Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2002 **9**(2) : 1–6
cimpa – ucr – ccss issn: 1409-2433

sobre los números de hal y lah

Eduardo Piza Volio*

Recibido: 12 Feb 2002

Resumen

En este trabajo se estudian algunas propiedades relativas a los números de Hal (H_n^k) y de Lah (L_n^k), que son aquellos números que surgen en combinatoria asociados con los polinomios factoriales hacia arriba y hacia abajo.

Se establecen las fórmulas por recurrencia, las funciones generadoras y las fórmulas cerradas para esta familia de números, entre otras propiedades.

Palabras clave: Números de Hal, Números de Lah, combinatoria, funciones generadoras.

Abstract

In this article we study some properties concerning the Hal (H_n^k) and Lah numbers (L_n^k), which are those that arise in the theory of combinatorics in association with the 'upward and downward factorial polynomials' $[x]^n$ and $[x]_n$.

We establish the corresponding recurrence formulas, the generating functions and the closed formulas for this family of numbers, among others properties.

Keywords: Hal numbers, Lah numbers, combinatorics, generating functions.

Mathematics Subject Classification: 05A10, 05A15, 05A19.

1. Los números de Hal

Para cualquier número real x y cualquier natural n se define el *polinomio factorial hacia arriba*, $[x]^n$, mediante:

$$[x]^n := x\,(x+1)\cdots(x+n-1).$$

Asociado con estos polinomios tendremos a los *números de Hal*, (H_n^k), los cuales se definen como aquellos que satisfacen la relación

$$[-x]^n = H_n^1\,[x]^1 + H_n^2\,[x]^2 + \cdots + H_n^n\,[x]^n \tag{1}$$

*Centro de Investigación en Matemática Pura y Aplicada (CIMPA), Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica. E-Mail: epiza@cariari.ucr.ac.cr.

y ampliamos la extensión de sus índices estipulando que $H_n^k = 0$ cuando $k > n$, o cuando $k = 0$, o cuando $n = 0$. Obsérvese que al cambiar x por $-x$ en la relación (1), obtenemos la relación equivalente

$$[x]^n = H_n^1\,[-x]^1 + H_n^2\,[-x]^2 + \cdots + H_n^n\,[-x]^n. \tag{2}$$

Por lo tanto, de la Primera Fórmula de Inversión (ver apéndice), obtenemos inmediatamente que

$$\sum_{k=1}^{\infty} H_n^k\, H_k^m = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = m \\ 0, & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

Luego, la matriz cuadrada $H = (H_n^k)$, con $n, k \in \{1, \dots, N\}$ es inversa de sí misma, para todo $N \in \mathbb{N}^\star$. Además, de la misma Primera Fórmula de Inversión se obtiene que cada una de las ecuaciones

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} H_n^k\, b_k \qquad , \qquad b_n = \sum_{k=1}^{n} H_n^k\, a_k$$

implica a la otra. Veamos a continuación cómo obtener una fórmula por recurrencia y una fórmula cerrada para estos números H_n^k de Hal.

2. Recurrencia para los números de Hal

Teorema 1

$$H_{n+1}^k = (n+k)\, H_n^k - H_n^{k-1}. \tag{3}$$

Demostración: Sean $A(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \{(n+k)H_n^k - H_n^{k-1}\}\,[x]^k$ y $B(x) = \sum_{k=1}^{n+1} H_{n+1}^k\,[x]^k$. Probaremos que estos polinomios de grado $n+1$ son iguales, de modo que la recurrencia se obtiene al comparar sus coeficientes. En efecto, tenemos:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \{(n+k)H_n^k - H_n^{k-1}\}\,[x]^k \\ &= n\sum_{k=1}^{n+1} H_n^k\,[x]^k + \sum_{k=1}^{n+1} kH_n^k\,[x]^k - \sum_{k=1}^{n+1} H_n^{k-1}\,[x]^k \\ &= n\sum_{k=1}^{n} H_n^k\,[x]^k + \sum_{k=1}^{n} kH_n^k\,[x]^k - \sum_{k=1}^{n} H_n^k\,[x]^{k+1}. \end{aligned}$$

En virtud que $[x]^{k+1} = [x]^k\,(x+k)$, obtenemos

$$\begin{aligned} A(x) &= n\sum_{k=1}^{n} H_n^k\,[x]^k + \sum_{k=1}^{n} kH_n^k\,[x]^k - \sum_{k=1}^{n} H_n^k\,[x]^k\,(x+k) \\ &= (-x+n)\sum_{k=1}^{n} H_n^k\,[x]^k = (-x+n)\,[-x]^n \\ &= [-x]^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} H_{n+1}^k\,[x]^k \\ &= B(x). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

La recurrencia anterior permite el cálculo rápido de los números de Hal, cuyos primeros términos se ilustran en la siguiente tabla.

$n\backslash k$	1	2	3	4	5
1	-1				
2	-2	1			
3	-6	6	-1		
4	-24	36	-12	1	
5	-120	240	-120	20	-1

Obsérvese que las columnas pares contienen números positivos y las impares negativos, mientras que las filas contienen números que alternan de signo, empezando cada fila por $-n!$. Esto quedará formalizado más adelante, cuando hallemos la fórmula cerrada para H_n^k.

3. Función generadora de los números de Hal

Teorema 2 *Para cada $k \in \mathbb{N}$, la función generadora exponencial $H_k(t)$ de los números de Hal $(H_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ es*

$$H_k(t) := \sum_{n=0}^{\infty} H_n^k \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\frac{-t}{1-t}\right)^k. \tag{4}$$

Demostración: De la identidad

$$\begin{aligned}[-x]^n &= (-x)(-x+1)\cdots(-x+n-1) \\ &= (-1)^n\, x(x-1)\cdots(x-n+1) = (-1)^n \binom{x}{n}\end{aligned}$$

y del desarrollo binomial $(1+u)^\beta = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\beta}{k} u^k$, válido para $|u| < 1$, deducimos que:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}[-x]^n \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \binom{x}{n} t^n = (1-t)^x = \left(1+\frac{t}{1-t}\right)^{-x} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-x}{k}\left(\frac{t}{1-t}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{[x]^k}{k!}\left(\frac{t}{1-t}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{-t}{1-t}\right)^k [x]^k.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} H_k(t)\,[x]^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} H_n^k \frac{t^n}{n!}[x]^k = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty} H_n^k\,[x]^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}[-x]^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{-t}{1-t}\right)^k [x]^k.\end{aligned}$$

El intercambio de símbolos de sumatoria se justifica al observar que la suma sobre k es siempre finita, pues $H_n^k = 0$ para $k > n$. El resultado se obtiene entonces al comparar coeficientes. ■

4. Fórmula cerrada para los números de Hal

Teorema 3 *Para $n \geq k$:*

$$H_n^k = (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \frac{n!}{k!}. \tag{5}$$

Demostración: Realizamos el desarrollo de $(-t/((1-t))^k$, para obtener:

$$\begin{aligned} H_k(t) &= \frac{1}{k!} (-1)^k t^k (1-t)^{-k} \\ &= \frac{1}{k!} (-1)^k t^k \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-k}{i} (-1)^i t^i \\ &= \frac{1}{k!} (-1)^k \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{k+i-1}{i} (-1)^i t^{k+i} \\ &= \frac{1}{k!} (-1)^k \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n-1}{n-k} t^n \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} (-1)^k \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} \frac{t^n}{n!}, \end{aligned} \tag{6}$$

Comparando entonces coeficientes en las fórmulas (4) y (6) obtenemos el resultado. ∎

De esta fórmula cerrada para K_n^k se deduce inmediatamente, entre otras cosas, que los números $(-1)^k H_n^k$ son siempre positivos (para $k \in \{1, \ldots, n\}$): las filas de la tabla de los números de Hal tienen signos alternados, empezando por los factoriales negativos: $H_n^1 = -n!$.

5. Los números de Lah

Para cada número real x y cualquier natural n definimos el *polinomio factorial hacia abajo*, $[x]_n$ mediante

$$[x]_n := x(x-1)\cdots(x-n+1). \tag{7}$$

Los números de Lah se definen como los coeficientes L_n^k que satisfacen la identidad

$$[-x]_n = L_n^1\,[x]_1 + L_n^2\,[x]_2 + \cdots + L_n^n\,[x]_n. \tag{8}$$

De manera análoga a como se estableció con los números de Hal, los números de Lah forman matrices que son inversas de sí mismas:

$$\sum_{k=1}^{\infty} L_n^k\, L_k^m = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = m \\ 0, & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

La analogía entre los números de Lah y los de Hal queda establecida en el siguiente resultado.

Teorema 4 *Los números de Lah satisfacen la siguiente recurrencia y fórmula cerrada:*

$$L_{n+1}^k = -(n+k)\, L_n^k - L_n^{k-1} \tag{9}$$

$$L_n^k = (-1)^n \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} \tag{10}$$

Demostración: Primeramente establezcamos la relación existente entre los polinomios $[-x]_k$ y $[x]^k$:

$$\begin{aligned} [-x]_k &= (-x)(-x-1)\cdots(-x-k+1) \\ &= (-1)^k\, x(x+1)\cdots(x+k-1) \\ &= (-1)^k\, [x]^k, \end{aligned}$$

Intercambiando x por $-x$ en la relación anterior obtenemos entonces que $[x]_n = (-1)^n[-x]^n$. Aplicando estas identidades en la fórmula (2) obtenemos

$$(-1)^n\, [-x]_n = (-1)^1\, H_n^1\, [x]_1 + \cdots + (-1)^n\, H_n^n\, [x]_n,$$

de donde

$$[-x]_n = (-1)^{n+1}\, H_n^1\, [x]_1 + \cdots + (-1)^{n+n}\, H_n^n\, [x]_n.$$

La identidad (8) implica entonces que

$$L_n^k = (-1)^{n+k}\, H_n^k. \tag{11}$$

Luego, la recurrencia (9) y la fórmula cerrada (10) se obtienen inmediatamente de los teoremas 1 y 3 y esta última relación (11). ■

6. Apéndice: Primera Fórmula de Inversión

Teorema 5 *Sean $\varphi_n(x)$ y $\psi_n(x)$ familias de polinomios de grado n y sean α_n^k, β_n^k, con $0 \le k \le n$, cualquier colección de números reales. Suponga que se satisfacen las relaciones*

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_n^k\, \psi_k(x), \qquad (n = 0, 1, \ldots, n_0) \\ \psi_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \beta_n^k\, \varphi_k(x), \qquad (n = 0, 1, \ldots, n_0). \end{aligned}$$

Si a_0, a_1, $\ldots$, a_{n_0}, b_0, b_1, $\ldots$, b_{n_0} son números que satisfacen las relaciones $a_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_n^k\, b_k$, para $n = 0$, 1, $\ldots$, n_0, entonces $b_n = \sum_{k=0}^{n} \beta_n^k\, a_k$, para $n = 0$, 1, $\ldots$, n_0. Además,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n^k\, \beta_k^m = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & si\ n = m \\ 0 & si\ n \neq m. \end{cases}$$

Demostración: Puede consultarse en los textos de combinatoria citados en las referencias. ■

Referencias

[1] Berge, C. (1971) *Principles of Combinatorics.* Academic Press, New York.

[2] Piza, E. (2001) *Introducción a la Combinatoria.* Editorial de la Sociedad Matemática Mexicana, México D.F.

[3] Riordan, J. (1958) *An Introducction to Combinatorial Analysis.* John Wiley & Sons, New York.