S}^2 , $v_g = (4\pi)^{-1} \sin \theta d\theta d\phi$; para \mathbb{S}^3 , $v_g = (16\pi^2)^{-1} \sin \theta d\alpha d\beta d\gamma$.

En el espacio $\mathfrak{X}(M)$ de campos vectoriales (complejos), se puede introducir la “norma del supremo” $z \mapsto \|Z\|_\infty$ por

$$\|Z\|_\infty^2 := \sup_{x \in M} |Z_x|_x^2 \equiv \sup_{x \in M} g_x(\bar{Z}_x, Z_x),$$

es decir, como el supremo de la longitud del vector Z_x para $x \in M$. Entonces la norma de $c(df)$ está dada por¹⁰

$$\begin{aligned} \|c(df)\|^2 &= \sup_{x \in M} |c(df(x))|_x^2 = \sup_{x \in M} g_x^{-1}(d\bar{f}(x), df(x)) \\ &= \sup_{x \in M} g_x((\text{grad } \bar{f})_x, (\text{grad } f)_x) = \|\text{grad } f\|_\infty^2. \end{aligned} \quad (7.5a)$$

Al combinar esta igualdad con (7.2), obtenemos

$$\|[\mathcal{D}, f]\| = \|\text{grad } f\|_\infty, \quad \text{para todo } f \in C^\infty(M). \quad (7.5b)$$

De hecho, esta igualdad sigue válida para una clase de funciones f más amplia. Es suficiente que la función f sea continua, diferenciable una vez salvo en un número finito de singularidades, con un gradiente acotado (la función $x \mapsto |(\text{grad } f)_x|_x$, descontando los puntos singulares, debe ser acotada). A tales f se les llama **funciones de Lipschitz** con respecto a la métrica g , que entra en la definición del gradiente.

Lema 7.4. *La distancia geodésica $d(p, q)$ entre dos puntos de una variedad riemanniana (M, g) compacta y conexa está dada por la fórmula*

$$d(p, q) = \sup\{|f(p) - f(q)| : f \in C(M), \|\text{grad } f\|_\infty \leq 1\}. \quad (7.6)$$

Demostración. La definición de la distancia geodésica $d(p, q)$ involucra la minimización de la longitud de los caminos en M , suaves por trozos, que proceden desde p a q . (Un camino de longitud mínima, si existe, es una *geodésica* de M entre p y q ; la conexidad de M garantiza que hay al menos un camino entre p y q .) Entonces se parte de la fórmula definitoria

$$d(p, q) := \inf\{\ell(\gamma) : \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\},$$

donde cada camino $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ es suave por trozos. La suavidad por trozos dice que en cada $t \in [0, 1]$ —descartando un número finito de excepciones— hay

¹⁰En este cálculo se usan implícitamente los *-isomorfismos de C^* -álgebras finitodimensionales $c_x: \mathcal{C}\ell(T_x^*M) \rightarrow \mathcal{L}(S_x)$ para obtener la coincidencia de normas en la segunda igualdad de (7.5).

un vector tangente $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$; la longitud del camino γ es (por definición) la integral de las longitudes de estos vectores tangentes:

$$\ell(\gamma) := \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|_{\gamma(t)} dt.$$

Ahora bien, si $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ es una función suave (o inclusive, de Lipschitz), el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena muestran que

$$\begin{aligned} f(q) - f(p) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = \int_0^1 \langle df_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t) \rangle dt \\ &= \int_0^1 g_{\gamma(t)}((\text{grad } f)_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t)) dt. \end{aligned}$$

La desigualdad de Schwarz, aplicada en el espacio finitodimensional $(T_x M)^{\mathbb{C}}$, con $x = \gamma(t)$, permite estimar el integrando:

$$|g_x((\text{grad } f)_x, \dot{\gamma}(t))|_x \leq |(\text{grad } f)_x|_x |\dot{\gamma}(t)|_x.$$

El primer factor a la derecha es mayorizado por su supremo $\|\text{grad } f\|_{\infty}$. La desigualdad triangular para integrales conduce a la estimación

$$\begin{aligned} |f(q) - f(p)| &\leq \int_0^1 |g_{\gamma(t)}((\text{grad } f)_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t))|_{\gamma(t)} dt \\ &\leq \|\text{grad } f\|_{\infty} \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|_{\gamma(t)} dt = \|\text{grad } f\|_{\infty} \ell(\gamma). \end{aligned}$$

Al tomar el supremo sobre todas las funciones admisibles f y el ínfimo sobre todos los caminos relevantes γ , se obtiene

$$\sup\{|f(p) - f(q)| : f \in C(M), \|\text{grad } f\|_{\infty} \leq 1\} \leq d(p, q).$$

Para establecer la igualdad en esta relación, hay que encontrar una función de Lipschitz f en donde le supremo se alcanza. Basta considerar, por ejemplo, la función $f_p: q \mapsto d(p, q)$. Como indica el ejemplo del círculo, esta función generalmente no es suave en el punto p , pero sí es de Lipschitz. \square

Corolario 7.5. *La distancia geodésica $d(p, q)$ entre dos puntos de una variedad riemanniana (M, g) compacta y conexa está dada por la fórmula*

$$d(p, q) = \sup\{|f(p) - f(q)| : f \in C(M), \|[D, f]\| \leq 1\}. \quad (7.7)$$

Demostración. Basta sustituir la relación (7.5b) en la fórmula (7.6). \square

Observación. Esta fórmula para la distancia entre dos puntos admite una generalización para “espacios no conmutativos” donde los puntos son escasos. Si \mathcal{A} es un álgebra unital, no necesariamente conmutativa, actuando sobre un espacio de Hilbert H , su compleción en la norma de operadores es una C^* -álgebra unital A . Los *estados* de A —las formas lineales positivas $\mu: A \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $\mu(1) = 1$ — forman un conjunto convexo en el espacio vectorial dual A^* . En el caso de que $A = C(X)$ es conmutativa, los puntos extremos de este conjunto convexo, los llamados *estados puros*, son precisamente los caracteres $\{\varepsilon_x: x \in X\}$ que evalúan las funciones coordenadas en los puntos de X . Un álgebra no conmutativa puede tener pocos caracteres, pero siempre posee muchos estados (las combinaciones lineales de los estados llenan el espacio dual).

Si D es un operador autoadjunto sobre H tal que el operador $[D, a]$ es acotado¹¹ para toda $a \in \mathcal{A}$, entonces la expresión

$$d(\mu, \nu) := \sup\{|\mu(a) - \nu(a)| : a \in \mathcal{A}, \|[D, a]\| \leq 1\}$$

define una función de distancia entre los estados del álgebra A . La aplicación $a \mapsto \|[D, a]\|$ es una seminorma sobre \mathcal{A} .¹²

7.3 Dimensión espectral

La segunda propiedad interesante del operador de Dirac es la observación que la dimensión n de la variedad de espín M puede determinarse a partir del “crecimiento espectral” (el comportamiento de los autovalores grandes) del operador de Dirac.

En esta sección exploramos esta relación, ejemplificando con las esferas de baja dimensión que hemos estudiado hasta ahora.

Sobre variedades compactas, el operador de Dirac posee espectro discreto, con cada autovalor de multiplicidad finita.¹³ Más aún, el siguiente resultado es válido.

¹¹En forma más precisa: cada $a \in \mathcal{A}$ debe preservar el dominio $\text{Dom} D$ y $[D, a]$ debe ser acotado como operador sobre $\text{Dom} D$, de modo que se extiende a un operador acotado sobre H . Como de costumbre, se denota este operador y su restricción al subespacio denso $\text{Dom} D$ por el mismo nombre $[D, a]$.

¹²Hasta cierto punto, se puede sustituir el papel del operador de Dirac, al estudiar en su lugar tales *seminormas de Lipschitz*. Este punto de vista ha sido desarrollado por Marc Rieffel en una teoría de espacios métricos no conmutativos. Véase, por ejemplo: Marc A. Rieffel, “Compact quantum metric spaces”, *Contemporary Mathematics* **365** (2004), 315–330.

¹³Estas propiedades se deben, en última instancia, a la propiedad de *elipticidad* de \mathcal{D} , por ser un operador diferencial de primer orden sobre una variedad compacta.

Lema 7.6. *Existe una base ortonormal completa $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3 \dots\}$ del espacio de Hilbert $L^2(M, S)$ que consiste de autoespinores del operador de Dirac,¹⁴*

$$\mathcal{D}\psi_n = \lambda_n \psi_n, \quad \text{con} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty. \quad \square$$

Es precisamente este crecimiento de los autovalores del operador de Dirac lo que permitirá obtener una pieza de información geométrica, a saber, la *dimensión métrica* o **dimensión espectral** de la variedad compacta sobre la cual está definido el operador de Dirac.

Lo primero que hay que observar es que, como el operador de Dirac posee núcleo finitodimensional, el operador $|\mathcal{D}|^{-s} = (\mathcal{D}^2)^{-s/2}$ está bien definido, para cualquier valor $s > 0$, sobre el complemento ortogonal de $\ker(\mathcal{D})$. Sobre este espacio de Hilbert¹⁵ $L^2(M, S) \ominus \ker(\mathcal{D})$, este $|\mathcal{D}|^{-s}$ es un operador positivo cuyos autovalores son precisamente

$$|\lambda_1|^{-s} \geq |\lambda_2|^{-s} \geq \dots \geq |\lambda_n|^{-s} \geq \dots \quad \text{con} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_1|^{-s} = 0.$$

Como $\{k : |\lambda_k|^{-s} > \varepsilon\}$ es finito para cada $\varepsilon > 0$, esto quiere decir que cualquier autovalor específico aparece repetido sólo un número finito de veces, es decir, los autovalores positivos de $|\mathcal{D}|^{-s}$ tiene *multiplicidad finita*. (Fíjese que la sucesión $(|\lambda_k|^{-s})_k$ es una enumeración con repeticiones de estos autovalores positivos.)

En un espacio de Hilbert H , los operadores compactos y positivos se caracterizan por esta propiedad,¹⁶ es decir, un operador compacto y positivo A sobre un espacio de Hilbert H posee por espectro una cantidad contable de autovalores positivos $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$, cada uno de multiplicidad finita, y dicha colección de autovalores se puede arreglar en orden decreciente a 0.

¹⁴Para una demostración detallada, véase la Sección 4.2 del libro: Thomas Friedrich, *Dirac Operators in Riemannian Geometry* (American Mathematical Society, Providence, RI, 2000).

¹⁵La formación de “suma directa ortogonal” de dos espacios de Hilbert $H \oplus K$, con el producto escalar formado de la suma de los productos escalares originales, es una operación \oplus que no admite inversos. Sin embargo, cuando K es un subespacio cerrado de H , es tradicional escribir $H \ominus K$ para el complemento ortogonal de K en H , porque hay un isomorfismo $H \simeq (H \ominus K) \oplus K$ que preserva productos escalares.

¹⁶Un operador acotado $T \in \mathcal{L}(H)$ es **positivo** si $\langle \xi | T\xi \rangle \geq 0$ para todo $\xi \in H$; esta es una generalización del concepto de matriz definida positiva. Es un teorema de análisis que T es positivo si y sólo T es autoadjunto con espectro positivo; si y sólo $T = S^*S$ para algún operador S (esta condición es el concepto de positividad en una C^* -álgebra); si y sólo si $T = R^2$ para otro operador positivo, el cual es *único*: se escribe $R = T^{1/2}$ en este caso.

Un operador T es **compacto** si la imagen $\{T\xi : \|\xi\| \leq 1\}$ de la bola unitaria cerrada es una parte compacta de H . En este caso, T posee un espectro de autovalores tal que $\text{sp}(T) \setminus \{0\}$ es discreto, es decir, los autovalores no nulos convergen a 0.

Un tal operador compacto y positivo A sobre un espacio de Hilbert H se dice **trazable** si las sumas parciales de su serie de autovalores positivos,

$$\sigma_n(A) := \sum_{0 \leq k < n} \alpha_k, \quad \text{para } n \in \mathbb{N},$$

converge a un límite finito,

$$\text{Tr} A := \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k.$$

Esta traza cumple la propiedad tracial,¹⁷ en el sentido de que $\text{Tr}(UAU^*) = \text{Tr} A$ para cualquier operador unitario U . (Esta es una consecuencia de su definición como función de los autovalores del operador A .)

Esta es la traza usada por Segal para introducir su teoría de “integración no conmutativa” alrededor de 1950. Sin embargo, esta traza *no es la traza correcta* para generalizar la integración ordinaria de funciones sobre una variedad. En 1966, Dixmier introdujo una nueva traza, empleando otra función de los autovalores:¹⁸

$$\text{Tr}^+ A := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n(A)}{\log n},$$

toda vez que este límite existe. Esta Tr^+ es la llamada **traza de Dixmier**¹⁹ del operador positivo A . Es importante notar que $\text{Tr}^+ A$ puede ser $+\infty$, en el sentido de que la sucesión $(\sigma_n(A)/\log n)_n$ puede ser divergente. También hay que notar que un operador positivo que es trazable en el sentido ordinario cumple $\text{Tr}^+ A = 0$, porque $\sigma_n(A)/\log n \rightarrow 0$ cuando la sucesión $(\sigma_n(A))_n$ es acotada.

► En el caso particular de los operadores $|\mathcal{D}|^{-s}$, se observa que existe un único entero $s > 0$, la **dimensión espectral** para el cual el operador $|\mathcal{D}|^{-s}$ tiene traza de

¹⁷No se escribe “ $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ ” para enunciar la propiedad tracial, porque el producto de dos operadores positivos no es positivo en general. Sin embargo, esta ecuación sí es válida sobre un cierto dominio. Dícese que un operador S (no necesariamente positivo) es *trazable* si el operador positivo $|S| := (S^*S)^{1/2}$ tiene traza finita. Resulta que $\text{Tr}(ST) = \text{Tr}(TS)$ si S es trazable y T es acotado. Consúltese el libro de Reed y Simon, *op. cit.*

¹⁸La traza de Dixmier fue introducida en: Jacques Dixmier, “Existence de traces non normales”, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris* **262A** (1966), 1107–1108. Para una discusión de su definición y propiedades, véase el Capítulo 5 de: Joseph C. Várilly, *An Introduction to Noncommutative Geometry* (European Mathematical Society, Zürich, 2006).

¹⁹De hecho, hay una enorme familia de trazas de Dixmier Tr_ω que dependen de diversos “límites generalizados” ω de sucesiones acotadas. Sin embargo, en todos los operadores A cuyas trazas de Dixmier son calculables, ellas coinciden; y su valor común $\text{Tr}^+ A$ puede llamarse *la traza de Dixmier*.

Dixmier *finito y positivo*. Como veremos en los ejemplos que siguen, este s es un número entero que coincide con la dimensión de la variedad de espín M . En forma equivalente, la suma de autovalores

$$\sigma_n(|\mathcal{D}|^{-s}) := \sum_{0 \leq k < n} \lambda_k(|\mathcal{D}|^{-s}) \sim \text{Tr}^+(|\mathcal{D}|^{-s}) \log n \quad \text{conforme } n \rightarrow \infty,$$

con $0 < \text{Tr}^+(|\mathcal{D}|^{-s}) < \infty$. El operador positivo $|\mathcal{D}|^{-s}$ es compacto para todo $s > 0$ y la condición $0 < \text{Tr}^+(|\mathcal{D}|^{-s}) < \infty$ determina el valor de s en forma única.²⁰

7.3.1 La dimensión del círculo

Para el caso del círculo \mathbb{S}^1 , el operador de Dirac viene dado por (3.11):

$$\mathcal{D} = -i \frac{d}{d\theta},$$

porque en este caso unidimensional, el álgebra de Clifford $\mathbb{C}\ell(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}$ está constituido por “matrices 1×1 ” sobre \mathbb{C} , así que $\gamma^1 = c(d\theta) = 1$. Cada $k \in \mathbb{Z}$ es un autovalor de \mathcal{D} con único autovector z^k .

Debemos calcular

$$\text{Tr}^+(|\mathcal{D}|^{-s}) = \text{Tr}^+(\mathcal{D}^2)^{-s/2},$$

para $s > 0$. En principio, como el operador $\mathcal{D}^2 = -d^2/d\theta^2$ tiene un núcleo no trivial (las funciones constantes sobre \mathbb{S}^1 son autovectores para el autovalor $\lambda = 0$), la formación de sus potencias negativas es problemático. En general, el núcleo de un operador de Dirac sobre una variedad de espín compacta es finitodimensional, cuando no es el subespacio nulo. Podemos, entonces, reemplazar el espacio de Hilbert H por el complemento ortogonal de este núcleo, a la hora de calcular trazas de Dixmier.²¹ El espectro de $|\mathcal{D}|^{-s}$ entonces está dado por $\{k^{-s} : k \in \mathbb{N}, k > 0\}$, con cada autovalor de multiplicidad 2.

²⁰Se observará el siguiente comportamiento: la proporcionalidad entre $\sigma_n(|\mathcal{D}|^{-s})$ y $\log n$ tiende a $+\infty$ si s es pequeño; tiende a 0 si s es grande; y hay un *único* valor positivo de s para el cual esta proporción tiende a un valor finito y positivo. Este comportamiento es observado en el cálculo de otras funciones de “dimensión”. En particular, las llamadas *medidas de Hausdorff* $m_s(X)$ de un espacio topológico X poseen un único “valor crítico” s tal que $0 < m_s(X) < \infty$, el cual es la *dimensión de Hausdorff* de X . (Esta dimensión no es necesariamente entero: el conjunto de Cantor usual, por ejemplo, tiene dimensión de Hausdorff $s = \log 2 / \log 3$).

²¹Un procedimiento más sistemático consiste en sustituir $|\mathcal{D}| = (\mathcal{D}^2)^{1/2}$ por el operador $\langle \mathcal{D} \rangle := (1 + \mathcal{D}^2)^{1/2}$, cuyo núcleo es trivial. Los cálculos se vuelven un poco más engorrosos, desde luego.

La traza de Dixmier es el resultado del siguiente cálculo:

$$\mathrm{Tr}^+(|\mathcal{D}|^{-s}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n(|\mathcal{D}|^{-s})}{\log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\log n} \sum_{k=1}^n k^{-s}.$$

La serie de los k^{-s} converge²² siempre que $s > 1$, así que $\mathrm{Tr}^+(|\mathcal{D}|^{-s}) = 0$, si $s > 1$. Para $0 < s < 1$, obsérvese que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n k^{-s} &= \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} k^{-s} dt \\ &\geq \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} t^{-s} dt \\ &= \frac{1}{\log n} \int_1^{n+1} t^{-s} dt = \frac{1}{\log n} \frac{(n+1)^{1-s} - 1}{1-s} \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

por lo cual $\mathrm{Tr}^+(|\mathcal{D}|^{-s})$ diverge a $+\infty$, si $0 < s < 1$.

Por último, para $s = 1$, podemos emplear dos cotas para las sumas parciales de la serie armónica para obtener

$$\begin{aligned} \log n &= \int_1^n \frac{1}{t} dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{k} dt \\ &< 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt = 1 + \int_1^n \frac{1}{t} dt = 1 + \log n, \end{aligned}$$

de modo que

$$2 < \frac{2}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < \frac{2+2\log n}{\log n} = 2 + \frac{2}{\log n} \quad \text{para } n \geq 2,$$

de donde se concluye que

$$\mathrm{Tr}^+(|\mathcal{D}|^{-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 2.$$

²²La suma infinita $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^s =: \zeta(s)$ es la **función zeta de Riemann**, para $s > 1$. Esta serie diverge para $s = 1$, porque en ese caso es la serie armónica. Como función de variable compleja, es posible extender $\zeta(s)$ a otros valores de s , como una función meromorfa con un polo en $s = 1$.

Si $H_n := \sum_{k=1}^n 1/k$ es la n -ésima suma parcial de la *serie armónica*, hemos observado que $\log n < H_n < 1 + \log n$. Entonces se ve que $H_n/\log n \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$ también. En otras palabras,²³

$$H_n \sim \log n \quad \text{conforme } n \rightarrow \infty.$$

En resumen, para el círculo \mathbb{S}^1 ,

$$\mathrm{Tr}^+(|\mathcal{D}|^{-s}) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < 1, \\ 2 & \text{si } s = 1, \\ 0 & \text{si } s > 1, \end{cases}$$

por lo cual la dimensión métrica de \mathbb{S}^1 es 1.

7.3.2 La dimensión de la esfera \mathbb{S}^2

Para la esfera \mathbb{S}^2 , el operador de Dirac está dado por la fórmula (4.22). En este caso, como vimos al final del Capítulo 4,

$$\mathrm{sp}(\mathcal{D}) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} = \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

donde la multiplicidad de cada autovalor $\pm k$ es $2k$, para $k > 0$ en \mathbb{N} (véase el Corolario 4.34).

Una vez más queremos calcular $\mathrm{Tr}^+(|\mathcal{D}|^{-s})$, donde el espectro de $|\mathcal{D}|^{-s}$ está dado por $\{k^{-s} : k \in \mathbb{N}, k > 0\}$, ahora con cada autovalor k^{-s} de multiplicidad $4k$.

En definitiva, queremos calcular

$$\mathrm{Tr}^+(|\mathcal{D}|^{-s}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n(|\mathcal{D}|^{-s})}{\log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\log N_n} \sum_{k=1}^n k^{-(s-1)},$$

donde $N_n = \sum_{k=1}^n 4k = 2n(n+1)$, así que $\log N_n = \log 2 + \log n + \log(n+1) \sim 2 \log n$.

Esta vez se puede notar que el valor crítico para la divergencia de la serie de autovalores es $s = 2$. Al usar el cálculo anterior para el círculo, y el límite

²³En general, se escribe “ $f(x) \sim g(x)$ conforme $x \rightarrow \infty$ ” si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1$. Dícese que las funciones f, g son *asintóticamente iguales* cuando $x \rightarrow \infty$. La misma frase es aplicable para funciones de una variable discreta. De hecho, Leonhard Euler (1735) observó que hay una constante $\gamma \doteq 0.5772156649$, hoy en día llamado la **constante de Euler**, tal que $H_n \sim (\log n) + \gamma$ conforme $n \rightarrow \infty$. Véase: Julian Havil, *Gamma* (Princeton University Press, Princeton, 2003).

$4H_n/2 \log n \rightarrow 2$ cuando $n \rightarrow \infty$, el resultado para la esfera \mathbb{S}^2 es

$$\mathrm{Tr}^+ (|\mathcal{D}|^{-s}) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < 2, \\ 2 & \text{si } s = 2, \\ 0 & \text{si } s > 2, \end{cases}$$

por lo cual la dimensión métrica de la esfera \mathbb{S}^2 es 2.

7.3.3 La dimensión de la esfera \mathbb{S}^3

En la Sección 5 calculamos el operador de Dirac para la esfera \mathbb{S}^3 y su espectro. La fórmula explícita para \mathcal{D} está dada por (5.6). Su espectro, según el Teorema 5.6, es

$$\mathrm{sp}(\mathcal{D}) = \left\{ \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{7}{2}, \dots \right\} = \left\{ \pm \left(k + \frac{3}{2}\right) : k \in \mathbb{N} \right\},$$

al escribir $k = 2j \in \mathbb{N}$ para simplificar la notación. Cada autovalor $\pm \left(k + \frac{3}{2}\right)$ tiene multiplicidad $(k+1)(k+2)$. Como resultado, el operador positivo $|\mathcal{D}|^{-s}$ posee espectro:

$$\mathrm{sp}(|\mathcal{D}|^{-s}) = \left\{ \left(k + \frac{3}{2}\right)^{-s} : k \in \mathbb{N} \right\}, \quad \text{con multiplicidades } 2(k+1)(k+2).$$

No es práctico calcular $\sigma_n(|\mathcal{D}|^{-s})$ para cada valor de n . Sin embargo, como esta expresión crece con n , por ser una suma de términos positivos, basta estimar su crecimiento para ciertos valores espaciales de n . Para $R \in \mathbb{N}$, la totalidad de autovalores de $|\mathcal{D}|$ en las primeras R cascarones es²⁴

$$N_R := \sum_{k=0}^R 2(k+1)(k+2) = \frac{2}{3}(R^3 + 6R^2 + 11R).$$

Fíjese que

$$\log N_R = \log \frac{2}{3} + \log(R^3 + 6R^2 + 11R) \sim \log(R^3) = 3 \log R \quad \text{conforme } R \rightarrow \infty.$$

²⁴La terminología se toma prestado de la química cuántica, donde los niveles acotados de energía de los electrones de un átomo (que son autovalores del operador hamiltoniano) se distribuyen en “cascarones” alrededor del núcleo.

Continuando con el cálculo para los valores $n = N_R$ solamente, se obtiene²⁵

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{N_R}(|D|^{-s})}{\log N_R} &= \frac{1}{\log N_R} \sum_{k=0}^R 2(k+1)(k+2)(k+\frac{3}{2})^{-s} \\ &\sim \frac{2}{3 \log R} \sum_{k=0}^R (k+\frac{3}{2})^2 (k+\frac{3}{2})^{-s} \sim \frac{2}{3 \log R} \int_{3/2}^{R+3/2} t^{2-s} dt. \end{aligned}$$

La integral a la derecha es acotado por $\int_{3/2}^{\infty} t^{2-s} dt$, la cual converge para $2-s < -1$.

En cambio, si $2-s > -1$, es decir, si $0 < s < 3$, el lado derecho es asintóticamente igual a $(\frac{2}{3}(3-s)) R^{3-s}/\log R$, la cual diverge cuando $R \rightarrow \infty$. En el valor crítico $s = 3$, la integral es igual a $\log(R + \frac{3}{2}) - \log \frac{3}{2} \sim \log R$, así que

$$\text{Tr}^+(|\mathcal{D}|^{-s}) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < 3, \\ 2/3 & \text{si } s = 3, \\ 0 & \text{si } s > 3, \end{cases}$$

por lo cual la dimensión métrica de la esfera \mathbb{S}^3 es 3.

7.4 Triples espectrales

Un triple espectral es un conjunto de datos que codifica de alguna manera aspectos geométricos. Un **triple espectral** (\mathcal{A}, H, D) posee tres ingredientes principales:

- ★ un álgebra unital \mathcal{A} , no necesariamente conmutativa;
- ★ un espacio de Hilbert H junto con una representación fiel de \mathcal{A} por operadores acotados, de modo que podemos considerar \mathcal{A} como una subálgebra de $\mathcal{L}(H)$; y
- ★ un operador autoadjunto D sobre H , tal que $1 + D^2$ tiene inverso compacto,²⁶ tal que cada conmutador $[D, a]$ es un operador acotado sobre H , para cada $a \in \mathcal{A}$.

²⁵Si $N_R < n < N_{R+1}$, entonces $\sigma_{N_R}(|D|^{-s})/\log N_{R+1} < \sigma_n(|D|^{-s})/\log n < \sigma_{N_{R+1}}(|D|^{-s})/\log N_R$. A partir de ahí, es un ejercicio comprobar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(|D|^{-s})/\log n$ coincide con el límite, si existe, de la subsucesión obtenida al tomar $n = N_R$ solamente.

²⁶Este D^2 es un operador positivo; se le agrega 1 (el operador identidad) para que $1 + D^2$ sea invertible. Si $\ker D = \{0\}$, entonces tanto D^{-2} como $(1 + D^2)^{-1}$ son operadores compactos positivos.

Dícese que un triple espectral es **par** si existe un operador de graduación Γ sobre H tal que $\Gamma = \Gamma^* \in \mathcal{L}(H)$, $\Gamma^2 = 1$, $\Gamma a = a\Gamma$ para todo $a \in \mathcal{A}$, y $\Gamma D = -D\Gamma$. En caso contrario, el triple espectral es **impar**; y se escribe por conveniencia $\Gamma = 1$.

A lo largo de estos apuntes hemos encontrado motivación en variedades de espín (compactas), en donde el álgebra $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ viene dada por un álgebra de funciones actuando sobre el espacio de Hilbert de espinores de cuadrado integrables $H = L^2(M, S)$ y el operador D es el operador de Dirac \mathcal{D} asociado a la estructura de espín. Del conocimiento de estos tres objetos hemos recuperado aspectos métricos como la distancia geodésica, la cual identifica la variedad como espacio métrico²⁷ y también su dimensión como variedad.

► Otro ejemplo, genuinamente no conmutativo, viene del toro \mathbb{T}_θ^2 . En este caso, tómesese $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{T}_\theta^2)$, el “álgebra suave” del toro no conmutativo; $H = L^2(\mathbb{T}_\theta^2, \tau) \oplus L^2(\mathbb{T}_\theta^2, \tau)$ como el espacio de “espinores”; y D el operador definido por (6.12) por analogía con el operador de Dirac ordinario sobre \mathbb{T}^2 .

La representación $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(H)$ es un isomorfismo de $*$ -álgebras, lo cual nos permite identificar la $*$ -álgebra abstracta \mathcal{A} como una $*$ -álgebra de operadores sobre H . De ahora en adelante, escribiremos a en lugar de $\pi(a)$ para denotar el operador correspondiente al elemento a de \mathcal{A} .

La fórmula (6.13), que ahora podemos reescribir como

$$[D, a] = -i \begin{pmatrix} 0 & \pi_\tau(\delta a) \\ \pi_\tau(\bar{\delta} a) & 0 \end{pmatrix},$$

muestra que cada $[D, a]$, para $a \in \mathcal{A}$, es un operador acotado sobre H .

Para calcular la *dimensión espectral* del toro no conmutativo, hay que determinar el espectro de D (o al menos el de D^2). El operador positivo D^2 es

$$D^2 = - \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ \bar{\delta} & 0 \end{pmatrix}^2 = - \begin{pmatrix} \delta\bar{\delta} & 0 \\ 0 & \bar{\delta}\delta \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \delta\bar{\delta} &= (\delta_1 - i\delta_2)(\delta_1 + i\delta_2) = \delta_1^2 + \delta_2^2, \\ \bar{\delta}\delta &= (\delta_1 + i\delta_2)(\delta_1 - i\delta_2) = \delta_1^2 + \delta_2^2, \end{aligned}$$

²⁷La distancia geodésica entre puntos de M cumple la desigualdad triangular, es decir, $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ y así define una topología sobre la variedad M que coincide con su topología original. Un teorema de Myers y Steenrod (1935) dice que esta distancia determina la métrica riemanniana g sobre M unívocamente, así que d implícitamente impone la estructura riemanniana de la variedad.

porque $\delta_1 \delta_2 = \delta_2 \delta_1 : u^r v^s \mapsto -4\pi^2 r s u^r v^s$. Además, es evidente que el operador $-\delta_1^2 - \delta_2^2$ sobre el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{T}_\theta^2, \tau)$ tiene los siguientes autovalores y autovectores:

$$(-\delta_1^2 - \delta_2^2)(u^r v^s) = 4\pi^2(r^2 + s^2) u^r v^s.$$

Estos autovectores forman una familia ortonormal:

$$\langle u^m v^n | u^r v^s \rangle = \tau(v^{-n} u^{-m} u^r v^s) = \lambda^{n(m-r)} \tau(u^{r-m} v^{s-n}) = \delta_{rm} \delta_{sn},$$

y generan un subespacio denso de $L^2(\mathbb{T}_\theta^2, \tau)$, así que hemos identificado una *base ortonormal de autovectores* para este operador.

Los autovectores para D^2 ya son evidentes:

$$D^2 \begin{pmatrix} u^r v^s \\ 0 \end{pmatrix} = 4\pi^2(r^2 + s^2) \begin{pmatrix} u^r v^s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D^2 \begin{pmatrix} 0 \\ u^r v^s \end{pmatrix} = 4\pi^2(r^2 + s^2) \begin{pmatrix} 0 \\ u^r v^s \end{pmatrix}.$$

Entonces $\text{sp}(D^2) = \{4\pi^2(r^2 + s^2) : r, s \in \mathbb{Z}\}$ con doble multiplicidad para cada par $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$.

Para $s > 0$, entonces, los autovalores de $(D^2)^{-s/2}$ son $(2\pi)^{-s}(r^2 + s^2)^{-s/2}$ para $r^2 + s^2 \geq 1$; hay que omitir los dos autovectores en el núcleo de D^2 .

A la hora de contar $\sigma_n((D^2)^{-s/2})$, hay que arreglar los pares de enteros en anillos concéntricos alrededor de $(0, 0)$, donde $R^2 := r^2 + s^2$ es constante en cada anillo. (Es un problema interesante de la teoría de números averiguar la cardinalidad de cada anillo.) Sea

$$N_R := \#\{(r, s) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leq r^2 + s^2 \leq R^2\} \quad \text{para } R > 0,$$

que es el número de puntos con coordenadas enteros —omitiendo el origen $(0, 0)$ — en un disco de radio R^2 . Entonces $N_R \sim \pi R^2$ conforme $R \rightarrow \infty$. En consecuencia, $\log N_R \sim 2 \log R$ conforme $R \rightarrow \infty$. En consecuencia,

$$\sigma_{N_R}((D^2)^{-s/2}) \sim 2 \sum_{1 \leq r^2 + s^2 \leq R^2} (2\pi)^{-s}(r^2 + s^2)^{-s/2} \sim 2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^R (2\pi\rho)^{-s} \rho \, d\rho \, d\theta.$$

(Se ha reemplazado la suma sobre cuadrados de lado 1 dentro del disco de radio R por la integral doble sobre el disco, en coordenadas polares.)

Fíjese que la integral radial es proporcional a $\int_1^R \rho^{1-s} \, d\rho$. Esta integral diverge más rápidamente que $\log R$ para $0 < s < 2$; y converge a un valor finito para $s > 2$. Para el valor crítico $s = 2$, se obtiene

$$\frac{\sigma_{N_R}(D^{-2})}{\log N_R} \sim \frac{2(2\pi)}{2 \log R} \int_1^R (2\pi)^{-2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2\pi}.$$

Entonces $\text{Tr}^+(D^{-2}) = 1/(2\pi)$ para $s = 2$. La dimensión espectral del toro no conmutativo \mathbb{T}_θ^2 es 2, como siempre era de esperar.

8 El grupo cuántico $SU_q(2)$

Los *espacios no conmutativos*, a veces llamados “espacios cuánticos”, son ciertos “objetos” X que se definen únicamente a través de sus álgebras de coordenadas. Dichas álgebras se construyen de dos maneras principales. Por un lado, hay álgebras finitamente generadas, cuyos generadores satisfacen ciertas relaciones de conmutación; una tal álgebra se denota por $\mathcal{A} = \mathcal{O}(X)$, como si fuera el álgebra de polinomios sobre un espacio X (cosa que puede ser cierta si \mathcal{A} es conmutativa). Por otro lado, hay diversos ejemplos de C^* -álgebras unitales, no necesariamente conmutativas, que se escriben $A = C(X)$, como si fueran álgebras de funciones continuas. En este segundo caso, X sería un objeto en la categoría dual a la categoría de las C^* -álgebras, como una extensión putativa del trabajo de Guelfand y Naïmark.

En el primer caso, se trata de exhibir un número finito de generadores del álgebra, junto con una cantidad finita de *relaciones de conmutación* que estos generadores deben satisfacer. (En caso de necesidad, se les agrega el elemento unidad 1 como generador trivial.) Las sumas finitas de (múltiplos de) productos finitos de generadores entonces conforman el álgebra \mathcal{A} de “polinomios”. En determinados casos, es posible dotar esta álgebra de polinomios de una norma de tipo C^* , y así formar su completación A en la norma, la cual es una C^* -álgebra unital.

El enfoque C^* -algebraico tiene la ventaja de decidir fácilmente la cuestión de *existencia* del nuevo álgebra de coordenadas, al poder *representarla* como un juego de operadores sobre un espacio de Hilbert. En el enfoque polinomial, hay que averiguar si las relaciones de conmutación son consistentes, es decir, si es posible encontrar una solución “concreta”. De todos modos, en los ejemplos que siguen, cada C^* -álgebra A será la completación de un álgebra finitamente generada \mathcal{A} , de modo que podemos dejar las cuestiones de existencia a un lado por ahora.

8.1 Álgebras de coordenadas para grupos compactos

Definición 8.1. Un **grupo compacto** es un grupo G que posee una topología compacta y de Hausdorff, de modo que las operaciones de grupo sean continuas. Estas operaciones son:

- ★ la *multiplicación* o el *producto*, $m: G \times G \rightarrow G: (s, t) \mapsto st$; y
- ★ la *inversión* $i: G \rightarrow G: t \mapsto t^{-1}$.

El álgebra de coordenadas es la C^* -álgebra unital $C(G)$. La estructura de grupo se refleja en tres operaciones algebraicas, que son las siguientes:

- (a) el **coproducto** $\Delta: C(G) \rightarrow C(G \times G)$ dada por $\Delta f(s, t) := f(st)$;
- (b) la **counidad** $\varepsilon: C(G) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varepsilon(f) := f(1)$;
- (c) el **antípoda** $S: C(G) \rightarrow C(G)$ dado por $Sf(t) := f(t^{-1})$.

Para poder dar una generalización algebraica de esta estructura, es importante aclarar la relación entre las álgebras $C(G)$ y $C(G \times G)$. Considérese, en primera instancia, el caso de un *grupo finito*. Si $n = \#(G)$ es el *orden* del grupo —el número de elementos en G — entonces $C(G)$ es un espacio vectorial de dimensión n , porque tiene como base las funciones $\{\delta_r : r \in G\}$ definidas por $\delta_r(t) := \delta_{rt}$ (delta de Kronecker, al lado derecho).¹

Definición 8.2. Si V y W son dos espacios vectoriales sobre \mathbb{C} , su **producto tensorial** $V \otimes W$ es el espacio vectorial formado por sumas finitas de “tensores simples” $v \otimes w$, con $v \in V$ y $w \in W$, sujeto a las siguientes reglas:

$$\begin{aligned}(v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w, \\ v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2, \\ \lambda(v \otimes w) &= (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w),\end{aligned}$$

para $v, v_1, v_2 \in V$; $w, w_1, w_2 \in W$; $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\{v_1, \dots, v_m\}$ y $\{w_1, \dots, w_n\}$ son bases para V y W , entonces $\{v_i \otimes w_j : i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$ es una base de $V \otimes W$, de modo que $\dim(V \otimes W) = (\dim V)(\dim W)$ cuando V y W son finitodimensionales.

Si $\varphi: V \rightarrow V'$ y $\psi: W \rightarrow W'$ son aplicaciones lineales, se define otra aplicación lineal $\varphi \otimes \psi: V \otimes W \rightarrow V' \otimes W'$ por

$$\varphi \otimes \psi: v \otimes w \mapsto \varphi(v) \otimes \psi(w).$$

Si A y B son dos álgebras sobre \mathbb{C} , su producto tensorial $A \otimes B$ también es un álgebra, bajo el *producto* que se define así sobre tensores simples:

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) := a_1 a_2 \otimes b_1 b_2.$$

Si G es un grupo finito y $A = C(G)$ es el álgebra de todas las funciones (continuas) sobre G con valores en \mathbb{C} , entonces hay un isomorfismo entre $C(G \times G)$ y $C(G) \otimes C(G)$, dado por la aplicación lineal biyectiva que lleva $\delta_{(r,s)}$ en $\delta_r \otimes \delta_s$,

¹Un grupo finito es automáticamente compacto. Es de Hausdorff para la topología *discreta* (únicamente), así que *todas* las funciones $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ son continuas.

la cual es un homomorfismo de álgebras. De hecho, si $f, h \in C(G)$, entonces la fórmula

$$(f \otimes h)(s, t) := f(s)h(t)$$

identifica $f \otimes h \in C(G) \otimes C(G)$ con un elemento² de $C(G \times G)$.

El producto (de funciones) en $C(G)$ puede verse como una operación bilineal $(f, h) \mapsto fh$, o bien como una aplicación *lineal*³

$$\mu: f \otimes h \mapsto fh: C(G) \otimes C(G) \rightarrow C(G).$$

La unidad en $C(G)$, que es la función constante de valor 1, puede verse como una aplicación lineal $\eta: \mathbb{C} \rightarrow A$ que a cada escalar le asocia una función constante. En resumen, A es un espacio vectorial que posee *cinco* aplicaciones lineales:

$$\begin{aligned} \mu: A \otimes A &\rightarrow A, & \eta: \mathbb{C} &\rightarrow A, \\ \Delta: A &\rightarrow A \otimes A, & \varepsilon: A &\rightarrow \mathbb{C}, & S: A &\rightarrow A. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Ejemplo 8.3. Considérese el álgebra (infinitodimensional) generado por las funciones $t_{ij}: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ que hacen corresponder a cada matriz $B \in M_n(\mathbb{C})$ su entrada (i, j) , esto es,

$$t_{ij}(B) := b_{ij}.$$

Estas n^2 funciones t_{ij} son linealmente independientes y generan un álgebra conmutativa $\mathcal{A} = \mathcal{O}(M_n(\mathbb{C}))$, cuyos elementos son *polinomios* en las “variables” t_{ij} . Para introducir un *homomorfismo de álgebras* de \mathcal{A} en alguna otra álgebra, basta definir la imagen de cada generador. Hay dos homomorfismos $\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ y $\varepsilon: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ dados por

$$\Delta(t_{ij}) := \sum_{k=1}^n t_{ik} \otimes t_{kj}, \quad \varepsilon(t_{ij}) := \delta_{ij}. \quad (8.2)$$

Cada elemento de \mathcal{A} puede ser considerado como una función de dos variables sobre $M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C})$; para $B, C \in M_n(\mathbb{C})$, se obtiene

$$\Delta t_{ij}(B, C) = \sum_{k=1}^n t_{ik}(B) t_{kj}(C) = \sum_{k=1}^n b_{ik} c_{kj} = t_{ij}(BC).$$

²Si G no es finito, no todos los elementos de $C(G \times G)$ son de esta forma; pero las funciones en $C(G) \otimes C(G)$ forma una subálgebra densa en $C(G \times G)$, de modo que ésta es la C^* -álgebra conmutativa generada por todos los tensores simples $f \otimes h$.

³Una definición más sofisticada del producto tensorial $V \otimes W$ es el espacio vectorial “universal” (único hasta isomorfismo único) tal que a cada aplicación *bilineal* $V \times W \rightarrow U$ le asocia una aplicación *lineal* $V \otimes W \rightarrow U$. Consúltese cualquier buen libro de álgebra lineal.

De esta manera, se ve que el homomorfismo Δ incorpora la regla de multiplicación de dos matrices. \diamond

► El producto de funciones es asociativa: $(fh)k = f(hk)$. Dualmente, la asociatividad del producto en el grupo, $r(st) = (rs)t$, se refleja en una propiedad del coproducto Δ que se conoce como su *coasociatividad*. Para explicarla mejor, conviene introducir la notación⁴

$$\Delta(a) =: \sum a_{\underline{1}} \otimes a_{\underline{2}}, \quad (8.3)$$

donde el símbolo \sum indica que el elemento $\Delta(a)$ de $A \otimes A$ es una *suma finita* de tensores simples. El coproducto matricial de (8.2), $\Delta(t_{ij}) = \sum_k t_{ik} \otimes t_{kj}$, es un paradigma para tales sumas finitas.⁵ La **coasociatividad** de Δ es entonces la relación

$$\sum a_{\underline{1}} \otimes a_{\underline{2}\underline{1}} \otimes a_{\underline{2}\underline{2}} = \sum a_{\underline{1}\underline{1}} \otimes a_{\underline{1}\underline{2}} \otimes a_{\underline{2}}, \quad (8.4a)$$

o equivalentemente, $(1 \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes 1) \circ \Delta : A \rightarrow A \otimes A \otimes A$. Esta doble aplicación del coproducto puede ser reescrito como

$$\Delta^{(2)}(a) = \sum a_{\underline{1}} \otimes a_{\underline{2}} \otimes a_{\underline{3}},$$

donde el lado derecho se define como cualquiera de los dos lados de (8.4a). En el ejemplo matricial, se obtiene

$$\Delta^{(2)}(t_{ij}) = \sum_{k,l} t_{ik} \otimes t_{kl} \otimes t_{lj},$$

cuya evaluación en tres matrices (A, B, C) produce el elemento (i, j) del producto $A(BC) = (AB)C = ABC$.

La identidad multiplicativa $1t = t1 = t$ para elementos $t \in G$ es expresable como la siguiente propiedad de la counidad:

$$\sum \varepsilon(a_{\underline{1}}) a_{\underline{2}} = \sum a_{\underline{1}} \varepsilon(a_{\underline{2}}) = a, \quad \text{para todo } a \in A. \quad (8.4b)$$

⁴Esta notación fue introducido por Sweedler, quien escribió el lado derecho como $\sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$. A veces se omite la \sum , dejando una sumación implícita, como hizo Einstein. Otros autores escriben $a_1 \otimes a_2$, con o sin símbolo de sumación. El hábito de *subrayar* las dos “patas”, como en (8.1), ha sido recomendado en: Tomasz Brzeziński y Robert Wisbauer, *Corings and Comodules* (Cambridge University Press, Cambridge, 2003).

⁵Un *paradigma* es un ejemplo modelo que ilustra los rasgos esenciales del tema en discusión.

Definición 8.4. Sea A un álgebra sobre \mathbb{C} , con producto asociativo μ y aplicación unidad $\eta: \mathbb{C} \rightarrow A$. Si hay un coproducto $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$ y una counidad $\varepsilon: A \rightarrow \mathbb{C}$ que cumplen (8.4), y si además Δ y ε son homomorfismos de álgebras (es decir, respetan productos), entonces se dice que A es una **biálgebra**⁶ sobre \mathbb{C} .

La inversión de matrices ejemplifica el antípoda S ; obviamente, hay que considerar funciones sobre matrices invertibles solamente. Las funciones sobre el *grupo general lineal* $GL(n, \mathbb{C}) := \{B \in M_n(\mathbb{C}) : \det B \neq 0\}$ son dignas de considerar. Pero, en vista de la regla de Cramer, sería mejor tomar funciones sobre el **grupo especial lineal**, definido por

$$SL(n, \mathbb{C}) := \{B \in M_n(\mathbb{C}) : \det B = 1\}.$$

Los generadores del álgebra \mathcal{A} son las funciones t_{ij} de antes, restringidas al dominio $SL(n, \mathbb{C})$. Esta es una biálgebra, con los mismos Δ y ε definidos por (8.2). Ahora bien, las entradas de la matriz B^{-1} son *polinomios en las entradas de B* , obtenidas de los “cofactores” de la regla de Cramer. (El denominador común de cada cofactor es 1, ya que $\det B = 1$.) Al reemplazar cada b_{kl} en la expansión del cofactor $(-1)^{i+j} \det B_{ij}$ por la función t_{kl} , se obtiene un polinomio en \mathcal{A} , denotado por $S(t_{ij})$.

Como $(BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}$ para $B, C \in SL(n, \mathbb{C})$, hay que extender S a todo \mathcal{A} como un **antimorfismo** de álgebras. Es decir, S es lineal pero revierte el orden de productos: $S(ab) = S(b)S(a)$ para $a, b \in \mathcal{A}$. Las identidades matriciales $BB^{-1} = B^{-1}B = 1$ se traducen en las reglas

$$a_1 S(a_2) = S(a_1) a_2 = \varepsilon(a) 1 \quad \text{para todo } a \in \mathcal{A}. \quad (8.5)$$

Definición 8.5. Sea $A = (A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ una biálgebra sobre \mathbb{C} . Si existe una aplicación lineal antimultiplicativa $S: A \rightarrow A$ que cumple (8.5), S es un **antípoda** para la biálgebra. El antípoda, si existe, es único. Una biálgebra con antípoda es un **álgebra de Hopf**⁷ sobre \mathbb{C} .

Si G es un grupo finito, entonces $C(G)$ es un álgebra de Hopf. Si G es un grupo compacto y de Hausdorff pero infinito, la C^* -álgebra $C(G)$ no es un álgebra de Hopf *strictu sensu*, porque $C(G) \otimes C(G)$ no coincide con $C(G \times G)$ en este caso; muchos elementos $f \in C(G)$ son tales que $\Delta f \notin C(G) \otimes C(G)$. Sin embargo, $C(G)$ posee

⁶En más detalle: el triple (A, μ, η) es un *álgebra*, el triple (A, Δ, ε) es una *coálgebra* si cumple (8.4) y el quintuple $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ es una biálgebra si además Δ y ε son multiplicativos.

⁷Esta estructura fue estudiada por Heinz Hopf (1941), como parte de sus investigaciones sobre la topología de los grupos de Lie.

una subálgebra $\mathcal{O}(G)$ —cuyos elementos son funciones suaves— generada por los **elementos matriciales** $t_{ij}^\pi : g \mapsto \pi(g)_{ij}$ de las representaciones⁸ finitodimensionales $\pi : G \rightarrow \mathcal{L}(V)$. Resulta que el coproducto Δ de la Definición 8.1 lleva $\mathcal{O}(G)$ en $\mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G)$; y el antípoda S lleva $\mathcal{O}(G)$ en $\mathcal{O}(G)$ también. El *álgebra polinomial* $\mathcal{O}(G)$ es un álgebra de Hopf.

► El grupo $SL(n, \mathbb{C})$ no es compacto, pero incluye un subgrupo compacto: el **grupo especial unitario** $SU(n)$, definido por

$$SU(n) := \{U \in M_n(\mathbb{C}) : UU^* = U^*U = 1, \det U = 1\}.$$

Por ejemplo, ya sabemos que $SU(2) \approx \mathbb{S}^3$ como variedad compacta.

Dado un grupo compacto G , el álgebra de Hopf $\mathcal{O}(G)$ es generado por los elementos matriciales t_{ij}^π de las representaciones π que son *unitarias e irreducibles*.⁹

Esta álgebra es involutiva, para la *involución* definida por $f^*(t) := \overline{f(t)}$, el conjugado complejo de funciones. Esta involución es respetada por el coproducto y la counidad: $\Delta(f^*) = (\Delta f)^*$ y $\varepsilon(f^*) = \overline{\varepsilon(f)}$. El antípodo, en cambio, cumple la siguiente regla:

$$S(S(a^*)^*) = a \quad \text{para todo } a \in A. \quad (8.6)$$

Dicho de otra manera: si I denota la involución $a \mapsto a^*$, entonces $S \circ I \circ S \circ I = 1$; la aplicación $S \circ I : A \rightarrow A : a \mapsto S(a^*)$ es un *homomorfismo antilineal* del álgebra A cuyo cuadrado es la identidad.

Definición 8.6. Un álgebra de Hopf con una involución respetado por Δ y ε que además cumple (8.6) puede llamarse una ***-álgebra de Hopf**.

⁸Los elementos de $\mathcal{O}(G)$ a veces se llaman **funciones representativas** sobre G . Si $R_s f(t) := f(ts)$, una función $f \in C(G)$ es representativa si y sólo si sus “traslados a la derecha” $\{R_s f : s \in G\}$ generan un subespacio finitodimensional de $C(G)$. Una de las consecuencias del teorema de Peter y Weyl es que el álgebra $\mathcal{O}(G)$ es una subálgebra *densa* de $C(G)$.

⁹Si π es una representación del grupo compacto G sobre el espacio de Hilbert H , se puede fabricar una representación equivalente que es unitaria, mediante el **truco unitario** de Weyl. Es cuestión de cambiar el producto escalar en H al nuevo producto escalar dado por $\langle\langle \xi | \eta \rangle\rangle := \int_G \langle \pi(t)\xi | \pi(t)\eta \rangle dt$, al integrar con respecto a la medida de Haar normalizado sobre G . Cada $\pi(s)$, para $s \in G$, preserva el nuevo producto escalar: $\langle\langle \pi(s)\xi | \pi(s)\eta \rangle\rangle = \langle\langle \xi | \eta \rangle\rangle$, es decir, cada operador $\pi(s)$ es unitario.

Cada representación de un grupo compacto es *completamente reducible*, por otro teorema de Weyl: es una suma directa de representaciones irreducibles. Sus elementos matriciales son sumas de elementos matriciales para sus componentes irreducibles.

Lema 8.7. *El álgebra polinomial $\mathcal{O}(SU(2))$ del grupo de Lie compacto $SU(2)$ está generada como $*$ -álgebra involutiva por dos elementos a, b que cumplen las relaciones*

$$ba = ab, \quad b^*a = ab^*, \quad aa^* = a^*a, \quad bb^* = b^*b, \quad a^*a + b^*b = 1. \quad (8.7)$$

Demostración. Las primeras cuatro relaciones en (8.7) expresan la *conmutatividad* del álgebra generado por los elementos a, a^*, b, b^* (es decir, de la $*$ -álgebra generado por a y b). Falta verificar la quinta relación y mostrar que esta subálgebra es toda $\mathcal{O}(SU(2))$.

Defínase a y b como las entradas (1,1) y (1,2) de la autorepresentación de $SU(2)$:

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \in SU(2).$$

En otras palabras, $a = u_{11}$, $b = u_{12}$ como funciones del elemento $u \in SU(2)$; y la involución coincide con el conjugado complejo de estas funciones. La relación $a^*a + b^*b = 1$ expresa la condición $\det u = 1$ en términos de los generadores.

La matriz inversa de u es

$$u^{-1} = \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} S(a) & S(b) \\ -S(b^*) & S(a^*) \end{pmatrix},$$

así que esta fórmula define S sobre los generadores del álgebra:

$$S(a) := a^*, \quad S(a^*) := a, \quad S(b) := -b, \quad S(b^*) := -b^*.$$

(En este caso, la aplicación $S \circ I$ queda determinada por $a \mapsto a$; $b \mapsto -b^*$ y su cuadrado es la identidad.)

Para ver que la $*$ -subálgebra generada por a y b es toda $\mathcal{O}(SU(2))$, se requiere algunos aspectos de la teoría de representaciones. En primer lugar, una base vectorial de $\mathcal{O}(SU(2))$ está dada por todas las funciones D_{mn}^j de la sección 5.1. Estos, a su vez, son sumas de productos de las funciones que corresponden al caso $j = \frac{1}{2}$, como se ve de la forma explícita¹⁰ de los D_{mn}^j y la fórmula (5.2):

$$a = D_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}, \quad b = D_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}.$$

¹⁰Hay una explicación más sofisticada, por supuesto: cada representación unitaria irreducible π_j de $SU(2)$ es una subrepresentación del producto tensorial de $2j$ copias de la representación fundamental $\pi_{\frac{1}{2}}$. Los elementos matriciales D_{mn}^j de π_j entonces son polinomios, de grado no mayor de $2j$, en las variables a, a^*, b, b^* .

Luego cada elemento de $\mathcal{O}(SU(2))$ es un polinomio en las cuatro variables a, a^*, b, b^* . Opcionalmente, se puede simplificar este polinomio al emplear la relación $a^*a + b^*b = 1$. □

8.2 Generadores y simetrías de $SU_q(2)$

El ejemplo del toro no conmutativo \mathbb{T}_θ^2 ofrece una indicación de cómo obtener nuevas álgebras de coordenadas que conservan ciertos rasgos de la geometría diferencial ordinaria. Se trata de describir la C^* -álgebra conmutativa en términos de sus generadores u, v que cumplen cinco relaciones independientes (cuatro de unitariedad y una de conmutación):

$$uu^* = u^*u = 1, \quad vv^* = v^*v = 1, \quad vu = uv; \tag{8.8}$$

en seguida se propone una *deformación* de estas relaciones al introducir una constante diferente de 1 en la última: $vu = \lambda uv$ donde $\lambda = e^{2\pi i\theta}$. Si se mantiene la unitariedad de los generadores u, v , entonces la nueva constante es necesariamente¹¹ un número complejo de módulo 1. Esta deformación de la relación de conmutación por un número de módulo 1 ha sido bautizado “twisting” o *torcedura* de las relaciones (8.8).

En 1987, Lech Woronowicz encontró una manera diferente de deformar ciertas relaciones algebraicas, mediante un *parámetro real* q , donde $q = 1$ corresponde al álgebra “original” no deformada. Su primer ejemplo fue basado en la C^* -álgebra $C(SU(2))$; pero luego sus ideas fueron generalizadas a un surtido de ejemplos mucho más amplio, que incluye todos los grupos de Lie compactos y buena cantidad de sus espacios cocientes.¹²

¹¹El producto de dos operadores es unitario; entonces los espectros $\text{sp}(vu)$ y $\text{sp}(uv)$ forman parte del círculo \mathbb{S}^1 . Además, estos espectros coinciden: como $\alpha 1 - vu = u^{-1}(\alpha 1 - uv)u$, se ve que $\alpha \in \text{sp}(vu)$ si y sólo si $\alpha \in \text{sp}(uv)$. Como $\text{sp}(\lambda uv) = \lambda \text{sp}(uv)$, la multiplicación por λ debe ser una rotación de $\text{sp}(uv)$ alrededor del origen en \mathbb{C} , así que $\lambda \in \mathbb{T}$; esto es, $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ para algún θ real. (También, por ser $\text{sp}(uv)$ compacto y no vacío, se concluye que $\text{sp}(uv) = \mathbb{S}^1$ cuando θ es irracional.)

¹²Woronowicz llamó μ a su parámetro y permitió que μ fuera un número complejo cualquiera; el caso $\mu = 0$ es degenerado. Si se quiere conservar la estructura de $*$ -álgebra unital, μ debe ser real. (El caso en donde μ es una raíz de la unidad, esto es, $\mu = e^{2\pi i\beta}$ con $\beta \in \mathbb{Q}$, también es de mucha interés para los algebristas.) El ejemplo básico aparece en: Stanisław Lech Woronowicz, “Twisted $SU(2)$ group. An example of a noncommutative differential calculus”, *Publications of the RIMS, Kyoto* **23** (1987), 117–181.

Definición 8.8. Sea q un número real con $0 < q < 1$. Defínase $\mathcal{A} = \mathcal{O}(SU_q(2))$ como la $*$ -álgebra generado dos elementos a, b , sujetos (únicamente) a las siguientes relaciones de conmutación:¹³

$$\begin{aligned} ba &= qab, & b^*a &= qab^*, & bb^* &= b^*b, \\ a^*a + q^2b^*b &= 1, & aa^* + bb^* &= 1. \end{aligned} \quad (8.9a)$$

Como consecuencias, valen $a^*b = qba^*$ y $a^*b^* = qb^*a^*$.

También se definen un coproducto Δ , una counidad ε y un antípoda S como siguen; ellos hacen de $\mathcal{O}(SU_q(2))$ una $*$ -álgebra de Hopf:

$$\begin{aligned} \Delta(a) &:= a \otimes a - qb \otimes b^*, & \varepsilon(a) &:= 1, \\ \Delta(b) &:= b \otimes a^* + a \otimes b, & \varepsilon(b) &:= 0, \end{aligned} \quad (8.9b)$$

$$S(a) := a^*, \quad S(a^*) := a, \quad S(b) := -qb, \quad S(b^*) := -q^{-1}b^*. \quad (8.9c)$$

Observación. Para entender mejor las definiciones de Δ , ε y S , conviene introducir el **elemento unitario fundamental**:

$$u := \begin{pmatrix} a & b \\ -qb^* & a^* \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{O}(SU_q(2))). \quad (8.10)$$

En vista de las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} uu^* &= \begin{pmatrix} a & b \\ -qb^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & -qb \\ b^* & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa^* + bb^* & ba - qab \\ a^*b^* - qb^*a^* & a^*a + q^2b^*b \end{pmatrix}, \\ u^*u &= \begin{pmatrix} a^* & -qb \\ b^* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -qb^* & a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^*a + q^2bb^* & a^*b - qba^* \\ b^*a - qab^* & aa^* + b^*b \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

se ve que las cinco relaciones de conmutación (8.9a) son equivalentes a la unitariedad de u , en la forma $uu^* = u^*u = 1_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si Δ_2 , ε_2 , S_2 denotan la aplicación de Δ , ε , S entrada por entrada en una matriz 2×2 ; y si el símbolo \otimes_2 denota la formación de productos tensoriales entrada por entrada, entonces las fórmulas (8.9b) y (8.9c) pueden resumirse así:

$$\Delta_2(u) = u \otimes_2 u, \quad \varepsilon_2(u) = 1_2, \quad S_2(u) = u^{-1}.$$

¹³Si se escribe $c = -qb^*$ y $d = a^*$, las primeras dos relaciones son $ba = qab$, $ca = qac$ y también valen $db = qbd$ y $dc = qcd$. En estos cuatro casos, un factor de q restaura el orden alfabético; este es el "convenio lexicográfico" de Majid (1995). Los trabajos de Woronowicz usa un convenio distinto, pero equivalente.

En un álgebra de Hopf cualquiera, un elemento g es **grupesco** (“group-like”)¹⁴ si $\Delta(g) = g \otimes g$; los generadores de $C(G)$ tienen esta propiedad cuando G es un grupo finito. Cada elemento grupesco g obedece $\varepsilon(g) = 1$ y $S(g) = g^{-1}$. Entonces la afirmación es que el unitario fundamental u es un elemento grupesco de $M_2(\mathcal{A})$.

► Un grupo de Lie G es una variedad con simetría: las traslaciones a la izquierda $\lambda_s: t \mapsto st$, para $s \in G$, son difeomorfismos de G en sí mismo. Muchas veces, es preferible trabajar con una *simetría infinitesimal*, que genera un grupo uniparamétrico de traslaciones. Se trata de fijar un vector tangente en cada punto de G y luego seguir las geodésicas cuyas direcciones iniciales están dadas por estos vectores. Si este *campo vectorial* es invariante bajo traslación a la izquierda, entonces el seguimiento de sus geodésicas desemboca en unas traslaciones globales sobre el grupo. La invariancia del campo significa que está determinado por un vector tangente en el elemento unidad 1; así que las simetrías infinitesimales de G corresponden biunívocamente a los elementos del espacio vectorial $\mathfrak{g} = T_1G$.

Estas simetrías infinitesimales, vistos como campos vectoriales, son operadores diferenciales de primer orden: cada campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(G)$ es un operador sobre $C^\infty(G)$ que cumple una regla de Leibniz. La composición de dos campos vectoriales $XY: f \mapsto X(Y(f))$ está definida, pero en general es un operador diferencial *de segundo orden*. Por otro lado, el corchete $[X, Y]: f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f))$ es de primer orden, es decir, es otro campo vectorial. (Este corchete *no es* asociativo.)

Si X, Y son invariantes bajo traslaciones, su composición XY y su corchete $[X, Y]$ también son invariantes.¹⁵ El espacio vectorial finitodimensional $\mathfrak{g} = T_1G$, dotado del corchete obtenido por restricción a los campos vectoriales invariantes, es el *álgebra de Lie* del grupo G . Sus elementos generan un *álgebra asociativa* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, que puede identificarse con la totalidad de operadores diferenciales invariantes sobre G , de cualquier orden. Esta es el **álgebra envolvente** de \mathfrak{g} .

Si G es un grupo de Lie compacto, entonces, amén del *álgebra de coordenadas* $\mathcal{O}(G)$ hay otra **álgebra de simetrías** $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ asociada a G . Resulta que el álgebra de simetrías *es también un álgebra de Hopf*: para los generadores $x \in \mathfrak{g}$ se definen¹⁶

$$\Delta(x) := x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad \varepsilon(x) := 0, \quad S(x) := -x.$$

¹⁴El vocablo *grupesco* es un invento nuestro; el término técnico apropiado (*group-like* in English, *gruppenartig* auf Deutsch) aun no ha sido asimilado al castellano.

¹⁵Dada una base $\{x_1, \dots, x_n\}$ del espacio vectorial $\mathfrak{g} = T_1G$, el corchete de dos elementos básicos $[x_i, x_j]$ es una combinación de elementos básicos: $[x_i, x_j] = c_{ij}^k x_k$. Estos coeficientes c_{ij}^k son las llamadas **constantes de estructura** del grupo de Lie G .

¹⁶Cualquier elemento de un álgebra de Hopf que cumple estas relaciones es un *elemento primitivo*. Los elementos primitivos de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ conforman el subespacio vectorial \mathfrak{g} .

Hay una **dualidad** entre las dos álgebras de Hopf $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ y $\mathcal{O}(G)$. Esta es un apareamiento bilineal dado por¹⁷

$$\langle Z, f \rangle := Z(f)(1),$$

donde $Z \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ actúa como operador diferencial sobre la función f , antes de evaluar en la unidad 1. En particular, si $X \in \mathfrak{g}$ y $f, h \in \mathcal{O}(G)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle X, fh \rangle &= X(fh)(1) = X(f)(1)h(1) + f(1)X(h)(1) \\ &= (X \otimes 1 + 1 \otimes X)(f \otimes h)(1, 1) \\ &= \Delta(X)(f \otimes h)(1, 1) = \langle \Delta(X), f \otimes h \rangle, \end{aligned}$$

al considerar elementos de $\mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G)$ como funciones sobre el grupo $G \times G$, cuya unidad es $(1, 1)$. Como Δ es un homomorfismo de álgebras, es fácil comprobar por inducción sobre r que también vale $\langle Z, fh \rangle = \langle \Delta(Z), f \otimes h \rangle$ para $Z = X_1 X_2 \dots X_r$. La dualidad transpone¹⁸ el producto en $\mathcal{O}(G)$ al coproducto en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

► El álgebra de Hopf $\mathcal{O}(SU_q(2))$ también posee una pareja, denotada $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$, la cual es una segunda álgebra de Hopf dotada de una dualidad con la primera.

Definición 8.9. El álgebra de Hopf $\mathcal{U} = \mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$ es el álgebra generado por tres elementos e, f, k , con k invertible, que satisfacen las relaciones siguientes:

$$ek = qke, \quad kf = qfk, \quad k^2 - k^{-2} = (q^{-1} - q)(ef - fe). \quad (8.11a)$$

Su coproducto Δ , su counidad ε y su antípoda S están dadas por

$$\begin{aligned} \Delta(k) &:= k \otimes k, & \varepsilon(k) &:= 1, & S(k) &:= k^{-1}, \\ \Delta(e) &:= e \otimes k + k^{-1} \otimes e, & \varepsilon(f) &:= 0, & S(f) &:= -qf, \\ \Delta(f) &:= f \otimes k + k^{-1} \otimes f, & \varepsilon(e) &:= 0, & S(e) &:= -q^{-1}e, \end{aligned} \quad (8.11b)$$

De hecho, $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$ es una **-álgebra de Hopf*, bajo la involución dada por

$$k^* = k, \quad f^* = e, \quad e^* = f. \quad (8.11c)$$

¹⁷Hay que tener cuidado con el manejo de espacios duales de espacios vectoriales en dimensión infinita. En particular, el dual de $V \otimes W$ no coincide con $V^* \otimes W^*$ en general. Para evitar dificultades, se dice que dos espacios vectoriales V y V' están en dualidad si hay un apareamiento bilineal sobre $V \times V'$ que es *no degenerado*: $\langle v, v' \rangle = 0$ para todo $v' \in V'$ sólo si $v = 0$ en V ; y $\langle v, v' \rangle = 0$ para todo $v \in V$ sólo si $v' = 0$ en V' . La dualidad entre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ y $\mathcal{O}(G)$ cumple esta condición.

¹⁸La transposición de productos en coproductos también obra en la otro dirección: $\langle XY, f \rangle = \langle X \otimes Y, \Delta(f) \rangle$ para $X, Y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $f \in \mathcal{O}(G)$. Para mostrarlo, se requiere la fórmula $X(f)(1) = (d/dt)|_{t=0} f(\exp tX)$, donde $t \mapsto \exp tX$ es el subgrupo uniparamétrico generado por $X \in \mathfrak{g}$. Véase, por ejemplo, la sección 14.4 de [E-NCG].

Observación. Algunos autores denotan por $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$ el álgebra de Hopf determinada por (8.11a) y (8.11b), sin la involución, porque es una deformación del álgebra envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2))$ para el grupo de Lie complejo $SL(2, \mathbb{C})$, de matrices invertibles en $M_2(\mathbb{C})$ con determinante 1. El grupo especial unitario $SU(2)$ es una *forma real* de $SL(2, \mathbb{C})$: esto quiere decir que el álgebra de Lie de $SL(2, \mathbb{C})$ es la complejificación del álgebra de Lie de $SU(2)$, esto es, $\mathfrak{sl}(2) = \mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}}$. Concretamente, $\mathfrak{sl}(2)$ es el espacio \mathbb{C} -vectorial tridimensional de matrices 2×2 de traza cero, mientras $\mathfrak{su}(2)$ consiste de matrices 2×2 *hermíticas* de traza cero. Este último es tridimensional como espacio vectorial *real*.

Considérese estas tres matrices de traza nula en $M_2(\mathbb{C})$:

$$e = \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Su independencia lineal (sobre \mathbb{C}) muestra que $\mathfrak{sl}(2) = \mathbb{C}\text{-lin}\langle e, f, h \rangle$, mientras $\mathfrak{su}(2) = \mathbb{R}\text{-lin}\langle e + f, ie - if, h \rangle = \mathbb{R}\text{-lin}\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle$. Hemos visto anteriormente que el uso de las matrices σ_+ y σ_- simplifican los cálculos con matrices de Pauli. Una vez más, se trata de reemplazar un espacio vectorial *real* con un *espacio vectorial complejo dotado de una involución*.

Bajo este convenio, en vez de considerar $\mathcal{U}(\mathfrak{su}(2))$ como un álgebra real, se usa su complejificación que es un álgebra compleja, dotada de la involución determinada por $h^* = h$ y $e^* = f$.

Las fórmulas (8.11b) muestran que el generador k de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$ es *grupesco*. En el caso $q = 1$, hay que tomar $k := 1$, en cuyo caso e y f se reducen a elementos primitivos de $\mathcal{U}(\mathfrak{su}(2))$; el elemento “diagonal” h entra como el tercer generador no trivial. Entonces la “deformación” del caso especial $q = 1$ en el caso general $0 < q < 1$ es un poco singular.¹⁹ Fíjese que la $*$ -álgebra determinada por (8.11a) y (8.11c) tiene una *representación* como matrices 2×2 :

$$k \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{q} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{q} \end{pmatrix}, \quad e \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, $k \mapsto q^{h/2}$, la matriz diagonal con autovalores $q^{1/2}$ y $q^{-1/2}$.

¹⁹Se puede notar que las relaciones (8.11) funcionan tanto para $q > 1$ como para $0 < q < 1$. En efecto, la correspondencia $k \leftrightarrow k^{-1}$, $e \leftrightarrow f$, $q \leftrightarrow 1/q$ define un *isomorfismo* (de $*$ -álgebras de Hopf) entre $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$ y $\mathcal{U}_{1/q}(\mathfrak{su}(2))$. Por lo tanto, no hay pérdida de generalidad en tomar $0 < q < 1$.

Este isomorfismo es evidente en la literatura sobre álgebras de Hopf. Nuestro $\mathcal{U}_{1/q}(\mathfrak{su}(2))$, por ejemplo, se denota $\check{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{su}(2))$ en el libro: Anatoli Klimyk y Konrad Schmüdgen, *Quantum Groups and their Representations* (Springer, Berlin, 1997).

► Para ver la $*$ -álgebra de Hopf $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$ como *simetrías* de $\mathcal{O}(SU_q(2))$, se introduce una dualidad inspirada en esta representación matricial y en la forma matricial del unitario fundamental (8.10).

Definición 8.10. Hay un *aparejamiento bilineal* entre las dos $*$ -álgebras de Hopf $\mathcal{U} = \mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$ y $\mathcal{A} = \mathcal{O}(SU_q(2))$, definida en los generadores de álgebras por

$$\langle k, a \rangle := q^{1/2}, \quad \langle k, a^* \rangle := q^{-1/2}, \quad \langle e, -qb^* \rangle = \langle f, b \rangle := 1, \quad (8.12)$$

con valor 0 en las otras pares de generadores. Se extiende esta **dualidad** para definir $\langle h, x \rangle$ para cualesquiera $h \in \mathcal{U}$, $x \in \mathcal{A}$ al usar la bilinealidad sobre $\mathcal{U} \times \mathcal{A}$ y al pedir que el *producto* de dos elementos en un lado transponga al *coproducto* del elemento al otro lado:

$$\langle h, xy \rangle = \langle \Delta(h), x \otimes y \rangle, \quad \langle gh, x \rangle = \langle g \otimes h, \Delta(x) \rangle. \quad (8.13a)$$

En estas fórmulas, se usa la aparejamiento de $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ con $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ dado por

$$\langle g \otimes h, x \otimes y \rangle := \langle g, x \rangle \langle h, y \rangle,$$

extendida por bilinealidad a sumas finitas en los dos lados. Los casos $h = 1$ en \mathcal{U} y $x = 1$ en \mathcal{A} deben satisfacer²⁰

$$\langle 1, x \rangle := \varepsilon(x), \quad \langle h, 1 \rangle = \varepsilon(h). \quad (8.13b)$$

Ejercicio 8.11. Para mostrar que las fórmulas (8.12) y (8.13) definen una dualidad bien definida entre $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$ y $\mathcal{O}(SU_q(2))$, hay que verificar que ella es compatible con las relaciones algebraicas entre los generadores de las dos álgebras. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \langle k, a^*a + q^2b^*b \rangle &= \langle k, a^*a \rangle + q^2 \langle k, b^*b \rangle = \langle \Delta(k), a^* \otimes a \rangle + q^2 \langle \Delta(k), b^* \otimes b \rangle \\ &= \langle k \otimes k, a^* \otimes a \rangle + q^2 \langle k \otimes k, b^* \otimes b \rangle = \langle k, a^* \rangle \langle k, a \rangle + q^2 \langle k, b^* \rangle \langle k, b \rangle \\ &= q^{1/2} q^{-1/2} + q^2(0)(0) = 1 \end{aligned}$$

es compatible con $\langle k, 1 \rangle = \varepsilon(k) = 1$. Comprobar que las demás relaciones en (8.9) y (8.11) son compatibles con (8.12) y (8.13).

²⁰Es una consecuencia de (8.13) que los dos antípodos en \mathcal{U} y en \mathcal{A} son transpuestos uno del otro: $\langle S(h), x \rangle = \langle h, S(x) \rangle$ para $h \in \mathcal{U}$, $x \in \mathcal{A}$.

► Esta dualidad permite transponer el producto en \mathcal{U} en **acciones** de \mathcal{U} sobre \mathcal{A} . Las fórmulas

$$\langle g, h \triangleright x \rangle := \langle gh, x \rangle, \quad \langle g, x \triangleleft h \rangle := \langle hg, x \rangle, \quad \text{para } g, h \in \mathcal{U}, x \in \mathcal{A},$$

definen una **acción a la izquierda** $x \mapsto h \triangleright x$ y una **acción a la derecha** $x \mapsto x \triangleleft h$ del elemento $h \in \mathcal{U}$ sobre \mathcal{A} . En términos de la notación de Sweedler (8.3) para el coproducto, las recetas explícitas para estas acciones son:

$$h \triangleright x := \sum x_{\underline{1}} \langle h, x_{\underline{2}} \rangle, \quad x \triangleleft h := \sum \langle h, x_{\underline{1}} \rangle x_{\underline{2}}. \quad (8.14)$$

Para comprobar las fórmulas (8.14), fíjese que si $g, h \in \mathcal{U}, x \in \mathcal{A}$, entonces

$$\langle g, \sum x_{\underline{1}} \langle h, x_{\underline{2}} \rangle \rangle = \sum \langle g, x_{\underline{1}} \rangle \langle h, x_{\underline{2}} \rangle = \sum \langle g \otimes h, x_{\underline{1}} \otimes x_{\underline{2}} \rangle = \langle g \otimes h, \Delta(x) \rangle = \langle gh, x \rangle,$$

y de igual modo se obtiene $\langle g, \sum \langle h, x_{\underline{1}} \rangle x_{\underline{2}} \rangle = \langle h \otimes g, \Delta(x) \rangle = \langle hg, x \rangle$.

Definición 8.12. Más generalmente, una **acción a la izquierda** de un álgebra \mathcal{U} sobre un espacio vectorial V no es más que una *representación* de \mathcal{U} sobre V , es decir, un homomorfismo $\pi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(V)$. Escríbase $h \triangleright x := \pi(h)(x)$ si $h \in \mathcal{U}, x \in V$. Entonces las propiedades homomórficas $\pi(gh) = \pi(g)\pi(h)$ y $\pi(1) = 1$ se traducen en las fórmulas:

$$(gh) \triangleright x = g \triangleright (h \triangleright x), \quad 1 \triangleright x = x.$$

Si además \mathcal{U} es una biálgebra y $V = \mathcal{A}$ es un álgebra, se puede pedir compatibilidad del coproducto en \mathcal{U} con el producto en \mathcal{A} . Una **acción de Hopf** (a la izquierda) es una acción del álgebra \mathcal{U} sobre \mathcal{A} que además cumple²¹

$$h \triangleright (xy) = \sum (h_{\underline{1}} \triangleright x) (h_{\underline{2}} \triangleright y), \quad \text{para } h \in \mathcal{U}, x, y \in \mathcal{A}. \quad (8.15)$$

La acción natural definida por (8.14) mediante un aparejamiento bilineal no degenerado²² entre dos álgebras de Hopf que cumplen (8.13) es una acción de Hopf, porque

$$\begin{aligned} \langle g, h \triangleright (xy) \rangle &= \langle gh, xy \rangle = \langle \Delta(gh), x \otimes y \rangle = \sum \langle \Delta(g)(h_{\underline{1}} \otimes h_{\underline{2}}), x \otimes y \rangle \\ &= \sum \langle \Delta(g), (h_{\underline{1}} \triangleright x) \otimes (h_{\underline{2}} \triangleright y) \rangle = \langle g, \sum (h_{\underline{1}} \triangleright x) (h_{\underline{2}} \triangleright y) \rangle \end{aligned}$$

para todo $g \in \mathcal{U}$.

²¹Cuando \mathcal{U} y \mathcal{A} son $*$ -álgebras de Hopf, se puede pedir también que la acción de Hopf sea compatible con las involuciones $x \mapsto x^*$ en \mathcal{A} y $h \mapsto S(h)^*$ en \mathcal{U} , en el sentido de que $h \triangleright x^* = (S(h)^* \triangleright x)^*$. La acción dada por (8.14) cumple esta propiedad si y sólo si $\langle S(h)^*, x \rangle = \overline{\langle h, x^* \rangle}$. Esta última relación está satisfecha por el apareamiento (8.12); basta verificarla sobre pares de generadores.

²²El apareamiento dado por (8.12) es no degenerado. Véase, por ejemplo, el Teorema 4.21 de Klimyk y Schmüdgen, *op. cit.*

Considérese la dualidad entre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ y $\mathcal{O}(G)$, en el caso de un grupo de Lie compacto. Si $X \in \mathfrak{g}$ es un campo vectorial invariante a la izquierda sobre G , la acción de X sobre funciones en $\mathcal{O}(G)$ cumple

$$\langle Z, X \triangleright f \rangle = \langle ZX, f \rangle = ZX(f)(1) = Z(X(f))(1) = \langle Z, X(f) \rangle$$

para cualquier $Z \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, así que $X \triangleright f = X(f)$, simplemente. Ahora el coproducto $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$ y la propiedad (8.15) de acción de Hopf implican que

$$\begin{aligned} X(fh) &= X \triangleright (fh) = (X \triangleright f)(1 \triangleright h) + (1 \triangleright f)(X \triangleright h) \\ &= (X \triangleright f)h + f(X \triangleright h) = X(f)h + fX(h). \end{aligned}$$

En otras palabras, la fórmula $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$ codifica la regla de Leibniz para la acción usual de campos vectoriales (invariantes) sobre funciones.²³

Lema 8.13. Si \mathcal{U} y \mathcal{A} son dos álgebras de Hopf en dualidad, las acciones naturales (8.14) de \mathcal{U} sobre \mathcal{A} (a la izquierda y a la derecha) conmutan.

Demostración. Si $h, g \in \mathcal{U}$ y $x \in \mathcal{A}$, entonces

$$(h \triangleright x) \triangleleft g = \sum (x_1 \langle h, x_2 \rangle) \triangleleft g = \sum \langle g, x_1 \rangle x_2 \langle h, x_3 \rangle = \sum h \triangleright (\langle g, x_1 \rangle x_2) = h \triangleright (x \triangleleft g),$$

en vista de la coasociatividad del coproducto en \mathcal{A} . □

8.3 Un espacio de Hilbert para $SU_q(2)$

Para poder incorporar $SU_q(2)$ como un “espacio no conmutativo” en la construcción que hemos abordado en ejemplos anteriores, hay que hallar la *plataforma* sobre la cual esta construcción puede montarse. En otras palabras, hay que describir un *espacio de Hilbert* en donde las coordenadas en $\mathcal{O}(SU_q(2))$ quedan representadas. Como ya se ha hecho anteriormente, esta construcción procederá en dos etapas. Primero, se buscará el análogo del espacio $L^2(SU(2))$ para el caso $0 < q < 1$. Luego se construirá otro espacio de Hilbert, el de los “espinores”, cuyos elementos serán pares de vectores del primer espacio de Hilbert.

Hay dos maneras para obtener el primero de estos espacios de Hilbert. Una de ellas parte de la descripción de $L^2(SU(2))$ como la compleción del espacio vectorial generado por todos los “elementos de matriz” D_{mn}^l descritos en la Sección 5.1; es

²³En resumen: si $h \in \mathcal{U}$ es *grupesco*, $\Delta(h) = h \otimes h$, entonces su acción $x \mapsto h \triangleright x$ es un homomorfismo de álgebras; en cambio, si h es *primitivo*, $\Delta(h) = h \otimes 1 + 1 \otimes h$, su acción $x \mapsto h \triangleright x$ cumple una regla de Leibniz. El concepto de una acción de Hopf unifica estas dos “reglas de producto”.

cuestión de describir el producto escalar en términos de estos objetos. Con respecto a la medida invariante (bajo traslaciones) $du = (16\pi^2)^{-1} \sin \beta d\alpha d\beta d\gamma$, un cálculo explícito muestra que

$$\langle D_{rs}^j | D_{mn}^l \rangle = \int_{SU(2)} \overline{D_{rs}^j(u)} D_{mn}^l(u) du = \frac{1}{2l+1} \delta_{jl} \delta_{rm} \delta_{sn},$$

de modo que $\{\sqrt{2l+1} D_{mn}^l : 2l \in \mathbb{N}; m, n = -l, \dots, l\}$ es una base ortonormal de $L^2(SU(2))$.

Por otro lado, los elementos de matriz D_{mn}^l , sin factor de normalización, forman una base vectorial ordinaria de la $*$ -álgebra $\mathcal{O}(SU(2))$, la cual es a su vez un subespacio denso de $L^2(SU(2))$. La única dificultad es que la fórmula para el producto de dos elementos de matriz es un poco complicado:

$$D_{rs}^j D_{mn}^l = \sum_{k=|j-l|}^{j+l} C \begin{pmatrix} j & l & k \\ r & m & r+m \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} j & l & k \\ s & n & s+n \end{pmatrix} D_{r+m, s+n}^k,$$

donde los números $C \begin{pmatrix} j & l & k \\ r & m & r+m \end{pmatrix}$ son los llamados *coeficientes de Clebsch y Gordan*.²⁴ Por otro lado, el coproducto de uno de estos elementos es sencillo:

$$\Delta(D_{mn}^l) := \sum_{p=-l}^l D_{mp}^l \otimes D_{pn}^l.$$

En otras palabras, la *coálgebra* $\mathcal{O}(SU(2))$ es la suma directa de las coálgebras matriciales $\mathcal{O}(M_{2l+1}(\mathbb{C}))$ del Ejemplo 8.3, para $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$.

La C^* -álgebra de funciones continuas $C(SU(2))$ es una completación (con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$ de funciones) de la $*$ -álgebra $\mathcal{O}(SU(2))$. La integral normalizada sobre $SU(2)$ define un *estado* (funcional lineal positiva, de valor 1 en la unidad) sobre esta C^* -álgebra, que se llama el **estado de Haar**:

$$\psi(f) := \int_{SU(2)} f(u) du.$$

²⁴Si π_j y π_l son dos representaciones unitarias irreducibles de $SU(2)$ sobre los respectivos espacios vectoriales V_j y V_l , hay un *producto tensorial de representaciones* $\pi_j \otimes \pi_l$ sobre el espacio vectorial $V_j \otimes V_l$ que generalmente no es irreducible. Más bien, este producto tensorial es *equivalente a una suma directa* (de bloques diagonales de matrices) de las representaciones π_k para $k = |j-l|, \dots, j+l$. Concretamente, hay una matriz unitaria C , independiente de $u \in SU(2)$, tal que $\pi_j(u) \otimes \pi_l(u) = C(\pi_{|j-l|}(u) \oplus \dots \oplus \pi_{j+l}(u))C^{-1}$ para todo u . Esta C es una matriz cuadrada de lado $(2j+1)(2l+1)$ y sus entradas se llaman **coeficientes de Clebsch y Gordan**. En la teoría cuántica de momento angular, se emplean fórmulas explícitas para estos coeficientes: véase el libro de Biedenharn y Louck, *op. cit.*

La invariancia bajo traslaciones a la izquierda de la “medida de Haar” du , que se expresa por la fórmula

$$\int_{SU(2)} f(vu) du = \int_{SU(2)} f(u) du \quad \text{para todo } v \in SU(2),$$

también puede escribirse en la forma

$$(1 \otimes \psi)(\Delta f) = \eta(\psi(f)), \quad \text{para todo } f \in C(SU(2)).$$

En esta fórmula, $\Delta f(v, u) = f(vu)$; el lado izquierdo $(1 \otimes \psi)(\Delta f)$ es la función continua $v \mapsto \int_{SU(2)} f(vu) du$; el lado derecho es la función constante cuyo valor es $\int_{SU(2)} f(u) du$.

► Con estos preparativos, la estructura del álgebra de Hopf $\mathcal{O}(SU_q(2))$ puede abordarse de una manera bastante paralela a la descripción del álgebra $\mathcal{O}(\mathbb{T}_\theta^2)$ por polinomios de Fourier generalizados.

Observación. De ahora en adelante, hay un convenio de notación que es necesario adoptar. Para $0 < q \neq 1$ y $n \in \mathbb{Z}$, defínase

$$[n] \equiv [n]_q := \frac{q^{-n} - q^n}{q^{-1} - q}. \quad (8.16)$$

Fíjese que $[n]_q \in \mathbb{R}$ con $\lim_{q \rightarrow 1} [n]_q = n$; y que $[n]_{1/q} = [n]_q$. A veces se dice que $[n]_q$ es un “ q -entero”. Cuando q es fijo con $0 < q < 1$, se suele omitir el subíndice para escribir $[n]$ simplemente.

Hay elementos $\{t_{mn}^l : 2l \in \mathbb{N}; m, n = -l, \dots, l\}$ que forman una base vectorial para $\mathcal{O}(SU_q(2))$, dadas por

$$t_{00}^0 := 1, \quad t_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} := a, \quad t_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} := b, \quad t_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} := -qb^*, \quad t_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} := a^*,$$

para $l = 0$ y $l = \frac{1}{2}$; y luego por inducción sobre l , mediante las fórmulas

$$t_{rs}^j t_{mn}^l = \sum_{k=|j-l|}^{j+l} C_q \begin{pmatrix} j & l & k \\ r & m & r+m \end{pmatrix} C_q \begin{pmatrix} j & l & k \\ s & n & s+n \end{pmatrix} t_{r+m, s+n}^k, \quad (8.17)$$

donde los coeficientes $C_q \begin{pmatrix} j & l & k \\ r & m & r+m \end{pmatrix}$ son ciertos números reales que forman las entradas de una matriz unitaria de lado $(2j+1)(2l+1)$. Conviene exhibir sólo

el caso particular²⁵

$$C_q \begin{pmatrix} l & l & 0 \\ -m & m & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{l+m} \frac{q^{-m}}{\sqrt{[2l+1]}}. \quad (8.18)$$

La fórmula (8.17) permite expresar un polinomio en a, a^*, b, b^* como *combinación lineal* de los t_{mn}^l . La involución en la $*$ -álgebra $\mathcal{O}(SU_q(2))$ viene dada por

$$(t_{mn}^l)^* = (-1)^{2l+m+n} q^{n-m} t_{-m, -n}^l. \quad (8.19)$$

(Fíjese que esta fórmula, para el caso $l = \frac{1}{2}$, es consistente con $a \leftrightarrow a^*, b \leftrightarrow b^*$.)

Los elementos básicos t_{mn}^l cumplen $\Delta(t_{mn}^l) = \sum_{p=-l}^l t_{mp}^l \otimes t_{pn}^l$ en la coalgebra $\mathcal{O}(SU_q(2))$.

Definición 8.14. El **estado de Haar** sobre $\mathcal{O}(SU_q(2))$ —o bien sobre su completación $C(SU_q(2))$ en una C^* -álgebra— se define por

$$\psi(t_{00}^0) := 1, \quad \psi(t_{mn}^l) := 0 \quad \text{para } l > 0. \quad (8.20)$$

Las relaciones (8.17), (8.18) y (8.19) tiene la consecuencia

$$\psi((t_{rs}^j)^* t_{mn}^l) = \frac{q^{-2m}}{[2l+1]} \delta_{jl} \delta_{rm} \delta_{sn}. \quad (8.21)$$

En particular, vale $\psi((t_{mn}^l)^* t_{mn}^l) = q^{-2m}/[2l+1]$. La positividad de ψ es inmediata, porque ahora $\psi(x^*x) > 0$ cuando x es una combinación lineal no nula de los t_{mn}^l . Es claro que $\psi(1) = 1$.

Obsérvese la analogía con la traza normalizada τ sobre $C(\mathbb{T}_\theta^2)$. Sin embargo, este estado ψ *no es una traza*, porque

$$\psi(a^*a) = \frac{q^{-1}}{[2]} = \frac{q^{-1}}{q^{-1}+q} = \frac{1}{1+q^2} \quad \text{pero} \quad \psi(aa^*) = \frac{q}{[2]} = \frac{q}{q^{-1}+q} = \frac{q^2}{1+q^2}.$$

El estado de Haar ψ es *invariante* en el sentido de que $(1 \otimes \psi)(\Delta t_{mn}^l) = \eta(\psi(t_{mn}^l))$ ya que los dos lados se anulan para $l > 0$ y coinciden con 1 para $l = 0$; por linealidad [y continuidad de ψ], se obtiene $(1 \otimes \psi)(\Delta x) = \eta(\psi(x))$ para todo x en $\mathcal{O}(SU_q(2))$ [o bien en $C(SU_q(2))$].

²⁵Si t^l denota la matriz cuadrada con entradas t_{mn}^l , las matrices $t^j \otimes t^l$ y $t^{|j-l|} \oplus \dots \oplus t^{j+l}$, que pertenecen a $M_N(\mathcal{A})$ donde $N = (2j+1)(2l+1)$, son semejantes bajo conjugación por una matriz $C_q \in M_N(\mathbb{C})$ —de hecho, las entradas de esta matriz son reales. Cada t^l define una “corepresentación” de $\mathcal{O}(SU_q(2))$, muy análogo a la representación π_l del grupo $SU(2)$. Para los valores numéricos de las entradas de C_q , véase el Capítulo 3 de Klimyk y Schmüdgen, *op. cit.*

Definición 8.15. Las relaciones de ortogonalidad (8.21) muestran que $\mathcal{O}(SU_q(2))$ admite un *producto escalar* dado por

$$\langle x|y \rangle := \psi(x^*y), \quad \text{para } x, y \in \mathcal{O}(SU_q(2)),$$

para la cual los t_{mn}^l son ortogonales entre sí. Defínase

$$|l, m, n \rangle := q^m \sqrt{[2l+1]} t_{mn}^l. \quad (8.22)$$

Entonces $\{|l, m, n \rangle : 2l \in \mathbb{N}; m, n = -l, \dots, l\}$ es una *base ortonormal* para la compleción de $\mathcal{O}(SU_q(2))$ con respecto a este producto escalar. Este *espacio de Hilbert* será denotado por $L^2(SU_q(2), \psi)$.

Hay una representación natural π_ψ de $\mathcal{O}(SU_q(2))$ sobre este espacio de Hilbert, dada por (8.17): su lado izquierdo define (un múltiplo) de $\pi(t_{rs}^j)|l, m, n \rangle$, el lado derecho de esta fórmula es una combinación lineal de los vectores $|k, r+m, s+n \rangle$ con $k = |j-l|, \dots, j+l$. Sin embargo, no es evidente todavía que estos $\pi(t_{rs}^j)$ definen operadores acotados. Para ello, bastaría verificar que $\pi(a)$ y $\pi(b)$ son acotados y que $\pi(a^*) = \pi(a)^*$, $\pi(b^*) = \pi(b)^*$, para que π se extienda a una representación de $C(SU_q(2))$ por operadores acotados sobre $L^2(SU_q(2), \psi)$. Esta es la llamada **representación regular** (a la izquierda) del grupo cuántico $SU_q(2)$.

► La segunda construcción de $L^2(SU_q(2), \psi)$ hace uso del álgebra de simetrías $\mathcal{U} = \mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$. Esta álgebra tiene una familia de representaciones finitodimensionales,²⁶ obtenidas en el caso $q = 1$ de las representaciones irreducibles del grupo compacto $SU(2)$. Para cada $l \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, sea V_l el espacio de Hilbert de dimensión finita $(2l+1)$ y denótese por $\{|l, m \rangle : 2l \in \mathbb{N}; m = -l, \dots, l\}$ una base ortonormal. Entonces los tres operadores lineales $\sigma_l(k)$, $\sigma_l(e)$, $\sigma_l(f)$ definidos por

$$\begin{aligned} \sigma_l(k)|l, m \rangle &= q^m |l, m \rangle, \\ \sigma_l(e)|l, m \rangle &= \sqrt{[l-m+1][l+m]} |l, m-1 \rangle, \\ \sigma_l(f)|l, m \rangle &= \sqrt{[l-m][l+m+1]} |l, m+1 \rangle, \end{aligned} \quad (8.23)$$

cumplen las relaciones (8.11a):

$$\begin{aligned} \sigma_l(e)\sigma_l(k) &= q\sigma_l(k)\sigma_l(e), & \sigma_l(k)\sigma_l(f) &= q\sigma_l(f)\sigma_l(k), \\ \sigma_l(k)^2 - \sigma_l(k)^{-2} &= (q^{-1} - q)(\sigma_l(e)\sigma_l(f) - \sigma_l(f)\sigma_l(e)). \end{aligned}$$

²⁶Estas representaciones están clasificadas en el Capítulo 3 de Klimyk y Schmüdgen, *op. cit.*

(El caso $l = \frac{1}{2}$ ya fue mencionado en la sección anterior.)

Fíjese que $\sigma_l(k)$ tiene una matriz diagonal para la base dada, mientras $\sigma_l(e)$, $\sigma_l(f)$ son operadores de escalera que corren el segundo índice de $|l, m\rangle$ por ± 1 .

La fórmula (8.23) sugiere la posibilidad de que las dos álgebras $\mathcal{O}(SU_q(2))$ y $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$ aparezcan como operadores sobre el mismo espacio de Hilbert. En efecto, esto es lo que ocurre con $L^2(SU_q(2), \psi)$. Obviamente, las dos representaciones tendrán algunas relaciones de compatibilidad. Esta es la idea detrás de la siguiente definición, introducido por Dąbrowski y Sitarz.²⁷

Definición 8.16. Sean \mathcal{U} y \mathcal{A} dos álgebras de Hopf en dualidad y sea H un espacio de Hilbert. Una representación $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(H)$ por operadores acotados es una **representación \mathcal{U} -equivariante** si H posee un subespacio denso V tal que $\pi(x)(V) \subseteq V$ para $x \in \mathcal{A}$, y si hay una representación ρ de \mathcal{U} por operadores lineales sobre V tal que²⁸

$$\rho(h)\pi(x)\xi = \sum \pi(h_{\underline{1}} \triangleright x)\rho(h_{\underline{2}})\xi, \quad \text{para } h \in \mathcal{U}, x \in \mathcal{A}, \xi \in V, \quad (8.24)$$

donde $h \triangleright x$ denota la acción de Hopf (a la izquierda) de \mathcal{U} sobre \mathcal{A} determinado por la dualidad (8.14). Generalmente, cada $\rho(h)$ es un operador *no acotado* sobre H .

El álgebra de Hopf \mathcal{U} también posee una acción natural *a la derecha* de \mathcal{U} sobre \mathcal{A} , dada por (8.14). Para convertir ésta en una acción (de Hopf) a la izquierda, de alguna manera hay que cambiar el orden de productos en \mathcal{U} sin afectar la estructura de coálgebra. El antípoda S revierte el orden de productos, pero no es un isomorfismo de coálgebras.²⁹

Para el caso de $SU_q(2)$, resulta provechoso componer el inverso de S con un cierto automorfismo de \mathcal{U} .

²⁷Las representaciones equivariantes fueron introducidos, en el contexto de un “espacio cociente no conmutativo” \mathbb{S}_q^2 de $SU_q(2)$, en el artículo: Ludwik Dąbrowski y Andrzej Sitarz, “Dirac operator on the standard Podleś quantum sphere”, in *Noncommutative Geometry and Quantum Groups* (Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa, 2003), pp. 49–58.

²⁸Si \mathcal{U} es un álgebra de Hopf con una acción de Hopf (a la izquierda) sobre un álgebra \mathcal{A} , hay una nueva álgebra $\mathcal{A} \rtimes \mathcal{U}$, llamada el **producto fundido** (“smash product”) o *producto cruzado* de \mathcal{A} y \mathcal{U} , la cual es $\mathcal{A} \otimes \mathcal{U}$ como espacio vectorial, con el producto dado por $(y \otimes h)(x \otimes g) := \sum y(h_{\underline{1}} \triangleright x) \otimes h_{\underline{2}}g$. Una representación \mathcal{U} -equivariante de \mathcal{A} es lo mismo que una representación del álgebra $\mathcal{A} \rtimes \mathcal{U}$.

²⁹La aplicación lineal $\tau: V \otimes W \rightarrow W \otimes V$ dada por $\tau(v \otimes w) := w \otimes v$, el **volteo** (“flip”), juega un papel importante en la teoría de coálgebras. Una coálgebra es **coconmutativa** si $\tau \circ \Delta = \Delta$; de hecho, una álgebra es conmutativa si y sólo si su aplicación de producto μ satisface $\mu \circ \tau = \mu$. Una aplicación lineal T entre coálgebras es un **cohomomorfismo** si $\Delta \circ T = (T \otimes T) \circ \Delta$; pero T es un *coantimorfismo* si $\Delta \circ T = (T \otimes T) \circ \tau \circ \Delta$. El antípoda es a la vez un antimorfismo de álgebras, $S(gh) = S(h)S(g)$, y un coantimorfismo de coálgebras, $\sum S(h)_{\underline{1}} \otimes S(h)_{\underline{2}} = \sum S(h_{\underline{2}}) \otimes S(h_{\underline{1}})$.

Lema 8.17. *Hay un automorfismo del álgebra $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$, definido sobre generadores por³⁰*

$$\vartheta(k) := k^{-1}, \quad \vartheta(f) := -e, \quad \vartheta(e) := -f.$$

La composición $\varphi := S^{-1} \circ \vartheta$ es un antiautomorfismo de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$, definido sobre generadores por

$$\varphi(k) := k, \quad \varphi(f) := qe, \quad \varphi(e) := q^{-1}f.$$

Además, la aplicación lineal $S^{-1}\vartheta$, de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$ en sí mismo, es un isomorfismo de coálgebras.

Demostración. Para ver que ϑ es un automorfismo de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$, sólo hay que comprobar el cumplimiento de las relaciones (8.11a):

$$\begin{aligned} \vartheta(e)\vartheta(k) &= q\vartheta(k)\vartheta(e), & \vartheta(k)\vartheta(f) &= q\vartheta(f)\vartheta(k), \\ \vartheta(k)^2 - \vartheta(k)^{-2} &= (q^{-1} - q)(\vartheta(e)\vartheta(f) - \vartheta(f)\vartheta(e)), \end{aligned}$$

esto es,

$$-fk^{-1} = -qk^{-1}f, \quad -k^{-1}e = -qek^{-1}, \quad k^{-2} - k^2 = (q^{-1} - q)(fe - ef),$$

que coinciden con las relaciones (8.11a).

Las fórmulas $S^{-1}(k) = k^{-1}$, $S^{-1}(f) = -q^{-1}f$, $S^{-1}(e) = -qe$ comprueban la definición de φ sobre los generadores. Como S y S^{-1} revierten el orden de multiplicación, φ es un antiautomorfismo.

Además, φ conserva el coproducto Δ de $\mathcal{U} = \mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$, en el sentido de que $\Delta \circ \varphi = (\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$; sobre generadores,

$$\Delta(k) = k \otimes k, \quad \Delta(q^{-1}f) = q^{-1}f \otimes k + k^{-1} \otimes q^{-1}f, \quad \Delta(qe) = qe \otimes k + k^{-1} \otimes qe.$$

Por lo tanto, φ es un antiautomorfismo de álgebras pero a la vez un automorfismo de coálgebras. \square

El empleo de φ convierte la acción natural *a la derecha* de \mathcal{U} sobre \mathcal{A} en una acción de Hopf *a la izquierda*:

$$h \cdot x := x \triangleleft \varphi(h) \quad \text{para } h \in \mathcal{U}, x \in \mathcal{A},$$

³⁰El automorfismo ϑ fue introducido en el siguiente artículo, que forma la base del presente capítulo: Ludwik Dąbrowski, Giovanni Landi, Andrzej Sitarz, Walter van Suijlekom y Joseph C. Várilly, “The Dirac operator on $SU_q(2)$ ”, *Communications in Mathematical Physics* **259** (2005), 729–759.

ya que

$$g \cdot (h \cdot x) = (x \triangleleft \varphi(h)) \triangleleft \varphi(g) = x \triangleleft (\varphi(h)\varphi(g)) = x \triangleleft \varphi(gh) = gh \cdot x.$$

Obsérvese que las dos acciones a la izquierda de \mathcal{U} conmutan, por el Lema 8.13:

$$g \cdot (h \triangleright x) = (h \triangleright x) \triangleleft \varphi(g) = h \triangleright (x \triangleleft \varphi(g)) = h \triangleright (g \cdot x).$$

Consideremos entonces la posibilidad de una representación π del álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{O}(SU_q(2))$ por operadores acotados sobre algún espacio de Hilbert con un subespacio denso V , que sea \mathcal{U} -equivariante bajo dos representaciones λ y ρ de \mathcal{U} que conmutan entre sí: $\rho(g)\lambda(h) = \lambda(h)\rho(g) : V \rightarrow V$ para $g, h \in \mathcal{U}$; y además

$$\begin{aligned} \lambda(h) \pi(x) \xi &= \pi(h_1 \cdot x) \lambda(h_2) \xi, \\ \rho(g) \pi(x) \xi &= \pi(g_1 \triangleright x) \rho(g_2) \xi, \end{aligned} \quad (8.25)$$

para todo $g, h \in \mathcal{U}$, $x \in \mathcal{A}$, $\xi \in V$.

► Conviene hacer una pausa para recordar el caso conmutativo $q = 1$, en donde el espacio de Hilbert $L^2(SU(2))$ posee $(2l + 1)$ copias del espacio vectorial V_l de la representación irreducible π_l del grupo $SU(2)$, para cada $l \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. Ahora es posible reconocer la suma directa de estos $(2l + 1)$ copias de V_l como el *producto tensorial* $V_l \otimes V_l$, donde cada $\pi_l(u)$ actúa sobre el primer factor tensorial; una base del segundo factor tensorial sirve para enumerar las copias.

Entonces el subespacio denso generado algebraicamente (sin completar) por la base ortonormal de $L^2(SU(2))$ vista en la Sección 5.4 tiene la siguiente estructura:

$$V := \bigoplus_{2l=0}^{\infty} V_l \otimes V_l,$$

donde la suma directa es algebraica (no es completa en norma alguna). Habida cuenta de las representaciones irreducibles (8.23) de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$ sobre cada V_l , es posible definir dos representaciones de \mathcal{U} sobre V , que llevan cada $V_l \otimes V_l$ en sí mismo, por las recetas:

$$\begin{aligned} \lambda(h) &:= \sigma_l(h) \otimes 1_{V_l} \quad \text{sobre } V_l \otimes V_l, \\ \rho(g) &:= 1_{V_l} \otimes \sigma_l(g) \quad \text{sobre } V_l \otimes V_l. \end{aligned}$$

Hay una descripción más concreta, en términos de una base vectorial de $V_l \otimes V_l$. Sea $\{|l, m\rangle : m = -l, \dots, l\}$ una base vectorial de V_l y escríbase

$$|l, m, n\rangle := |l, m\rangle \otimes |l, n\rangle \in V_l \otimes V_l.$$

Estos vectores, para $m, n = -l, \dots, l$, forman una base del espacio vectorial $V_l \otimes V_l$, de dimensión $(2l+1)^2$. La notación es idéntica a la de (8.22), porque luego habrá que comparar los dos espacios vectoriales. Con este convenio, se obtiene

$$\begin{aligned}
\lambda(k) |l, m, n\rangle &= q^m |l, m, n\rangle, \\
\lambda(e) |l, m, n\rangle &= \sqrt{[l-m+1][l+m]} |l, m-1, n\rangle, \\
\lambda(f) |l, m, n\rangle &= \sqrt{[l-m][l+m+1]} |l, m+1, n\rangle, \\
\rho(k) |l, m, n\rangle &= q^n |l, m, n\rangle, \\
\rho(e) |l, m, n\rangle &= \sqrt{[l-n+1][l+n]} |l, m, n-1\rangle, \\
\rho(f) |l, m, n\rangle &= \sqrt{[l-n][l+n+1]} |l, m, n+1\rangle,
\end{aligned} \tag{8.26}$$

De estas fórmulas, se ve que $\lambda(h)\rho(g)|l, m, n\rangle = \rho(g)\lambda(h)|l, m, n\rangle$ cuando g, h son generadores de \mathcal{U} ; y luego también para $g, h \in \mathcal{U}$ cualesquiera.

Notación. En los cálculos que siguen, habrá muchos ajustes de semienteros como $l \mapsto l \pm \frac{1}{2}$. Para aliviar la notación, conviene introducir las abreviaturas:

$$l^\pm := l \pm \frac{1}{2}, \quad m^\pm := m \pm \frac{1}{2}, \quad n^\pm := n \pm \frac{1}{2}.$$

Proposición 8.18. *Una *-representación π del álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{O}(SU_q(2))$ sobre V , que es \mathcal{U} -equivariante bajo λ y ρ de (8.26), en el sentido de (8.25), debe tener la forma siguiente:*

$$\begin{aligned}
\pi(a) |l, m, n\rangle &= A_{lmn}^+ |l^+, m^+, n^+\rangle + A_{lmn}^- |l^-, m^+, n^+\rangle, \\
\pi(b) |l, m, n\rangle &= B_{lmn}^+ |l^+, m^+, n^-\rangle + B_{lmn}^- |l^-, m^+, n^-\rangle,
\end{aligned} \tag{8.27}$$

donde las constantes A_{lmn}^\pm y B_{lmn}^\pm están dadas, hasta factores de fase que dependen solamente de l , por:

$$\begin{aligned}
A_{lmn}^+ &= q^{\frac{1}{2}(-2l+m+n-1)} \left(\frac{[l+m+1][l+n+1]}{[2l+1][2l+2]} \right)^{\frac{1}{2}}, \\
A_{lmn}^- &= q^{\frac{1}{2}(2l+m+n+1)} \left(\frac{[l-m][l-n]}{[2l][2l+1]} \right)^{\frac{1}{2}}, \\
B_{lmn}^+ &= q^{\frac{1}{2}(m+n-1)} \left(\frac{[l+m+1][l-n+1]}{[2l+1][2l+2]} \right)^{\frac{1}{2}}, \\
B_{lmn}^- &= -q^{\frac{1}{2}(m+n-1)} \left(\frac{[l-m][l+n]}{[2l][2l+1]} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{8.28}$$

Demostración. Los valores de $\pi(a)$ y $\pi(b)$ sobre los vectores básicos $|l, m, n\rangle$ deben obedecer las condiciones de equivariancia (8.25) para $h \in \mathcal{U}$. Como λ y ρ son representaciones de \mathcal{U} , es decir, aplicaciones lineales y multiplicativas de \mathcal{U} en operadores lineales sobre V , basta considerar los casos en donde $h = k, e, f$.

Como $\Delta(k) = k \otimes k$, la equivariancia bajo $\lambda(k)$ toma la forma

$$\lambda(k) \pi(x) \xi = \pi(k \cdot x) \lambda(k) \xi, \quad \rho(k) \pi(x) \xi = \pi(k \triangleright x) \rho(k) \xi,$$

para $x \in \mathcal{A}$, $\xi \in V$. Las acciones a la izquierda de k sobre los generadores de \mathcal{A} son

$$\begin{aligned} k \triangleright a &= \sum a_1 \langle k, a_2 \rangle = a \langle k, a \rangle - qb \langle k, b^* \rangle = q^{\frac{1}{2}} a, \\ k \cdot a &:= a \triangleleft k = \sum \langle k, a_1 \rangle a_2 = \langle k, a \rangle a - q \langle k, b \rangle b^* = q^{\frac{1}{2}} a, \end{aligned}$$

y de modo similar $k \triangleright b = q^{-\frac{1}{2}} b$ pero $k \cdot b = q^{\frac{1}{2}} b$.

Para $x = a$, $h = k$, la equivariancia se reduce a la fórmulas

$$\begin{aligned} \lambda(k) \pi(a) |l, m, n\rangle &= \pi(q^{\frac{1}{2}} a) (q^m |l, m, n\rangle) = q^{m+\frac{1}{2}} \pi(a) |l, m, n\rangle, \\ \rho(k) \pi(a) |l, m, n\rangle &= \pi(q^{\frac{1}{2}} a) (q^n |l, m, n\rangle) = q^{n+\frac{1}{2}} \pi(a) |l, m, n\rangle. \end{aligned}$$

Entonces el vector $\pi(a) |l, m, n\rangle$ debe pertenecer al subespacio de V generado por los vectores $|l', m^+, n^+\rangle$, donde $l' \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. Análogamente, $\pi(b) |l, m, n\rangle$ debe de estar en el subespacio generado por los $|l', m^+, n^-\rangle$.

Ahora considérese el caso $h = f$, $x = a$. Como

$$\begin{aligned} f \cdot a &:= a \triangleleft qe = q \langle e, a \rangle a - q^2 \langle e, b \rangle b^* = 0, \\ k^{-1} \cdot a &= a \triangleleft k^{-1} = \langle k^{-1}, a \rangle a = q^{-\frac{1}{2}} a, \end{aligned}$$

se obtiene

$$\lambda(f) \pi(a) \xi = \pi(f \cdot a) \lambda(k) \xi + \pi(k^{-1} \cdot a) \lambda(f) \xi = q^{-\frac{1}{2}} \pi(a) \lambda(f) \xi.$$

Por inducción, para $r = 1, 2, 3, \dots$, se concluye que

$$\lambda(f)^r \pi(a) |l, m, n\rangle = q^{-r/2} \pi(a) \lambda(f)^r \propto \pi(a) |l, m+r, n\rangle = 0,$$

y el lado derecho es cero cuando $m+r > l$. Por otro lado, $\lambda(f)^r |l', m^+, n^+\rangle$ es un múltiplo no nulo de $|l', m^+ + r, n^+\rangle$, toda vez que $m+r + \frac{1}{2} \leq l'$. La conclusión es que $l' \leq l + \frac{1}{2}$ en la expansión de $\pi(a) |l, m, n\rangle$.

Un argumento similar, con las sustituciones $a \mapsto a^*$ y $f \mapsto e$, tomando en cuenta que $\langle l', m', n' | \pi(a) |l, m, n\rangle$ es el conjugado complejo de $\langle l, m, n | \pi(a^*) |l', m', n'\rangle$,

muestra que $l' \geq l + \frac{1}{2}$ en dicha expansión. El caso $l' = l$ es inadmisibile porque tanto $l - m$ como $l' - m - \frac{1}{2}$ deben ser enteros (en vez de semienteros). Luego $l' = l \pm \frac{1}{2}$ solamente; en otras palabras, $\pi(a)|l, m, n\rangle$ es una combinación lineal de los dos vectores $|l^+, m^+, n^+\rangle$ y $|l^-, m^+, n^+\rangle$.

El mismo proceso muestra que $\pi(b)|l, m, n\rangle$ es una combinación lineal de los dos vectores $|l^+, m^+, n^-\rangle$ y $|l^-, m^+, n^-\rangle$. Hemos verificado la fórmula (8.27) pero falta la evaluación de los coeficientes A_{lmn}^\pm y B_{lmn}^\pm .

Volvamos el caso $h = f$, $x = a$, con ρ en lugar de λ . Como $f \triangleright a = 0$ y además $k^{-1} \triangleright a = q^{-\frac{1}{2}}a$, se obtiene

$$\rho(f) \pi(a) \xi = \pi(f \triangleright a) \rho(k) \xi + \pi(k^{-1} \triangleright a) \rho(f) \xi = q^{-\frac{1}{2}} \pi(a) \rho(f) \xi.$$

Con $\xi = |l, m, n\rangle$, se obtiene

$$\begin{aligned} \rho(f) \pi(a) |l, m, n\rangle &= A_{lmn}^+ \rho(f) |l^+, m^+, n^+\rangle + A_{lmn}^- \rho(f) |l^-, m^+, n^+\rangle \\ &= q^{-\frac{1}{2}} \pi(a) \rho(f) |l, m, n\rangle = q^{-\frac{1}{2}} \sqrt{[l-n][l+n+1]} \pi(a) |l, m, n+1\rangle. \end{aligned}$$

Al examinar los coeficientes de $|l^+, m^+, n^+ + 1\rangle$ y $|l^-, m^+, n^+ + 1\rangle$ en estas expresiones, salen dos relaciones de recurrencia para los A_{lmn}^\pm :

$$\begin{aligned} A_{lmn}^+ \sqrt{[l+n+2]} &= q^{-\frac{1}{2}} A_{lm, n+1}^+ \sqrt{[l+n+1]}, \\ A_{lmn}^- \sqrt{[l-n-1]} &= q^{-\frac{1}{2}} A_{lm, n+1}^- \sqrt{[l-n]}. \end{aligned}$$

Como también vale $f \cdot a = 0$, al aplicar $\lambda(f)$ en ambos lados de la primera ecuación de (8.27), salen otras dos relaciones de recurrencia:

$$\begin{aligned} A_{lmn}^+ \sqrt{[l+m+2]} &= q^{-\frac{1}{2}} A_{l, m+1, n}^+ \sqrt{[l+m+1]}, \\ A_{lmn}^- \sqrt{[l-m-1]} &= q^{-\frac{1}{2}} A_{l, m+1, n}^- \sqrt{[l-m]}, \end{aligned}$$

La solución general para estas relaciones de recurrencia es

$$\begin{aligned} A_{lmn}^+ &= q^{(m+n)/2} \sqrt{[l+m+1]} \sqrt{[l+n+1]} a_l^+, \\ A_{lmn}^- &= q^{(m+n)/2} \sqrt{[l-m]} \sqrt{[l-n]} a_l^-, \end{aligned}$$

donde los términos a_l^+ y a_l^- son independientes de m, n .

Al aplicar $\rho(e)$ y $\lambda(f)$ a la segunda ecuación de (8.27), habida cuenta de que $e \triangleright b = 0$ y $f \cdot b = 0$, un análisis semejante simplifica los coeficientes B_{lmn}^\pm en

$$\begin{aligned} B_{lmn}^+ &= q^{(m+n)/2} \sqrt{[l+m+1]} \sqrt{[l-n+1]} b_l^+, \\ B_{lmn}^- &= q^{(m+n)/2} \sqrt{[l-m]} \sqrt{[l+n]} b_l^-, \end{aligned}$$

donde los términos b_l^+ y b_l^- son independientes de m, n .

Hay otra relación de equivariancia disponible:

$$\rho(e)\pi(a) = \pi(e \triangleright a)\rho(k) + \pi(k^{-1} \triangleright a)\rho(e) = \pi(b)\rho(k) + q^{-\frac{1}{2}}\pi(a)\rho(e).$$

Al aplicarla al vector $|l, m, n\rangle$, se obtiene una combinación lineal de los dos vectores $|l^+, m^+, n^-\rangle$ y $|l^-, m^+, n^-\rangle$, con coeficientes respectivos

$$\begin{aligned} A_{lmn}^+ \sqrt{[l-n+1][l+n+1]} &= q^n B_{lmn}^+ + q^{-\frac{1}{2}} \sqrt{[l-n+1][l+n]} A_{lm, n-1}^+, \\ A_{lmn}^- \sqrt{[l-n][l+n]} &= q^n B_{lmn}^- + q^{-\frac{1}{2}} \sqrt{[l-n+1][l+n]} A_{lm, n-1}^-. \end{aligned}$$

Las relaciones anteriores simplifican estas igualdades, con el resultado:

$$q^n b_l^+ = ([l+n+1] - q^{-1}[l+n]) a_l^+, \quad q^n b_l^- = ([l-n] - q^{-1}[l-n+1]) a_l^-.$$

Explícitamente, estas relaciones son

$$\begin{aligned} (q^{-1} - q)q^n b_l^+ &= (q^{-l-n-1} - q^{l+n+1} - q^{-1}(q^{-l-n} - q^{l+n})) a_l^+ \\ &= q^{l+n}(q^{-1} - q) a_l^+, \\ (q^{-1} - q)q^n b_l^- &= (q^{-l+n} - q^{l-n} - q^{-1}(q^{-l+n-1} - q^{l-n+1})) a_l^- \\ &= -q^{-l+n-1}(q^{-1} - q) a_l^-, \end{aligned}$$

o bien

$$b_l^+ = q^l a_l^+, \quad b_l^- = -q^{-l-1} a_l^-.$$

La última relación de equivariancia que se requiere es

$$\lambda(e)\pi(b) = \pi(e \cdot b)\lambda(k) + \pi(k^{-1} \cdot b)\lambda(e) = q^{-1}\pi(a^*)\lambda(k) + q^{-\frac{1}{2}}\pi(b)\lambda(e).$$

Al insertar los dos lados de esta ecuación en el corchete $\langle l', m', n' | \cdot | l, m, n \rangle$ y después de un poco de simplificación, se obtiene

$$(a_{l+\frac{1}{2}}^-)^* = q^{2l+\frac{3}{2}} a_l^+.$$

Falta entonces determinar los parámetros a_l^+ para cada $l \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. La equivariancia bajo \mathcal{U} no puede ofrecer más información. Pero aun quedan la *relaciones de conmutación* en el álgebra \mathcal{A} . Considérese la ecuación $ba = qab$ y su consecuencia

$$\pi(b)\pi(a) |l, m, n\rangle = q \pi(a)\pi(b) |l, m, n\rangle.$$

Los dos lados de esta igualdad son combinaciones lineales de los tres vectores $|l', m+1, n\rangle$ para $l' = l-1, l, l+1$. Los coeficientes de $|l, m+1, n\rangle$ dan la relación:

$$A_{lmn}^+ B_{l+m+n}^- + A_{lmn}^- B_{l-m+n}^+ = q(B_{lmn}^+ A_{l+m+n}^- + B_{lmn}^- A_{l-m+n}^+).$$

Esta se simplifica en

$$q[2l+2]|a_l^+|^2 = [2l]|a_{l-\frac{1}{2}}^+|^2.$$

Esta es una relación de recurrencia para los a_l^+ , cuya solución general es

$$a_l^+ = \frac{C\zeta_l q^{-l}}{\sqrt{[2l+1]}\sqrt{[2l+2]}},$$

donde C es una *constante* positiva y cada ζ_l es un factor de fase, es decir, un número complejo tal que $|\zeta_l| = 1$.

Para determinar la constante C , se dispone de la relación $a^*a + q^2b^*b = 1$. Al insertarla en el corchete $\langle 0, 0, 0 | \cdot | 0, 0, 0 \rangle$, se obtiene

$$\begin{aligned} 1 &= \langle 0, 0, 0 | \pi(a^*a + q^2b^*b) | 0, 0, 0 \rangle = \|\pi(a) | 0, 0, 0 \rangle\|^2 + q^2 \|\pi(b) | 0, 0, 0 \rangle\|^2 \\ &= |a_0^+|^2 + q^2 |b_0^+|^2 = (1 + q^2) |a_0^+|^2 = \frac{(1 + q^2)C^2}{q^{-1} + q} = qC^2, \end{aligned}$$

así que $C = q^{-\frac{1}{2}}$. Los coeficientes A_{lmn}^\pm y B_{lmn}^\pm entonces quedan completamente determinados, excepto por los valores de los factores de fase ζ_l . Si se decide poner $\zeta_l = 1$ para todo l , es un ejercicio fácil reconstituir los coeficientes para obtener las fórmulas explícitas (8.28). \square

Considérese la representación π_ψ de \mathcal{A} sobre $L^2(SU_q(2), \psi)$, definida implícitamente por (8.17) y (8.22). El subespacio denso V coincide con $\mathcal{A} = \mathcal{O}(SU_q(2))$ como espacio vectorial. Al tomar $|l, m, n\rangle := q^m \sqrt{[2l+1]} t_{mn}^l$, la ecuación (8.17) implica que

$$\begin{aligned} \pi_\psi(a) |l, m, n\rangle &= q^{-\frac{1}{2}} \frac{[2l+1]^{\frac{1}{2}}}{[2l+2]^{\frac{1}{2}}} C_q \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & l & l^+ \\ \frac{1}{2} & m & m^+ \end{pmatrix} C_q \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & l & l^+ \\ \frac{1}{2} & n & n^+ \end{pmatrix} |l^+, m^+, n^+\rangle \\ &\quad + q^{-\frac{1}{2}} \frac{[2l+1]^{\frac{1}{2}}}{[2l]^{\frac{1}{2}}} C_q \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & l & l^- \\ \frac{1}{2} & m & m^+ \end{pmatrix} C_q \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & l & l^- \\ \frac{1}{2} & n & n^+ \end{pmatrix} |l^-, m^+, n^+\rangle \end{aligned}$$

y una fórmula similar para $\pi_\psi(b) |l, m, n\rangle$. Un cálculo³¹ con los valores explícitos de los $C_q(-)$ muestran los coeficientes de $\pi_\psi(a)$ y $\pi_\psi(b)$ son *exactamente* los que aparecen en (8.28). En particular, estos coeficientes son *números reales*.

Hay dos conclusiones: primero, que la llamada **representación regular** π_ψ de $\mathcal{O}(SU_q(2))$ es $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$ -equivariante bajo λ y ρ ; y segundo, la decisión de tomar

³¹Este cálculo aparece en el artículo de Dąbrowski *et al*, *op. cit.*

cada $\zeta_l = 1$ queda justificada *a posteriori* por la existencia de la representación regular.

Obsérvese también que los operadores $\pi(a)$ y $\pi(b)$ de la Proposición 8.18 se extienden a *operadores acotados* sobre el espacio de Hilbert H obtenido al completar V con respecto al producto escalar que hace de los $|l, m, n\rangle$ una base ortonormal.³² La acotación viene de la relación

$$\pi(a)^* \pi(a) + q^2 \pi(b)^* \pi(b) = \pi(a^* a + q^2 b^* b) = \pi(1) = 1_H,$$

la cual implica que $\|\pi(a)\xi\|^2 \leq \|\xi\|^2$ y $\|q\pi(b)\xi\|^2 \leq \|\xi\|^2$ para todo $\xi \in H$. Entonces los operadores $\pi(a)$ y $\pi(b)$ tienen normas finitas:³³

$$\|\pi(a)\| \leq 1, \quad \|\pi(b)\| \leq q^{-1}.$$

8.4 Espinores y el operador de Dirac para $SU_q(2)$

El *espacio espinorial* para $SU_q(2)$ se define, como era de esperar, como *la suma directa de dos copias de $L^2(SU_q(2), \psi)$* . Es posible anticipar, a partir del tratamiento de espinores para \mathbb{S}^3 , que los espinores básicos deben ser reorganizados en autoespacios finitodimensionales del operador de Dirac, con dimensiones y multiplicidades iguales o parecidas a las que aparecen al final de la Sección 5.4. Inspirado por la construcción de representaciones equivariantes *à la* Dąbrowski y Sitarz, aquí se emprende un camino inverso. Inicialmente se construirá el espacio de Hilbert de espinores, a partir de su descomposición en una suma directa de subespacios de dimensión finita. Luego se mostrará la unicidad esencial (hasta algunos factores de fase) de una representación equivariante de $\mathcal{O}(SU_q(2))$ en este espacio de espinores. Finalmente, se introduce un operador autoadjunto sobre los espinores mediante sus autovalores y autovectores; este será nuestro operador de Dirac para $SU_q(2)$.

Nuestro punto de partida es *el isomorfismo de Clebsch y Gordan*

$$V_l \otimes V_{\frac{1}{2}} \simeq V_{l+\frac{1}{2}} \oplus V_{l-\frac{1}{2}},$$

donde las dimensiones cumplen $2(2l+1) = (2l+2) + 2l$. En el caso “ordinario” $q = 1$, esta es la descomposición de un producto tensorial de dos representaciones

³²Los elementos de H son todas las series $\sum_{l,m,n} C_{lmn} |l, m, n\rangle$ donde los coeficientes $C_{lmn} \in \mathbb{C}$ cumplen $\sum_{l,m,n} |C_{lmn}|^2 < \infty$. La identidad de Parseval implica la convergencia de la serie en H ; esta serie pertenece al subespacio denso V si y sólo si solamente una cantidad finita de los C_{lmn} son distintos de cero.

³³De hecho, la otra relación de conmutación $aa^* + bb^* = 1$ da una cota mejor, $\|\pi(b)\| \leq 1$.

de $SU(2)$, escrito $\pi_l \otimes \pi_{\frac{1}{2}} \simeq \pi_{l+\frac{1}{2}} \oplus \pi_{l-\frac{1}{2}}$ en la teoría de representaciones de grupos. En nuestra presentación algebraica de $SU_q(2)$, ésta queda reemplazada por el producto tensorial de dos representaciones finitodimensionales del álgebra de Hopf de simetrías.

Definición 8.19. Si λ y σ son dos representaciones de un álgebra de Hopf \mathcal{U} sobre los espacios vectoriales respectivos V y K , se define su **producto tensorial** mediante el coproducto en \mathcal{U} :

$$(\lambda \otimes \sigma)(h) := \sum \lambda(h_1) \otimes \sigma(h_2). \quad (8.29)$$

El lado derecho es un operador sobre $V \otimes K$ para cada h . Como el coproducto es un homomorfismo de álgebras, $\Delta(gh) = \Delta(g)\Delta(h) = \sum g_1 h_1 \otimes g_2 h_2$, se ve que $\lambda \otimes \sigma$ es un homomorfismo de \mathcal{U} en $\text{End}(V \otimes K)$, así que $\lambda \otimes \sigma$ es una nueva representación de \mathcal{U} sobre $V \otimes K$.

En particular, para $\mathcal{U} = \mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$, sean λ y ρ las representaciones (8.26) sobre el espacio vectorial $V = \bigoplus_{2l \geq 0} V_l \otimes V_l$. Defínase las representaciones λ' y ρ' sobre $W := V \otimes \mathbb{C}^2$ por

$$\lambda' := \lambda \otimes \sigma_{\frac{1}{2}}, \quad \rho' := \rho \otimes 1. \quad (8.30)$$

Aquí 1 denota la representación trivial sobre \mathbb{C}^2 dado por $k \mapsto 1$, $e \mapsto 0$, $f \mapsto 0$. Entonces

$$\rho'(h) \begin{pmatrix} |l, m, n\rangle \\ |l, m', n'\rangle \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \rho(h)|l, m, n\rangle \\ \rho(h)|l, m', n'\rangle \end{pmatrix} \quad \text{para todo } h \in \mathcal{U}.$$

Basta comprobar esta fórmula para $h = k, e, f$.

Para obtener fórmulas cómodas para λ' , conviene introducir ahora un elemento cuadrático especial del álgebra \mathcal{U} .

Definición 8.20. En el álgebra de Hopf $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$, considérese el elemento

$$C_q := qk^2 + q^{-1}k^{-2} + (q^{-1} - q)^2 ef. \quad (8.31)$$

Es inmediato que $kC_q = C_q k$. Obsérvese que

$$\begin{aligned} eC_q &= qek^2 + q^{-1}ek^{-2} + e(q^{-1} - q)((q^{-1} - q)fe + k^2 - k^{-2}) \\ &= q^{-1}ek^2 + qek^{-2} + (q^{-1} - q)^2 efe \\ &= qk^2e + q^{-1}k^{-2}e + (q^{-1} - q)^2 efe = C_q e. \end{aligned}$$

De modo similar, se obtiene $fC_q = C_q f$. Por lo tanto, C_q conmuta con los generadores y por ende con todos los elementos del álgebra; es decir, C_q es un *elemento central* de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$. Este es el **elemento de Casimir** de esta álgebra.³⁴

Lema 8.21. *Los siguientes dos elementos de $V \otimes \mathbb{C}^2 = V \oplus V$ son autovectores para el operador $\lambda'(C_q)$:*

$$\begin{pmatrix} \tilde{c}_{lm} |l, m-1, n\rangle \\ \tilde{s}_{lm} |l, m, n\rangle \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\tilde{s}_{lm} |l, m-1, n\rangle \\ \tilde{c}_{lm} |l, m, n\rangle \end{pmatrix},$$

donde

$$\tilde{c}_{lm} := q^{-(l+m)/2} \frac{\sqrt{[l-m+1]}}{\sqrt{[2l+1]}}, \quad \tilde{s}_{lm} := q^{(l-m+1)/2} \frac{\sqrt{[l+m]}}{\sqrt{[2l+1]}}.$$

Los autovalores correspondientes son $(q^{2l} + q^{-2l})$ y $(q^{2l+2} + q^{-2l-2})$, respectivamente.

Demostración. Este es un cálculo explícito, usando las relaciones

$$\lambda'(k) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{\frac{1}{2}} \lambda(k) \xi \\ q^{-\frac{1}{2}} \lambda(k) \eta \end{pmatrix}$$

y otras relaciones similares para $\lambda'(e)$ y $\lambda'(f)$, obtenidas de (8.29). Los detalles se dejan como un ejercicio. Obsérvese que $\tilde{c}_{lm}^2 + \tilde{s}_{lm}^2 = 1$. \square

En vista de la asimetría entre λ' y ρ' en su definición (8.30), y el aspecto visual de los autovalores de $\lambda'(C_q)$, conviene correr el índice l por un monto de $\pm \frac{1}{2}$, substituyéndolo por un nuevo índice j . Hay dos casos que considerar.

* Para $j = l - \frac{1}{2}$, $\mu = m - \frac{1}{2}$, con $\mu = -j, \dots, j$ y $n = -j - \frac{1}{2}, \dots, j + \frac{1}{2}$, sea

$$|j, \mu, n, \uparrow\rangle := \begin{pmatrix} c_{j+1, \mu} |j^+, \mu^-, n\rangle \\ -s_{j+1, \mu} |j^+, \mu^+, n\rangle \end{pmatrix}. \quad (8.32a)$$

³⁴Cada álgebra de Lie semisimple \mathfrak{g} posee una base $\{x_1, \dots, x_n\}$ tal que $C = x_1^2 + \dots + x_n^2$ es un elemento central del álgebra envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Este es el *elemento de Casimir* de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Si σ es una representación del álgebra de Lie \mathfrak{g} , entonces $\sigma(C)$ es un operador escalar (un múltiplo de la identidad) cuando σ es irreducible, por el Lema de Schur. En los casos $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$, el operador $\sigma(C) = J^2$ puede interpretarse como el cuadrado del momento angular total, como fue señalado por el físico Hendrik Casimir en 1931; de ahí su nombre.

★ Para $j = l + \frac{1}{2}$, $\mu = m - \frac{1}{2}$, con $\mu = -j, \dots, j$ y $n = -j + \frac{1}{2}, \dots, j - \frac{1}{2}$, sea

$$|j, \mu, n, \downarrow\rangle := \begin{pmatrix} s_{j\mu} |j^-, \mu^-, n\rangle \\ c_{j\mu} |j^-, \mu^+, n\rangle \end{pmatrix}. \quad (8.32b)$$

En los dos casos, los coeficientes son

$$c_{j\mu} := q^{-(j+\mu)/2} \frac{\sqrt{[j-\mu]}}{\sqrt{[2j]}}, \quad s_{j\mu} := q^{(j-\mu)/2} \frac{\sqrt{[j+\mu]}}{\sqrt{[2j]}},$$

que obedecen $c_{j\mu}^2 + s_{j\mu}^2 = 1$. El segundo caso $|j, \mu, n, \downarrow\rangle$ no está definido para $j = 0$, ya que no hay posibilidades para el índice n .

Los *espinores* $|j, \mu, n, \uparrow\rangle$ y $|j, \mu, n, \downarrow\rangle$ son los mismos del Lema 8.21; solamente se ha hecho un cambio de notación. Ellos son autovectores de los dos operadores de Casimir $\lambda'(C_q)$ y $\rho'(C_q)$, como sigue:

$$\begin{aligned} \lambda'(C_q)|j, \mu, n, \uparrow\rangle &= (q^{2j+1} + q^{-2j-1})|j, \mu, n, \uparrow\rangle, \\ \lambda'(C_q)|j, \mu, n, \downarrow\rangle &= (q^{2j+1} + q^{-2j-1})|j, \mu, n, \downarrow\rangle, \\ \rho'(C_q)|j, \mu, n, \uparrow\rangle &= (q^{2j+2} + q^{-2j-2})|j, \mu, n, \uparrow\rangle, \\ \rho'(C_q)|j, \mu, n, \downarrow\rangle &= (q^{2j} + q^{-2j})|j, \mu, n, \downarrow\rangle. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Para cada j fijo, estos espinores son bases de los subespacios

$$W_j^\uparrow := \text{lin}\langle |j, \mu, n, \uparrow\rangle : |\mu| \leq j; |n| \leq j + \frac{1}{2} \rangle \simeq V_{j+\frac{1}{2}} \otimes V_j, \quad \text{para } 2j \geq 0;$$

$$W_j^\downarrow := \text{lin}\langle |j, \mu, n, \downarrow\rangle : |\mu| \leq j; |n| \leq j - \frac{1}{2} \rangle \simeq V_{j-\frac{1}{2}} \otimes V_j, \quad \text{para } 2j \geq 1.$$

Concretamente, se ha obtenido una nueva descomposición del espacio vectorial $W = V \otimes \mathbb{C}^2$, en la forma

$$W = W_0^\uparrow \oplus \bigoplus_{2j \geq 1} (W_j^\uparrow \oplus W_j^\downarrow).$$

Las dimensiones de estos subespacios se obtienen al contar los posibles índices μ, n en cada caso:

$$\begin{aligned} \dim W_j^\uparrow &= (2j+1)(2j+2), & \text{para } j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, \\ \dim W_j^\downarrow &= 2j(2j+1), & \text{para } j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \end{aligned}$$

Fíjese que esto corresponde exactamente con los autoespacios del operador de Dirac \not{D} para la esfera \mathbb{S}^3 .

► El siguiente ítem en nuestra agenda es la construcción de una representación del álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{O}(SU_q(2))$ por operadores acotados en un espacio de Hilbert que incluye W como subespacio denso. Esta representación debe ser $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$ -equivariante bajo λ' y ρ' , para poder aprovechar la base (8.32) de W .

Definición 8.22. Sea H el espacio de Hilbert obtenido al completar W con respecto al (único) producto escalar sobre W tal que todos los elementos $|j, \mu, n, \uparrow\rangle$ y $|j, \mu, n, \downarrow\rangle$ forman una familia ortonormal. Esta familia será, entonces, una *base ortonormal* de H . Los elementos de H se llaman **espinores** y se dice que H es el **espacio espinorial** para $SU_q(2)$.

Como $W = V \otimes \mathbb{C}^2 \simeq V \oplus V$, la ortonormalidad de los $|l, m, n\rangle$ confiere un producto escalar sobre V y de rebote sobre $V \oplus V$. Para ello, los $|j, \mu, n, \uparrow\rangle$ y los $|j, \mu, n, \downarrow\rangle$ forman dos familias ortonormales, en vista de la relación $c_{j\mu}^2 + s_{j\mu}^2 = 1$. Además, los miembros de cada familia son ortogonales entre sí: sólo que que comprobar los casos

$$\begin{aligned} \langle j-1, \mu, n, \uparrow | j, \mu, n, \downarrow \rangle \\ = c_{j\mu} s_{j\mu} \langle j^-, \mu^-, n | j^-, \mu^-, n \rangle - s_{j\mu} c_{j\mu} \langle j^-, \mu^+, n | j^-, \mu^+, n \rangle = 0. \end{aligned}$$

El isomorfismo lineal $W \simeq V \oplus V$ entonces preserva los productos escalares. Luego, la completación de W en un espacio de Hilbert satisface

$$H \simeq L^2(SU_q(2), \psi) \oplus L^2(SU_q(2), \psi),$$

donde el isomorfismo está dado por un cambio de bases ortonormales.

Definición 8.23. Defínase $\pi'(x) := \pi(x) \oplus \pi(x)$ en $\mathcal{L}(H)$, para $x \in \mathcal{A} = \mathcal{O}(SU_q(2))$. Como cada $\pi(x)$ es un operador acotado sobre $L^2(SU_q(2), \psi)$, se ve que π' es una representación de \mathcal{A} por operadores acotados sobre \mathcal{H} .

La representación π' es \mathcal{U} -equivariante bajo las representaciones λ' y ρ' de $\mathcal{U} = \mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$ sobre el subespacio denso W . En otras palabras, se cumplen los análogos de (8.25) en este caso:

$$\begin{aligned} \lambda'(h) \pi'(x) \psi &= \pi'(h_{\underline{1}} \cdot x) \lambda'(h_{\underline{2}}) \psi, \\ \rho'(g) \pi'(x) \psi &= \pi'(g_{\underline{1}} \triangleright x) \rho'(g_{\underline{2}}) \psi, \end{aligned} \tag{8.34}$$

para todo $g, h \in \mathcal{U}$, $x \in \mathcal{A}$, $\psi \in W$.

En efecto, si $\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ con $\xi, \eta \in V$, se ve que

$$\rho'(g) \pi'(x) \psi = \begin{pmatrix} \rho(g) \pi(x) \xi \\ \rho(g) \pi(x) \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi(g_{\underline{1}} \triangleright x) \rho(g_{\underline{2}}) \xi \\ \pi(g_{\underline{1}} \triangleright x) \rho(g_{\underline{2}}) \eta \end{pmatrix} = \pi'(g_{\underline{1}} \triangleright x) \rho'(g_{\underline{2}}) \psi.$$

Además, como $\pi' = \pi \otimes 1$ como representaciones de álgebras sobre $W = V \otimes \mathbb{C}^2$, se obtiene

$$\begin{aligned}\lambda'(h)\pi'(x) &= (\lambda(h_1) \otimes \sigma_{\frac{1}{2}}(h_2))(\pi(x) \otimes 1) \\ &= \pi(h_1 \cdot x) \lambda(h_2) \otimes \sigma_{\frac{1}{2}}(h_3) = (\pi(h_1 \cdot x) \otimes 1)(\lambda(h_2) \otimes \sigma_{\frac{1}{2}}(h_3)) \\ &= \pi'(h_1 \cdot x) \lambda'(h_2),\end{aligned}$$

al usar la coasociatividad de \mathcal{U} .

Una vez más, es posible comprobar que solamente hay una representación de \mathcal{A} sobre H que sea \mathcal{U} -equivariante para λ' y ρ' , hasta algunos factores de fase que sólo dependen del índice j de los subespacios W_j^\uparrow y W_j^\downarrow . La prueba es esencialmente una repetición de la demostración de la Proposición 8.18 y será omitida.³⁵ Para el enunciado, conviene tratar los dos espinores $|j, \mu, n, \uparrow\rangle$ y $|j, \mu, n, \downarrow\rangle$ como una pareja: escríbase

$$|j, \mu, n\rangle := \begin{pmatrix} |j, \mu, n, \uparrow\rangle \\ |j, \mu, n, \downarrow\rangle \end{pmatrix} \in H \oplus H,$$

para $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, con $\mu = -j, \dots, j$ y $n = -j - \frac{1}{2}, \dots, j + \frac{1}{2}$; en los casos $j = 0$ o bien $n = \pm(j + \frac{1}{2})$, el segundo espinor de esta pareja es 0.

Proposición 8.24. *La representación $\pi' := \pi \otimes 1$ de \mathcal{A} sobre H está dada por*

$$\begin{aligned}\pi'(a)|j, \mu, n\rangle &= \alpha_{j, \mu, n}^+ |j^+, \mu^+, n^+\rangle + \alpha_{j, \mu, n}^- |j^-, \mu^+, n^+\rangle, \\ \pi'(b)|j, \mu, n\rangle &= \beta_{j, \mu, n}^+ |j^+, \mu^+, n^-\rangle + \beta_{j, \mu, n}^- |j^-, \mu^+, n^-\rangle,\end{aligned}\quad (8.35)$$

donde $\alpha_{j\mu n}^\pm$ y $\beta_{j\mu n}^\pm$ son las siguientes matrices 2×2 triangulares:

$$\begin{aligned}\alpha_{j\mu n}^+ &= q^{(\mu+n-\frac{1}{2})/2} \sqrt{[j+\mu+1]} \begin{pmatrix} q^{-j-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{[j+n+\frac{3}{2}]}}{[2j+2]} & 0 \\ q^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{[j-n+\frac{1}{2}]}}{[2j+1][2j+2]} & q^{-j} \frac{\sqrt{[j+n+\frac{1}{2}]}}{[2j+1]} \end{pmatrix}, \\ \alpha_{j\mu n}^- &= q^{(\mu+n-\frac{1}{2})/2} \sqrt{[j-\mu]} \begin{pmatrix} q^{j+1} \frac{\sqrt{[j-n+\frac{1}{2}]}}{[2j+1]} & -q^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{[j+n+\frac{1}{2}]}}{[2j][2j+1]} \\ 0 & q^{j+\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{[j-n-\frac{1}{2}]}}{[2j]} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

³⁵Para los detalles de esta prueba, véase la Proposición 4.4 del artículo de Dąbrowski *et al*, *op. cit.*

$$\beta_{j\mu n}^+ = q^{(\mu+n-\frac{1}{2})/2} \sqrt{[j+\mu+1]} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{[j-n+\frac{3}{2}]}}{[2j+2]} & 0 \\ -q^{-j-1} \frac{\sqrt{[j+n+\frac{1}{2}]}}{[2j+1][2j+2]} & q^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{[j-n+\frac{1}{2}]}}{[2j+1]} \end{pmatrix},$$

$$\beta_{j\mu n}^- = q^{(\mu+n-\frac{1}{2})/2} \sqrt{[j-\mu]} \begin{pmatrix} -q^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{[j+n+\frac{1}{2}]}}{[2j+1]} & -q^j \frac{\sqrt{[j-n+\frac{1}{2}]}}{[2j][2j+1]} \\ 0 & -\frac{\sqrt{[j+n-\frac{1}{2}]}}{[2j]} \end{pmatrix}.$$

Cualquier representación de \mathcal{A} sobre H que sea \mathcal{U} -equivariante para λ' y ρ' está dada por fórmulas similares, donde las matrices $\alpha_{j\mu n}^\pm$ y $\beta_{j\mu n}^\pm$ pueden tener ciertos factores de fase que dependen de j solamente.

► Finalmente, teniendo ya una representación del álgebra de coordenadas sobre el espacio de espinores, expresada por fórmulas explícitas sobre una base ortonormal de espinores, es hora de introducir el operador de Dirac.

En el caso de $SU_q(2)$, no disponemos de la base tecnológica que da origen a los operadores usuales de Dirac: la métrica riemanniana, los coeficientes de Levi-Civita, la conexión de espín, la acción de Clifford de las 1-formas. Más bien, hemos visto que el operador de Dirac proporciona la distancia geodésica (e indirectamente, la métrica riemanniana); además, a través de la fórmula $[D, f] = -ic(df)$, el operador de Dirac proporciona la acción de Clifford de 1-formas. Lo que hay que hacer, entonces, es *promover el operador de Dirac a la posición principal* de la teoría, tratando de definir los demás conceptos en términos de este operador o de su espectro. Este es la razón de ser del concepto de *triple espectral*.

¿Cómo, entonces, debe elegirse un operador adecuado? Los requisitos mínimos son:

- ★ que D sea un operador autoadjunto sobre H ;
- ★ que D^2 o bien $1 + D^2$ tenga inverso compacto (lo cual implica que D tenga un espectro discreto de autovalores, no acotado); y
- ★ que cada $[D, \pi(x)]$, para x en una “subálgebra suave” de coordenadas, se extienda a un operador acotado sobre H .

Más allá de esos requisitos mínimos, podemos pedir que D se comporte bien en presencia de simetrías del álgebra de coordenadas.

Por ejemplo, si D es un operador adjunto sobre H que conmuta³⁶ con los operadores de Casimir $\lambda'(C_q)$ y $\rho'(C_q)$, entonces D debe preservar los autoespacios W_j^\uparrow y W_j^\downarrow de estos operadores de Casimir, véase las fórmulas (8.33). Como tal, D se descompone en una suma directa de matrices sobre estos espacios finitodimensionales.

Definición 8.25. Un operador autoadjunto D sobre H es \mathcal{U} -equivariante para las representaciones λ' y ρ' si $W \subset \text{Dom}(D)$ con $D(W) \subseteq W$ y si D conmuta con cada operador $\lambda'(h)$ y $\rho'(g)$, para $g, h \in \mathcal{U}$.

Si D es \mathcal{U} -equivariante en ese sentido, entonces D conmuta en particular con $\lambda'(C_q)$ y $\rho'(C_q)$, así que $D(W_j^\uparrow) \subseteq W_j^\uparrow$ y $D(W_j^\downarrow) \subseteq W_j^\downarrow$. Además, se verifica fácilmente que

$$\begin{aligned}\lambda'(k)|j, \mu, n, \uparrow\rangle &= q^\mu |j, \mu, n, \uparrow\rangle, & \rho'(k)|j, \mu, n, \uparrow\rangle &= q^n |j, \mu, n, \uparrow\rangle, \\ \lambda'(k)|j, \mu, n, \downarrow\rangle &= q^\mu |j, \mu, n, \downarrow\rangle, & \rho'(k)|j, \mu, n, \downarrow\rangle &= q^n |j, \mu, n, \downarrow\rangle,\end{aligned}$$

así que $\lambda'(k)$ y $\rho'(k)$ tiene matrices diagonales sobre estos subespacios, con autovalores distintos. La conmutación de D con $\lambda'(k)$ y $\rho'(k)$ implica que D tiene una *matriz escalar* sobre cada subespacio:

$$D|j, \mu, n, \uparrow\rangle = d_j^\uparrow |j, \mu, n, \uparrow\rangle, \quad D|j, \mu, n, \downarrow\rangle = d_j^\downarrow |j, \mu, n, \downarrow\rangle,$$

para ciertos autovalores d_j^\uparrow y d_j^\downarrow , cuyas multiplicidades son $(2j+1)(2j+2)$ y $2j(2j+1)$, respectivamente.

Ahora, hay que decidir cuáles serán estos autovalores. En vista del ejemplo de \mathcal{D} para $\mathbb{S}^3 = SU(2)$ —este es el caso límite $q = 1$, en cierto sentido— la opción más simple es el **operador isospectral** D determinado por

$$d_j^\uparrow := (2j + \frac{3}{2}), \quad d_j^\downarrow := -(2j + \frac{1}{2}). \quad (8.36)$$

En otras palabras, se decreta que D debe tener el mismo espectro que \mathcal{D} , con los mismas multiplicidades (véase el Teorema 5.6). Entonces el espectro de D es simétrico alrededor de 0, porque para los d_j^\downarrow el caso $j = 0$ está excluido:

$$\text{sp}(D) = \{\pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{7}{2}, \dots\}.$$

³⁶La conmutación de operadores no acotados es un asunto delicado, porque sus dominios sólo son subespacios densos. Dícese que dos operadores no acotados conmutan “fuertemente” si sus proyectores espectrales (que son operadores acotados) conmutan. La hipótesis actual es que D conmuta fuertemente con $\lambda'(C_q)$ y $\rho'(C_q)$. Para ver algunas patologías de la conmutación formal, consúltese la Sección 8.5 del libro de Reed y Simon, *op. cit.*

Fíjese que las propiedades del triple espectral $(\mathcal{O}(SU_q(2)), H, D)$ que dependen sólo del espectro de D son idénticas con las del triple espectral $(C^\infty(\mathbb{S}^3), H, \mathcal{D})$. En particular, la *dimensión espectral* de $SU_q(2)$ es

$$\dim SU_q(2) = 3.$$

Como hay un isomorfismo de espacios de Hilbert entre nuestro H y $L^2(\mathbb{S}^3) \oplus L^2(\mathbb{S}^3)$ de la Sección 5.4, definido por hacer corresponder sus bases ortonormales de autovalores de D y de \mathcal{D} , nuestro D se extiende a un operador autoadjunto sobre H tal que $\text{Dom}(D)$ corresponde con $\text{Dom}(\mathcal{D})$. Evidente, $\ker D = \{0\}$ y D^{-2} es compacto, porque $(2j + \frac{3}{2})^{-2} \rightarrow 0$ conforme $j \rightarrow \infty$.

Falta ver que cada $[D, \pi'(x)]$ es un operador acotado sobre H . Como la conmutación con D es lineal y cumple la regla de Leibniz:

$$[D, \pi'(xy)] = [D, \pi'(x)] \pi'(y) + \pi'(x) [D, \pi'(y)],$$

y además

$$[D, \pi'(x)]^* = -[D, \pi(x^*)],$$

basta verificar esta propiedad para $x = a, b$, que generan la $*$ -álgebra $\mathcal{O}(SU_q(2))$. Para el caso $x = a$, se obtiene

$$\begin{aligned} & [D, \pi'(a)] |j, \mu, n, \uparrow\rangle \\ &= \sum_{\pm} \alpha_{j\mu n \uparrow \uparrow}^{\pm} (d_{j\pm\frac{1}{2}}^{\uparrow} - d_j^{\uparrow}) |j^{\pm}, \mu^+, n^+, \uparrow\rangle + \alpha_{j\mu n \downarrow \uparrow}^+ (d_{j+\frac{1}{2}}^{\downarrow} - d_j^{\uparrow}) |j^+, \mu^+, n^+, \downarrow\rangle, \\ & [D, \pi'(a)] |j, \mu, n, \downarrow\rangle \\ &= \sum_{\pm} \alpha_{j\mu n \downarrow \downarrow}^{\pm} (d_{j\pm\frac{1}{2}}^{\downarrow} - d_j^{\downarrow}) |j^{\pm}, \mu^+, n^+, \downarrow\rangle + \alpha_{j\mu n \uparrow \downarrow}^- (d_{j-\frac{1}{2}}^{\uparrow} - d_j^{\downarrow}) |j^-, \mu^+, n^+, \uparrow\rangle, \end{aligned}$$

donde los coeficientes $\alpha_{j\mu n \uparrow \uparrow}^{\pm}$, etcétera, son las entradas de las matrices 2×2 triangulares $\alpha_{j\mu n}^{\pm}$. Las diferencias de autovalores son

$$\begin{aligned} d_{j+\frac{1}{2}}^{\uparrow} - d_j^{\uparrow} &= 1, & d_{j+\frac{1}{2}}^{\downarrow} - d_j^{\downarrow} &= -1, & d_{j-\frac{1}{2}}^{\uparrow} - d_j^{\uparrow} &= -1, & d_{j-\frac{1}{2}}^{\downarrow} - d_j^{\downarrow} &= 1, \\ d_{j+\frac{1}{2}}^{\downarrow} - d_j^{\uparrow} &= -(4j+3), & d_{j-\frac{1}{2}}^{\uparrow} - d_j^{\downarrow} &= 4j+1. \end{aligned}$$

Para el caso $x = b$, hay un resultado similar, con la matriz $\beta_{j\mu n}^{\pm}$ en el lugar de $\alpha_{j\mu n}^{\pm}$.

Todo depende, entonces, del crecimiento de las entradas de las matrices $\alpha_{j\mu n}^{\pm}$ y $\beta_{j\mu n}^{\pm}$ para j grande. Como $0 < q < 1$, se obtiene $[N] \sim (q^{-1})^{N-1}$ cuando $N \rightarrow \infty$. Un análisis caso por caso de los coeficientes que aparecen en (8.35) muestra que

los coeficientes “diagonales” $\alpha_{j\mu n\uparrow\uparrow}^\pm$, $\alpha_{j\mu n\downarrow\downarrow}^\pm$, $\beta_{j\mu n\uparrow\uparrow}^\pm$, $\beta_{j\mu n\downarrow\downarrow}^\pm$ son uniformemente acotados conforme $j \rightarrow \infty$, mientras las entradas “no diagonales” cumplen

$$\begin{aligned} \alpha_{j\mu n\downarrow\uparrow}^+ &= O(q^{2j+1}), & \beta_{j\mu n\downarrow\uparrow}^+ &= O(q^{2j+\frac{1}{2}}), \\ \alpha_{j\mu n\uparrow\downarrow}^- &= O(q^{2j}), & \beta_{j\mu n\uparrow\downarrow}^- &= O(q^{2j+\frac{1}{2}}), \end{aligned} \quad \text{conforme } j \rightarrow \infty.$$

Entonces los coeficientes no diagonales en $[D, \pi'(a)]$ y $[D, \pi'(b)]$ son todos del orden $O(jq^{2j})$ conforme $j \rightarrow \infty$. Como $0 < q < 1$, estos coeficientes decrecen con rapidez exponencial, y la norma de estos operadores está determinada por sus coeficientes diagonales. Esto es suficiente para mostrar que son operadores acotados.³⁷

► Esta construcción de un operador análogo al operador de Dirac, y su buena interacción con el álgebra de coordenadas $\mathcal{O}(SU_q(2))$, es muy delicada. El patrón de autovalores de D no tiene que ser isospectral al de \mathcal{D} para \mathbb{S}^3 , como en (8.36). Pero la supresión de los términos “no diagonales” en los conmutadores $[D, \pi'(x)]$ exige que las sucesiones (d_j^\uparrow) y (d_j^\downarrow) crezcan linealmente con j : es necesario que $d_j^\uparrow = c_1 j + c_2$, con un patrón similar para d_j^\downarrow . Aparte de modificaciones triviales (cambio de escala o adición de una constante), el caso isospectral es esencialmente una consecuencia de la condición de conmutadores acotados.

La lección principal del ejemplo de $SU_q(2)$ es que la estructura riemanniana y la conexión de espín, presentes en los casos conmutativos, esconden la naturaleza esencial de la geometría de las esferas. Hemos logrado montar una construcción totalmente algebraica para extraer el espectro de un “operador de Dirac” sin la ayuda de la geometría diferencial. Sus autovalores son determinados por: la simetría (el juego recíproco entre el álgebra de coordenadas \mathcal{A} y el álgebra de simetrías \mathcal{U}) que conduce a sus multiplicidades “correctas” de los autovalores; y la exigencia de conmutadores acotados, que gobierna su crecimiento.

Otro tema importante es la elección del espacio de Hilbert “correcto” en donde las coordenadas actúan como “operadores de multiplicación”. Este es el espacio H que porta la *representación de espín* del álgebra de coordenadas.

Otro requisito deseable del triple espectral (\mathcal{A}, H, D) es la *condición de primer orden* (6.14): cada $[D, \pi(x)]$ debe conmutar con los operadores *de multiplicación a la derecha* $\pi''(y) := J\pi'(y^*)J^{-1}$, donde J es un operador antiunitario especial. Resulta, sin embargo, que no es posible cumplir este requisito en forma exacta, si $q \neq 1$. Una versión aproximada de esta condición ha sido propuesto en el citado artículo de Dąbrowski *et al.*

³⁷Esta discusión de la acotación de los operadores es un tanto informal. Para más detalles, véase la Proposición 5.2 del artículo de Dąbrowski *et al, op. cit.*

9 Area y volumen en la geometría no conmutativa

Los alcances de la geometría no conmutativa son muchos y variados; hasta ahora sólo hemos atravesado el umbral. Tomando ventaja del camino recorrido hasta ahora, en esta sección se pone de manifiesto una última pieza de información geométrica que se puede extraer del espectro del operador de Dirac. Este es el cálculo del área o volumen total del espacio (conmutativo o no) subyacente al triple espectral.

Naturalmente, regresamos una vez más a las variedades compactas y de espín que tenemos a la mano: \mathbb{S}^1 , \mathbb{S}^2 , \mathbb{T}^2 , \mathbb{S}^3 y los espacios no conmutativos \mathbb{T}_θ^2 y $SU_q(2)$.

El volumen total de un espacio no conmutativo depende sólo del espectro del operador D . Sin embargo, detrás de él se esconde un concepto más amplio, que depende de la interacción de D con el álgebra de coordenadas. En la geometría diferencial ordinaria, el volumen total de una variedad riemanniana compacta (M, g) es la integral de una *forma de volumen*, la cual es una forma diferencial de orden maximal $v_g \in \mathcal{A}^n(M)$ que depende de la métrica.¹ Si $f \in C^\infty(M)$, entonces $f v_g$ es también una n -forma sobre M y como tal, posee una integral $\int_M f v_g$ que es un número (real o complejo) finito.²

En la geometría no conmutativa, hay que reemplazar tanto la forma de volumen v_g y la integral \int_M por otros conceptos que deben permitir una generalización del cálculo de la integral de una coordenada $f \mapsto \int_M f v_g$. (Nuestro objetivo limitado, en este capítulo, es calcular la integral de 1, el volumen total.)

Hay tres candidatos para reemplazar la integral \int_M . Uno de ellos es la traza de Dixmier Tr^+ de un operador, introducida en la Sección 7.3. Otro es el llamado *residuo zeta* de un operador. Si A es un operador positivo con espectro discreto, sin autovalor cero, este es el residuo³ en $s = 1$ de la función $\zeta_A(s) := \sum_{k \geq 0} \lambda_k(A)^s$. En

¹Más generalmente, una forma de volumen sobre una variedad n -dimensional M es una n -forma $\omega \in \mathcal{A}^n(M)$ que *no se anula*: como $\mathcal{A}^n(M) = \Gamma(M, \Lambda^n T^*M)$, esta condición significa que ω_x es un elemento no nulo del espacio vectorial real unidimensional $\Lambda^n T_x^*M$, para todo $x \in M$. Su existencia implica que M es *orientable*, condición necesaria para que M tenga una estructura de espín. Si M es orientable y posee una métrica riemanniana g , la fórmula local $v_g = \sqrt{\det[g_{ij}]} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ define globalmente una forma de volumen.

²Las formas de volumen v_g para las esferas \mathbb{S}^1 , \mathbb{S}^2 , \mathbb{S}^3 , con sus “métricas redondas” han sido mencionadas repetidamente. Para la “métrica plana” del toro \mathbb{T}^2 , tómesese $v_g := d\phi_1 \wedge d\phi_2$. Quizás la definición más elegante de una forma diferencial es la de la primera página del libro de Flanders: “las formas diferenciales son las cosas que viven debajo de signos integrales”. Véase: Harley Flanders, *Differential Forms* (Academic Press, New York, 1963).

³El **residuo** en $z = z_0$ de una función compleja f que admite una expansión convergente $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ es el coeficiente a_{-1} ; este es cero si f es holomorfo en un vecindario de z_0 , pero

muchos casos de interés, este residuo zeta coincide con la traza de Dixmier.⁴

El tercer candidato, que existe en los casos de triples espectrales conmutativos, es el llamado *residuo de Wodzicki* de un operador pseudodiferencial. El inverso T^{-1} de un operador diferencial T de primer orden sobre M se llama *pseudodiferencial*; más generalmente, un operador de la forma fT^{-k} con $f \in C^\infty(M)$ y $k \in \mathbb{N}$ se llama pseudodiferencial de orden $(-k)$. En particular, el operador $f|\mathcal{D}|^{-n}$ es un operador de esta clase, cuyo residuo de Wodzicki está dada por ⁵

$$\text{Wres}(f|\mathcal{D}|^{-n}) := 2^m \Omega_n \int_M f(x) \nu_g(x), \tag{9.1}$$

donde $n = 2m$ ó $2m + 1$, el coeficiente 2^m es el rango del fibrado espinorial, y el término Ω_n es el volumen total de la esfera \mathbb{S}^{n-1} :

$$\text{vol}(\mathbb{S}^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} = \begin{cases} \frac{2\pi^m}{(m-1)!} & \text{si } n = 2m, \\ \frac{2(2\pi)^m}{(2m-1)!!} & \text{si } n = 2m + 1. \end{cases} \tag{9.2}$$

[En particular, la *longitud* de la circunferencia del círculo \mathbb{S}^1 es $\Omega_2 = \text{vol}(\mathbb{S}^1) = 2\pi$; el *área superficial* de la esfera \mathbb{S}^2 es $\Omega_3 = \text{vol}(\mathbb{S}^2) = 4\pi$; el volumen de la esfera \mathbb{S}^3 es $\Omega_4 = \text{vol}(\mathbb{S}^3) = 2\pi^2$; además, para el caso $n = 1$, donde $\mathbb{S}^0 = \{1, -1\} \subset \mathbb{R}^1$, la fórmula da $\Omega_1 = \text{vol}(\mathbb{S}^0) = 2$.]

La noción de integral no conmutativa es una consecuencia del *Teorema de la traza* de Connes,⁶ el cual establece la fórmula siguiente, para una variedad riemanniana compacta n -dimensional M , con $n = 2m$ ó $n = 2m + 1$:

$$\text{Tr}^+(f|\mathcal{D}|^{-n}) = \frac{1}{n(2\pi)^n} \text{Wres}(f|\mathcal{D}|^{-n}) = \frac{2^m \Omega_n}{n(2\pi)^n} \int_M f(x) \nu_g(x). \tag{9.3}$$

$a_{-1} \neq 0$ si f posee un polo simple en z_0 .

⁴Si A es un operador positivo con espectro discreto sin 0, la coincidencia del residuo zeta con la traza de Dixmier es un asunto del comportamiento asintótico de una sucesión de números positivos. Para un argumento sencillo, debido a Ricardo Estrada, véase los lemas 7.19 y 7.20 de [E-NCG].

⁵Este residuo fue descubierto por Wodzicki, incorporando casos particulares notados por Adler y Guillemin, como un funcional sobre el llamado álgebra de símbolos clásicos asociados a operadores pseudodiferenciales clásicos sobre una variedad. Su resultado, nada trivial, es que este funcional es una *traza* sobre el álgebra de símbolos. El término Ω_n aparece en la fórmula (9.1) porque el residuo se calcula al integrar una cierta función sobre el *fibrado coesférico* \mathbb{S}^*M , cuya fibra típica es \mathbb{S}^{n-1} . Véase la Sección 7.3 de [E-NCG]. El artículo original es: Mariusz Wodzicki, “Local invariants of spectral asymmetry”, *Inventiones Mathematicae* **75** (1984), 143–178.

⁶Véase la Sección 7.5 de [E-NCG]. El resultado original se encuentra en: Alain Connes, “The action functional in noncommutative geometry”, *Communications in Mathematical Physics* **117** (1988), 673–683.

Definición 9.1. Sea (M, g) una variedad riemanniana compacta, con la forma de volumen v_g . El **volumen total** $\text{vol}(M) \equiv \text{vol}_g(M)$ es la integral de la función constante 1:

$$\text{vol}(M) := \int_M v_g(x).$$

El teorema de la traza proporciona una forma de calcular este volumen, cuando M posee una estructura de espín. En ese caso, el volumen es proporcional, por un factor que sólo depende de la dimensión, a la traza de Dixmier del operador $|\mathcal{D}|^{-n} = (\mathcal{D}^2)^{-n/2}$:

$$\text{vol}(M) = \frac{n(2\pi)^n}{2^m \Omega_n} \text{Tr}^+(|\mathcal{D}|^{-n}). \quad (9.4)$$

► Para el caso del círculo \mathbb{S}^1 , nos basamos en la subsección 7.3.1. Se omite el autovalor 0 del espectro de \mathcal{D} , así que $|\mathcal{D}|$ tiene espectro $\{1, 2, 3, \dots\}$ con multiplicidad 2 para cada autovalor k . En este caso, con $n = 1$ y $m = 0$, la fórmula (9.4) se reduce a

$$\text{vol}(\mathbb{S}^1) = \frac{2\pi}{2} \text{Tr}^+(|\mathcal{D}|^{-1}) = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n}{\log n} = 2\pi.$$

Obsérvese que se ha usado la fórmula “ $\text{vol}(\mathbb{S}^0) = 2$ ” en el cálculo de $\text{vol}(\mathbb{S}^1)$; pero la fórmula para Ω_2 no ha sido usado.

► Para la esfera \mathbb{S}^2 , nos referimos a la subsección 7.3.2. En este caso, \mathcal{D} no posee autovalor cero y \mathcal{D} es invertible. La fórmula (9.4), para $n = 2$ y $m = 1$, se reduce a

$$\text{vol}(\mathbb{S}^2) = \frac{2(2\pi)^2}{2\Omega_2} \text{Tr}^+|\mathcal{D}|^{-2} = 2\pi \text{Tr}^+(\mathcal{D}^2)^{-1}.$$

El operador \mathcal{D}^2 posee espectro $\text{sp}(\mathcal{D}^2) = \{k^2 : k \in \mathbb{N}, k \geq 1\}$, donde la multiplicidad de cada autovalor es $4k$. Su traza de Dixmier fue calculada en la subsección 7.3.2; se obtuvo

$$\text{Tr}^+(\mathcal{D}^2)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n((\mathcal{D}^2)^{-1})}{\log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N_n} \sum_{k=1}^n \frac{4k}{k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4H_n}{2 \log n} = 2,$$

donde $\log N_n \sim 2 \log n$ en este caso.

Por lo tanto, $\text{vol}(\mathbb{S}^2) = 2(2\pi) = 4\pi$, como era de esperar.

► Para la esfera \mathbb{S}^3 , el operador de Dirac tampoco posee autovalor cero. La fórmula (9.4), para $n = 3$ y $m = 1$, se reduce a

$$\text{vol}(\mathbb{S}^3) = \frac{3(2\pi)^3}{2\Omega_3} \text{Tr}^+|\mathcal{D}|^{-3} = 3\pi^2 \text{Tr}^+(\mathcal{D}^2)^{-3/2}.$$

En este caso el operador positivo \mathcal{D}^2 posee espectro $\{(k + \frac{3}{2})^2 : k \in \mathbb{N}\}$, con multiplicidades respectivas $2(k+1)(k+2)$.

Una vez más, al igual que en la subsección 7.3.3, la totalidad de autovalores de $|\mathcal{D}|$ en los primeras R cascarones es $N_R = \frac{2}{3}(R^3 + 6R^2 + 11R) + 2$, que satisface $\log N_R \sim 3 \log R$ conforme $R \rightarrow \infty$. Para calcular la traza de Dixmier basta usar una subsucesión de valores $n = N_R$ solamente, que satisface

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{N_R}((\mathcal{D}^2)^{-3/2})}{\log N_R} &= \frac{1}{3 \log R} \sum_{k=0}^R \frac{2(k+1)(k+2)}{(k + \frac{3}{2})^3} = \frac{2}{3 \log R} \sum_{k=0}^R \frac{(k + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}}{(k + \frac{3}{2})^3} \\ &\sim \frac{2}{3 \log R} \int_{3/2}^{R+3/2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4x^3} \right) dx \sim \frac{2 \log R}{3 \log R} = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\text{vol}(\mathbb{S}^3) = 3\pi^2 (2/3) = 2\pi^2.$$

El caso del grupo no conmutativo $SU_q(2)$ con su operador D , que es isospectral al \mathcal{D} de $SU(2) = \mathbb{S}^3$, puede incluirse en este círculo de ideas *al tomar la fórmula (9.4) como definición* (con D en lugar de \mathcal{D} , por supuesto). Fíjese que el entero n es la dimensión espectral, también obtenido del espectro de D . Entonces

$$\text{vol}(SU_q(2)) = \text{vol}(SU(2)) = 2\pi^2,$$

como una consecuencia trivial de la isospectralidad.

► Obsérvese que el cálculo de $\text{vol}(\mathbb{S}^2) = 4\pi$ requiere el valor de $\Omega_2 = \text{vol}(\mathbb{S}^1) = 2\pi$; y el cálculo de $\text{vol}(\mathbb{S}^3) = 2\pi^2$ requiere el valor de $\Omega_3 = \text{vol}(\mathbb{S}^2) = 4\pi$. De este modo, la familia de fórmulas (9.2) puede ser calculado por inducción, a partir de $\Omega_1 = 2$. Eso sí, hay que disponer de una fórmula general para el espectro de los operadores de Dirac para estas esferas.

De todos modos, las fórmulas para los Ω_n no contribuyen a la determinación de los espectros de \mathcal{D} para las esferas \mathbb{S}^n (con la métrica redonda y la estructura de espín canónica). Estos espectros han sido calculados para cada n . Los autovalores son⁷

$$\text{sp}(\mathcal{D}) = \{ \pm(k + \frac{n}{2}) : k \in \mathbb{N} \}, \quad \text{con multiplicidades} \quad 2^m \binom{k+n-1}{k}.$$

⁷Es cuestión de aprovechar la simetría de \mathbb{S}^n como un espacio cociente de un grupo de rotaciones, $\mathbb{S}^n \approx SO(n+1)/SO(n)$ y de obtener los autoespacios a partir del teorema de Peter y Weyl. El espectro de \mathcal{D} fue determinado por Sonia Sulanke en su tesis doctoral (Humboldt-Universität zu Berlin, 1979); consúltese, por ejemplo, la Sección 2.1 de: Nicolas Ginoux, *The Dirac Spectrum* (Springer, New York, 2009).

La suma de las multiplicidades de los autovalores en los primeros R “cascarones” de $\text{sp}(\mathcal{D}^2)$ es

$$N_R := \sum_{k=0}^R 2^{m+1} \binom{k+n-1}{k} = 2^{m+1} \binom{R+n}{R} = \frac{2^{m+1}}{n!} (R+n)(R+n-1)\dots(R+1),$$

y entonces $\log N_R \sim n \log R$. Por otro lado, se obtiene

$$\begin{aligned} \sigma_{N_R}(|\mathcal{D}|^{-n}) &= \sum_{k=0}^R 2^{m+1} \binom{k+n-1}{k} (k + \frac{n}{2})^{-n} = \sum_{k=0}^R 2^{m+1} \frac{(k+n-1)\dots(k+1)}{(n-1)!(k + \frac{n}{2})^n} \\ &\sim \frac{2^{m+1}}{(n-1)!} \sum_{k=0}^R \frac{(k + \frac{n}{2})^{n-1}}{(k + \frac{n}{2})^n} \sim \frac{2^{m+1}}{(n-1)!} \log R, \end{aligned}$$

así que $\text{Tr}^+ |\mathcal{D}|^{-n} = 2^{m+1}/n!$ como una generalización de los resultados vistos en la Sección 7.3 para $n = 1, 2, 3$. Ahora la fórmula de volumen (9.4) implica la siguiente receta recursiva para los volúmenes totales de las esferas:

$$\Omega_{n+1} = \frac{n(2\pi)^n}{2^m \Omega_n} \frac{2^{m+1}}{n!} = \frac{2(2\pi)^n}{(n-1)! \Omega_n}.$$

Las fórmulas (9.2) siguen, al tomar $\Omega_1 := 2$.

► Los últimos ejemplos que hay que investigar son los toros \mathbb{T}^2 y \mathbb{T}_θ^2 . Hemos empleado (ϕ_1, ϕ_2) para las coordenadas de \mathbb{T}^2 , lo cual implica considerar el toro \mathbb{T}^2 como el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, es decir, con el cuadrado $[0, 1]^2$ módulo identificaciones de sus segmentos de frontera. Entonces es de esperar que este toro \mathbb{T}^2 tenga área total 1, en vez de $4\pi^2$. (En otras palabras: la integral sobre \mathbb{T}^2 ha sido normalizada.)

El cálculo de la traza de Dixmier fue llevado a cabo en la Sección 7.4, para el toro no (necesariamente) conmutativo \mathbb{T}_θ^2 . Una vez más, el espectro de D no depende de θ : este es otro caso isospectral. De hecho, cuando $\theta = 0$, el operador D es el operador de Dirac \mathcal{D} para la métrica plana sobre \mathbb{T}^2 y la estructura de espín canónica. (Hay un par de autovalores nulos, que serán desechados.)

Basta recordar que $\text{sp}(D^2) = \{4\pi^2(r^2 + s^2) : r, s \in \mathbb{Z}\}$ con doble multiplicidad para cada par $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$. En el disco circular dado por $1 \leq r^2 + s^2 \leq R^2$, el número de autovalores es $N_R \sim \pi R^2$, de modo que $\log N_R \sim 2 \log R$. En la Sección 7.4 se mostró que

$$\text{Tr}^+ D^{-2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{N_R}(D^{-2})}{\log N_R} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2(2\pi)}{2 \log R} \int_1^R \frac{d\rho}{4\pi^2 \rho} = \frac{1}{2\pi}.$$

Ahora la fórmula/definición (9.4) implica que

$$\text{vol}(\mathbb{T}_\theta^2) = \text{vol}(\mathbb{T}^2) = \frac{2(2\pi)^2}{2(2\pi)} \text{Tr}^+ D^{-2} = 2\pi \frac{1}{2\pi} = 1,$$

como ya se había anticipado.

Postscriptum La fórmula (9.4) calcula el volumen total de una variedad riemanniana compacta M a partir de los datos del triple espectral $(C^\infty(M), L^2(M, S), \mathcal{D})$. La presencia de este triple espectral depende de la existencia de una estructura de espín sobre M , manifestado por un módulo espinorial \mathcal{S} , lo cual da lugar a un fibrado espinorial $S \rightarrow M$; al espacio de espinores $L^2(M, S)$; y por último, al operador de Dirac \mathcal{D} sobre este espacio de Hilbert. Ahora bien, hay variedades compactas que no admiten estructura de espín alguna;⁸ ¿cómo, entonces, calcular su volumen por el método espectral?

Cualquier variedad riemanniana posee un *operador de Laplace* o **laplaciano**, definido sobre el espacio de $L^2(M, \nu_g)$. Sobre funciones suaves, la expresión en coordenadas del laplaciano Δ es:⁹

$$\Delta f := -g^{ij}(\partial_i \partial_j - \Gamma_{ij}^k \partial_k)(f) \quad \text{para } f \in C^\infty(M).$$

Esta definición se extiende a un operador sobre módulos de secciones de un fibrado $E \rightarrow M$, al reemplazar cada ∂_j por un componente de una conexión, ∇_j^E . En particular, si M admite un fibrado espinorial $S \rightarrow M$, el **laplaciano espinorial** Δ^S se define por la fórmula local

$$\Delta^S \psi := -g^{ij}(\nabla_i^S \nabla_j^S - \Gamma_{ij}^k \nabla_k^S)(\psi) \quad \text{para } \psi \in \Gamma(M, S).$$

Cada ∇_j^S tiene la forma local $\partial_j + \omega_j$, donde la derivada parcial ∂_j se aplica a cada una de los 2^m componentes en una expresión local de ψ (el fibrado espinorial tiene rango 2^m) mientras ω_j tiene orden diferencial cero.

⁸La existencia de un módulo espinorial \mathcal{S} confiere sobre M una *estructura de espín*^c, un poco más general que una estructura de espín: esta estructura admite una familia de operadores de Dirac “torcidos”, para los cuales la fórmula (9.4) todavía es aplicable. Cada variedad de dimensión $n \leq 4$ tiene una estructura de espín^c. En dimensión 5, hay un contraejemplo, $M = SU(3)/SO(3)$, el cociente del grupo de Lie de matrices 3×3 unitarias de determinante 1 por su subgrupo de matrices ortogonales reales: su clase de Dixmier y Douady no se anula, $\delta(M) \neq 0$, así que no admite espinores.

⁹Para la métrica plana $g^{ij} = \delta^{ij}$, $\Gamma_{ij}^k = 0$, sobre un toro \mathbb{T}^n por ejemplo, esta fórmula se reduce a la expresión familiar $\Delta = -\sum_j \partial_j^2$ (el signo menos es una convención para que Δ sea un operador *positivo*). En coordenadas esféricas, se recupera la expresión conocida para el laplaciano sobre \mathbb{S}^2 .

Ahora bien, en el cálculo de trazas de Dixmier (o de residuos de Wodzicki, a los cuales estas trazas son proporcionales) de operadores diferenciales o de sus inversos, se puede descontar términos de orden diferencial inferior. Este argumento conduce a la siguiente fórmula:

$$\mathrm{Tr}^+(\Delta^S)^{-n/2} = 2^m \mathrm{Tr}^+(\Delta^{-n/2}).$$

Otra fórmula importante, descubierta por Schrödinger y luego redescubierta por Lichnerowicz, establece una relación entre el Laplaciano espinorial y el cuadrado del operador de Dirac.¹⁰ La **fórmula de Lichnerowicz** dice que

$$\not{D}^2 = \Delta^S + \frac{1}{4}s$$

donde $s \in C^\infty(M)$ es la *curvatura escalar* de (M, g) . Para las esferas, esta función es constante: $s(x) \equiv n(n-1)$ cuando $M = \mathbb{S}^n$ con la métrica redonda.¹¹ Al suprimir el término $\frac{1}{4}s$ (su orden diferencial es cero, mientras Δ^S es un operador diferencial de orden 2), arribamos a una fórmula alternativa para el volumen total:

$$\mathrm{vol}(M) = \frac{n(2\pi)^n}{\Omega_n} \mathrm{Tr}^+(\Delta^{-n/2}).$$

De hecho, esta fue la fórmula de volumen descubierta por Connes, en la versión original de su teorema de la traza.¹²

¹⁰Esta fórmula aparece en unas notas de lecciones de Schrödinger en 1932, cuando fue profesor en Berlín. Fue publicado en: André Lichnerowicz, “Spineurs harmoniques”, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris* **257A** (1963), 7–9. Para su demostración, véase, por ejemplo, el Teorema 9.16 de [E-NCG].

¹¹Geoméricamente, la curvatura escalar determina la proporción entre el volumen de una bola de radio dado y centro p en la variedad M , comparada con una bola del mismo radio en \mathbb{R}^n :

$$\frac{\mathrm{vol}(B_\varepsilon(p) \subset M)}{\mathrm{vol}(B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n)} = 1 - \frac{s}{6(n+2)}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4).$$

La curvatura escalar de \mathbb{S}^n es $n(n-1)$. En particular, \mathbb{S}^2 tiene curvatura constante 2 y \mathbb{S}^3 tiene curvatura constante 6. Esta caracterización de la curvatura escalar aparece en: Lee C. Loveridge, “Physical and geometric interpretations of the Riemann tensor, Ricci tensor, and scalar curvature”, preprint gr-qc/0401099, Los Angeles, 2004.

¹²Véase su artículo sobre “The action functional”, *op. cit.*

Índice General

Introducción	1
1 Espacios y álgebras de coordenadas	5
1.1 Las coordenadas de espacios finitos	6
Espacios topológicos compactos y de Hausdorff. Coordenadas sobre el espacio de dos puntos. Los espacios cocientes dan lugar a coordenadas no conmutativas. Algebras involutivas en dimensión finita.	
1.2 La correspondencia de Guelfand	14
Algebras de Banach y C^* -álgebras. Espacios de Hilbert. Caracteres e ideales maximales de una C^* -álgebra conmutativa. La transformación de Guelfand. Compactificación de espacios <i>versus</i> unitización de álgebras.	
1.3 La equivalencia entre espacios y álgebras	23
Definiciones de categoría y funtor. Los funtorers C y M . La transformación de Guelfand como una equivalencia de categorías.	
2 Fibrados vectoriales y módulos proyectivos	28
2.1 Variedades diferenciales	28
Definiciones de variedades diferenciales, cartas locales. Aplicaciones suaves, difeomorfismos. Partición de la unidad subordinada a un cubrimiento abierto.	
2.2 Fibrados vectoriales	33
Fibrados en general, trivialidad local, funciones de transición. Secciones globales y locales. Fibrados vectoriales y sus módulos de secciones.	
2.3 Módulos sobre anillos	38
Módulos derechos sobre un anillo. Bases y módulos libres. Suma directa de módulos. Módulos proyectivos.	
2.4 Operaciones con fibrados vectoriales	43
Suma de Whitney de dos fibrados vectoriales con la misma base. Morfismos de fibrados vectoriales, isomorfismos. Sucesiones exactas cortas de fibrados vectoriales, existencia de un fibrado vectorial suplementario. El módulo de secciones es finitamente generado y proyectivo.	

2.5	La correspondencia de Serre y Swan Módulos libres para fibrados vectoriales triviales. Módulos PGF como secciones de fibrados, el teorema de Serre y Swan.	50
2.6	Una equivalencia de categorías Equivalencia de categorías. El funtor Γ , su fidelidad y plenitud. La equivalencia categórica definida por Γ .	53
3	El círculo \mathbb{S}^1	57
3.1	Una compleción de $C(\mathbb{S}^1)$ Series, coeficientes y polinomios de Fourier. El espacio $L^2(\mathbb{S}^1)$ como una compleción del espacio $C(\mathbb{S}^1)$.	57
3.2	Operadores de multiplicación Operadores de multiplicación como operadores lineales acotados sobre $L^2(\mathbb{S}^1)$.	62
3.3	La fórmula de la longitud de arco El operador $D = -id/d\theta$, sus autovalores y autovectores. El conmutador con el operador de multiplicación z^k . La distancia como un supremo sobre coordenadas.	64
4	La geometría de la esfera \mathbb{S}^2	70
4.1	Fibrados de línea sobre la esfera Dos cartas locales para la esfera. Proyectores y las matrices de Pauli. Fibrados de línea y el fibrado espinorial.	70
4.2	La geometría métrica de la esfera Métricas riemannianas. La métrica redonda sobre \mathbb{S}^2 . Conexiones afines y símbolos de Christoffel. La conexión de Levi-Civita para la esfera, expresada mediante bases locales.	79
4.3	El operador de Dirac para la esfera \mathbb{S}^2 Las matrices gamma para \mathbb{S}^2 . Acciones de Clifford de 1-formas. La conexión de espín y el operador de Dirac \not{D} para \mathbb{S}^2 .	86
4.4	El espectro del operador de Dirac Los armónicos esféricos como base ortonormal para $L^2(\mathbb{S}^2)$. Los armónicos espinoriales como autovectores para el operador \not{D} . El espectro de \not{D} con sus multiplicidades.	95
5	La geometría de la esfera \mathbb{S}^3	103
5.1	La esfera \mathbb{S}^3 es un grupo	103

	Descripción de \mathbb{S}^3 y su identificación con $SU(2)$. Representaciones de $SU(2)$.	
5.2	La métrica y la conexión de Levi-Civita en \mathbb{S}^3 La métrica en \mathbb{S}^3 inducida por la métrica riemanniana en \mathbb{R}^4 , la conexión correspondiente y sus símbolos de Christoffel.	106
5.3	La conexión de espín en \mathbb{S}^3 El módulo espinorial sobre \mathbb{S}^3 y su conexión de espín.	109
5.4	El operador de Dirac en \mathbb{S}^3 El operador de Dirac en \mathbb{S}^3 y su espectro, con multiplicidades.	112
6	El toro no conmutativo	122
6.1	Las álgebras de coordenadas de toros no conmutativos Polinomios de Fourier multidimensionales. Relaciones de conmutación de Weyl. Toros no conmutativos en el caso racional.	122
6.2	El álgebra suave de un toro no conmutativo Polinomios de Fourier multidimensionales. Relaciones de conmutación de Weyl. Toros no conmutativos en el caso racional.	127
6.3	Un espacio de Hilbert para el toro no conmutativo La traza normalizada sobre el toro no conmutativo. Un espacio de Hilbert para el toro. La involución de Tomita.	129
6.4	Derivaciones y un operador de Dirac para \mathbb{T}_θ^2 Las derivaciones básicas del álgebra $C^\infty(\mathbb{T}_\theta^2)$. El espacio de Hilbert de “espinores”. Un operador de Dirac para el toro no conmutativo \mathbb{T}_θ^2 .	134
7	Distancia y dimensión	139
7.1	El operador de Dirac revisitado Contexto general del operador de Dirac.	139
7.2	Medición de distancias con el operador de Dirac Apareamientos hermíticos. El espacio de Hilbert de los espinores. Medición de distancias geodésicas sobre variedades con funciones de Lipschitz. Una fórmula para esta distancia a partir de un operador de Dirac.	142
7.3	Dimensión espectral El espectro del operador de Dirac sobre variedades compactas. La traza de Dixmier para operadores positivos. La dimensión a partir del crecimiento espectral del operador de Dirac.	146

7.3.1	La dimensión del círculo	149
7.3.2	La dimensión de la esfera \mathbb{S}^2	151
7.3.3	La dimensión de la esfera \mathbb{S}^3	152
7.4	Triples espectrales	153
	Definición de triple espectral. El ejemplo del toro no conmutativo.	
8	El grupo cuántico $SU_q(2)$	156
8.1	Algebras de coordenadas para grupos compactos	156
	Las biálgebras $C(G)$ y $\mathcal{O}(M_n(\mathbb{C}))$. Biálgebras y álgebras de Hopf. Generadores y relaciones para $\mathcal{O}(SU(2))$.	
8.2	Generadores y simetrías de $SU_q(2)$	163
	El álgebra de Hopf $\mathcal{O}(SU_q(2))$. El álgebra de Hopf dual $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$. Dualidad y acciones de Hopf.	
8.3	Un espacio de Hilbert para $SU_q(2)$	170
	El estado de Haar sobre $C(SU_q(2))$. La representación regular de $\mathcal{O}(SU_q(2))$. Representaciones irreducibles de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$. Representaciones equivariantes de $\mathcal{O}(SU_q(2))$.	
8.4	Espinores y el operador de Dirac para $SU_q(2)$	183
	El espacio espinorial para $SU_q(2)$. El elemento de Casimir C_q de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$. La representación de espín de $\mathcal{O}(SU_q(2))$. Un operador de Dirac para $SU_q(2)$.	
9	Area y volumen en la geometría no conmutativa	193
	Area y volumen en geometría no conmutativa. El teorema de la traza, de Connes. Cálculo de áreas y volúmenes de esferas y toros por el método espectral.	
